К. А. СЕМЕНДЯЕВ

СЧЕТНАЯ ЛИНЕЙКА

ОГИЗ · ГОСТЕХИЗДАТ · 1942

ИЗДАНИЯ ВОЕННЫХ ЛЕТ

1941-1945

К. А. СЕМЕНДЯЕВ

СЧЕТНАЯ ЛИНЕЙКА

Краткое руководство

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1942 ЛЕНИНГРАД

АННОТАЦИЯ

Автор брошюры ставит своей целью наиболее легко и быстро обучить читателя выполнению всех основных вычислений на счетной линейке. Брошюра изложена кратко, но тем не менее дает теоретическое обоснование всем правилам счета на линейке. Имеется много практических задач и примеров. Брошюра может служить как учебным пособием для студентов техникумов и втузов, так и справочником для всех, кто прибегает при тех или иных расчетах к пользованию счетной линейкой.

Редактор *В. С. Капустина.* Подписано к печати 24/VI 1942 г. $2^3/_4$ печ. л., 2,70 авт. л., 45 000 тип. зн. в печ. л. Л61319 Тираж 15 000 экз. Цена книги 75 коп.

1-я Образцовая типография Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига".
Москва, Валовая, 28, Зак. № 1450.

ВВЕДЕНИЕ

Техники, инженеры, командиры, научные работники, экономисты, бухгалтеры, представители всевозможных профессий и специальностей встречаются в своей повседневной деятельности с необходимостью производить вычисления. Все хорошо знают, насколько облегчают работу по сложению и вычитанию простейшее и широко распространенное в нашей стране приспособление — конторские счеты. К сожалению, счетная линейка, которая может оказать существенную помощь при выполнении вычислений, содержащих умножение, деление, извлечение корня, возведение в степень, не имеет еще такого же массового распространения. Счетная линейка должна стать необходимым инструментом всех имеющих дело с вычислениями. Этот простой и портативный счетный прибор позволяет значительно упростить и ускорить вычислительную работу.

В отличие от счетов или арифмометра счетная линейка дает результаты не точные, а приближенные. В большинстве практических вычислений исходные данные бывают известны лишь с определенной степенью точности. Выполнение «точных» вычислений с приближенными числами влечет только ненужную затрату времени и энергии. Если, например, сторона куба, полученная измерением с помощью масштабной линейки, имеющей миллиметровые деления, равна 5,7 *см*, бессмысленно считать его объем равным в точности 185,193 *см*^{3}. Действительно, если, получив более точное значение стороны, равное 5,74 *мм*, мы вновь подсчитаем объем куба, то получим величину (189,119 . . .), отличающуюся от первоначальной почти на 4 *см*^{3}. Ясно, что при этих условиях вычисление даже десятых долей *см*^{3} совершенно бесполезно *).

При вычислениях на линейке точность получаемых результатов соответствует точности участвующих в вычислении величин. И

---

*) Подробнее об этом см. любую книгу, посвященную приближенным вычислениям, например В. М. Брадис, «Как надо вычислять» или М. Л. Франк, «Элементарные приближенные вычисления».

те и другие могут иметь, как мы увидим, не больше трех (иногда четырех) значащих цифр. Если требуется бо́льшая точность, пользоваться линейкой нельзя.

Предполагается, что пользующийся настоящим руководством знаком с логарифмами и имеет под руками счетную линейку, чтобы выполнять при чтении все примеры и упражнения. При этом последнее особенно необходимо, так как, не зная логарифмов, можно, хотя бы формально, усвоить основные правила пользования линейкой, но научиться считать на линейке чисто теоретически, не видя ее и не упражняясь практически, — невозможно.

1. ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙКИ

Счетная линейка состоит из трех частей (рис. 1): а) корпуса линейки (или просто линейки), б) движка, в) бегунка.

На корпусе линейки и на движке нанесены шкалы, которые мы будем в дальнейшем обозначать для краткости ***K***, ***A***, ***B***, ***I***, ***C***, ***D*** и ***L*** (рис. 2) *). Шкалы ***A*** и ***B***, а также ***C*** и ***D***, нанесенные на прилегающих друг к другу краях движка и линейки, тождественны. В этом легко убедиться, установив движок так, чтобы начальные отметки движка и линейки совпадали. При этом все деления шкал ***A*** и ***B***, ***C*** и ***D*** также должны совпасть. Наличие расхождений свидетельствует о низком качестве данной линейки.

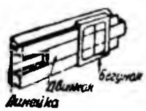

Рис. 1.

На бегунке нанесены одна или три визирные линии. Эти линии должны быть перпендикулярны к шкалам линейки и при установке против начальной отметки шкалы ***D*** (или ***L***) должны проходить также через начальные отметки других шкал линейки.

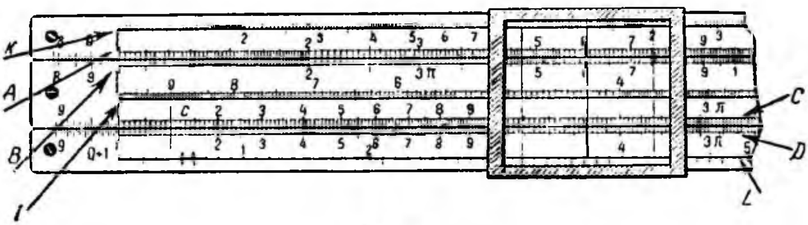

Рис. 2.

Если это условие не соблюдается, бегунок должен быть отрегулирован путем незначительного изгиба его направляющей закраины.

---

*) На некоторых типах линеек шкалы ***K***, ***I*** и ***L*** не наносятся.

Корпус линейки слегка пружинит, сжимая движок. Движок ни в коем случае не должен ходить совершенно свободно в пазах линейки. Тугой ход движка затрудняет работу с линейкой и может быть устранен натиранием воском или парафином боковых ребер движка.

2. РАВНОМЕРНАЯ ШКАЛА

Для того чтобы научиться считать на линейке, нужно прежде всего детально ознакомиться с нанесенными на ней шкалами.

Простейший вид шкал — это хорошо всем известные **равномерные шкалы**, примером которых может служить любая масштабная шкала, в частности, хотя бы нанесенная на боковой грани счетной линейки. Число, стоящее у какой-либо отметки

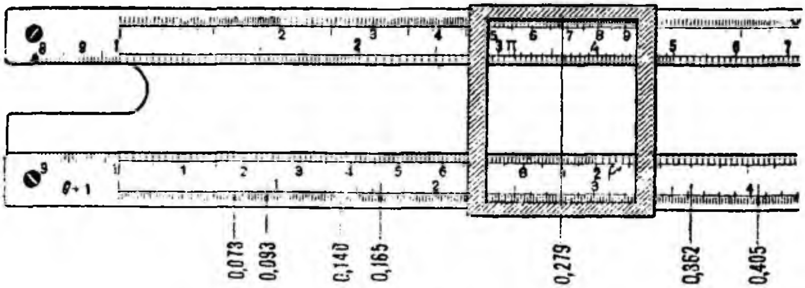

Рис. 3.

этой шкалы, указывает, сколько единиц масштаба (в нашем примере сантиметров) содержит отрезок шкалы от данной отметки до начала отсчета (где естественно стоит отметка 0). Более мелкие деления позволяют получать отрезки, содержащие не только целое число сантиметров, но и еще несколько миллиметров. Если требуются доли миллиметров, можно, мысленно разделив миллиметровое деление на десять равных частей, сделать нужную отметку на шкале. Каждому числу, целому или дробному, соответствует определенная точка на шкале; однако, практически мы не в состоянии различать числа, отличающиеся меньше чем на 0,01 *см*, так как наш невооруженный глаз не может отметить доли, меньшие, чем 0,01 *см*.

Помещенная внизу линейки шкала L также представляет собой равномерную шкалу, у которой за единицу масштаба взято

25 *см* *). Начальному делению шкалы соответствует отметка 0, конечному делению — отметка 1 (эти отметки не подписаны). Цифры 1, 2, ..., 9 указывают на десятые доли единицы, более длинные штрихи шкалы позволяют отсчитывать сотые. Расстояния между двумя соседними длинными штрихами разделены на пять равных частей, так что, следовательно, каждое самое маленькое деление соответствует 0,002. Если нам потребуется отсчитать одну тысячную, придется это деление разделить пополам на глаз. Примеры отсчетов на шкале ***L*** приведены на рис. 3**).

Применения шкалы ***L*** будут даны в дальнейшем (см. § 13).

3. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ШКАЛА

Шкала ***L*** — единственная равномерная шкала на линейке. Все остальные шкалы — неравномерные, логарифмические. Построим образец такой шкалы. Для этого возьмем из таблиц значения

Таблица

N	$\lg N$	N	$\lg N$
1	0,000	6	0,778
2	0,301	7	0,845
3	0,477	8	0,903
4	0,602	9	0,954
5	0,699	10	1,000

логарифмов целых чисел от 1 до 10 (см. таблицу) и отложим их в некотором масштабе на одной прямой от общего начала. Отложив логарифм какого-либо числа, надпишем это число около сделанной отметки (рис. 4). Полученные отметки служат основой

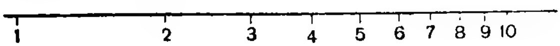

Рис. 4.

первого участка логарифмической шкалы. Из способа его построения видно, что в начальной точке участка стоит отметка 1 (так как $\lg 1 = 0$), а в конечной — на расстоянии одной единицы масштаба — отметка 10.

*) Мы ограничиваемся рассмотрением наиболее распространенных линеек с длиной основной единицы в 25 *см*. Ознакомление со шкалами линеек другого размера может быть проведено самостоятельно.

) У некоторых типов линеек шкала ***L* нанесена не внизу линейки, а посередине обратной стороны движка и притом в обратном направлении (0 — справа, 1 — слева).

Пользуясь таблицей логарифмов, можно нанести более мелкие деления, откладывая логарифмы чисел 1,1; 1,2; 1,3 и т. д. до 9,9 (рис. 5).

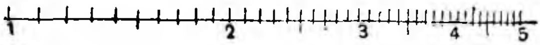

Рис. 5.

Таким образом, логарифмическая шкала строится так, что **расстояние от начала отсчета (отметка 1) до отметки N равно, в некотором масштабе, $\lg N$.**

Продолжим теперь нашу шкалу. Для этого нужно отложить от начальной точки логарифмы чисел 11, 12, 13 и т. д. Но

$$\lg 11 = 1 + \lg 1{,}1; \quad \lg 12 = 1 + \lg 1{,}2 \text{ и т. д.}$$

Следовательно, отметки 11, 12, 13 и т. д. будут на таком же расстоянии от отметки 10, как отметки 1,1; 1,2; 1,3 и т. д. от отметки 1 (рис. 6). Другими словами, чтобы продолжить логарифмическую шкалу за пределы первого участка, достаточно повторить деления, нанесенные на первом участке, увеличив все числа отметок в десять раз.

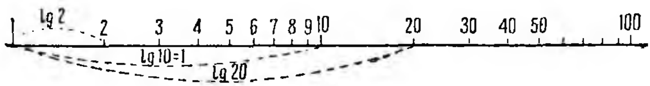

Рис. 6.

Указанным способом логарифмическая шкала может быть продолжена как угодно далеко, причем не только вправо, но и влево, если откладывать влево от начала отсчета отрицательные величины (рис. 7). Действительно, $\lg 0{,}1 = -1$; $\lg 0{,}11 = -1 + \lg 1{,}1$; $\lg 0{,}12 = -1 + \lg 1{,}2$ и т. д.

Рис. 7.

Таким образом, имея один участок логарифмической шкалы длиной в одну единицу масштаба, можно получить простым его повторением бесконечную логарифмическую шкалу.

4. ОСНОВНЫЕ ШКАЛЫ ЛИНЕЙКИ

Шкала ***D*** на линейке и шкала ***C*** на движке, называемые обычно основными шкалами линейки, представляют собой как раз такие участки логарифмической шкалы с единицей масштаба, равной 25 *см*.

Рассмотрим подробней нанесенные на эти шкалы деления. Сравнивая шкалы линейки с построенной выше (рис. 5) логарифмической шкалой, читатель легко найдет штрихи, изображающие целые числа, а также штрихи десятых долей (имеющие более мелкие цифровые отметки). Так как нанесенный на линейке участок логарифмической шкалы будет служить нам представителем бесконечной логарифмической шкалы, то каждая отметка будет изображать не одно число, заключенное между 1 и 10, например 2,3, но все числа, получающиеся из данного переносом запятой и приписыванием нулей справа и слева, например 230, 0,023 и т. п. В связи с этим рассмотренные нами деления лучше называть не делениями целых и десятых, а делениями первого и второго раз-

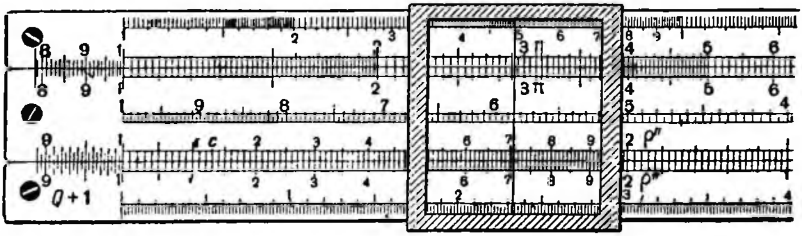

Рис. 8.

ряда. Так как правый конец шкалы *C* или *D* может изображать с одинаковым успехом и 10, и 1, и 100, и 0,001, мы будем называть его правой единицей шкалы *D* или *C* *),а начальную отметку этих шкал — их левой единицей.

Кроме делений второго разряда мы имеем на линейке и более мелкие деления — деления третьего разряда, позволяющие отсчитывать на шкалах линейки трехзначные числа. Эти деления различны на различных участках линейки. В начале линейки, до отметки 2 первого разряда, деления второго разряда имеют цифровые отметки **), и между каждыми двумя делениями второго разряда помещено десять более мелких делений. Следовательно, здесь каждое деление соответствует одной единице третьего разряда.

Пример. На рис. 8 визирная линия бегунка установлена у числа 1,71 или 17,1; 0,171 и т. п.

---

*) На большинстве линеек заграничного производства у правой единицы и стоит отметка 1, а не 10.

**) Обычно наносятся только цифры второго разряда 1, 2, ..., 9, а не полные отметки: 1,1; 1,2; ...; 1,9.

На участке между штрихами 2 и 4 первого разряда расстояние между любыми двумя соседними делениями второго разряда разделено на пять частей. Следовательно, здесь каждое мелкое деление соответствует уже не одной, а двум единицам третьего разряда. Одной единице третьего разряда будет соответствовать половина имеющегося на линейке деления. Деление пополам легко выполняется на глаз *).

Пример: На рис. 9 визирная линия бегунка установлена у числа 2,13 или 213; 0,0213 и т. п.

Наконец, на последнем участке шкалы, правее цифры 4 первого разряда, между двумя соседними делениями второго разряда мы видим только один промежуточный штрих, соответствующий,

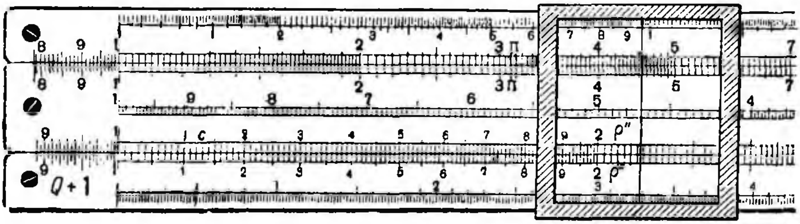

Рис. 9.

очевидно, пяти единицам третьего разряда. Если нам нужно получить отметку, соответствующую отличному от пяти числу единиц третьего разряда, следует мысленно разделить на глаз нужный промежуток шкалы на пять равных частей и отделить требуемое количество долей **). Сначала эта операция обыкновенно выполняется медленно и неуверенно, но довольно быстро приобретаются необходимые навыки.

Пример. На рис. 10 визирная линия бегунка установлена у числа 7,07 (или 70,7; 0,707 и т. д.).

Мы видим, что на линейке, с длиной масштабной единицы в 25 *см*, можно устанавливать достаточно точно числа, имеющие

*) У начинающих пользоваться счетной линейкой на этом участке чаще всего встречаются ошибки в отсчете. Здесь нужно быть особо внимательным.

**) На небольшом участке в пределах точности линейки вполне допустимо считать логарифмическую шкалу равномерной. Это совершенно эквивалентно пользованию пропорциональными частями в таблице логарифмов.

три значащие цифры *), причем при установке числа на линейке не обращают внимания на положение запятой и на нули на конце числа.

Поэтому, каждую отметку на линейке читают обычно как трехзначное число, называя последовательно все три составляющие его цифры. Так, число, отмеченное на рис. 8, читают — один, семь, один; число, отмеченное на рис. 9, — два, один, три. Отметку 3 первого разряда следует читать — три, ноль, ноль.

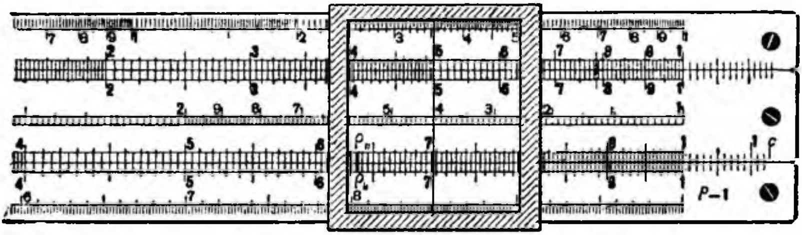

Рис. 10.

В начале шкалы, если первая цифра числа равна 1, может быть установлена приблизительно и четвертая значащая цифра числа.

Научиться быстро и точно устанавливать и читать числа на шкалах линейки — первая задача при обучении пользованию линейкой. Пока шкалы линейки не освоены, работа на линейке невозможна.

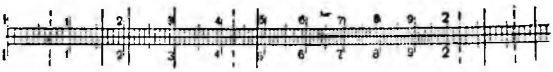

Рис. 11.

Упражнения. 1) Установить на основной шкале линейки визирной линией бегунка следующие числа: 13,7; 3,26; 0,675; 26,7; 0,103; 81,3; 0,0626; 302; 0,714; 4260.

2) Прочитать числа: сначала отмеченные сплошной черточкой, потом пунктирной (рис. 11).

3) Установив произвольно бегунок на линейке, прочитать стоящее под визирной линией число; повторить это упражнение несколько раз. Особенно удобно делать эти упражнения вдвоем при взаимном контроле.

*) Значащими цифрами числа называются все его цифры кроме нулей слева. Например, числа 2,75; 0,0142; 0,401; 715 имеют по три значащих цифры.

5. УМНОЖЕНИЕ

Как известно из алгебры, логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей. Это основное свойство логарифмов и используется счетной линейкой.

Выдвинем вправо движок так, чтобы его левая единица пришлась против отметки a на линейке. Возьмем на движке какое-либо число b и посмотрим, какое число c окажется против него на линейке. Так как основные шкалы C и D движка и линейки имеют одинаковый масштаб, то из рис. 12 очевидно, что $\lg c = \lg a + \lg b$, т. е. $c = ab$.

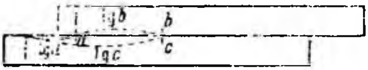

Рис. 12.

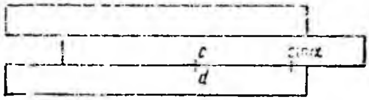

Рис. 13.

Таким образом, мы получаем следующее правило умножения: *Против первого множителя на линейке устанавливается единица движка; против второго множителя, взятого на движке, читается произведение на линейке. Схематически это правило можно изобразить так, как показано на рис. 13.*

Упражнение. Проверить на линейке умножения: $2{,}45 \cdot 3{,}64 = 8{,}92$; $62{,}7 \cdot 0{,}135 = 8{,}46$; $39{,}2 \cdot 1{,}77 = 69{,}4$.

Если мы теперь попытаемся перемножить по данному выше правилу 3 на 5, мы не сможем прочитать произведение, так как отметка 5 выйдет за пределы линейки. Очевидно, мы смогли бы получить ответ, если бы шкала линейки была более длинной. Однако, известно, что для получения продолжения шкалы D достаточно повторить уже имеющийся ее участок. Этого легко достигнуть, переместив линейку вправо относительно движка на одну масштабную единицу, для чего достаточно поместить отметку 3 не против левой, а против правой единицы движка *). В новом положении против отметки 5 на движке прочитаем искомый ответ (15) на линейке (рис. 14).

Если мы посмотрим теперь на получившуюся установку движка, то увидим, что она вполне соответствует данному ранее правилу, с той только разницей, что вместо левой единицы движка против первого множителя на линейке установлена правая единица движка.

---

*) Фактически мы передвигаем не линейку на 25 *см* вправо относительно движка, а движок на 25 *см* влево относительно линейки, что совершенно эквивалентно.

Очевидно, указанная замена одной единицы движка другой всегда позволит прочитать результат, если он не мог быть прочитан при первоначальной установке. Следовательно, в правиле умножения нужно иметь в виду, что для установки движка может быть использована или левая, или правая его единица.

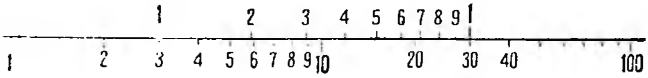

Рис. 14.

Упражнение. Проверить на линейке умножения: $2{,}75 \cdot 8{,}13 = 22{,}35$; $4{,}07 \cdot 32{,}5 = 132{,}3$; $7{,}23 \cdot 64{,}8 = 469$.

Процесс умножения чисел обычным арифметическим путем состоит из двух этапов: сначала получается цифровой состав произведения и затем в нем устанавливается запятая или приписывается необходимое число нулей, в зависимости от положения запятой или наличия нулей справа у сомножителей. При вычислении на линейке мы имеем те же два этапа: линейка дает только цифровой состав произведения, в котором необходимо еще установить положение запятой. Так как на линейке мы не получаем всех знаков точного произведения, обычные арифметические правила подсчета числа знаков после запятой оказываются непригодными. Наилучшим способом для установки запятой является грубый подсчет величины произведения в уме, который легко выполняется, если множители округлить, сохраняя лишь одну значащую цифру. При наличии дробей или больших чисел при этом рекомендуется выделять множителем положительные или отрицательные степени десяти.

Примеры. 1) $32{,}7 \cdot 0{,}0267$. Сделав установку линейки, прочитаем $8 - 7 - 3$; грубый подсчет дает: $30 \cdot 0{,}03 = 0{,}9$. *Ответ*: 0,873.

2) $0{,}0753 \cdot 0{,}00478$. Линейка дает для произведения цифры $3 - 6 - 0$; грубый подсчет: $7 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 35 \cdot 10^{-5}$. *Ответ*: 0,000360.

3) $82300 \cdot 0{,}0341$. Линейка дает для произведения цифры $2 - 8 - 1$; грубый подсчет: $8 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 24 \cdot 10^2 = 2\,400$, или $82300 \cdot 0{,}0341 = 823 \cdot 3{,}41 = 800 \cdot 3 = 2\,400$. *Ответ*: 2 810.

Другой способ установки запятой заключается в нахождении так называемого «порядка» произведения. Условимся называть **порядком числа**, большего единицы, число его значащих цифр до запятой. Для числа, меньшего единицы, назовем порядком отрицательное число, содержащее столько отрицательных единиц, сколько нулей после запятой содержит данное число. Например, для чисел 327; 2,75; 0,863; 0,00403 порядки будут равны соответственно 3; 1; 0; —2.

При умножении чисел на линейке оказывается справедливым следующее правило *): порядок произведения равен сумме порядков сомножителей, если движок выдвигается влево (используется правая единица), и на единицу меньше суммы порядков сомножителей, если движок выдвигается вправо (используется левая единица).

Чтобы легче запомнить это правило, на линейках справа у шкалы D стоит обычно надпись: Р — 1, означающая, что порядок произведения (Produkt), при выдвижении движка вправо, равен сумме порядков сомножителей минус 1.

Примеры. 1) $32{,}7 \cdot 0{,}0267$; на линейке читаем цифры произведения 8 — 7 — 3; движок вправо; порядок произведения равен $2+(-1)-1=0$. *Ответ*: 0,873.

2) $0{,}0753 \cdot 0{,}00478$; на линейке получаем произведение 3 — 6 — 0; движок влево; порядок произведения: $(-1)+(-2)=-3$. *Ответ:* 0,000360.

3) $82300 \cdot 0{,}0341$. Линейка дает 2 — 8 — 1; движок влево; порядок произведения равен $5+(-1)=4$. *Ответ*: 2 810.

Следует отметить, что при практических расчетах в большинстве случаев приблизительная величина результата бывает заранее известна, так что вопрос о возможном месте запятой и не возникает.

Упражнение. Вычислить произведения: $0{,}309 \cdot 15{,}8$; $27{,}4 \cdot 5{,}08$; $62{,}7 \cdot 0{,}00845$; $517 \cdot 18{,}3$; $0{,}345 \cdot 0{,}00237$.

В заключение заметим, что после установки единицы движка против числа a на линейке мы получаем таблицу умножения на a: против каждого числа шкалы C движка стоит на линейке его произведение на a. Таким образом, если требуется выполнить ряд умножений на один и тот же множитель, — это может быть выполнено с помощью бегунка при одной установке движка. В отдельных случаях может понадобиться только переброска движка на 25 *см* — замена одной конечной единицы другой.

Найдем, например, 21,3% от чисел: 175, 318, 521, 864, 1 218, 2 415. Задача сводится к умножению на 0,213. Установив против отметки 2 — 1 — 3 линейки левую единицу движка, мы сможем прочитать первые два результата: 37,3; 67,7. Для получения следующего результата нужно выполнить переброску движка. Практически, однако, целесообразнее будет сначала прочитать все возможные результаты при имеющимся положении движка (в нашем примере для двух последних из заданных чисел) и уже после этого перебросить движок. Техника переброски, к которой

*) Доказательство его можно найти в каком-либо подробном руководстве по счетной линейке, например, Панов, «Счетная линейка», ГТТИ, 1939 г., 5-е изд.

приходится прибегать во всех случаях, когда отметка, против которой должен быть получен результат, оказывается за пределами линейки, сводится к следующему: визирная линия бегунка устанавливается против стоящей в пределах линейки единицы движка, после чего движок перемещается так, что к визирной линии подводится другая единица. Перебросив движок, мы прочитаем недостающие результаты. Окончательная таблица:

От чисел	17,5	318	521	864	1 218	2 415
21,3% равны	37,3	67,7	111	185	259	514

6. ДЕЛЕНИЕ

Разобранная выше схема умножения может быть использована и для деления как действия, обратного умножению. Да и из самой схемы непосредственно вытекает (рис. 15):

$$\lg a = \lg c - \lg b \text{ или } a = \frac{c}{b}.$$

Приходим к следующему правилу деления: *против делимого на линейке устанавливается делитель, взятый на движке*; *против единицы движка читается на линейке частное.*

При рассмотрении схемы умножения уже было установлено равноправие обеих единиц движка. При делении мы также можем получать ответ как под правой, так и под левой единицей движка. В отличие от умножения здесь не приходится задумываться над тем, в какую сторону смещать движок, — его установка определяется делимым и делителем. Из двух единиц движка одна всегда будет находиться в пределах линейки, под ней и следует читать ответ.

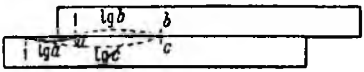

Рис. 15.

П р и м е р ы. $\frac{19,6}{3,61} = 5,43$; $\frac{7,67}{4,53} = 1,693$; $\frac{2,78}{6,23} = 0,446$.

Процесс деления, так же как и процесс умножения, состоит из двух этапов — получения цифрового состава частного и установки запятой. Линейка выполняет только первую часть работы. Для установки запятой опять-таки наиболее удобным способом является выполнение грубого подсчета в уме. Менее удобный способ — подсчет порядков. Здесь оказывается справедливым следующее правило: порядок частного равен разности между порядком делимого и порядком делителя, если частное читается у правой единицы движка (движок выдвинут влево), и на единицу больше этой разности, если ответ читается под левой единицей движка (движок выдвинут вправо) *). Чтобы легче запомнить это правило, на линейке слева у шкалы ***D*** имеется обычно надпись $Q+1$, напоминающая, что при чтении частного (Quotient) у левой единицы движка к разности порядков делимого и делителя следует прибавить единицу.

Примеры. 1) $\frac{35,7}{0,271}$; цифровой состав частного получаем на линейке (под левой единицей) 1—3—1—7; грубый подсчет: $\frac{30}{0,3}=100$. Порядок частного $2-0+1=3$. *Ответ*: 131,7.

2) $\frac{6,85}{28,4}$; на линейке читаем (под левой единицей) 2 — 4 — 1; грубый подсчет: $\frac{6}{30}=\frac{1}{5}=0,2$; порядок частного равен $1-2+1=0$. *Ответ*: 0,241.

3) $\frac{0,00274}{0,873}$; на линейке читаем (под правой единицей) 3 — 1 — 4; грубый подсчет: $\frac{0,003}{1}=0,003$; порядок частного равен $-2-0=-2$ *Ответ*: 0,00314

Упражнение. Вычислить частные: 9:3820; 3,72:1,643; 41,7:0,008 15 0,1863:0,0352; 61,4:5,26; 0,283:19,05.

7. КОМБИНИРОВАННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

На линейке удобно производить несколько последовательных умножений или делений. Пусть требуется перемножить три числа: $2,73\cdot0,145\cdot52,3$. Перемножим по общему правилу первые два числа. Против 2—7—3 линейки ставим левую единицу движка, против 1—4—5 движка можем прочитать произведение. Однако, это произведение нам знать не нужно, необходимо только умножить его на третий сомножитель. Для этой цели мы закрепим полученное произведение на шкале ***D***, установив у отметки 1—4—5 движка визирную линию бегунка, и выполним второе умножение, подведя к визирной линии бегунка (т. е. к первому произведению на шкале ***D***) единицу движка — на этот раз правую. Читая окончательный результат против отметки 5—2—3 движка, получим 2—0—7. Для установки запятой применяем грубый подсчет: $3\cdot0,1\cdot50=15$, или подсчет порядка (движок один раз был выдвинут вправо): $1+0+2-1=2$. *Ответ*: 20,7.

---

*) Это правило имеет одно исключение: оно неверно, если при вычислении $1:a$ пользоваться правой единицей шкалы ***D***.

Из разобранного примера ясно, что выполняя последовательные действия на линейке, мы имеем возможность не читать промежуточные результаты, а только закреплять их визирной линией бегунка.

Рассмотрим теперь случай последовательного умножения и деления. Пусть, например, требуется вычислить $\frac{5{,}3 \cdot 3{,}4}{2{,}2}$. Вычисления можно вести двумя способами — сначала умножение, потом деление или в обратном порядке. Посмотрим, к чему это сводится практически.

1) Против 5—3—0 линейки ставим единицу (правую) движка. Придвинув к отметке 3—4—0 движка визирную линию бегунка, отмечаем полученное произведение. Осталось выполнить деление, для чего подводим под визирную линию отметку 2—2—0 движка и под единицей движка читаем ответ: 8,19.

2) Выполним действия в обратном порядке. Против 5—3—0 линейки устанавливаем 2—2—0 движка. Под левой единицей движка получим частное. Для последующего умножения против этого частного нужно поставить единицу движка, но она уже здесь стоит. Следовательно, мы можем, не отмечая промежуточный результат, сразу прочитать ответ 8,19 под отметкой 3—4—0 движка.

Очевидно, что второй способ более удобен, так как он требует только одного перемещения движка.

Итак: *при последовательном выполнении действий следует выполнять сначала деление, а потом умножение.*

Если требуется выполнить несколько умножений и делений (вычисляется выражение вида $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{e \cdot f \cdot g}$), рекомендуется чередовать деления с умножениями (т. е. вести вычисление в таком порядке: $[(a : e \cdot b) : f \cdot c] : g \cdot d)$, благодаря чему уменьшается число установок движка.

Заметим, что в приведенном выше примере нам не удалось бы получить сразу результат, если бы второй множитель был равен не 3,4, а хотя бы 5,8. В этом случае, чтобы иметь возможность прочитать ответ, нам придется прибегнуть к необходимой в подобных случаях переброске движка (см. стр. 12). Везде в дальнейшем, когда мы будем говорить о вычислениях, выполняемых за одну установку движка, мы должны учитывать, что всегда может возникнуть потребность в переброске.

Для установки запятой при комбинированных вычислениях следует или прибегать к грубому подсчету, или по ходу вычисления подсчитывать порядок получаемых результатов. Полезно заметить, что, если вычисление вида $\frac{a \cdot b}{c}$ выполняется без переброски, порядок результатов равен сумме порядков сомножителей минус порядок делителя. Переброска влево увеличивает порядок результата на единицу, а переброска вправо — уменьшает на единицу.

Упражнения. Вычислить:

$$\frac{5{,}83\cdot 0{,}472}{65{,}3};\quad \frac{3{,}15\cdot 69{,}2}{0{,}784};\quad \frac{0{,}284\cdot 8{,}73}{4{,}28};\quad \frac{6{,}83\cdot 0{,}745\cdot 22{,}3}{2{,}08\cdot 43{,}7};\quad \frac{0{,}867\cdot 12{,}7\cdot 43{,}8}{5{,}64\cdot 7{,}22\cdot 0{,}348}.$$

8. ОБРАТНАЯ ШКАЛА

Линейки некоторых типов кроме шкал ***B*** и ***C*** на движке имеют еще посредине так называемую обратную шкалу ***I***. Эта шкала в точности совпадает с основной шкалой ***C***; только нанесена она в обратном порядке. Деления 1—1, 1—2 и т. д. находятся на этой

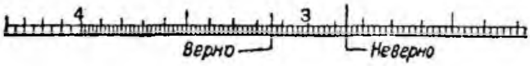

Рис. 16.

шкале у правого конца, а 9, 8 и т. д. — слева. При отсчете чисел на этой шкале важно не забывать отсчитывать деления второго и третьего разряда влево от делений первого разряда, а не вправо, как на шкалах ***C*** и ***D***. Здесь часто делают ошибки. На рис. 16 показан отсчет числа 3—1—4 правильный и неправильный,—как его часто делают начинающие пользоваться линейкой.

Обратной шкалой очень удобно пользоваться для умножения. Оказывается, что *если поставить друг против друга отметки множителей на основной шкале линейки и обратной шкале движка, то находящаяся в пределах линейки единица движка*

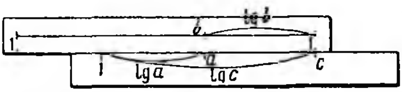

Рис. 17.

Рис. 18.

укажет произведение на основной шкале линейки. Действительно, из рис. 17, изображающего описанную установку, видно, что $\lg a + \lg b = \lg c$, т. е. $a\cdot b = c$.

К этому правилу мы могли бы притти иначе. Сравним какие-либо две стоящие друг против друга отметки обратной и основной шкалы движка (рис. 18). Мы видим, что $\lg m + \lg n = 1$, или $m\cdot n = 10$, $n = \frac{10}{m}$. Принимая во внимание, что отсчет числа на линейке не зависит от положения запятой, мы можем сказать, что *отметки обратной шкалы дают обратные величины стоящих против них отметок основной шкалы.* Теперь ясно, как получилось данное выше правило умножения с помощью обратной шкалы. Оно попросту повторяет обычное правило деления, только «делитель» устанавливается на обратной шкале. Но устанавливая какое-либо число на обратной шкале, мы тем самым установим обратную его величину на основной шкале. Следовательно, фактически мы будем выполнять деление на эту обратную величину, т. е. умножение на число, установленное на обратной шкале.

Порядок произведения при умножении с помощью обратной шкалы равен сумме порядков сомножителей, если результат читается над левой единицей движка (движок вправо), и на единицу меньше этой суммы, если результат читается над правой единицей движка (движок влево).

Умножение с помощью обратной шкалы делать проще, чем с помощью основной, так как не приходится задумываться над тем, которой единицей следует воспользоваться. Особенно удобна обратная шкала при перемножении нескольких множителей. Если мы вспомним, что деление с последующим умножением делается за одну установку движка, то мы легко сообразим, что за одну установку *) может быть получено произведение трех множителей, если первые два перемножить с помощью обратной шкалы, а умножение на третий выполнить обычным способом.

Пример. 32,4·0,0543·0,472. Против 3—2—4 основной шкалы линейки ставим 5—4—3 обратной шкалы движка. Под 4—7—2 основной шкалы движка читаем результат: 8—3—0. Для установки запятой пользуемся грубым подсчетом: (30·0,05 = 1,5; 1,5·0,5 = 0,75) или подсчетом порядков. Так как движок выдвинут вправо, то при втором умножении сумма порядков сомножителей должна быть уменьшена на единицу. Следовательно, порядок произведения равен 2 — 1 + 0 — 1 = 0. *Ответ*: 0,830.

Так как деление на какое-либо число равносильно умножению на величину, ему обратную, то правило деления с помощью обратной шкалы может быть получено из основного правила умножения. *Против делимого на основной шкале линейки устанавливается единица (правая или левая) движка; против делителя на обратной шкале читается частное на основной шкале линейки.*

Порядок частного при делении по этому правилу равен разности порядков делимого и делителя, если движок выдвинут вправо, и на единицу больше этой разности, если движок выдвинут влево.

---

*) В отдельных случаях может понадобиться переброска движка.

Деление удобнее выполнять, пользуясь основной шкалой; однако, иногда оказывается целесообразным обращаться к обратной шкале. Так, например, если требуется получить несколько частных от деления одного и того же числа на различные делители, применение обратной шкалы позволит выполнить все вычисления за одну установку движка. Читатель легко сообразит сам, как, пользуясь обратной шкалой, вычислить с помощью одной установки движка выражение вида $\frac{a}{b \cdot c}$.

Конечно, во всех случаях вычислений, рассмотренных в настоящем параграфе, можно было бы обойтись и без обратной шкалы, но тогда потребовалось бы большее число установок движка. Каждое лишнее движение движка отнимает время и увеличивает погрешность вычислений. Поэтому нужно стремиться научиться считать на линейке наиболее экономным способом, делая как можно меньше перемещения движка.

Упражнения. 1) Вычислить: $7{,}53 \cdot 27{,}4 \cdot 33{,}7$; $8{,}61 \cdot 5{,}03 \cdot 0{,}427 \times$ $\times 0{,}143 \cdot 0{,}0369$; $\frac{4{,}73}{5{,}28 \cdot 0{,}0189}$; $\frac{641}{0{,}354 \cdot 4{,}68 \cdot 2{,}35 \cdot 9{,}67}$.

2) Найти частные от деления 83 на 23, 33, 43, 53, 63, 73, 93, 103.

9. ШКАЛА КВАДРАТОВ

Рассмотрим теперь шкалы, помещенные на верхнем крае движка и прилегающей к нему части линейки, которые мы называли шкалами ***A*** и ***B*** (рис. 2). Эти шкалы, тождественные между собой, также как шкалы ***C*** и ***D***, — логарифмические, но единица масштаба у них вдвое меньше — не 25 *см*, а 12,5 *см*. Поэтому на линейке помещается не одна, а две единицы масштаба. Деления, нанесенные на обеих половинах линейки, совершенно тождественны, как это и следует из § 3. Деления первого разряда отмечены цифрами, причем на многих линейках во второй половине шкал ***A*** и ***B*** вместо цифр 2, 3, . . . , 9, стоят цифры 20, 30, . . ., 90. Каждая половина может изображать любой участок бесконечной логарифмической шкалы. Обе они вполне эквивалентны при всех вычислениях, кроме извлечения квадратного корня, о чем см. стр. 22.

Читатель, научившийся свободно читать числа на шкалах ***C*** и ***D***, легко ориентируется в делениях шкал ***A*** и ***B***. Самые мелкие деления соответствуют на участке от 1 до 2 — двум единицам 3-го разряда, на участке от 2 до 5—пяти единицам 3-го разряда и, наконец, от 5 до следующей единицы — одной единице 2-го разряда.

Очевидно, что точность установки и чтения чисел на шкалах ***A*** и ***B*** меньше, чем на шкалах ***C*** и ***D***. В то время как на нижних шкалах мы можем получить даже четыре знака в начале шкалы и довольно надежные три знака в конце, на верхних шкалах получить больше трех знаков невозможно, а третий знак в конце шкалы получается весьма сомнительным.

С помощью шкал A и B можно вести вычисления, совершенно так же, как и с помощью шкал C и D. Так как шкалы A и B содержат по два участка единичной длины, то на этих шкалах можно вести вычисления, не прибегая к перебросками. Всякое число может быть установлено как на правой, так и на левой половине шкалы. Единиц здесь имеется три — справа, слева и посредине, — причем все могут быть использованы с равным правом. При работе на шкалах A и B правила подсчета порядков неприменимы, так что для установки запятой приходится всегда прибегать к грубому подсчету *).

Упражнения. Сделать с помощью верхних шкал упражнения, приведенные на стр. 14, 16 и 18.

Сравним стоящие друг против друга отметки шкал A и D (рис. 19). Установим на нижней шкале какое-либо число m. Расстояние от начальной единицы до отметки m на нижней шкале будет равно $\lg m$ в масштабе нижней шкалы ($1 = 25$ *см*). Так как масштаб на верхней шкале вдвое меньше, то в масштабе верхней шкалы на этом же расстоянии уложится $2 \lg m$. Значит, если против отметки m шкалы D стоит отметка n шкалы A, то $\lg n = 2 \lg m$, т. е. $n = m^2$. Итак, *против каждого числа шкалы* D *стоит его квадрат на шкале* A.

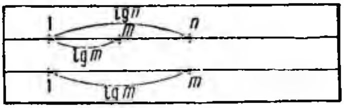

Рис. 19.

В связи с этим шкалу A (а также и B) называют обычно шкалой квадратов.

Чтобы получить квадрат какого-либо числа, достаточно отметить это число на основной шкале и под той же визирной линией на шкале квадратов прочитать искомый квадрат. Для установки запятой служит, как всегда, или грубый подсчет, или следующее правило: порядок квадрата равен удвоенному порядку основания, если ответ читается на второй половине шкалы квадратов, и на единицу меньше, если на первой.

Примеры. $2{,}73^2 = 7{,}45$; $717^2 = 51\,400$; $0{,}165^2 = 0{,}0272$; $0{,}0428^2 = 0{,}00183$.

Установленное соответствие между шкалами A и D можно использовать, очевидно, и для выполнения действия, обратного

*) Конечно, правила подсчета порядков могут быть переработаны для верхних шкал, но они при этом настолько усложняются, что применять их нецелесообразно.

возведению в квадрат, а именно — извлечения квадратного корня. *Против каждого числа шкалы квадратов может быть прочитан на основной шкале корень квадратный из этого числа.* Однако, при извлечении корня не безразлично, на какой половине шкалы квадратов устанавливать подкоренное число. Из правила нахождения порядка квадрата видно, что при возведении в квадрат числа второй половины шкалы квадратов оказываются всегда четного порядка, а числа первой половины — нечетного. Поэтому и при извлечении корня следует устанавливать числа нечетного порядка на первой, а четного — на второй половине шкалы. Порядок корня равен половине порядка подкоренного числа, причем если этот порядок нечетный, он должен быть предварительно увеличен на единицу.

Существует другое правило, позволяющее определять, куда следует устанавливать подкоренное число при извлечении квадратного корня. Для этой цели данное число разбивают на «грани» из двух цифр, вправо и влево от запятой, как при алгебраическом процессе извлечения квадратного корня. Если первая слева грань (не считая граней, состоящих из одних нулей) содержит одну значащую цифру, подкоренное число устанавливается на первой половине шкалы квадратов, если же две, — то на второй. Например, при вычислении квадратных корней из чисел 475, 0,0321, 1723, 45,2 0,0075 мы будем пользоваться первой половиной шкалы *A* в первых двух случаях, а второй — во всех остальных *). Пользуясь этим способом, легко устанавливать запятую, так как каждая грань подкоренного числа, стоящая до запятой, дает у корня один знак до запятой, а каждая чисто нулевая грань после запятой (если подкоренное число меньше 1) дает у корня один нуль после запятой.

Примеры. $\sqrt{475} = 21{,}8$; $\sqrt{0{,}0321} = 0{,}179$; $\sqrt{1723} = 41{,}5$; $\sqrt{45{,}2} = 6{,}72$; $\sqrt{0{,}0075} = 0{,}0866$.

Упражнения. 1) Вычислить: $3{,}71^2$; $0{,}0124^2$; 868^2; $0{,}0063^2$; $0{,}261^2$.

2) Вычислить: $\sqrt{5673}$; $\sqrt{0{,}0863}$; $\sqrt{29{,}7}$; $\sqrt{0{,}003}$; $\sqrt{0{,}00011}$.

10. ШКАЛА КУБОВ

Линейки некоторых типов имеют у верхнего края логарифмическую шкалу ***K*** (см. рис. 2), масштаб которой в три раза меньше основного, так что на протяжении линейки помещается

*) Грани должны содержать по две цифры. Поэтому при вычислении 0,007 семерку следует устанавливать на второй половине шкалы квадратов, так как подкоренное число должно быть представлено в виде 0,0070.

три масштабных единицы шкалы. Повторяя рассуждение, проведенное на стр. 21, мы легко придем к выводу, что против числа m шкалы D на шкале K стоит число m^3 (рис. 20). Шкала K называется обычно **шкалой кубов**. Деления второго и третьего разрядов нанесены на этой шкале такие же, как и на шкале квадратов.

Для возведения какого-либо числа в куб достаточно установить против этого числа на основной шкале линейки визирную линию бегунка. На шкале K под той же визирной линией мы сможем прочитать искомый куб. Порядок куба будет равен утроенному порядку основания, если ответ читается на последнем участке шкалы K, и на одну или две единицы меньше, если ответ читается соответственно на втором или на первом участке этой шкалы.

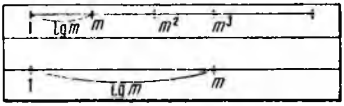

Рис. 20.

Примеры. $2{,}32^3 = 12{,}5$; $0{,}133^3 = 0{,}00235$; $68{,}3^3 = 319\,000$; $0{,}043^3 = 0{,}0000795$.

Извлечение кубического корня выполняется также просто путем перехода со шкалы K на шкалу D. При этом важно установить подкоренное число на нужном участке шкалы кубов. Для этой цели наиболее удобно правило разделения подкоренного числа на грани, аналогичное правилу извлечения квадратного корня (стр. 22). Только теперь грани должны содержать не по две, а по три цифры. Число значащих цифр в первой слева грани (не считая чисто нулевых) определяет номер того участка шкалы K, на котором должно быть установлено подкоренное число. Запятая у корня устанавливается в зависимости от числа граней, в точности так же, как в случае квадратного корня.

Примеры. $\sqrt[3]{47{,}3} = 3{,}62$; $\sqrt[3]{0{,}349} = 0{,}704$; $\sqrt[3]{0{,}0063} = 0{,}1847$; $\sqrt[3]{2\,730} = 13{,}98$; $\sqrt[3]{0{,}07} = 0{,}412$ $(0{,}07 = 0{,}070)$.

Упражнения. 1) Вычислить: $0{,}253^3$; $79{,}3^3$; $0{,}0128^3$; $3{,}54^3$.
2) Вычислить: $\sqrt[3]{612}$; $\sqrt[3]{0{,}0483}$; $\sqrt[3]{0{,}8}$; $\sqrt[3]{0{,}0023}$.

11. КОМБИНИРОВАННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА РАЗНЫХ ШКАЛАХ

Используя различные шкалы на линейке, можно легко производить вычисления, содержащие, кроме умножения и деления, также возведение в квадрат и в куб и извлечение корня квадратного и кубического. Рассмотрим несколько примеров подобных вычислений.

1) Вычислить $2{,}75^2 \cdot 0{,}562$. Чтобы получить $2{,}75^2$, устанавливаем визирную линию у отметки 2—7—5 на основной шкале линейки. На шкале квадратов может быть прочитан искомый квадрат, но можно, не читая, умножить его на 5—6—2 с помощью шкалы квадратов движка. Для этой цели к установленной отметке подводим единицу движка (безразлично, какую из трех единиц шкалы *B*). Против 5—6—2 шкалы *B* читаем на шкале *A* ответ: 4,25. Установка запятой сделана по грубому подсчету. Обратим внимание, что полученная установка линейки в точности соответствует правилу умножения (см. стр. 12); только один из «множителей» устанавливается на основной шкале, хотя процесс умножения ведется по существу на шкалах квадратов. Последнее совершенно неизбежно, так как множитель $2{,}75^2$ мы можем получить только на шкале квадратов.

2) Вычислить $\frac{37{,}5}{\sqrt{6{,}03}}$. Надо разделить на корень квадратный. Значения квадратных корней мы получаем, переходя со шкалы квадратов на основную. Стало быть, деление следует выполнять на основных шкалах, но подкоренное число делителя должно устанавливаться на шкале квадратов. Итак, против 3—7—5 основной шкалы линейки устанавливаем 6—0—3 шкалы квадратов (в соответствии с правилом извлечения корня — на первой половине). Под единицей на основной шкале линейки читаем ответ: 15,27 (запятая установлена с помощью грубого подсчета).

3) Вычислить $\frac{\sqrt{51{,}3 \cdot 0{,}074}}{21{,}3}$. Чтобы извлечь квадратный корень, мы должны подкоренное число иметь на шкале квадратов. Следовательно, указанные под корнем действия нужно выполнить на шкалах *A* и *B*. При этом, чтобы получить результат на той половине шкалы, на которой он должен стоять для извлечения корня, следует все входящие в вычисление числа устанавливать так, как если бы из них нужно было извлекать корень*). Итак, против 5—1—3 шкалы *A* (вторая половина) устанавливаем 2—1—3 шкалы *B* (вторая половина). Против 7—4—0 шкалы *B* (первая половина) мы могли бы прочитать на шкале *A* подкоренное число, но проще сразу читать квадратный корень из него на шкале *D*.

Ответ: 0,422.

4) Вычислить: $4{,}71 \cdot 23{,}5 \cdot 3{,}42^2$. Мы видели, что произведение трех множителей легко находится с помощью обратной шкалы (стр. 19). Поскольку среди множителей имеется один квадрат, вычислять нужно на шкале квадратов. Если мы хотим использо-

---

*) Фактически на нижних шкалах выполняются действия с корнями из тех чисел, которые мы устанавливаем наверху.

вать обратную шкалу, то на ней следует устанавливать именно то число, которое возводится в квадрат, так как обратная шкала имеет тот же масштаб, что и основная. Итак, против 4—7—1 шкалы ***A*** устанавливаем 3—4—2 обратной шкалы; над 2—3—5 шкалы ***B*** читаем на шкале ***A*** ответ: 1 295. Так как в настоящем вычислении нет извлечения корня, отсчеты на шкалах ***A*** и ***B*** могут делаться на любой половине.

Приведенные примеры наглядно показывают, что при комбинированных вычислениях с применением различных шкал используются данные ранее правила, причем там, где встречается возведение в квадрат или извлечение корня, должен быть сделан переход снизу вверх или сверху вниз. Наличие того или иного перехода определяет шкалы, на которых должны выполняться вычисления. Если в вычислениях встречается извлечение квадратного корня, то, устанавливая числа на шкалах ***A*** и ***B***, надо соблюдать правило, данное на стр. 22 *).

Комбинированные вычисления с участием шкалы кубов выполняются аналогично. Здесь могут встретиться затруднения в связи с тем, что эта шкала имеется только на линейке. Во многих случаях из этого затруднения можно выйти, меняя в правилах действий роль шкал движка и линейки, которые, вообще говоря, вполне равноправны. Проиллюстрируем этот прием на примере. Вычислим:

$$0{,}453\sqrt[3]{\frac{23{,}5}{3{,}42}}.$$

Против 4—5—3 основной шкалы линейки ставим 3—4—2 первого участка шкалы кубов движка; ответ прочитается на основной шкале линейки против 2—3—5 второго участка шкалы кубов движка. Эта установка невозможна, так как шкалы кубов на движке нет. Если же переставить везде слова «линейка» и «движок», установку удастся реализовать. Ответ будет прочитан на движке: 0,861.

При первом знакомстве с линейкой комбинированные вычисления часто вызывают затруднения, и обучающийся идет по пути наименьшего сопротивления – делает вычисление по частям, прочитывая и вновь устанавливая промежуточные результаты. Это совершенно недопустимо. Необходимо добиваться наилучшего использования линейки, а в комбинированных вычислениях возможности линейки особенно ярко выявляются.

---

*) В следующем параграфе даны правила пропорции, которые с успехом могут применяться для выбора схем комбинированных вычислений.

Упражнение. Вычислить (везде за одну установку движка, не считая перебросок): 1) $\frac{\sqrt{3,71}}{0,0562}$; 2) $\frac{2,83 \cdot 72,8}{4,03^2}$; 3) $(0,784 \cdot 6,21 \cdot 0,142)^2$; 4) $\frac{61,5 \cdot \sqrt{0,007}}{33,4}$; 5) $28,3 \cdot \sqrt[3]{0,0175}$.

12. ПРАВИЛО ПРОПОРЦИИ

Все правила действий на счетной линейке могут быть по существу сведены к одному правилу — «правилу пропорций», которое мы и рассмотрим в настоящем параграфе.

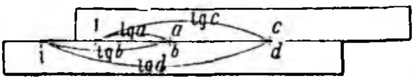

Рис. 21.

Возьмем линейку с произвольно выдвинутым движком и рассмотрим какие-либо две пары чисел, стоящих друг против друга на одинаковых (***C*** и ***D*** или ***A*** и ***B***) шкалах линейки и движка. Из рис. 21 следует, что

$$\lg c - \lg a = \lg d - \lg b$$

или

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}.$$

Записав последнюю пропорцию в виде

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

мы приходим к выводу, что *при любом положении движка стоящие друг против друга числа одинаковых шкал будут пропорциональны.* При данном положении движка отношение чисел шкалы ***B*** или ***C*** движка к стоящим против них числам шкалы ***A*** или ***D*** линейки будет одно и то же.

Замечательно, что сама запись пропорции очень хорошо отражает установку чисел на линейке: стоящие друг над другом числа в пропорции должны находиться друг над другом и на линейке; числа, стоящие в числителе, соответствуют числам одной шкалы (например, на движке); числа, стоящие в знаменателе, соответствуют числам другой шкалы (например, на линейке). Записав в виде пропорции формулу, по которой должны вестись вычисления, мы тем самым получаем правило для установки чисел на линейке. Так, например, записав формулу $x = a \cdot b$ в виде пропорции $\frac{x}{b} = \frac{a}{1}$, получим правило умножения (здесь и ниже везде числитель —

линейка, знаменатель — движок). Пропорция $\frac{x}{1}=\frac{a}{b}$ определяет правило деления. Наконец, правило чередования деления с умножением при вычислении выражения $x=\frac{a \cdot b}{c}$ (стр. 17) прямо вытекает из пропорции.

С помощью правила пропорции легко вести пропорциональные расчеты, процентирование и т. п. Рассмотрим два примера.

1) Химический анализ некоторой смеси дал для количества отдельных составляющих значения, помещенные в первом столбце приводимой ниже таблицы. Определить процентное содержание каждой составляющей.

A	353 *г*	53,6%
B	204 *г*	31,0%
C	73 *г*	11,1%
D	28 *г*	4,3%
	658 *г*	100%

Задача сводится к решению пропорций

$$\frac{x_1}{353}=\frac{x_2}{204}=\frac{x_3}{73}=\frac{x_4}{28}=\frac{100}{658}.$$

Из записи пропорции вытекает установка: против единицы линейки (удобнее правой) ставим 6—5—8 движка *). Против стоящих в знаменателе чисел на движке (поскольку 6—5—8 ставилось на движке) читаем на линейке ответы (для x_3 понадобится переброска движка). Установка запятой не вызывает затруднений.

2) Распределить сумму счета за электроэнергию 27 руб. 50 коп. между тремя потребителями пропорционально потребляемой мощности: A — 115 W, B — 65 W и C — 245 W. Задача сводится к решению пропорций:

$$\frac{27{,}5}{425}=\frac{x_1}{115}=\frac{x_2}{65}=\frac{x_3}{245}.$$

Из записи пропорции вытекает установка: против 2—7—5 (сумма) линейки ставим 4—2—5 (мощность) движка. Против значений потребляемой мощности на движке читаем на линейке ответы: $x_1=7{,}44$, $x_2=4{,}21$, $x_3=15{,}85$. Установка запятой не вызывает сомнений. Контроль: $x_1+x_2+x_3=27{,}5$ **).

*) Можно пользоваться как основной шкалой, так и шкалой квадратов. В первом случае получим более точные результаты, во втором избегнем переброски движка.

**) Можно было бы ставить мощность на линейке, а сумму — на движке. Однако, обычно установку выбирают так, чтобы искомые величины читались на линейке.

Из основного правила пропорции можно получить другие правила, если сопоставлять стоящие друг против друга числа на различных шкалах линейки. Введем, например, в рассмотрение обратную шкалу. Как известно, против каждого числа m на обратной шкале стоит число $\frac{1}{m}$ на основной шкале движка (рис. 22). Значит, если против отметок a и c основной шкалы линейки стоят соответственно отметки b и d обратной шкалы, то тем самым на основной шкале движка установлены числа $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{d}$, так что имеет место пропорция

$$a : \frac{1}{b} = c : \frac{1}{d},$$

или

$$a \cdot b = c \cdot d.$$

Таким образом, *при каждом положении движка произведения чисел, стоящих друг против друга на обратной шкале и на основной шкале линейки, равны между собой.*

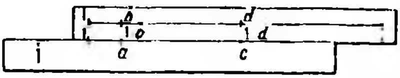

Рис. 22.

Это свойство обратной шкалы позволяет с удобством применять ее при расчетах, связанных с обратно пропорциональной зависимостью.

Например, переменные x и y связаны зависимостью: $x \cdot y = \text{const}$. При $x = 3{,}8$ дано $y = 54{,}3$. Найти y при $x = 5$, 7, 9, 11, 13, 15, 20, 25. Будем отсчитывать x на обратной шкале, а y на основной шкале линейки. Установив друг против друга отметки 3 — 8 — 0 (на шкале x-ов) и 5 — 4 — 3 (на шкале y-ов), сможем против каждого заданного значения x найти соответствующее значение y (для получения последнего значения потребуется переброска движка):

x	5	7	9	11	13	15	20	25
y	41,3	29,5	22,9	18,76	15,87	13,76	10,32	8,25

Установка запятой не вызывает затруднений, если помнить, что y убывает с ростом x.

Сопоставляя шкалы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ (или $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{C}$), мы легко получим (рис. 23):

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{d}, \text{ т. е. } \frac{a^2}{b} = \frac{c^2}{d} \text{ (так как } m = a^2,\ n = c^2)$$

или

$$\frac{a}{p}=\frac{c}{q}\text{, т. е. } \frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{c}{\sqrt{d}}\ (\text{так как } p=\sqrt{b},\ q=\sqrt{d}).$$

Совершенно так же обратная шкала и шкала квадратов дадут нам соотношения (рис. 24)

$$\frac{a}{m^2}=\frac{c}{n^2}\text{ или } ab^2=cd^2\ \left(\text{так как } m=\frac{1}{b},\ n=\frac{1}{d}\right).$$

Таким образом, сопоставляя стоящие друг против друга отметки различных шкал, мы легко можем вычислять на линейке величины, прямо или обратно пропорциональные квадратам заданных чисел или корням квадратным из них.

Рис. 23.

Рис. 24.

Для получения соответствующей установки линейки при решении практических задач важно понять лишь основное правило пропорции для одинаковых шкал и то, что при сопоставлении со шкалой квадратов нижних (основных и обратной) шкал стоящие на них числа возводятся в квадрат. Замена основной шкалы обратной меняет прямую пропорциональность на обратную.

При пользовании шкалой квадратов совместно с одной из нижних шкал необходимо твердо соблюдать правило установки чисел нечетного порядка на одной половине шкалы, четного порядка на другой *).

Пример. Металлический цилиндр диаметром 17,3 *см* и высотой 36,7 *см* весит 62,4 *кг.* 1) Сколько будет весить цилиндр такого же диаметра, но высоты 15, 20, 25, 30 *см*? Вес цилиндра пропорционален высоте. Будем отсчитывать высоту на шкале *C*, вес — на шкале *D*. Установив высоту 3 — 6 — 7 против веса 6 — 2 — 4, сможем прочитать искомые веса: 25,5; 34,0; 42,5; 51,0 *кг.*

2) Сколько будет весить цилиндр той же высоты, но диаметра 3, 5, 12, 16, 20, 24 *см*? Вес пропорционален квадрату диаметра. Величина, возводимая в квадрат (диаметр), должна устанавливаться на основной шкале. Если мы хотим читать результаты на линейке, мы должны взять

*) При вычислениях с пропорциями несущественно, чтобы числа нечетного порядка устанавливались именно на первой половине шкалы квадратов; важно лишь, чтобы в процессе данного вычисления на одной и той же половине не устанавливались числа как четных, так и нечетных порядков.

за шкалу веса шкалу *A*, а за шкалу диаметра шкалу *C*. Установив диаметр 1 — 7 — 3 против веса 6 — 2 — 4 (удобнее на левой половине шкалы — движок менее выдвинут), сможем прочитать искомые веса *): 1,88; 5,21; 30,0; 53,4; 83,4; 120 *кг*.

3) Каков должен быть диаметр цилиндра того же веса, но высоты 15, 20, 25, 30 *см*? При данном объеме (весе) квадрат диаметра обратно пропорционален высоте. Шкалы для переменных диаметра и высоты определяются однозначно. Действительно, в вычислении должна участвовать ооратная шкала; она может служить только шкалой диаметров, так как диаметр должен отсчитываться на одной из нижних шкал. Следовательно, для высоты может быть использована только шкала *A*. Итак, устанавливаем 1 — 7 — 3 шкалы диаметров (*I*) против 3 — 6 — 7 шкалы высот (*A*) **). ротив заданных высот читаем искомые диаметры: 27,6; 23,4; 21,0; 19,13 *см*.

Упражнения. 1) Скорость истечения жидкости из малого отверстия пропорциональна корню квадратному из величины напора. Если при напоре $H = 8{,}3$ *м* скорость истечения равнялась 11,2 *м/сек*, какова будет скорость при $H = 7$, 6, 5, 4, 3 и 2 *м*?

2) Какова должна быть длина провода диаметра 1,2; 0,75; 0,5; 0,35 *мм*, имеющего такое же электрическое сопротивление, как кусок провода из того же материала длиной 23,5 *м* и диаметром 0,9 *мм* (сопротивление пропорционально длине и обратно пропорционально квадрату диаметра)?

3) Через трубу диаметром 75 *мм* течет вода со скоростью 1,85 *м/сек*. Какова будет скорость течения (при том же расходе жидкости) в трубе диаметром 90, 60, 45, 25 *мм*?

Если на линейке имеется шкала ***K***, то, сопоставляя ее со шкалами ***C*** или ***I***, мы можем получать величины, прямо или обратно пропорциональные кубам заданных чисел. Все сказанное выше для шкалы квадратов может быть применено и к шкале кубов.

Легко установить также, что кубы чисел шкалы ***B*** пропорциональны квадратам стоящих против них чисел шкалы ***K*** или, что то же, числа шкалы ***K*** пропорциональны стоящим против них числам шкалы ***B***, возведенным в степень $\frac{3}{2}$.

Останавливаться детально на вычислениях со шкалой ***K*** мы не будем, считая, что читатель самостоятельно сумеет их освоить. Укажем только на необходимость тщательного соблюдения правил установки на шкале ***K***, данных на стр. 23.

В заключение заметим, что правило пропорции может облегчить нахождение нужной установки при выполнении каких-либо действий над тремя заданными числами. Записав формулу, по которой ведутся вычисления, в виде пропорции и учитывая сказанное на

---

*) Вычисления выполняются без переброски, которая была бы необходима, если бы число 6 — 2 — 4 было установлено на правой половине шкалы.

**) Здесь удобнее 3 — 6 — 7 брать на правой половине шкалы, чтобы бо́льшая часть движка находилась внутри линейки.

стр. 26—27, а также соотношения между различными шкалами линейки, мы тем самым получим нужную установку. Рассмотрим это на примерах.

1) Как вести вычисления по формуле: $x = a \cdot b\sqrt{c}$? Записав данную формулу в виде: $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{c}}{\frac{1}{b}}$, получим установку: против c шкалы $\boldsymbol{A}$ ставим b шкалы $\boldsymbol{I}$. Против a шкалы $\boldsymbol{C}$ читаем x на шкале $\boldsymbol{D}$. Поясним эту установку несколько подробнее. Наличие в формуле квадратного корня приводит к необходимости вести вычисление на основных шкалах. Обратная шкала, на которой мы должны установить b для получения $\frac{1}{b}$, имеется только на движке; значит, в пропорции числители должны устанавливаться на линейке, знаменатели на движке.

Другой вариант: $\frac{x}{\sqrt{c}} = \frac{a}{\frac{1}{b}}$. Против a шкалы $\boldsymbol{D}$ ставим b шкалы $\boldsymbol{I}$; против c на шкале $\boldsymbol{B}$ читаем ответ на шкале $\boldsymbol{D}$.

2) Как вести вычисление по формуле $x = \frac{a}{bc^2}$? Наличие квадрата приводит к необходимости вести вычисление на шкалах квадратов. При этом нельзя обойтись без обратной шкалы, так как из чисел x, a, b, c^2 составить пропорцию нельзя. Пропорцию $\frac{x}{\frac{1}{b}} = \frac{a}{c^2}$ нельзя реализовать на линейке, так как для этого мы должны были бы иметь обратную шкалу квадратов (для получения $\frac{1}{b}$). Пропорция: $\frac{x}{\frac{1}{c^2}} = \frac{a}{b}$ дает следующую установку: против a шкалы $\boldsymbol{A}$ ставим b шкалы $\boldsymbol{B}$; против c на обратной шкале читаем x на шкале $\boldsymbol{A}$.

Упражнение. Разобрать с помощью правила пропорции установки в примерах и упражнениях § 11.

§ 13. ЛОГАРИФМИРОВАНИЕ

Логарифмическая шкала, как видно из принципов ее построения, представляет собой графическую таблицу логарифмов. Для нахождения логарифма какого-либо числа x достаточно измерить расстояние от начала отсчета (отметки 1) до отметки x логарифмической шкалы. Это измерение мы можем легко осуществить на основной шкале линейки, так как на линейке имеется равномерная шкала L, рассмотренная в § 2, с единицей масштаба 25 *см*. Если установить визирную линию бегунка против числа x на шкале D, то на шкале L эта визирная линия даст нам величину $\lg x$. Вернее, мы получим только дробную часть логарифма, его мантиссу, так как отметку x можно отнести к любому участку логарифмической шкалы и стало быть прибавить к отсчитанному логарифму любое целое число единиц. Целая часть логарифма, его характеристика, находится по обычным правилам алгебры. Заметим, что порядок числа, как мы его определили на стр. 13, будет на единицу больше характеристики.

Обратно, зная логарифм числа, нетрудно найти это число. Отсчитав на шкале L мантиссу данного логарифма, с помощью бегунка читаем соответствующее число на шкале D. Характеристика логарифма позволит поставить у получившегося числа запятую.

Как уже указывалось в § 2, у некоторых систем линеек шкала L нанесена посреди движка, на обратной его стороне, причем отсчет на этой шкале ведется справа налево. Для получения

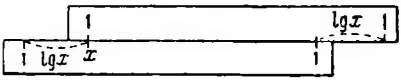

Рис. 25.

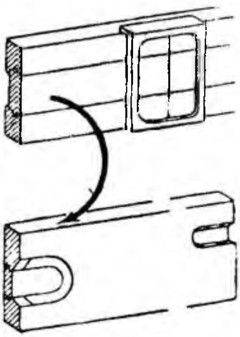

Рис. 26.

логарифма числа x на такой линейке нужно выдвинуть движок вправо, установив его левую единицу против отметки x шкалы D. Искомый логарифм (точнее его мантисса) будет равен смещению движка (рис. 25). Чтобы измерить, достаточно перевернуть линейку и сделать отсчет по шкале L с помощью нижнего штриха в имеющемся справа вырезе линейки (рис. 26). Этот штрих приходится в точности против правой единицы на лицевой стороне линейки.

Чаще всего к логарифмированию приходится прибегать для вычисления дробных степеней.

Примеры. 1) Вычислить $x = 3{,}74^{1{,}63}$. Логарифмируя, получим $\lg x = 1{,}63 \cdot \lg 3{,}74$. Шкала L дает $\lg 3{,}74 = 0{,}573$. Умножая на линейке, найдем $\lg x = 1{,}63 \cdot 0{,}573 = 0{,}934$. По полученному логарифму найдем число: $x = 8{,}59$.

2) Вычислить $y = 0{,}644^{0{,}216}$. Логарифмируя, получим $\lg y = 0{,}216 \cdot \lg 0{,}644$. С помощью шкалы L найдем $\lg 0{,}644 = \bar{1}{,}809$. Для дальнейшего умно-

жения найденный логарифм придется преобразовать к отрицательной мантиссе: $\lg 0{,}644 = -1 + 0{,}809 = -0{,}191$. Выполняя на линейке умножение $0{,}216 \cdot 0{,}191$, получим $\lg y = -0{,}041$, или, преобразовывая в искусственную форму, $\lg y = \bar{1}{,}959$. По полученному логарифму найдем число: $y = 0{,}910$.

Упражнения. Вычислить $23{,}7^{0{,}513}$; $0{,}0642^{1{,}535}$; $4{,}73^{-0{,}074}$.

14. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ. ТАНГЕНСЫ

На обратной стороне движка нанесены шкалы, позволяющие вести на линейке тригонометрические вычисления (рис. 27). Эти шкалы обозначают обычно буквами ***T***, ***S*** и ***S&T*** (вместо шкалы ***S&T*** бывает иногда нанесена шкала ***L*** — см. стр. 7) и называют соответственно шкалами тангенсов, синусов и малых углов.

Будем считать в дальнейшем движок вставленным в линейку тригонометрическими шкалами наружу *).

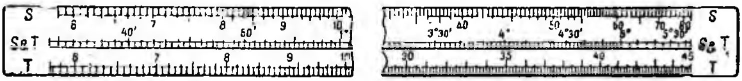

Рис 27.

Познакомимся подробнее с этими шкалами. Начнем со шкалы ***T***. Шкала тангенсов представляет собой участок логарифмической шкалы, на которой отложены от начальной точки в масштабе основной шкалы логарифмы тангенсов острых углов.

Легко сообразить, что логарифмы тангенсов всех острых углов невозможно уложить на линейке. Ведь при изменении угла от 0° до 90° тангенс его возрастает от 0 до бесконечности, а логарифм тангенса от $-\infty$ до $+\infty$. На линейке же умещается только одна единица в масштабе основной шкалы. Следовательно, на линейке может быть получен только один участок логарифмической шкалы тангенсов, охватывающий углы, тангенсы которых являются числами, лежащими в пределах одного единичного участка основной шкалы линейки (т. е. от 0,01 до 0,1, или от 0,1 до 1, или от 1 до 10 и т. д.).

Шкала ***T*** содержит углы, тангенсы которых меняются от 0,1 до 1, а шкала ***S&T*** (малых углов) — углы, тангенсы которых меняются от 0,01 до 0,1. Левой единице основной шкалы линейки соответствуют отметки 5°44′ шкалы ***T*** (так как $\operatorname{tg} 5°44' = 0{,}100$)

*) При вынимании движок переворачивается вокруг оси, идущей вдоль движка, так что его нижний край становится верхним.

и $0°34,4'$ шкалы ***S&T*** ($\operatorname{tg} 0°34,4' = 0,0100$). Правой единице основной шкалы соответствуют на шкале ***T*** отметка $45°$ ($\operatorname{tg} 45° = 1$), а на шкале ***S&T*** отметка $5°44'$. Детальное знакомство с делениями на шкалах ***T*** и ***S&T*** может быть проведено самостоятельно. Заметим только, что штрихи, отделяющие целое число градусов, вдоль всей шкалы ***T*** имеют несколько бо́льшую длину, а самые мелкие деления нанесены через $5'$ для углов, меньших $20°$, и через 10 в остальной части шкалы.

Совместив концевые отметки шкал движка и линейки, мы сможем против любого угла, отсчитанного на шкале ***T*** (или ***S&T***), прочитать соответствующее значение тангенса на шкале ***D***. Обратно, зная величину тангенса какого-либо угла, можно найти этот угол, установив тангенс на шкале ***D*** и читая угол на соответствующей шкале движка. Важно всегда твердо помнить, что шкала ***T*** служит для тангенсов, заключенных между 0,1 и 1, а шкала ***S&T*** для тангенсов, заключенных между 0,01 и 0,1. Случай, когда тангенс больше 1, будет рассмотрен ниже (стр. 35).

Примеры. $\operatorname{tg} 23°19' = 0,431$; $\operatorname{tg} 3°38' = 0,0635$; $\operatorname{tg} \alpha = 0,275$; $\alpha = 15°23'$; $\operatorname{tg} \beta = 0,0275$; $\beta = 1°34,5'$.

Таким образом, шкала ***T*** является такой же логарифмической шкалой, как и шкала ***D***, с той только разницей, что отметки на ней указывают не число, логарифм которого отложен на шкале (как на шкале ***D***), но угол, тангенс которого равен этому числу. Поэтому с помощью шкалы тангенсов можно выполнять все вычисления с тангенсами заданных углов, пользуясь установленными раньше правилами. Для определения положения запятой делают грубый подсчет или пользуются правилами для порядков, учитывая, что порядок чисел шкалы ***T*** равен нулю, а шкалы ***S&T*** — минус единице.

Примеры. 1) $45,3 \cdot \operatorname{tg} 28°17'$. По правилу умножения (стр. 12) против отметки 4 — 5 — 3 шкалы ***D*** ставим концевую отметку шкалы ***T*** (в данном примере — правую, т. е. $45°$). Против отметки $28°17'$ шкалы ***T*** читаем ответ 2 — 4 — 4 на шкале ***D***. Искомое произведение равно 24,4

2) $\dfrac{17,3}{\operatorname{tg} 3°41'}$. По правилу деления (стр. 15) устанавливаем отметку $3°41'$ шкалы ***S&T*** против числа 1 — 7 — 3 шкалы ***D***. Конечная отметка движка укажет результат на шкале ***D***. Искомое частное равно 269 (грубый подсчет: 17,3 делится на число, заключенное между 0,1 и 0,01, т. е. увеличивается больше чем в 10, но меньше чем в 100 раз).

3) $0,743 \cdot \dfrac{\operatorname{tg} 17°31'}{\operatorname{tg} 38°42'}$. Выполняем сначала деление, потом умножение. Против 7 — 4 — 3 шкалы ***D*** ставим $38°42'$ шкалы ***T***, под $17°31'$ шкалы ***T*** читаем ответ: 0,290 на шкале ***D***.

Для нахождения тангенсов острых углов, бо́льших 45°, а также для нахождения котангенсов используют тригонометрические формулы

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(90° - \alpha)},$$

с помощью которых тангенс и котангенс любого острого угла всегда могут быть сведены к тангенсу угла, меньшего 45°.

Примеры: 1) tg 67°18′. Так как tg 67°18′ = 1: tg 22°42′, то мы сделаем следующую установку (рис. 28): против единицы шкалы *D* ставим 22°42′ шкалы *T*. Конечная отметка шкалы *T* укажет искомое число на шкале *D*: 239. Установка запятой очевидна: величины, обратные тангенсам шкалы *T*, заключены между 1 и 10.

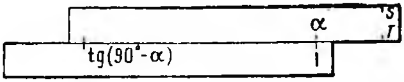

Рис. 28.

2) $\operatorname{tg}\alpha = 4{,}19$; найти α. Так как $\operatorname{tg}\alpha > 1$, установка, указанная на стр. 34 для нахождения угла по тангенсу, не может быть применена. Здесь приходится воспользоваться той же установкой, что и в предыдущем примере (рис. 28). Против 4 — 1 — 9 шкалы *D* устанавливаем конечную отметку шкалы *T* (безразлично правую или левую). Против единицы шкалы *D* прочитаем на шкале *T* угол, дополнительный до α, т. е. 13°25′; $\alpha = 76°35'$.

3) $\operatorname{tg}\alpha = 41{,}9$; найти α. Читатель легко сообразит, что в данном примере должна быть использована та же установка, что и в предыдущем, но угол $90° - \alpha$ читается на шкале *S&T* : $90° - \alpha = 1°22'$; $\alpha = 88°38'$.

При выполнении пропорциональных расчетов с тангенсами может быть использовано правило пропорции (стр. 26). Однако, следует иметь в виду, что на движке имеется только два участка шкалы тангенсов, которые не могут заменить, в отличие от основной логарифмической шкалы, всю бесконечную шкалу тангенсов. Поэтому в некоторых случаях результаты не удастся получить непосредственно с помощью правила пропорции и придется прибегать к обходным путям.

Пример. Найти острые углы, определяемые уравнениями:

$$\frac{\operatorname{tg} 34°}{5} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{3{,}7} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{6{,}2} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{9{,}8} = \frac{\operatorname{tg}\delta}{0{,}65}.$$

В соответствии с правилом стр. 34 ставим отметку 34° шкалы *T* против отметки 5 шкалы *D*. Против 3 — 7 — 0 и 6 — 2 — 0 мы сразу получим на шкале *T* $\alpha = 26°32'$ и $\beta = 39°55'$. Однако, будет ошибкой прочитать на шкале *T* $\gamma = 7°32'$ (против 9 — 8 — 0 после переброски) или $\delta = 41°15'$ (против 6 — 5 — 0). С увеличением знаменателей должны увеличиваться и числители. Ошибочные значения γ и δ соответствуют тангенсам, в 10 раз меньшему и в 10 раз большему, чем истинные. Нахождение δ не вызывает затруднений — достаточно при нашей установке сделать отсчет не на шкале **T**, а на шкале **S&T**: $\delta = 5°0{,}5'$. Для нахождения угла γ придется прибегнуть к установке примера стр. 35 (рис. 28), поскольку этот угол больше 45°. Величина $\operatorname{tg}\gamma$ может быть установлена на шкале **D** с помощью неверного отсчета $\gamma_1 = 7°32'$, сделанного на шкале **T**. Действительно, так как $\operatorname{tg}\gamma_1 = 0{,}1 \operatorname{tg}\gamma$, то на шкале **D** оба тангенса будут изображаться одной и той же отметкой. Для получения ее достаточно вдвинуть движок так, чтобы его концевые отметки совпали с единицами шкалы **D**, и установить визирную линию бегунка на γ_1 шкалы **T**.

Подведя теперь под эту визирную линию левую концевую отметку шкалы **T**, прочитаем на этой шкале, над единицей шкалы **D**, значение $90 - \gamma = 37°6'$; следовательно, $\gamma = 52°54'$.

Остановимся теперь на решении одной часто встречающейся задачи—нахождении острого угла прямоугольного треугольника по его катетам (рис. 29). Задача эта сводится к определению угла A из соотношения

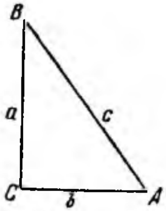

Рис. 29.

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$$

или

$$\frac{\operatorname{tg} A}{a} = \frac{1}{b}.$$

Установка делается обычным образом по способу пропорции, в качестве единицы может быть использован любой конец движка.

Сравнивая отношение $\frac{a}{b}$ с 0,1, мы можем узнать, где должен быть сделан отсчет угла A—на шкале **T** или **S&T**.

Указанная установка годится лишь, если $b > a$. В противном случае угол A находится как дополнительный к углу B, тангенс которого может быть найден описанным выше способом:

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{a}.$$

В заключение заметим, что некоторые вычисления с тангенсами могут быть выполнены и при обычном положении движка, т. е. когда он вставлен в линейку числовыми шкалами (**B**, **I**, **C**) наружу.

Для этой цели служат имеющиеся на обратной стороне линейки справа и слева вырезы (рис. 30). В вырезах имеются штрихи, нанесенные в точности против единичных штрихов основной шкалы линейки. Если перевернуть линейку около ее продольной оси, так чтобы нижний ее край оказался наверху, то деления шкалы **T**, при выдвигании движка влево, будут приходиться против штриха, нанесенного у левого выреза (рис. 31). Если установить против этого штриха отметку a и перевернуть линейку лицевой стороной, то, как легко сообразить, против левой единицы линейки мы сможем прочитать на шкале C значение $\operatorname{tg}\alpha$, а против правой единицы движка на шкале D значение $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha)$. Если при этом числа c и d шкал C и D ставят друг против друга, то на основании правила пропорции мы можем заключить, что $\frac{c}{d} = \operatorname{tg}\alpha$. Таким образом, умножение на

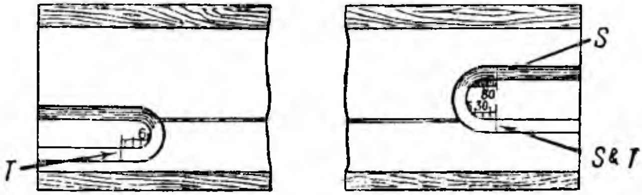

Рис. 30.

$\operatorname{tg}\alpha$ или деление на $\operatorname{tg}\alpha$, а также определение тангенса острого угла прямоугольного треугольника по его катетам могут выполняться без перевертывания движка*).

Для углов, тангенс которых меньше 0,1 **), вместо шкалы T должна быть использована шкала $S\&T$. Отсчеты на ней могут делаться у нижнего штриха правого выреза обратной стороны

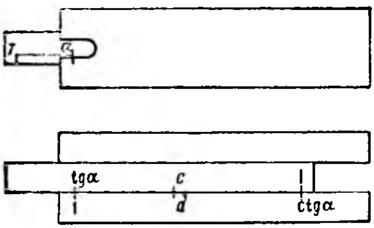

Рис. 31.

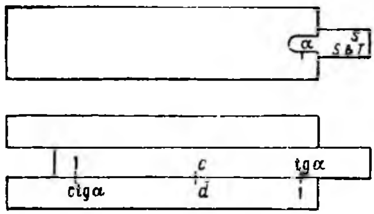

Рис. 32.

линейки (рис. 32). Все сказанное выше для шкалы T сохранит силу и для шкалы $S\&T$, если везде переставить слова «правый» и «левый».

---

*) При определении α из соотношения $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ на движке устанавливается всегда меньшее число. Если $a < b$, то на шкале T читается угол α, если $a > b$ — угол $90° - \alpha$. Если при установке движок окажется выдвинутым вправо, то для отсчета придется сделать переброску движка.

**) Но больше 0,01.

Например, вычислим при обычном положении движка $43{,}7 \times \times \operatorname{tg} 14°28'$. Выдвинем движок влево, так чтобы отметка $14°28'$ шкалы T установилась против штриха в левом вырезе обратной стороны линейки. Тогда против начальной единицы шкалы D мы сможем прочитать $\operatorname{tg} 14°28'$ (что нам не нужно), а против каждого числа шкалы D, в соответствии с правилом пропорции, окажется на шкале его произведение на $\operatorname{tg} 14°28'$. В частности, против 4—3—7 прочитаем искомую величину: 11,27.

Упражнения:

1) Вычислить: $\dfrac{32{,}7}{\operatorname{tg} 15°42'}$; $0{,}738 \operatorname{tg} 2°27'$; $28{,}4 \cdot \operatorname{tg} 62°17'$; $\dfrac{7{,}43}{\operatorname{tg} 55°13'}$; $\dfrac{\operatorname{tg} 24°52'}{0{,}0835}$.

2) Найти $\operatorname{arctg} \dfrac{5}{17}$; $\operatorname{arctg} \dfrac{27{,}3}{14{,}8}$; $\operatorname{arctg} \dfrac{1}{13}$; $\operatorname{arctg} \dfrac{0{,}73}{0{,}64}$; $\operatorname{arctg} \dfrac{4{,}75}{0{,}13}$.

3) Определить неизвестные в пропорциях:

$$\frac{\operatorname{tg} 38°17'}{0{,}643} = \frac{\operatorname{tg} 3°14'}{x_1} = \frac{\operatorname{tg} 10°45'}{x_2} = \frac{\operatorname{tg} 27°24'}{x_3} = \frac{\operatorname{tg} 49°12'}{x_4};$$

$$\frac{2{,}64}{\operatorname{tg} 18°35'} = \frac{0{,}62}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{1{,}84}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{4{,}52}{\operatorname{tg} \alpha_3} = \frac{12{,}75}{\operatorname{tg} \alpha_4}.$$

15. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ. СИНУСЫ

Перейдем теперь к шкале синусов (S). Шкала эта является такой же логарифмической шкалой, как и шкала D, но отметки на ней указывают не число, логарифм которого отложен на шкале, а угол, синус которого равен этому числу. Таким образом, по принципу построения шкала синусов совершенно аналогична шкале тангенсов. Имеющийся на движке участок шкалы S соответствует участку бесконечной логарифмической шкалы, охватывающему числа, заключенные между 0,1 и 1. Поэтому концевые штрихи шкалы S имеют отметки $5°43'$ ($\sin 5°43' = 0{,}1$) и $90°$ ($\sin 90° = 1$). Синусы углов, меньших $5°43'$ в пределах точности, даваемой линейкой, можно считать равными их тангенсам (и равными их радианной мере). Следовательно, шкалу $S\&T$ можно рассматривать в равной степени и как шкалу синусов, и как шкалу тангенсов для малых углов. Этим объясняется ее обозначение.

У некоторых линеек шкала синусов нанесена на движке в масштабе шкалы квадратов. В этом случае на движке умещаются две масштабные единицы логарифмической шкалы, охватывающие область изменения синусов от 0,01 до 1. На линейках подобного типа отметка $5°43'$ будет находиться посреди шкалы S (на месте средней единицы шкалы квадратов), а у левого конца шкалы будет стоять отметка $0°34{,}4'$. Шкала $S\&T$ в этом случае отсутствует (на ее месте обычно бывает нанесена шкала L—см. стр. 7). Ее заменяет начальный участок шкалы S, который может служить для вычислений как с синусами, так и с тангенсами малых углов. Все методы вычисления, которые будут нами получены для шкалы S, построенной в масштабе основной шкалы, могут быть применены и при наличии шкалы S масштаба шкалы квадратов, с соответствующей заменой других шкал линейки, участвующих в вычислениях. В дальнейшем мы будем считать, что шкала S имеет масштаб основной шкалы.

Прежде чем вести какие-либо вычисления со шкалой S, необходимо внимательно изучить деления на ней, которые чрезвычайно разнообразны на протяжении всей шкалы. Для углов, меньших 10°, деления нанесены через 5′, целые градусы надписаны. От 10° до 20° деления нанесены через 10′; цифры имеются только у отметок, соответствующих четному числу градусов. Дальше (до 70°) штрихи, соответствующие целым градусам, отличаются от мелких большей длиной, а мелкие деления нанесены через 20′ до 40° и через 30′ от 40° до 70°. На участке от 70° до 80° имеются деления только для целых градусов. После 80° имеются только три штриха, соответствующие 82°, 84° и 86°.

При ознакомлении со шкалой рекомендуется в первую очередь внимательно изучить деления, соответствующие целому числу градусов.

Установив движок так, чтобы его конечные штрихи совпали с единичными штрихами линейки, мы сможем получить синус заданного угла или угол по его синусу, находя стоящие друг против друга отметки шкал S и D при помощи визирной линии бегунка. Заметим при этом, что углы, близкие к 90°, не могут быть сколько-нибудь точно определены по их синусам.

Шкала S позволяет выполнять вычисления, содержащие синусы, совершенно так же, как шкала T давала нам возможность вести вычисления с тангенсами.

Если в вычислениях участвуют косинусы каких-либо углов, то, пользуясь формулой $\cos(90° - \alpha) = \sin \alpha$, мы всегда можем заменить их синусами.

Примеры. 1) $0{,}653 \cdot \sin 23°17'$. По правилу умножения против 6—5—3 шкалы D ставим единицу движка (в данном примере правую). Против 23°17′ шкалы S читаем на шкале D искомое произведение: 0,258.

2) $\dfrac{7{,}53 \cdot \operatorname{tg} 24°17'}{\sin 38°42'}$. Выполняем сначала деление, для чего устанавливаем отметку 38°42′ шкалы S против 7—5—3—шкалы D. Умножение выполняется с помощью шкалы T: против отметки 24°17′ этой шкалы прочитаем на шкале D результат: 5,43.

3) $\sin 23°22' \cdot \sin 42°53' = \cos \alpha$. Первый множитель необходимо иметь на линейке. Для этого придется вдвинуть движок так, чтобы его кон-

цевые штрихи совпали с концевыми штрихами шкал линейки, и с помощью бегунка отметить величину $\sin 23°22'$ на шкале D. Подведя к визирной линии бегунка единицу (вернее отметку 5°43′) движка, мы против отметки 42°53′ шкалы S сможем прочитать (если это требуется) величину $\cos\alpha$. Если же нас интересует непосредственно угол α, придется закрепить полученное произведение визирной линией бегунка и, вдвинув вновь движок, прочитать на шкале S $90-\alpha=15°39'$, откуда $\alpha=74°21'$.

4) Определить неизвестные углы из пропорции:

$$\frac{38{,}3}{\sin 17°35'}=\frac{54{,}5}{\sin\alpha}=\frac{63{,}7}{\sin\beta}=\frac{12{,}5}{\sin\gamma}=\frac{7{,}54}{\sin\delta}$$

По правилу пропорции устанавливаем 17°35′ шкалы S против 3—8—3 шкалы D. Читатель легко сообразит, что α и β могут быть прочитаны на шкале S, а γ и δ на шкале $S\&T$ (для отсчета γ потребуется переброска движка): $\alpha=25°28'$, $\beta=30°10'$, $\gamma=5°39'$, $\delta=3°25'$.

5) Вычислить $\arcsin\frac{7}{13}$. Эта задача решается так же, как и рассмотренная выше (стр. 36) аналогичная задача для тангенсов. Установка определяется пропорцией: $\frac{\sin\alpha}{7}=\frac{1}{13}$. Против 1—3—0 шкалы D ставим концевую отметку («единицу») движка, против 7—0—0 читаем на шкале S ответ: $\alpha=32°35'$. Если бы нам был нужен $\arcsin\frac{7}{130}$, ответ следовало бы читать на шкале $S\&T$: $\arcsin\frac{7}{130}=3°5'$.

Используя правый вырез на обратной стороне линейки, можно многие вычисления с синусами выполнять при нормальном (не перевернутом) положении движка. Если при нормальном положении движка выдвинуть его вправо, так чтобы против верхнего штриха правого выреза обратной стороны линейки оказалась установленной отметка α шкалы S (рис. 33), на шкале C движка против правой единицы линейки может быть прочитано значение $\sin\alpha$. Из правила пропорции следует, что для стоящих при этом друг против друга отметок c и d шкал C и D будет справедливо соотношение: $\frac{c}{d}=\sin\alpha$. Таким образом, умножение и деление на синус заданного угла может быть выполнено без перевертывания движка. Угол, синус которого задан в виде отношения двух величин, также может быть найден без перевертывания движка.

Рис. 33.

Примеры. 1) Сделаем при нормальном положении движка пример 1) стр. 39. Для этого установим отметку 23°17′ шкалы S против верхнего штриха правого выреза обратной стороны линейки. Тогда, как видно из предыдущего, против каждого числа шкалы D мы сможем прочитать на шкале C его произведение на $\sin 23°17'$. В частности, против 6—5—3 найдем 2—5—8, что совпадает с полученным ранее ответом.

2) Для примера 5) стр. 40 мы должны установить 7—0—0 шкалы **C** против 1—3—0 шкалы **D**. При этом движок окажется выдвинутым влево. Чтобы сделать отсчет в правом вырезе, нам придется сделать переброску движка. Против верхнего штриха выреза находим на шкале **S** $\arcsin \frac{7}{13} = 32°35'$, а против нижнего на шкале **S&T** $\arcsin \frac{7}{130} = 3°5'$.

Упражнения. 1) Вычислить: $\frac{23,4}{\sin 38°43'}$; $8,73 \cdot \sin 13°12' \cdot \mathrm{tg}\, 26°24'$; $0,482 \cdot \mathrm{tg}\, 63°17' \cdot \sin 27°38'$.

2) Определить неизвестные углы из уравнений:

$$\sin\alpha = \frac{3,74}{5,08}; \quad \sin\beta = \frac{4,37}{12,63}; \quad \mathrm{tg}\,\gamma = \frac{\sin 49°24'}{\sin 24°42''}; \quad \sin\delta = \frac{\mathrm{tg}\, 25°17'}{\mathrm{tg}\, 36°28'}.$$

3) Известны два угла треугольника $A = 23°17'$ и $B = 37°27'$ и сторона $c = 133,5$ *см*, лежащая против третьего угла. Определить остальные стороны треугольника (указание: применить теорему синусов).

16. ОСОБЫЕ ОТМЕТКИ

Для ряда постоянных величин, часто встречающихся в вычислениях, на шкалах линейки имеются особые отметки.

Число $\pi = 3,14\ldots$ отмечено на шкалах **A**, **B**, **C**, **D**. На шкале **C** нанесена отметка $c = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1,128\ldots$ Эта отметка служит для вычисления площади круга (S) по его диаметру (d). Так как $S = \pi \frac{d^2}{4} = \left(\frac{d}{c}\right)^2$, то, установив против отметки d шкалы **D** отметку c движка, мы сможем прочитать площадь круга S на шкале A против концевой единицы движка.

Пример. Площади кругов диаметра 2,75 *м*, 0,143 *м*, 49,2 *м* равны соответственно 5,94, 0,0161, 1 900 *м*²$.

Очевидно, что описанная установка может служить и для обратной цели — определения диаметра круга по его площади.

Кроме отметки c иногда на шкале **C** бывает нанесена еще отметка $c_1 = \sqrt{\frac{40}{\pi}} = 3,568\ldots$ Употребление ее такое же, как и отметки c, только при пользовании отметкой c_1 площадь круга читается против средней единицы шкалы **B**.

На некоторых бегунках бывают нанесены не одна, а три визирные линии. Расстояние между ними делают равным расстоянию отметки c до левой единицы. Легко видеть, что при наличии подобного бегунка вычисление площади круга может быть произведено без помощи движка. Установив среднюю визирную линию против заданного диаметра на шкале D, мы сможем прочитать площадь круга под левой визирной линией на шкале A (на рис. 34 $d = 6{,}9$, $S = 37{,}4$).

Отметки ρ', ρ'', нанесенные на шкалах C и D, служат для перевода градусной меры углов в радианную и обратно. Отметка ρ' дает нам число минут в одном радиане: $\rho' = 3437{,}7\ldots$ Умно-

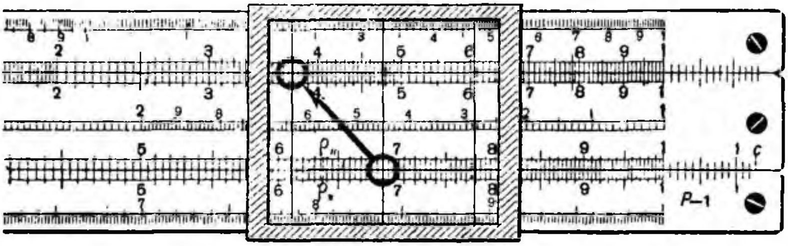

Рис. 34.

жив радианную меру угла α на ρ', получим величину угла α, выраженную в минутах. Обратно, выразив угол α в минутах и разделив полученное число на ρ', получим радианную меру угла.

Пример. 0,744 радиана $= \rho' \cdot 0{,}774$ минут $= 2\,560' = 42°40'$. $7°33' = 453' = \dfrac{453'}{\rho'}$ радиана $= 0{,}1318$ радиана.

Для определения положения запятой важно помнить или грубую величину $\rho' \approx 3\,000$ или порядок ρ', равный четырем.

Употребление отметки ρ'', дающей число секунд в радиане $\rho'' = 206\,264, \ldots$, совершенно такое же как и отметки ρ'.

Пример. $23'47''$ перевести в радианы. Переводим отдельно минуты и секунды: $23' = \dfrac{23'}{\rho'}$ рад. $= 0{,}00669$; $47'' = \dfrac{47''}{\rho''}$ рад. $= 0{,}000228$; $23'47'' = 0{,}00692$ *).

Заметим, что для малых углов радианная мера заменяет, в пределах точности линейки, синусы и тангенсы этих углов. По существу шкала $S\&T$ дает нам радианную меру помещенных на ней углов вместо их синусов и тангенсов.

На некоторых линейках бывает нанесена отметка $\rho°$, дающая выражение радиана в градусах ($\rho° = 57{,}29\ldots$). Применяется эта отметка так же, как отметки ρ' и ρ''.

---

*) Шестой знак при сложении округляется.

При пользовании десятичной системой измерения углов, при которой прямой угол делится на 100 градов, а каждый град на 100 сантиградов, для перевода в радианную меру применяют отметку $\rho_{''}$. Эта отметка дает нам число градов в одном радиане ($\rho_{''}=\frac{400}{2\pi}=63,66\ldots$). Увеличивая это число в 100 раз, получим число сантиградов в радиане.

Так как десятичная система деления углов мало употребительна в СССР, отметка $\rho_{''}$ часто на советские линейки не наносится.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ *)

К стр. 14. 4,88; 139,2; 0,530; 9 460; 0,000818.
К стр. 16. 0,00236; 2,26; 5 120; 5,29; 11,67 0,01486.
К стр. 18. 0,0421; 278; 0,579; 1,248; 34,1.
К стр. 20. 1) 6 950; 0,0976; 47,4; 17,03.
2) 3,61; 2,52; 1,93; 1,566; 1,317; 1,137; 0,892; 0,806.
К стр. 22. 1) 13,8; 0,000154; 753 000; 0,0000397; 0,0681.
2) 75,3; 0,294; 5,45; 0,0548; 0,01049.
К стр. 23. 1) 0,0162; 499 000; 0,00000210; 44,4.
2) 8,49; 0,364; 0,928; 0,132.
К стр. 26. 34,3; 12,69; 0,478; 0,1541; 7,35.
К стр. 30. 1) 10,29; 9,52; 8,69; 7,76; 6,73; 5,60 *м/сек.*
2) 41,8; 16,3; 7,25; 3,55 *м.*
3) 1,285; 2,89; 5,14; 16,65 *м/сек.*
К стр. 33. 5,07; 0,01477; 0,891.
К стр. 38. 1) 116, 3; 0,0316; 54,1; 5,16; 55,5.
2) 16°23′; 61°32′; 4°24′; 48°35′; 88°26′.
3) $x_1=0{,}0460$; $x_2=0{,}1547$; $x_3=0{,}42$; $x_4=0{,}944$; $\alpha_1=4°31'$; $\alpha_2=13°11'$; $\alpha_3=29°55'$; $\alpha_4=58°22'$.
К стр. 41. 1) 37,4; 0,997; 0,444. 2) $\alpha=47°25'$; $\beta=20°15'$; $\gamma=61°10'$; $\delta=39°35'$. 3) $a=60{,}5$; $b=93{,}1$.

---

*) Так как линейка дает приближенный результат, читатель не должен смущаться, если его ответ будет отличаться от данного в книге на одну-две единицы последнего (третьего или четвертого) знака. При наличии больших расхождений вычисление следует повторить.

ОГЛАВЛЕНИЕ