# Александр Николаевич
# КОРКИН

*

*(1837 – 1908)*

*

# АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ КОРКИН

Александр Николаевич Коркин родился 19 февраля 1837 г. в деревне, находящейся в 6 верстах от большого села Шуйского, Тотемского уезда, Вологодской губернии. Отец Коркина был зажиточный крестьянин, занимавшийся также и торговлей. Коркину было три года, когда его семья переселилась в село Шуйское. Восьмилетним мальчиком он был отдан на воспитание учителю математики Вологодской гимназии Александру Ивановичу Иваницкому, выдающемуся преподавателю, бывшему в свое время учеником В. Я. Буняковского. Жена Иваницкого, образованная женщина, учила Коркина иностранным языкам, французскому и немецкому. Десяти лет Коркин был принят в Вологодскую гимназию. В 1849 г. умер отец Коркина, потеряв перед этим почти все свое состояние и оставив вдову и 12-летнего сына почти без всяких средств. Мать А. Н. Коркина прожила до 80 лет безвыездно в селе Шуйском и скончалась лишь в 1888 г. Александр Николаевич, уже будучи профессором Петербургского университета и известным ученым, ежегодно ездил на каникулы в Шуйское, пока была жива его мать. Железной дороги тогда не было, и приходилось более сотни верст ехать по реке Сухоне в простой лодке на веслах и на бичеве.

Уже в гимназии обнаружились блестящие способности Коркина. Он учил уроки на-ходу, по дороге из гимназии домой.

Кончив курс 16 лет с золотой медалью, он по молодости не смог поступить в университет, куда стремился, и поехал в Ярославль в Демидовский лицей. Однако он вскоре вернулся в Шуйское, где и прожил до поступления в 1854 г. в Петербургский университет на математический разряд физико-математического факультета. В то время профессорами там были В. Я. Буняковский, П. Л. Чебышев, И. И. Сомов, А. Н. Савич, Э. Х. Ленц. В 1856 г. Коркин представил факультету работу на заданную тему „О наибольших и наименьших величинах“ и получил за это сочинение золотую медаль. По рекомендации Буняковского, эта работа была напечатана в „Студенческом сборнике“ за 1857 г. В университетские годы средством к жизни Коркину служила стипендия в 7 рублей в месяц и частные уроки.

Окончив университет в 1858 г., Коркин поступил учителем математики в первый кадетский корпус. Выдержав в 1860 г. магистерский экзамен, он в том же году защитил диссертацию „Об определении произвольных функций в интегралах линейных уравнений с частными производными“. Тогда же, за выходом из университета В. Я. Буняковского, открылась вакансия по кафедре математики, был объявлен конкурс, и факультет пригласил А. Н. Коркина, поручив ему читать сферическую тригонометрию, аналитическую геометрию и интегрирование функций.

В 1862 г. университет был закрыт вследствие студенческих волнений. Коркин вместе с другими профессорами был причислен к Министерству народного просвещения с сохранением содержания и командирован на два года с научною целью за границу.

В Париже он слушал лекции Лиувилля, Ламе, Бертрана; он работал также в Берлине. Из всех немецких математиков Коркин выше всего ставил Куммера. В это время Коркин писал свою докторскую диссертацию, а также начал интересоваться вопросами теории чисел.

В 1868 г. Коркин защитил докторскую диссертацию „О совокупных уравнениях с частными производными первого порядка и о некоторых вопросах механики“. В том же году совет университета избрал его профессором по ка-

А. Н. КОРКИН

федре математики, в каковой должности он был утвержден министром народного просвещения.

С 1871 по 1877 г. продолжались совместные работы Коркина и Золотарева по теории квадратичных форм, доставившие им большую известность.

Коркин читал в Петербургском университете лекции почти 50 лет, с 1860 по 1908 г. — год своей смерти. За это время ему пришлось читать почти по всем математическим предметам: сферической тригонометрии, начертательной геометрии, аналитической геометрии, высшей алгебре, дифференциальному исчислению и его приложениям к геометрии, интегрированию функций, интегрированию уравнений, вариационному исчислению. Кроме того, он читал еще в течение 30 с лишком лет дифференциальное и интегральное исчисление в Николаевской морской академии; только в 1900 г. он передал свои лекции здесь любимому ученику — Алексею Николаевичу Крылову.

Коркин читал чрезвычайно просто и ясно. Каждый вывод пояснял примерами, подробно проделывая все выкладки. После каждой лекции диктовал примеры для упражнения дома. Записывать за Коркиным было очень легко. Позднее Коркин пришел к выводу, что лекции надо диктовать, что объяснялось его недоверием к умению слушателей грамотно записывать. Слушатели Коркина превосходно усваивали его курс и обычно отлично сдавали экзамен.

Черпая из своих обширных познаний по различным отделам математики, Коркин давал задачи, иногда очень трудные; их он предлагал лучшим из своих учеников. Если он замечал в студенте выдающиеся способности, он нередко сближался с ним и принимал большое участие в его работах. Для всех, кому нужно было посоветоваться, побеседовать о математике, всегда, почти до конца жизни Коркина, были открыты двери его дома в так называемые „коркинские субботы“.

Познания Коркина в классической литературе были глубоки и обширны. Творения Эйлера, Лагранжа, Гаусса, Лежандра, Лапласа, Монжа, Фурье, Пуассона, Абеля, Якоби, Дирихле были им изучены основательно и были известны ему в подробностях. К работам Вейерштрасса и Римана Коркин относился отрицательно, называя их „декадентством". Из современников он особенно высоко ставил Эрмита и мемуар его „Sur la fonction exponentielle", в котором дано доказательство трансцендентности числа *e*, считал классическим. Большими познаниями обладал Коркин также в аналитической механике, которую считал частью математики.

Коркин прекрасно знал французский язык и бо̀льшую часть своих работ написал по-французски. Хорошо знал он и немецкий язык. Латинским владел настолько хорошо, что свободно читал оды Горация. Коркин обладал прекрасной памятью. Он не верил, что можно забыть что-либо ранее изученное. „Верно худо и невнимательно читали, — говорил Коркин в таких случаях, — а то бы не забыли, это невозможно". Он также хорошо знал историю Греции и Рима и историю французской революции. В музыке Коркин был поклонником классического стиля.

Коркин был в высшей степени цельной и оригинальной личностью. Никакого значения тому, „что скажут", он не придавал; популярности нигде не искал; характер имел независимый, свои взгляды и мнения всегда высказывал прямо и определенно, однако менял их, когда получал неопровержимое доказательство их ошибочности. Например, он отнесся весьма отрицательно к магистерской диссертации Золотарева и дал о ней крайне резкий отзыв; впоследствии, однако, он стал лучшим другом своего молодого товарища. Известен и такой случай. Алексей Николаевич Крылов, бывший учеником Коркина, уже будучи профессором, хвалил Коркину методу Греффе для вычисления корней уравнения. Коркин же отзывался о ней, что она „никуда не годится". Когда же Крылов показал на численных примерах, предложенных ему самим Коркиным, преимущества этой методы, Коркин резко изменил свое мнение, и впоследствии защищал методу Греффе.

# МЕМУАРЫ КОРКИНА И ЗОЛОТАРЕВА О МИНИМУМАХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

## О ЧЕТВЕРНИЧНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМАХ

В 1872, 1873 и 1877 гг. появились совместные работы Коркина и Золотарева о минимумах положительных квадратичных форм. Коркин и Золотарев рассматривали все возможные положительные квадратичные формы

$$f = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \ldots + a_{nn} x_n^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_2 x_1 + \ldots$$
$$+ a_{n-1, n} x_{n-1} x_n + a_{n,n-1} x_n x_{n-1} = \sum a_{ik} x_i x_k$$

с данным определителем

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

и *любыми* вещественными коэффициентами $a_{ik} = a_{ki}$. Легко показать, что если подставлять вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ целые рациональные числа, отличные от системы 0, 0, ..., 0, то среди всех получаемых при этом значений формы $f$ будет иметься наименьшее. Это значение называется минимумом формы. Этот минимум вполне определен, если коэффициенты формы заданы; он есть, следовательно, функция этих коэффициентов, которые предполагаются такими, что форма $f$ положительна и дискриминант $D$ имеет заданную величину. Если непрерывно изменять коэффициенты $a_{ik}$, то и минимум будет тоже меняться непрерывно, причем для эквивалентных форм, т. е. преобразующихся друг в друга линейными подстановками с целыми рациональными коэффициентами и определителем $\pm 1$, он, конечно, будет иметь одну и ту же величину.

Этот минимум может при своем изменении иметь один или несколько максимумов, соответствующих неэквивалентным формам, число которых будет зависеть от $n$. Формы, для которых минимум достигает своего максимума, Коркин и Золотарев называют *предельными*.

До Коркина и Золотарева вопросом о пределе как функции от $n$, больше которого не может быть минимум положительной квадратичной формы с данным определителем $D$, занимался Эрмит. „Мои первые исследования,— говорит Эрмит,— для форм с $n$ переменными и определителем $D$ дали предел $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \sqrt[n]{D}$, я предполагаю, однако, хотя и не могу этого доказать, что численный коэффициент $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ должен быть заменен на $\frac{2}{\sqrt[n]{n+1}}$“.

Даже грубый предел $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ для минимума, выведенный Эрмитом, дал ему возможность сделать в ряде вопросов теории чисел важные приложения этого ограничения.

В первой изящной маленькой своей работе 1872 г. о четверничных положительных квадратичных формах („Sur les formes quadratiques positives quaternaires“) Коркин и Золотарев говорят: „Отыскание точных границ минимумов положительных квадратичных форм данного определения для целых значений переменных представляет большие трудности и составляет одну из важнейших задач в теории этих форм“. В этом небольшом мемуаре Коркин и Золотарев показывают, что минимум этот, в случае форм с четырьмя переменными, не превосходит предела $\sqrt[4]{4D}$, причем предел этот достигается для формы

$$\sqrt[4]{4D}\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4)$$

определителя $D$. Этот результат тем замечателен, что впервые был найден точный предел минимумов для положительных квадратичных форм с четырьмя переменными. Одновременно было показано, что тот предел

$$\frac{2}{\sqrt[n]{n+1}}\sqrt[n]{D},$$

который Эрмит предполагал верным для любого $n$, неверен уже для $n = 4$.

Работа эта столь короткая, что мы можем привести ее полностью, сделав только перевод ее на русский язык с французского, на котором она напечатана.

После уже приведенных выше вводных слов Коркин и Золотарев говорят:[1]

В этой заметке мы будем заниматься четверничными формами и как первый результат наших исследований мы выведем точную границу их минимума. Весьма замечательно, что она непосредственно следует из известной границы для тройничных форм.

Пусть

$$f = \sum_{i=1,\, k=1}^{i=4,\, k=4} a_{ik}\, x_i\, x_k$$

есть положительная четверничная форма определителя $D$.

Можно предполагать, что коэффициент $a_{11}$ является минимумом $f$, так как в противном случае можно найти форму, эквивалентную $f$, которая удовлетворяла бы этому условию.

Рассмотрим теперь форму

$$F(X_1, X_2, X_3, X_4),$$

[1] Начиная с этого места дан дословный перевод рассматриваемого мемуара.

которая получается из формы $f$ подстановкой

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + lX_2 + m\ X_3 + nX_4, \\ x_2 &= \quad\ \ l_1X_2 + m_1X_3 + n_1X_4, \\ x_3 &= \quad\ \ l_2X_2 + m_2X_3 + n_2X_4, \\ x_4 &= \quad\ \ l_3X_2 + m_3X_3 + n_3X_4, \end{aligned}$$

где $l, m, \ldots$ целые рациональные числа, удовлетворяющие лишь условию

$$\begin{vmatrix} l_1 m_1 n_1 \\ l_2 m_2 n_2 \\ l_3 m_3 n_3 \end{vmatrix} = \pm 1. \tag{1}$$

Общий для $f$ и $F$ минимум $a_{11}$ является в $F$ коэффициентом при $X_1$. Положим в $F$

$$X_4 = 0,$$

оставив остальные переменные произвольными, обозначим через $\Delta$ определитель тройничной формы

$$F(X_1, X_2, X_3, 0).$$

Легко заметить, что минимум этой формы есть также $a_{11}$ и, следовательно, в силу известных свойств минимумов тройничных форм мы будем иметь

$$a_{11} \leqslant \sqrt[3]{2\Delta}. \tag{2}$$

Пусть теперь $y_1, y_2, y_3, y_4$ — переменные формы

$$\varphi(y_1, y_2, y_3, y_4)$$

взаимной форме $f$, соответствующие $x_1, x_2, x_3, x_4$, т. е. пусть $\varphi(y_1, y_2, y_3, y_4)$ есть произведение $D \cdot f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, преобразованное подстановкой

$$y_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad y_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad y_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3}, \qquad y_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_4}.$$

Число $\Delta$ представляется[1] формой $\varphi$, если в ней сделать

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \\ y_2 &= m_2 l_3 - m_3 l_2, \\ y_3 &= m_3 l_1 - m_1 l_3, \\ y_4 &= m_1 l_2 - m_2 l_1, \end{aligned}$$

где величины $l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3$ удовлетворяют лишь условию (1), которому, очевидно, всегда можно удовлетворить соответственным выбором $n_1, n_2, n_3$, если только числа

$$\begin{aligned} &m_2 l_3 - m_3 l_2, \\ &m_3 l_1 - m_1 l_3, \\ &m_1 l_2 - m_2 l_1 \end{aligned}$$

не имеют общего делителя.

Выберем $l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3$ так, чтобы тройничная форма

$$\varphi(0, y_2, y_3, y_4)$$

принимала свое минимальное значение, если положить

$$\begin{aligned} y_2 &= m_2 l_3 - m_3 l_2, \\ y_3 &= m_3 l_1 - m_1 l_3, \\ y_4 &= m_1 l_2 - m_2 l_1. \end{aligned}$$

Это всегда возможно сделать в силу известной теоремы[2], и, так как числа $y_2, y_3, y_4$, которые дают минимум $\varphi$, не имеют общего делителя, единственное условие, наложенное на целые числа

$$l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3,$$

удовлетворяется.

Таким образом, минимумом формы

$$\varphi(0, y_2, y_3, y_4) \tag{3}$$

будет как раз величина $\Delta$, и поэтому, принимая во внимание, что определитель формы (3) есть $D^2 \cdot a_{11}$, получим

$$\Delta \leqslant \sqrt[3]{2 D^2 a_{11}}. \tag{4}$$

---

[1] Mathematische Werke von Jacobi, 2 Band; Hermite. Premiére lettre sur la théorie des nombres, p. 223.

[2] Гаусс, Disquisitiones arithmeticae, art. 279.

Неравенства (2) и (4) дают

$$a_{11} \leqslant \sqrt[4]{4D}.$$

Предел $\sqrt[4]{4D}$ точный, так как он есть минимум формы

$$\sqrt[4]{4D}\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4)$$

определителя $D$.

Мы получаем, следовательно, следующую теорему:

*Переменным любой квадратичной положительной четверничной формы можно всегда придать такие целые значения, чтобы значение формы не превосходило величину*

$$\sqrt[4]{4D},$$

*и существуют такие формы, минимумы которых равны*

$$\sqrt[4]{4D}.$$

## О КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМАХ

Перейдем теперь к подробному рассмотрению большого второго мемуара Коркина и Золотарева 1873 г. о квадратичных формах, озаглавленного „Sur les formes quadratiques".

Пояснив сначала, какие формы они называют предельными[1], они дают примеры разных предельных форм, а затем, сказав о предположении Эрмита, что $\frac{2}{\sqrt[n]{n+1}}\sqrt[n]{D}$ есть точная верхняя граница минимума, Коркин и Золотарев говорят: „В стремлении нашем проверить это предположение, нам удалось доказать, что величина $\frac{2}{\sqrt[n]{n+1}}\sqrt[n]{D}$ действительно минимум предельной формы, или, что то же самое, является точной границей для некоторой группы (эквива-

[1] Определение предельных форм см. в третьем мемуаре.

лентных) форм. Но из вышесказанного (т. е. из примеров, приведенных ими выше предельных форм) видно, что есть минимумы, которые эту величину превосходят, и, следовательно, она не относится ко всем формам с $n$ переменными определителя $D$. Точной границей для множества всех этих форм является наибольший минимум предельных форм, которые среди него содержатся".

Продолжая далее мемуар, Коркин и Золотарев делают отступление, касающееся неопределенных квадратичных форм. Они говорят: „Те пределы, которые мы выше рассматривали, полезны также и в теории неопределенных форм. Действительно, пусть $\Omega$ некоторая величина, не меньшая точной границы минимумов положительных форм с $n$ переменными определителя $D$; легко показать, что можно придать такие целые значения переменным неопределенной формы с $n$ переменными и определителем $\pm D$, что эта форма не будет превосходить $\Omega$. Пусть рассматриваемая форма имеет вид

$$f = \pm A_1 X_1^2 \pm A_2 X_2^2 \pm \ldots \pm A_n X_n^2,$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — положительные постоянные и $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — линейные однородные функции с вещественными коэффициентами. Рассмотрим положительную форму

$$\varphi = A_1 X_1^2 + A_2 X_2^2 + \ldots + A_n X_n^2,$$

определитель которой, очевидно, равен $D$, т. е. равен определителю $f$ по абсолютной величине. Если придать переменным значения, для которых $\varphi$ минимальна, то непосредственно получаем

$$f \leqslant \varphi \leqslant \Omega.$$

Для двойничных неопределенных форм с определителем — $D$ так получается предел $\sqrt{\frac{4}{5} D}$.

Однако,— продолжают дальше Коркин и Золотарев,— относительно этих пределов выясняется большая разница между неопределенными и определенными формами. Для того чтобы ее показать, что касается двойничных форм и предела $\sqrt{\frac{4}{5}D}$, мы прибавим, что если исключить форму $\sqrt{\frac{4}{5}D}\,(x^2+xy-y^2)$ и ей эквивалентные, то точная граница для других форм того же определителя есть $\sqrt{\frac{D}{2}}$".

В этом немногом, сказанном без доказательства о неопределенных формах, содержится корень замечательных исследований Маркова о двойничных неопределенных квадратичных формах, сделанных через 8 лет после этой работы Коркина и Золотарева, а также всех тех многочисленных исследований по разным неопределенным формам, квадратичным и неквадратичным, которые сейчас, через 70 лет после работы Маркова, так интересуют английских и американских математиков.

Продолжая мемуар, авторы ограничиваются изучением вопроса о минимумах уже только для положительных квадратичных форм. Прежде всего они вводят одно особое разложение формы на сумму квадратов. Оно состоит в следующем. Пусть $A$ минимум формы. Преобразуем ее к эквивалентной, у которой коэффициент при квадрате $x_1^2$ первой переменной равен $A$, что, как известно, всегда возможно сделать. Выделим теперь из формы квадрат, содержащий эту переменную $x_1$, останется форма, только содержащая остальные $n-1$ переменных. Пусть $A'$ ее минимум. Преобразуем ее к такой ей эквивалентной, у которой коэффициент при квадрате $x_2^2$ ее первой переменной равен $A'$. При этом не забудем и в первом выделенном квадрате соответственно преобразовать входящие в него $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Выделим, в свою очередь, из этой формы с $n-1$ переменными квадрат, содержащий $x_2$, и т. д.

Так заданная форма представится в виде суммы квадратов

$$\begin{gathered}A(x_1+\alpha x_2+\beta x_3+\ldots+\gamma x_n)^2+\\+A'(x_2+\delta x_3+\ldots+\zeta x_n)^2+\ldots+\\+A^{(n-2)}(x_{n-1}+\sigma x_n)^2+A^{(n-1)}x_n^2,\end{gathered}\tag{1}$$

где $A$ — минимум всей полученной формы, $A'$ — минимум той формы от $n-1$ переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$, которая из нее получается, если вычеркнуть первый составляющий ее квадрат; $A^{(2)}$ — минимум той формы от $n-2$ переменных, которая получается, если вычеркнуть и второй квадрат, и т. д. Это представление положительной квадратичной формы эквивалентной ей формой (1) Коркин и Золотарев называют разложением формы по ее последовательным минимумам. Таких разложений формы по ее минимумам может быть несколько различных, но для дальнейшего все равно, какое из них брать. Для сокращения будем называть $A$ первым коэффициентом разложения, $A'$ вторым и т. д. Очевидно, что если в разложении формы по ее минимумам вычеркнуть несколько первых ее квадратов или, наоборот, положить несколько последних ее переменных равными нулю, то получается опять форма, разложенная по своим минимумам.

Пусть

$$f=k(x+\lambda y)^2+ly^2$$

есть двойничная форма, разложенная по ее последователь ным минимумам $k$ и $l$. В таком случае число $k\lambda^2+l$, получающееся при $x=0$, $y=1$, не меньше, чем минимум $k$ формы $f$, т. е. мы имеем $k\lambda^2+l\geqslant k$, или $l\geqslant k(1-\lambda^2)$. Но $|\lambda|$ можно предполагать не большим, чем $\frac{1}{2}$, так как иначе можно сделать преобразование

$$x=X+tY, \qquad y=Y,$$

где $t$ — целое, которое дает

$$f=k(X+tY+\lambda Y)^2+lY^2,$$

и так подобрать $t$, чтобы $|t+\lambda|$ было не больше $\frac{1}{2}$. Таким образом, мы получаем $l \geqslant \frac{3}{4} k$, причем здесь может быть и знак равенства, что будет у разложенной по минимумам формы $(x+\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y = x^2+xy+y^2$.

При разложении двойничной формы по минимумам мы имеем, следовательно, $A' \geqslant \frac{3}{4} A$, причем знак равенства тут достигается для формы $x^2+xy+y^2$.

Учитывая указанные возможности „обреза́ть“ форму (1) как слева, так и справа, можно из нее получить двойничные формы

$$\begin{gathered} A(x_1+\alpha x_2)^2+A' x_2{}^2, \\ A'(x_2+\delta x_3)^2+A'' x_3{}^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A^{(n-1)}(x_{n-1}+\sigma x_n)^2+A^{(n-1)} x_n{}^2, \end{gathered}$$

приведенные по минимумам. По только что доказанному для них будет

$$\begin{gathered} A' \geqslant \frac{3}{4} A,\ A'' \geqslant \frac{3}{4} A' \geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^2 A, \dots, \\ A^{(n-1)} \geqslant \frac{3}{4} A^{(n-2)} \geqslant \dots \geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} A, \end{gathered}$$

откуда, если перемножить и принять во внимание, что $AA' \dots A^{n-1} = D$, т. е. дискриминанту формы (1), получается неравенство Эрмита

$$A \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{D}.$$

Подобно тому, как это выше было сделано для двойничных форм, можно подробно исследовать разложение по минимумам тройничной формы. Довольно кропотливое исследование дает Коркину и Золотареву следующий результат: если $A, A', A''$ — последовательные минимумы тройничной положительной квадратичной формы в ее разложениях по минимумам, то всегда имеют место неравенства $A' \geqslant \frac{3}{4} A$,

$A'' \geqslant \frac{2}{3} A$. Дальнейшее исследование показало, что в неравенстве $A'' \geqslant \frac{2}{3} A$ знак равенства имеет место лишь для двух классов форм, представляемых формами

$$\sqrt[3]{2D}\left[\left(x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right)^2+\frac{3}{4}\left(y+\frac{1}{3}z\right)^2+\frac{2}{3}z^2\right]=$$
$$=\sqrt[3]{2D}(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz),$$
$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{D}{2}}\left[\left(x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z\right)^2+\frac{8}{9}\left(y-\frac{1}{2}z\right)^2+\frac{2}{3}z^2\right]=$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{D}{2}}\left(x^2+y^2+z^2+\frac{2}{3}xy+\frac{2}{3}xz-\frac{2}{3}yz\right).$$

Теперь Коркин и Золотарев „обрезают“ форму (1) слева и справа так, чтобы получались тройничные формы с коэффициентами

$$\begin{gathered} A, A', A'', \\ A', A'', A''', \\ \cdots\cdots \\ A^{(n-3)}, A^{(n-2)}, A^{(n-1)}. \end{gathered}$$

Применяя к этим формам только что полученные неравенства, Коркин и Золотарев получают следующую цепь неравенств:

$$A' \geqslant \frac{3}{4} A, \qquad A'' \geqslant \frac{2}{3} A, \qquad A''' \geqslant \frac{2}{3} A' \geqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} A,$$
$$A^{IV} \geqslant \frac{2}{3} A'' \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^2 A,$$

откуда получается

$$\begin{aligned} A^{(2i-1)} &\geqslant \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} A, \\ A^{(2i)} &\geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{i} A. \end{aligned} \tag{2}$$

Если опять учесть, что $AA'A''\ldots A^{(n-1)}=D$, то получается, что для $n$ четного, равного $2m$,

$$\left.\begin{aligned}&A\leqslant\frac{3^{\frac{m-2}{2}}}{2^{\frac{m-3}{2}}}\sqrt[n]{D},\\ &\text{а для } n \text{ нечетного, равного } 2m+1,\\ &A\leqslant\sqrt[n]{\frac{3^{m(m-1)}}{2^{m(m-2)}}}\sqrt[n]{D}\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Или, иначе, что

$$A'\geqslant\frac{3}{4}A,\qquad A''\geqslant\frac{2}{3}A,\qquad A'''\geqslant\frac{1}{2}A,\qquad A^{\mathrm{IV}}\geqslant\frac{4}{9}A.$$

При этом оказывается, что в неравенстве $A'''\geqslant\frac{1}{2}A$, достигается знак равенства лишь для одного класса форм, представляемого формой

$$\sqrt[4]{4D}\left[\left(x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}t\right)^2+\frac{3}{4}\left(y+\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}t\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3}\left(z-\frac{1}{2}t\right)^2+\frac{1}{2}t^2\right]=$$
$$=\sqrt[4]{4D}(x^2+y^2+z^2+t^2+xy+xz+xt+yz+yt).$$

Подробное дальнейшее исследование дает Коркину и Золотареву тот результат, что ни для какой формы пятый коэффициент ее разложения по минимумам не равен точно $\frac{4}{9}$ первого, т. е. что в неравенстве

$$A^{\mathrm{IV}}\geqslant\frac{4}{9}A$$

знак равенства не достигается ни для одной формы. Отсюда следует, что границы для минимума $A$ формы, даваемые неравенствами (3), точные только для $n=2, 3, 4$, а начиная с $n=5$, уже неточные.

## О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМАХ

Третий обширный мемуар Коркина и Золотарева о квадратичных формах 1876 г. озаглавлен: „Sur les formes quadratiques positives“. В начале его авторы говорят: „В наших исследованиях о квадратичных формах мы встретили и определили формы, которые мы называем предельными. Вопрос об определении точного предела минимумов квадратичных форм сводится к разысканию предельной формы с наибольшим минимумом. Но легко видеть, что и другие фундаментальные вопросы теории квадратичных форм также зависят от исследования таких форм.

В связи с этим и для того, чтобы дополнить исследования, нами уже опубликованные, мы предполагаем дать в этом мемуаре некоторые основные свойства этих форм, а также все предельные формы двойничные, тройничные, четверничные и с пятью переменными.

Наш мемуар разделен на две главы: в первой мы рассматривали главным образом формы с любым числом переменных. Вторая посвящена формам с пятью переменными“.

Коркин и Золотарев сначала напоминают, что *предельной* формой они называют положительную квадратичную форму, минимум которой уменьшается при всех бесконечно малых приращениях ее коэффициентов таких, что определитель формы не меняется, что все формы, эквивалентные предельной, конечно, тоже предельные, и что поэтому они будут рассматривать весь класс эквивалентных форм как одну форму. Далее они замечают, что хотя само определение предельных форм выражает то характеристическое свойство, которое вполне их определяет, однако разыскание таких форм для данного числа переменных представляет большие трудности. Это разыскание связано с подробным изучением свойств тех целых значений переменных, при которых форма приобретает свое минимальное значение. „Однако, каковы бы ни были трудности исследования, вопрос о предельных формах — первый, который можно себе поставить в теории квадратичных форм“— говорят авторы.

Когда форма уже задана, легко узнать, предельная ли она.

Авторы изучают в рассматриваемом мемуаре только три формы

$$U_n = 2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}\,(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n)$$

(входят все произведения $x_i x_k$),

$$V_n = \sqrt[n]{2^{n-2} D}\,(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + \ldots + x_{n-1} x_n)$$

(входят все произведения, кроме $x_1 x_2$),

$$Z = \sqrt[5]{\frac{2^9}{3^4} D}\,\Big(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - \frac{1}{2} x_1 x_2 - \frac{1}{2} x_1 x_3 - \frac{1}{2} x_1 x_4 - \frac{1}{2} x_1 x_5 + \frac{1}{2} x_2 x_3 + \frac{1}{2} x_2 x_4 - x_2 x_5 + \frac{1}{2} x_3 x_4 - x_3 x_5 - x_4 x_5\Big).$$

Система значений переменных, при которой форма приобретает минимальное значение, называется представлением минимума. Два представления, из которых одно получается из другого умножением всех его значений на — 1, не считаются различными. Представления минимума для формы $U_n$ дают: 1) системы значений переменных, в которых все переменные равны нулю и только одна $x_i = 1$; 2) системы, в которых все значения равны нулю и только два из них не равны нулю, а равны: одно $x_i = 1$, а другое $x_k = -1$. Так получается $\frac{n(n+1)}{2}$ представлений.

Рассмотрим форму $f$, которая получается, если всем коэффициентам $U_n$ дать бесконечно малые приращения $\alpha_{11}$, $\alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}$, $\alpha_{12}$, $\alpha_{13}, \ldots, \alpha_{n-1,n}$. Если приравнять определитель $f$ к определителю $U_n$, то получится после некоторых преобразований

$$n(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\ldots+\alpha_{nn})-(\alpha_{12}+\alpha_{13}+\ldots+\alpha_{n-1,n})+\Omega=0, \quad (1)$$

где $\Omega$ — сумма членов высших порядков по отношению к приращениям.

Пусть форма $f$ для $x_i=-1$ и всех остальных переменных, равных нулю, равна

$$2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}(1+\omega_{ii}),$$

тогда $\omega_{ii}=\alpha_{ii}$.

Пусть форма $f$, для $x_i=1$, $x_k=-1$ и всех остальных переменных, равных нулю, равна

$$2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}(1+\omega_{ik});$$

тогда $\omega_{ik}=\omega_{ki}=\alpha_{ii}+\alpha_{kk}-\alpha_{ik}$. Обозначая через $\Sigma\omega$ сумму всех этих $\omega_{ii}$ и $\omega_{ik}$, получим

$$\sum\omega=n(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\ldots+\alpha_{nn})-(\alpha_{12}+\alpha_{13}+\ldots+\alpha_{n-1,n}), \quad (2)$$

т. е. равенство (1) на основании (2) можно записать так

$$\sum\omega+\Omega=0. \quad (3)$$

Так как $\Omega$ высшего порядка малости, то среди $\omega$ должны быть как положительные, так и отрицательные (все $\omega$ не могут быть равны нулю, так как тогда были бы и все $\alpha$ равны нулю, чего мы, конечно, не предполагаем). Но если какое-либо $\omega$ отрицательно, то при соответственном представлении минимума форма

$$f=2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}\,(1+\omega)$$

меньше, чем $2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}$, а следовательно ее минимум и подавно меньше этой величины. Форма $U_n$, следовательно, предельная.

Совершенно аналогично устанавливается предельность форм $V_n$ и $Z$. Установив предельность форм $U_n$, $V_n$, $Z$, авторы переходят к доказательству одной важной теоремы:

Теорема. *Число представлений минимума предельной формы не меньше, чем* $\frac{n(n+1)}{2}$, *и эти представления минимума вполне определяют коэффициенты формы.*

Теорема эта доказывается так.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$; $q_1, q_2, \ldots, q_n$; ... все представления минимума $M$, т. е.

$$\sum p_i p_k a_{ik} = M, \qquad \sum q_i q_k a_{ik} = M, \ldots \tag{4}$$

Предположение, что совокупность представлений минимума не определяет форму, означает то, что система (4) имеет бесконечно много решений в $a_{ik}$. Тогда следует, что уравнения

$$\sum p_i p_k \lambda_{ik} = 0, \qquad \sum q_i q_k \lambda_{ik} = 0, \ldots$$

могут быть удовлетворены значениями $\lambda_{ik}$, которые не все одновременно равны нулю. Пусть $\lambda_{ik}$ такая система значений. Рассмотрим форму $f + \varepsilon \cdot \varphi$, где $\varepsilon$ — величина, стремящаяся к нулю, а $\varphi$ — форма

$$\sum \lambda_{ik} x_i x_k.$$

Форма $f + \varepsilon \cdot \varphi$ достигает минимума для тех же значений переменных, которые дают представления минимума формы $f$. А так как для этих значений форма $\varphi$ равна нулю, то минимум этот тоже будет $M$. Покажем теперь, что определитель формы $f + \varepsilon \cdot \varphi$ для соответственно взятых значений $\varepsilon$ будет меньше $D$. Обозначив его через $D'$, мы получим:

$$D' = D + \varepsilon\left(\frac{\partial D}{\partial a_{11}}\lambda_{11} + \frac{\partial D}{\partial a_{22}}\lambda_{22} + \ldots + \frac{\partial D}{\partial a_{nn}}\lambda_{nn} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial D}{\partial a_{12}}\lambda_{12} + \frac{\partial D}{\partial a_{13}}\lambda_{13} + \ldots + \frac{\partial D}{\partial a_{n-1,n}}\lambda_{n-1,n}\right) + \Omega,$$

где $\Omega$—сумма членов выше первого порядка относительно $\varepsilon$. Если выражение $P$ в скобках не равно нулю, то, выбирая знак $\varepsilon$, мы достигнем того, что $D' < D$. Если же это выражение равно нулю, то, полагая $\Omega = K\frac{\varepsilon^2}{2} + \Omega_1$, где $\Omega_1$ — сумма членов выше второго порядка относительно $\varepsilon$, составим выражение

$$P^2 - DK,$$

которое есть совокупный инвариант форм $f$ и $\varphi$. Перейдем от переменных $x_i$ к переменным $z_i$ линейной подстановкой такой, чтобы $f$ привелась к сумме квадратов и пусть будет

$$\varphi = \sum \mu_{ik} z_i z_k;$$

тогда мы будем иметь

$$P^2 - DK = D^2\left[\left(\frac{\mu_{11}}{\alpha_{11}}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{22}}{\alpha_{22}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\mu_{nn}}{\alpha_{nn}}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\mu_{12}^2}{\alpha_{11}\alpha_{22}} + \ldots + 2\frac{\mu_{n-1,n}^2}{\alpha_{n-1,n-1}\alpha_{nn}}\right],$$

откуда видно, что $P^2 - DK > 0$, так как все $\alpha_{ii} > 0$. В случае $P = 0$ получается, следовательно, что $K < 0$. Но в этом случае

$$D' = D + K\frac{\varepsilon^2}{2} + \Omega_1,$$

и, следовательно, тоже $D' < D$. Если $D' = D(1 - \eta)$, где $\eta > 0$, то форма

$$\frac{f + \varepsilon\varphi}{\sqrt[n]{1-\eta}},$$

коэффициенты которой сколь угодно мало отличаются от коэффициентов $f$, будет иметь определитель $D$ и минимум $\frac{M}{\sqrt[n]{1-\eta}} > M$, т. е. $f$ не будет предельной.

Мы видим, таким образом, что

1°. Всякая предельная форма имеет по крайней мере $\frac{n(n+1)}{2}$ представлений своего минимума, которые вполне определяют эту форму, если задан минимум.

2°. Отношение предельной формы к своему минимуму есть форма с рациональными коэффициентами, так как эти коэффициенты в этом случае определяются из системы линейных уравнений (4) с рациональными коэффициентами.

3°. Определение точного значения границы минимума сводится к разысканию предельной формы с наибольшим минимумом.

Дальше Коркин и Золотарев предпринимают подробное исследование таблицы представлений минимума. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$; $q_1, q_2, \ldots, q_n$; ... — представления минимума. Прежде всего Коркин и Золотарев изучают определители $n$-го порядка, которые можно составить из этих представлений

$$\begin{vmatrix} p_1 \, p_2 \ldots p_n \\ q_1 \, q_2 \ldots q_n \\ \ldots \ldots \\ r_1 \, r_2 \ldots r_n \end{vmatrix},$$

которые они называют характеристическими и изучение которых представляет собой существенную часть их метода получения предельных форм.

Об этих определителях доказываются две общие теоремы.

I. *Для всякой предельной формы существуют характеристические определители, отличные от нуля.*

II. *Для любой положительной квадратичной формы с n переменными, число представлений минимума кото-*

*рой не меньше $n$, абсолютная величина характеристических определителей не превосходит некоторой границы, которая зависит только от числа $n$ переменных формы.*

Первая теорема доказывается у Коркина и Золотарева так. Пусть

$$\begin{array}{l} p_1\, p_2 \ldots p_n \\ q_1\, q_2 \ldots q_n \\ \ldots\ldots \end{array}$$

таблица всех представлений минимума, и все характеристические определители ее равны нулю; в таком случае есть такие числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, не равные нулю одновременно, для которых

$$\begin{array}{l} p_1\xi_1+p_2\xi_2+\ldots+p_n\xi_n=0, \\ q_1\xi_1+q_2\xi_2+\ldots+q_n\xi_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Составим форму $f'=f-\varepsilon(\xi_1x_1+\xi_2x_2+\ldots+\xi_nx_n)^2$, где $\varepsilon$ положительно. Если $\varepsilon$ достаточно мало, то, очевидно, представления минимума $f'$ могут быть только среди представлений минимума $f$; но так как при всех этих представлениях

$$\xi_1x_1+\xi_2x_2+\ldots+\xi_nx_n=0,$$

то это они все, и сам минимум тот же самый. Но определитель формы $f'$ равен, как легко видеть,

$$D-\varepsilon F(\xi_1\xi_2\ldots\xi_n),$$

где $F$ — положительная форма, а именно взаимная к $f$, т. е. он меньше $D$, откуда, как и раньше, выйдет, что форма $f$ не может быть предельной.

Доказательство второй теоремы следующее. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$; $q_1, q_2, \ldots, q_n$; $r_1, r_2, \ldots, r_n$ $n$ представлений минимума $M$ формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $\Delta$ — их определитель. Сделаем подстановку

$$\begin{array}{l} x_1=p_1z_1+q_1z_2+\ldots+r_1z_n, \\ x_2=p_2z_1+q_2z_2+\ldots+r_2z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=p_nz_1+q_nz_2+\ldots+r_nz_n \end{array}$$

и пусть $\varphi=\sum a_{ik}z_iz_k$ преобразованная форма. Тогда $a_{11}=a_{22}=\ldots=a_{nn}=M$. Разложим $\varphi$ на квадраты по Якоби

$$\varphi=\alpha_{11}(z_1+\ldots)^2+K(z_2+\ldots)^2+L(z_3+\ldots)^2+\ldots+Nz_n^2,$$

где

$$K=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}{a_{11}},\quad L=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},\ldots,N=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n}\\ \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\ldots a_{1,n-1}\\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2,n-1}\\ \ldots & \ldots\\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2}\ldots a_{n-1,n-1}\end{vmatrix}}$$

Мы имеем $a_{11}\cdot K\cdot L\cdots N=D\cdot\Delta^2$. Кроме того, как легко показать [1]

$$K\leqslant a_{22},\quad L\leqslant a_{33},\ldots,N\leqslant a_{nn},$$

т. е. $M^n\geqslant D\Delta^2$. Но, с другой стороны, по основной теореме о границе минимума имеем $M<\sqrt[n]{\mu D}$, где $\mu$ зависит только от $n$, откуда $|\Delta|\leqslant\sqrt{\mu}$.

Если взять $\mu$, даваемое неравенством Эрмита, то из этих теорем получаются такие следствия. Так как для двойничных форм $\mu=\frac{4}{3}$, для них все $|\Delta|=1$. Для тройничных форм $\mu=\left(\frac{4}{3}\right)^3$, и, следовательно, $|\Delta|$ есть одно из чисел 0,1. Для четверничных форм $\mu=\left(\frac{4}{3}\right)^6$, т. е. $|\Delta|$ — одно из чисел 0, 1, 2. Для формы с пятью переменными во втором мемуаре о квадратичных формах было получено, что можно взять $\mu=9$, откуда $|\Delta|\leqslant 3$, но $|\Delta|=3$ быть не может, так как в этом случае было бы $M=\sqrt[5]{9D}$, что невозможно в силу конечного результата этого мемуара. Таким образом, и для форм с пятью переменными $|\Delta|$ есть также одно из чисел 0, 1, 2.

[1] См., например, Успехи математических наук, т. III, стр. 27.

Для разыскания всех предельных форм с 2, 3, 4 и 5-ю переменными достаточно, следовательно, найти таблицы представлений минимума, у которых все характеристические определители по абсолютной величине равны 0 или 1, и такие, у которых они по абсолютной величине равны 0, 1, 2.

Подробное исследование показывает, что, оказывается, имеет место такая общая теорема: если число строк матрицы с $n$ колоннами, элементы которой — целые числа, больше или равно $\frac{n(n+1)}{2}$, все строки различны, все определители $n$-го порядка, составленные из этой матрицы, по абсолютной величине не превосходят 1 и есть равные 1, то число строк ее равно $\frac{n(n+1)}{2}$, и матрица эта может быть преобразована к эквивалентной, которая имеет вид

$$\begin{array}{l} 1\,0\,0\,.\,.\,.\,.\,.\,0 \\ 0\,1\,0\,.\,.\,.\,.\,.\,0 \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ 1\;-1\,0\,.\,.\,.\,0 \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ 0\,0\,0\quad 1\,-1 \end{array}$$

(т. е. к той, которая дает все представления минимума формы $U_n$). Мы не будем здесь воспроизводить этого, хотя и элементарного, но сложного (12 страниц) доказательства.

Из этого результата следует, что предельная форма, все характеристические определители $\Delta$ которой по абсолютной величине не больше 1, есть $U_n$.

Соединяя это с вышесказанным, мы видим, что для двух и трех переменных существует лишь по одной предельной форме, а именно:

для двух переменных

$$\sqrt{\frac{4}{3}}D(x_1^2+x_2^2+x_1x_2),$$

для трех переменных

$$\sqrt[3]{2D}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3).$$

Во второй главе своего мемуара Коркин и Золотарев находят все определенные формы с четырьмя и пятью переменными. Одна предельная форма известна как для четырех, так и для пяти переменных, это форма $U_n$. В силу предыдущего, это единственная предельная форма, все характеристические определители которой по абсолютной величине не больше 1. Но так как, как было показано, характеристические определители предельных форм с четырьмя и пятью переменными по абсолютной величине могут равняться и 2, то надо еще искать такие матрицы представлений минимума, все характеристические определители которых равны 0, $\pm 1$ или $\pm 2$ и у которых есть характеристические определители, равные $\pm 2$.

Прежде всего Коркин и Золотарев показывают, что не может быть, чтобы все характеристические определители предельной формы с пятью или четырьмя переменными равнялись 0 или $\pm 2$. Действительно, пусть, в случае пяти переменных,

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \end{vmatrix}$$

такой определитель равный, $\pm 2$. Сделаем подстановку

$$\begin{aligned} x_1&=p_1z_1+q_1z_2+\ldots+r_1z_5,\\ x_2&=p_2z_1+q_2z_2+\ldots+r_2z_5,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_5&=p_5z_1+q_5z_2+\ldots+r_5z_5 \end{aligned}$$

и пусть $\varphi(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ — преобразованная форма. Так как все характеристические определители заданной формы $f$ равны 0 или $\pm 2$, то, как это видно из формул Крамера, всякой строчке $x_1=s_1$, $x_2=s_2$, ..., $x_5=s_5$ матрицы представлений минимума формой $f$ соответствуют целые $z_1, z_2, \ldots, z_5$. Кроме того, так как $\varphi$, так же как и $f$, — предельная форма, то все ее характеристические определители равны 0 или $\pm 1$, т. е. $\varphi$ есть форма $U_n$ и минимум $\varphi$ равен $M$. Если $D$ — определитель $f$, то определитель $\varphi$ равен $4D$, откуда минимум $\varphi$ равен величине $\sqrt[5]{\frac{64}{3}D}$, которая больше $\sqrt[5]{9D}$. Но это невозможно, потому что, как было показано в конце второго мемуара, $M<\sqrt[5]{9D}$.

Далее доказывается теорема, что если таблица представлений минимума четверичной формой имеет строки

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 2, \end{matrix}$$

то сама эта форма есть одна из восьми форм

$$M\left[\left(x_1 \pm \frac{x_4}{2}\right)^2 + \left(x_2 \pm \frac{x_4}{2}\right)^2 + \left(x_3 + \frac{x_4}{2}\right)^2 + \frac{x_4^2}{4}\right],$$

получающихся, если здесь взять все возможные комбинации знаков.

Как следствие из этой теоремы получается, что единственная (с точностью до эквивалентных) предельная форма с четырьмя переменными, отличная от $U_4$, есть,

$$\sqrt[4]{4D}\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4).$$

Предельных форм с четырьмя переменными, таким образом, две и только две: $U_4$ и сейчас найденная форма, которая совпадает с формой, найденной в первом мемуаре.

Далее следует углубленное исследование таблиц представлений минимума предельной формы с пятью переменными для того случая, когда среди ее характеристических определителей есть равные $\pm 2$. Это хотя и элементарное, но очень сложное исследование занимает 20 страниц, и мы его здесь приводить не будем. В результате этого исследования получается, что предельных форм с пятью переменными три и только три. Это суть формы

$$U_5 = 2\sqrt[5]{\frac{D}{6}}\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5),$$

$$Z = \sqrt[5]{\frac{2^9D}{3^4}}\Big(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1x_3 - \frac{1}{2}x_1x_4 - \frac{1}{2}x_1x_5 + \frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{2}x_2x_4 - x_2x_5 + \frac{1}{2}x_3x_4 - x_3x_5 - x_4x_5\Big),$$

$$V_5 = \sqrt[5]{2^3D}\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5)$$

и так как наибольший минимум $\sqrt[5]{8D}$ из них имеет $V_5$, то $\sqrt[5]{8D}$ и есть верхняя граница минимумов для положительных квадратичных форм с пятью переменными.

В этом третьем мемуаре Коркин и Золотарев, таким образом, нашли все предельные формы с двумя, тремя, четырьмя и пятью переменными. Эти результаты весьма поразили Эрмита. Действительно, долгие бесплодные попытки найти точную границу для минимума положительной квадратичной формы с $n$ переменными, оказывается, никого не приводили к цели, потому что дело тут гораздо сложнее, чем могло казаться с первого взгляда. Для каждого $n$, начиная с $n=4$, существует, оказывается, несколько разных максимумов минимума, причем нет никакого простого закона для получения этих максимумов или даже хотя бы их числа. Наибольший из этих максимумов и дает искомую точную верхнюю границу минимума.

Сохранилась обширная переписка (64 письма) Коркина с Золотаревым за 1871 — 1878 гг., когда они писали свои только что изложенные совместные мемуары о положительных квадратичных формах. Эта переписка, на 176 страницах, помещена во втором томе полного собрания сочинений Золотарева, изданного Академией Наук в 1932 г. По этим письмам, почти исключительно касающимся мемуаров о квадратичных формах, можно подробно проследить возникновение и развитие тех мыслей, которые в такой совершенной и законченной форме изложены в их работах.

## Комментарии

Рассмотренные мемуары Коркина и Золотарева о квадратичных формах требуют пояснений. Значительно бо̀льшая ясность и наглядность в весь вопрос о минимумах положительных квадратичных форм вносится применением геометрии. Это мы и сделаем.

Напомним, что квадратичной формой называется однородный многочлен второй степени. Рассматривают формы двойничные

$$a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2,$$

тройничные

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 +$$
$$+ 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3,$$

четверничные

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 +$$
$$+ 2 a_{14} x_1 x_4 + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{24} x_2 x_4 + 2_{34} x_3 x_4$$

и т. д. Квадратичную форму принято записывать также так:

$$f=\sum_{i,k} a_{ik}x_i x_k, \quad (i, k=1, 2, \ldots, n),$$

причем предполагается, что $a_{ik}=a_{ki}$, откуда и получаются двойки в предыдущей записи. Определитель

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется определителем или дискриминантом формы. Теория квадратичных форм, в которой переменным формы $x_i$ придаются какие угодно действительные или какие угодно комплексные значения, называется алгебраической, а если переменным $x_i$ придаются только целые рациональные значения, то она называется арифметической.

Если коэффициенты $a_{ik}$ формы действительные, то форма может быть определенной (положительной или отрицательной), неопределенной и вырожденной. Квадратичная форма с $n$ переменными называется положительной определенной тогда, когда она есть сумма квадратов $n$ линейных форм

$$\lambda_{11}x_1+\lambda_{12}x_2+\ldots+\lambda_{1n}x_n; \quad \lambda_{21}x_1+\lambda_{22}x_2+\ldots+\lambda_{2n}x_n;$$
$$\ldots; \quad \lambda_{n1}x_1+\lambda_{n2}x_2+\ldots+\lambda_{nn}x_n$$

с действительными коэффициентами $\lambda_{ik}$ и определителем

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \ldots & \lambda_{nn} \end{vmatrix}$$

не равным нулю. Если форма положительная определенная или, как говорят просто, положительная квадратичная форма, то она имеет, следовательно, вид

$$f=(\lambda_{11}x_1+\lambda_{12}x_2+\ldots+\lambda_{1n}x_n)^2+(\lambda_{21}x_1+\lambda_{22}x_2+\ldots+\lambda_{2n}x_n)^2+\ldots+(\lambda_{n1}x_1+\lambda_{n2}x_2+\ldots+\lambda_{nn}x_n)^2,$$

причем разложение данной положительной формы в сумму квадратов линейных форм возможно сделать, как это станет ясно ниже, бесконечным числом разных способов. Пусть теперь $\lambda$ — прямоугольные декартовы координаты. Рассмотрим векторы

$$\mathfrak{A}_1=(\lambda_{11},\lambda_{21},\ldots,\lambda_{n1});\quad \mathfrak{A}_2=(\lambda_{12},\lambda_{22},\ldots,\lambda_{n2});\ \ldots;\quad \mathfrak{A}_n=(\lambda_{1n},\lambda_{2n},\ldots,\lambda_{nn}).$$

Коэффициенты $a_{ik}$ формы $f$, как легко видеть, если произвести возвышение линейных форм в квадраты и приведение подобных членов, равны

$$a_{ii}=\lambda_{1i}^2+\lambda_{2i}^2+\ldots+\lambda_{ni}^2;\quad a_{ik}=\lambda_{1i}\lambda_{1k}+\lambda_{2i}\lambda_{2k}+\ldots+\lambda_{ni}\lambda_{nk},$$

т. е. равны скалярным квадратам векторов $(\mathfrak{A}_i)^2$ и их попарным скалярным произведениям $(\mathfrak{A}_i\,\mathfrak{A}_k)$. Форма $f$, следовательно, равна

$$f=\sum a_{ik}x_i x_k=(\mathfrak{A}_1x_1+\mathfrak{A}_2x_2+\ldots+\mathfrak{A}_n x_n)^2,$$

т. е. есть скалярный квадрат линейной комбинации $\mathfrak{A}_1x_1+\mathfrak{A}_2x_2+\ldots+\mathfrak{A}_n x_n$ векторов $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2,\ldots,\mathfrak{A}_n$. При этом, как легко проверить, определитель из координат $\lambda$ этих векторов при возведении в квадрат дает дискриминант $D$ формы $f$.

Репер ($n$-векторник) $\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,\ldots,\mathfrak{A}_n$ называется репером, соответствующим положительной квадратичной форме $f$. Разным положениям $f$ в сумму квадратов соответствуют одинаковые реперы, но разно повернутые относительно начала 0 осей $\lambda$.

Рассмотрим „решетку“ (Punktgitter) всех точек, имеющих целые рациональные координаты $x_i$ относительно репера

$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$; в таком случае эквивалентным с $f$ формам, т. е. формам, получающимся из $f$ линейными целочисленными преобразованиями ее переменных с определителем $\pm 1$, соответствуют другие основные реперы этой же решетки. В этом смысле можно сказать, что классу эквивалентных форм соответствует решетка, и обратно.

Численная величина формы $f$ при данных $x_i$ равна скалярному квадрату вектора $\mathfrak{A}_i x_1 + \mathfrak{A}_2 x_2 + \ldots + \mathfrak{A}_n x_n$, т. е. квадрату расстояния от начала $O$ до точки с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ относительно репера $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$. Минимумом формы $f$ называется, таким образом, квадрат расстояния от начала до ближайшей к началу отличной от начала точки решетки, соответствующей форме $F$. Иначе можно также сказать, что минимум $M$ формы есть квадрат наименьшего расстояния между точками ее решетки.

Задача, решаемая Коркиным и Золотаревым, состоит в том, чтобы *из всех решеток с заданным объемом* $\sqrt{D}$ *основного параллелепипеда найти те, которые имеют то свойство, что любая бесконечно малая вариация основного параллелепипеда решетки, не изменяющая его объема, уже уменьшает минимум.* Такие решетки будем называть предельными. Формы, им соответствующие, Коркин и Золотарев назвали также предельными. Предельная решетка данного числа измерений с данным объемом основного параллелепипеда, имеющая наибольший минимум, дает точную верхнюю границу минимума положительных форм с данным числом переменных и данным дискриминантом.

Минковский предложил заменить эту задачу, очевидно, эквивалентной ей задачей, обратно, *искать минимумы объема основного параллелепипеда решетки при заданном наименьшем расстоянии между ее точками.* Если рассмотреть одинаковые шарики ($n$-мерные, конечно, если решетка $n$-мерная), радиусы которых равны половине этого заданного наименьшего расстояния между точками решетки, и центры которых лежат во всех точках решетик, то вопрос идет просто о том, чтобы найти плотнейшие параллелепипедальные расположения шариков, не входящих друг в друга. Под *плотностью расположения* здесь понимается процент пространства, занятый шариками по отношению ко всему пространству. Будем называть параллелепипедальное расположение шариков неуплотняемым, если нельзя сделать такого бесконечно малого видоизменения основного параллелепипеда решетки, составляемой центрами шариков, после которого шарики не войдут друг в друга, а расположение сделается более плотным. Наиболее плотное из неуплотняемых расположений есть, очевидно, плотнейшее. Квадратичные формы, соответствующие основным реперам решеток центров таких неуплотняемых параллелепипедальных расположений шариков, и суть те формы, которые Коркин и Золотарев называют предельными, а классы форм, соответствующие таким расположениям,— предельными классами.

Вся задача Коркина и Золотарева состоит, таким образом, *в разыскании всех n-мерных неуплотняемых параллелепипедальных расположений одинаковых n-мерных шариков в n-мерном пространстве.*

Весь вопрос становится с этой точки зрения геометрически несравненно более наглядным, но все же и в такой постановке решение его остается трудным.

Попробуем с этой точки зрения пояснить некоторые результаты и теоремы, полученные Коркиным и Золотаревым.

Начнем с первого их маленького мемуара 1872 г., в котором найден точный верхний предел минимума для положительных четверничных форм, т. е. плотнейшее параллелепипедальное расположение не входящих друг в друга одинаковых 4-мерных шариков в 4-мерном пространстве.

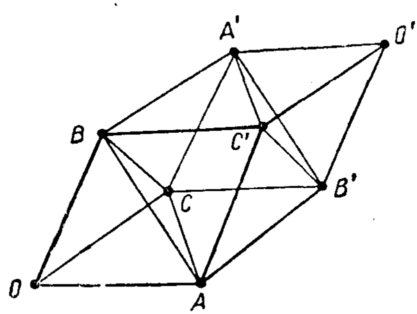
Не будем комментировать вывод, данный в этом мемуаре Коркиным и Золотаревым, так как он, несмотря на всю свою кажущуюся простоту, имеет довольно сложный геометрический смысл. Приведем, вместо этого, более естественный вывод, данный в одной заметке Б. Делоне, позволяющий глубже проникнуть в геометрию вопроса.

Казалось бы, что весьма вероятно, что плотнейшее параллелепипедальное расположение одинаковых $n$-мерных шариков в $n$-мерном пространстве будет прямым обобщением такого же плотнейшего расположения в 2- и 3-мерном пространстве, т. е. получаемого в случае кружочков на плоскости и шариков в пространстве. Оба эти расположения, как можно показать, имеют решетки центров, построенные на правильных симплексах: на равностороннем треугольнике для кружочков и на правильном тетраэдре для шаров. Если бы это было так, то, так как квадратичная форма $n$-мерного репера, составленного из ребер, сходящихся в вершине правильного симплекса, очевидно, пропорциональна форме

$$U_n = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n,$$

в которой коэффициенты как при всех квадратах переменных, так и при их парных произведениях суть 1 (ибо у такой формы как расстояния от точки $(0, 0, \ldots, 0)$ до точек $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, \ldots, 1)$, так и расстояния между этими точками суть 1), это значило бы, что форма $U_n$ имеет из всех форм с $n$ переменными наибольший минимум при данном $D$. Так и думал Эрмит, хотя и не мог этого доказать. Коркин и Золотарев показали в рассматриваемом мемуаре, что уже для $n=4$ это не так.

Что в 4-мерном пространстве расположение по правильным симплексам не плотнейшее, а более плотным является некоторое другое, $V_4$, доказать совсем просто. Действительно, возьмем 3-мерное расположение по правильным симплексам и построим на каждом из его шариков, как на экваторе, 4-мерный шарик. Получится „слой“ 4-мерных шариков, центры которых лежат в 3-мерной „плоскости“ и образуют в ней 3-мерную решетку, построенную на правильном тетраэдре с ребром $d$, где $d$ — диаметр шарика. Основной параллелепипед этой решетки состоит из тетраэдра $OABC$, тетраэдра $O'A'B'C'$, ему симметричного, и октаэдра $ABCA'B'C'$ (фиг. 1). Если мы положим в 4-мерном пространстве на этот слой, получающийся из него параллельным переносом, другой такой слой так, чтобы шарики его пришлись в „ямки", соответствующие тетраэдрам $OABC$ (или $O'A'B'C'$), и будем далее соответственно также накладывать слои, то мы получим 4-мерное параллелепипедальное расположение шариков, построенное на правильном 4-мерном симплексе. Если же мы будем накладывать слои так, чтобы они пришлись в „ямки", соответствующие октаэдрам $ABCA'B'C'$, то получится другое и, как легко видеть, более плотное расположение $V_4$. Действительно высота $h$ центра накладываемого шарика над плоскостью центров слоя равна:




Фиг. 1

для первого случая

$$h_т=\sqrt{d^2-R_т{}^2}=\frac{d\sqrt{10}}{4},$$

для второго

$$h_0=\sqrt{d^2-R_0{}^2}=\frac{d\sqrt{2}}{2},$$

где $R_т=\frac{d\sqrt{6}}{4}$ и $R_0=\frac{d\sqrt{2}}{2}$ — соответственно радиусы шаров, описанных вокруг тетраэдра $OABC$ и октаэдра $ABCA'B'C'$. Но $h_0<h_т$, и, следовательно, второе расположение шариков более плотное, чем первое, по правильным 4-мерным симплексам.

Это вычисление, между прочим, показывает, что та́к накладывать слои можно, т. е. что при этом шарики, находящиеся по разные стороны от слоя, не будут мешать друг другу, так как будут целиком лежать по разные стороны от 3-мерной плоскости центров слоя.

Докажем теперь, что *плотнейшим параллелепипедальным расположением шариков в 3-мерном пространстве является расположение $U_3$ по правильным тетраэдрам, а затем, равно так же, что плотнейшим параллелепипедальным расположением шариков в 4-мерном пространстве будет расположение $V_4$.*

А. Рассмотрим сначала 3-мерный случай.

1. Если нигде в расположении шарики не касаются, то расположение, очевидно, уплотняемо, стоит лишь равномерно сжимать систему центров шариков к центру одного из шариков. От всякого расположения можно, следовательно, всегда перейти, непрерывно уплотняя его, к такому, которое состоит из рядов, в каждом из которых соседние шарики касаются друг друга.

2. Если ряды эти не касаются друг друга, то расположение уплотняемо, стоит равномерно сжимать систему центров шариков к прямой центров одного из этих рядов. От всякого расположения можно, следовательно, всегда перейти, непрерывно уплотняя его, к такому, которое состоит из параллельных слоев, каждый из которых составлен описанными рядами, центры шариков которых лежат в одной плоскости такими, что соседние такие ряды касаются друг друга.

3. Если ни один такой слой не касается другого такого слоя, то расположение уплотняемо, стоит лишь равномерно сжимать систему центров его шариков к плоскости центров одного из таких слоев. От всякого расположения можно, следовательно, всегда перейти, непрерывно лишь уплотняя его, к такому, которое имеет слои п. 2, касающиеся друг друга.

4. Система центров такого слоя есть 2-мерная решетка, построенная на ромбе, сторона которого равна диаметру шарика $d$. Всякая точка плоскости этих центров лежит

по крайней мере от одной из точек этой решетки на расстоянии, не большем, чем $\frac{d\sqrt{2}}{2}$. В самом деле, если бы этот ромб был квадрат, то всякий центр такого квадрата имел бы как раз на расстоянии $\frac{d\sqrt{2}}{2}$ самые близкие к себе точки решетки. Если построить вокруг всякой точки этой решетки как центра кружок радиуса $\frac{d\sqrt{2}}{2}$, то центры и только центры квадратов не будут внутренними точками ни для одного из этих кружков. Если же скосить квадрат в ромб, то полоски этих отчасти налегающих друг на друга кружочков, соответствующих стороне ромба, очевидно, сблизятся и так войдут друг в друга, что и эти точки станут внутренними для некоторых кружков.

5. Отсюда следует, что два слоя п. 2 могут касаться только, если они смежных номеров, т. е. нет слоя, плоскость центров которого лежала бы между плоскостями центров этих двух слоев. В самом деле, в силу результата п. 4, высота $h$ центра любого шарика, не входящего в некоторый слой над плоскостью центров этого слоя, равна по крайней мере

$$h=\sqrt{d^2-\left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{d\sqrt{2}}{2},$$

т. е.

$$h>\frac{d}{2},$$

и таким образом два слоя не могут касаться через отверстия в промежуточном слое.

6. Рассмотрим некоторый слой I и лежащий на нем слой II и будем слой II „катать“ по слою I, стараясь, чтобы шарики слоя II возможно глубже вошли в „ямки“ слоя I. Для уяснения этого катания построим из центров всех шариков

слоя I шарики вдвое большего радиуса. Эти шарики уже отчасти войдут друг в друга, и ввиду свойства п. 4 в их системе не останется дырок. Если смотреть сверху на эти шарики, то от каждого из них будет виден кусок („шапочка“), который в проекции на плоскость центров слоя I, очевидно, будет представлять собою область Дирихле $P$ (решетки системы центров шариков слоя в этой плоскости фиг. 2). Катание слоя II по слою I будет, очевидно, то же самое, что движение системы центров шариков слоя II по шапочкам этих удвоенных шаров. При этом достаточно рассматривать один такой центр $C$, так как другие будут, очевидно, лежать гомологично. Достаточно даже следить за движением проекции $\overline{C}$ центра $C$ на плоскость центров слоя $I$ внутри одного многоугольника $P$.

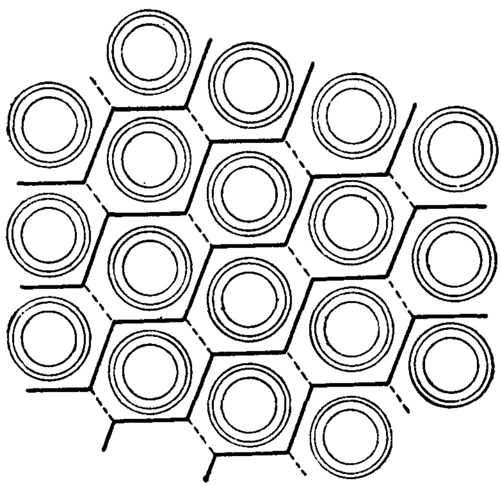
7. Если $\overline{C}$ лежит внутри некоторого $P$, то, удаляя $\overline{C}$ по лучу от центра этого $P$, мы, наконец, приведем $\overline{C}$ на границу $P$. При этом мы, очевидно, опускаем $\overline{C}$, т. е. делаем расположение более плотным. Если передвигать точку $\overline{C}$ вдоль стороны $P$, то, так как она хоть в одну сторону будет при этом удаляться от центра $P$, расположение будет делаться более плотным, пока точка $\overline{C}$ не попадет в вершину $P$.

8. Многоугольник $P$ есть, как известно (см., например, последнее приложение к курсу теории чисел Дирихле), шестиугольник, причем две пары его противоположных сторон, отмеченных жирно на фиг. 2, соответствуют таким смежным с ним областям $P$, шарики которых касаются друг друга. Это будет очевидно, если области Дирихле образовать известным способом Кельвина растущих кругов. Отсюда видно, что когда $\overline{C}$ попадет в вершину $P$, шарик $C$ будет одновременно касаться двух таких шариков, которые касаются между собой. Эти три шарика определяют слой, построенный на равностороннем треугольнике, т. е. плотнейший плоский слой шариков. Плоскость центров этого

слоя составляет угол с плоскостью центров рассматривавшегося раньше слоя.

Итак, путем только непрерывного уплотнения расположения скатыванием слоя II по слою I можно добиться того, чтобы в расположении появился слой, построенный на равностороннем треугольнике.

9. Примем этот слой за исходный. Шестиугольники будут в таком случае правильными и при скатывании по этому слою смежного ему слоя в его ямки получится, очевидно, как раз расположение по правильным тетраэдрам.



Фиг. 2

10. В пп. 1—9 мы показали, таким образом, что, исходя от произвольно выбранного 3-мерного параллелепипедального расположения одинаковых 3-мерных шариков, не входящих друг в друга, путем все время только уплотнения расположения всегда можно перейти к этому вполне определенному расположению $U_3$ по правильным тетраэдрам. Оно является, таким образом, единственным неуплотняемым и, следовательно, плотнейшим.

Б. Рассмотрим теперь 4-мерный случай.

1. Совершенно так же, как и в пп. 1—3 3-мерного случая, мы докажем, что любое 4-мерное параллелепипедальное расположение одинаковых 4-мерных шариков можно, непрерывно его уплотняя, преобразовать в такое, чтобы в нем был 3-мерный слой 4-мерных шариков, 3-мерная решетка центров которых имеет основной параллелепипед, все ребра которого одинаковы и равны диаметру шарика $d$. Затем, как и в п. 4 3-мерного случая, докажем, что всякая точка 3-мерного пространства, в котором расположены центры шариков этого слоя, лежит от какого-нибудь из этих центров не далее как на расстоянии $\frac{d\sqrt{3}}{2}$ (половина диагонали куба с ребром $d$). Отсюда, как и в п. 5 3-мерного случая, выходит, что два таких 3-мерных слоя могут касаться только, если они смежных номеров, причем $h$ здесь может быть и в точности равно $\frac{d}{2}$. (Начиная с 5-мерного пространства, $h$ уже может быть меньше $\frac{d}{2}$, т. е. возможно то обстоятельство, что слои, смежные с I и лежащие от него по разные стороны, будут мешать друг другу плотно входить в „ямки“ слоя I. Это и есть обстоятельство, которое создает всю трудность теории плотнейших параллелепипедальных расположений шариков в пространствах высших измерений.)

2. Рассмотрим некоторый такой слой I и смежный слой II; если бы он не касался слоя I, то мы могли бы равномерным сжатием к 3-мерному пространству его центров сделать расположение более плотным. Если слой II касается слоя I, то будем его „скатывать“ по слою I так, чтобы его шарики пришлись в „ямки“ слоя I и расположение при этом делалось более плотным. Для уяснения этого процесса скатывания рассмотрим, равно как и в п. 6 3-мерного случая, вспомогательные 4-мерные шары вдвое большего радиуса, их „шапочки“ и проекции их шапочек на

3-мерное пространство центров слоя I, которые будут не чем иным, как областями Дирихле $D$ этой параллелепипедальной системы центров. Как и в п. 7 3-мерного случая, мы убедимся, что путем только уплотнения расположения можно скатить слой II по слою I так, чтобы точка $\bar{C}$, проекция центра $C$ шарика слоя II, оказалась в вершине многогранника $D$.

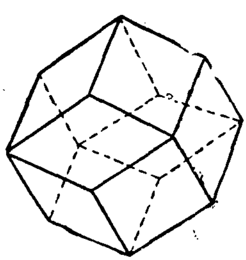
3. Как известно, число непараллельных граней области $D$ не больше 7. Если рассматривать образование области $D$ способом Кельвина растущих шаров, то очевидно, что по трем парам из этих граней будут смежны такие области $D$, шарики которых касаются шарика рассматриваемой области, так как в изучаемом слое каждого шарика касаются три пары шариков. Но к вершине подходит (в заполнении пространства областями $D$) в случае 14 граней $D$ шесть из семи непараллельных граней, в остальных же случаях — каждая из непараллельных граней. Таким образом, точка $\bar{C}$, попавшая в вершину $D$, наверное, попадет на одну из трех граней, соответствующих касающимся шарикам. А это будет значить, что наложенный на слой шарик касается этих двух шариков, которые касаются также между собой. Таким образом, каждый 3-мерный слой, построенный на равнореберном параллелепипеде с ребром $d$, имеет такой 2-мерный „подслой“, 2-мерная решетка центров которого построена на равностороннем треугольнике со стороной $d$.

4. Рассмотрим 3-мерный слой, образующийся соприкосновением таких 2-мерных подслоев. 3-мерная плоскость центров этого слоя не параллельна 3-мерной плоскости центров ранее рассматривавшегося слоя. Область $D$ этого слоя будет иметь зону, соответствующую рассмотренному подслою. Все грани этой зоны будут соответствовать касающимся шарикам, а проекция ее будет правильным шестиугольником.

5. Будем теперь по этому слою скатывать в его ямки соседний слой. Точка $\bar{C}$, соответствующая этому слою, после только уплотнения расположения попадет, наконец,

в вершину его области $D$. Но всякая вершина области $D$ вследствие слоевого свойства $D$ (см. III главу „Матем. основы структурного анализа кристаллов“ Делоне и Александрова) принадлежит к отмеченной зоне. А это значит, что наложенный шарик касается трех шариков, которые все три попарно касаются между собой. Совершенно произвольное 4-мерное параллелепипедальное расположение одинаковых 4-мерных шариков может быть, следовательно, путем только одних последовательных уплотнений преобразовано в такое, в котором есть четыре шарика, попарно касающихся друг друга, центры которых образуют правильный 3-мерный тетраэдр с ребром $d$, а следовательно и 3-мерный слой, решетка центров которого имеет основной параллелепипед, построенный на правильном тетраэдре с ребром $d$.

6. Примем этот слой за основной. Область $D$ такого слоя есть ромбический додекаэдр (фиг. 3). В результате скатывания по нему соседнего параллельного ему слоя его точка $\overline{C}$ попадет, наконец, в одну из вершин этого додекаэдра. Но вершины ромбического додекаэдра — двух сортов: одни тройные и соответствуют центрам тетраэдров, а другие четверные и соответствуют центрам октаэдров, упомянутых выше. В первом случае получается параллелепипедальное расположение 4-мерных шариков, построенное на 4-мерном правильном симплексе, а во втором случае — некоторое вполне определенное другое расположение. Это второе, как было вычислено выше, более плотное.



Фиг. 3

7. Итак, в пп. 1—6 показано, что, исходя от произвольно выбранного 4-мерного параллелепипедального расположения одинаковых 4-мерных шариков, не входящих друг в друга, путем все время только уплотнения расположения всегда можно перейти к одному из этих двух *вполне определенных* расположений $U_4$ или $V_4$, а так как

второе, $V_4$, более плотное, то оно и есть плотнейшее расположение.

8. Можно показать, что и первое расположение, $U_4$, тоже неуплотняемое, но это доказательство лучше вести аналитически, как это делают Коркин и Золотарев в своем третьем мемуаре (см. стр. 90).

Перейдем теперь ко *второму* мемуару Коркина и Золотарева.

Весь второй мемуар Коркина и Золотарева о квадратичных формах основан на способе, который они называют *разложением формы по ее минимумам*. Поясним, в чем состоит это разложение с геометрической точки зрения. Разложение это состоит в выборе в решетке $E$, соответствующей данной положительной форме, некоторого специального ее основного репера, которому и соответствует специальный выбор формы, эквивалентной данной форме, а именно формы, которую они называют *разложенной по минимумам*. Этот специальный основной репер мы будем просто называть репером Коркина и Золотарева данной решетки. Репер этот следующий. Первый вектор его есть кратчайший вектор решетки $E$. Второй вектор — наименьший из тех векторов $E$, проекция которых параллельно первому вектору на $(n-1)$-мерное линейное подпространство, ортогональное к первому вектору, наименьшая. Третий — наименьший из тех векторов $E$, проекция которых параллельно линейному подпространству, определяемому первыми двумя векторами на ортогональное к нему линейное $(n-2)$-мерное подпространство, наименьшая, и т. д. Очевидно, что в силу этого определения репер Коркина и Золотарева есть основной репер решетки $E$. Этот репер можно получить и так: раздувать из точки $O$ решетки $E$, как из центра, шар, пока он не наткнется на некоторую точку $A$ решетки $E$; затем раздувать от прямой $OA$, как от оси, цилиндр, пока он не наткнется на некоторый параллельный $OA$ ряд точек $E$, и взять в нем точку $B$, ближайшую к точке $O$; далее раздувать от плоскости $OAB$, как от гипероси, гиперцилиндр, пока он не наткнется на 2-мерную решетку точек $E$, параллельную решетке $OAB$, и взять в ней точку $C$, ближайшую к точке $O$, и т. д.; тогда $n$-векторник $OABC...$ и будет репером Коркина и Золотарева.

Из всех возможных разложений данной положительной квадратичной формы $f$ на квадраты, которые зависят от различного поворота репера соответственно этой форме относительно осей $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, такое разложение, при котором в первом квадрате заключаются все $n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, во втором — только $n-1$ переменных $x_2, \ldots, x_n$, в третьем — только $n-2$ переменных $x_3, \ldots, x_n$, в предпоследнем — только переменные $x_{n-1}$, $x_n$ и в последнем — только переменная $x_n$, называется разложением квадратичной формы по Якоби.

Если дана форма $f$ и зафиксирована некоторая нумерация ее переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то ее разложение по Якоби будет единственным. Пусть оно следующее:

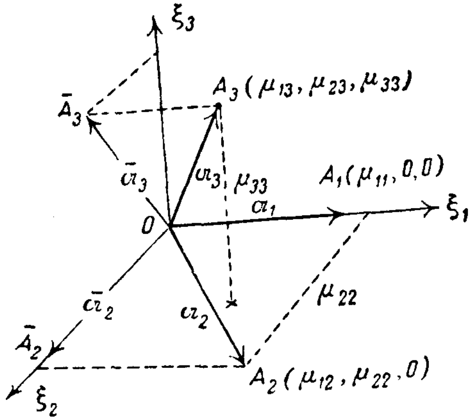
$$f = (\mu_{11}x_1 + \mu_{12}x_2 + \ldots + \mu_{1n}x_n) + (\mu_{22}x_2 + \mu_{23}x_3 + \\ + \ldots + \mu_{2n}x_n)^2 (\mu_{n-1,\, n-1}x_{n-1} + \mu_{n-1,\, n}x_n)^2 + (\mu_{nn}x_n)^2.$$

Разложению формы на квадраты по Якоби соответствует такой поворот ее репера по отношению к прямоугольному координатному реперу $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, в котором мы рассматриваем координаты $\mu$, что первый его вектор $\mathfrak{A}_1$ идет по первой оси $\xi_1$, второй $\mathfrak{A}_2$ лежит в плоскости $\xi_1\xi_2$, третий $\mathfrak{A}_3$ — в пространстве $\xi_1\xi_2\xi_3$ и т. д.

В самом деле, векторы $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ репера, соответствующего этой форме, суть (фиг. 4)

$$\begin{array}{c} (\mu_{11},\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0), \\ (\mu_{12},\ \mu_{22},\ \ldots,\ 0,\ 0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\mu_{1,\, n-1},\ \mu_{2,\, n-1},\ \ldots,\ \mu_{n-1,\, n-1},\ 0), \\ (\mu_{1,n},\ \mu_{2,\, n},\ \ldots,\ \mu_{n-1,\, n},\ \mu_{n,\, n}). \end{array}$$

Если вычеркнуть первый квадрат, то оставшаяся квадратичная форма с $n-1$ переменными $x_2$ $x_3$, $\ldots$, $x_n$ есть, очевидно, не что иное, как форма, соответствующая в координатном линейном подпространстве $\xi_2$, $\xi_3$, $\ldots$, $\xi_n$ ортогональной проекции $\overline{\mathfrak{A}}_2$, $\overline{\mathfrak{A}}_3$, $\ldots$, $\overline{\mathfrak{A}}_n$ $n$-векторника $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\ldots$, $\mathfrak{A}_n$ на это подпространство параллельно вектору $\mathfrak{A}_1$.




Фиг. 4

Если вычеркнуть еще второй квадрат, то оставшаяся квадратичная форма с $n-2$ переменными $x_3$, $x_4$, $\ldots$, $x_n$ соответствует ортогональной проекции $\overline{\mathfrak{A}}_3$, $\overline{\mathfrak{A}}_4$, $\ldots$, $\overline{\mathfrak{A}}_n$ $n$-векторника $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\ldots$, $\mathfrak{A}_n$ на линейное подпространство $\xi_3$, $\xi_4$, $\ldots$, $\xi_n$ параллельно плоскости $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и т. д.

Отсюда ясно, что $|\mu_{11}|$, $|\mu_{22}|$, $\ldots$, $|\mu_{nn}|$ суть последовательные высоты параллелепипеда, построенного на векторах $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\ldots$, $\mathfrak{A}_n$, а именно $\mu_{nn}$ — высота всего параллелепипеда, $\mu_{n-1,\, n-1}$ — высота его основания и т. д., и, наконец, $\mu_{11}$ — длина его ребра.

Разложение Коркина и Золотарева по минимумам есть разложение Якоби, но не для какого-то произвольного основного репера решетки $E$, а для репера Коркина и Золотарева. При этом последовательные минимумы Коркина и Золотарева $A$, $A'$, $A''$, $\ldots$ суть $\mu_{11}^2$, $\mu_{22}^2$, $\mu_{33}^2$, $\ldots$ Геометрически очевидно, что $(n-1)$-векторник $\overline{\mathfrak{A}}_2, \overline{\mathfrak{A}}_3, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_n$, $(n-2)$-векторник $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}_3, \overline{\overline{\mathfrak{A}}}_4, \ldots, \overline{\overline{\mathfrak{A}}}_n$ и т. д., с одной стороны, суть реперы Коркина и Золотарева соответствующих им $(n-1)$-мерной, $(n-2)$-мерной и т. д. решеток, а с другой стороны, они расположены в соответствующих координатных подпространствах $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$; $\xi_3, \xi_4, \ldots, \xi_n$ и т. д. по Якоби.

Если в $f$, разложенной по минимумам, положить $x_n=0$ или $x_n=0$, $x_{n-1}=0$ и т. д., то просто отпадает последний вектор $\mathfrak{A}_n$ или два последних вектора $\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}_{n-1}$ и т. д., и реперы $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}$ или $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{n-2}$ и т. д. остаются реперами Коркина и Золотарева, расположенными по Якоби в соответственных координатных подпространствах $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-2}$ и т. д.

Теорема Коркина и Золотарева о том, что $A' \geqslant \frac{3}{4} A$, непосредственно очевидна геометрически (фиг. 5): $\mu_{22} > \mu_{11} \frac{\sqrt{3}}{2}$, так как точка $A_2$, по самому определению репера Коркина и Золотарева, лежит вне полоски между осью $\xi_1$ и прямой $\lambda$, расстояние между которыми есть высота $h=\mu_{11} \frac{\sqrt{3}}{2}$ равностороннего треугольника со стороной $\mu_{11}$.

Теорема Коркина и Золотарева о том, что $A' \geqslant \frac{3}{4}$, $A'' \geqslant \frac{2}{3} A$, которая так сложно доказывается у Коркина и Золотарева, может быть также получена геометрически.

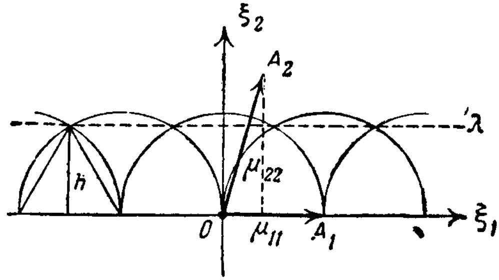
Данное в конце мемуара доказательство того, что знак равенства в неравенстве $A^{\mathrm{IV}} \geqslant \frac{4}{9} A$ не достигается ни для одной формы, тоньше, и мы его геометрического эквивалента приводить не будем.

Перейдем теперь к третьему мемуару.

Доказательство предельности форм $U_n, V_n$, и $Z$ лучше вести аналитически, как это сделано в мемуаре.

Теорему о том, что предельная форма имеет по крайней мере $\frac{n(n+1)}{2}$ представлений минимума и что эти представления вполне определяют ее коэффициенты, если не доказать геометрически, то сделать, по крайней мере, весьма естественной можно так.

Вместо того чтобы вокруг всех точек решетки, как центров, строить шарики, радиусы которых равны половине минимального расстояния $d$ между точками решетки, можно построить только вокруг ее точки $O$ шар, радиус которого равен самому этому минимальному расстоянию $d$. Тогда вся задача сводится к разысканию тех решеток, которые, имея одну точку $O$ в центре этого шара, не имеют других точек внутри этого шара и неуплотняемы, т. е. таковы, что нельзя сделать такой бесконечно малой вариации основного параллелепипеда этой решетки, при которой ни одна ее точка не вошла бы внутрь этого шара, а объем ее основного параллелепипеда уменьшился бы. С этой точки зрения упомянутая выше теорема Коркина и Золотарева связана, конечно, с тем, что если точки решетки, лежащие на поверхности шара, не предопределяют еще самоё решетку, то естественно думать, что можно так немного варьировать решетку, чтобы они оставались на этом шаре, а не входили внутрь, точки, не лежащие на нем, еще не попали на него, а объем основного параллелепипеда уменьшался. Так как лежание каждой из этих точек на поверхности шара накладывает одно и только одно условие на конфигурацию этих точек, связанных между собой и с точкой $O$ определенными векторами решетки, а число




Фиг. 5

параметров, определяющих основной параллелепипед решетки $\frac{n(n+1)}{2}$, теорема Коркина и Золотарева становится весьма естественной.

Теорема о том, что характеристические определители форм данного измерения $n$ ограничены в зависимости только от $n$, легко доказывается геометрически (см. изложение работы Вороного о совершенных формах). Больше того, оказывается, что геометрически легко показать, как это и делает Вороной, что из этого дальше следует ограничение в зависимости только от $n$ как длины матрицы, так и самих элементов приведенной матрицы представлений минимума предельной формой. Отсюда следует, что для каждого данного $n$ все неэквивалентные предельные формы заключаются среди конечного числа форм, которые все можно выписать. А так как для всякой заданной формы, как показывают Коркин и Золотарев в начале мемуара, легко узнать, предельная ли она, то, следовательно, можно найти в конечном числе действий все предельные формы данного измерения. Однако сами Коркин и Золотарев, повидимому, не заметили ограничений, накладываемых на сами элементы приведенной матрицы; это уже сделал Вороной.

Разбор таблиц представлений минимума предельными формами с пятью переменными, сделанный Коркиным и Золотаревым, весьма сложен, и пока, кажется, никем еще не выведены геометрически все предельные формы с пятью переменными.

В 1925 и 1926 гг. американский математик Blichfeldt, применив способ второго мемуара Коркина и Золотарева, нашел наибольшие минимумы также для форм с шестью и семью переменными, а в последнее время наибольшие минимумы были найдены также для восьми и девяти переменных.