Департамент образования Вологодской области
ГОУ ДПО «Вологодский институт развития образования»

Е. А. Комарова

ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Методическое пособие

Вологда
2007

ББК 74.262.21
К 63

Печатается по решению редакционно-издательского совета Вологодского института развития образования

Методическое пособие подготовлено и издано по заказу департамента образования Вологодской области в соответствии с областной целевой программой «Развитие системы образования Вологодской области на 2007–2010 гг.»

Научный редактор

Л. М. Короткова, доктор педагогических наук, главный научный сотрудник Федерального института развития образования

Рецензенты:

И. Д. Лушников, доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой педагогики ГОУ ДПО «Вологодский институт развития образования»;

Н. А. Цыпленкова, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики ГОУ ВПО «Вологодский государственный педагогический университет»

К 63 **Комарова Е. А.**
Преемственность в обучении математике: Методическое пособие. – Вологда: Издательский центр ВИРО, 2007. – 108 с.

Методическое пособие включает анализ педагогического и методического аспектов проблемы преемственности в обучении с позиции их влияния на эффективность учебного процесса, описание возможных путей и средств обеспечения преемственности в обучении математике, а также методические рекомендации по реализации преемственности в обучении арифметике и алгебре. Предлагаемые материалы могут быть использованы при совершенствовании содержания и методов обучения математике, при разработке программ, учебно-методических пособий, при организации занятий на курсах повышения квалификации учителей математики, а также при изучении курса методики преподавания математики в педагогических вузах и средних специальных учебных заведениях.

Пособие предназначено для учителей, методистов, руководителей методических объединений учителей математики, студентов и преподавателей математических специальностей высших и средних специальных учебных заведений.

ISBN 978-5-87590-256-7

ББК 74.262.21
К 63

ISBN 978-5-87590-256-7

Оглавление

Введение

На современном этапе развития школы определены приоритетные направления на гуманизацию, дифференциацию и вариативность среднего образования с ориентацией процесса обучения на индивидуальные интересы личности. Переход от унитарной школы к многообразию образовательных систем приводит к необходимости обеспечения преемственности в обучении математике, что особенно актуально в условиях альтернативности программ и учебно-методических комплектов (УМК) при переходе от изучения пропедевтических курсов к систематическим.

Сохраняющаяся пока еще тенденция к смене УМК, а значит, и авторской концепции курса при переходе из 6 в 7 класс повышает значимость реализации преемственности в обучении арифметике и алгебре, которой в методике преподавания математики во все периоды развития школы отводилось одно из ведущих мест. По данным муниципальных методических служб, на начало 2006/07 учебного года в Вологодской области около 70% школьников после изучения курса математики по учебнику Н. Я. Виленкина переходят на изучение курса алгебры по учебникам других авторских коллективов. В связи с этим возникает необходимость обеспечения преемственности в методике обучения арифметике и алгебре и организации учебно-познавательной деятельности учащихся на уроке.

В методическом пособии предлагается продолжить осмысление проблемы преемственности в обучении, начало которому положено в вузовских курсах педагогики и методики обучения математике. Имея базовую теоретическую подготовку, на практике учитель встречается с необходимостью личностного осмысления проблемы преемственности в разных аспектах, на разном содержательном материале.

Подчеркивая важность осуществления преемственности при переходе из начальной в основную и из основной в среднюю школу, а также из школы в высшие или средние специальные учебные заведения, предлагается с опорой на познанное рассмотреть наиболее трудный этап в процессе обучения: преемственную связь арифметики и алгебры при переходе от пропедевтического к систематическому курсу.

В первом разделе пособия предложены краткие теоретические сведения, раскрывающие педагогические и методические аспекты преемственности в обучении.

В основном разделе раскрыты методические способы решения проблемы преемственности на материале арифметики и алгебры. В конце каждого пункта предложены вопросы и задания для самостоятельной работы по осмыслению теоретического материала и формированию практических умений. Отдельные задания могут быть схожи с упражнениями, предлагаемыми во время обучения в вузе, но, как

показывает наш опыт, учителя личностно отзываются на их выполнение, и это обусловлено осознанием практической необходимости решения обозначенных проблем в условиях реального процесса обучения. При выполнении практических заданий творческого характера в рамках курсов повышения квалификации или на заседаниях методических объединений возможно объединение учителей в группы с учетом наличия у них позитивного опыта или, наоборот, затруднений при решении обозначенных проблем.

В помощь учителю при самостоятельной работе методическое пособие содержит список литературы. В обоих разделах основные источники после каждого пункта конкретизированы согласно общего списка.

В приложения включены обобщающие таблицы и схемы, раскрывающие преемственную связь как внутри содержательных линий, так и между содержательными линиями курса математики, а также примеры заданий обобщенного характера и методическая разработка обобщающего урока в разновозрастной группе учащихся.

Предлагаемая структура и содержание методического пособия позволяют показать развитие полученных в вузе знаний по методике обучения математике в практической деятельности учителя, направленной на реализацию преемственности в обучении арифметике и алгебре.

Материалы пособия могут быть использованы при совершенствовании содержания и методов обучения арифметике и алгебре в основной школе, при разработке программ и учебно-методических пособий для учителя и учащихся. Методическое пособие может быть использовано при проведении занятий по методике преподавания математики в рамках курсов повышения квалификации, а также для самостоятельного изучения проблемы учителями в процессе самообразования. Преподаватели методики преподавания математики педагогических вузов и педагогических колледжей могут использовать пособие как для изучения проблемы, так и для подготовки учебных занятий. Студенты математических специальностей также смогут использовать материалы пособия при изучении вопросов методики преподавания математики в вузе и в дальнейшей профессиональной деятельности.

Автор выражает искреннюю благодарность за ценные советы и помощь в создании рукописи рецензентам И. Д. Лушникову, профессору, доктору педагогических наук, заведующему кафедрой педагогики ВИРО, и Н. А. Цыпленковой, доценту кафедры математического анализа и методики преподавания математики ВГПУ.

Раздел 1.

ПРОБЛЕМА ПРЕЕМСТВЕННОСТИ В ПЕДАГОГИКЕ И МЕТОДИКЕ МАТЕМАТИКИ

Общенаучная категория «преемственность» имеет объективный и всеобщий характер, проявляясь в природе, обществе и познании. Современное состояние преемственности в обучении характеризуется разносторонностью охвата многих вопросов и неоднозначностью толкования отдельных понятий в данной области. Как известно, существует два подхода к рассмотрению этой проблемы: в конкретном применении к сложнейшим педагогическим явлениям преемственность выступает как инструмент, позволяющий проникнуть в суть методических проблем, исследовать и управлять процессом обучения и воспитания, и в то же время сама является предметом целенаправленных и разнообразных исследований [11, 12, 13, 18, 19 и др.].

Педагогический и частнодидактический уровни преемственности раскрываются в работах Б. Г. Ананьева, В. А. Батаршева, П. Я. Гальперина, Ш. И. Ганелина, И. Д. Зверева, Л. Я. Зориной и др. [11, 12, 13,17,18, 24, 25, 26 и др.].

Частнодидактический уровень предполагает рассмотрение преемственности как проявления дидактического принципа систематичности и последовательности. Известно, что взаимосвязь принципов преемственности, последовательности и систематичности была установлена еще в классической педагогике, где преемственность рассматривалась как самостоятельный принцип.

Рассматривая процесс усвоения знаний, К. Д. Ушинский считал, что усвоение должно проходить на основе постепенности, последовательности и преемственности. Процесс усвоения знаний он представлял как процесс установления связи между вновь приобретенными и старыми знаниями, между которыми имеются внутренние связи, совершенно независимо от того, на каком предмете и когда они были приобретены. «Идя все дальше и дальше, не должны оставить бесполезным назади себя то, что уже приобрели» [68].

К. Д. Ушинский видит связь между принципом сознательности и принципами последовательности, преемственности и систем-

ности в установлении связей между предметами и формированием на этой основе системы знаний.

Наиболее полное и многоаспектное рассмотрение проблемы преемственности в обучении представлено в работах Б. Г. Ананьева [11], Ш. А. Ганелина [18, 19], которые исследуют преемственность на общетеоретическом уровне как инструмент, позволяющий управлять процессом обучения.

Так, Б. Г. Ананьев отмечает, что в педагогической науке проблема преемственности возникает при составлении и пересмотре программ для смежных ступеней обучения и при разрешении основных проблем содержания обучения. Преемственность в содержании реализуется при составлении учебных программ и методических руководств учителю. При этом указывается на важность обеспечения взаимосвязи знаний в содержании и методах обучения, а также на взаимосвязь учебной работы учителей на смежных годах обучения. При решении первой задачи необходимо обеспечить преподаванием систему знаний, умений и навыков учащихся по предмету, проследить формирование системы знаний по годам обучения, учесть многообразие сочетания методов преподавания и руководства самостоятельной работой учащихся при установлении связи нового материала с уже усвоенной учащимися системой знаний. Отмечается также возрастание роли методических комиссий и повседневного сотрудничества учителей при выработке общих подходов в методике преподавания [11, с. 26].

В дидактике всегда придавалось большое значение опоре нового материала на старые знания, на систему сложившихся связей, но в недостаточной степени учитывалось развитие старых знаний под влиянием новых. Когда при прохождении нового материала привлекаются старые знания, то они оживляются, становятся более мобильными и более совершенными, а новый материал, включаясь в уже сформировавшуюся систему знаний, лучше усваивается. Знания видоизменяются, совершенствуются, когда применяются в новых условиях. Как отмечает Б. Г. Ананьев: «Имеется двухсторонняя зависимость друг от друга новых знаний и старого опыта, которая проявляется в процессе систематизации знаний» [11, с. 28].

Итак, традиционно преемственность в обучении исчерпывалась взаимосвязью содержания и методов обучения, которые даны в программах, учебниках и методических руководствах, с одной стороны, и системой работы учителя – с другой, то есть рассматривался подход к проблеме преемственности со стороны учителя.

Двухсторонний характер процесса обучения приводит к необходимости подойти к вопросу о преемственности также с позиции учащегося, с точки зрения развития знаний, умений, навыков в его сознании, установления их системы и внутренней взаимосвязи (отчасти такое понимание было у Коменского и Ушинского). Б. Г. Ананьев в связи с этим пишет: «Преемственность обучения есть не только одно из важнейших условий этого развития, она, вместе с тем, включает преемственность в учении, то есть внутреннюю взаимосвязь в сознании учащихся усваиваемых знаний, их систематизацию и применение в разнообразных условиях обучения и жизни» [11, с. 27].

Ш. И. Ганелин также отмечает как важную сторону проблемы преемственности вопрос о внутренней взаимосвязи в сознании учащихся усваиваемых знаний, умений и навыков, об осмысливании пройденного на новом, более высоком уровне, вопрос о результативности работы учителя с точки зрения качества усвоения учащимися преподносимого им учебного материала, о развитии целостной личности учащегося.

В исследовании [19, с. 127] указывается, что правильное установление преемственности в обучении и воспитании обеспечивает и предполагает также учет качественных изменений в личности ребенка, в росте его умственных и физических способностей, в его жизненном опыте и поведении.

Таким образом, в педагогике преемственность рассматривается как общедидактический принцип и как проявление принципа систематичности и последовательности. При этом отмечается двусторонний характер преемственности новых знаний и старого опыта, который проявляется в опоре нового материала на старые знания, на систему сложившихся связей, в развитии старых знаний под влиянием новых, в осмыслении пройденного на новом, более высоком уровне.

Методические аспекты проблемы преемственности наиболее глубоко рассмотрены в работах К. С. Барыбина, В. А. Байдака,

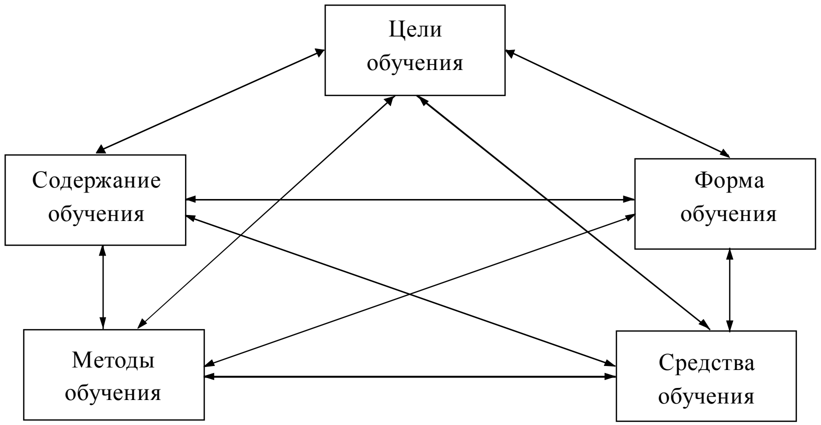
В. А. Батаршева, И. А. Гибша, В. А. Далингера, К. И. Нешкова, А. М. Пышкало и других методистов.

Согласно методического подхода А. М. Пышкало устанавливается взаимосвязь системы преемственности с компонентами методической системы (методики). Преемственность здесь рассматривается как «связь между явлениями в процессе развития, когда новое, снимая старое, сохраняет в себе некоторые его элементы» [61].

А. М. Пышкало выделяет внутренние и внешние проявления проблемы преемственности по отношению к методической системе, включающей инвариантные компоненты: цели, содержание, методы, средства и организационные формы обучения, лежащие в основе методики обучения каждому учебному предмету. Функционирование этой системы определяется закономерностями, связанными с внутренним строением и внешними связями.

В условиях стабилизации школьного обучения все элементы методики долгие годы в своем развитии оставались неизменными. Стабилизация определила развитие каждого из них и связей между ними, которые носили в основном линейный характер: цели обучения → содержание обучения → методы обучения → средства обучения → формы обучения.

В этом случае проблема преемственности проявляла себя своей «внешней» стороной. Вопрос об изучении преемственных связей сводился к выяснению и уточнению межпредметных и внутрипредметных связей, а также связей между отдельными звеньями в системе образования (начальной и восьмилетней школой, школой и техникумом, средней школой и вузом). Как известно, решение этих вопросов не приводило к существенным и качественным сдвигам, к коренным изменениям качества математической подготовки и носило частный, локальный характер. В условиях перестройки школьного обучения происходит изменение внутренней структуры и внешних связей системы и проблема преемственности проявляется «внутренней» стороной. Наиболее полно и точно описывает структуру системы и связи между ее компонентами следующая схема, предложенная А. М. Пышкало [61, с. 6].



В соответствии с закономерностями функционирования системы изменение хотя бы одного ее элемента, например, целей обучения нарушает равновесие, сложившееся в методике. При этом возникает необходимость выяснить связи новых и старых целей, новых целей обучения со старым содержанием, рассмотреть возможные изменения других элементов методики.

Таким образом, взаимосвязь системы преемственности с методической системой позволяет выделить наиболее широкий спектр преемственных связей как внутри каждого компонента, так и между компонентами системы. Вместе с тем, такой подход не исключает рассмотрение преемственности в становлении личности ученика, ибо процессуальная и содержательная стороны обучения строятся с учетом логики учебно-познавательной деятельности, возрастных и психолого-физиологических особенностей школьников.

Линейно-концентрическое построение школьного курса математики позволяет выделить два направления реализации преемственности в обучении предмету:

1) преемственность между смежными ступенями обучения;

2) преемственность внутри каждой ступени обучения:

а) преемственность внутри каждого курса математического характера (арифметики, алгебры, алгебры и начал анализа, геометрии);

б) преемственность между курсами математического характера, в частности, между пропедевтическими и систематическими

курсами (например, алгеброй и геометрией, арифметикой и алгеброй, арифметикой и геометрией и др.).

В каждом из этих направлений имеет место преемственность по всем компонентам методической системы, выделенной А. М. Пышкало: преемственность в целях, содержании, методах, формах и средствах обучения.

Известно, что формально преемственность между ступенями обучения математике обеспечивается учебной программой [60, 62], обязательным минимумом содержания по математике для основной школы [61, с. 60–64], учебниками, учебными, дидактическими и наглядными пособиями, методическими пособиями для учителя, инструктивно-методическими письмами о преподавании предмета.

Исследователи проблемы преемственности выделяют подходы к ее осуществлению между пропедевтическими и систематическими курсами или компоненты пропедевтики математического образования, тесно связанной с преемственностью в изучении основ наук с 1 по 11 класс [55, с. 71–85], к которым можно отнести:

– наличие единой концепции в смежных курсах, то есть должно иметь место относительное единообразие в трактовке понятий, в терминологии, в используемом языке, а также в методических подходах к изучению материала;

– развитие методов мышления, имеющих особое значение в математике (индукция и дедукция, анализ и синтез, обобщение и абстрагирование), постепенное повышение уровня абстракции при развитии понятий на последующих этапах обучения и постепенное повышение уровня дедуктивных рассуждений;

– организацию работы по повторению, обеспечивающей закрепление и развитие умений и навыков, необходимых для успешного усвоения последующего материала;

– воспитание самостоятельности мышления, способности к индивидуальному размышлению;

– согласование уровней сложности задач между смежными курсами.

Выявленные компоненты преемственности, обозначенные закономерности усвоения знаний позволяют по-новому оценить значимость преемственности в обучении математике внутри каждого курса, между пропедевтическими и систематическими курсами.

В дидактике и методике преподавания математики отмечена особая роль повторения в осуществлении двусторонних преемственных связей нового и старого материала. Как известно, повторение материала предполагает мыслительные процессы: актуализацию, систематизацию, обобщение. Поэтому организация повторения учебного материала с целью его актуализации, обобщения и систематизации, на наш взгляд, может быть одним из ведущих путей осуществления преемственности в обучении математике.

Линейное построение курса математики позволяет выделить три этапа в организации повторения [28].

1. Обобщение и систематизация знаний, умений и навыков на каждом этапе обучения в рамках рассматриваемой содержательной линии. Выделение главного, организация его в систему. Установление соответствующих связей с другими содержательными линиями.

2. Повторение с целью актуализации соответствующей системы знаний, восстановление необходимых навыков решения задач перед каждым следующим этапом изучения материала данной содержательной линии.

3. После каждого этапа развития содержательной линии система знаний дополняется, вскрываются и устанавливаются внутренние связи, то есть организуется новая система знаний более высокого порядка.

Вместе с тем, на наш взгляд, целесообразно проведение обобщающих уроков по основным содержательным линиям в конце каждого года обучения, что способствует систематизации материала и осознанию школьниками внутренней структуры курса математики. Более того, полезно объединение на такие уроки школьников смежных классов: 7 и 8; 8 и 9; 7, 8 и 9. В разновозрастных учебных группах создаются условия для многократного повторения и обобщения основных функциональных понятий и умений. Исходя из конкретного материала каждого класса, происходит мотивация обучения через ориентацию на дальнюю перспективу. Учащиеся, начиная с 7 класса, дважды рассматривают в пропедевтическом плане материал последующих классов и повторяют изученное в предыдущих, что позволяет лучше понять и осознать взаимосвязи в содержании материала и основные алгоритмы математической деятельности.

Итак, на основе рассмотренного выше проведение повторительно-обобщающих уроков во временных разновозрастных объединениях школьников можно считать одним из путей осуществления преемственности в обучении математике.

Как известно, важное значение для повышения эффективности обучения математике имеет правильная постановка задач и упражнений, реализация преемственности в их изучении. В исследованиях по методике математики обращается внимание на формирование у школьников обобщенных алгоритмов и приемов математической деятельности [22, 30, 66, 70 и др.]. При этом отмечается, что их содержание составляют не частные явления, усвоенные в отдельности, а стоящая за ними сущность, познаваемая через явления. Ученик с самого начала учится смотреть на каждое явление глазами сущности, понимает явление как одно из проявлений сущности. Овладение обобщенными приемами познавательной деятельности повышает уровень познавательных возможностей учащихся, качество усвоения знаний и сокращает время, необходимое для обучения [66, с. 43–53].

В работах [32, 54, 56, 60, 64, 70, 72 и др.] обозначены общие подходы в методике работы над задачей после ее решения, к числу которых можно отнести единство процессов составления и решения задач разными способами. В число общих методических приемов, наиболее часто используемых в практике преподавания, входят выделение опорных и основных задач, моделирование условия и решения задачи, составление логической цепочки сквозных задач по содержательным линиям курса и др. [21, 56, 72, 73 и др.].

Таким образом, использование обобщенных алгоритмов и приемов математической деятельности также можно отнести к числу путей реализации преемственности в обучении математике.

Вместе с тем, первоначальное формирование обобщенных алгоритмов и приемов математической деятельности может вызвать трудности у учащихся в связи с необходимостью перехода от конкретного опыта, частных наблюдений к обобщениям и абстрактным формулировкам.

Поэтому в качестве средства, облегчающего этот переход и обеспечивающего условия для развития в непрерывном взаимодействии конкретного и абстрактного процессов мышления, предлагается использовать разные формы наглядности. При этом влияние наглядности на процесс обучения не сводится только к акту восприятия, а связывается с мыслительной деятельностью ученика. Вопросы влияния наглядности на процесс усвоения материала школьниками нашли широкое отражение в работах П. П. Блонского, А. Н. Леонтьева, А. А. Люблинской, Н. А. Менчинской, Е. Н. Кабановой-Меллер и др. [14, 15, 30, 36, 39, 52, 53 и др.]. Так, Е. Н. Кабанова-Меллер отмечает, что для положительного влияния наглядного материала важно правильное сочетание слова и наглядности в работе учителя, использование наглядности с учетом возрастных особенностей ребенка и специфики учебного предмета [30, с. 163].

В школьной практике используются различные формы наглядности. Среди них можно выделить:

а) непосредственное восприятие предметов и их реалистических изображений;

б) восприятие символической, или условной, наглядности (карты, чертежи, схемы, диаграммы и пр.);

в) представления, возникающие при работе над словесным материалом (при чтении, при рассказе учителя и др.).

В курсе математики основным содержанием обучения являются связи и разного рода отношения, поэтому применяется высшая ступень наглядности – моделирование, которое позволяет при овладении общими методами познания и способами учебной деятельности использовать их модели в виде наглядных, легко обозримых схем, графиков и пр. [69, с. 51–53]. Таким образом, для успешного обучения математике в силу абстрактности ее содержания большое значение имеет использование символической наглядности, позволяющей мышлению оперировать не только словесными обобщениями, но одновременно и зрительными образами, соответствующими некоторому абстракту. При символической наглядности слово предшествует или сопутствует восприятию. Средства символической наглядности так же чувственны, как и натуральная наглядность, но они имеют обобщенное значение так же, как и слово. Однако эти средства не являются ни натуральными, ни словесными раздражителями [15, с. 136]. Например, схема как наглядное средство концентрирует в себе черты конкретного и абстрактного мышления. Она представлена наглядно в пространстве (тем самым она служит объектом зрительного

восприятия) и в то же время воплощает в условной форме существенные отношения между признаками предметов, отвлеченные от их реальных соотношений [53, с. 92].

Опыт показывает, что в курсе математики находят широкое применение следующие средства символической наглядности:

– обобщающие таблицы и схемы, систематизирующие теоретический материал;

– обобщенные схемы правил, формул и алгоритмов;

– схемы, моделирующие условие и решение задачи и др.

Положительное влияние обобщающих таблиц и опорных схем на результативность и качество математической подготовки школьников представлено в опыте работы В. Ф. Шаталова и его последователей: Р. З. Зубчевской, В. П. Иржавцевой и др. [20, 27, 28, 55, 71 и др.]. Г. И. Саранцев [64] указывает на роль схем в систематизации материала, обозначает значимость упражнений на построение схем, устанавливающих связи между этапами формирования понятий и упражнениями, реализующими их.

На необходимость иллюстративных схем и наглядных чертежей, отражающих связь между данными и искомыми при изучении условия задачи, указывается во многих работах [52, 54, 56, и др.]. В них отмечается позитивное влияние схемы на формирование у школьников способности к анализу и синтезу, обобщению, абстрагированию и конкретизации [52, с. 166–168]; выделяется значение схемы, моделирующей отношения между величинами, для усвоения общего приема решения, для составления плана решения и выбора наиболее рационального пути [56, с. 116]; описывается роль схемы, моделирующей решение задачи, в установлении структуры и закономерностей алгоритма решения и в его последующем обобщении [56, 70–72].

Итак, использование символической наглядности в обучении математике особенно важно, поскольку позволяет одновременно оперировать и словесными обобщениями, и зрительными образами и одновременно концентрирует в себе черты конкретного и абстрактного мышления, облегчая переход к обобщенным понятиям, алгоритмам и приемам математической деятельности. Вместе с тем, символическая наглядность в виде обобщающих таблиц, схем, алгоритмов может быть многократно использована при организации повторения с целью актуализации, обобщения или систематизации материала на разных этапах его изучения. Поэтому символическая наглядность может быть использована как одно из основных средств обеспечения преемственности в обучении математике.

Таким образом, формально проблема преемственности в обучении математике решается через учебники, учебные, дидактические и методические пособия и нормативные документы, а также через контакты учителей, работающих на смежных ступенях обучения. Однако проведенный анализ литературы и наблюдения за учебным процессом свидетельствуют о необходимости разработки специальной методики преподавания, ориентированной на реализацию преемственности в обучении математике между пропедевтическими и систематическими курсами, в основу которой могут быть положены следующие пути и средства обеспечения преемственности:

1) создание системы повторения, включающей актуализацию, обобщение и систематизацию знаний учащихся;

2) проведение повторительно-обобщающих уроков во временных разновозрастных объединениях школьников;

3) применение обобщенных алгоритмов и приемов математической деятельности;

4) широкое использование средств символической наглядности.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Выявите сущность подхода к рассмотрению преемственности на общетеоретическом уровне, представленного в работах Ш. А. Ганелина и Б. Г. Ананьева.
2. Охарактеризуйте двусторонний характер преемственных связей.
3. Выделите основные направления реализации в школе преемственности в обучении.
4. Опишите пути реализации основных направлений преемственности в обучении математике, предложенные А. М. Пышкало.
5. Выявите сущность преемственности между пропедевтическими и систематическими курсами и предложите возможные пути ее реализации.
6. Сравните преемственность и повторение в обучении.
7. Выявите и представьте в виде схемы взаимосвязь преемственности с компонентами методической системы.
8. Проанализируйте взаимосвязь процессов актуализации, обобщения и систематизации знаний учащихся и выделите этапы в организации повторения в курсе математики.

9. На основе анализа литературы и личного опыта объясните, каким образом обобщенные алгоритмы и приемы математической деятельности способствуют обеспечению преемственности в обучении математике.
10. Какие виды символической наглядности используются в школьном курсе математики? Используя опыт работы В. Ф. Шаталова, обоснуйте влияние опорных конспектов на результативность обучения и качество математической подготовки школьников.

ЛИТЕРАТУРА

Рекомендуем использовать литературу, имеющую следующие номера в общем списке: 11–22, 24–28, 30–36, 39, 52–62, 64, 66, 68–73.

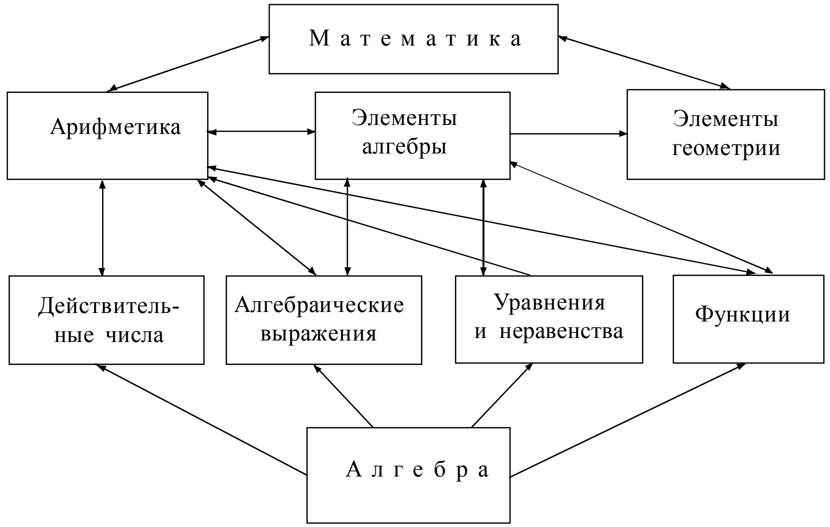
Раздел 2.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕАЛИЗАЦИИ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ В ОБУЧЕНИИ АРИФМЕТИКЕ И АЛГЕБРЕ

2.1. СПЕЦИФИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ В ОБУЧЕНИИ АРИФМЕТИКЕ И АЛГЕБРЕ

Школьный курс алгебры развивает, углубляет и расширяет теоретические сведения, приемы и методы решения задач, полученные учащимися на уроках математики в 5–6 классах. В связи с этим обеспечение преемственности в обучении между курсами арифметики и алгебры занимает одно из важнейших мест в методике преподавания математики.

Содержание курса алгебры составляют четыре фундаментальных раздела: «Действительные числа», «Алгебраические выражения и их преобразования», «Уравнения и неравенства», «Функции», последовательное изучение которых для детей в возрасте 12–14 лет неприемлемо с точки зрения дидактики [10, с. 21]. Поэтому при изучении каждого раздела целесообразно подключение материала других, но здесь возможна вариативность сочетания разных вопросов, что приводит к появлению альтернативных учебников школьного курса алгебры. Мы будем рассматривать учебники «Математика 5 (6)», авторами которых являются Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд [43, 44], поскольку они наиболее распространены в школах, в том числе и в Вологодской области, и учебники «Алгебра 7 (8, 9)» авторов Ш. А. Алимова, Ю. М. Колягина, Ю. В. Сидорова и др. под научной редакцией академика А. Н. Тихонова [1, 2, 3]. Выбор учебников алгебры обоснован тем, что их методический аппарат учитывает специфику разных категорий педагогов (молодые специалисты и учителя-стажисты, учителя сельских и городских школ, преподаватели новых типов образовательных учреждений: гимназий, лицеев, колледжей и др.). Для учебников характерно оптимальное, на наш взгляд, сочетание научности и доступности в изложении материала, многофункциональность системы задач, числовая основа построения курса, ориентированного на реализацию преемственности с курсом арифметики, что важно для массового учителя. Состав и взаимосвязь основных рассматриваемых разделов курсов алгебры и математики 5–6 классов отражает следующая схема:



В то же время переход от изучения математики к изучению систематического курса алгебры традиционно вызывает затруднения у школьников, часто приводит к снижению успеваемости. Это связано с широким использованием в курсе алгебры буквенной символики и затруднениями в понимании учениками того факта, что буква в математике, а затем и в алгебре обозначает число. Наши наблюдения показали, что наиболее характерные ошибки школьники допускают в следующих случаях:

а) считают букву только натуральным числом;

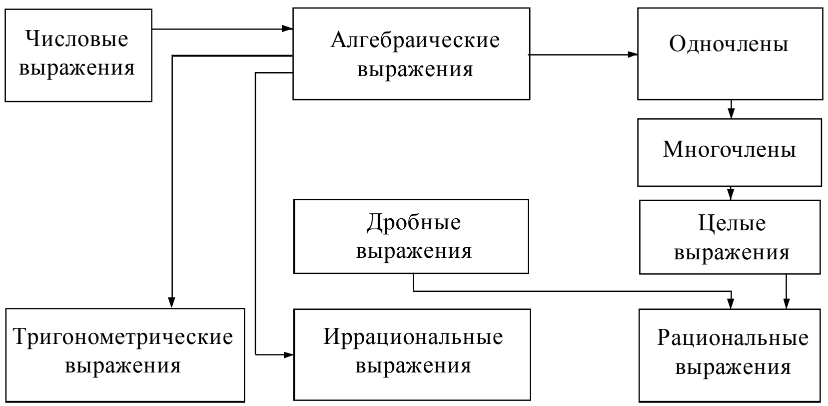
б) не учитывают, что буква может принимать значения 0 и 1.

Поэтому при изучении буквенной символики чрезвычайно важно зафиксировать внимание учащихся на том, что одна и та же буква может принимать различные числовые значения, а разные буквы обозначать одно и то же число.

В связи с высокой степенью абстрактности буквенных выражений у учащихся возникает серьезное затруднение при выполнении действий, а именно: прибавить или вычесть, умножить или разделить буквы невозможно. В этом затруднении состоит одна из основных причин формального усвоения алгебры. Выполнить действие 18 + 45 легко, а как найти результат действия а + 45? Избежать такого положения можно, договорившись, что действия над буквами лишь обозначаются и могут быть выполнены при конкретных числовых значениях букв. В самом деле, поскольку буква обозначает число, то и действия над буквами обозначаются.

Поэтому в пособии мы предлагаем систему работы по анализу и построению числовых, а затем и буквенных выражений, постепенно формирующую понимание того факта, что действия над буквами обозначены, у учащихся не возникает потребности выполнить их по аналогии с числовыми выражениями, если не поставлено соответствующее задание.

Линейное построение курса алгебры в целом и по возможности равномерное распределение материала каждой содержательной линии по годам обучения позволяет систематически возвращаться к важнейшим понятиям курса, составляющим основу фундаментальных разделов. Например, развитие содержания линии «Алгебраические выражения и их преобразования» можно представить в виде следующей схемы:



Такое построение курса способствует повторению на содержательном материале ранее изученных определений, свойств, правил, помогает в овладении терминологией и обозначениями. При этом логика построения понятий, уровень их рассмотрения и применения в курсах арифметики и алгебры разные.

В алгебре некоторые понятия вводятся по аналогии с соответствующими определениями арифметики, например, определение четырех арифметических действий, определение уравнения и др.

Многие понятия алгебры являются обобщением и развитием понятий арифметики. Так, понятие алгебраического выражения вводится как обобщение числового выражения; одночлен, многочлен, алгебраическая дробь рассматриваются как особые формы записи чисел, обозначенных буквами. Понятие уравнения с одним неизвестным тесно связано с понятием числового равенства, например, уравнение первой степени с одним неизвестным рассматривается как равенство, в котором определенная буква обозначает неизвестное число, обращающее данное равенство в верное.

В связи с этим для реализации преемственности в изучении понятий и фактов в курсах арифметики и алгебры мы предлагаем использовать построение обобщенных схем математических объектов (числовых и алгебраических выражений, уравнений, неравенств, функций, заданных формулой) и алгоритмов. Использование символической записи помогает осознанию логики построения объекта, уровня его рассмотрения и применения, а также связи между объектами разных содержательных линий.

Методика работы со схемой предполагает:

1) рассмотрение конкретных примеров, характеризующих данный объект;

2) установление закономерности, запись ее в общем виде с использованием символической наглядности;

3) наполнение схемы конкретным содержанием, перебор возможных вариантов, приведение их в систему;

4) установление связей с ранее изученным и определение перспективы в развитии объекта.

Например, рассматривая числовые выражения, которые могут быть получены с использованием знака сложения «+», получаем схему: $\Delta + \square$, в которую вместо символов Δ, $\square$ подставляют любые числа. Далее перебираем возможные варианты: два натуральных числа, натуральное число и нуль, натуральное число и отрицательное число, отрицательное число и нуль, целое отрицательное число и дробное, два отрицательных числа и т. д. По мере изучения чисел в качестве компонентов могут быть степени, иррациональные, комплексные числа и их вариации.

Если в качестве компонента рассмотреть букву, то получается алгебраическое выражение и снова производится перебор всех вариантов. Затем по мере изучения материала в качестве компонентов выступают одночлены, многочлены и другие целые, рациональные, иррациональные, тригонометрические выражения.

Расширение знаний может идти и по линии перехода от числовых выражений к числовым равенствам: $\Delta + \square = 0$. Заменяя компоненты числами и буквами, получим алгебраические равенства, в частности, уравнения, для которых также составляем возможные схемы и перебираем варианты (более подробно преемственность в изучении уравнений будет раскрыта в п. 2.3).

Таким образом, использование схемы в качестве одного из средств реализации преемственности в содержании школьного курса математики позволило нам выделить следующие ее функции:

1) схема является результатом обобщения фактов, воплощает в себе общие абстрактные свойства конкретных явлений и предметов;

2) схема служит наглядной опорой при переходе от абстрактных формул к конкретным явлениям;

3) схема способствует быстрой актуализации знаний и опыта;

4) схема позволяет систематизировать материал.

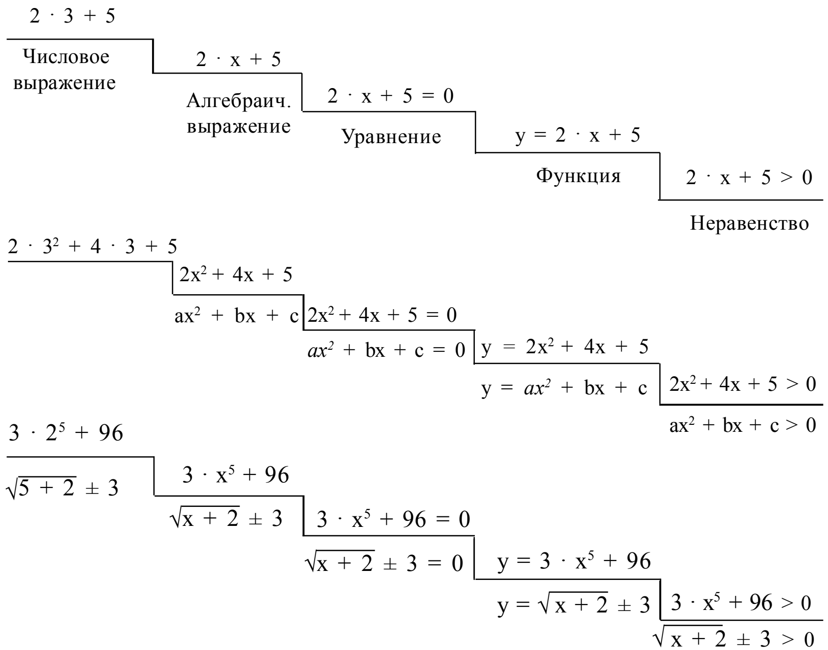
Систематическое применение схем в учебном процессе помогает формированию обобщенных понятий, алгоритмов и приемов деятельности, а также осознанию двусторонних преемственных связей нового и ранее изученного материала как внутри содержательной линии, так и между содержательными линиями курса математики.

При изучении курса алгебры учащиеся испытывают затруднения также в связи с введением новой терминологии, употреблением различных словосочетаний, имеющих вполне конкретный математический смысл. Например, новым для учащихся является понятие алгебраической суммы, логика введения которого может быть представлена в виде схемы: числовое выражение $\to$ алгебраическое выражение $\to$ алгебраическая сумма. Несколько иной подход с использованием терминов «алгебраическое выражение» и «алгебраическая сумма» предлагается при введении правил раскрытия скобок и заключения в скобки, которые являются обобщением соответствующих правил, рассмотренных в курсе математики.

При рассмотрении понятий, правил и алгоритмов усиливается роль теоретических обоснований. Так, перед рассмотрением правил раскрытия скобок напоминаются свойства сложения и вычитания, лежащие в их основе. При обосновании алгоритма решения уравнений первой степени с одним неизвестным указываются составляющие его основу свойства верных числовых равенств, демонстрируется их применение на конкретном примере.

Вместе с тем, в школьном курсе алгебры материал каждой содержательной линии активно применяется при изучении других линий курса, поэтому необходимо соблюдение преемственности при их взаимодействии. Например, линия вычислений является основой при рассмотрении алгебраических выражений и нахождении их значений при заданных значениях переменных, при решении уравнений, при вычислении значений функции по заданным значениям аргумента и наоборот. Решение уравнений и неравенств тесно связано с алгебраическими преобразованиями, задачами функционального характера, вычислениями.

В рассматриваемом курсе алгебры [1–3] взаимосвязь между содержательными линиями, с нашей точки зрения, можно представить в виде схемы:



В связи с этим в курсе алгебры возможны ситуации, когда в одной теме переплетается материал нескольких содержательных линий. Например, в теме «Квадратные корни» вводятся понятия квадратного и арифметического корня, систематизируются сведения о рациональных числах, вводится понятие иррационального и действительного числа, рассматриваются вычисления с помощью микрокалькулятора, то есть широко представлена вычислительная линия. Здесь также вводится понятие тождества, изучаются преобразования выражений, содержащих квадратные корни, таким образом, получает развитие линия алгебраических преобразований. В числе дополнительных заданий предлагается решить иррациональные уравнения; сравнить уравнения, содержащие корни; доказать соответствующие тождества и неравенства.

Взаимодействие содержательных линий проявляется также за счет методических приемов, при которых сведения из одного раздела становятся опорными при изучении материала других разделов. В учебниках [1–3] для обеспечения такой связи предусмотрено, например, изучение темы «Алгебраические дроби» в 7 классе после рассмотрения многочленов и способов их разложения на множители; связанные между собой вопросы «Квадратные корни», «Квадратные уравнения», «Квадратичная функция», «Квадратные неравенства» изучаются в 8 классе.

Вместе с тем, может наблюдаться разрыв между введением некоторого материала и его применением при изучении смежных вопросов. В этом случае важную роль играет организация целенаправленного повторения. Например, в учебнике для 7 класса [1] перед изучением уравнений с одним неизвестным, сводящихся к линейным, приводятся свойства верных равенств, в учебнике для 8 класса [2] вводится пункт «Положительные и отрицательные числа», а также помещается таблица, выражающая свойства чисел и их словесную формулировку [2, с. 4] и др.

Таким образом, в учебниках алгебры [1–3] уделяется значительное внимание реализации преемственности с курсом арифметики при изучении теоретического материала. Однако наблюдения показывают, что в практике преподавания алгебры они довольно часто не реализуются. Одной из причин этого, на наш взгляд, является отсутствие методической системы реализации преемственности, учитывающей содержание предмета, специфику учебно-познавательной деятельности и особенности реализации преемственности в обучении математике. В данном пособии мы предлагаем в качестве одного из путей реализации преемственности в обучении арифметике и алгебре систему повторения материала по основным содержательным линиям курса, в основе которой лежит широкое использование средств символической наглядности (обобщающие таблицы и схемы).

Система повторения материала включает несколько этапов.

1. Вводное повторение, в ходе которого повторяется материал содержательной линии, изученный в курсе арифметики. С помощью рассмотренной выше «лестницы» знаний и умений показывается его взаимосвязь с содержанием ранее изученных смежных разделов.

2. Повторение с целью актуализации и упрочнения соответствующей системы знаний, восстановления необходимых навыков решения задач перед каждым следующим этапом изучения материала данной содержательной линии.

3. Обобщение и систематизация знаний, умений и навыков на каждом этапе обучения в рамках рассматриваемой содержательной линии. Выделение главного и организация его в систему. Установление сопутствующих связей с другими содержательными линиями.

4. После каждого этапа развития содержательной линии система знаний дополняется, вскрываются и устанавливаются внутренние связи, то есть организуется новая система знаний более высокого уровня.

5. Итоговое повторение материала основных содержательных линий в конце каждого года изучения курса алгебры. Установление логики их развития, обобщение и систематизация теоретического материала и основных алгоритмов и приемов решения задач, выделение связей с другими содержательными линиями курса.

В качестве средства, способствующего актуализации знаний учащихся, позволяющего их обобщить и систематизировать, мы предлагаем использовать обобщающие таблицы и схемы (см. *Приложение 1*).

Методика работы с таблицей (схемой) предполагает многократное ее использование при:

– итоговом повторении курса арифметики;

– вводном повторении в курсе алгебры;

– актуализации знаний учащихся, применяемых в смежных содержательных линиях;

– актуализации знаний перед следующим этапом изучения материала данной содержательной линии;

– текущем и тематическом повторении и обобщении знаний учащихся;

– итоговом повторении в конце учебного года в каждом классе и при завершении курса алгебры.

Целесообразно поэтапное составление таблицы вместе с учащимися по мере изучения материала, что позволяет им видеть и осознавать динамизм учебного познания, взаимосвязь математических знаний.

Реализация системы повторения материала на примере содержательной линии «Уравнения» показана в п. 2.3.

Как уже было указано, в школьном курсе алгебры имеет место взаимосвязь материала внутри каждой содержательной линии и между содержательными линиями курса. Поэтому при реализации преемственности через итоговое повторение мы предлагаем использовать новые типы обобщающих уроков.

1. *Урок в разновозрастной группе учащихся,* включающей учеников смежных классов: 7 и 8; 8 и 9; 7, 8 и 9, имеющий в качестве основной дидактической цели обобщение и систематизацию материала содержательных линий курса (структура и конспект обобщающего урока указанного типа представлены в *Приложениях 3, 4*).

2. *Урок, обобщающий взаимосвязь между содержательными линиями внутри каждого класса.*

Например, в 7 классе наиболее сильно прослеживается взаимосвязь алгебраических преобразований и решения уравнений, которая носит преемственный характер и проявляется в том, что алгебраические преобразования при решении уравнения являются средством для упрощения выражений, стоящих в его левой и правой частях. С другой стороны, уравнения являются моделью для закрепления навыков алгебраических преобразований. Представленная в *Приложении 5* система упражнений в курсе алгебры 7 класса [1] наглядно демонстрирует обозначенную взаимосвязь.

Одной из целей школьного курса математики является вооружение учащихся приемами и методами решения задач. Алгоритмы решения большинства задач в курсе алгебры являются обобщением соответствующих алгоритмов из курса арифметики, например, алгоритм решения уравнений, выполнения действий с алгебраическими дробями, решения текстовых (сюжетных) задач и др.

Анализ содержания учебников [1–3] показал, что теоретической основой многих алгоритмов в курсе алгебры являются свойства чисел (законы арифметических действий). Приведем примеры:

– алгебраические преобразования выполняются по тем же правилам, что и действия над числами, обосновываются законами и свойствами арифметических действий;

– в основе решения уравнений и их систем – известные свойства числовых равенств;

– применяемые способы решения неравенств опираются на свойства верных числовых неравенств;

– понятие функции формируется и развивается с опорой на ранее изученные действия над числами и соответствующими алгебраическими выражениями.

Вместе с тем, практика показывает, что учащиеся не осознают единства структуры и алгоритмов решения математических задач и теоретической основы их обоснования в курсах арифметики и алгебры.

В связи с этим мы предлагаем для реализации преемственности шире использовать в учебном процессе схемы обобщенных приемов и алгоритмов, которые имеют место в курсах арифметики и алгебры. Например, изучаемые в курсе арифметики алгоритмы выполнения арифметических действий с обыкновенными дробями записываются с помощью буквенной символики:

а) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$; б) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$;

в) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$; г) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Вместе с тем, на уроках вводного повторения можно перейти к записи их в виде обобщенных схем вида:

а) $\frac{\Delta}{O} \pm \frac{\Diamond}{O} = \frac{\Delta \pm \Diamond}{O}$; б) $\frac{\Delta}{O} \pm \frac{\nabla}{\Diamond} = \frac{\Delta \cdot \Diamond \pm \nabla \cdot O}{O \cdot \Diamond}$;

в) $\frac{\Delta}{O} \cdot \frac{\nabla}{\Diamond} = \frac{\Delta \cdot \nabla}{O \cdot \Diamond}$; г) $\frac{\Delta}{O} : \frac{\nabla}{\Diamond} = \frac{\Delta \cdot \Diamond}{O \cdot \nabla}$.

При рассмотрении конкретных примеров у учащихся формируется понимание того, что вместо наглядных символов могут быть любые числа или буквы, что и было записано в курсе арифметики. По мере изучения материала в курсе алгебры в качестве компонентов используются одночлены, одночлены и двучлены, двучлены и другие алгебраические выражения и постепенно осуществляется переход к рассмотрению алгоритмов выполнения действий с алгебраическими дробями, которые являются обобщением соответствующих алгоритмов из курса арифметики.

Использование данного приема в курсе алгебры находит обоснование с помощью идеи подстановки: если в тождество вместо переменной подставить выражение, то снова получится тождество. В данном случае учащиеся осознают ее суть и в дальнейшем успешно используют как метод в преобразованиях, при решении уравнений, неравенств и в других заданиях.

Как мы уже указывали, преемственность в работе над задачей в курсе математики реализуется посредством эвристического алгоритма. С нашей точки зрения, она должна осуществляться на всех этапах процесса решения задачи. В работе над задачей в курсах арифметики и алгебры мы выделяем в качестве основных следующие этапы:

а) анализ содержания задачи;

б) моделирование условия;

в) выделение опорных знаний и основных задач;

г) моделирование решения задачи;

д) подведение итогов по решению задачи;

е) выполнение возможных обобщений.

Предлагаемый нами методический подход в работе с задачей предполагает:

1) взаимосвязь, единство процессов составления и решения математической задачи;

2) решение прямой и обратных задач;

3) решение задач разными способами;

4) использование методических приемов:

а) выделение опорных знаний и основных задач,

б) моделирование условия и решения задачи,

в) составление логической цепочки сквозных задач по содержательным линиям курса.

Как известно, к числу причин, затрудняющих переход к изучению курса алгебры, относят усиление роли дедукции в изложении материала и обосновании фактов. Ведущим дидактическим методом установления закономерностей при изучении арифметики является неполная индукция. В алгебре она также используется, но при этом значительно возрастает роль дедукции, в частности, при выражении арифметических закономерностей в общем виде применяется дедукция к их доказательству. В учебниках [1–3] осуществляется последовательный переход к дедуктивным рассуждениям. При этом применяется параллельное рассмотрение доказательств в общем виде и на конкретных примерах, например, при рассмотрении свойств верных равенств, изучении свойств степени с натуральным показателем. При обосновании алгоритмов выполнения действий с многочленами используется решение задач на вычисление площадей и объемов конкретных геометрических фигур, длины сторон которых обозначены буквами.

В рамках предлагаемого нами методического подхода переход к дедуктивным рассуждениям облегчает дополнительное использование схематической записи фактов, поскольку схема позволяет осознаннее перейти к действиям и рассуждениям с абстрактными объектами. Например, записав формулу, выражающую распределительный закон умножения в виде обобщенной схемы $\Delta \cdot (\mathrm{O} + \square) = \Delta \cdot \mathrm{O} + \Delta \cdot \square$, мы облегчим в дальнейшем переход к обоснованию правил умножения одночлена на многочлен и умножения многочленов.

Итак, предлагаемый нами методический подход реализации преемственности в обучении арифметике и алгебре включает:

1) широкое использование средств символической наглядности на всех этапах изучения материала содержательных линий курса;

2) методику работы со схемой, основанную на взаимосвязи конкретного и абстрактного процессов мышления;

3) систему повторения материала, предполагающую использование нового типа итогового обобщающего урока во временных разновозрастных группах учащихся;

4) общую методику работы с задачей в курсах арифметики и алгебры.

При этом происходит:

– установление преемственности в развитии и построении логических схем основных содержательных линий курса;

– выявление взаимосвязи между содержательными линиями курса и выражение ее в виде динамической схемы, дополняемой на каждом этапе изучения материала;

– использование схематической записи структуры математических объектов, обобщенных алгоритмов и приемов решения задач.

В результате каждое понятие, прием, алгоритм включаются в различные связи и логические отношения с другими, происходит многократное содержательное возвращение к ним в разных ситуациях в связи с изучением других разделов курса, что способствует формированию вычислительной, графической культуры учащихся, твердых навыков алгебраических преобразований, умений решать уравнения, неравенства и текстовые задачи и приводит к осознанности и прочности усвоения знаний.

Схема также позволяет многократно возвращаться к объектам в разнообразных ситуациях, уточнять и углублять их понимание, видеть динамику развития и избегать локальных ориентаций в учебном процессе, тем самым обеспечивает действенность знаний.

Система повторения способствует систематизации материала, осознанному пониманию структуры курса математики, формированию глубоких, прочных и действенных знаний.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Выявите и раскройте взаимосвязь основных разделов курсов алгебры 7–9 классов и математики 5–6 классов.

2. Выявите и проанализируйте затруднения учащихся при изучении курса алгебры.

3. Покажите логику изучения содержательной линии «Выражения и их преобразования» в курсе математики 5–9 классов.

4. Каковы функции схемы как средства реализации преемственности в содержании школьного курса математики?

5. Раскройте методику работы со схемой на примере суммы двух числовых выражений.

6. Назовите основные компоненты системы повторения материала по содержательным линиям курса алгебры. Выделите функции используемых при этом обобщающих таблиц и схем.

7. Выделите структуру обобщающего урока в разновозрастной группе учащихся. Составьте конспект обобщающего урока в разновозрастной группе учащихся по содержательной линии «Уравнения».

8. Докажите или опровергните утверждение: «Теоретической основой многих алгоритмов в курсе алгебры являются свойства чисел (законы арифметических действий)».

9. Раскройте сущность методического подхода в работе с математической задачей.

ЛИТЕРАТУРА

Рекомендуем использовать литературу, имеющую следующие номера в общем списке: 1–10, 22, 26, 28, 30, 32, 33, 40–51, 54, 56, 64, 69, 70, 73.

2.2. РЕАЛИЗАЦИЯ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ В ПРОЦЕССЕ ФОРМИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ КУЛЬТУРЫ И КУЛЬТУРЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Одной из главных задач преподавания математики в основной школе является формирование у учащихся сознательных и прочных вычислительных навыков.

Вычислительная культура формируется у учащихся на всех этапах изучения курса, но основа ее закладывается в первые 5–7 лет обучения. В этот период школьники обучаются осознанному использованию законов математических действий, осваивают правила и приемы вычислений, которые в последующие годы совершенствуются и закрепляются. Поэтому уровень вычислительных навыков зависит от систематичности повторения и закрепления ранее усвоенных приемов вычисления и их преемственной связи с новыми, приобретаемыми при последующем изучении материала.

Теоретической основой реализации преемственности в процессе развития вычислительной линии в курсах математики [43–44] и алгебры [1–3] является числовая основа построения рассматриваемого курса алгебры.

Одно из важнейших понятий математики – понятие числа развивается постепенно. В 5–6 классах изучается значительный по объему материал о рациональных числах, их свойствах, действиях над ними, отрабатываются навыки:

а) выполнения действий:

– с натуральными числами,

– с десятичными и обыкновенными дробями,

– с положительными и отрицательными числами;

б) применения законов сложения и умножения к упрощению выражений, к вычислениям с дробями;

в) использования признаков делимости на 2, 3, 5, 9, 10;

г) округления натуральных чисел и десятичных дробей;

д) определения порядка действий при вычислении значений выражений;

е) вычислений с использованием микрокалькулятора.

В 7–9 классах закрепляются знания о рациональных числах, вычислительные навыки с ними, повторяются законы и свойства арифметических действий. В связи с введением нового для учащихся действия возведения числа в натуральную степень, определенного на множестве рациональных чисел, дополняются сведения о порядке действий. Расширение понятия числа в курсе алгебры происходит за счет знакомства с множеством неизвлекающихся корней, вводятся термины иррациональное и действительное число. На этом этапе обучения класс иррациональных чисел и новая классификация чисел детально не рассматриваются. Учащиеся получают первичную информацию о них. Далее пополнение класса действительных чисел осуществляется за счет рассмотрения корней натуральной степени из чисел, а также происходит расширение понятия степени: до степени с целым и затем – рациональным показателем. В качестве дополнительного материала в учебниках предлагается информация о комплексных числах.

Техника вычислений у школьников совершенствуется при выполнении алгебраических преобразований выражений, содержащих степени и корни, одночлены и многочлены, при использовании формул сокращенного умножения, при преобразовании алгебраических дробей, решении линейных и квадратных уравнений и неравенств и их систем, при изучении функции.

Это связано с тем, что содержательная линия *«Выражения и их преобразования»* базируется на имеющихся знаниях о числах и их свойствах. Алгебраическое выражение вводится как обобщение числового выражения. Учащиеся убеждаются в необходимости буквенной символики, наглядности и целесообразности ее использования для решения задач в математике и ее приложениях. На этом этапе считается, что буквами обозначены некоторые фиксированные числа, при которых данные выражения имеют смысл.

Одночлен, многочлен, алгебраическая дробь рассматриваются как особые формы записи чисел, обозначенных буквами. Числовая линия развития начал алгебры не выдвигает существенных различий между обыкновенными и алгебраическими дробями, поэтому арифметические действия над обозначенными алгебраическими выражениями являются обобщением ранее изученных преобразований числовых выражений и выполняются по тем же правилам, что и действия над числами; обосновываются законами и свойствами арифметических действий, справедливость которых не вызывает сомнений у школьников.

В содержательной линии *«Уравнения и неравенства»* понятие «уравнение с одним неизвестным» тесно связано с понятием числового равенства. Рассматривая уравнение первой степени с одним неизвестным как равенство, в котором определенная буква обозначает неизвестное число, обращающее данное равенство в верное, авторы имеют возможность обращаться с уравнением как с верным числовым равенством и использовать все известные свойства числовых равенств.

Способы решения систем уравнений первой степени с двумя неизвестными также вводятся без применения понятия равносильности, на основе свойств верных числовых равенств (в предположении, что пара чисел x и y является решением системы).

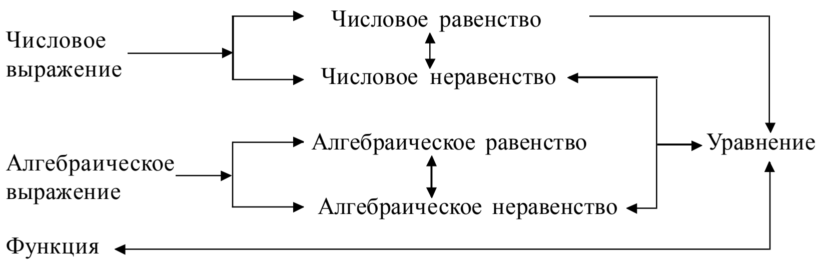
В самом деле, способ подстановки заключается в том, что одно неизвестное выражается через другое и найденное значение неизвестного подставляется в другое уравнение системы, то есть происходит замена в верном равенстве некоторого числа на равное ему число. Способ алгебраического сложения использует возможность прибавлять (вычитать) к обеим частям равенства одно и то же число, делить обе части равенства на одно и то же не равное нулю число. Это два основных способа решения систем. Графический способ рассматривается как геометрическая иллюстрация решения систем уравнений.

При изучении неравенств особое внимание уделено решению неравенств первой степени с одним неизвестным и их систем. Применяемые способы решения опираются на свойства верных числовых неравенств и вводятся аналогично способам решения соответствующих уравнений и их систем.

Понятие функции формируется и развивается с опорой на ранее изученные действия над числами и соответствующими алгебраическими выражениями. В начале курса 7 класса понятие функции не определяется, а разъясняется на конкретных примерах функциональной зависимости различных реальных величин, знакомых учащимся из их жизненного опыта. Функция трактуется как зависимая переменная, значения которой вычисляются в зависимости от значений независимой переменной по определенному правилу.

В качестве основного способа задания функции используется формула, поскольку учащиеся, благодаря предшествующей работе с формулами и алгебраическими выражениями, легко воспринимают функцию как правило, которое сопоставляет каждому числу из некоторого множества чисел число того же или другого числового множества, а формула рассматривается как способ записи этого правила.

Таким образом, свойства чисел и основные арифметические действия с ними являются основой построения содержательных линий курса алгебры, что способствует реализации преемственности в формировании вычислительной культуры школьников. Логика изучения основных математических выражений в рассматриваемых курсах может быть представлена следующим образом:



Однако наши наблюдения и ежегодно проводимый муниципальными методическими службами анализ итоговых контрольных работ учащихся 6 и экзаменационных работ учащихся 9 классов выявили проблемы в формировании вычислительных навыков учащихся и показали преемственность вычислительных ошибок, допускаемых школьниками. На основании этого среди причин недостаточно высокого уровня вычислительной культуры учащихся мы выделяем следующие:

– формальное усвоение учащимися основных правил и алгоритмов вычислений в курсе арифметики;

– отсутствие в методике преподавания преемственной связи изучаемого в курсе алгебры материала с формированием вычислительной культуры учащихся;

– эпизодическое использование вычислительных упражнений на уроках алгебры.

В целях формирования прочных и осознанных вычислительных навыков на уроках алгебры мы предлагаем использовать систематическое повторение вычислительного материала с помощью системы упражнений, включающей:

а) специальные упражнения (в том числе и устного характера),

б) сопутствующие упражнения в процессе изучения других тем курса.

Предлагаемая методика изучения числовых и алгебраических выражений предполагает обучение составлению и решению задач как двум взаимодополняющим компонентам. Составление общей схемы задания и постепенное усложнение ее компонентов по мере изучения новых числовых множеств позволяет многократно использовать однотипные задания разной степени сложности на всех этапах изучения и последующего обобщения материала. В данном случае схематическая запись выражений является средством реализации преемственности в формировании как вычислительной культуры, так и культуры алгебраических преобразований, поскольку, используя в качестве компонентов букву, одночлен, алгебраическую дробь и пр., мы переходим от числовых к алгебраическим выражениям.

Рассмотрим содержание вводного повторения на первых уроках алгебры. В начале курса 7 класса следует повторить, систематизировать и обобщить основные теоретические сведения и алгоритмы, к числу которых можно отнести:

1) арифметические действия, компоненты арифметических действий и связи между ними;

2) законы арифметических действий;

3) свойства верных равенств;

4) алгоритмы выполнения действий:

а) с десятичными дробями,

б) с обыкновенными дробями,

в) с десятичными и обыкновенными дробями совместно, г) с рациональными числами,

д) вычисления процента от числа и числа по его проценту.

В качестве наглядной опоры, способствующей актуализации знаний при повторении основных арифметических действий, предлагаем составить следующую таблицу:

Таблица 1

Название действия	Название компонентов и результата действия			Схема действия	Связь между компонентами
	I комп.	II комп.	Результат		
Сложение	Слагаемое	Слагаемое	Сумма	□ + Δ = о	□ = о – Δ Δ = о – □
Вычитание	Уменьшаемое	Вычитаемое	Разность	□ – Δ = о	□ = о + Δ Δ = □ – о
Умножение	Множитель	Множитель	Произведение	□ · Δ = о	□ = о : Δ Δ = о : □
Деление	Делимое	Делитель	Частное	□ : Δ = о	□ = о · Δ Δ = □ : о

Методика работы с таблицей предполагает постепенное ее заполнение учителем с привлечением учащихся во время фронтальной беседы.

После заполнения первого столбца учащимся предлагается привести пример действия сложения. Учитель записывает варианты на доске, используя *таблицу 2*. В числе примеров желательно появление в качестве компонентов действий разных чисел: натуральных, дробных, им противоположных и 0. Это облегчит переход к обобщенной схематической записи действия.

Таблица 2

Слагаемое	Слагаемое	Сумма
112	36	148
0,25	2,17	2,42
–18,2	3,6	–14,6
$1\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$
–27,4	$-1\frac{2}{3}$	–28,8
–87	$1\frac{3}{17}$	$-85\frac{14}{17}$
0	121	121

Таблица 3

Слагаемое	Слагаемое	Сумма
112	□	148
□	2,17	2,42
–18,2	3,6	□
□	$-\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$
–27,4	□	–28,8
–87	$1\frac{3}{17}$	□
□	121	121

На этих уроках полезно отрабатывать и закреплять навыки чтения и записи числовых и буквенных выражений. Для этого ученику необходимо показать, как строится то или иное математическое выражение. После повторения действия сложения важно обсудить вопросы:

1. Какое наименьшее количество слагаемых может содержать сумма?
2. Как схематично можно это представить?
3. Как изменится схема, если рассмотрим сумму трех слагаемых? Запишите ее.
4. Приведите пример суммы, соответствующей схеме 1, схеме 2. Сравните, чем они отличаются?
5. Иногда в записи суммы чисел используются скобки. Приведите примеры таких сумм.
6. Как составить схему суммы, используя скобки один раз? Два раза?

В результате у учащихся появляются схематические записи следующих ситуаций, которые возникают при выполнении действия сложения:

1.1. □ + □;
1.2. □ + □ + □;
1.3. (□ + □) + □;
1.4. □ + □ + (□ + □);
1.5. □ + (□ + □) + □;
1.6. □ + □ + (□ + □);
1.7. (□ + □) + □ + □;
1.8. (□ + □) + (□ + □);
1.9. (□ + (□ + □)) + □;
1.10. □ + (□ + (□ + □));
1.11. □ + ((□ + □) + □).

Учащиеся убеждаются, что процесс сложения чисел можно продолжать без ограничений и количество ситуаций будет очень велико, но они являются комбинациями рассмотренных случаев. У учащихся формируется обобщенное представление о действии сложения. Подставив в «окошечки» конкретные числа, можно перейти от абстрактного действия к сложению конкретных чисел. Опираясь на эти схемы в последующей работе, можно их дополнить и перейти к числовому равенству.

Аналогичная работа проводится при изучении действия вычитание. Учащиеся составляют следующие схемы:

2.1. □ – □;
2.2. □ – □ – □;
2.3. (□ – □) – □;
2.7. (□ – □) – □ – □;
2.8. (□ – □) – (□ – □);
2.9. (□ – (□ – □)) – □;

2.4. □ – (□ – □); 2.10. □ – (□ – (□ – □));
2.5. □ – (□ – □) – □; 2.11. □ – ((□ – □) – □).
2.6. □ – □ – (□ – □);

Полезно также обсудить вопрос о роли скобок при выполнении действий сложения и вычитания.

Далее следует выделить те ситуации, которые могут возникнуть при совместном рассмотрении действий сложения и вычитания. Наблюдая числовые выражения, школьники приходят к выводу, что следует рассмотреть случаи, когда:

1) используются 3 компонента действий и 2 знака «+» и «–»;

2) используются 3 компонента действий, 2 знака «+» и «–» и скобки;

3) используются 4 компонента действий и 3 знака:

а) 2 знака «+», 1 знак «–»,

б) 1 знак «+», 2 знака «–»;

4) используются 4 компонента действий, 3 знака и скобки и т. д.

Ситуаций будет очень много, не ставится цель перебрать все возможные случаи. Главное, чтобы ученик понял, как идет процесс конструирования числового выражения, как происходит его усложнение. Очень полезны упражнения на составление схемы числового выражения и составление числового выражения по схеме. Целесообразно оба эти вида деятельности дополнить заданием: «Прочитайте полученное числовое выражение».

В результате работы у школьников появятся схемы вида:

I. 2.12. □ + □ – □; II. 2.14. (□ + □) – □;
2.13. □ – □ + □. 2.15. □ + (□ – □);
2.16. (□ – □) + □;
2.17. □ – (□ + □).

Здесь целесообразно отметить, какие из предложенных схем являются одинаковыми, так как в них скобки не оказывают влияния на порядок действий (например, 2.6 и 2.8; 2.13 и 2.16).

III. 2.18. □ + □ + □ – □; 2.21. □ + □ – □ – □;
2.19. □ + □ – □ + □; 2.22. □ – □ + □ – □;
2.20. □ – □ + □ + □; 2.23. □ – □ – □ + □.

Ограничимся рассмотрением схем 3 случаев. В учебном процессе при проведении обобщения знаний указанным образом учитель ориентируется на восприятие материала классом и может, в

случае необходимости, ограничиться рассмотрением 2 первых случаев.

При рассмотрении действия «умножение» помимо традиционных случаев рассмотрения 2, 3, 4 компонентов и скобок необходимо систематизировать случаи использования 2 действий: умножения и сложения, умножения и вычитания, и 3 действий: сложения, вычитания и умножения. В каждом случае использования скобок полезно обсудить их значение.

Приведем схемы, которые возникают при комбинациях 3 действий. В этом случае используются 4 компонента действий:

3.1. □ + □ – □ · □; 3.4. □ – □ · □ + □;
3.2. □ – □ + □ · □; 3.5. □ · □ + □ – □;
3.3. □ + □ · □ – □; 3.6. □ · □ – □ + □.

Ситуация использования 3 действий и скобок предполагает 2 варианта:

1) 3 действия и одни скобки, 2) 3 действия и две скобки.

В первом случае в каждом из рассмотренных 6 вариантов появляется дополнительно 3 новых, например,

3.1. □ + □ – □ · □ →
3.1.1. (□ + □) – □ · □;
3.1.2. □ + (□ – □) · □;
3.1.3. □ + □ – (□ · □).

В случае использования 3 действий и двух скобок появляется 5 новых вариантов, например,

3.2. □ – □ + □ · □ →
3.2.1. (□ – □) + (□ · □);
3.2.2. (□ – (□ + □)) · □;
3.2.3. ((□ – □) + □) · □;
3.2.4. □ – (□ + (□ · □));
3.2.5. □ – ((□ + □) · □).

При рассмотрении действия «деление» количество ситуаций увеличивается за счет рассмотрения различных вариантов комбинаций: 4 действия, 4 действия и одна скобка, 4 действия и две скобки, 4 действия и 3 скобки и др.

По мере рассмотрения каждого нового действия происходит обобщение ранее изученного материала, его развитие под влиянием новых знаний и систематизация имеющейся информации за счет создания логической цепочки упражнений.

В результате этой работы формируется алгоритм составления числового выражения.

1. Рассматривается действие (или комбинация действий).

2. Выделяются ситуации, которые характеризуются разным количеством компонентов.

3. Осуществляется полный перебор возможных сопоставлений компонентов.

Так создается «цепочка» задач, по которой учащиеся с большей самостоятельностью продвигаются от простых задач к сложным, каждый раз встречая и преодолевая одну трудность. С помощью такой «цепочки» учащиеся подводятся к «открытию» новой задачи, способа ее решения с использованием хорошо усвоенных способов решения предыдущих задач.

При составлении задач учащимися полезно постепенно накладывать ограничения на свободу их выбора, например:

а) составить числовое выражение, используя в качестве компонентов положительные обыкновенные дроби, обыкновенную дробь и смешанное число и т. д.;

б) составить числовое выражение, значение которого равно $1;\ 1{,}2;\ -18\frac{1}{2}$ и т. д.;

в) составить числовое выражение, значение которого кратно 5, делится на 11 и т. д.;

г) составить числовое выражение, значение которого противоположно первому компоненту, равно модулю второго компонента и т. д.

Такая подробная и упорядоченная система задач помогает ученикам осознать конкретный характер абстрактных математических задач, позволяет учителю организовать дифференцированную работу на уроке: сильные ученики могут продвигаться вперед быстрее, переходя к составлению и решению необязательных для всех задач, учитель может больше внимания уделить работе со слабыми учащимися. Такая организационная форма значительно повышает эффективность учебного процесса. Учеников захватывает процесс получения знаний. Стержень урока – деятельность самих учащихся. Их действия носят преобразующий характер (наблюдают, сравнивают, классифицируют, группируют, делают выводы, выясняют закономерности).

Уяснение сути составления цепочки задач на вычисление значения числового выражения значительно облегчит процесс

формирования вычислительных навыков учащихся по мере знакомства с новыми числовыми множествами. Уяснив, что в числовом выражении в «окошечке» стоит число, ученик может создавать задания на множестве натуральных, целых, дробных, рациональных чисел, а по мере изучения новых классов чисел в курсе алгебры использовать в качестве компонентов степени и корни.

В процессе предложенной выше работы происходит повторение алгоритмов выполнения арифметических действий на разных множествах чисел и закрепление соответствующих вычислительных навыков. Здесь мы предлагаем использовать упражнения следующих типов.

1. При закреплении навыков выполнения действий с рациональными числами полезно использовать «правила знаков», записав их в виде таблицы.

Таблица 4

Действия с рациональными числами

Знаки	Сложение			Умножение				Деление			
I компонент	+	–	+	+	+	–	–	+	+	–	–
II компонент	+	–	–	+	–	+	–	+	–	+	–
Результат	+	–	1) + 2) –	+	–	–	+	+	–	–	+

2. Для учащихся, испытывающих затруднения в выполнении действий, можно предложить упражнение в виде *таблицы 5*, которое предполагает при вычислении пошаговое следование алгоритму.

Таблица 5

Задание	Знак	Вычисление	Результат
$-6 + (-0{,}2)$	–	$6 + 0{,}2 = 6{,}2$	$-6{,}2$
$-17 + 5{,}8$	–	$17 - 5{,}8 = 11{,}2$	$-11{,}2$
$-\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$	–	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$
$-6 : (-4)$	+	$6 : 4 = 1{,}5$	$1{,}5$

3. Для тренировки вычислительных навыков полезны упражнения типа: найти значения выражения.

Таблица 6

□	Δ	□ + Δ	□ – Δ	□ · Δ	□ : Δ
12	–6				
–10	1				
$\frac{1}{2}$	3,5				

Таблица предполагает многократное применение за счет использования сменной ленты со значениями символов □, Δ. Можно также предложить ученикам задать конкретные значения компонентов и выполнить действия.

Таблица 7

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
□	10	–10	15	$-\frac{1}{2}$	–0,7	6,2	–5,8	$\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{3}$	–2,6	$-\frac{6}{7}$
Δ	3	5	–3	$-\frac{1}{4}$	1,2	–3,4	–4,9	–0,5	–3,5	$3\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$

Задание: записать схему числового выражения, найти его значение при заданных значениях компонентов.

Многократное использование достигается за счет многообразия вариантов записи числового выражения, о чем мы говорили выше. По мере приобретения навыка возможно усложнение задания путем введения дополнительных условий, ограничивающих выбор.

4. При закреплении навыков выполнения действий с десятичными и обыкновенными дробями полезно использовать *таблицы 8 и 9* (Сборник задач и упражнений для устных занятий по математике: Пособие для учителей средней школы / В. А. Игнатьев, С. А. Пономарев, Е. Н. Обуховская.– М.: Учпедгиз, 1949. – С. 49, 59.

При этом, повторяя алгоритмы действий с обыкновенными дробями, целесообразно сделать обобщения и записать их в виде схемы (см. *Приложение 1, таблицу 5*), позволяющей в дальнейшем осуществить преемственный переход к изучению действий с алгебраическими дробями.

Таблица 8

0,4	0,01	0,02	0,03	0,42	0,41	0,46
0,38	0,31	0,13	0,14	0,32	0,35	0,12
0,39	0,3	0,26	0,21	0,28	0,2	0,11
0,43	0,33	0,27	0,25	0,23	0,17	0,07
0,06	0,16	0,22	0,29	0,21	0,34	0,44
0,05	0,15	0,37	0,36	0,18	0,19	0,45
0,04	0,49	0,49	0,47	0,08	0,09	0,1

Примеры заданий:

1. Найти сумму чисел по вертикали и горизонтали большого, среднего, малого квадратов в квадрате.

2. Найти произведение числа 5 и чисел, стоящих по горизонтали большого квадрата.

3. Найти разности чисел, стоящих в 1 и 2 столбцах.

Таблица позволяет организовать многократные упражнения на все действия с обыкновенными дробями.

Таблица 9

$\frac{168}{216}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{5}{13}$	65	$3\frac{5}{8}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{19}{25}$
$\frac{83}{249}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{6}$	42	$8\frac{15}{13}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{4}{7}$
$\frac{60}{144}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{13}{18}$	144	$31\frac{5}{6}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{4}{9}$
$\frac{264}{312}$	$\frac{7}{29}$	$\frac{9}{16}$	256	$105\frac{3}{4}$	$1\frac{7}{12}$	12
$\frac{22}{143}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{17}{25}$	136	$17\frac{11}{20}$	$2\frac{19}{48}$	$1\frac{5}{32}$
$\frac{21}{140}$	$\frac{5}{31}$	$\frac{24}{35}$	$\frac{8}{15}$	246	$\frac{3}{64}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{72}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{3}{4}$	$2\frac{6}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{17}$	45

5. При повторении операции вычисления процента от числа и числа по его проценту полезно вспомнить связь между процентами и дробями, используя для этого задание с помощью таблицы, рассматриваемое в 5 классе [43, с. 329].

Таблица 10

Дробь	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{50}$			
Десятичная дробь		0,25					0,05	
Проценты				20		100		1

В число устных упражнений включаются задания типа:

а) Скольким процентам равны 0,37; 0,125; 0,78; 1,5; 2,003?

б) Представить в виде десятичной дроби: 37%, 8%, 111%, 123%, 43%, 72,5%.

Используя *таблицы 8 и 9*, можно выполнить упражнения на вычисление процентов от числа и числа по его проценту, например:

Задание 1. Используя средний столбик *таблицы 9*, вычислить 2% от первого числа, 3% от второго..., 8% от седьмого.

Задание 2. Каждое число верхней строки *таблицы 9* составляет 25% от искомого. Записать ряд искомых чисел.

После повторения понятия «числовое равенство» действие сложения записываем в виде схемы □ + Δ = о, где в качестве компонентов могут быть любые числа. Далее полезно обсудить связь между компонентами сложения и повторить решение уравнений путем установления взаимосвязи между компонентами и результатами действий, привести соответствующие примеры и найти корни уравнений, что способствует тренировке вычислительных навыков. Как вариант обобщения и установления связи с решением уравнений можно записать схемы основных уравнений, договорившись неизвестный компонент обозначить знаком □, а известные буквами, то есть в виде:

1) □ + a = b, 3) □ – a = b, 5) □ · a = b, 7) □ : a = b,
2) a + □ = b, 4) a – □ = b, 6) a · □ = b, 8) a : □ = b.

Для закрепления вычислительных навыков полезно *таблицы типа 2 и 6* преобразовать в *таблицы типа 3* и многократно их использовать, изменяя значения компонентов. Аналогичным образом строится работа при изучении других действий, при этом возможно использование *таблицы 1* на серии последующих уроков.

Повторение законов арифметических действий и свойств равенств в курсе алгебры полезно совместить с изучением алгебра-

ических выражений и их преобразований, при этом развитие вычислительных навыков будет происходить при решении сопутствующих упражнений.

С понятием «буквенное выражение» школьники знакомятся в 5 классе. Путем сравнения числовых и буквенных выражений они убеждаются, что последние имеют аналогичную структуру. Преемственная связь здесь проявляется в том, что школьники осознают процесс наращивания нового знания при переходе от числовых к буквенным (далее алгебраическим) выражениям.

В данном случае буквой m обозначается число, которое меняется от задачи к задаче. В алгебраическом выражении буквы могут обозначать различные числа. Для наглядной иллюстрации перехода от одного вида математического выражения к другому целесообразно обратиться к рассмотренной ранее логической схеме и попытаться изобразить наглядно процесс перехода, например, таким образом:

1) □ + □

□	17	36	m	m	m	m
□	20	20	20	34	52	n

2) □ + □ – □

□	15	21	m	m	m	m	m
□	37	37	37	20	n	n	n
□	13	13	13	13	13	18	p

Итак, алгебраическое выражение, включающее 2 компонента, может содержать:

1) букву и число, 2) 2 буквы.

Алгебраическое выражение из 3 компонентов может содержать:

1) букву и 2 числа, 2) 2 буквы и число, 3) 3 буквы и т. д.

Полезно при рассмотрении алгебраических выражений в комплексе выполнять упражнения на чтение и запись выражений, на составление выражений по схеме и на составление схемы выражения, закрепляя и обобщая знания, полученные при изучении числовых выражений. Необходимо также обобщить роль скобок при определении порядка выполнения действий и прийти к выводу, что скобки ставятся только тогда, когда необходимо изменить обычный порядок действий.

Например, значение скобок демонстрирует упражнение: прочитать запись и вычислить значение выражения:

Выражение	Схема
1,5 + 2,5 · 0,4 – 0,1	□ + □ · □ – □
(1,5 + 2,5) · 0,4 – 0,1	(□ + □) · □ – □
1,5 + (2,5 · 0,4) – 0,1	□ + (□ · □) – □
(1,5 + 2,5 · 0,4) – 0,1	(□ + □ · □) – □
1,5 + 2,5 · (0,4 – 0,1)	□ + □ · (□ – □)
(1,5 + 2,5) · (0,4 – 0,1)	(□ + □) · (□ – □)

Следующим этапом обобщения числовых выражений является переход к числовым и алгебраическим равенствам и рассмотрение свойств арифметических действий. Словесные формулировки свойств действий над числами коротко записывают в виде формул. Здесь нам кажется целесообразным после рассмотрения справедливости свойств на конкретных числовых равенствах обобщить их в виде схем типа:

1) □ + Δ = Δ + □, □ · Δ = Δ · □,

2) (□ + Δ) · o = □ · o + Δ · o, (□ · Δ) · o = □ · (Δ · o),

3) □ · (Δ + o) = □ · Δ + □ · o.

В виде схем можно представить и следующие свойства:

4) a + (b – c) = a + b – c, □ + (Δ – o) = □ + Δ – o,

5) a – (b + c) = a – b – c, □ – (Δ + o) = □ – Δ – o,

6) a – (b – c) = a – b + c, □ – (Δ – o) = □ – Δ + o.

Используя такую запись, мы исходим из того, чтобы помочь учащимся уяснить справедливость этих конструкций как для числовых, так и для алгебраических выражений. Важно, чтобы школьники понимали, что в данном квадрате, треугольнике, круге может стоять любое математическое выражение (и не обязательно только число или буква, которые выступают в качестве частных случаев).

Рассмотренные равенства (4–6) являются схематическим выражением правила раскрытия скобок – это следующий этап обобщения ранее изученного материала.

При изучении квадрата и куба числа в курсе математики и степени числа в курсе алгебры расширение числовых выражений идет за счет того, что в качестве компонентов в числовых выражениях могут использоваться соответственно степени чисел, а при рассмотрении алгебраических выражений – степени, в основании которых находится буква.

Далее в качестве компонента можем рассматривать одночлены (произведения числовых и буквенных множителей). Следует иметь в виду, что степень числа и произведение степеней чисел также являются одночленами. Логика рассмотрения действий здесь несколько иная.

1. Умножение одночленов.

2. Сложение одночленов → многочлен (алгебраическая сумма одночленов).

В основе выполнения действий лежат рассмотренные законы арифметических действий. Вводится операция приведения подобных членов, с которой ученики были знакомы в 6 классе.

3. Сложение и вычитание многочленов.

4. Умножение многочлена на одночлен.

5. Умножение многочлена на многочлен.

6. Деление одночлена и многочлена на одночлен.

Итак, усложнение упражнений осуществляется следующим образом: □ → число → степень числа → буква → степень буквы → одночлен → многочлен.

В основе всех операций лежат законы арифметических действий.

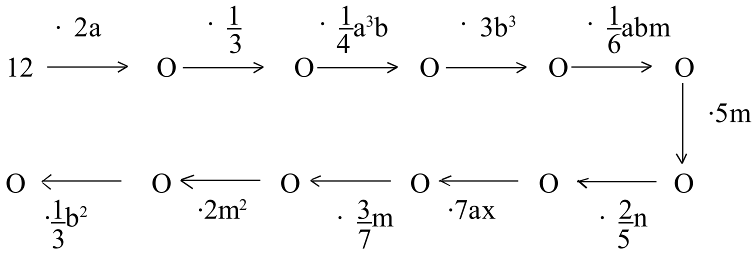
В число упражнений, способствующих обобщению законов арифметических действий и их распространению на любые алгебраические выражения, можно включить работу с *таблицами 2, 11*, рассмотрев в них в качестве компонентов алгебраические выражения. Убедиться в справедливости правил раскрытия скобок помогут задания, аналогичные содержащимся в *таблице 11*. Изменяя в ней верхнюю строку, можно провести вычисления и преобразования для разных формул.

Таблица 11

□	Δ	o	□ – (Δ + o)	□ – Δ + o	□ – Δ – o
8	2	3			
–7	5	–1			
5,2	1,4	2,7			
1,2a	$\frac{1}{2}$	a			
$2x^2y$	$4x^2$	5			
4,8mn	1	$\frac{2}{5}mn$			

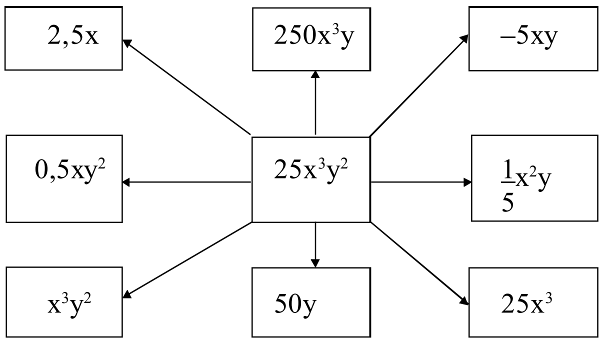
Для закрепления навыков алгебраических преобразований с многочленами полезно дополнить имеющиеся в учебнике упражнения заданиями, форма подачи которых аналогична вычислительным примерам в курсе арифметики, то есть типа:

1. Выполнить умножение одночленов.



Если задать конечный результат $4a^7b^7m^5nk$, то можно сформулировать обратное задание: выполнить деление одночленов в обратном порядке.

2. С помощью какого действия может быть получен одночлен в прямоугольнике из одночлена, стоящего в центре?



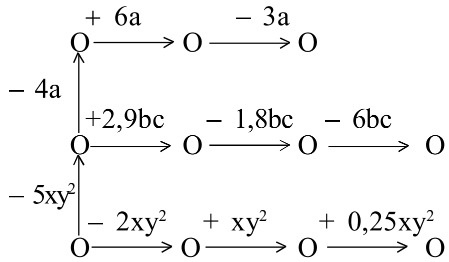
3. Одночлен, расположенный в центре, умножить (разделить, сложить, вычесть) на одночлены, расположенные на концах луча.

Дополнительно:

1) найти значение получившегося выражения при $x = 0, 1, ...;$ $y = 2, \frac{2}{5}, ...;$

2) в случае сложения и вычитания одночленов получившееся выражение разложить на множители.

4. Выполнить указанные действия:



Изменяя исходное данное, можно получить разные упражнения, способствующие отработке навыка приведения подобных слагаемых.

5. 1) Даны одночлены: $-5ax, -3ax, -2ax, -ax, 0, ax, 2ax, 3ax, 5ax$.

Составить суммы, состоящие: а) из двух слагаемых; б) из трех слагаемых, которые равны нулю.

2) Даны одночлены: $-5kp, -4kp, -3kp, -kp, 0, kp, 3kp, 4kp, 5kp$. Построить квадрат (3×3). Расположить в его клетках одночлены так, чтобы после сложения одночленов по горизонтали, вертикали и диагоналям получился 0.

6. Для тренировки вычислительных навыков и функциональной пропедевтики полезно в устном счете использовать задания на заполнение таблицы типа:

x	$\frac{2}{3}x$	$x - \frac{1}{3}x$	$x + \frac{1}{3}x$	$2x - \frac{1}{3}x$	$\frac{11}{3}x$
5					
1,2					

При рассмотрении формул сокращенного умножения можно провести актуализацию знаний учащихся путем выполнения подготовительных упражнений. Например, изучение формулы квадрата суммы двух выражений предварить заданиями:

1. Прочитать выражения: a^2, $2ab$, $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $a^2 + b^2$, $a^3 - b^3$, $a^3 + b^3$, $-2ab$.

2. Записать выражение:

– удвоенное произведение a и $(-b)$,

– сумма одночленов $3a$ и $(-b)$,

– квадрат этого двучлена,
– квадрат первого члена,
– квадрат второго члена,
– произведение одночленов,
– удвоенное произведение одночленов.

3. Раскрыть скобки и привести подобные члены:

а) $(a - 3) \cdot (a - 4)$, б) $(a - 3) \cdot (a - 3)$. Проанализировать получившиеся равенства.

4. Заполнить таблицу:

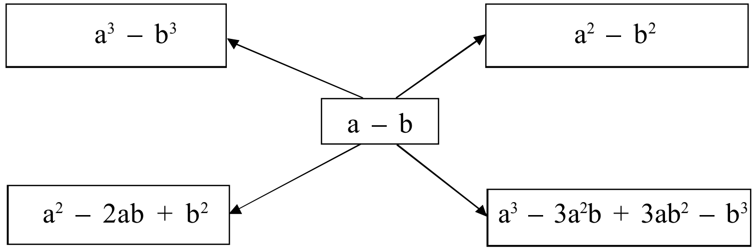
a	b	a^2	ab	2ab	b^2
3x	2				
0,5	1,5y				
m^2	m^3				
$4n^3$	$3n^2$				
$0{,}5n^4$	$0{,}1n^3$				

В процессе изучения формул сокращенного умножения $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$; $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ также формируется обобщенное представление о том, что вместо a и b могут быть: число, буква, одночлен, многочлен, поэтому есть смысл абстрактные формулы записать в виде: $(\square + \Delta)^2 = \square^2 + 2\square \cdot \Delta + \Delta^2$, $\Delta^2 - \square^2 = (\Delta - \square)(\Delta + \square)$ и наполнять их конкретным содержанием в каждом рассматриваемом случае.

Целесообразно в число упражнений на применение формул включить задания вычислительного характера типа: «Вычислить: 29 · 31, 752 – 252, 612, 682 – 322, 72 · 68 и др.» и уделить особое внимание аналогичным упражнениям из учебника.

Для более осознанного и прочного усвоения формул сокращенного умножения предлагаем использовать занимательные упражнения, которые широко применяются в курсе арифметики. Например, упражнения «на восстановление», которые мы уже приводили в теме «Многочлены». В них по данному результату или по части компонентов исходных данных требуется восстановить недостающие. Учащимся при выполнении таких заданий необходимо уметь анализировать условие задачи, понимать существо изученного, знать обратные операции. Рассмотрим примеры.

1. С помощью какого действия можно из выражения в центре получить выражения на концах луча? Назовите недостающие компоненты этого действия. Запишите получившиеся алгебраические равенства.



2. 1) Назовите недостающий одночлен в центре, чтобы при сложении одночленов по диагоналям, горизонталям и вертикалям, проходящим через центр, получились полные квадраты.

$4a^4$	a^2b^6	4
1		$4a^4b^6c^2$
$a^4b^6c^2$	$4a^2c^2$	c^2b^6

2) Заполните пустые клетки так, чтобы при сложении по диагоналям, горизонталям и вертикалям, проходящим через центральную клетку, получились полные квадраты.

	$6x^3y^4$	

При рассмотрении разложения многочлена на множители мы выполняем по существу операцию, обратную раскрытию скобок, используя операции группировки, заключения в скобки и вынесения общего множителя за скобки. Здесь необходимо опираться на операции умножения многочлена на одночлен, умножения многочлена на многочлен, деления одночлена и многочлена на одночлен и в дальнейшем – на изученные формулы сокращенного умножения. Основа преобразований – распределительный закон умножения. Поэтому использование схематической записи закона справа налево позволит вывести алгоритм вынесения общего множителя за скобку:

$\Delta \cdot (o + \square) = \Delta \cdot o + \Delta \cdot \square$ и $\Delta \cdot o + \Delta \cdot \square = \Delta \cdot (o + \square)$.

В качестве компонентов рассмотрим:

1) 3 числа; 2) 1 число и 2 буквы; 3) 2 числа и букву; 4) 3 буквы.

Заменим компоненты одночленом, двучленом и т. д., получим цепочку упражнений возрастающего уровня сложности:

1) $2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \to 2 \cdot 3{,}4 + 2 \cdot 4{,}2$;

2) $2 \cdot m + 2 \cdot n \to 2 \cdot 3x + 2 \cdot 4y \to 2(3x + 1) + 2(4y - 1)$ и т. д.;

3) $2 \cdot m + 3 \cdot m \to 2 \cdot 3x + 3 \cdot 3x \to 2 \cdot 3x^2y + 3 \cdot 3x^2y$ и т. д.;

4) $a \cdot b + a \cdot c \to a \cdot (b + 1) + a \cdot (c + k)$ и т. д.

Далее рассматриваются случаи применения распределительного закона к трехчлену: $\Delta \cdot o + \Delta \cdot \square + \Delta \cdot \nabla = \Delta \cdot (o + \square + \nabla)$, проводится аналогичная работа по перебору возможных вариантов.

Аналогичным образом можно реализовать преемственные связи при изучении действий с обыкновенными и алгебраическими дробями. Рассматривая действия сложения и вычитания, следует выделить два этапа:

• действия с дробями, имеющими одинаковые знаменатели; их схема:

$$\frac{\square}{\Delta} + \frac{o}{\Delta} = \frac{\square + o}{\Delta}, \qquad \frac{\square}{\Delta} - \frac{o}{\Delta} = \frac{\square - o}{\Delta}.$$

• действия с дробями, имеющими разные знаменатели.

При этом в алгоритме выделяют 2 шага:

1) привести дроби к наименьшему общему знаменателю,

2) выполнить действия по схеме 1 случая.

При выполнении действий умножения и деления имеют место следующие схемы:

$$\frac{\Delta}{\square} \cdot \frac{o}{\nabla} = \frac{\Delta \cdot o}{\square \cdot \nabla}, \qquad \frac{\Delta}{\square} : \frac{o}{\nabla} = \frac{\Delta \cdot \nabla}{\square \cdot o}.$$

Далее идет процесс наращивания сложности выполняемых заданий:

1) в числителе и знаменателе дроби стоят числа,

2) в числителе и знаменателе дроби стоят алгебраические выражения: одночлены и многочлены.

В этом случае мы имеем дело с алгебраическими дробями. Алгоритм выполнения действий с ними сохраняется.

С понятием «дробное выражение» ученики знакомятся в 6 классе. В учебнике дается следующее определение: «Частное двух чисел или выражений, в котором знак деления обозначен чертой, называют дробным выражением» [44, с. 112].

Примеры:

$$\frac{3{,}7}{8{,}5 \cdot 6{,}2}; \qquad \frac{\frac{3}{4} + \frac{7}{8}}{1{,}3 - 0{,}8}; \qquad \frac{a - b}{a + b}; \qquad \frac{a + b}{a \cdot b}.$$

Сделана оговорка: числителем и знаменателем дробного выражения могут быть любые числа, а также числовые или буквенные выражения. С дробными выражениями можно выполнять действия по тем же правилам, что и с обыкновенными дробями.

В 7 классе при повторении материала об алгебраических выражениях рассматриваются и дробные, но целенаправленная работа с ними происходит в главе V «Алгебраические дроби».

Поскольку в предыдущий период обучения алгебре постоянно предлагались задания на вычисление значений числовых дробных выражений и в начале главы потребность в их рассмотрении возникла при решении сюжетной задачи на движение по реке, то переход к рассмотрению алгебраических дробей вполне мотивирован для учащихся.

Основное свойство дроби впервые также рассматривается в курсе 6 класса, но здесь дается содержательная формулировка, которая демонстрируется на конкретных примерах. Если уровень подготовки класса позволяет, то мы считаем возможным сделать схематическую запись:

$$\frac{\square}{\Delta} = \frac{\square : o}{\Delta : o}, \qquad \frac{\square}{\Delta} = \frac{\square \cdot o}{\Delta \cdot o}.$$

Здесь в качестве условных знаков $\square$, o, Δ могут быть любые числа или алгебраические выражения, к чему учащиеся уже привыкли в результате предшествующей целенаправленной работы. В 7 классе мы продолжаем расширять класс решаемых задач и рассматриваем случаи, когда в качестве компонентов используются одночлены и двучлены.

Таким образом, используя схемы при рассмотрении основных арифметических действий с числовыми и алгебраическими выражениями, мы создаем логическую цепочку сквозных задач, которые ученики решают в курсе математики (арифметики и алгебры), постепенно усложняя рабочие компоненты. Тем самым мы создаем условия для реализации преемственных связей в обучении арифметике и алгебре при изучении содержательных линий «Числа и вычисления» и «Выражения и их преобразования».

При формировании умений и навыков алгебраических преобразований исходим из того, что действия над буквами обозначаются. Преобразования мы выполняем над алгебраическими выражениями, полученными после обозначения действий. Такой подход позволяет построить их изучение на сознательной основе, сократить число правил, изучаемых школьниками, и повысить логический уровень обучения. Основой алгебраических преобразований являются законы арифметических действий. Реализуя идею преемственности в обучении арифметике и алгебре, мы должны показать школьникам, что между имеющимися у них сведениями об упрощении выражений (5 класс), раскрытии скобок и приведении подобных слагаемых (6 класс) и вопросами, связанными с преобразованием одночленов и многочленов (7 класс), существует связь: новый материал развивает имеющиеся знания. При этом логическая основа преобразований осталась та же, но изменяются компоненты от чисел и простейших буквенных выражений, содержащих произведение числа и одной или нескольких букв в 5–6 классах к более сложным их комбинациям – одночленам и многочленам в 7 классе. Для сознательного усвоения преобразований важно, чтобы школьники поняли, что приведение одночленов к стандартному виду производится на основе переместительного и сочетательного законов умножения и свойств степени. Умножение одночленов является по существу приведением к стандартному виду. Сложение и вычитание одночленов можно рассматривать как приведение подобных членов. Приведение многочленов к стандартному виду, умножение одночлена на многочлен, умножение многочленов происходит на основе распределительного закона. Если школьники в курсе арифметики хорошо усвоили операцию раскрытия скобок, то эту терминологию можно применить и в данном случае. В случае раскрытия скобок в произведении многочленов трудно опираться непосредственно на распределительный закон. Здесь нужно постепенно упражняться, рассматривая произведение двух двучленов, двучлена и трехчлена и т. д., последовательно применяя распределительный закон.

Например, $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = ac + ad + + bc + bd$.

Деление одночлена и многочлена на одночлен происходит на основе свойств умножения и деления, а также деления суммы на число. Более подробно эти вопросы рассматриваются в связи с изучением алгебраических дробей.

При рассмотрении разложения многочленов на множители также следует фиксировать внимание школьников на том, что оно осуществляется на основе законов арифметических действий. Это будет способствовать осознанному усвоению алгебры и служить основой для реализации преемственной связи в обучении арифметике и алгебре. Вынесение общего множителя за скобки осуществляется на основе распределительного закона. В данном случае мы можем исходить из анализа известных ситуаций применения распределительного закона и затем ввести новую терминологию. Рассматривая способ группировки, полезно пояснить ученикам цель группировки: группировать одночлены надо так, чтобы после вынесения за скобки общего множителя в каждой группе получались одинаковые многочленные множители в скобках. В дальнейшем целью группировки может быть применение той или иной формулы умножения. Чтобы ученики сознательно разлагали на множители, полезно чаще применять числовые подстановки. Они убеждают школьников в правильности или ошибочности выбранного преобразования и показывают роль разложения на множители в упрощении выражений. Действия с алгебраическими дробями являются следующим этапом применения и обобщения предыдущих знаний, умений и навыков об алгебраических выражениях, что способствует упрочению преемственных связей внутри содержательной линии.

Таким образом, в курсе алгебры 7 класса рассматриваются числовые и рациональные алгебраические выражения, обобщение которых можно провести, используя *схемы 1, 2, 3, 4, 9* (см. *Приложение 1*). При этом особенно важно осознание учащимися логики и причин появления новых типов алгебраических выражений, что позволяет проследить *схема 7* (там же), показывающая действия, связывающие неизвестные в алгебраических выражениях и позволяющая обозначить перспективу в изучении алгебраических выражений в 8 и 9 классах. *Схема 9* предполагает постепенное заполнение по мере изучения каждого нового типа алгебраических выражений и может быть многократно использована после каждого этапа изучения материала и при итоговом повторении содержательной линии. Переход к изучению алгебраических преобразований выражений, содержащих степени и корни, облегчает *схема 3*, которая также позволяет осознать связь линии вычислений и алгебраических преобразований.

При изучении темы «Квадратные корни» учащиеся знакомятся с понятием «тождество», термином «иррациональное выражение», встречаются с преобразованиями, выполняемыми при ограниченных значениях неизвестного. Благодаря введению действия «извлечение квадратного корня» расширение алгебраических преобразований происходит в двух направлениях: выражение, содержащее неизвестное под знаком корня, становится новым компонентом при осуществлении преобразований, схемы которых учащимся знакомы, и, с другой стороны, появляются новые типы преобразований, представленные в *схеме 3*, которые можно дополнить операциями внесения и вынесения множителя из-под знака корня. В данном случае в качестве неизвестного также могут быть использованы число, двучлен, трехчлен и т. д. Аналогичным образом происходит развитие линии алгебраических преобразований в теме «Степень с целым показателем». При изучении алгебраических преобразований выражений, содержащих степени и корни, в сопутствующем плане происходит развитие вычислительных навыков учащихся.

В учебниках [1–3] в курсе 9 класса предполагается рассмотрение преобразований выражений, содержащих степень с рациональным показателем и неизвестное под знаком тригонометрической функции, однако в документах [57, 62] их изучение предлагается отнести в курс алгебры и начал анализа.

Итак, предлагаемая методика изучения числовых и алгебраических выражений и их преобразований, предполагающая составление и решение задач как обязательных взаимодополняющих компонентов обучения, способствует реализации преемственности курсов арифметики и алгебры. Общая схема заданий и постепенное усложнение ее компонентов по мере изучения нового материала дают возможность многократно использовать однотипные задания разной степени сложности на всех этапах обучения. Учащиеся при этом осознают процесс наращивания нового знания при переходе от числовых к алгебраическим выражениям, понимают, что основу преобразований составляют законы арифметических действий,

устанавливают связь новых правил, необходимых для выполнения вычислений и алгебраических преобразований с ранее изученными. Это имеет решающее значение как для развития логического мышления, так и для формирования прочных умений и навыков в преобразовании выражений. Повышается логический уровень обучения алгебре: алгебраические преобразования получают обоснование в виде законов арифметических действий и свойств степени. В условиях предлагаемого методического подхода наблюдается рост активности учащихся при изучении нового материала, происходит постепенное вовлечение школьников в процесс конструирования упражнений, что повышает интерес к предмету и позитивно влияет на результативность обучения.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Проанализируйте логику развития числовой линии в курсе математики основной школы.
2. В чем сущность описанной методики изучения числовых и буквенных выражений?
3. Выявите преимущества описанного методического подхода к организации вводного повторения на первых уроках алгебры.
4. В чем заключается сущность процесса конструирования числового выражения по схеме и какова логика его усложнения?
5. Составьте конспект фрагмента урока, на котором вводится схематическая запись ситуаций, возникающих при выполнении действия вычитания, и формируется алгоритм составления числовых выражений по схеме.
6. Приведите пример «цепочки» усложняющихся задач на составление и вычисление значения числового выражения. Покажите возможность многократного использования этих схем задач по мере расширения числовых множеств и операций, в них выполняемых.
7. Выделите этапы обобщения схематических записей числовых выражений. Обоснуйте методический аспект переноса схем основных арифметических действий с числовыми выражениями в новую ситуацию – выполнение действий с алгебраическими выражениями (алгебраических преобразований).
8. Выделите и обоснуйте теоретическую основу преемственной связи изучения числовых и буквенных выражений посредством использования обобщенных схем.

ЛИТЕРАТУРА

Рекомендуем использовать литературу, имеющую следующие номера в общем списке: 1–10, 23, 29, 30, 33, 35, 40–52, 57, 58, 63–64, 67, 72.

2.3. РЕАЛИЗАЦИЯ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Уравнения и неравенства занимают центральное место в школьном курсе алгебры. Они имеют не только важное теоретическое значение, но и служат чисто практическим целям. Подавляющее большинство задач о пространственных формах и количественных отношениях реального мира сводится к решению различных видов уравнений. С простейшими уравнениями учащиеся знакомятся в курсе математики начальной школы. В 5–6 классах круг сведений об уравнениях расширяется. В пропедевтическом курсе уравнений можно выделить два концентра: нахождение неизвестного на основании зависимостей между компонентами и результатами действий и нахождение неизвестного при помощи применения свойств равенств. Это обусловлено тем, что изучение сведений об уравнениях связано с расширением понятия числа, изучением действий над числами, с преобразованиями алгебраических выражений, функциональными зависимостями.

В курсе алгебры уравнениям также отводится значительное место. По мере того как вводятся новые виды выражений и изучаются их преобразования, расширяется и круг рассматриваемых уравнений.

При изучении любой темы уравнения могут быть использованы как эффективное средство закрепления, углубления, повторения и расширения теоретических знаний, развития творческой математической деятельности учащихся. Операции над числами и свойства этих операций, функции и свойства функций, а также связанные с этими вопросами алгебраические преобразования в процессе изучения сразу же могут находить отражение в упражнениях на решение уравнений.

Наряду с уравнениями серьезное внимание в курсе уделяется решению неравенств. Их изучение также широко переплетается с материалом других содержательных линий. Свойства чисел лежат в основе свойств числовых неравенств, которые используются для оценки значений по методу границ, то есть осуществляется связь с вычислительной линией. С опорой на свойства числовых неравенств проводится доказательство неравенств и обосновываются приемы

их решения. При доказательстве и решении неравенств и их систем широко привлекаются алгебраические преобразования. Неравенства применяются также в исследовании функций при нахождении промежутков знакопостоянства и монотонности. Поэтому, реализуя преемственность в обучении арифметике и алгебре при изучении уравнений и неравенств, необходимо обеспечить преемственность не только в самой содержательной линии, но и между уравнениями и неравенствами и изучением числовых множеств, выражений и их преобразований, функций.

Рассмотрим на примере изучения уравнений один из вариантов обеспечения преемственности в обучении арифметике и алгебре, использующий систематическое повторение материала на разных этапах его изучения и реализующий методический подход, включающий составление и решение уравнений как два взаимодополняющих компонента обучения.

Мы выделяем два аспекта при организации повторения математического материала: основные теоретические сведения и приемы решения задач.

На уроках вводного повторения и при актуализации знаний учащихся перед изучением в 7 классе темы «Уравнение с одним неизвестным» мы считаем целесообразным проанализировать развертывание основных аспектов знаний об уравнениях в курсе арифметики. Владея определенным багажом знаний и умений, учащиеся могут самостоятельно или при помощи учителя провести их обобщение и систематизацию, что позволит составить целостное представление о развитии содержательной линии в курсе арифметики.

Для удобства систематизации материала и создания условий для наглядного восприятия мы предлагаем в процессе повторения составить следующую таблицу:

Основные теоретические сведения	5–6 классы	7 класс
1	2	3
Термины	Буква	– Неизвестное число, – левая часть уравнения, – правая часть уравнения, – член уравнения
Уравнение	Равенство, содержащее букву, значение которой надо найти	Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой

1	2	3
Корень уравнения	Значение буквы, при котором из уравнения получается верное числовое равенство	Значение неизвестного, при котором это уравнение обращается в верное равенство
Решить уравнение	Это значит найти все его корни (или убедиться, что это уравнение не имеет ни одного корня)	Это значит найти все его корни или установить, что их нет

На основании анализа таблицы учащиеся убеждаются, что основные понятия и требования при решении уравнений в курсах арифметики и алгебры одинаковы. Однако в 7 классе происходит расширение их содержания. В частности, на конкретных примерах показывается, что есть такие уравнения, с которыми ранее учащиеся не встречались:

– уравнения, которые имеют два, три и более корня;
– уравнения, которые имеют бесконечно много корней;
– уравнения, которые могут не иметь корней.

В целях систематизации изученных в курсе арифметики типов уравнений и способов их решения эти вопросы также следует обсудить при повторении, используя *схему 14* (см. *Приложение 1*).

В 5 классе способы решения уравнений ограничиваются использованием взаимосвязи между компонентами и результатами действий, формируются соответствующие правила нахождения неизвестных. Здесь происходит также некоторое обобщение осваиваемых способов решения и фиксирование их в буквенно-символической форме, которая тщательно анализируется, уточняется смысл и объясняется значение используемых символов, отмечается, что в записи конкретных уравнений неизвестное число может обозначаться любой буквой. При повторении этих вопросов в качестве средства наглядности, способствующего актуализации знаний и обеспечивающего осознанность усвоения материала, а также устанавливающего сопутствующую связь с вычислительной линией, полезно использовать таблицу, рассмотренную в предыдущем пункте.

В 7 классе, повторяя этот материал, можно провести обобщение, вводя символ $\square$, который обозначает неизвестное число. В этом случае буква, ранее использованная учениками, является частным случаем неизвестного. Кроме того, в схематической записи уравнений применяются символы a, b, c, ..., обозначающие любые числа.

Таким образом, схемы основных уравнений будут иметь следующий вид:

$\square + a = b$, $\square \cdot a = b$,
$\square - a = b$, $\square : a = b$,
$a - \square = b$, $a : \square = b$.

В данных схемах a и b – числа, которые задаются в каждом конкретном случае. В качестве $\square$ выступает неизвестное число, например, x, y и т. д. Учащиеся легко воспринимают такую запись, поскольку с составлением схем числовых и буквенных выражений и равенств они уже встречались. В методическом отношении использование таких схем полезно, поскольку составляет основу для последующих обобщений линии рассматриваемых уравнений и является базой для обучения школьников составлению уравнений, позволяющей осознать теоретическую основу и приемы их решения.

В 5 классе решаются уравнения, содержащие буквенные выражения только в одной части уравнения. При их решении уделяется внимание выделению способа решения, осмыслению понятия корня уравнения, пониманию постановки задачи о решении уравнения. Нужный способ решения уравнения выделяется на основе анализа выражения, стоящего в левой части уравнения: какие действия указаны в выражении, какое действие выполняется последним, как читается запись этого выражения, какому компоненту этого действия принадлежит неизвестное число.

Актуализация этого материала в 7 классе происходит в первой главе. Вместе с тем, эту работу облегчит использование схемы уравнения: заключив выражение, содержащее неизвестное, в прямоугольник, мы тем самым выделяем последнее действие, которое показывает первый шаг в решении уравнения, затем цепочка рассуждений повторяется. Данный прием особенно актуален при решении более сложных уравнений, например, типа $124 : (y - 5) = 31$ или $44 : z + 9 = 20$. Анализируя первое уравнение, учащиеся замечают, что неизвестное входит в состав делителя, поэтому сначала следует найти делитель, а потом, решая новое уравнение, найти неизвестное уменьшаемое.

$124 : (\boxed{y} - 5) = 31$

На первых этапах работы при анализе уравнений можно использовать в записи двойные прямоугольники.

Рекомендуем также при решении первых уравнений для зрительного подкрепления и выработки правильной математической речи использовать таблицы с образцами решения, например:

$992 : (130 - x) = 8$	Неизвестное число входит в состав делителя, найдем делитель $130 - x$, для этого делимое разделим на частное.
$130 - x = 992 : 8$	Вычислим результат деления $992 : 8 = 124$.
$130 - x = 124$	Теперь неизвестно вычитаемое; чтобы его найти, надо из уменьшаемого вычесть разность.
$x = 130 - 124$	Вычислим разность $130 - 124 = 6$.
$x = 6$	Следовательно, 6 является корнем уравнения.

В учебнике [43] на примере решения уравнения $(y + 64) - 38 = 48$ разбираются два возможных способа решения: на основе использования правил нахождения неизвестного уменьшаемого, а затем – слагаемого и путем упрощения выражения, стоящего в левой части уравнения с использованием свойств вычитания. Второй прием предлагается распространить на другие уравнения, использовав для этого свойства сложения.

При работе с уравнениями мы предлагаем использовать методический прием обучения решению уравнений через их составление. Отталкиваясь от основных схем уравнений, постепенное обобщение способов составления уравнений мы предлагаем провести следующим образом.

1. В качестве неизвестного используется $\square \to x$, получаются традиционные уравнения. При введении в 7 классе понятия «линейное уравнение», которое является обобщением ранее рассмотренных конкретных случаев и записывается в общем виде с помощью формулы $ax = b$, где a и b – заданные числа, x – неизвестное, полезно составить его схему $a \cdot \square = b$. Таким образом, данная формула, как и схема, задает целый класс уравнений, которые можно получить, взяв вместо a и b конкретные числа. Полезно также обсудить с учащимися вопрос о том, как составить линейное уравнение по схеме и по формуле.

2. $\square \to m \cdot x$, то есть произведение числа на букву, например, $2x$, $35y$. Уравнения усложняются, становятся двухшаговыми:

$mx + a = b$; $mx \cdot a = b$;

$mx - a = b$; $mx : a = b$;

$a - mx = b$; $a : mx = b$.

3. $\square \to m : x$.
4. $\square \to x : m$.
5. $\square \to x - m$.
6. $\square \to x + m$.
7. $\square \to m - x$.

В каждом случае (2–7) мы получим цепочку из 6 уравнений, конструкции которых будут повторяться.

Уяснив процесс составления уравнения, приобретя навык в составлении и решении собственных уравнений, учащиеся осознанно подходят к решению уравнений, которые предлагает учитель или учебник.

При этом происходит более прочное усвоение навыков решения уравнений, поскольку в единстве осуществляются процессы: от единичных и частных случаев к обобщению в виде схемы и, наоборот, от общего к частному и единичному. Такой подход способствует тому, что учащиеся в каждом конкретном уравнении быстрее распознают частные случаи знакомого им общего вида, применяют необходимые теоретические сведения и приемы решения. При самостоятельном конструировании новых заданий школьники видят конкретизацию математических абстракций.

Следует отметить также, что в 5 классе после рассмотрения вопроса об упрощении выражений на основе распределительного свойства умножения учащиеся решают уравнения вида $3y + 7y + 25 = 85$, $(3 + 5) \cdot x = 3x + 5x$, $6t + 3t - t = 6400$ и др. Поэтому в схеме уравнения может появиться запись $\square + \square + a = b$ или $a\square = \square + \square$. В таких случаях учащийся должен понимать, что первым шагом является упрощение выражения и приведение его к ранее известным схемам, содержащим неизвестное один раз.

При решении уравнений полезно приучать школьников проверять ответ, что также способствует формированию вычислительных навыков.

В 6 классе осваиваются новые методы решения уравнений. В начале на примере рассматривается возможность умножения или деления обеих частей уравнения на одно и то же не равное нулю число. Затем вводится способ переноса слагаемых из одной части уравнения в другую с переменой знака у слагаемого на противоположный. Общий вид рассматриваемых уравнений записывается с помощью схемы: $\square + a = \square + b$. В данном случае в качестве неизвестного могут быть выражения вида x, mx, mx + nx. Полезно составить типичные уравнения, конкретизировав элементы квадратов, повторить основные преобразования, используемые при решении, и закрепить новые способы.

В курсе 7 класса повторяются свойства верных равенств, подчеркивается, что они лежат в основе решения уравнений с одним неизвестным, сводимых к линейным. Тем самым при актуализации знаний осуществляется связь с линией преобразований алгебраических выражений. В алгебре повышается значимость алгебраических сведений, поэтому проводится обоснование следствия из первого свойства, позволяющего переносить слагаемые из одной части равенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный. В учебнике показано также обоснование известного способа решения уравнений путем рассуждения на конкретном примере 9x – 23 = 5x – 11. Предположив, что x является корнем уравнения, в дальнейших преобразованиях используют свойства верных равенств. Результат выполнения задания обобщается в виде формулировки основных свойств уравнений и алгоритма решения уравнений, сводящихся к линейным.

Для осознанного усвоения этого алгоритма и установления связи с ранее изученным материалом предлагаем решение упражнений из учебника начинать с составления схемы уравнения и определения содержания ее компонентов. Проводимый при этом анализ алгебраических выражений, стоящих в обеих частях уравнения, позволяет классифицировать задания в зависимости от использованных преобразований, а также выделить и систематизировать закономерности в нарастании сложности упражнений. В результате у учащихся постепенно формируются умения и навыки аналитико-синтетической деятельности и складывается представление о логике построения математических упражнений.

Например, решая уравнение 10(3x – 2) – 3(5x + 2) + 5(11 – 4x) = 25, составляем исходный вариант схемы □ – □ + □ = b. Здесь в качестве неизвестного используется алгебраическая сумма, включающая три компонента, каждый из которых представляет собой алгебраическое выражение типа m · (□ – n), где неизвестное записано также в виде алгебраического выражения p□. Итак, исходным элементом при составлении уравнения является неизвестное x,

которое встречается в нем три раза. Запишем в каждом случае дальнейшие преобразования в виде схемы, то есть получим равенство:

$$\boxed{m_1 \cdot (p_1 \cdot \square - n_1)} - \boxed{m_2 \cdot (p_2 \cdot \square + n_2)} + \boxed{m_3 \cdot (n_3 - p_3 \cdot \square)} = b$$

С помощью преобразований его необходимо привести к виду a · □ = c. Для этого требуется: а) раскрыть скобки, используя распределительный закон умножения, б) оставить члены, содержащие неизвестное, в левой части, а члены, не содержащие неизвестного, перенести в правую часть, в) привести подобные члены, г) разделить обе части уравнения на коэффициент при неизвестном, если он не равен нулю. Динамика схемы уравнения: $a_1\square - b_1 - a_2\square - b_2 + b_3 - a_3\square = b \rightarrow a_1\square - a_2\square - a_3\square = b - b_3 + b_2 + b_1 \rightarrow a \cdot \square = c$.

Процесс составления схемы уравнения у учащихся не вызывает затруднений, так как работа проводится по аналогии с составлением схемы числового и алгебраического выражения.

В курсе 7 класса продолжается рассмотрение уравнений, решаемых на основе условия равенства нулю произведения чисел, которые встречались и в 6 классе. Усложнение их происходит за счет увеличения количества множителей, например, x(x +3)(x – 4) = 0; (3 – x)(x + 2)(x – 1) = 0. Поэтому следует обобщить указанный способ решения и ввести схему уравнения: □ · □ = 0. В качестве элементов в квадратах могут быть буквы x, y, ... и выражения вида ax; x ± a; a ± x. Дальнейшее развитие этот тип уравнений получит в теме «Разложение многочленов на множители».

В число дополнительных, более сложных заданий включены уравнения с модулем, повторяющие случаи 6 класса и дополненные новыми типа |x – 2| = 2; 5|x| = 1,15; |2x| = 1,4; |2x – 3|= 3, |x –1| = x + 3. В качестве обобщения можно составить их схемы: |□| = a, a · |□| = b, |□| = |□|, где □ → x, a · x, a + x, a – x. Усложнение таких уравнений также осуществляется за счет использования в качестве известных компонентов не только натуральных и целых чисел, но и обыкновенных и десятичных дробей.

Взаимосвязь линии уравнений и алгебраических преобразований в этой теме производится при решении упражнений на составление уравнений, в которых зависимость между величинами выражается в процентах: «величина a составляет n% от величины b», «увеличить на b%», «уменьшить на c%» и другие комбинации. Повторяется также решение уравнений с помощью свойства пропорции. Типы таких уравнений можно записать с помощью схем: □ : a = c : d; a : □ = c : d; a : b = □ : d; a : b = c : □. Возможны более сложные случаи: □ : b = □ : d; a : □ = c : □.

Расширение круга решаемых уравнений происходит также за счет включения уравнений с дробными коэффициентами типа

$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 8$, $\frac{x-4}{5} = 9 + \frac{2x-4}{9}$,

то есть в схеме в качестве a может быть натуральное, целое, дробное число, а вместо неизвестного использовано алгебраическое выражение.

В таких случаях полезно показать ученикам разные способы решения уравнений. Например, для уравнения $\frac{4x-3}{2} - \frac{5-2x}{3} = \frac{3x-4}{3}$ возможны случаи:

I способ: $\frac{4x}{2} - \frac{3}{2} - \frac{5}{3} + \frac{2x}{3} = x - \frac{4}{3}$; $2x + \frac{2}{3}x - x = \frac{3}{2} + \frac{5}{3} - \frac{4}{3}$;

II способ: $\frac{4x-3}{2} = \frac{5-2x}{3} + \frac{3x-4}{3}$; $\frac{4x-3}{2} = \frac{x+1}{3}$.

В дальнейшем возможны варианты решения:

1) использование основного свойства пропорции;

2) приведение дробей к общему знаменателю и использование условия равенства двух дробей с одинаковыми знаменателями;

3) составление разности двух дробей и переход к I способу;

4) составление разности двух алгебраических дробей, преобразование ее в дробь и использование условия равенства дроби нулю и другие варианты.

На этом этапе еще раз обращается внимание на проверку найденных корней уравнения, назначение которой сводится к тому, чтобы убедиться в правильности вычислений.

В число упражнений учебника включены задания, где требуется показать, что уравнение не имеет корня или любое значение x является корнем уравнения. По существу эти упражнения являются заданиями на доказательство, что служит развитию умений в дедуктивных рассуждениях. Эти же упражнения способствуют

повторению и закреплению навыков в упрощении алгебраических выражений (приведение подобных слагаемых, раскрытие скобок, в основе которых распределительный закон умножения). Введение таких упражнений целесообразно, поскольку к этому времени учащиеся узнали достаточное число фактов, на которые можно опереться в доказательствах.

Для создания условий, облегчающих процесс перехода к выполнению заданий нового типа, мотивирующих математическую деятельность, связанную с доказательствами, способствующих осознанию алгоритма их выполнения, предлагаем предварить решение уравнений, не имеющих корня или имеющих корнем любое число, выполнением ряда заданий на составление таких уравнений. При этом следует выявить ситуации, в которых уравнение не имеет корней или имеет бесконечно много корней, проанализировать причины и условия их появления, выделить наиболее характерные случаи. Среди них можно отметить:

а) уравнение не имеет корней, если после его преобразования в левой и правой частях получаются выражения, имеющие разные числовые значения, например, $0 \cdot x = 7$, $4 = 5$ и др.; поэтому исходным моментом при выполнении задания служит числовое равенство, не являющееся верным, из которого после проведения алгебраических преобразований на основе свойств верных равенств получают уравнение, не имеющее корней;

б) уравнение имеет корнем любое число, если после преобразований оно записывается в виде числового или алгебраического равенства, верного при любом значении неизвестного, например, $7 = 7$, $2x - 5 = 2x - 5$ и др.; взяв за основу такое равенство, с помощью преобразований, использующих свойства верных равенств или уравнений, приходят к требуемому уравнению, имеющему корнем любое число.

Рассмотрим пример составления такого уравнения. Исходное равенство: $7 = 7$. Производим преобразования: $7 - 4x = 7 - 4x$, $(3 + 4) - 4x = 7 - 4x$, $3 + (4 - 4x) = 7 - 4x$, $3 + 4 \cdot (1 - x) = 7 - 4x$, $4 \cdot (1 - x) + 3 = 7 - 4x$. Итак, получили уравнение $4 \cdot (1 - x) + 3 = 7 - 4x$, которое имеет корнем любое число.

Одной из характерных особенностей курса алгебры [1–3] является параллельное рассмотрение уравнений с буквенными коэффициентами, которые включены в число дополнительных.

Систематическое решение таких уравнений способствует установлению связи арифметики и алгебры. Использование схематической записи уравнения и его корней, выполнение подстановки алгебраических выражений в схему и получение новых уравнений, осуществление замены букв числами и проверка правильности произведенных преобразований позволяют ученику видеть в букве изображаемое ею некоторое число и руководствоваться этим представлением, производя те или иные преобразования. Упражнения типа: «Решить уравнения: а) $b = a(x - 3)$, б) $(2x - a) : b = 3$, где a и b – заданные числа, отличные от нуля» служат также установлению связи с курсом физики. В данном случае, решая уравнение с буквенными коэффициентами, школьники по существу оперируют с формулами, выражая одну из входящих в них величин через остальные. Вместе с тем, следует учесть, что первоначальный опыт работы с формулами ученики получили в курсе математики 5 класса.

В предлагаемом методическом подходе обучение решению уравнений и их составлению рассматриваются как два взаимодополняющих друг друга компонента, обеспечивающих осознанность, прочность и действенность знаний. При выполнении упражнений на составление уравнений широко используются схемы уравнений. По мере усвоения материала аналогично работе с числовыми и алгебраическими выражениями следует ограничивать выбор компонентов уравнений. Например, работая со схемой $\square \cdot a = \square \cdot b$, можно предложить составить уравнения, имеющие:

– корнем заданное число,
– корнем положительное число,
– корнем любое число,
– не имеющие корней,
– в качестве неизвестного одночлен с дробным коэффициентом и двучлен и т. д.

При этом полезно показывать учащимся разные приемы составления уравнений. Рассмотрим в качестве примера случай, когда требуется составить уравнение, имеющее корнем число 2. Для этого определим, как будет выглядеть неизвестное в левой и правой частях. Пусть в левой части стоит выражение типа $mx + n$, в правой – px. Придадим конкретные значения буквам: $m = 5$, $n = 6$, $p = 3$, тогда уравнение примет вид $(5x + 6) \cdot a = 3x + b$. После

преобразований и подстановки корня $x = 2$ получается равенство $16a = 6 + b$ или $16a - 6 = b$. Подбором находят одну из пар значений: $a = 2$, $b = 26$. Таким образом, искомое уравнение может иметь вид: $(5x + 6) \cdot 2 = 3x + 26$. Для успешного выполнения задания необходимы умения и навыки работы с уравнениями, содержащими буквенные компоненты, что способствует положительной мотивации изучения последних и установлению связей внутри содержательной линии уравнений с линией алгебраических преобразований. Начинать работу по составлению уравнений мы рекомендуем с простейших случаев (*схемы 1*) и ограничивать уровень сложности комбинаций в зависимости от подготовки класса.

Составление школьниками уравнений содействует развитию самостоятельности мышления и гибкости умозаключений. Решение упражнения, все этапы возникновения которого прослежены учащимися, обеспечивает неразрывное единство элементов математического творчества и контроля и способствует целостному развитию ученика.

На данном этапе изучения уравнений учащиеся должны знать:

1) ***Основные понятия и термины:*** неизвестное число; уравнение (левая часть уравнения, правая часть уравнения, член уравнения); корень уравнения; что значит решить уравнение; линейное уравнение; основные свойства уравнений.

Обозначения:

– неизвестное число обозначается буквами x, y и т. д.;
– $ax = b$ – линейное уравнение, где a, b – заданные числа, x – неизвестное.
– в схеме уравнения $\square$ обозначает неизвестное, буквы $a, b, c, \ldots$ – заданные числа.

***Основные схемы уравнений*:**

$a + \square = b$, $a - \square = b$, $\square - a = b$, где a, b – заданные числа.

$a \cdot \square = b$, $a : \square = b$, $\square : a = b$, где $\square \to x, ax, a + x, a - x, x - a, x + a, a : x, x : a$ и др.

$a + \square = b + \square$, где a, b – заданные числа, $\square \to x, ax, ax + b, mx + nx$ и др.

Частные случаи:

$\square \cdot \square = 0$, где $\square \to x, a + x, x + a, ax$.

$|\square| = a$, $a|\square| = b$, $|\square| = |\square|$, где a, b – заданные числа, $\square \to x, ax, a + x, ax + b$ и др.

Заданные числа a, b, c, ... могут быть любым рациональным числом.

2) ***Основные теоретические сведения,*** используемые при решении уравнений.

Свойства арифметических действий:

$a + b = b + a$, $ab = ba$,

$a + (b + c) = (a + b) + c$, $a(bc) = (ab)c$,

$a \cdot (b + c) = ab + ac$.

Основные свойства уравнений:

1) любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный;

2) обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

Условие равенства нулю произведения и частного двух чисел. Определение модуля числа.

3) ***Приемы решения уравнений:***

а) на основе зависимости между компонентами и результатами арифметических действий;

б) на основе свойств равенств (уравнений);

в) путем преобразования выражений в левой и правой частях уравнения (раскрытие скобок, приведение подобных слагаемых) и использования свойств уравнений.

Учащиеся должны знать, что уравнение первой степени с одним неизвестным может иметь один корень, не иметь корней, иметь корнем любое число.

Закрепление рассмотренного материала происходит при изучении последующих тем.

В теме «Степень с натуральным показателем. Свойства степени с натуральным показателем» рассматриваются уравнения, компоненты которых заданы числами, выраженными в виде степени, например, $x : 2^4 = 2^2$, $x \cdot 2^6 = 2^8$. Обобщение ранее изученного происходит с использованием схем уравнений: $\square : a = b$, где $a = 2^4$, $b = 2^2$; $\square \cdot a = b$, где $a = 2^6$, $b = 2^8$. Исключение составляют показательные уравнения, содержащие неизвестное в показателе степени и рассматриваемые в пропедевтическом плане в числе дополнительных упражнений.

По мере знакомства с одночленами и многочленами класс решаемых уравнений расширяется за счет того, что неизвестное выражается одночленом, двучленом и т. д., хотя общие структурные схемы уравнений остаются без изменения. То есть здесь уравнения играют роль аппарата, используемого для закрепления, повторения, углубления и расширения сведений о преобразовании алгебраических выражений.

Например, № 242 [1]: Привести многочлен $2x^2 - 3x - x^2 - 5 + 2x - x^2 + 10$ к стандартному виду и выяснить, при каких значениях x его значение равно 1.

№ 250 [4]: Решить уравнение $(1 - 5{,}1x) - (1{,}7x + 5{,}4) = 1$

№ 261 [2]: Решить уравнение $10(1 - 2x) = 5(2x - 3) - (11x - 5)$.

Обобщение и систематизацию материала об уравнениях в главе «Одночлены и многочлены» можно провести путем анализа левой и правой частей рассматриваемых уравнений. Отличие предлагаемых уравнений в том, что, прежде чем использовать свойства уравнений, необходимо преобразовать левую часть: выполнить сложение, вычитание или умножение многочленов, умножить одночлен на многочлен, а затем привести подобные члены и записать многочлен в стандартном виде. При изучении материала в этой главе важно, чтобы школьники осознали, что в результате умножения многочленов получится многочлен, и, следовательно, в уравнениях в левой части (или в обеих частях) мы должны получить многочлен, а далее применить алгоритм решения уравнений, сводящихся к линейным. Вместе с тем, приходим к выводу, что все уравнения имеют схемы, аналогичные ранее рассматриваемым, но содержат увеличенное количество элементов. Например, № 261 [2]: $a\square = b\square - c\square$. Здесь в качестве неизвестного выступают двучлены вида $ax + b$.

В следующей главе рассматривается разложение многочленов на множители, то есть задача имеет обратный характер. В этом случае для закрепления операции предлагаются уравнения, в левой части которых содержится многочлен, требующий предварительного разложения на множители. Здесь необходимо повторить условие равенства нулю произведения чисел, вспомнить схему соответствующего уравнения: $\square \cdot \square = 0$, где в качестве неизвестного рассматривали x, ax, $a \pm x$, $ax \pm b$,составить уравнение и посмотреть, как оно решается.

$(x + a)(b - x) = 0$ (1), $\square_1 \cdot \square_2 = 0$,

$x + a = 0$ или $b - x = 0$, $\square_1 = 0$ или $\square_2 = 0$.

$x = -a$ или $x = b$.

Ответ: $-a$; b.

При этом полезно проанализировать, как идет процесс составления уравнения, какие осуществляются операции. Раскроем скобки, исходное уравнение примет вид: $bx - ax + ab - x^2 = 0$ (2). Как получить из $2 \to 1$? Необходимо сгруппировать члены, вынести за скобки общие множители и получить произведение чисел. Иногда применяется только вынесение общего множителя за скобку, например, в уравнениях $x^2 - 2x = 0$; $(x^2 - 4x) + x - 4 = 0$.

Аналогичное применение находят уравнения при изучении формул сокращенного умножения.

– Формула разности квадратов.

Дополнительное упражнение № 364.

$(x - 1)(x + 1) = x^2 - 2(x - 3)$;

$(2x + 3)(2x + 3) - 4(x - 1)(x + 1) = 49$.

– Квадрат суммы, квадрат разности.

Дополнительное упражнение № 384.

$16x^2 - (4x - 5)^2 = 15$;

$-5x(x - 3) + 5(x - 1)^2 = -20$;

$(2x - 3)^2 - (2x + 3)^2 = 12$.

– Комбинированные способы разложения на множители.

№ 401. Решить уравнение: $25x^2 - 10x - x^2 - 25 = 0$.

Обобщение по теме необходимо сделать относительно способов решения уравнений и выражений, в них содержащихся. При этом возможны следующие случаи:

– в левой части уравнения расположен многочлен, тогда уравнение решают по алгоритму;

– если левая часть представлена в виде произведения многочленов, а правая часть равна нулю, то используют свойство равенства нулю произведения чисел; если же в правой части число, отличное от нуля, то необходимо произведение многочленов преобразовать в многочлен и решить уравнение по алгоритму.

Преобразование выражения в левой части уравнения можно осуществить на основе правил выполнения действий с многочленами (сложение, вычитание, умножение), умножения одночлена на многочлен, а также с использованием формул сокращенного умножения (разность квадратов двух выражений, квадрат суммы или разности двух выражений). При разложении многочлена на множители используется способ вынесения общего множителя за скобки, группировка и формулы сокращенного умножения. При этом важно, чтобы школьники осознали, что перечисленные преобразования и свойства уравнений могут использоваться в двух направлениях: как для решения готовых уравнений, так и для составления учеником своих уравнений.

В данных случаях изменяется схема уравнения, появляются уравнения вида $\square^2 - \square^2 = a$, $(\square + \square)^2 = a$.

При составлении уравнений, отталкиваясь от них, можно получить с помощью преобразований более сложные выражения. Например, $(2x - 3)^2 - (5 - x)^2 = 0$, $4x^2 - 12x + 9 - (25 - 10x + x^2) = 0$, $3x^2 - 2x - 16 = 0$.

Школьники не умеют решать такие уравнения, однако с помощью преобразований могут привести их к виду, доступному для решения.

При рассмотрении алгебраических дробей проходит знакомство с новым типом уравнений: уравнениями, имеющими дробные коэффициенты, но не содержащими неизвестное в знаменателе дроби, то есть типа $\frac{\square}{a} + \frac{\square}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{\square}{a} + \frac{\square}{b} = \frac{\square}{c}$, где a, b, c, d – числа, в качестве неизвестного используются одночлен, двучлен, произведение двучленов, произведение одночлена и двучлена.

Способ преобразования выражений в левой и правой частях уравнения вытекает из правил выполнения действий с алгебраическими дробями. Здесь также повторяется решение уравнений с буквенными коэффициентами.

Для школьников важно осознать взаимосвязь изучаемого материала, понять процесс нарастания сложности заданий, поэтому при изучении уравнений полезно осуществить постепенное заполнение *таблицы 15*. Систематизации знаний об уравнениях способствует использование *таблицы 13*, которая дополняется после изучения каждого нового типа уравнений и анализируется в целом на уроках вводного и итогового повторения материала каждого класса (см. *Приложение 1*).

При изучении материала о функциях в случае их задания формулой повторяется и закрепляется решение уравнений при нахождении значения аргумента (функции) при заданном значении функции (аргумента). При нахождении точек пересечения графика с осями в случае аналитического способа решения задачи также возникает потребность в решении уравнений. Среди дополнительных упражнений есть задания на нахождение координат точек пересечения графиков функций, заданных с помощью формул, что приводит к составлению и решению уравнения. Также есть задания на определение коэффициентов k и b в формуле линейной функции $y = kx + b$, зная координаты точки, через которую проходит ее график.

Закреплению и применению навыка решения уравнений способствует решение систем двух уравнений с двумя неизвестными.

Итак, в курсе алгебры 7 класса получают развитие понятия, приемы и алгоритмы решения уравнений, рассмотренные в курсе арифметики. Основным объектом изучения являются уравнения первой степени с одним неизвестным, расширение сведений о которых происходит в тесной связи с развитием других содержательных линий курса. Однако данные уравнения являются основой и получают дальнейшее развитие при изучении алгебраического материала в 8 классе, где вводится новый вид уравнений – уравнения второй степени с одним неизвестным. Вместе с тем, теоретическая основа, многие приемы и алгоритмы выполнения основных операций с уравнениями являются сквозными. Выявление и осознание их общей структуры особенно важно для школьников, поскольку способствует определению перспективы в развитии уравнений, показывает преемственные связи материала и создает положительную мотивацию для его изучения. В связи с этим на этапе итогового повторения уравнений в 7 классе мы предлагаем использовать обобщающий урок в разновозрастной группе (7 и 8 классы), что возможно в условиях малочисленности сельской школы. Структура и содержание урока отражены в *Приложениях 3, 4*.

Дальнейшая работа с уравнениями осуществляется в 8 классе. При повторении материала в начале учебного года система-

тизируются и обобщаются сведения о числах, их свойствах, рассматриваются примеры решения уравнений на основе свойств чисел, в частности, случаи: $\square \cdot \square = 0$, $\frac{\square}{\square} = 0$, что способствует установлению преемственной связи с курсом арифметики. Они включают также преобразования левой части путем разложения на множители стоящих там выражений, что способствует актуализации знаний о формулах сокращенного умножения, разложении многочленов на множители способом вынесения общего множителя за скобки. Здесь ученики впервые встречаются с уравнениями, содержащими неизвестное в знаменателе дроби, а в число более сложных дополнительных упражнений включены случаи, когда левая часть представляет сумму или разность алгебраических дробей, содержащих неизвестное в знаменателе. Преобразования, отработанные учащимися на примере решения уравнений, в дальнейшем используются при решении неравенств.

В 8 классе обобщаются знания и умения учащихся по решению уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля, на конкретных примерах показан общий подход к решению уравнений данного типа, основанный на определении модуля числа.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0; \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Общая схема решаемых уравнений $|\square| = a$, где a – любое число, в качестве $\square$ используется буква и двучлен вида $x \pm a$, $ax \pm b$. Среди дополнительных трудных задач содержатся уравнения вида $|\square| = |\square|$, где в качестве неизвестного рассматриваются двучлены.

С новыми типами уравнений учащиеся знакомятся в теме «Квадратные корни». По определению арифметического корня решаются уравнения $\sqrt{x} = 2$, $\sqrt{x} = 10$.

На основе теоремы $\sqrt{a^2} = |a|$ рассматривается решение уравнений вида $\sqrt{(x-7)^2} = x - 7$, которые входят в число сложных дополнительных заданий и дополнительных упражнений к главе. Обобщая их решение, получают схемы: $\sqrt{\square} = a$, $a > 0$, то $\square = a^2$; $a < 0$, решений нет; $\sqrt{\square} = \square \rightarrow |\square| = \square$.

Основным материалом линии уравнений в 8 классе является знакомство с квадратным уравнением и способами его решения. Для этой темы характерна глубина изложения и богатство устанавливаемых с ее помощью связей в обучении, логическая обоснованность изложения. Поэтому она занимает особое место в линии уравнений и неравенств. К изучению темы учащиеся приступают, накопив определенный запас алгебраических и общематематических представлений, понятий, умений. Этот материал во многом синтезирует материал, относящийся к уравнениям.

Понятие квадратного уравнения вводится путем явного определения, что требует специальной работы по усвоению его формальных признаков, которые важны для построения теории квадратных уравнений (при выводе формулы корней и в теореме Виета). Для осознанного усвоения определения квадратного уравнения в учебнике предлагается широкий спектр заданий на узнавание квадратного уравнения, где варьируются все его признаки, отрабатываются названия коэффициентов, включаются упражнения на составление квадратного уравнения с заданными коэффициентами. На примере ранее встречающихся уравнений учащиеся тренируются в приведении уравнения к виду квадратного, тем самым осуществляется связь внутри линии уравнений.

После рассмотрения конкретных случаев квадратного уравнения, усвоения содержания этого понятия можно перейти от буквенно-символической к схематической записи уравнения: $a\square^2 + b\square + c = 0$, где в качестве неизвестного на первом этапе изучения рассматриваются буквы x, y, z... В число упражнений полезно включать задания на составление квадратных уравнений по схеме. Связь с ранее изученным материалом осуществляется при повторении способа решения уравнений путем разложения левой части на множители и обобщения частных случаев квадратного уравнения $x^2 = d$ для $d > 0$, $d < 0$, $d = 0$. Общий вид уравнений, которые предлагается решить указанным способом, выражают следующие схемы: $\square^2 = a$, $\square^2 - a^2 = 0$, $\square^2 - \square = 0$, $\square^2 + \square + a = \square$.

После знакомства с неполными квадратными уравнениями также записывают их схемы: $a\square^2 + b\square = 0$, $a\square^2 + c = 0$, $a\square^2 = 0$.

Типы предлагаемых в учебнике уравнений можно обобщить и выразить с помощью следующих схем:

а) $\square^2 + \square = \square^2 + a$, где в качестве неизвестного стоят выражения вида ах;

б) $\frac{\square}{\square} = 0$; $\frac{\square - \square}{\square} = 0$; $\frac{\square + \square}{\square} = 0$.

Основным способом решения уравнений является применение формулы корней квадратного уравнения. Школьники должны осознать, что она является общей, то есть применима к любому квадратному уравнению: полному, приведенному, неполному. Прикладное значение умений работать с программируемым микрокалькулятором проявляется в 8 классе при изучении программы для вычисления корней квадратного уравнения. Одновременно актуализируются, а затем обобщаются умения и навыки, связанные с решением квадратных уравнений.

По мере изучения сведений о квадратных уравнениях полезно их систематизировать и заполнять *таблицу 16* (см. *Приложение 1*), которая в дальнейшем может многократно использоваться при повторении и обобщении материала об уравнениях.

Среди уравнений, сводимых к квадратным, выделяют:

а) биквадратные уравнения, решаемые способом подстановки;

б) дробные (дробно-рациональные), содержащие неизвестное в знаменателе дроби. Способ решения этих уравнений сводится к умножению обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное, которое является общим знаменателем дробей. В этом случае могут появиться посторонние корни, что приводит к необходимости проверки найденных корней уравнения.

Прикладное назначение квадратных уравнений проявляется при использовании их для решения текстовых задач. Человек, решающий задачу составлением уравнения, может не знать и часто не знает, к какому виду уравнений он придет, однако это не мешает ему составить уравнение. Для решения не имеет значения, какого вида уравнение получится. Это означает, что сущность вопроса о решении задач составлением уравнений не связана с конкретными видами уравнений. Они не накладывают никаких условий на мышление решающего. Следовательно, решение задач с помощью составления квадратного уравнения не содержит ничего нового по сравнению с решением задач, сводимых к уравнениям первой степени. Возрастает лишь сложность перевода содержания задачи на язык математики и становятся более разнообразными сюжеты.

Закрепление способов решения систем уравнений, рассмотренных в 7 классе, продолжается при решении систем, содержащих уравнение второй степени, что способствует формированию более прочных навыков. Расширение понятия числа и введение комплексных чисел связано с потребностью найти решение любого квадратного уравнения. В качестве дополнительного материала рассматривается решение квадратного уравнения с комплексным неизвестным.

При изучении свойств и построении графика квадратичной функции применение квадратных уравнений аналогично применению линейных уравнений при изучении линейной функции. Вместе с тем, изучив построение графика функции, можно с его помощью решить квадратное уравнение и рассмотреть еще один способ решения уравнений – графический. Необходимость в решении квадратных уравнений появляется и при разложении на множители квадратного трехчлена в случае решения квадратных неравенств.

На уроках повторения материала за курс 8 класса целесообразно обобщить сведения о квадратных уравнениях и систематизировать имеющиеся знания об уравнениях, используя для этого *схемы 8, 13* (см. *Приложение 1*). При этом важно обратить внимание на установление связи линии уравнений с другими содержательными линиями курса.

Конспект обобщающего урока по теме «Уравнения второй степени с одним неизвестным», проводимого совместно с учениками 7 класса, приведен в *Приложении 4*.

Итак, в курсе алгебры 7–8 классов рассматриваются рациональные уравнения и происходит знакомство с иррациональными уравнениями вида $\sqrt{\square} = a$, $\sqrt{\square^2} = \square$.

Основными рациональными уравнениями с одним неизвестным являются линейные и квадратные уравнения. Все остальные рациональные уравнения приводятся к ним с помощью различных преобразований. Среди преобразований выделяются следующие:

1) если уравнение дробное, то сначала его приводят к целому виду, умножив обе части уравнения на общий знаменатель всех

дробей; при этом следует не забыть проверить полученные корни уравнения;

2) если уравнение целое, то используют два способа преобразования: а) замену переменных, б) разложение левой части уравнения на множители, когда правая часть равна нулю.

В 9 классе линия уравнений продолжает свое развитие, закрепляются полученные ранее знания, умения и навыки, происходит знакомство в пропедевтическом плане с новыми типами уравнений, систематическое изучение которых осуществляется в курсе алгебры и начал анализа: степенными, логарифмическими, показательными, тригонометрическими. Включение этого материала вызвано спецификой авторского подхода к изложению ряда вопросов курса, связано с необходимостью формирования целостного представления об уравнениях и способствует систематизации знаний учащихся. Выделим основные этапы развития линии.

1. В первой главе продолжается и завершается изучение алгебраических уравнений и их систем. В связи с этим вводится понятие степени и корня многочлена, рассматривается алгоритм деления многочленов уголком, который использовался в арифметике при делении рациональных чисел. На конкретных примерах показывается, как получается формула деления многочленов $P_n(x) = M_m(x)Q_k(x) + R_l(x)$.

Иногда эта формула применяется в качестве определения деления многочленов по аналогии с определением деления натуральных чисел с остатком, с которым учащиеся знакомились в курсе арифметики. Разложение левой части уравнения на множители фактически опирается на теорему Безу, которая не формулируется, а демонстрируется на конкретном примере. Среди уравнений, сводящихся к алгебраическим, рассматриваются возвратные уравнения и рациональные уравнения. При решении рациональных уравнений могут появиться посторонние корни, которые легко обнаруживаются проверкой. Поэтому на данном этапе введение понятий равносильности и следствия уравнения не является необходимым.

2. При рассмотрении арифметического корня натуральной степени повторяются способы решения степенных уравнений типа $x^4 = 81$, $x^3 = -8$, через обобщение которых вводится понятие

арифметического корня n-ой степени из числа a и корня нечетной степени из отрицательного числа.

3. На примере уравнения $10^x = 1$ анализируется способ нахождения корня подбором с последующим обоснованием отсутствия других решений. Данный прием обобщается для случая $ax = 1$, $a > 0$, $a = 1$ и используется при выводе свойства $a^x = a^y$, где $a > 0$, $a = 0$, верного при $x = y$. Закрепляется оно при рассмотрении уравнений $3^{2x-1} = 9$ и $a^x = b$, $a > 0$, $a = 1$, $b > 0$. Решение последнего называется логарифмом числа b по основанию a и обозначается $\log_a b$. Понятие логарифма числа введено в связи с изучением операций, выполняемых на микрокалькуляторе, и отрабатывается при решении с его помощью уравнений вида $10^{3x+1} = 5$.

4. Уравнения, содержащие степень, изучаются в связи с рассмотрением степенной функции. Графический способ их решения рассматривается на примере уравнения $\frac{3}{x} = x^2 + 1$.

5. Способ возведения обеих частей уравнения в квадрат обосновывается при решении уравнения $\sqrt{2 - x^2} = x$. В результате его применения появляются посторонние корни, что позволяет обобщить типы преобразований, к ним приводящих, и показать необходимость включения в алгоритм решения уравнений проверки найденных корней. Учащиеся должны осознать, что цель данной проверки иная, чем при решении уравнений сводящихся к линейным, когда проверка выявляет наличие или отсутствие ошибок в преобразованиях или вычислениях.

При рассмотрении данного вида уравнений вводится термин «иррациональные уравнения», приводятся их примеры. Схема уравнеий может быть такой: $\sqrt{\square} = \square$, $\sqrt{\square} + a = 0$, $\sqrt{\square} + \sqrt{\square} = a$, где в качестве неизвестного выступает одночлен, двучлен, трехчлен.

На этом этапе, в случае готовности класса, можно употребить термин «рациональные уравнения» и повторить типы ранее изученных уравнений, относящихся к данному виду: линейные, квадратные, содержащие степень с целым показателем, целые алгебраические уравнения, сводимые к линейным и квадратным, дробно-рациональные и биквадратные уравнения, сводимые к квадратным. В процессе повторения полезно дополнить *схему 10* и *таблицу 13* (см. *Приложение 1*), которые помогут систематизировать материал и осознать взаимосвязи в развитии линии уравнений.

6. Новый тип уравнений, с которым знакомятся школьники, – тригонометрические – возникает при изучении синуса, косинуса, тангенса угла. В 9 классе учащиеся пропедевтически рассматривают уравнения $\sin t = 0$, $\sin t = 1$, $\cos t = 0$, $\cos t = 1$, решаемые с помощью единичной окружности. Их отличие от других видов уравнений в том, что в результате решения получаются бесчисленные серии решений. Учащиеся знакомятся с записью ответа в виде $t = k\pi$, где $k \in Z$. Навык при решении уравнений не отрабатывается. Они используются для применения основных тригонометрических формул с целью упрощения левой части уравнения и сведения к ранее рассматриваемым видам, что способствует установлению связи линии преобразований и линии уравнений и служит пропедевтике материала, изучаемого в курсе алгебры и начал математического анализа.

7. Навыки решения уравнений закрепляются при изучении арифметической и геометрической прогрессии, когда при решении задач на нахождение члена последовательности, номера члена прогрессии, знаменателя (разности), суммы и др. при помощи основных формул возникает необходимость решить уравнение.

Вместе с тем, по завершении курса основной школы полезно для осмысленного восприятия курса алгебры провести систематизацию материала путем установления преемственной связи между содержательными линиями курса. Для этого рекомендуем заполнить таблицу следующего типа или использовать схему из п. 2.1.

Количество неизвестных	Одно неизвестное		Два неизвестных	
	I степень	II степень	I степень	II степень
Алгебраические выражения	$ax + b$	$ax^2 + bx + c$	$ax + by$	
Уравнения	$ax + b = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$	$ax + by = c$	
Системы уравнений			$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$	Система уравнений, содержащая уравнение второй степени
Неравенства	$ax + b > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$		
Системы неравенств	$\begin{cases} a_1x + b_1 > 0 \\ a_2x + b_2 > 0 \end{cases}$			
Функции	$y = ax + b$	$y = ax^2 + bx + c$		

На завершающих уроках полезно провести обобщение и систематизацию материала об уравнениях, используя рассмотренную ранее схему и проводя рассуждения в обратном порядке. Повторяя основные типы уравнений, сгруппировать их в 3 вида: рациональные, иррациональные, трансцендентные, дать характеристику каждого из них, выделить основные приемы решения уравнений каждого вида.

При итоговом повторении с целью обобщения и систематизации материала полезно выделить и проследить развитие в курсе двух аспектов знаний:

а) теоретические сведения;

б) приемы решения задач.

Основные понятия, термины, обозначения:

– уравнение (рациональное, иррациональное уравнение);

– корень уравнения (посторонний корень уравнения);

– что значить решить уравнение (линейное, квадратное уравнение);

– основные свойства уравнений.

Обозначения:

x, y – неизвестное число, a, b, c, ... – заданные числа, $\square$ – неизвестное выражение в схеме.

В качестве неизвестного может быть:

а) число, обозначенное буквой, например, x;

б) одночлен ax, ax^n, a – любое число, n – натуральное число;

в) двучлен ax + b, a, b – рациональные и иррациональные числа;

г) выражение вида a : x, a – рациональное и иррациональное число;

д) многочлен;

е) логарифм числа $\log_a x$;

ж) показательное выражение a^x;

з) тригонометрическое выражение sin x, cos x, tg x.

Основные теоретические сведения, используемые при решении уравнений:

1) законы арифметических действий и свойства чисел;

2) свойства верных числовых равенств;

3) свойства уравнений;

4) формула корней квадратного уравнения;

5) определение модуля числа;

6) определение логарифма, степени, основных тригонометрических функций числа.

Приемы решения уравнений.

1) Уравнения, сводимые к линейным, решаются на основе свойств уравнений.

Приемы сведения к линейным уравнениям: алгебраические преобразования левой и правой частей уравнения и запись многочленов, в них стоящих, в стандартном виде; умножение дробных коэффициентов на их наименьшее общее кратное.

2) Уравнения, сводимые к квадратным, решаются с использованием формулы корней. Приемы сведения уравнений к квадратным: подстановка (замена неизвестного), умножение обеих частей уравнения на отличное от нуля выражение, содержащее неизвестное.

3) На основе свойств чисел: равенство нулю произведения и частного двух чисел.

Приемы разложения на множители выражения, стоящего в левой части уравнения: вынесение за скобки общего множителя, группировка, использование формул сокращенного умножения.

4) Уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля, решаются на основе определения модуля и последующего их преобразования с целью сведения к линейным или квадратным.

5) Уравнения, содержащие степень с целым показателем, логарифм, синус, косинус угла, решаются на основе соответствующих определений.

6) Уравнения, содержащие степень с дробным показателем (иррациональные), решаются путем возведения обеих частей уравнения в соответствующую степень.

Схемы основных уравнений:

$\square + a = b$, $\square + a = \square + b$, $|\square| = a$, $\square = a$, $\square + \square = a$, $\square^2 = |\square|$, $\square - a = b$, $\square^2 + \square + c = 0$, $a - \square = b$, $\square \cdot \square = 0$, $\square \cdot a = b$, $\square : a = b$, $\frac{\square}{\square} = 0$, $\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = a$, $a : \square = b$.

Таким образом, преемственность курсов арифметики и алгебры прослеживается через определение уравнения как равенства, содержащего неизвестное число, обозначенное буквой, использование свойств чисел, верных числовых равенств, законов арифметических действий при изучении последующих видов уравнений, обосновании способов их решения.

Средством реализации преемственности служит организация повторения с целью актуализации, обобщения и систематизации теоретического материала и приемов решения задач на разных этапах изучения содержательной линии как внутри курса каждого класса, так и внутри ступени обучения.

В качестве основных методических приемов, способствующих обеспечению преемственности, используются:

1) совместное рассмотрение процессов составления и решения уравнений;

2) создание условий для осознания школьниками динамики процесса усложнения уравнения при его составлении;

3) моделирование уравнения с помощью схемы;

4) составление и многократное использование на разных этапах обучения обобщающих таблиц, отражающих основные типы и приемы решения уравнений в курсе основной школы.

Одной из наиболее эффективных форм проведения обобщающих уроков, имеющих целью установление преемственности в содержании изученного материала, являются уроки в разновозрастных группах учащихся.

Аналогичным образом может быть организована работа по реализации преемственности курсов арифметики и алгебры при изучении содержательных линий «Неравенства» и «Функции».

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Проведите сравнительный анализ основных теоретических сведений и приемов решения уравнений, изучаемых в 5–6 и 7 классах.

2. Составьте конспект урока обобщения способов решения и введения схематической записи уравнений, изученных в 5 и 6 классах.

3. В чем сущность методического приема обучения решению уравнений через их составление? Охарактеризуйте основные этапы обобщения способов составления уравнений.

4. Сравните трудности, с которыми могут встретиться учащиеся при выполнении заданий «Составьте схему уравнения» и «Составьте уравнение по схеме».

5. Проанализируйте специфику введения схематической записи квадратного уравнения. Проведите методический анализ обобщающего урока в разновозрастной группе по теме «Уравнение второй степени с одним неизвестным».

6. Раскройте методику использования обобщающей таблицы, отражающей преемственную связь уравнений, изучаемых в основной школе, на уроках разных типов.

ЛИТЕРАТУРА

Рекомендуем использовать литературу, имеющую следующие номера в общем списке: 1–10, 23, 28, 30, 33, 35, 38, 40–51, 63, 64, 73.

Приложения

Приложение 1

Схема 1. Формулы сокращенного умножения

1. $(\Delta + \square)^2 = \Delta^2 + 2\Delta\square + \square^2$
2. $(\Delta - \square)^2 = \Delta^2 - 2\Delta\square + \square^2$
3. $\Delta^2 - \square^2 = (\Delta - \square) \cdot (\Delta + \square)$
4. $(\Delta \pm \square)^3 = \Delta^3 \pm 3\Delta^2\square + 3\square^2\Delta \pm \square^3$
5. $\Delta^3 \pm \square^3 = (\square \pm \Delta)(\square^2 \pm \square \cdot \Delta + \Delta^2)$

Δ, $\square$ – число, буква, одночлен, двучлен, трехчлен...

Схема 2. Правила раскрытия скобок

1. $\square + (\Delta + o) = \square + \Delta + o$
2. $\square + (\Delta - o) = \square + \Delta - o$
3. $\square - (\Delta + o) = \square - \Delta - o$
4. $\square - (\Delta - o) = \square + \Delta + o$

Δ, $\square$, о – число, буква, одночлен, двучлен, трехчлен...

Схема 3. Законы (свойства) действий

1. Переместительный
$\Delta + \square = \square + \Delta$
$\Delta \cdot \square = \square \cdot \Delta$
2. Сочетательный
$(\square + \Delta) + o = \Delta + (\square + o)$
$(\square \cdot \Delta) \cdot o = \Delta \cdot (\square \cdot o)$
3. Распределительный
$\Delta \cdot (\square \pm o) = \Delta \cdot \square \pm \Delta \cdot o$

1. $\square^m \cdot \square^n = \square^{m+n}$
2. $\square^m : \square^n = \frac{\square^m}{\square^n} = \square^{m-n}$
3. $(\square^m)^n = \square^{mn}$
4. $(\square \cdot \Delta)^m = \square^m \cdot \Delta^m$
5. $\left(\frac{\square}{\Delta}\right)^m = \frac{\square^m}{\Delta^m}$

1. Если $|\square| \ge 0$, то $\sqrt{\square} \ge 0$, $(\sqrt{\square})^2 = \square$
2. $\sqrt{\square^2} = \square$
3. Если $\square \ge 0$, $\Delta \ge 0$, то $\sqrt{\square \cdot \Delta} = \sqrt{\square} \cdot \sqrt{\Delta}$
4. Если $\square \ge 0$, $\Delta > 0$, то $\sqrt{\frac{\square}{\Delta}} = \frac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\Delta}}$

Модуль числа

$|\square| = \begin{cases} \square, & \text{если } \square \ge 0 \\ -\square, & \text{если } \square < 0 \end{cases}$

Δ, $\square$, о – число, буква, одночлен, двучлен, трехчлен...

Свойства верных неравенств: 1) если $\square = \Delta$, то $\square + o = \Delta + o$
2) если $\square = \Delta$, то $\square \cdot o = \Delta \cdot o$

Схема 4. Правила выполнения действий с дробями

1. $\frac{\Diamond}{\Delta} = \frac{\Diamond \cdot o}{\Delta \cdot o}$
2. $\frac{\Diamond}{o} \pm \frac{\Delta}{o} = \frac{\Diamond \pm \Delta}{o}$
3. $\frac{\Diamond}{\nabla} \pm \frac{o}{\Delta} = \frac{\Diamond \cdot \Delta \pm o \cdot \nabla}{\nabla \cdot \Delta}$
4. $\frac{\Delta}{o} \cdot \frac{\nabla}{\Diamond} = \frac{\Delta \cdot \nabla}{o \cdot \Diamond}$
5. $\frac{\Delta}{o} : \frac{\nabla}{\Diamond} = \frac{\Delta \cdot \Diamond}{o \cdot \nabla}$

Схема 5. Неравенства. Свойства неравенств

1. Если $\square > \Delta$, то $\Delta < \square$.
2. Если $\square > \Delta$ и $\Delta > \nabla$, то $\square > \nabla$.
3. Если $\square > \Delta$, то $\square \pm \nabla > \Delta \pm \nabla$.
4. Если $\square > \Delta$ и $\nabla > 0$, то $\square \cdot \nabla > \Delta \cdot \nabla$, $\square : \nabla > \Delta : \nabla$.
   Если $\square > \Delta$ и $\nabla < 0$, то $\square \cdot \nabla < \Delta \cdot \nabla$, $\square : \nabla < \Delta : \nabla$.
5. Сложение неравенств: если $\square > \Delta$, $o > \nabla$, то $\square + o > \Delta + \nabla$.
6. Умножение неравенств (для положительных чисел):
   если $\square > \Delta$, $o > \nabla$, то $\square \cdot o > \Delta \cdot \nabla$,
   если $\square > \Delta$, то $\square^n > \Delta^n$ (n – натуральное число).
7. Если $\square \ge 0$, $\Delta \ge 0$, то $(\square + \Delta) : 2 \ge \sqrt{\square \cdot \Delta}$.

Схема 6. Операции над числами

Операции	Числа			
	Натуральные	Целые	Рациональные	Действительные
1. Сложение	+	+	+	+
2. Умножение	+	+	+	+
3. Возведение в натуральную степень	+	+	+	+
4. Вычитание		+	+	+
5. Деление			+	+
6. Возведение в целую степень			+	+
7. Возведение в дробную степень				+

Схема 7. Действия, связывающие переменные в алгебраических выражениях

Действия	Выражения					
	Одночлен	Многочлен	Целое	Рациональное	Иррациональное	Тригонометрическое
1. Сложение		+	+	+	+	+
2. Умножение	+	+	+	+	+	+
3. Возведение в натуральную степень	+	+	+	+	+	+
4. Вычитание		+	+	+	+	+
5. Деление				+	+	+
6. Возведение в целую степень				+	+	+
7. Возведение в дробную степень					+	+
8. Переменная находится под знаком тригонометрической функции						+

Схема 8. Действительные числа

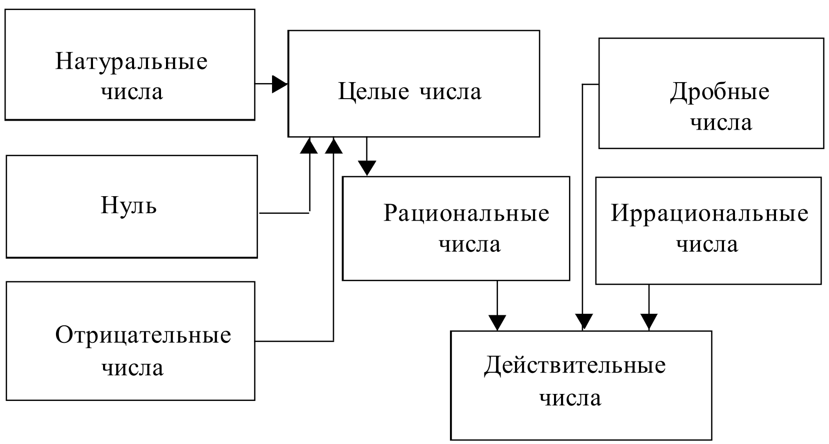


Схема 9. Алгебраические выражения

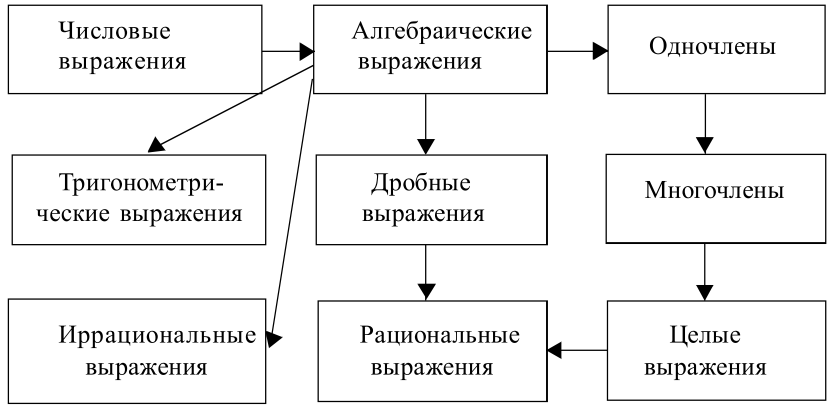


Схема 10. Уравнения с одной переменной

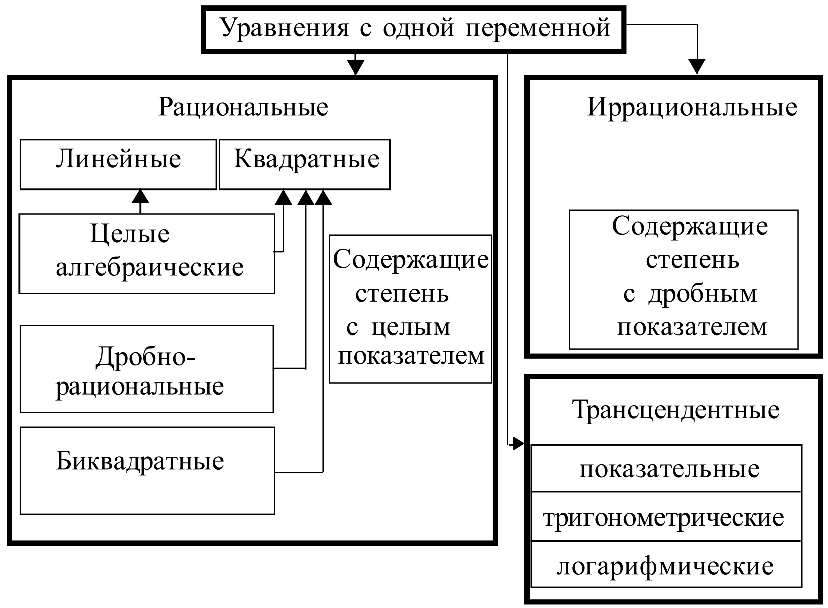


Схема 11. Неравенства

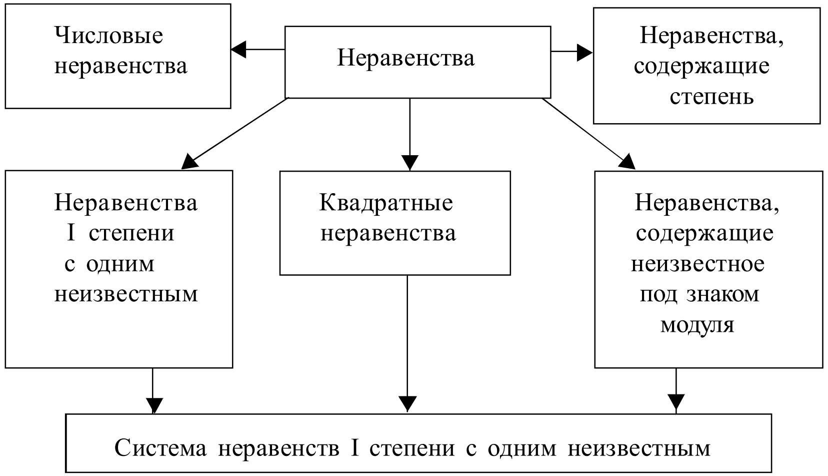


Схема 12. Функции

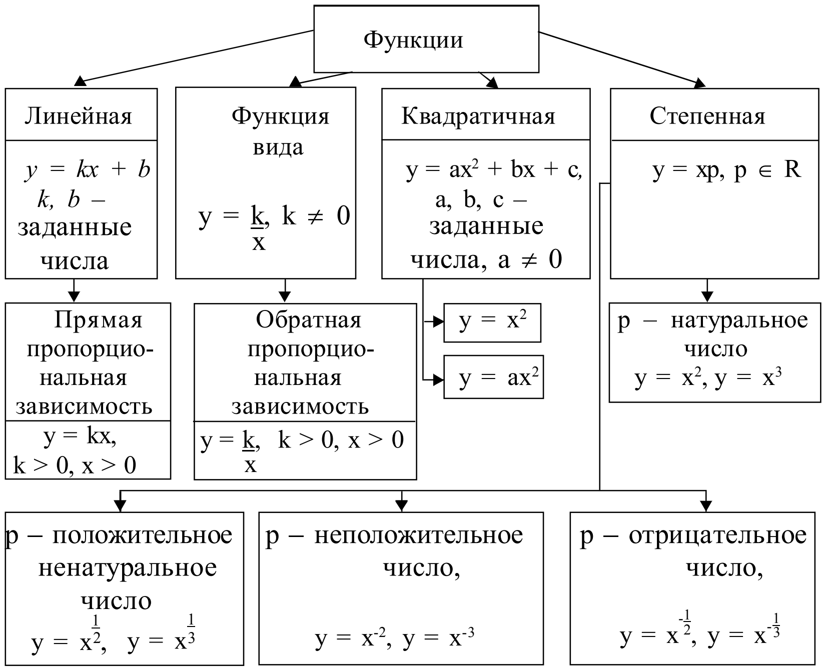


Схема 13. Уравнения

Виды уравнений	Классы			
	5–6	7	8	9
1. Уравнения первой степени с одним неизвестным, сводящиеся к линейным	+	+	+	+
2. Уравнения, содержащие знак модуля	+	+	+	+
3. Уравнения, решаемые на основе равенства нулю произведения двух чисел	+	+	+	+
4. Уравнения, содержащие дробь, равную нулю		+	+	+
5. Квадратные уравнения			+	+
6. Уравнения, сводящиеся к квадратным			+	+
7. Уравнения, содержащие степень (квадратный корень)			+	+
8. Трансцендентные уравнения (тригонометрические, показательные, логарифмические)				+

Схема 14. Основные уравнения, решаемые в 5–6 классах

Пример	Общий вид	Схема	□
1. $x + 5 = 21$	$x + a = b$	$\square + a = b$	x
2. $170 - x = 18$	$a - x = b$	$a - \square = b$	ax
3. $x - 39 = 51$	$x - a = b$	$\square - a = b$	$x : a$
4. $5x = 35$	$a \cdot x = b$	$a \cdot \square = b$	$a : x$
5. $x : 7 = 35$	$x : a = b$	$\square : a = b$	$x \pm a$
6. $1000 : x = 20$	$a : x = b$	$a : \square = b$	$a \pm x$
7. $9x + 23 = 5x + 11$	$ax + b = cx + d$	$\square = \square$	
8. $\lvert x - 1\rvert = 7$	$\lvert x - a\rvert = b$	$\lvert\square\rvert = b$	
9. $x \cdot (x - 5) = 0$	$(ax + b)(cx + d) = 0$	$\square \cdot \square = 0$	

Схема 15. Основные уравнения, сводящиеся к линейным, решаемые в 7 классе

Пример	Общий вид	Схема	□
1	2	3	4
1. $9x - 5 = 10 - x$	$ax + b = cx + d$	$\square = \square$	Одночлен
2. $\frac{11}{7} = \frac{2 - x}{5}$	$\frac{a}{b} = \frac{c - x}{d}$	$\frac{\square}{b} = \frac{c}{d}$	Двучлен
3. $\frac{3x}{5} = \frac{6 + x}{d}$	$\frac{ax}{b} = \frac{c + x}{d}$	$\frac{\square}{b} = \frac{\square}{d}$	
4. $\frac{8 - x}{6} + \frac{5 - 4x}{3} = \frac{x - 6}{2}$	$\frac{a + x}{b} + \frac{c + x}{d} = \frac{m + x}{n}$	$\frac{\square}{b} + \frac{\square}{d} = \frac{\square}{n}$	
5. $(7x - 9) + (2x - 8) = 1$	$(ax + b) + (cx + d) = k$	$\square + \square = k$	

1	2	3	4
6. $3(x-1)-2(3-7x)=$ $=2(x-2)$	$a(x+b)+c(x+d)=$ $=m(x+n)$	$\square+\square=\square$	
7. $(x-3)^2=0$	$a^2=0$	$\square^2=0$	
8. $(x-3)(x+4)=0$	$(x-a)(x+b)=0$	$\square\cdot\square=0$	
9. $x^2-2x=0$	$ax^2+bx=0$	$\square^2+\square=0$	
10. $(2x-3)^2-(2x+3)^2=0$	$(x-a)^2-(x-b)^2=0$	$\square^2-\square^2=0$	
11. $\frac{x^2+5x}{x^2+25}=0$	$\frac{ax^2+bx}{cx^2+d}=0$	$\frac{\square}{\square}=0$	

Схема 16

Квадратные уравнения		
полные	приведенные	неполные
$ax^2+bx+c=0$ a, b, c – заданное число, $a\neq 0$, x – неизвестное число, $D=b^2-4ac$, $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$	$x^2+px+g=0$ $x_{1,2}=\frac{-p}{2a}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-g}$ Теорема Виета $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=g$	$ax^2=0,\ x=0$ $ax^2+c=0$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ $ax^2+bx=0$, $x_1=0,\ x_2=-\frac{b}{a}$

Учебники математики и алгебры для основной школы, включенные в федеральный перечень на 2006/07 учебный год*

№ п/п	Учебно-методический комплект	Класс				
		5	6	7	8	9
1.	Виленкин Н. Я. и др. Математика	+	+			
2.	Волович М. Б. Математика	+	+			
3.	Гельфман Э. Г. и др. Математика	+	+			
4.	Дорофеев Г. В. и др. Математика. Алгебра, функции, анализ данных	+	+	+	+	+
5.	Зубарева И. И., Мордкович А. Г. Математика	+	+			
6.	Мордкович А. Г. Алгебра. Ч. 1–2			+	+	+
7.	Истомина Н. Б. Математика		+			
8.	Петерсон Л. Г., Дорофеев Г. В. Математика. Ч. 1–2 (Ч. 1–3)	+	+			
9.	Шеврин Л. Н. и др. Математика	+	+			
10.	Никольский С. М. и др. Арифметика. Алгебра	+	+	+	+	+
11.	Алимов Ш. А. и др. Алгебра			+	+	+
12.	Башмаков М. И. Алгебра			+	+	+
13.	Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г. Алгебра			+	+	+
14.	Муравин Г. К. и др. Алгебра			+	+	+

* Использованы материалы статьи: О федеральных перечнях учебников на 2006/07 учебный год // Математика. – 2006. – № 4. – С. 21–23.

**Структура обобщающего урока
в разновозрастной группе учащихся**

1. Актуализация знаний учащихся:

а) в форме экспресс-опроса по теме урока, предполагающего письменные ответы на ключевые вопросы, отражающие основные понятия и умения в данной содержательной линии;

б) в форме обсуждения с аудиторией вопросов на понимание сущности основополагающих понятий, способствующих выделению основных типов задач и приемов их выполнения.

2. Одновременно происходит анализ результатов опроса учащихся и выдвижение на их основе аспектов для обсуждения проблемы, а именно выделение и вынесение на доску основных понятий и умений по рассматриваемой содержательной линии.

3. Обсуждение проблемы начинают ученики 7 класса, затем продолжают ученики 8 класса и завершают девятиклассники. Каждая исследовательская группа рассматривает проблему применительно к объектам, представляющим содержательную линию в данном классе. В процессе дискуссии будет происходить обобщение знаний и умений и установление взаимосвязей между ними, которые затем оформляются в виде схемы, что способствует математизации знаний и умений школьников.

4. С целью получения обратной связи проводится контролирующая самостоятельная работа.

5. Итоги дискуссии и выполнения самостоятельной работы подводят члены экспертной группы. Учитель обобщает результаты в содержательном аспекте и фиксирует место данной содержательной линии в курсе алгебры основной школы.

**Конспект обобщающего урока
в разновозрастной группе учащихся 7 и 8 классов
по теме «Уравнения с одной переменной»**

Цель: повторить, обобщить и привести в систему знания учащихся по темам «Уравнения I степени с одним неизвестным» в 7 классе, «Уравнения II степени с одним неизвестным» в 8 классе, показать преемственность этих типов уравнений, их связь с арифметическим материалом. Выделить общие понятия, теоретические сведения и приемы решения, характерные для уравнений обоих типов. Развивать умение проводить рассуждения методом неполной индукции с постепенным привлечением дедукции. Формировать коммуникативные навыки учащихся. Прививать интерес к занятиям математикой.

Основные понятия:

– уравнение,
– корень уравнения,
– что значит решить уравнение.

Виды уравнений:

I степени с одним неизвестным (частный случай – линейные);
II степени с одним неизвестным (частный случай – квадратные).

Основные теоретические сведения:

а) используемые при решении уравнений I степени:
– законы арифметических действий,
– свойства чисел,
– свойства верных числовых равенств,
– свойства уравнений;
б) используемые при решении уравнений II степени.

Дополнительно:

– формула корней квадратного уравнения.

Приемы решения уравнений:

1) I степени с одним неизвестным.

Линейные уравнения и уравнения, сводимые к линейным, решаются на основе свойств уравнений. Приемы сведения уравнений к линейным: алгебраические преобразования выражений в левой и правой частях уравнения с целью записи многочленов, в них стоящих, в стандартном виде; умножение дробных коэффициентов в целых алгебраических уравнениях на наименьший общий знаменатель дробей.

2) II степени с одним неизвестным.

Квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным, решаются с использованием формулы корней, теоремы Виета, методом выделения полного квадрата.

Приемы сведения уравнений к квадратным: замена неизвестного (способ подстановки) и введение новой переменной, для буквенного уравнения – умножение обеих частей уравнения на не равное нулю выражение, содержащее неизвестное (для уравнений, содержащих неизвестное в знаменателе дроби).

Частные случаи:

а) уравнения, содержащие в левой части произведение двух выражений, в правой части нуль. Решаются на основе равенства нулю произведения двух чисел. Приемы разложения на множители: вынесение общего множителя за скобку, группировка членов, использование формул сокращенного умножения;

б) уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля. Решаются на основе определения модуля и последующих преобразований с целью сведения к линейному или квадратному.

Форма проведения урока – дискуссия, в которой участвуют ученики 7 и 8 классов, проводящие исследование уравнений I и II степени с одним неизвестным. Проверку работ учащихся, оценку и анализ результатов осуществляет экспертная комиссия.

Структура урока

I. Актуализация знаний учащихся:

а) письменная работа; б) обсуждение основных вопросов темы:

– Что такое уравнение?

– Что такое корень уравнения?

– Что значит решить уравнение?

Закрепление этих вопросов происходит при выполнении письменных заданий.

Задание 1. Из предложенных уравнений:

А) $2x^2 + x + 3 = 0$

Б) $\frac{1}{2}x^2 - 3 = 0$

В) $4x^2 = 0$

Г) $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = 0$

Д) $4x^2 + \frac{1}{3}x^3 - 3 = 0$

Е) $0{,}5x = -7$

Ж) $\frac{5x - 6}{3 - x} = 0$

З) $\frac{2}{7}x = 5$

И) $5x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

К) $\frac{5}{x - 3} + \frac{4}{x + 2} = 6$

выберите: а) линейные уравнения (7 класс),

б) квадратные уравнения (8 класс).

Задание 2. Привести примеры уравнений:

а) I степени с одним неизвестным (7 класс),

б) II степени с одним неизвестным (8 класс).

Задание 3. Запишите, сколько решений может иметь:

а) уравнение I степени с одной переменной (7 класс),

б) уравнение II степени с одной переменной (8 класс).

Приведите примеры (дополнительно).

Задание 4. Перечислите, какое применение в курсе математики имеют уравнения.

Задание 5. Является ли число «2» корнем уравнения $\frac{x - 2}{4} - \frac{1}{2} = \frac{x + 7}{6}$ (7 класс)?

Является ли число «1» корнем уравнения $\frac{3}{x + 2} - \frac{4}{x - 3} = 3$ (8 класс)?

Задание 6. Найдите корень уравнения:

$2(3 - \frac{x}{3}) = 5 + x$; $\qquad x^2 - 5x + 4 = 0.$

Задание 3. Составьте уравнение, имеющее корень, равный: 4, 5.

II. Анализ экспертной группой результатов письменной работы, ответов учащихся при обсуждении вопросов и выдвижение на их основе проблем для дальнейшей дискуссии.

Основные итоги этого этапа:

1. Существуют разные виды уравнений с одной переменной.

2. Неизвестное в уравнении может быть в I или во II степени, поэтому выделяют уравнения I и уравнения II степени с одной переменной.

3. В обоих случаях уравнение – это равенство, содержащее неизвестное, значит, для него справедливы свойства верных числовых равенств и свойства уравнений.

4. Уравнения могут иметь разное количество корней.

5. Для решения уравнений используются теоретические сведения, выражающие свойства понятий и отношения между ними.

6. При решении уравнений с целью их приведения к виду линейного, квадратного или обозначенных частных случаев производят преобразования выражений, стоящих в левой и правой частях.

7. В обоих типах рассмотренных уравнений есть частные случаи.

8. Решение уравнений способствует упрочению вычислительных навыков, отработке навыков преобразований алгебраических выражений.

9. Решение уравнений используется при решении текстовых задач, исследовании свойств и построении графиков функций.

III. Ученики 7 и 8 классов анализируют с обозначенных позиций уравнения I степени с одним неизвестным и уравнения II степени с одним неизвестным соответственно.

В результате получается обобщение сведений, изложенных выше, дополнительно прослеживается взаимосвязь содержательных линий курса. С целью систематизации знаний составляются *схемы 1, 2*.

Схема 1

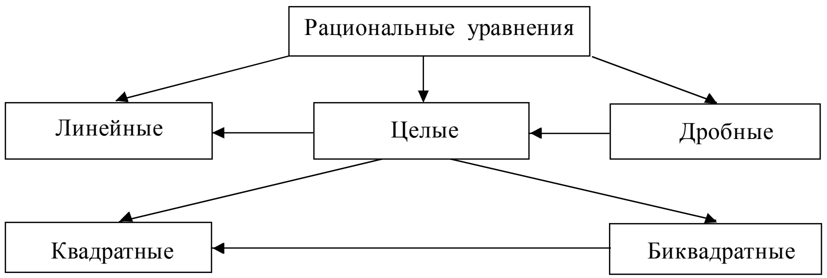


Схема 2

Линейные уравнения $ax = b$,
a, b – заданные числа, x – неизвестное число.

Один корень: $a \neq 0$, $x = \frac{b}{a}$.

Бесконечно много корней: $a = b = 0$.
Нет корней: $a = 0$, $b \neq 0$.

В процессе дискуссии решаются уравнения основных видов каждой группы.

7 класс	8 класс
А) $3 - 5(x - 1) = x - 2$ Б) $(7x - 9) + (2x - 8) = 1$ В) $\frac{x-7}{2} = \frac{1}{4}$ Г) $7 - \frac{x}{2} = 3 + \frac{7x}{2}$ Д) $\frac{x-5}{5} = \frac{2x+1}{3} - 7$ Е) $(x^2 - 4x) + (x - 4) = 0$ Ж) $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 2(x - 3)$ З) $16x^2 - (4x - 5)^2 = 15$ И) $(y + 8)^2 - (y + 9)(y - 9) = 117$ К) $\lvert x - 2\rvert = 3$ Л) Решить уравнение с параметром: при каком значении «k» корень уравнения равен 5? М) Решить уравнение графически: $3x - 5 = 10 - x$	А) $(x + 4)(3 - x) = 0$, $\frac{3x^2 + x}{x} = 0$ Б) $2x^2 - x = 0$, $1 - 9x^2 = 0$ В) $3x(x + 2) = 2x(x - 2)$ Г) $2x^2 + 3x - 2 = 0$ Д) $\frac{5x^2 - 9}{6} - \frac{4x^2 - 9}{5} = 3$ Е) $\frac{3}{x-2} = 4 + \frac{3}{x-1}$ Ж) $\frac{x}{x-2} - 7 = \frac{8}{x^2-4}$ З) $\frac{x}{x-3} + \frac{3}{x-5x+6} = \frac{3}{2-x}$ И) $\lvert x^2 + x\rvert = 1$ К) $x^2 - \lvert x\rvert - 2 = 0$ Л) При каком значении k число –2 является корнем уравнения $(k - 2)x^2 - 7x - 2k^2 = 0$? М) Решить уравнение графически: $x^2 - 8x + 7 = 0$ (или $x^2 = 8x - 7$)

Вопрос о решении уравнений графически рассматривается дополнительно и является для учащихся новым. Однако он полезен для геометрической интерпретации понятия «корень уравнения» и требования «решить уравнение». В данном случае наглядно демонстрируется взаимосвязь линии уравнений и функциональной линии.

Применение уравнений для решения текстовых задач демонстрируется при составлении школьниками задач по заранее заданному сюжету: работа, покупка (продажа), площадь (периметр), движение.

Работа происходит в парах: ученики 7 класса предлагают решить свои задачи ученикам 8 класса, а сами пытаются осуществить моделирование ситуаций в задачах, предложенных восьмиклассниками (решают задачу частично, но убеждаются в единстве подходов к решению задач обозначенного типа).

IV. С целью получения обратной связи предлагается самостоятельная работа контролирующего характера.

7 класс	8 класс
1. Решите уравнение:	
А) $2(x-1)=3(2x-1)$ Б) $\frac{2x+1}{3}=6$ В) $\frac{6x+7}{7}+\frac{3+5x}{8}=3$	А) $3x^2+5x=0$ Б) $20+8x-x^2=0$ В) $\frac{2x}{x-3}-\frac{1}{x+3}=\frac{6}{x^2-9}$
2. Найдите и подчеркните ошибку в решении. Запишите причину ее появления:	
$2-3x=\frac{x-12}{2}$ $4-6x=x-12$ $-6x+x=-12-4$ $-5x=-16$ $x=3{,}2$ Ответ: 3,2	$\frac{1^{(x+3)}}{x}-\frac{1^{x}}{x+3}=\frac{3^{(x(x+3))}}{20}$ $x(x+3)\neq 0$ $(x+3)+x=3x(x+3)$ $x+3+x=3x^2+9x$ $3x^2+7x-3=0$ $D=85>0$, 2 корня: $x_1=\frac{-7+\sqrt{85}}{6}$, $x_2=\frac{-7-\sqrt{85}}{6}$. Ответ: $\frac{-7\pm\sqrt{85}}{6}$
3. Составьте уравнение по схеме:	
$\square + a = \square - b$, где в качестве неизвестного $\square$ используйте одночлены с дробными коэффициентами (одночлен и двучлен)	$\square^2+\square-c=0$, где c – заданное число, в качестве неизвестного используйте двучлен

V. Итоги дискуссии и самостоятельной работы подводят члены экспертной группы. Учитель обобщает результаты в содержательном аспекте и фиксирует место данной содержательной линии в курсе алгебры, подчеркивает связь с курсом арифметики и намечает для каждого класса перспективы изучения на следующий год.

Проведение таких занятий в разновозрастных группах способствует прочности и осознанности усвоения системы знаний и умений по курсу алгебры основной школы, снижает проблему гиперконтроля со стороны учителя. На занятии создается атмосфера доброжелательности, сотрудничества, взаимного доверия и уважения. У учащихся при этом формируются и развиваются коммуникативные умения и навыки умственного труда.

Система упражнений в курсе алгебры 7 класса, демонстрирующая взаимосвязь содержательных линий «Алгебраические выражения и их преобразования» и «Уравнения»

Взаимосвязь носит преемственный характер и проявляется в том, что алгебраические преобразования являются средством для упрощения выражений, стоящих в левой и правой частях уравнения при его решении. С другой стороны, уравнения являются моделью для закрепления навыков алгебраических преобразований.

Алгебраические выражения и их преобразования	Номера упражнений учебника [1]
Использование свойств, арифметических действий, правил раскрытия скобок, свойств верных равенств при упрощении алгебраических выражений и равенств.	№ 76, 79, 80, 82, 83*, 84–100, 116, 117, 121–125*, 130*, 131*
Степень с натуральным показателем.	№ 154
Свойства степени с натуральным показателем.	№ 171, 199, 305
Умножение одночленов.	№ 226*, 309
Многочлены.	№ 231
Приведение подобных членов.	№ 242
Сложение и вычитание многочленов.	№ 250
Умножение многочлена на одночлен.	№ 261, 262
Умножение многочлена на многочлен.	№ 272
Вынесение общего множителя за скобки.	№ 337*
Способ группировки.	№ 347*
Формула разности квадратов.	№ 364
Квадрат суммы, квадрат разности.	№ 384
Применение нескольких способов разложения многочлена на множители.	№ 401*
Комбинированные преобразования.	№ 417, 424*
Приведение дробей к общему знаменателю.	№ 459
Сложение и вычитание алгебраических дробей.	№ 476
Умножение и деление алгебраических дробей.	№ 491, 492*
Итоговые упражнения по теме «Алгебраические дроби»	№ 506, 508

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра: Учебник для 7 класса средней школы / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. – . 3-е изд. – М.: Просвещение, 2005.– 192 с.

2. Алгебра: Учебник для 8 класса средней школы / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. – М.: Просвещение, 2005. – 240 с.

3. Алгебра: Учебник для 9 класса средней школы / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. – М.: Просвещение, 2005. – 224 с.

4. Алгебра: Учебник для 7 класса средней школы / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. – М.: Просвещение, 2005.

5. Алгебра: Учебник для 8 класса средней школы / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. – М.: Просвещение, 2005.

6. Алгебра: Учебник для 9 класса средней школы / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. – М.: Просвещение, 2005.

7. Алгебра: Учебник для 7 класса средней школы / А. Г. Мордкович. – Ч.1, 2. – М.: Мнемозина, 2002.

8. Алгебра: Учебник для 8 класса средней школы / А. Г. Мордкович. – Ч. 1, 2. – М.: Мнемозина, 2002.

9. Алгебра: Учебник для 9 класса средней школы / А. Г. Мордкович. – Ч. 1, 2. – М.: Мнемозина, 2003.

10. Алгебра в 6–8 классах: Пособие для учителя / Ф. М. Барсукова, А. А. Бесчинская, Л. О. Денищева и др.; Сост. Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. – М.: Просвещение, 1998. – 384 с.

11. Ананьев Б. Г. О преемственности в обучении // Советская педагогика. – 1953. – № 2. – С. 23–35.

12. Батаршев А. В. Педагогическая система преемственности обучения в общеобразовательной и профессиональной школе. – СПб.: Изд-во Института профтехобразования РАО, 1996. – 90 с.

13. Батаршев А. В. Преемственность обучения в общеобразовательной и профессиональной школе (теоретико-методологический аспект) / Под ред. А. П. Беляевой. – СПб.: Изд-во Института профтехобразования РАО, 1996. – 80 с.

14. Блонский П. П. Развитие мышления школьника. – М.: Учпедгиз, 1935. – 128 с.

15. Богоявленский Д. Н., Менчинская Н. А. Психология усвоения знаний в школе. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1959. – 348 с.

16. Большая советская энциклопедия. Т. 20. – М.: Сов. энциклопедия. – 1975. – С. 1530–1531.

17. Гальперин П. Я. Методы обучения и умственного развития ребенка. – М.: Педагогика, 1985. – 46 с.

18. Ганелин Ш. А. Дидактический принцип сознательности. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1991. – 224 с.
19. Ганелин Ш. А. Принципы дидактики в их взаимосвязи у классиков педагогики // Советская педагогика. – 1961. – № 5. – С. 121–134.
20. Глаголева Н. Ю. Идеи сотрудничества на уроках математики: Методические рекомендации. – Калуга: КГПИ им. Циолковского, 1990. – 76 с.
21. Гузеев В. В. Лекции по педагогической технологии. – М.: Знание, 1992. – 60 с.
22. Давыдов В. В. Виды обобщения в обучении (логико-психологические проблемы построения учебных предметов). – М.: Педагогика, 1972. – 424 с.
23. Епишева О. Б. Технология обучения математике на основе деятельностного подхода: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 2003. – 224 с.
24. Зверев И. Д. Максимова В. Н. Межпредметные связи в современной школе. – М.: Педагогика, 1981. – 160 с.
25. Зверев И. Д. Межпредметные связи как проблема // Советская педагогика. – 1974. – № 12. – С. 10–16.
26. Зорина Л. Я. Дидактические основы формирования системности знаний старшеклассников. – М.: Педагогика, 1978. – 128 с.
27. Зубчевская Р. З. Методическая система В. Ф. Шаталова в преподавании математики в 5 классе. – М.: Новая школа, 1992. – 48 с.
28. Иржавцева В. П., Федченко Л. Я. Систематизация и обобщение знаний учащихся в процессе изучения математики: Пособие для учителя / Под ред. Н. Л. Коломинского. – Киев: Радяньска школа, 1989. – 208 с.
29. Истомина Н. Б., Воителева Г. В. Преемственность при изучении чисел в начальной и основной школе. – М.: Московский психолого-социальный институт, 2003. – 144 с.
30. Кабанова-Меллер Е. Н. О роли наглядного материала в процессе абстракции и обобщения // Вопросы психологии. – 1955. – № 2. – С. 65–71.
31. Кабанова-Меллер Е. Н. Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся. – М.: Просвещение, 1968. – 288 с.
32. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике. Ч. 1, 2. – М.: Просвещение, 1977.
33. Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В., Ткачева М. В. и др. Изучение алгебры в 7–9 классах: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 2002. – 288 с.
34. Коменский Я. А. Великая дидактика // Коменский Я. А. Избр. пед. соч. – М.: Учпедгиз, 1955. – 652 с.

35. Короткова Л. М. Математический практикум как средство усиления прикладной и практической направленности обучения алгебре: Дис. … канд. пед. наук. – М., 1992. – 162 с.
36. Леонтьев А. Н. Психологические вопросы сознательности учения // Известия АПН РСФСР. – 1947. – Вып. VII.
37. Лушников И. Д., Мочалыгина И. А., Селянкина И. Н. Разноуровневые задания для развития индивидуальных творческих способностей учащихся: Пособие для учителя / Под ред. И. Д. Лушникова. – Вологда: Издательский центр ВИРО, 2004. – 108 с.
38. Лушников И. Д., Мочалыгина И. А., Селянкина И. Н. Уроки развития индивидуальных творческих способностей учащихся / Под ред. И. Д. Лушникова. – Вологда: ВИРО, 2004. – 160 с.
39. Люблинская А. А. Очерки психического развития ребенка. – М.; Л.: Изд-во АПН РСФСР, 1965. – 364 с.
40. Лященко Е. И., Зобкова К. В., Кириченко Т. Ф. и др. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед ин-тов; Под ред. Е. И. Лященко.– М.: Просвещение, 1988. – 224 с.
41. Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г., Суворова С. Б. Изучение алгебры в 7–9 классах: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 2005. – 254 с.
42. Манвелов С. Г. Конструирование современного урока математики: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 2002. – 176 с.
43. Математика: Учебник для 5 класса общеобразовательных учреждений / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. –5-е изд. – М.: Мнемозина, 2001. – 384 с.
44. Математика: Учебник для 6 класса общеобразовательных учреждений / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – 5-е изд. – М.: Мнемозина, 2001. – 304 с.
45. Математика: Учебник для 5 класса общеобразовательных учреждений / Г. В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин. – М.:Просвещение, 2005.
46. Математика: Учебник для 6 класса общеобразовательных учреждений / Г. В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин. – М.:Просвещение, 2005.
47. Математика: Учебник для 5 класса общеобразовательных учреждений / И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2005.
48. Математика: Учебник для 6 класса общеобразовательных учреждений / И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2005.
49. Математика. Алгебра. 7 класс / Г. В. Дорофеев и др. – М.: Просвещение, 2001.
50. Математика. Алгебра, функции, анализ данных. 8 класс / Г. В. Дорофеев и др. – М.: Просвещение, 2002.

51. Математика. Алгебра, функции, анализ данных. 9 класс / Г. В. Дорофеев и др. – М.: Просвещение, 2002.

52. Менчинская Н. А., Моро М. И. Вопросы методики и психологии обучения арифметике в начальных классах. – М.: Просвещение, 1965. – 224 с.

53. Менчинская Н. А. Проблемы учения и умственного развития школьника: Избранные психологические труды. – М.: Педагогика, 1989. – 224 с.

54. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Учебное пособие для студентов физ.-мат. факультетов пед. ин-тов / Под общ. ред. Ю. М. Колягина и В. А. Оганесяна. – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.

55. Мишарева Е. И., Руденко В. Н., Шепетов А. С. Пропедевтика математического образования // Пути повышения эффективности обучения: Из опыта работы школ / Сост. Г. А. Победоносцев; Под ред. Н. С. Сунцова. – М.: Просвещение, 1973. – С. 71–85.

56. Никола Г., Талызина Н. Ф. Формирование общих приемов решения арифметических задач // Формирование приемов математического мышления / Под ред. Н. Ф. Талызиной. – М.: ТОО «Вентана-Граф», 1995. – 232 с.

57. Оценка качества подготовки выпускников основной школы по математике / Г. В. Дорофеев, Л. В. Кузнецова и др. – 2-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2001. – 80 с.

58. Педагогическая энциклопедия. – Т. 3. / Гл. ред. И. А. Каиров и др. – М.: Сов. энциклопедия. – 1960. – С. 485–487.

59. Педагогические технологии: что это такое и как их использовать в школе: Практико-ориентированная монография / Науч. ред. Т. И. Шамова, П. И. Третьяков. – Москва – Тюмень, 1994. – 288 с.

60. Пойа Д. Как решать задачу: Пер. с англ. – М.: Учпедгиз, 1961. – 208 с.

61. Преемственность в обучении математике: Пособие для учителей. Сборник статей / Сост. А. М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1978. – 240 с.

62. Программы для общеобразовательных школ, гимназий, лицеев: Математика. 5–11 кл. / Сост. Г. М. Кузнецова, Н. Г. Миндюк. – М.: Дрофа, 2000. – 320 с.

63. Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе: Учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. вузов и ун-тов. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.

64. Саранцев Г. И. Упражнения в обучении математике. – М.: Просвещение, 1995. – 240 с.

65. Сборник нормативных документов. Математика / Сост. Э. Д. Днепров, А. Г. Аркадьев. – М.: Дрофа, 2004. – 80 с.

66. Талызина Н. Ф. Формирование познавательной деятельности младших школьников: Кника для учителя. – М.: Просвещение, 1988. – 176 с.

67. Учебно-методическое обеспечение переходного этапа от начальной к подростковой школе. 5–6 классы (образовательная система Д. Б. Эльконина–В. В. Давыдова) / Под. ред. А.Б.Воронцова. – М.: АПКи ПРО, 2004. – 110 с.

68. Ушинский К. Д. Человек как предмет воспитания: Опыт педагогической антропологии // Ушинский К. Д. Собр. соч. Т. I, II. – М.: Издательство АПН РСФСР, 1950.

69. Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о педагогической психологии. – М.: Просвещение, 1983. – 160 с.

70. Фридман Л. М., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи: Книга для учащихся ст. классов сред. шк. – 3-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.

71. Шаталов В. Ф. Эксперимент продолжается. – М.: Педагогика, 1989. – 336 с.

72. Эрдниев П. М. Некоторые вопросы методики обучения арифметике и алгебре в средней школе. – Элиста, 1960. – 62 с.

73. Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1986. – 256 с.

Е. А. Комарова

ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ
В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Методическое пособие

Корректор *И. А. Кукушкина*
Компьютерная верстка *Т. А. Никановой*

Подписано в печать 12.02.2007. Формат 60х84/$_{16}$.
Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 6,28. Тираж 000 экз. Заказ 1238

Издательский центр Вологодского института развития образования
160012, г. Вологда, ул. Козленская, 99а