Департамент образования Вологодской области
Вологодский институт развития образования

ПРЕДПРОФИЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА УЧАЩИХСЯ: КУРСЫ ПО ВЫБОРУ

В ы п у с к 2

Математика. Физика

Вологда
2005

ББК 74.6:2
П 71

Печатается по решению редакционно-издательского совета Вологодского института развития образования

Подготовлено и издано по заказу департамента образования Вологодской области в соответствии с областной целевой программой «Развитие системы образования Вологодской области на 2004–2006 гг.»

Научный редактор

Е. А. Комарова, кандидат педагогических наук, заведующая кафедрой естественно-научного образования ВИРО

Рецензенты:

Г. Н. Шилова, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой математического анализа ВГПУ;
Е. Ю. Ногтева, кандидат педагогических наук, доцент кафедры педагогики ВИРО

П 71 **Предпрофильная** подготовка учащихся: курсы по выбору. – Вып. 2: Математика. Физика. – Вологда: Издательский центр ВИРО, 2005. – 108 с.

В сборнике представлены программы курсов по выбору для 9 класса, которые можно использовать в рамках предпрофильной подготовки в области естественно-математичеких дисциплин. В их число входят предметно ориентированные курсы по математике и физике, в которых рассматриваются избранные темы, способные увлечь и заинтересовать школьников, а также межпредметный курс, позволяющий показать учащимся универсальный характер методов решения задач на проценты, которые используются как в математике, так и в физике и химии.

ББК 74.6:2
П 71

ISBN 5-87590-182-9

ISBN 5-87590-182-9

СОДЕРЖАНИЕ

ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ

В сборнике представлены программы курсов по выбору для 9 класса, которые можно использовать в рамках предпрофильной подготовки учащихся в области естественно-математичеких дисциплин. В первой части сборника дана общая характеристика курсов по выбору. Во вторую часть входят предметно ориентированные курсы по математике, в которых рассматриваются избранные темы, способные увлечь и заинтересовать школьников. Межпредметный курс «Задачи на проценты» позволяет показать учащимся универсальный характер методов решения задач на проценты, которые используются как в математике, так и в физике и химии. Завершает сборник курс по физике, демонстрирующий учащимся основные методы и специфику исследовательской деятельности по физике.

Учебные программы составлены учителями математики и физики Вологодской области и являются обобщением опыта их работы по организации кружков и факультативов. Учебные программы предложены в авторской редакции, содержат пояснительную записку, примерное тематическое или поурочное планирование, характеристику содержания курса, краткие методические комментарии, требования к усвоению содержания.

Программы большинства курсов дополнены дидактическими материалами, включающими теоретические сведения по ключевым вопросам курса и банк задач, что поможет учителю в организации учебного процесса.

Составители надеются, что представленные материалы помогут как в организации предпрофильной подготовки учащихся, так и при разработке авторских программ курсов по выбору.

Е. А. Комарова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КУРСОВ ПО ВЫБОРУ

***Е. А. Комарова**, зав. кафедрой ЕНО ВИРО*

Одной из важнейших составных частей системы предпрофильной подготовки учащихся основной школы являются курсы по выбору.

Основные цели, стоящие перед курсами по выбору:

– создать условия, способствующие осознанному выбору профиля обучения в старшей школе,

– способствовать формированию личной ответственности учащихся за сделанный выбор профиля обучения в старшей школе.

Выделяют два вида курсов по выбору: предметно ориентированные и межпредметные, общая характеристика которых представлена в таблице.

Характеристика курсов по выбору

Позиция	Предметно ориентированные курсы	Межпредметные курсы
1	2	3
Задачи	1. Дать возможность ученику реализовать свой интерес к выбранному предмету. 2. Уточнить готовность и способность ученика осваивать выбранный предмет на повышенном уровне. 3. Создать условия для подготовки к экзаменам по выбору, т. е. наиболее вероятным предметам будущего профилирования	1. Создать базу для ориентации учеников в мире современных профессий. 2. Познакомить учеников на практике со спецификой различных видов деятельности, соответствующих наиболее распространенным профессиям. 3. Поддерживать мотивацию ученика к тому или иному профилю, способствуя внутрипрофильной специализации
Направленность	Прогностические (пропедевтические) по отношению к профильным курсам повышенного уровня. Их присутствие в ученическом учебном плане повышает вероятность того, что выпускник сделает успешный и осознанный выбор профиля	Характер и направленность межпредметных курсов аналогичны элективным курсам в системе профильного обучения в 10–11 классах
Содержание	Содержание должно быть ориентировано на расширение отдельных тем базовых общеобразовательных программ.	Предполагают выход за рамки традиционных учебных предметов, знакомят с комплексными проблемами и задачами, требую-

1	2	3
	Аналог – традиционные факультативы, которые дополняют базовую программу, не нарушая ее целостности	щими синтеза знаний по ряду предметов. Аналог – кружок, факультатив
Продолжительность	Эти курсы не являются ознакомительными, поэтому оптимальная продолжительность – четверть (14 часов) или полугодие (28–30 часов). Ученик может освоить 2–4 курса в год	Курсы ознакомительные, краткосрочные, частосменяемые. Оптимальная продолжительность – четверть (14 часов)
Литература	Учебные пособия, программы факультативов, спецкурсов, пособия для подготовки в вузы, пособия для классов с углубленным изучением предмета	Научно-популярные пособия, справочники, энциклопедии
Ресурсы	Внутренние ресурсы школы	Ресурсы образовательных учреждений единой образовательной сети, частью которой является школа
Формы организации учебных занятий	Академические (лекции, семинары, зачеты). Ориентированные на инновационные технологии: – дискуссии, диспуты, способствующие развитию коммуникативной культуры; – индивидуальная и групповая исследовательская работа; – выполнение проектов и другие способы обучения, способствующие развитию самостоятельности и творческой инициативы ученика	
Формы контроля за уровнем достижений учащихся	При организации контроля за уровнем достижений учащихся необходимо помнить, что: – курс выбран учеником инициативно; – успешное освоение курса позволит ученику сдать экзамен и поступить на избранный профиль; – анализы результатов работ учащихся могут лечь в основу подсчета накопительной оценки. Наиболее часто используются такие формы, как собеседования, защиты проектов, самоанализ результатов, саморефлексия и др.	

Данные курсы отличаются перечнем решаемых задач, направленностью, содержанием, продолжительностью, ресурсным обеспечением.

При разработке программ и организации курсов по выбору необходимо учитывать следующие ***требования:***

1. Набор предлагаемых курсов должен носить вариативный характер, их количество должно быть «избыточным».

2. Необходимо создать такие условия в организации учебного процесса, которые позволяли бы ученику менять наполнение индивидуального учебного плана курсами по выбору как минимум два раза за учебный год.

3. Содержание курсов по выбору должно включать не только информацию, расширяющую сведения по учебным предметам, но и знакомить учеников со способами деятельности, необходимыми для успешного освоения программы того или иного профиля.

4. В целях формирования интереса и положительной мотивации к тому или иному профилю через освоение новых аспектов содержания и более сложных способов деятельности, содержание курсов предпрофильной подготовки может включать оригинальный материал, выходящий за рамки школьной программы.

Элективные курсы в старшей школе – обязательные для посещения курсы по выбору учащихся, входящие в состав профиля обучения на старшей ступени школы. Элективные курсы реализуются за счет школьного компонента и выполняют три функции: поддерживают базовые или профильные курсы или создают условия для реализации индивидуальных потребностей и интересов старшеклассников. Количество элективных курсов, предлагаемых в составе профиля должно быть избыточным по сравнению с числом курсов, которые обязан выбрать ученик. По элективным курсам ЕГЭ не проводится. Как следует из Рекомендаций «Цели, содержание и организация предпрофильной подготовки в выпускных классах основной школы» (с. 8): «Содержание элективных курсов может описываться в форме примерных учебных программ, но фиксации в форме государственного образовательного стандарта оно не подлежит».

Курсы по выбору могут быть успешно введены в учебные планы общеобразовательных учреждений при наличии программ таких курсов и при соответствующей подготовке учителей к работе по этим программам.

Мы надеемся, что предлагаемый сборник учебных программ курсов по выбору поможет учителям математики и физики в решении задач предпрофильной подготовки учащихся основной школы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подготовка педагогических кадров к введению предпрофильного обучения: Методическое пособие. – М.: АПК и ПРО, 2003.

2. Предпрофильная подготовка учащихся основной школы: Учебные программы элективных курсов по естественно-математическим дисциплинам / Сост. А. Ю. Пентин. – М.: АПК и ПРО, 2003.

3. Элективные курсы в профильном обучении /МО РФ-НФПК. – М.: Вита-Пресс, 2004.

4. Элективные курсы в профильном обучении: Образовательная область «Математика» / МО РФ-НФПК. – М.: Вита-Пресс, 2004.

5. Цели, содержание и организация предпрофильной подготовки в выпускных классах основной школы. Рекомендации для директоров школ, руководителей региональных и муниципальных учреждений образования. – М., 2003.

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ И ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ

И. А. Макарьина*, канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры мат. анализа ВГПУ;* ***Н. А. Цыпленкова****, доцент кафедры мат. анализа ВГПУ;*
А. С. Шестакова*, аспирантка кафедры алгебры, геометрии и теории обучения математике ВГПУ*

Пояснительная записка

Данный курс является пропедевтическим по отношению к профильным курсам по математике в 10–11 классах. Присутствие таких курсов в учебном плане учащегося повышает вероятность того, что выпускник 9 класса сделает осознанный и успешный выбор профиля, связанного с математикой.

Программа курса включает материалы, углубляющие знания и развивающие умения учащихся, приобретенные при изучении темы «Дробно-рациональные уравнения». Цель курса – предоставить учащимся возможность осмыслить общие подходы к решению уравнений, развить их алгебраическую интуицию, без которой немыслимо творчество. При этом курс дополняет базовую программу интересными, нестандартными задачами, не нарушая ее целостности.

Организация занятий должна располагать к самостоятельному поиску решения уравнений и повышать интерес к изучению предмета. Особое внимание следует уделить развитию умений учащихся рассуждать, определять метод, выбирать наиболее рациональный прием решения уравнения, исследовать полученные результаты.

Уровень усвоения содержания курса и сформированности обозначенных умений определяется на заключительном занятии во время защиты обобщающих блок – схем методов и приемов решения дробно-рациональных уравнений, составленных учащимися самостоятельно (группами или индивидуально).

Программа курса включает в себя три учебно-тематических блока, каждый из которых рассчитан на 3–7 уроков. Таким образом, данный курс рассчитан на 16 часов, что возможно при изучении его в течение полугодия.

УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН КУРСА

(16 часов)

№ п/п	Тема	Всего	Уроки-лекции (Выделение и решение ключевых задач)	Уроки-практикумы по решению задач
1.	Сведение дробно-рационального уравнения к равносильной системе, одно из уравнений которой является целым: – умножение обеих частей уравнения на общий знаменатель дробей исходного уравнения, при условии, что он отличен от нуля; – использование условия равенства нулю дроби; – выделение целой части каждой дроби исходного уравнения	3 часа	1 час	2 часа
2.	Замена неизвестной (метод подстановки): – «очевидная» подстановка; – приемы, позволяющие «увидеть» подстановку: выделение полного квадрата, сокращение каждой дроби исходного уравнения на x; – подстановка вида $t = x^2 + a$, где a – некоторое число; – введение двух новых неизвестных	7 часов	4 часа	3 часа
3.	Дробно-рациональные уравнения, содержащие параметр	4 часа	1 час	3 часа
4.	Заключительное занятие	2часа		2 часа
	Всего:	16 часов	6 часов	10 часов

МЕТОДИЧЕСКИЕ КОММЕНТАРИИ

На уроках-лекциях предполагается совместная деятельность учащихся и учителя по решению ключевых задач. На уроках-практикумах половина учебного времени отводится на самостоятельную работу учащихся, направленную на осознание двух основных методов и многообразия приемов решения дробно-рациональных уравнений.

При решении ключевых задач особое внимание следует уделять обсуждению рациональности и обоснованию возможности применения того или иного приема решения уравнения. Например, перед сокращением каждой дроби уравнений 13 и 14 надо убедиться, что $x = 0$ не является корнем данного уравнения, а при решении уравнения 16 введением двух переменных надо обосновать, почему они отличны от нуля. На заключительном занятии полезно выполнить ряд заданий на поиск ошибок в решении уравнений и на определение наиболее рационального первого шага решения.

УЧЕБНО-ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЗАНЯТИЙ

Ключевые задачи

(тема 1: *задачи 1–5*; тема 2: *задачи 6–17*; тема 3: *задачи 18–23*)

Решите уравнения:

1. $\dfrac{x+0{,}5}{9x+3}+\dfrac{8x^2+3}{9x^2-1}=\dfrac{x+2}{3x-1}$.

2. $\dfrac{x-1}{x^3+3x^2+x+3}+\dfrac{1}{x^4-1}=\dfrac{x+2}{x^3+3x^2-x-3}$.

3. $\dfrac{5}{x^2+x-6}+\dfrac{3}{x^2-9}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}=0$.

4. $\dfrac{x-3}{x-1}+\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x+6}{x+2}+\dfrac{x-6}{x-2}$.

5. $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x-3}{x+3}+\dfrac{x+4}{x-4}=4$.

6. $\dfrac{6}{x^2+3x+2}+\dfrac{8}{x^2+3x-4}=1$.

7. $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}-\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$.

8. $\dfrac{x^2+x-5}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-5}=-4$.

9. $x^2+\dfrac{25x^2}{(5+2x)^2}=\dfrac{74}{49}$.

10. $6x^2+5x-38+\frac{6}{x^2}+\frac{5}{x}=0$.

11. $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$.

12. $\frac{x^4+25}{5x^2}-3\frac{x^2+5}{x}-18=0$.

13. $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{3x}{x^2-8x+15}$.

14. $\frac{24x}{2x^2-3x+4}-\frac{12x}{x^2+x+2}=5$.

15. $2x+1+\frac{4x^4}{2x+1}=5x^2$.

16. $5\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-44\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2-12\frac{x^2-4}{x^2-1}=0$.

17. $\frac{5x-x^2}{x+1}\left(x+\frac{5-x}{x+1}\right)=6$.

В зависимости от значений параметра a решить уравнение:

18. $\frac{a}{(x-2)(x+3)}+\frac{a+1}{x^2-9}+\frac{a+2}{(x-2)(x-3)}=0$.

19. $\frac{(k+2)x^2}{(k+1)(x-2)}-\frac{2kx}{(k-1)(x-2)}=\frac{5}{k^2-1}+\frac{12-k^2-k}{(k^2-1)(x-2)}$.

20. $\frac{x-a}{x-1}+\frac{x+a}{x+1}=\frac{x-2a}{x-2}+\frac{x+2a}{x+2}-\frac{6(a-1)}{5}$.

21. $\frac{4x+a}{2x-a}-\frac{3x-a}{x+a}=\frac{10a-2x}{2x+a-a^2}$.

22. $\frac{2x+1}{x}+\frac{4a^2x}{2x+1}=5a$.

23. $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=a$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите уравнение, умножив обе части уравнения на общий знаменатель дробей:

   1.1. $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{8}{x^3-4x}$;

   1.2. $\frac{x^2}{x^2-4}+\frac{x+1}{2(x-2)}=\frac{1}{2-x}+\frac{1}{x+2}$.

2. Решите уравнение, выделив целую часть у каждой дроби:

   2.1. $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-4}{x+5}-\frac{x-5}{x+6}$;

   2.2. $\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}$.

3. Решите уравнение, сделав подстановку:

   3.1. $\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{2}{x^2-2x+3}=\frac{6}{x^2-2x+4}$;

   3.2. $\frac{x^2-3x-6}{x}-\frac{8x}{x^2-3x-6}=-2$;

   3.3. $7\left(\frac{x^2+9}{3x}\right)-2\left(\frac{x^4+81}{9x^2}\right)=9$;

   3.4. $3x^2-2x+4-\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}=0$.

4. Решите уравнение, выделив полный квадрат и сделав подстановку:

   4.1. $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=90$;

4.2. $x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=3$.

5. Решите уравнение, сократив дроби на x и сделав подстановку:

5.1. $\dfrac{4x}{x^2+x+3}+\dfrac{5x}{x^2-5x+3}=-\dfrac{3}{2}$;

5.2. $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\dfrac{3x}{x^2-8x+15}$.

6. Решите уравнение, сделав подстановку $t=x^2+a$, где a – некоторое число:

6.1. $\dfrac{x^2-6x-9}{x}=\dfrac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}$;

6.2. $\dfrac{x^2-3x+1}{x}+\dfrac{2x}{x^2-2x+1}=\dfrac{7}{2}$.

7. Решите уравнение, введя две новые неизвестные:

7.1. $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+48\dfrac{x^2-4}{x^2+4}=0$;

7.2. $x\cdot\dfrac{6-x}{x+1}\left(x+\dfrac{6-x}{x+1}\right)=5$.

8. Решите уравнение:

8.1. $\dfrac{7}{x^2+x+1}-\dfrac{16}{x^2+x+2}=-1$;

8.2. $\dfrac{x^4}{(2x+3)^2}-\dfrac{2x^2}{2x+3}+1=0$;

8.3. $\dfrac{2x}{4x^2+3x+8}+\dfrac{3x}{4x^2-6x+8}=\dfrac{1}{6}$;

8.4. $\dfrac{x^2-2x+35}{x^2-25}=\dfrac{6x^3-7x}{x^2-5x}+\dfrac{6x^2}{3-x}$;

8.5. $\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{x+6}{x+3}+\dfrac{x+10}{x+5}=6$;

8.6. $\dfrac{2x}{3x^2-x+2}-\dfrac{7x}{3x^2+5x+2}=1$;

8.7. $x^2+\dfrac{36}{x^2}=\dfrac{112}{5}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}\right)$;

8.8. $\dfrac{(x-10)^2}{x^2-13x+30}+\dfrac{x^3+27}{x^2-9}=0$;

8.9. $\dfrac{2x}{x^2+x-2}+\dfrac{5x}{x^2+2x-2}=\dfrac{8}{3}$;

8.10. $4x^2+12x+\dfrac{12}{x}+\dfrac{4}{x^2}=47$;

8.11. $x^2+\dfrac{9x^2}{(3+x)^2}=7$;

8.12. $\dfrac{x}{2x-6}+\dfrac{3}{x^2-6x+9}=\dfrac{x-2}{3x-9}$;

8.13. $4x^2+\dfrac{1}{x^2}=2x+6-\dfrac{1}{x}$;

8.14. $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1$;

8.15. $\dfrac{2x^2+x+2}{3x^2-x+3}=\dfrac{2x^2-3x+2}{x^2-x+1}$;

8.16. $x^2+\dfrac{4x^2}{(x+2)^2}=5$;

8.17. $\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{3x-1}{x+2}=\dfrac{x-7}{x-1}+4$;

8.18. $31\left(\dfrac{24-5x}{x+1}+\dfrac{5-6x}{x+4}\right)+370=29\left(\dfrac{17-7x}{x+2}+\dfrac{8x+55}{x+3}\right)$;

8.19. $\frac{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)^2+x^2}{x^2\left(x^2+1\right)+1}=\frac{x^2+1}{x}$;

8.20. $\frac{x+6}{x-6}\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2+\frac{x-6}{x+6}\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2=2\frac{x^2+36}{x^2-36}$;

8.21. $\left(\frac{4+x}{9-x}\right)^2-3\left(\frac{4-x}{9+x}\right)^2=2\left(\frac{16-x^2}{81-x^2}\right)$;

8.22. $3\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2+5\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2=8\left(\frac{x^2-9}{x^2-1}\right)$.

9. В зависимости от значений параметра a решить уравнение:

9.1. $1+\frac{5a-3}{x-a}=\frac{5\left(2a+1\right)\left(1-a\right)}{\left(x-a\right)\left(x-3a+1\right)}$;

9.2. $\frac{x^2+1}{a\left(ax-2\right)}+\frac{1}{ax-2}-\frac{x}{a}=0$;

9.3. $\frac{x^2+ax+a^2}{x^2-ax+a^2}=\frac{a^2}{x^2}$;

9.4. $\frac{3ax-5}{\left(a-1\right)\left(x+3\right)}+\frac{3a-11}{a-1}=\frac{2x+7}{x+3}$;

9.5. $\frac{x}{2a+x}-\frac{2a+x}{x-2a}=\frac{16a^2}{4a^2-x^2}$;

9.6. $\frac{a+3}{a+2}=\frac{2}{x}-\frac{5}{\left(a+2\right)x}$;

9.7. $\frac{x}{2a}+\frac{2}{a-2}=\frac{3x-2a}{2\left(x-2\right)}$;

9.8. $\frac{x}{a\left(x+1\right)}-\frac{2}{x+2}=\frac{3-a^2}{a\left(x+1\right)\left(x+2\right)}$;

9.9. $\frac{x}{x-a}+\frac{1}{x+a}+\frac{7}{x^2-a^2}=0$.

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЗАНЯТИЯ

Определение 1.

Функция вида $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, где n – натуральное число, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – некоторые действительные числа, называется целой рациональной функцией.

Определение 2.

Уравнение вида $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}+\ldots+\frac{P_m(x)}{Q_m(x)}=0$, где $P_1(x)$, $P_2(x)$,…, $P_m(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$,…, $Q_m(x)$ – целые рациональные функции, называется дробно-рациональным уравнением.

Основные методы решения дробно-рациональных уравнений

1. Переход к равносильной системе $\begin{cases}P(x)=0,\\ Q(x)\neq 0,\end{cases}$ где $P(x)$ – целая рациональная функция, полученная умножением обеих частей уравнения на $Q(x)$ – общий знаменатель дробей исходного уравнения, при условии, что он отличен от нуля.

2. Приведение уравнения к виду $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ и переход к равносильной системе $\begin{cases}P(x)=0,\\ Q(x)\neq 0,\end{cases}$ где $P(x)$ и $Q(x)$ – целые рациональные функции, причем $Q(x)$ – общий знаменатель дробей исходного уравнения.

Иногда перед применением первого или второго метода полезно выделить целую часть каждой дроби исходного уравнения.

3. Замена неизвестной.

Иногда эта замена очевидна, а иногда сначала полезно выделить полный квадрат или, если $x=0$ – не корень уравнения, сократить каждую дробь исходного уравнения на x. Можно ввести две новые неизвестные и т.д.

Рассмотрите уравнение в следующей таблице и постарайтесь объяснить, почему наиболее рациональным первым шагом решения будет указанный. В скобках указан номер, под которым данное уравнение можно найти среди ключевых задач.

№ п/п	Решить дробно-рациональные уравнения	Наиболее рациональный первый шаг решения
1.	$\frac{x+0{,}5}{9x+3}+\frac{8x^2+3}{9x^2-1}=\frac{x+2}{3x-1}$ (1)	Умножение обеих частей уравнения на общий знаменатель дробей при условии, что он отличен от нуля
2.	$\frac{x-3}{x-1}+\frac{x+3}{x+1}=\frac{x+6}{x+2}+\frac{x-6}{x-2}$ (4)	Выделение целой части у каждой дроби
3.	$\frac{6}{x^2+3x+2}+\frac{8}{x^2+3x-4}=1$ (6)	Замена неизвестной
4.	$x^2+\frac{25x}{(5+2x)^2}=\frac{74}{49}$ (9)	Выделение полного квадрата
5.	$\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{3x}{x^2-8x+15}$ (13)	Сокращение каждой дроби на x
6.	$\frac{24x}{2x^2-3x+4}-\frac{12x}{x^2+x+2}=5$ (14)	Подстановка вида $t=x^2+a$, где a – некоторое число
7.	$5\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-44\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2-12\frac{x^2-4}{x^2-1}=0$ (16)	Введение двух новых неизвестных

Дробно-рациональное уравнение может иметь конечное или бесконечное множество корней, а может и не иметь корней.

Рассмотрим, например, четыре похожих уравнения:

1) $\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{1}{(x+2)(x+1)}$;

2) $\frac{-4}{x^2-4}+\frac{3}{(x-2)(x+1)}=\frac{1}{(x+2)(x+1)}$;

3) $\frac{2}{x^2-4}+\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{3}{(x+2)(x+1)}$;

4) $\frac{8}{x^2-4}+\frac{-6}{(x-2)(x+1)}=\frac{2}{(x+2)(x+1)}$.

Внешне эти уравнения похожи друг на друга. Область определения уравнений одна и та же: $x \neq -2;\ -1;\ 2$. Однако, как мы сейчас убедимся, ведут они себя совершенно по-разному. Попробуем преобразовать все эти уравнения одновременно. Так как они отличаются друг от друга только коэффициентами в числителях дробей, обозначим их буквами: $\frac{a}{x^2-4}+\frac{b}{(x-2)(x+1)}=\frac{c}{(x+2)(x+1)}$ и умножим обе части полученного уравнения на общий знаменатель дробей $(x^2-4)(x+1)$ при условии, что он отличен от нуля. Получим систему, равносильную уравнению:

$$\begin{cases} a(x+1)+b(x+2)=c(x-2), \\ x \neq -2;\ -1;\ 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (a+b-c)x=-a-2b-2c, \\ x \neq -2;\ -1;\ 2. \end{cases}$$

Подставим конкретные значения коэффициентов *a, b* и *c,* решим каждое уравнение.

1) $a=1$, $b=1$, $c=1$. Получаем систему $\begin{cases} x=-5, \\ x \neq -2;\ -1;\ 2. \end{cases}$

Ответ: $x=-5$ (уравнение имеет единственный корень).

2) $a=-4$, $b=3$, $c=1$. Получаем систему $\begin{cases} -2x=-4, \\ x \neq -2;\ -1;\ 2, \end{cases}$ которая решений не имеет.

Ответ: нет корней (найденный корень оказался посторонним).

3) $a=2$, $b=1$, $c=3$. Получаем систему $\begin{cases} 0x=-10, \\ x \neq -2;\ -1;\ 2, \end{cases}$ которая решений не имеет.

Ответ: нет корней.

4) $a=8$, $b=-6$, $c=2$. Получаем систему $\begin{cases} 0x=0, \\ x \neq -2;\ -1;\ 2. \end{cases}$

Ответ: x – любое число, кроме –2; –1; 2.

Найдите ошибку в решении следующих уравнений:

1. $\dfrac{x^2-2x}{x-1}-1=\dfrac{1}{1-x}$.

Решение. Запишем уравнение в виде: $\dfrac{x^2-3x+1}{x-1}=\dfrac{-1}{x-1}$. Отсюда получим уравнение $x^2-3x+1=-1$, корни которого $x_1=2$ и $x_2=1$.

Ответ: 1; 2.

2. $\dfrac{x^3+1}{x+1}+\dfrac{x^2-1}{x^2+6x+5}=\dfrac{5}{2}$.

Решение. Запишем уравнение в виде:

$\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}+\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+5)}=\dfrac{5}{2}$. Сократим каждую дробь в левой части на $(x+1)$: $x^2-x+1+\dfrac{x-1}{x+5}=\dfrac{5}{2}$. Умножим обе части уравнения на $(x+5)$ при условии, что $x+5\neq 0$, и получим равносильную систему

$$\begin{cases}2x^3+8x^2-11x-17=0,\\ x\neq -5.\end{cases}$$

Проверкой убедимся, что $x=-1$ – корень уравнения системы.

Выполним деление:

$$\begin{array}{l|l}
2x^3+8x^2-11x-17 & x+1 \\ \cline{2-2}
2x^3+2x^2 & 2x^2+6x-17 \\ \cline{1-1}
\quad 6x^2-11x & \\
\quad 6x^2+6x & \\ \cline{1-1}
\qquad -17x-17 & \\
\qquad -17x-17 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0. &
\end{array}$$

Уравнение системы примет вид: $(x+1)(2x^2+6x-17)=0$. Все его корни $x_1=-1$, $x_{2,3}=-3\pm\sqrt{43}$ отличны от 5.

Ответ: –1; $-3\pm\sqrt{43}$.

3. $\dfrac{x^2+2x}{x+6}+2\dfrac{x^2+2x}{x-6}=45\dfrac{x+2}{x^2-36}$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $(x+2)$:

$\dfrac{x}{x+6}+\dfrac{2x}{x-6}=\dfrac{45}{x^2-36}$. Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}x^2+2x-15=0,\\ x\neq \pm 6.\end{cases}$$

Ответ: –5; 3.

4. $\dfrac{x^2-10x+5}{x^2-6x+5}=\dfrac{5+x^2}{x^2-8x+5}$.

Решение. Сократим каждую дробь на x: $\dfrac{x-10+\frac{5}{x}}{x-6+\frac{5}{x}}=\dfrac{x+\frac{5}{x}}{x-8+\frac{5}{x}}$.

Сделаем подстановку $t=x+\dfrac{5}{x}$, получим уравнение $\dfrac{t-10}{t-6}=\dfrac{t}{t-8}$, которое равносильно системе $\begin{cases}(t-10)(t-8)=t(t-6),\\ t\neq 6,\ t\neq 8,\end{cases}$ откуда $t=\dfrac{20}{3}$.

Возвращаясь к неизвестной ***x***, получаем уравнение $x+\dfrac{5}{x}=\dfrac{20}{3}$, равносильное системе $\begin{cases}3x^2-20x+15=0,\\ x\neq 0.\end{cases}$

Ответ: $10\pm\sqrt{55}$.

Комментарии к заданиям с ошибкой в решении

1. $\dfrac{x^2-3x+1}{x-1}=\dfrac{-1}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0, \\ x\neq 1. \end{cases}$

Ответ: 2.

2. Сократить дроби можно было только при условии, что $x+1\neq 0$. Значит, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x^3+8x^2-11x-17=0, \\ x\neq -1, \quad x\neq -5. \end{cases}$$

Ответ: $-3\pm\sqrt{43}$.

3. Разделив обе части уравнения на $(x+2)$, потеряли корень $x=-2$.

Верное решение: $(x+2)\left(\dfrac{x}{x+6}+\dfrac{2x}{x-6}-\dfrac{45}{x^2-36}\right)=0$.

Ответ: –5; –2; 3.

4. Перед сокращением дробей на x надо было установить, является ли корнем уравнения $x=0$. В данном случае мы потеряли корень $x=0$.

Ответ: 0; $10\pm\sqrt{55}$.

Можно было сделать подстановку $t=x^2+5$:

$$\frac{t-10x}{t-6x}=\frac{t}{t-8x} \Leftrightarrow \begin{cases} -3tx+20x^2=0, \\ t\neq 6x, \quad t\neq 8x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ t=\dfrac{20x}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ x^2+5=\dfrac{20x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ 3x^2-20x+15=0. \end{array}\right.$$

Ответ: 0; $10\pm\sqrt{55}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Званич Л. И. Сборник задач по алгебре для 8–9 классов: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики. – М.: Просвещение, 1994.

2. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Алгебраический тренажер: Пособие для школьников и абитуриентов. – М.: Илекса; Харьков: Гимназия, 1998.

3. Нестеров С. В. Повторение и углубление школьного курса алгебры: Задачник-практикум. – М.: УНЦ ДО, 2000.

4. Сборник задач по математике для поступающих во втузы: Учеб. пособие / Под ред. М. И. Сканави. – М.: ООО «Гамма – С. А.», 1999.

5. Рурукин А. Н. Пособие для интенсивной подготовки к выпускному, вступительному экзаменам и ЕГЭ по математике. – М.: ВАКО, 2004.

6. Черкасов О. Ю., Якушев А. Г. Математика: Интенсивный курс подготовки к экзамену. – М.: Рольф, 2000.

7. Амелькин В. В., Рабцевич В. Л. Задачи с параметрами: Справ. пособие по математике. – Минск: ООО «Асар», 2002.

8. Башмаков М. И., Резник Н. А. Задачник по алгебре для 7 класса общеобразовательной школы.– СПб.: Изд-во «Информатизация образования», 2001.

9. Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г. Алгебра: Доп. главы к шк. учеб. 8 кл.: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики / Под ред. Г. В. Дорофеева. – М.: Просвещение, 1998.

ЧЕТНОСТЬ, АНАЛОГИ ЧЕТНОСТИ И ГРАФЫ

Г. А. Маничева*, учитель математики МОУ «СОШ № 32» г. Вологды, Заслуженный учитель РФ*

Пояснительная записка

Цель элективного курса: расширить знания учащихся путем введения дополнительных сведений из элементарной математики, что будет способствовать осознанному выбору профиля обучения, связанного с математикой.

Задачи:

– выделить общие подходы к решению задач;

– показать методы решения задач и научить пользоваться ими;

– научить объяснять решения задач последовательно и непротиворечиво;

– развивать интерес учащихся к нестандартным и оригинальным способам решения математических задач.

В процессе обучения учащиеся приобретают следующие конкретные *умения:*

– находить подходы к решению нестандартных задач;
– находить главное из условия задачи;
– исследовать задачу с изменением условий;
– выдвигать гипотезы;
– делать выводы;
– обсуждать результаты задачи, участвовать в дискуссии;
– быстро решать задачи и корректно описывать рассуждения;
– сосредотачиваться на решении;
– достаточно долго находиться в состоянии напряженной умственной деятельности.

Перечисленные умения формируются на основе следующих *знаний:*

– способов решения нестандартных задач;
– ключевых тематических задач;
– свойств и признаков делимости;
– свойств четности, кратности;

Курс построен на понятии четного и нечетного числа, использования таких идей и методов, как принцип крайнего, разбиение на пары, чередование, сведение задач с больших чисел на маленькие. Данный материал в базовом курсе математики не представлен, хотя идея четности, которая здесь рассматривается, используется в решении очень многих задач, как олимпиадного типа, так и в задачах обычного школьного курса.

Ученик получает зачет (оценка не ниже «4») при условии выполнения не менее 3 обязательных самостоятельных работ в установленные сроки, при этом учитываются также оценки за конкурсы.

Дополнительные баллы выставляются за любое из названных *условий:*

– Качественное выполнение дополнительного задания по инициативе ученика.

– Использование интернет-технологии при презентации дополнительного задания.

– Публичная презентация своей работы по данной теме в школе или за ее пределами (конкурс, смотр, публикация и т.п.).

– Проведение полного исследования по выбранной задаче.

В зачет идут успехи учащихся, достигнутые на протяжении всего периода обучения. Динамика интереса в процессе изучения курса будет фиксироваться по результатам анкетирования на первом и последнем занятиях.

Предполагается проведение занятий следующих *видов:*

– тематические, на которых школьники знакомятся с какими-то новыми понятиями;

– тренинги – занятия, на которых учащиеся выбирают уровень задач и порядок их решения;

– соревнования, которые преследуют две основные цели: закрепление материала и конкурс.

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

Определение четного и нечетного числа. Запись четного и нечетного числа в общем виде. Общий вид числа, кратного данному. Свойства четности суммы. Свойства знака произведения. Комбинированные задачи на четность. Аналоги четности: чередование, разбиение на пары. Игры. Инварианты, связанные с четностью. Раскраска.

Понятие графа. Теория графов. Связный и несвязный граф. Петля. Простой и полный граф. Степени вершин и подсчет числа ребер. Теорема о числе нечетных вершин графа. Свойство связных графов. Эйлеров граф.

Примерное тематическое планирование

№ урока	Тема	Количество часов
1	Определение четного и нечетного числа. Запись четного и нечетного числа в общем виде. Общий вид числа, кратного данному	1
2	Свойства четности суммы	1
3	Свойства знака произведения	1
4	Комбинированные задачи на четность. Тренинг	1
5	Аналоги четности: чередование	1
6–7	Аналоги четности: разбиение на пары	2
8	Занятие-тренинг	1
9	Игры	1
10	Инварианты, связанные с четностью	1
11	Раскраска	1
12	Понятие графа. Теория графов. Связный и несвязный граф	1
13	Петля. Простой и полный граф	1
14–15	Степени вершин и подсчет числа ребер. Теорема о числе нечетных вершин графа	2
16	Свойство связных графов. Эйлеров граф	1
17	Занятие-тренинг	1

ЛИТЕРАТУРА

1. Баженов И. И., Порошкин А. Г., Тимофеев А. Ю., Яковлев В. Д. Задачи для школьных математических кружков. – Сыктывкар, 1994.
2. Березина Л. Ю. Графы и их применения. – М.: Просвещение, 1979.
3. Болтянский В. Г. Плоские графы // Квант. – № 7. – 1981. – С. 11.
4. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Математический кружок (1-й год обучения). – СПб., 1992.
5. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки (1-й и 2-й год обучения). – Киров: АСА, 1994.
6. Гусев В. А., Орлов И. А., Розенталь А. Л. Внеклассная работа по математике в 6–8 классах. – М.: Просвещение, 1984.
7. Ионин Ю., Курляндчик Л. Поиск инварианта // Квант. – № 2. – 1976.– С. 32.
8. Ковальджи А. К. Четность. Метод, разработка. – М., 1993.
9. Мерзляков А. С. Факультативный курс по математике (1-й год обучения). – Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 2002.
10. Мерзляков А. С. Четность и аналоги четности. – Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 2002.
11. Спивак А. В. Тысяча и одна задача по математике. – М.: Просвещение, 2002.
12. Толпыго А. Инварианты // Квант. – № 12. – 1976. – С. 19.

БАНК ЗАДАЧ

К урокам 1–2

1. Можно ли во множестве нечетных чисел найти делимое, делитель, частное и остаток?

Решение. Нельзя, так как если делитель, неполное частное и остаток нечетны, то тогда делимое должно быть четным.

2. Можно ли в выражении $1 * 2 * 3 * \ldots * 13 * 14$ заменить «*» на «+» и «–» так, чтобы в результате получился 0?

Решение. Расставим как-либо знаки, а затем заменим все знаки «+» на «–». Согласно первому факту, четность результата не изменится. После замены мы получим $1+2+\ldots+14=15x7$– нечетное число. Значит, первоначальное число также было нечетное и, следовательно, это не мог быть 0.

Можно было заметить сразу, что в наборе нечетное число нечетных чисел, поэтому сумма должна быть нечетной.

3. Доказать, что если произведение 1989 чисел есть число нечетное, то сумма этих чисел также нечетное число.

Решение. Если произведение всех этих чисел нечетно, тогда какими будут числа? Очевидно, что каждое из чисел – нечетное число. А сумма нечетного

числа нечетных чисел – нечетна, так как лишь парами, т. е. когда общее количество нечетных чисел четно, они в сумме составляют четное число.

Заметим, что если задача не решается с 1989 множителями, то ее можно начать решать, когда рассматривается произведение трех множителей, затем пяти множителей, а затем перейти к 1989 множителям. Таким образом, идею решения данной задачи можно найти, решая задачу с меньшим числом множителей.

4. Доказать, что если сумма 1972 чисел есть число нечетное, то произведение этих чисел четно.

Решение. Если сумма 1972 чисел нечетна, тогда могут ли быть все числа нечетны? Не могут! Так как сумма четного числа нечетных чисел четна. А у нас число нечетное. Поэтому хотя бы одно из чисел будет четным. Значит, и произведение всех чисел будет четным.

5. Можно ли разменять 25 рублей при помощи десяти купюр достоинством 1, 3 и 5 рублей?

6. В парламенте некоторой страны две палаты, имеющие равное число депутатов. В голосовании по важному вопросу приняли участие все депутаты, причем воздержавшихся не было. Когда председатель сообщил, что решение принято с преимуществом в 23 голоса, лидер оппозиции заявил, что результаты голосования сфальсифицированы. Как он это понял?

7. Резидент одной иностранной разведки сообщил в центр о готовящемся подписании ряда соглашений между пятнадцатью бывшими республиками СССР. Согласно его донесению, каждая из них заключила договор ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?

8. В выражении $* 1 * 2 * 3 * \ldots * 9$ звездочки заменяют на «–» или «+»

а) Может ли получиться 0?

б) Может ли получиться 1 ?

с) Какие числа могут получиться?

9. Четно или нечетно число $1 + 2 + 3 + \ldots + 1990$?

10. На доске написано в строку 1993 целых числа. Доказать, что из них можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет четной. Верно ли это для 1992 чисел?

11. Можно ли разменять купюру в 50 рублей при помощи тридцати одной купюры достоинством в 1 и 5 рублей.

12. Какие деньги, не превосходящие 50 рублей (допускаем, что есть купюры произвольного целочисленного достоинства), мы можем разменять с помощью четного числа купюр достоинством в 1, 3 и 5 рублей?

13. Можно ли разменять 500 рублей при помощи 151 купюры достоинством в 1, 5 и 10 рублей?

14. Придумайте четыре целых числа, сумма и произведение которых являются нечетными числами.

15. Разность двух натуральных чисел умножили на их произведение. Может ли получиться число 45 045?

16. Доказать, что сумма двух последовательных нечетных чисел делится на 4 и каждое число, делящееся на 4, можно представить в виде суммы двух последовательных нечетных чисел.

17. Обозначим через А сумму трех последовательных натуральных чисел, а через В сумму следующих трех натуральных чисел. Может ли произведение А х В равняться 111 111 111?

18. Можно ли представить 1 в виде суммы 1000 дробей, числители которых равны 1, а знаменатели – нечетные числа?

19. Натуральное число сложили с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке. Могло ли получиться в результате число, записываемое 1993 девятками?

20. В натуральном числе произвольно переставили цифры. Может ли сумма полученного числа с исходным равняться 999... 999 (1995 девяток)?

К урокам 3–4

1. Произведение шести чисел, каждое из которых есть 1 или –1, равно 1. Доказать, что их сумма не равна нулю. Решение. Будем решать задачу методом от противного. Если сумма шести чисел равна 0, то в сумме три «–1» и три «+1». Но тогда их произведение равно –1. А у данных шести чисел произведение равно 1. Противоречие, значит, предположение о том, что сумма всех шести чисел равна 0, неверно. Следовательно, она не равна 0.

2. Произведение 22-х чисел, каждое из которых есть 1 или –1, равно 1. Доказать, что их сумма не равна нулю.

3. В каждой клетке квадратной таблицы 101 х 101 записано число 1 или –1. Доказать, что сумма 202 произведений чисел в строках и столбцах не равна 0.

4. В вершинах куба расставили числа 1 или –1. Затем в центре каждой грани поставили числа, равные произведению всех чисел, стоящих в этой грани, т. е. в четырех вершинах квадрата, образующего эту грань. Доказать, что сумма всех 14-ти чисел не может равняться нулю.

5. В вершинах n-угольника стоят числа 1 и –1. На каждой стороне написано произведение чисел на ее концах. Оказалось, что сумма чисел на сторонах равна нулю. Доказать, что а) n четно; б) n делится на 4.

6. Во время перемирия за круглым столом разместились рыцари из двух враждующих станов. Оказалось, что число рыцарей, справа от которых сидит враг, равно числу рыцарей, справа от которых сидит друг. Доказать, что общее число рыцарей делится на 4.

7. В некотором царстве, в некотором государстве на чудо-яблоне выросло 45 бананов и 20 ананасов. Каждый день садовник срывает два плода, и на их месте вырастает новый. При этом если он срывает 2 одинаковых плода, то вырастает ананас, а если 2 разных – банан. Может ли последний плод, который останется на этом дереве, оказаться ананасом?

8. На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стаканов стоят правильно, а один перевернут донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые 4 стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

9. Требуется перевернуть вверх дном 10 чашек, следуя правилу: за один ход разрешается перевернуть ровно 9 чашек (любых). Как за несколько ходов это сделать? А если чашек было 11 и переворачивать можно 10?

10. На доске написано в строку 2005 целых чисел. Докажите, что можно стереть одно из них так, что сумма оставшихся чисел будет четной. Верно ли это для 2006 целых чисел?

К уроку 5

Основные используемые свойства:

1. При чередовании по кругу элементов двух типов элементов обоих типов равное число.
2. При чередовании в ряд элементов двух типов количество элементов разных типов отличается не более чем на 1.

Задачи:

1. Катя и ее друзья встали по кругу. Оказалось, что оба соседа каждого ребенка – одного пола. Мальчиков среди Катиных друзей – пять. А сколько девочек в кругу?

Решение. Соседи Кати – мальчики. Соседи этих мальчиков – девочки. Таким образом, происходит чередование мальчиков и девочек. Следовательно, число мальчиков в круге равно числу девочек: по пять человек. Значит, в кругу пять девочек.

2. По кругу на плоскости расположены 9 шестеренок так, что первая сцеплена со второй, вторая с третьей и т. д., девятая с первой. Могут ли эти шестеренки вращаться?

Решение. Понятно, что происходит чередование направления движения у двух соседних шестеренок. Таким образом, у 1, 3, 5,..., 9-й шестеренки направления движения должны быть одинаковы. Однако 1-я и 9-я шестеренки – «соседи». Значит, вся система не может вращаться.

3. По кругу стоят 20 корзин. Можно ли разложить в них 99 арбузов, чтобы количества арбузов в любых двух соседних корзинах отличались бы ровно на 1?

Решение. Если в какой-то из корзин четное число арбузов, то в соседних – по нечетному числу арбузов. Таким образом, корзины с четным и нечетным количеством арбузов чередуются. Значит, ровно 10 корзин содержат по четному числу арбузов и ровно 10 корзин содержат по нечетному числу арбузов. Следовательно, общее число арбузов должно быть четно. А у нас 99. Следовательно, такого быть не может.

4. За круглым столом сидит 1991 представитель четырех племен: люди, гномы, эльфы и гоблины. Известно, что люди никогда не сидят рядом с гоблинами, а эльфы никогда не сидят рядом с гномами. Докажите, что какие-то два представителя одного и того же племени сидят рядом.

Решение. Предположим, что это не так, т.е. рядом сидят только представители разных племен. Наденем на людей и гоблинов красные шапки, а на эльфов и гномов – синие. Из условия задачи и нашего предположения следует, что цвета шапок чередуются по кругу. Но из-за нечетности их общего количества это невозможно. Мы пришли к противоречию.

5. Может ли прямая, не содержащая вершин замкнутой несамопересекающейся 11-звенной ломаной, пересекать все ее звенья?

Решение. Если мы будем двигаться по построенной прямой, которая пересекает все стороны данной фигуры, ограниченной 11-звенной замкнутой ломаной, то каждый раз, пересекая сторону данной фигуры, мы будем находиться то вне фигуры, то снаружи. Таким образом, имеет место чередование: вне-внутри-вне-внутри... и т. д. Так как прямая обязательно «выйдет» из данной фигуры, то последним будет положение вне. Значит число переходов (т. е. число сторон, которое пересекает прямая) будет четным. Следовательно (так как в n-угольнике число вершин равно числу сторон), количество вершин n-угольника также должно быть четным. Заметим, что если прямая самопересекающаяся, то понятие «внутри» и «снаружи» для нее не имеет смысла.

6. Конь вышел с поля a1 шахматной доски и через несколько ходов вернулся в него. Докажите, что он сделал четное число ходов.

Решение. Обратим внимание на раскраску шахматной доски. Конь каждым своим ходом меняет цвет поля, на котором находился! Поэтому он возвращается на поля черного цвета (поле a1 – черное: такова раскраска шахматной доски) только через четное число ходов.

7. На хоккейном поле лежат три шайбы A, B и C. Хоккеист бьет по одной из них так, что она пролетает между двумя другими. Так он делает 25 раз. Могут ли после этого все шайбы оказаться на исходных местах?

8. На плоскости расположено 13 шестеренок по цепочке. Может ли эта система вращаться?

9. Может ли конь пройти с поля a1 до поля в8, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

10. Можно ли расположить по окружности 2005 красных и синих шариков так, чтобы любые два рядом лежащие шарика были разноцветны?

11. Можно ли расположить по окружности 1996 красных, зеленых и синих шариков так, чтобы любые три рядом лежащие шарика были разноцветны?

12. Может ли прямая, не проходящая через вершины несамопересекающегося 1001-угольника, пересекать каждую его сторону?

13. Может ли прямая, не содержащая вершин замкнутой 11-звенной ломаной, пересекать все ее звенья?

14. Можно ли расставить по кругу 1995 различных натуральных чисел так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было бы простым числом?

15. 25 мальчиков и 25 девочек сидят за круглым столом. Докажите, что у кого-то из них оба соседа – мальчики.

16. Три кузнечика A, B и C играют на прямой в чехарду. Каждый раз один из них прыгает через другого (но не сразу через двух). Могут ли они через 1991 прыжок оказаться на прежних местах?

17. В левом нижнем углу шахматной доски, а также на соседнем сверху поле и на соседнем справа поле стоит по белой ладье. Разрешается делать ходы по обычным правилам, однако после любого хода каждая ладья должна быть под защитой какой-нибудь другой ладьи. Можно ли за несколько ходов переставить эти три ладьи так, чтобы каждая попала на поле, симметричное исходному относительно диагонали, соединяющей правый нижний и левый верхний углы доски?

18. За круглым столом сидят математики и астрологи, всего 12 человек. Математики всегда говорят правду, а астрологи всегда врут. Каждый сидящий за столом сказал: «Справа от меня сидит астролог». Сколько математиков сидит за столом?

19. Можно ли расставить по окружности 20 красных и несколько синих фишек так, чтобы в каждой точке, диаметрально противоположной красной фишке, стояла синяя фишка, и никакие две синие фишки не стояли рядом?

К урокам 6–8

Теоретические сведения: если элементы двух типов можно разбить на пары по представителю каждого типа в паре, то количество элементов обоих типов одинаково, в противном случае количество элементов разных типов различно.

Задачи:

1. Можно ли доску размером 5 х 5 заполнить доминошками размером 1 х 2?

Решение. Понятно, что любая доминошка занимает ровно 2 клетки, т. е. при полном покрытии доминошками мы можем разбить все клетки доски на пары, т. е. на доске должно быть четное число клеток. Однако это не так. Значит, покрыть нельзя.

2. Весь комплект домино выложили по правилам игры в ряд. Известно, что первой стоит пятерка. Какая цифра стоит последней?

Решение. Во-первых отметим, что на всех доминошках ровно 8 клеток с чистым («пустым») полем, 8 – с единицей, 8 – с двойкой, ..., 8 – с шестью. После того как мы разложим все доминошки в ряд, несложно понять,что все цифры на них разбиваются на пары. Так как каждой из цифр 0, 1, 2,..., 6 четное количество, то для всех цифр, кроме пятерки, которая стоит с края, будет пара. Следовательно, последней цифрой будет 5.

3. В клетках квадратной таблицы 25 х 25 расставлены 25 шашек так, что в клетке стоит не более 1 шашки. Оказалось, что шашки расположены симметрично относительно диагонали, соединяющей левый верхний и правый нижний углы. Доказать, что на диагонали стоит хотя бы одна шашка.

Решение. Все шашки, которые не стоят на диагонали, можно разбить на пары шашек, симметричных друг другу относительно диагонали, соединяющей левый верхний и правый нижний углы. Значит, вне этой диагонали стоит четное число шашек. Отсюда следует, что какое-то нечетное (а, следовательно, не нулевое) количество шашек стоит на диагонали.

4. Кузнечик прыгает по прямой – каждый раз на 1 метр вправо или влево. Через некоторое время он оказался в исходной точке. Докажите, что он сделал четное число прыжков.

5. Существует ли замкнутая самопересекающаяся 9-звенная ломаная, которая пересекает каждое свое звено ровно один раз?

6. Каких чисел среди всех целых чисел от 1 до 1 000000 больше и на сколько: делящихся на 5, чья сумма цифр на 5 не делится, или не делящихся на 5, чья сумма цифр на 5 делится?

Ответ: больше тех чисел, которые делятся на 5 и их больше ровно на два числа.

7. Можно ли покрыть шахматную доску доминошками размером 1х2 так, чтобы свободными остались только клетки a1 и n8? (Одна доминошка покрывает ровно две клетки доски.)

8. Можно ли выложить полный набор домино в цепочку так, чтобы любые две соседние клетки разных домино давали в сумме нечетное число?

9. В каждой клетке квадратной таблицы 1965 х 1965 расставлены числа от 1 до 1965 так, что а) в клетках, симметричных относительно диагонали, соединяющей левый верхний и правый нижний углы, расположены одинаковые числа; б) ни в какой строке и ни в каком столбце нет двух одинаковых чисел. Доказать, что все числа на диагонали разные.

10. В клетках квадратной таблицы 25 х 25 расставлено 125 шашек, причем расположены они симметрично относительно диагонали, соединяющей левый верхний и правый нижний углы. Доказать, что на диагонали стоит хотя бы одна шашка.

11. Допустим теперь, что расположение шашек симметрично относительно и второй главной диагонали, соединяющей правый верхний и левый нижний углы. Доказать, что одна из шашек стоит в центральной клетке.

12. В клетках квадратной таблицы 25 х 25 расставлены шашки так, что на каждой горизонтали стоит ровно 5 шашек (в клетке стоит не более 1 шашки). Оказалось, что шашки расположены симметрично относительно диагонали, соединяющей левый верхний и правый нижний углы. Доказать, что на диагонали стоит хотя бы одна шашка. Привести пример такого расположения.

13. Существует ли замкнутая самопересекающаяся 1985-звенная ломаная, которая пересекает каждое свое звено ровно один раз?

14. Докажите, что ось симметрии 1985-угольника обязательно проходит через одну из его вершин.

15. Улитка ползет на плоскости с постоянной скоростью, поворачивая на 90 градусов каждые 15 минут. Доказать, что она может вернуться в исходную точку только через целое число ходов.

16. На 99 карточках пишутся числа 1, 2,..., 99. Затем карточки перемешиваются, раскладываются чистыми сторонами вверх и на чистых сторонах снова пишутся числа 1, 2,..., 99. Для каждой карточки числа, стоящие на ней, складываются и 99 полученных чисел перемножаются. Доказать, что в результате получится четное число.

17. Можно ли из 1977 одинаковых квадратных плиток составить на плоскости замкнутую цепочку (каждая следующая плитка должна иметь общую сторону с предыдущей и не налегать на нее)?

18. Можно ли выпуклый 13-угольник разрезать на параллелограммы?

19. Все натуральные числа от 1 до 100 разбиты на две группы: четные и нечетные числа. Определить, в какой из групп сумма всех цифр, использованных для записи чисел, больше и на сколько?

20. Каких пятизначных чисел больше: четных с суммой цифр, равной 36, или нечетных с суммой цифр, равной 38?

К уроку 9

1. В кучке 100 камней. За один ход разрешается взять 1 или 3 камня. Играют двое, ходят по очереди. Выигрывает тот, кто возьмет последние камни. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Ферзь стоит в левом нижнем углу доски размером m x n. Играют двое и ходят по очереди. За ход его можно сдвинуть на любое число полей вправо или на любое число полей вверх или по диагонали вправо-вверх. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре? Можно рассмотреть случаи, когда доска не совсем обычная, например, есть поля, куда ферзь не может быть поставлен. Кто выигрывает в этом случае? А если доска имеет пространственные размеры, например, куб или произвольный параллелепипед? Кто выиграет в этом случае? (Задача для исследования.)

3. Король стоит в правом верхнем углу доски а) 2 x 2; б) 3 x 3; в) 8 x 8. Разрешается за один ход сдвинуть его вниз или влево. Выигрывает тот, кто поставил короля в левый нижний угол. Кто выиграет при правильной игре? А если в случае в) король стоял на г8?

4. В коробке лежит 300 спичек. За ход можно взять из коробка не более половины имеющихся в нем спичек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто победит при правильной игре?

5. Имеется две кучки камней: 7 и 5. За ход можно брать любое количество камней из одной кучки или поровну камней из обеих кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет и как ему нужно играть, чтобы выиграть?

6. В кучке 25 камней. Игроки берут по очереди 1, 2, 5 или 8 камней. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Кто победит и как ему нужно действовать?

7. На шахматной доске 8 x 8 клеток ставятся две фишки. Два игрока поочередно делают ходы каждый своей фишкой. Фишка первого игрока может при каждом ходе передвигаться лишь на одну клетку по вертикали или горизонтали. Фишка второго передвигается на одну клетку по вертикали или горизонтали, либо на одну клетку по диагонали. Выигрывает тот, кто поставит свою фишку на фишку партнера. Кто выигрывает при правильной игре?

8. Игра начинается с числа а) 12, б) 60. За ход можно уменьшить имеющееся число на любой положительный делитель. Проигрывает тот, кто получит число 0. Кто выиграет в данной игре?

9. Игра начинается с числа 1. Играют двое и ходят по очереди. За ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 2 до 9. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000. Кто выиграет?

10. Игра начинается с числа 2. Играют двое и ходят по очереди. За ход можно прибавить к числу любое натуральное, меньше его. Выигрывает тот, кто получит 1000. Кто выиграет?

11. Игра начинается с числа 1000. Играют двое и ходят по очереди. За ход можно вычесть из имеющегося числа любое, не превосходящее его натуральное число, являющееся степенью двойки. Выигрывает тот, кто получит 0. Кто выиграет?

12. Имеется две кучки по 11 спичек. Играют двое и ходят по очереди. За ход можно взять две спички из одной кучки и одну из другой, Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

13. В коробке лежит а) 5 спичек; б) 10 спичек; в) 300 спичек. Играют двое и ходят по очереди. За ход можно взять из коробка не более половины имеющихся в нем спичек. Проигрывает тот, кому нельзя сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

14. Коля и Витя играют в следующую игру. Имеется кучка из 31 камня. Ходы делают поочередно, начинает Коля. Делая ход, игрок разбивает каждую кучку, состоящую более чем из одного камня на две меньшие кучки. Ходы делаются до тех пор, пока во всех кучках не останется по одному камню. Победителем считается игрок, сделавший последний ход. Сможет ли Коля сделать так, чтобы выиграть при любой игре Вити?

К уроку 10

Теоретические сведения.

Инвариант – это величина, которая не изменяется в процессе решения задачи. Подсчитаем эту величину разными способами, например, в разные моменты – в начале и в конце. Если результаты не совпадут, то полученное противоречие может помочь решить задачу. Например, при перестановке частей фигуры не меняется объем или площадь, при перестановке слагаемых или множителей не изменится сумма (произведение) и т. п. Инвариант не бывает «дан» в задаче, его надо придумать. Затем надо найти эту величину (инвариант) двумя способами и получить противоречие. Например, некоторая величина (сумма или произведение чисел) подсчитывается двумя способами. Если она принимает разные значения, то ситуация, описанная в задаче, невозможна.

Задачи:

1. Можно ли расставить по кругу 8 чисел так, чтобы сумма любых трех подряд идущих чисел была положительна, а сумма любых пяти подряд идущих – отрицательна?

Решение: Предположим, что числа расставить можно. Найдем сумму чисел двумя способами. Первый способ: найдем сумму чисел в каждой тройке подряд идущих чисел, все такие суммы положительны. Сложим их, в полученную сумму каждое число войдет три раза. Сумма восьми положительных сумм положительна. Затем разделим ее на 3. Получим сумму всех чисел, уже взятых по одному разу. Она втрое меньше положительного числа, поэтому положительна. Второй способ. Подсчитаем суммы во всех пятерках подряд идущих чисел. Они все отрицательны. Сложим все такие суммы. Получим отрицательное число – сумму, в которую каждое из чисел, стоящих по кругу, войдет по пять раз. Разделим результат на 5. Получим сумму всех чисел. Она отрицательна. Мы подсчитали сумму всех чисел двумя способами и получили разные результаты. Значит, расставить числа требуемым образом нельзя.

2. Дана таблица 5 х 5. Можно ли ее заполнить числами (по одному в каждой клетке) так, чтобы сумма чисел в каждой строке была положительна, а в каждом столбце – отрицательна?

Решение: Пусть таблицу можно заполнить числами требуемым образом. Найдем сумму чисел двумя способами. Сначала подсчитаем и сложим суммы чисел в каждой строке. Получим, что сумма чисел в таблице положительна. Затем подсчитаем и сложим суммы чисел в столбцах. Тем

самым докажем, что сумма чисел в таблице отрицательна. Полученное противоречие доказывает, что таблицу заполнить числами нельзя.

3. Дана таблица 5 х 5. Можно ли ее заполнить числами (по одному в каждой клетке) так, чтобы произведение чисел в каждой строке было положительно, а в каждом столбце – отрицательно?

Решение: Пусть таблицу можно заполнить так, как требуется в задаче. Найдем произведение чисел двумя способами. 1-й способ: перемножим числа в каждой строке, затем перемножим эти произведения. Тем самым будет доказано, что произведение чисел в таблице положительно. 2-й способ: перемножим числа в столбцах, затем перемножим пять отрицательных произведений. Тем самым докажем, что произведение чисел в таблице отрицательно. Противоречие. Следовательно, таблицу заполнить числами нельзя.

4. Муравей ползет по каркасу куба, но никогда не поворачивает назад. Может ли он проползти так, чтобы побывать в одной из вершин один раз, а в остальных по 20 раз?

5. На столе стоят 7 стаканов дном вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы стояли дном вниз?

6. На доске выписаны целые числа от 1 до 1966. Разрешается стереть любые два числа, записав вместо них их разность. Докажите, что многократным повторением такой операции нельзя добиться, чтобы на доске остались одни нули.

7. На доске написаны числа 1, 2, 3, 4, 5,.... 1993. За один ход разрешается стереть два числа, а вместо них записать их сумму или разность. Через 1992 хода останется одно число. Может ли оно равняться нулю?

8. На доске написаны числа 1, 2, 3, 4, 5,..., $2n+1$. За один ход разрешается стереть два числа, записав вместо них их сумму или разность. Через $2n$ ходов останется одно число. Может ли оно равняться нулю?

9. На доске написано несколько плюсов и минусов. Разрешается стереть любые два знака и поставить вместо них плюс, если знаки одинаковы, и минус в противном случае. Если делать так достаточное число раз, на доске останется один знак. Доказать, что оставшийся знак не зависит от порядка сокращения.

10. Круг разбит на 6 секторов. В секторах стоят 3 черные и 3 белые шашки, по одной в каждом. За один ход разрешается передвинуть одну черную и одну белую шашку на один сектор в противоположных направлениях. Можно ли за несколько ходов собрать все шашки в одном секторе?

11. Числа от 1 до 16 выписаны в строчку. Игроки по очереди расставляют между ними плюсы и минусы. После того, как все места заполнены, т. е. поставлено 15 знаков, подсчитывается результат. Если он четен, то выигрывает первый, если нечетен, то второй.

12. Имеются две кучки камней: в одной – 13, в другой – 17. За ход можно брать любое количество камней, но только из одной кучки. Кто выиграет?

13. У ромашки а) 10 лепестков; б) 11 лепестков. Играют двое, ходят по очереди. За ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает, и как ему нужно играть?

14. На столе лежат 200 спичек. Два мальчика по очереди могут брать 1 или 2 спички. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Какой мальчик выиграет и как он должен играть?

15. В кучке 15 камней. Двое игроков по очереди могут забирать либо 1 либо 5 камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре, и как он должен играть, чтобы выиграть?

К урокам 11–16

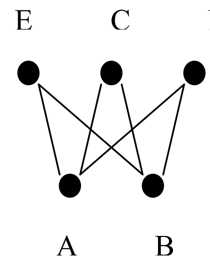
Теоретические сведения.

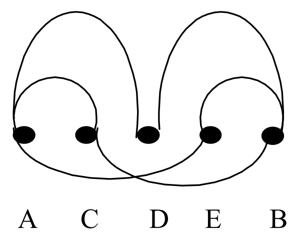
Удобно изображать рассматриваемые объекты точками, называя их вершинами, а отношения между ними – линиями, называя их ребрами. Множество вершин V, связи между которыми определены множеством ребер E, называются графом и обозначают G (V, E).

Следующие объекты можно рассматривать как графы: вершины и ребра многогранника; план лабиринта; дружеские отношения между людьми, пригашенными на вечер; стадии игры в крестики-нолики; генеалогическое древо; делители числа 60 и т. п.

Пример. Допустим, пять государств A, B, C, D, E, чтобы договориться о сотрудничестве, послали своих представителей на конференцию. Результатом конференции явилось подписание следующих договоров: между A и C, B и C, A и D, D и B, E и A, B и E. Изобразите граф, соответствующий условию задачи.

Решение: Данной ситуации соответствует граф, имеющий пять вершин и шесть ребер. Примеры геометрической реализации этого графа приведены на рисунках.





Вершину V графа G называют четной, если из нее выходит четное число ребер и нечетной в противном случае. Степенью вершины называется число ребер, концом которых является эта вершина.

Граф называется связным, если между любыми вершинами существует путь, состоящий из ребер графа, ориентированным – если на каждом ребре указано направление, плоским – если он может быть нарисован на плоскости, и его ребра не пересекаются (во внутренних точках). Циклом в графе называется путь, у которого начало и конец пути совпадают. Путь, состоящий из одного ребра, у которого начало и конец совпадают, называется петлей. Граф, в котором нет петель и нет двойных ребер, т. е. если вершины соединены ребром, то только одним, называется простым графом. Граф, у которого каждая вершина соединена одним ребром с любой другой вершиной, называется полным графом. Число нечетных вершин графа всегда четно.

1. Можно ли соединить 77 телефонов так, чтобы из каждого можно было позвонить ровно 17-ти другим абонентам?

Решение: Принимаем за вершины графа телефоны, а за ребра возможность позвонить друг другу. Если допустить, что такой граф существует, то получим, что в нашем графе 77 нечетных вершин, а этого быть не может.

Иначе противоречие можно было получить так: подсчитаем все соединения телефонов их 1777 = 1309, но этот подсчет ошибочен потому, что каждое ребро (телефонное соединение) сосчитано 2 раза, а число 1309 нечетно – противоречие.

2. В стране Радонежии некоторые города связаны между собой авиалиниями. Из столицы выходит 2003 авиалинии, из города Дальнего одна, а из остальных городов – по 20. Докажите, что из столицы можно добраться до Дальнего (может быть и с пересадками).

Решение: Рассмотрим множество городов, до которых можно добраться из столицы. Это граф: его вершины – города, ребра – авиалинии, их соединяющие. Из каждой вершины графа выходит столько всего ребер, сколько всего авиалиний выходит из соответствующего города. Граф содержит нечетную вершину – столицу. Поскольку число нечетных вершин в графе четно, в нем есть еще одна нечетная вершина. Этой вершиной может быть только город Дальний.

3. У марсиан бывает произвольное число рук. Однажды все марсиане взялись за руки так, что свободных рук не осталось. Докажите, что количество марсиан с нечетным числом рук четно.

Решение: Заметим, что все руки марсиан можно разбить на пары, которые в рукопожатии. Значит, общее число рук у всех марсиан четно. Марсиане, у которых число рук четно, внесут в общее количество четное число рук. Отсюда несложно понять, что количество марсиан с нечетным числом рук будет четным.

4. Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий, Плутон – Венера, Земля – Плутон, Плутон – Меркурий, Меркурий – Венера, Уран – Нептун, Нептун – Сатурн, Сатурн – Юпитер, Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли добраться от Земли до Марса?

5. На доске в угловых клетках находятся шахматные фигуры – конь. Изначально в двух верхних клетках стоят белые, а в нижних – черные фигуры. Можно ли расположить фигуры одинакового цвета в углах диагонали?

6. Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски выкинуть угловые клетки. Можно ли обойти ее ходом шахматного коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по одному разу?

7. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что 2 города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

8. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

9. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

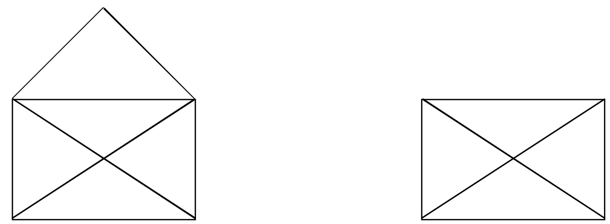
10. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга в этом классе, 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?

11. Собралась компания из n человек. Каждый знаком с тремя другими. При каких значениях n это возможно?

12. Каждый из учеников класса подсчитал, сколько у него в классе друзей. Полученные числа сложили. Получилось нечетное число. Докажите, что кто-то из школьников числит среди своих друзей человека, который не считает его своим другом.

13. Докажите, что в любой компании из шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. (Считается, что если А знаком с Б, то Б знаком с А.)

14. Можно ли нарисовать открытый конверт и закрытый конверт, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя по одному участку линии дважды?



15. Каждый из 20 школьников решил 2 из 20 задач, причем каждую задачу решили ровно два школьника. Докажите, что можно организовать разбор задач так, чтобы каждый школьник рассказал одну из решенных им задач и чтобы все задачи были рассказаны.

16. Имеется кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая его, сделать каркас куба со стороной 10 см? И если нельзя, то в скольких местах придется эту проволоку сломать?

17. Имеется группа островов, соединенных мостами. Турист побывал на всех островах, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведет с Троекратного, если турист: а) не с него начал и не на нем закончил ? б) с него начал, но не на нем закончил? в) с него начал и на нем закончил?

18. В связном графе число вершин ровно на единицу больше числа ребер. Докажите, что в нем нет циклов.

19. На доске отметили 17 точек и соединили каждые 2 из них цветным отрезком: белым, синим или красным. Докажите, что найдутся 3 точки в вершинах одноцветного треугольника.

20. Некоторые из 9 школьников подрались. Докажите, что найдутся либо три такие школьника, что каждый подрался с каждым, либо четыре школьника, между которыми не было драк.

21. Имеется связный граф. Докажите, что можно удалить одну из его вершин и все входящие в нее ребра, не нарушив его связности.

22. У царя Гвидона было трое сыновей. Среди его потомков 93 имело по 2 сына и ни одной дочери, а остальные бездетны. Сколько всего потомков было у Гвидона?

23. Существует ли граф с тремя вершинами, у которого одна из вершин имеет степень 1, а две других имеют степень 3?

24. В городе 2005 телефонов, и каждый соединен с некоторыми другими. Может ли случиться, что каждый телефон связан ровно с 15-ю другими?

25. У короля 19 вассалов. Может ли оказаться, что у каждого вассала 1, 5 или 9 соседей?

26. Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

27. Имеются три листа (m листов) бумаги. Некоторые из них разрезаются на 3 (на 5) новых листов. Сколько всего получится листов, если было разрезано k листов?

28. Во время бала каждый юноша танцевал вальс с девушкой либо более красивой, чем на предыдущем танце, либо более умной, а один – с девушкой одновременно более красивой и более умной. Могло ли такое быть? (Юношей и девушек на балу было поровну.)

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ: ТЕОРЕМЫ МЕНЕЛАЯ И ЧЕВЫ

***И. Н. Романюк**, учитель математики МОУ «СОШ №7» г. Череповца*

Пояснительная записка

Понятие образования (в формах достаточно близких к ныне существующим) возникло в древней Греции. Если суммировать мысли древних о целях образования и воспитания, то можно сказать так: надо развивать в человеке душу, тело и мозг и, кроме того, ему необходимо дать некоторое количество знаний, чтобы было легче ориентироваться в окружающем мире... В школе Пифагора преподавались: гармония – для «тренировки» души, арифметика – для ориентации в «близкорасположенной» действительности, астрономия – для представления об окружающем мире и геометрия (конечно же, геометрия!) – для тренировки мозга, для развития

логического мышления, для получения базовых знаний обо всем том, что окружает человека. Все эти цели образования сохраняются и в наши дни. В современном образовании выявить направленность личности учащегося, его профессиональные интересы и способности призваны элективные курсы. Достойное место в системе курсов по выбору в предпрофильной подготовке учащихся должны занимать курсы по геометрии.

Откройте учебники, почти в каждом вы найдете слова «геометрия – слово греческое, что означает землемерение», что «зарождение геометрии было связано с различными измерительными работами» или что-нибудь в этом роде. Или геометрия есть порождение таинственной потребности человека в поэзии, в духовности, в стремлении его к красоте и совершенству. Истина, по-видимому, где-то посередине.

Главная цель геометрии состоит в развитии обоих полушарий головного мозга. И всеми уже осознана особая роль геометрии не только в тренировке и гармоническом развитии мыслительных способностей мозга, но и в эстетическом воспитании личности. Любой человек с раннего детства учится ценить материальные, духовные и интеллектуальные достижения человечества. Его сердце трепещет «пред созданьями искусств и вдохновенья».

Обращаясь к истории развития геометрии, видим, что с самого начала геометрами выделялись задачи, связанные с конкретными вычислениями и применяемые в практике (расстояние, углы, площади, объемы и т.д.). Но уже в Древней Греции ценились задачи, связанные с выяснением взаимного расположения фигур на плоскости. Это задачи на принадлежность трех точек одной прямой, на нахождение отношения площадей, на доказательство принадлежности трех прямых одному пучку, а также на выяснение свойств фигур, которые не изменяются при параллельном и центральном проектировании. Как известно, все эти задачи составляют предмет изучения аффинной геометрии.

Аффинная геометрия изучает свойства фигур, инвариантные относительно аффинных преобразований. Одним из основных свойств этих преобразований является свойство отображать прямую линию на прямую, сохраняя при этом простое отношение трех точек.

Аффинные преобразования плоскости составляют группу, а понятия и свойства фигур, инвариантные относительно всех преобразований этой группы, называются аффинными понятиями и свойствами. Так, например, понятие прямой является аффинным понятием, а окружности – нет. Свойство прямых быть параллельными – аффинное, а свойство прямых быть перпендикулярными к аффинным не относится.

Свойства фигур, которые сохраняются при преобразованиях подобия и изучаются в евклидовой геометрии называются евклидовыми свойствами фигур.

Группа аффинных преобразований шире, чем группа преобразований подобия, поэтому понятие аффинного свойства является более узким, чем понятие евклидового свойства: каждое аффинное свойство является одновременно и евклидовым, но не наоборот. То есть можно утверждать, что аффинные свойства фигур – это те евклидовы свойства, которые сохраняются при любом параллельном проектировании.

Отношение длин отрезков одной прямой или параллельных прямых, а также отношение площадей любых фигур принадлежат к числу аффинных понятий. Ясно, что аффинным будет и всякое понятие, сводящееся к только что указанным, как например, понятие середины отрезка, медианы треугольника или равновеликих фигур. В противоположность этому такие понятия, как величина угла или отношение произвольных отрезков, не являются аффинными.

Итак, в школьном курсе математики естественным образом изучаются не только метрические свойства фигур, но и аффинные. Фактически школьники знакомятся с простейшими понятиями аффинной геометрии и, таким образом, могут иметь представление о геометрии более узкой, чем евклидова. То есть в школьном курсе идет параллельное изучение основ двух геометрий: аффинной и евклидовой, но этот факт обходят молчанием.

Именно поэтому одним из элективных курсов в основной школе может стать курс, рассматривающий основные понятия и теоремы аффинной геометрии. Содержание курса по выбору не должно дублировать школьный курс геометрии, он должен содержать материал, дополняющий базовую программу по геометрии, не нарушая ее целостности. Таким материалом могут стать теоремы Менелая и Чевы.

Эти теоремы не стоят особняком в курсе геометрии, а самым тесным образом связаны почти со всеми его разделами. Тема «Теоремы Менелая и Чевы» главным образом опирается на такие глобальные разделы школьного курса геометрии как «Подобие треугольников» и «Векторы». Следовательно, целесообразно начать изучение элективного курса «Избранные вопросы геометрии: теоремы Менелая и Чевы» после рассмотрения этих тем. Не секрет, что понятия отношения отрезков, принадлежность точек одной прямой, подобие треугольников являются наиболее сложными по восприятию и практическому применению. Программа элективного курса позволяет не только повторить и закрепить эти темы, но и рассмотреть данные понятия на более высоком уровне сложности. При изучении курса

учащиеся знакомятся с такими интересными фактами как прямая Симпсона, теоремы Папа, Гаусса, Паскаля и Брианшона. Тем самым учащиеся приобщаются к истории геометрии, знакомятся с жизнью великих ученых, ощущая себя частью мировой культуры.

Задачи, предлагаемые в этом курсе, могут быть решены с использованием только материала школьного курса геометрии, но эти решения будут сложны, не рациональны, объемны. Они будут требовать не только нестандартного мышления и глубоких знаний, но и синтеза и обобщения этих знаний, что с психологической точки зрения является одним из самых сложных процессов умственной деятельности. Знание же теорем Менелая и Чевы позволяют сделать решения простыми, красивыми, лаконичными. Таким образом, содержание курса не только позволяет повысить учебную мотивацию школьников, проверить свои способности к математике, но и ученику любого уровня активно включиться в учебно-познавательный процесс.

Данная тема не ограничивается рамками неполной средней школы, она может найти свое продолжение и в старшей школе при профильном обучении и в высшей школе, так как теоремы Менелая и Чевы имеют стереометрическое обобщение и связаны с теоремой Дезарга, которая является одной из центральных теорем проективной геометрии. Тем самым этот материал может стать отправным пунктом в дальнейшей исследовательской деятельности учащихся.

Место курса в системе предпрофильной подготовки:

Курс ориентирован на предпрофильную подготовку учащихся по математике. Он расширяет базовый курс геометрии, давая возможность учащимся не только познакомиться с новыми теоремами, но и научиться применять их к доказательству теорем школьного курса. После изучения данного курса школьники на устном экзамене по геометрии могут применить теоремы Менелая и Чевы при доказательстве теорем о трех замечательных точках треугольника, что значительно проще. Курс знакомит с интересными фактами геометрии, новыми методами решения геометрических задач, позволяет проверить и развить способности учащихся к математике. Данный элективный курс способствует развитию важнейших математических знаний, умений, навыков, предусмотренных школьной программой, помогает учащимся более осознанно выбрать профиль своего дальнейшего обучения.

Цель курса: предоставить учащимся возможность выявить свои способности к математической деятельности с помощью расширения их знаний по геометрии.

Задачи курса:

– Развитие способностей учащихся к математической деятельности.

– Развитие математического мышления, навыков обобщения и систематизации.

– Приобщение к мировой математической культуре.

– Изучение теорем Менелая и Чевы и определение их места в школьном курсе геометрии.

СОДЕРЖАНИЕ И ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ КУРСА

Данный элективный курс рассчитан на 14 часов.

№	Содержание	Количество часов
1	Теорема Менелая	1
2	Применение теоремы Менелая при решении задач	2
3	Обратная теорема Менелая	1
4	Применение обратной теоремы Менелая при решении задач	1
5	Творческая работа	2
6	Теорема Чевы	1
7	Применение теоремы Чевы при решении задач	3
8	Творческая работа	2
9	Собеседование	1
	Итого:	14

Требования к уровню усвоения курса

Общепринятых форм проверки усвоения материала элективного курса «Избранные вопросы геометрии: теоремы Менелая и Чевы» не предполагается. В методике проведения занятий должен присутствовать этап самопроверки, который предоставляет учащимся возможность самим проверить уровень усвоения изучаемого материала. Кроме этого в тематическом планировании предусмотрены две творческие работы, на которых школьники могут решать не только предложенные учителем задачи, но и сами находить и в учебнике по геометрии, и в другой литературе задачи, решаемые с использованием теорем Менелая и Чевы. Наиболее подготовленным учащимся можно предложить найти второй способ доказательства этих теорем. Дидактические материалы курса предлагают сборник задач по этой теме, который содержит 50 задач. Из них 30 с применением теоремы Менелая и 20 с применением теоремы Чевы. Все задачи расположены в порядке возрастания их сложности, что очень удобно для установления уровня усвоения курса. Формой итогового контроля может стать собеседование.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атанасян Л. С. и другие. Геометрия 7–9. – М.: Просвещение, 1991.
2. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия 8–9. – М.: Просвещение, 1991.
3. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. – Ч. 1, 2. – М.: Наука, 1986.
4. Избранные вопросы геометрии (пособие для учителя). – М.: Просвещение, 1991.
5. Зетель С. И. Новая геометрия треугольника. – М.: Учпедгиз, 1962.
6. Орач Б. Теорема Менелая // Квант. – № 3. – 1991.
7. Эрдниев Б., Манцаев М. Теоремы Чевы и Менелая // Квант. – № 3. – 1990.
8. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. – М.: Наука, 1986.
9. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы планиметрии. – М.: Наука, 1967.
10. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. – М.: Наука, 1990.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

§1. Краткая историческая справка

В этом параграфе будет рассказано о тех ученых, чьи имена встречаются в данном элективном курсе.

МЕНЕЛАЙ АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ жил около 98 года после Рождества Христова в Риме, как показывают два астрономических наблюдения, произведенные им и записанные в Альмагест. Он сделал ценный вклад в развитие сферической тригонометрии, доказав теоремы о равенстве и свойствах плоских и сферических треугольников.

ДЖОВАННИ ЧЕВА (1648–1734) – итальянский геометр, старался возродить греческую геометрию. Он был инженером-гидравликом и в качестве такового несколько раз служил правительству Мантуи. Смерть его последовала во время осады Мантуи. Джованни считался выдающимся автором в области экономики – первым проницательным математическим писателем по этому предмету. В 1678 году он опубликовал в Милане сочинение, которое заключало в себе «теорему Чевы», снабженную одним статистическим и двумя геометрическими доказательствами.

ЖИРАР ДЕЗАРГ (1593–1662) из Лиона был архитектором и инженером. Служил у кардинала Ришелье при осаде Ла-Рошели в 1628 году. Вскоре после этого он удалился в Париж, где и произвел свои геометрические исследования. Наиболее выдающиеся из его современников (Декарт, Лейбниц, Паскаль) уважали и ценили его; однако он подвергся жестоким нападкам со стороны других, неспособных оценить его гений; о его сочинениях стали забывать, стало стираться из памяти и само имя Дезарга, и только в начале XIX столетия его спасли от забвения Брианшон и Понселе. Дезарг впервые ввел в рассмотрение бесконечно удаленную точку. К его крупным заслугам относится обоснование поляр конических сечений. Дезарг показал, что диаметр конического сечения делит пополам хорды сопряженного направления. Его можно считать основоположником проективной геометрии. Знаменитая «теорема Дезарга» сохранилась и сохранила имя автора первого доказательства потому, что ученик Дезарга Абрахам Боссе напечатал в 1648 году книгу о перспективе, в которую включил и эту теорему.

БЛЕЗ ПАСКАЛЬ (1623–1662) был сыном Этьена Паскаля, корреспондента Мерсенна; кривая «улитка Паскаля» названа в честь Этьена. Блез быстро развивался под присмотром своего отца, и уже в шестнадцатилетнем возрасте он открыл «теорему Паскаля»: противоположные стороны шестиугольника, вписанного в линию второго порядка, пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой (прямой Паскаля). Это теорема стала одной из основополагающих теорем проективной геометрии. Она была опубликована в 1641 году на одном листе бумаги и оказала большое влияние на Дезарга. Через несколько лет Паскаль изобрел счетную машину. Его трактат об «арифметическом треугольнике», образованном биномиальными коэффициентами и имеющем применение в теории вероятностей, появился посмертно в 1664 году. Большое значение в науке имеют его работы по интегрированию и его идеи относительно бесконечного и бесконечно малого. Он первый придал удовлетворительную форму принципу полной индукции.

ШАРЛЬ ЖЮЛЬЕН БРИАНШОН (1785–1864) был учеником Гаспара Монта. Родился на Севре, был капитаном артиллерии, в последствии – профессором артиллерийской школы. Теорему, носящую его имя, он вывел из теоремы Паскаля с помощью найденных Дезаргом свойств линий, называемых теперь полярами, и опубликовал ее в мемуаре «О кривых поверхностях второго порядка».

РОБЕРТ СИМПСОН (14.10.1687–1.10.1768) – шотландский математик, профессор. Работал в университете Глазго. Пропагандировал геометрию древних ученых. Был непримиримым противником введения в геометрию символики. Его работа «О конических сечениях пять книг» была выражена в стиле Апполония, хотя этот стиль даже в то время уже считался устаревшим.

КАРЛ ФРИДРИХ ГАУСС родился в 1777 году в немецком городе Браунтвейге, был сыном поденщика. Браунтвейгский герцог соизволил обратить внимание на молодого Гаусса-вундеркинда и позаботился о его обучении. В 1795–1798 годах юный гений учился в Геттингене, в 1799 году в Хельмштедге он получил степень доктора. С 1807 года до своей смерти (1855) он без тревог и забот спокойно работал в качестве директора астрономической обсерватории и профессора его родного университета. Его относительная обособленность, владение в равной мере прикладной и чистой математикой, занятия астрономией, многократное использование латинского языка – на всем этом отпечаток восемнадцатого столетия, но в его трудах ощущается дух новой эпохи. Дневники Гаусса показывают, что уже на семнадцатом году жизни он начал делать поразительные открытия. Например, в 1795 году он нашел закон квадратичной зависимости теории чисел. Некоторые его ранние открытия изложены в его диссертации в 1799 году и в его внушительных «Арифметических исследованиях». В диссертации дано строгое доказательство так называемой «основной теоремы алгебры». Можно сказать, что Гауссу нравилась эта теорема, и он дал ей три строгих доказательства. Гаусс интересовался и астрономией, он рассчитывал орбиты новых открываемых планет по малому числу наблюдений. Талант Гаусса нашел свое применение и в физике и геодезии. В геометрии он разработал целую теорию поверхностей. А его теория комплексных чисел разъяснила многие неясности в арифметике. Деятельность Гаусса не ослабела до его смерти. В последние годы жизни он все больше и больше отдавал силы прикладной математике. Впрочем, его публикации не дают полной картины всего его величия. Когда были напечатаны его дневники и, частично, письма, выяснилось, что некоторыми из наиболее глубоких своих мыслей он не поделился.

§2. Формулировка и доказательство теоремы Менелая двумя способами

Теорема: Пусть три точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых BC, AC, AB соответственно. Для того чтобы эти точки принадлежали одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\frac{AC_1}{C_1B}\times\frac{BA_1}{A_1C}\times\frac{CB_1}{B_1A}=1$ (1)

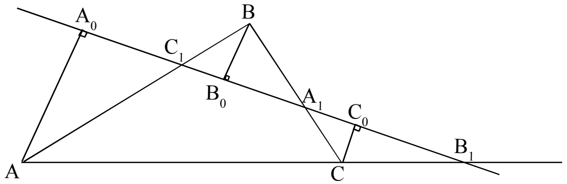


Рис. 1

Доказательство (I способ)

Необходимость: Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямой l и $AA_0 = h_1$, $BB_0 = h_2$, $CC_0 = h_3$ – перпендикуляры, опущенные соответственно из точек A, B, C на прямую l. $\Delta AA_0C_1 \sim \Delta BB_0C_1$ (по двум углам). Поэтому $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{h_1}{h_2}$. Аналогично, из подобия треугольников BB_0A_1 и CC_0A_1; AA_0B_1 и CC_0B_1 имеем: $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{h_2}{h_3}$; $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{h_3}{h_1}$.

Перемножим полученные пропорции

$$\frac{AC_1}{C_1B}\times\frac{BA_1}{A_1C}\times\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{h_1}{h_2}\times\frac{h_2}{h_3}\times\frac{h_3}{h_1}=1.$$

Достаточность: Пусть точки A_1, B_1, C_1, лежащие на прямых BC, AC, AB, таковы, что $\frac{AB_1}{B_1C}\times\frac{CA_1}{A_1B}\times\frac{BC}{C_1A}=1.$

Докажем, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой. Проведем прямую A_1B_1 и докажем, что точка C_1 ей принадлежит.

Предположим, что прямая A_1B_1 пересекает AB в точке T.

Тогда $\frac{AB_1}{B_1C}\times\frac{CA_1}{A_1B}\times\frac{BT}{TA}=1$ (2)

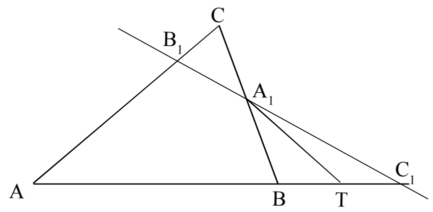


Рис. 2

Из условия равенства (2) следует, что $\frac{BT}{TA}=\frac{BC_1}{C_1A}$. Совпадение точек T и C_1 легко следует из следующей леммы.

Лемма: Пусть A и B – различные точки. Тогда для любого k > 0 и k ≠ 1 на прямой AB существуют две и только две точки X, такие что $\frac{AX}{XB}=k$, причем одна из них принадлежит отрезку AB, а другая лежит вне отрезка AB.

Доказательство: Пусть A(a), B(в) точки прямой. Нужно найти такую точку X(x), что $\frac{|AX|}{|XB|}=k$.

Рис. 3

|AX| = |x-a| ; |XB| = |b-x| ; |x-a| = k|b-x|

Раскроем знак модуля.

1. x < a	2. a < x < b	3. x > b
–x + a = kb – kx	x – a = kb – kx	x – a = –kb + kx
–(1 – k)x = kb – a	x(1 + k) = kb + a	x(1 – k) = a – kb
$x=\frac{a-kb}{1-k}$	$x=\frac{a+kb}{1+k}$	$x=\frac{a-kb}{1-k}$

Итак, получили только две координаты точки X.

Замечание: Часто теорему Менелая формулируют иначе, используя понятие об отношении направленных отрезков. Будем считать, что $\frac{AU}{UB}=k$, если $\overline{AU} = k\overline{UB}$. Ясно, что если векторы $\overline{AU}$ и $\overline{UB}$ одинаково направлены, то $k > 0$. Если же векторы противоположно направлены, то $k < 0$, при этом число $|k|$ равно отношению длин отрезков AU и UB.

При таком понимании отношения отрезков равенство (1) запишется в виде

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \times \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \times \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = -1.$$

Доказательство (II способ)

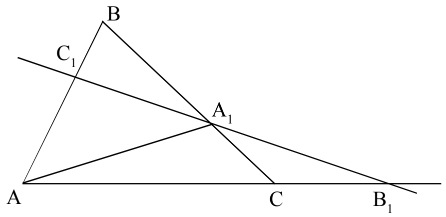


Рис. 4

Надо доказать, что $\dfrac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \times \dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \times \dfrac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = -1$.

Для простоты обозначим: $\dfrac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = \gamma$; $\dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} = \alpha$; $\dfrac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = \beta$.

Пусть точка A – начало координат. Тогда $\overline{AC_1} = \gamma\overline{C_1B}$; $\overline{CB_1} = \beta\overline{B_1A}$.

Точка A_1 делит отрезок BC внутренним образом, то есть $\overline{AA_1} = \dfrac{\overline{AB} + \alpha\overline{AC}}{1+\alpha}$.

Точка B_1 делит отрезок AC внешним образом, это условие можно записать так: $\overline{AB_1} = \dfrac{\overline{AC} + \beta\overline{AA_1}}{1+\beta} = \dfrac{1}{1+\beta}\overline{AC}$.

Так как точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, причем точка A_1

делит отрезок B_1C_1 в некотором соотношении λ, то $\overline{AA_1} = \dfrac{\overline{AC_1} + \lambda\overline{AB_1}}{1+\lambda}$.

Итак, имеем, что $\dfrac{\overline{AB} + \alpha\overline{AC}}{1+\alpha} = \dfrac{\overline{AC_1} + \lambda\overline{AB_1}}{1+\lambda}$ (*).

Но $\overline{AC_1} = \gamma\overline{C_1B}$, а так как $\dfrac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = \dfrac{\gamma}{1}$, то $\dfrac{\overline{C_1B}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\gamma+1} \Rightarrow \overline{C_1B} = \dfrac{1}{\gamma+1}\overline{AB}$.

Значит, $\overline{AC_1} = \dfrac{\gamma}{\gamma+1}\overline{AB}$ $\quad \overline{AB_1} = \dfrac{1}{\beta+1}\overline{AC}$.

Из равенства (*) получаем $(1+\lambda)\overline{AB} + \alpha(1+\lambda)\overline{AC} = (1+\alpha)\overline{AC_1} + \lambda(1+\alpha)\overline{AB_1}$.

С учетом предыдущего преобразуем это равенство

$$(1+\lambda)\overline{AB} + \alpha(1+\lambda)\overline{AC} = \frac{\gamma(1+\alpha)}{1+\gamma}\overline{AB} + \frac{\lambda(1+\alpha)}{1+\beta}\overline{AC}$$

$$\left(1+\lambda - \frac{\gamma(1+\alpha)}{1+\gamma}\right)\overline{AB} + \left(\alpha(1+\lambda) - \frac{\lambda(1+\alpha)}{1+\beta}\right)\overline{AC} = \overline{0}.$$

Линейная комбинация двух неколлинеарных векторов равна нуль-вектору, следовательно, коэффициенты линейной комбинации равны нулю.

$(1+\lambda)(\gamma+1) - \gamma(1+\alpha) = 0$ и $\alpha(1+\lambda)(1+\beta) - \lambda(1+\alpha) = 0$

Выразим из этих равенств λ

$\gamma + 1 + \lambda\gamma + \lambda - \gamma - \gamma\alpha = 0$ $\qquad \alpha + \alpha\beta + \alpha\lambda + \alpha\beta\lambda - \lambda - \lambda\alpha = 0$

$\lambda(\gamma+1) = \gamma\alpha - 1$ $\qquad \lambda(\alpha\beta - 1) = -\alpha\beta - \alpha$

$\lambda = \dfrac{\gamma\alpha - 1}{\gamma+1}$ $\qquad \lambda = \dfrac{-\alpha\beta - \alpha}{\alpha\beta - 1}$.

Полученные равенства приравняем

$$\frac{\gamma\alpha - 1}{\gamma+1} = -\frac{\alpha\beta + \alpha}{\alpha\beta - 1} \Rightarrow \frac{\gamma\alpha - 1}{\gamma+1} + \frac{\alpha\beta + \alpha}{\alpha\beta - 1} = 0$$

$$(\gamma\alpha - 1)(\alpha\beta - 1) + (\alpha\beta + \alpha)(\gamma + 1) = 0$$

$$\alpha^2\beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta + 1 + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha = 0$$

$$\alpha^2\gamma\beta + \alpha + \alpha\beta\gamma + 1 = 0$$

$$\alpha(\alpha\beta\gamma + 1) + (\alpha\beta\gamma + 1) = 0.$$

$(\alpha+1)(\alpha\beta\gamma+1)=0$

$\alpha\beta\gamma+1=0$, так как $\alpha+1\neq 0$, потому что $\alpha>0$

$\alpha\beta\gamma=-1$, а значит $\dfrac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}\times\dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\times\dfrac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}=-1$.

Теорема доказана.

§3. Формулировка и доказательство теоремы Чевы двумя способами

Теорема: Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC, AB или их продолжениях треугольника ABC. Для того, чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение $\dfrac{AC_1}{C_1B}\times\dfrac{BA_1}{A_1C}\times\dfrac{CB_1}{B_1A}=1$ (3).

Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 иногда называют чевианами.

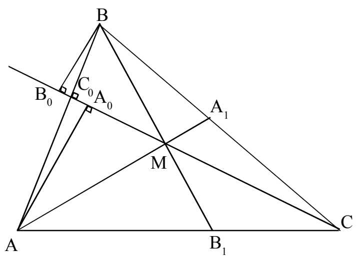


Рис. 5

Доказательство (I способ)

Необходимость: Пусть отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке M. Обозначим через S_1 площадь треугольника AMC, S_2 – площадь треугольника CMB, S_3 – площадь треугольника AMB (рис. 5). Пусть h_1 – расстояние от точки B до прямой MC, h_2 – расстояние от точки A до прямой MC.

Тогда из подобия треугольников BB_0C_1 и AA_0C_1 имеем $\dfrac{AC_1}{C_1B}=\dfrac{h_2}{h_1}=\dfrac{S_1}{S_2}$.

Аналогично получаем $\dfrac{BA_1}{A_1C}=\dfrac{S_3}{S_1}$ и $\dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{S_2}{S_3}$.

Перемножив полученные пропорции, получаем

$$\frac{AC_1}{C_1B}\times\frac{BA_1}{A_1C}\times\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_1}{S_2}\times\frac{S_3}{S_1}\times\frac{S_2}{S_3}=1.$$

А это и есть равенство (3).

Достаточность: Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых BC, CA, AB и выполнено соотношение (3).

Пусть M – точка пересечения прямых AA_1 и BB_1, а прямая CM пересекает сторону AB в точке Q. Тогда по уже доказанному $\dfrac{AQ}{QB}\times\dfrac{BA_1}{A_1C}\times\dfrac{CB_1}{B_1A}=1$.

А по условию $\dfrac{AC_1}{C_1B}\times\dfrac{BA_1}{A_1C}\times\dfrac{CB_1}{B_1A}=1$.

Следовательно, $\dfrac{AQ}{QB}=\dfrac{AC_1}{C_1B}$.

Из леммы следует совпадение точек Q и C_1.

Теорема доказана.

Сейчас докажем теорему Чевы с помощью теоремы Менелая.

Доказательство (II способ)

Пусть прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, точке M (рис. 5).

Применим теорему Менелая для треугольника ABB_1 и секущей CC_1 и для треугольника B_1BC и секущей AA_1

$$\frac{AC_1}{C_1B}\times\frac{BM}{MB_1}\times\frac{B_1C}{CA}=1 \text{ и } \frac{B_1M}{MB}\times\frac{BA_1}{A_1C}\times\frac{CA}{AB_1}=1.$$

Перемножив почленно полученные равенства, получаем

$$\frac{AC_1}{C_1B}\times\frac{BA_1}{A_1C}\times\frac{CB_1}{B_1A}\times\frac{BM}{MB_1}\times\frac{B_1M}{MB}\times\frac{CA}{AC}=1.$$

Получили равенство (3).

Теорема доказана.

§4. Банк задач и упражнений

Теорема Менелая

1. На сторонах AB и AC треугольника ABC даны соответственно точки M и N такие, что $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{CN}{NA}=\dfrac{1}{2}$. В каком отношении точка S пересечения отрезков BN и CM делит каждый из этих отрезков?

2. В треугольнике ABC биссектриса AD делит BC в отношении 2:1. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?

3. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка D, а на стороне BC точки E и F так, что AD:DB=3:2; BE:EC =1:3; BF:FC = 4:1. В каком отношении прямая AE делит отрезок DF?

4. Дан параллелограмм ABCD. Точка M делит отрезок AD в отношении p, а точка N делит отрезок DC в отношении q. Прямые BM и AN пересекаются в точке S. Вычислите отношение AS: SN.

5. Прямая пересекает стороны AB, BC, CD, DA четырехугольника ABCD или их продолжения соответственно в точках P, Q, R, S. Доказать, что образовавшиеся отрезки удовлетворяют равенству: $\frac{AP}{PB}\times\frac{BQ}{QC}\times\frac{CR}{RD}\times\frac{DS}{SA}=1$.

6. Противоположные стороны AB и DC, AD и BC четырехугольника ABCD пересекаются в точках E и F. Доказать, что образовавшиеся отрезки удовлетворяют равенству: $\frac{AE}{BE}\times\frac{CE}{DE}=\frac{AF}{BF}\times\frac{CF}{DF}$.

7. Четыре прямые, принадлежащие одному пучку, пересечены двумя прямыми соответственно в точках A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1. Докажите, что образовавшиеся на секущих отрезки удовлетворяют равенству: $\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=\frac{A_1C_1}{C_1B_1}:\frac{A_1D_1}{D_1B_1}$.

8. Через точку M пересечения диагоналей четырехугольника проведена секущая. Отрезок этой секущей, заключенный между одной парой противоположных сторон четырехугольника, делится точкой M пополам. Доказать, что отрезок секущей, заключенный между продолжениями другой пары противоположных сторон четырехугольника, делится точкой M также пополам.

9. На сторонах AC и BC треугольника ABC даны точки M_1 и M_2, N_1 и N_2 так, что

$AM_i : M_iC = CN_i : N_iB = k_i$ где i = 1, 2. Доказать, что точка P, в которой пересекаются отрезки M_1N_1 и M_2N_2, делит каждый их этих отрезков в отношении k_2 и k_1.

10. Противоположные стороны треугольника ABCD пересекаются соответственно в точках E и F. Прямые, проведенные через вершины четырехугольника параллельного данному направлению, пересекают прямую EF соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1.

Доказать, что $\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{CC_1}=\frac{1}{BB_1}+\frac{1}{DD_1}$.

11. Из вершины C прямого угла треугольника ABC опущена высота CK, и в треугольнике ACK проведена биссектриса CE. Прямая, проходящая через точку B параллельно CE, пересекает CK в точке F. Докажите, что прямая EF делит отрезок AC пополам.

12. В четырехугольник вписана трапеция, параллельные стороны которой параллельны его диагонали. Докажите, что не параллельные стороны трапеции пересекаются на другой диагонали четырехугольника.

13. Три окружности разных радиусов расположены на плоскости так, что ни одна из них не лежит целиком в круге, ограниченном другой. Каждой паре окружностей сопоставим точку пересечения внешних касательных. Докажите, что полученные три точки лежат на одной прямой.

14. Даны два параллелограмма ABCD и AMPN, вершины M и N второго параллелограмма принадлежат сторонам AB и AD первого. Прямые BN и DM пересекаются в точке Q. Докажите, что точки C, P, Q принадлежат одной прямой.

15. Две прямые a и b пересечены прямыми в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2. На секущей A_1B_1 дана произвольная точка P, которая соединена с точками A_2 и B_2. Через середину M_1 отрезка A_1B_1 проведены прямые a_1 и b_1, параллельные прямым a и b. Докажите, что точки пересечения прямых A_2P и a_1 и прямых B_2P и b_1 находятся на одной прямой с серединой M_2 отрезка A_2B_2.

16. Докажите, что биссектрисы внешних углов разностороннего треугольника пересекают соответствующие стороны в трех коллинеарных точках.

17. Докажите, что биссектрисы двух внутренних углов разностороннего треугольника и биссектриса внешнего угла при третьей вершине пересекают соответствующие противоположные стороны в трех коллинеарных точках.

18. Окружность S касается окружностей S_1 и S_2 в точках A_1 и A_2. Докажите, что прямая A_1A_2 проходит через точку пересечения общих внешних или общих внутренних касательных к окружностям S_1 и S_2.

19. На одной прямой взяты точки A_1, B_1 и C_1, а на другой – точки A_2, B_2 и C_2. Прямые A_1B_2 и A_2B_1, B_1C_2 и B_2C_1, C_1A_2 и C_2A_1 пересекаются в точках C, A и B соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой (теорема Паппа).

20. На сторонах AB, BC и CD четырехугольника ABCD (или на их продолжениях) взяты точки K, L и M. Прямые KL и AC пересекаются в точке P, LM и BD) – в точке Q. Докажите, что точка пересечения прямых KQ и MP лежит на прямой AD.

21. Продолжения сторон AB и CD четырехугольника ABCD пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD – в точке Q. Через точку P

проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках E и F. Докажите, что точки пересечения диагоналей четырехугольников ABCD, ABEF и CDFE лежат на прямой, проходящей через точку Q.

22. Через точки P и Q проведены тройки прямых. Обозначим их точки пересечения так, как показано на рисунке 6. Докажите, что прямые KL, AC и MN пересекаются в одной точке (или параллельны).

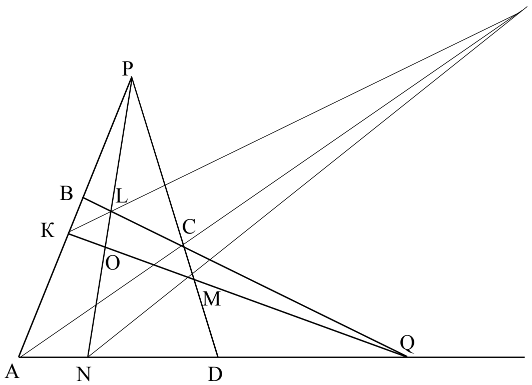


Рис. 6

23. Основания перпендикуляров, проведенных к прямым, содержащим стороны треугольника, из произвольной точки описанной около него окружности, лежат на одной прямой (прямая Симпсона).

24. Середина отрезка, соединяющего точки пересечения продолжений противоположных сторон четырехугольника, лежит на прямой, проходящей через середины диагоналей (теорема Гаусса).

25. Если противоположные стороны вписанного шестиугольника не параллельны, то точки пересечения продолжений этих сторон лежат на одной прямой (теорема Паскаля).

26. В треугольнике ABC медианы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Площадь треугольника BOC равна S. Найти площадь треугольника ABC.

27. Пусть AD – медиана треугольника ABC. На AD взята точка К так, что AK:KD = 3:1. В таком отношении прямая BK делит площадь треугольника ABC?

28. Через середину M стороны BC параллелограмма ABCD, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке Q. Найдите площадь четырехугольника QMCD.

29. В правильном треугольнике ABC со стороной *a*, точка E – середина BC, D – середина AC; F принадлежит DC, M – точка пересечения прямых BF и DE. Причем площадь четырехугольника ABMD равна 5/8 площади треугольника ABC. Найти MF.

30. Стороны треугольника ABC разделены точками M, N, и P так, что AM:MB = BN:NC = CP:PA = 1:4. Найдите отношение площади треугольника, ограниченного прямыми AN, BP, CM, к площади треугольника ABC.

Теорема Чевы

31. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

32. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

33. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

34. Отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вписанная окружность касается противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

35. Прямые, проходящие через вершины треугольника и делящие его периметр пополам, пересекаются в одной точке.

36. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, и C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Прямые A_1B_1 и A_1C_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно стороне BC, в точках C_2 и B_2 соответственно. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.

37. Прямые AP, BP и CP пересекают прямые BC, CA и AB в точках A_1, B_1, и C_1 соответственно. Точки A_2, B_2, и C_2 выбраны на прямых BC, CA и AB так, что $BA_2 : A_2C = A_1C : BA_1$; $CB_2 : B_2A = B_1A : CB_1$; $AC_2 : C_2B = C_1B : AC_1$. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

38. Прямые AP, BP и CP пересекают стороны треугольника ABC (или их продолжения) в точках A_1, B_1, и C_1. Докажите, что прямые, проходящие через середины сторон BC, CA и AB параллельно прямым AP, BP и CP, пересекаются в одной точке.

39. Прямые AP, BP и CP пересекают стороны треугольника ABC (или их продолжения) в точках A_1, B_1, и C_1. Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон BC, CA и AB с серединами отрезков AA_1, BB_1 и CC_1, пересекаются в одной точке.

40. Пусть α, β и γ — произвольные углы, причем сумма любых двух из них меньше 180°. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1, имеющие при вершинах A, B, C углы α, β и γ. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

41. Пусть α, β и γ — произвольные углы, причем сумма любых двух из них меньше 180°. На сторонах треугольника ABC внутренним образом построены треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1, имеющие при вершинах A,

B, C углы α, β и γ. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

42. Стороны BC, CA и AB треугольника ABC касаются окружности с центром O в точках A_1, B_1, и C_1. На лучах OA_1, OB_1 и OC_1 отложены равные отрезки OA_2, OB_2 и OC_2. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

43. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, и C_1. Докажите, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} \times \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\sin ACC_1}{\sin C_1CB} \times \frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC} \times \frac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA}.$$

44. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, и C_1, причем прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке P. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2, симметричные этим прямым относительно соответствующих биссектрис, тоже пересекаются в одной точке Q.

45. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно параллельны. Докажите, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

46. Через точки A и D, лежащие на окружности, проведены касательные, пересекающиеся в точке S. На дуге AD взяты точки B и C. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, AB и CD – в точке Q. Докажите, что прямая PQ проходит через точку S.

47. На сторонах BC, CA и AB равнобедренного треугольника ABC с основанием AB взяты точки A_1, B_1, и C_1 так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\sin ABB_1}{\sin BAA_1} \times \frac{\sin CAA_1}{\sin CBB_1}.$$

48. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AB взяты точки M и N так, что $\angle CAM = \angle ABN$ и $\angle CBM = \angle BAN$. Докажите, что точки C, M и N лежат на одной прямой.

49. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекают отрезки C_1B_1 и B_1A_1 в точках M и N. Докажите, что $\angle MBB_1 = \angle NBB_1$.

50. Отрезки, соединяющие противоположные вершины описанного шестиугольника, пересекаются в одной точке (теорема Брианшона).

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

Т. Ф. Ханкова*, учитель математики МОУ «СОШ №3» г. Харовска*

Пояснительная записка

Элективный курс предназначен для учащихся 9-х классов, выбирающих в старшей школе профильный уровень изучения математики. Цель данного курса – создание ориентационной и мотивационной основы для осознанного выбора профиля обучения. Учащиеся смогут оценить свои потребности и возможности.

Курс посвящен применению процентов для решения прикладных задач.

Проценты изучаются на первом этапе основной школы, причем непродолжительно, когда учащиеся в силу возрастных особенностей еще не могут получить полноценных представлений о процентах, а следовательно, уровень знаний, необходимый для свободного оперирования ими на уроках математики, химии, физики и просто в быту, оказывается недостаточным. А между тем понимание процентов и умение проводить процентные расчеты необходимы каждому человеку. Поэтому представляется целесообразным возвращение к процентам на старшей ступени.

Предлагаемый курс является развитием системы ранее приобретенных программных знаний, его цель – создать целостное представление о теме «Проценты» и значительно расширить спектр задач, посильных для учащихся, показать математическую сущность задач, решаемых на уроках химии, в жизни, показать универсальность методов решения для задач с разным сюжетным содержанием.

Направленность курса развивающая, практическая.

Каждое занятие, а также все они в целом направлены на то, чтобы развить интерес школьников к предмету, познакомить их с новыми идеями и методами, расширить представление об изучаемом в основном курсе материале.

Основное содержание составляют задачи различного уровня сложности, сюжеты большинства которых непосредственно взяты из действительности, окружающей современного человека, в том числе и старшеклассника.

Программа курса включает в себя два раздела.

Первый систематизирует ранее полученные знания о процентах. Рассматриваются задачи, которые решаются с помощью определения процента, основных правил. Это задачи об изменении дроби, площади, цены, производительности труда.

Целью второго раздела является рассмотрение алгоритма решения задач на смеси, сплавы и выход продукта или вещества, полученного в результате различных процессов и применение этого алгоритма для решения задач.

На изучение двух разделов отводится 10 часов, большинство времени занимает решение задач, один час планируется для проведения итогового занятия.

Программа курса сопровождается дидактическим материалом.

Курс является открытым: можно добавлять новые задачи. Важно, чтобы они были интересными для учащихся, соответствовали их возможностям. Ученик должен чувствовать эстетическое удовлетворение от красиво решенной задачи, от установленной им возможности приложения математики к повседневной жизни и к другой науке.

Занятия должны строиться с учетом личностно ориентированного обучения.

Основная форма занятий – практикумы по решению задач. Последовательность содержания знаний и задач структурирована таким образом, что изучение последующих тем обеспечивается предыдущими. На занятиях эффективна организация обсуждения, дискуссий, которые могут быть и фронтальными, и групповыми; использование индивидуальных форм работы. Ученику необходимо давать время на размышление, учить рассуждать, выдвигать и обсуждать разные способы решения.

Образовательные результаты изучения данного курса могут быть выявлены в результате текущего контроля: проверки и обсуждения задач, самостоятельно решаемых учащимися, рецензирования ответов учеников. Можно установить степень достижения промежуточных и итоговых результатов и выявить сбои в изучении курса в любой момент процесса обучения.

Если учитель желает оценить работу ученика при изучении элективного курса, то предлагаются критерии уровней освоения данного курса.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Тема 1. **Определение процента. Основные правила, необходимые для решения задач на проценты. Решение задач.** (3 часа)

Роль процентов в жизни человека. Цель и содержание элективного курса.

Определение процента. Нахождение процента от числа по определению. Формула процентов. Выражение процентов обыкновенной или десятичной дробью.

Решение задач с помощью составления пропорции. Применение пропорции при решении обратных задач на проценты. Использование процентов при решении задач на сравнение величин.

Нахождение процента от заданного числа, нахождение числа по заданному значению его процентов. Выражение частного в процентах. Нахождение, сколько процентов составляет одно число от другого; нахождение, на сколько процентов увеличилась или уменьшилась данная величина.

Применение правил для решения заданий и задач на проценты.

Задачи, в которых увеличение или уменьшение некоторой величины производится один раз, последовательно несколько раз.

Тема 2. **Задачи на смеси, сплавы, выход продукта или вещества, полученного в результате различных процессов.** (5 часов)

Основные допущения, принимаемые в задачах на смеси и сплавы. Концентрация. Процентное содержание. Сумма концентраций одной смеси или сплава. Процентное содержание одной смеси или сплава. Нахождение концентрации по процентному содержанию. Алгоритм решения задачи на смеси и сплавы. Краткая запись условия задачи в виде схемы. Составление уравнения, системы уравнений. Применение алгоритма к решению задач на смеси, сплавы и задач, выдвигаемых повседневной жизнью. Универсальность математического метода при решении задач с разным сюжетным содержанием.

Тема 3. **Математический бой «Решение задач на проценты».** (1 час)

Занятие проводится в форме соревнования между группами учащихся.

Уровни усвоения элективного курса

I уровень.

Ученик свободно владеет теоретическим материалом курса, применяет его при решении конкретных математических задач, имеющих прикладной характер; отличается активным участием в обсуждении проблем, творческим подходом и большой заинтересованностью как при освоении курса в целом, так и при выполнении порученных ему учителем заданий. Он умеет работать в группах.

II уровень.

Ученик освоил идеи и методы данного курса в такой степени, что успешно справляется со стандартными заданиями; участвует в обсуждении проблем, но без явного проявления творческих способностей; усердие и прилежание приводят к определенным положительным результатам, свидетельствующим об интеллектуальном росте и о возрастании общих умений слушателя курса.

III уровень.

Ученик освоил наиболее простые идеи и методы курса, что позволяет ему справляться со стандартными заданиями с небольшой помощью извне; не умеет самостоятельно узнавать типичные ситуации применения приемов; пассивен при проведении дискуссий и обсуждении проблем, учебная деятельность носит исполнительский характер.

IV уровень.

Ученик не проявляет прилежания и заинтересованности в освоении курса, уклоняется от участия в дискуссиях и выполнения индивидуальных заданий. Скорее всего выбор данного элективного курса оказался для него ошибочным.

Учебно-тематический план

№ п/п	Содержание материала	Количество часов
1.	Определение процента. Простейшие задачи на проценты. Решение задач с помощью составления пропорций. Правила, необходимые для решения задач. Примеры заданий и задач с использованием процентов. Задачи на изменение величин	1 час 1 час 1 час
2.	Общий подход к решению задач на смеси и сплавы. Примеры задач. Решение задач на смеси и сплавы	1 час 4 часа
3.	Задачи на определение выхода продукта или вещества, полученного в результате различных процессов	1 час
4.	Математический бой «Решение задач на проценты»	1 час

Методические рекомендации

Первый раздел, систематизирующий ранее полученные знания о процентах, рекомендуется начать с выявления прикладной и практической значимости процентов.

После повторения определения процента целесообразно показать его применение при решении простейших задач. Здесь же рекомендуется рассмотреть способ нахождения процентов от числа с помощью составления пропорции. При составлении пропорции важно определить, какая из величин принимается за 100%. Нужно показать удобство применения пропорции при решении обратных задач на проценты.

Затем рекомендуется сформулировать основные правила, необходимые для решения задач с использованием процентов:

– нахождение процента от заданного числа;

– нахождение числа по заданному значению его процентов;

– нахождение процентного отношения двух чисел.

Необходимо показать, как эти правила используются при решении самых разных задач. Это задачи об изменении дроби, в которой числитель и знаменатель увеличиваются или уменьшаются на заданное число процентов, об изменении площади, цены, производительности труда и другие.

Следует обратить внимание учащихся на два этапа в рассуждениях:

– на сколько изменилась величина;

– какой она стала после изменения.

Первые задачи рекомендуется решать с подробным объяснением и с подробными записями на доске и в тетрадях учащихся, что помогает осмысленному формированию умений. Для формирования навыков, нужно приобрести опыт решения, так как «умение решать задачи есть искусство, приобретаемое практикой». Помощь учителя не должна быть чрезмерной. Нужны вопросы и советы, активизирующие мыслительную деятельность, помогающие развивать творческий подход к решению.

Второй раздел рекомендуется начать с основных допущений, принимаемых в задачах на смеси и сплавы. Они состоят в следующем:

а) все получающиеся смеси однородны;

б) при слиянии двух растворов, имеющих объемы V_1 и V_2, получается смесь, объем которой равен V_1+V_2, причем это соотношение является именно допущением, поскольку не всегда выполняется в действительности; при слиянии двух растворов не объем, а масса смеси равна сумме масс, составляющих ее компонентов.

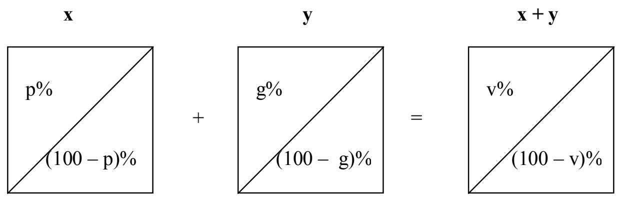
Также рекомендуется рассмотреть такие понятия, как «концентрация» (отношение объема чистой компоненты в растворе ко всему объему смеси $C_A = \frac{V_A}{V_0}$ или отношение массы чистого вещества в сплаве к массе всего сплава) и «процентное содержание» (концентрация вещества, выраженная в процентах: $p_A = C_A * 100$ %). Обратить внимание, что сумма концентраций всех компонентов, составляющих смесь, равна единице, а сумма процентного содержания всех компонентов, составляющих смесь, равна 100%.

Если известно процентное содержание вещества А, то его концентрация находится по формуле $C = \frac{p_A}{100} = 0{,}01 * p_A$. Например, если процентное содержание составляет 70%, то соответствующая концентрация равна 0,7. Процентному содержанию 10% соответствует концентрация 0,1.

Начиная решение задач, рекомендуется обсудить разные способы решения, так как рассмотрение различных вариантов решения и умение выбрать из них наиболее рациональные свидетельствует об умении ученика мыслить, рассуждать, проводить правильные умозаключения. Рассмотрение различных вариантов решения задачи воспитывает у учащихся гибкость мышления. Поиск рационального варианта решения лишь на первых порах требует дополнительных затрат времени на решение задачи. В дальнейшем эти затраты окупаются, развивается творческая активность учеников.

После решения 1–2 задач можно составить следующий алгоритм решения задач на смеси и сплавы:

1. Составим краткую запись условия задачи в виде схемы:



x и *y* – объем или масса каждой смеси или сплава.

Указанным в условии задачи способом составим новую смесь или сплав, *x* + *y* – объем или масса новой смеси или сплава.

«Расщепим» каждую смесь или сплав на отдельные компоненты:

p%, g%, v% – процентное содержание одного компонента,

(100 – p)%, (100 – g)%, (100 – v)% – процентное содержание другого компонента.

1. Найдем концентрацию нужного компонента, выразив проценты дробью (удобнее выражать десятичной дробью):

$p\% = 0{,}01 * p$; $g\% = 0{,}01 * g$; $v\% = 0{,}01 * v$.

2. Составим уравнение, пользуясь правилом нахождения процента от заданного числа:

$0{,}01p * x + 0{,}01\, g * y = 0{,}01v * (x + y)$.

Уравнение – математическая модель решаемой задачи.

3. Решим полученное уравнение.

4. Проанализируем полученные результаты.

5. Запишем ответ на вопрос задачи.

Целесообразно обратить внимание учащихся, что когда добавляется вещество, состоящее из одного компонента, то уравнение будет проще, если его составлять по тому компоненту, содержание которого не меняется.

Необходимо показать использование алгоритма и в тех случаях, когда число компонентов, входящих в смесь или сплав, больше двух, а также когда в задаче несколько условий. В этом случае составляется уже не одно уравнение, а система уравнений.

Применение математических знаний в повседневной жизни демонстрируют задачи о грибах и фруктах, которые мы сушим; об использовании сухого молока; о веществах, которые впитывают воду; о пчелах, которые перерабатывают цветочный нектар в мед и другие.

Заканчивая изучение основного раздела курса, рекомендуется еще раз подчеркнуть универсальность математических методов при решении прикладных задач: сюжеты задач различны, а модель одна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азаров А. И., Барвенов С. А. и другие. Системы алгебраических уравнений. Текстовые задачи. – Мн.: Тетрасистемс, 1998.

2. Дорофеев Г. В., Седова Е. А. Процентные вычисления. 10–11 кл. – М.: Дрофа, 2003.

3. Куланин Е. Д., Норин В. П. и другие. 3000 конкурсных задач по математике. – М.: Рольф, 1999.

4. Лурье М. В., Александров Б. И. Задачи на составление уравнений. – М: Наука, 1990.

5. Петрова И. Н. Проценты на все случаи жизни. – Челябинск: Юж.-Урал. кн. изд-во, 1996.

6. Симонов А. Я., Бакаев Д. С., Эпельман А. Г. и другие. Система тренировочных задач и упражнений по математике. – М.: Просвещение, 1991.

7. Ткачук В. В. Математика – абитуриенту. – М.: МЦНМО, 2000.

8. Решения экзаменационных задач за курс базовой школы. – Мн.: Интерпрессервис, 2003.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЗАНЯТИЙ

Занятие 1

1. Найти 25% от 120. *Ответ: 30.*

2. Найти 12% от дохода в 350 тысяч рублей. *Ответ: 42 000 р.*

3. В городе 100 000 жителей и из них 80% составляют коренное население. Узнать количество коренных жителей в этом городе. *Ответ: 80 000 чел.*

4. Сколько соли содержится в 145 граммах 80%-го раствора? *Ответ: 116 г.*

5. Какое количество 10%-го раствора может получиться из 25 г соли? *Ответ: 250 г.*

6. Какую сумму следует положить в банк, выплачивающий 25% годовых, чтобы по истечении года получить 1 млн. р.? *Ответ: 800 000 (р.)*

7. Человек обычно получает за работу «чистыми», т.е. после вычета налога в 13%, но ему интересно узнать, сколько же «по-настоящему» стоит сделанная им работа, если он получил за нее 1087,73 р. *Ответ: 1250,26 р.*

8. Сколько процентов одна тонна составляет от десяти тонн? *Ответ: 10%.*

9. Сколько процентов десять тонн составляют от одной тонны? *Ответ: 1000%.*

10. После снижения цен на 20% товар стоит 100 р. Сколько он стоил до снижения цен? *Ответ: 125 р.*

11. Товар стоит 100 р. Сколько он будет стоить после повышения цен на 20%? *Ответ: 120 р.*

12. В городе А с населением 100 тыс. жителей граждане в возрасте до 18 лет составляют 40 тыс., а в городе В с населением 200 тыс. жителей соответственно 60 тыс. В каком городе население моложе? *Ответ: Население города А моложе, чем население города В.*

13. Из 38 т сырья второго сорта, содержащего 25% примесей, после очистки получается 30 т сырья первого сорта. Каков процент примесей в сырье первого сорта? *Ответ: 5%.*

Задачи для самостоятельного решения:

1. Атмосферный воздух содержит (по объему) 77% азота, 21% кислорода, около 1% нейтральных газов и небольшие количества других примесей. В каком количестве воздуха содержится 1 м^3 чистого кислорода? *Ответ:* $\approx 4{,}8$ *м*^{3}.

2. В промышленных месторождениях содержание меди в медных рудах составляет от 0,3% до 6%.

а). Сколько надо взять медной руды, чтобы получить не менее 12 т меди?

б). Сколько меди может получиться из 12 т руды?

Ответ : а) 4000 т; б) 720 кг.

3. Фирма платит рекламным агентам 5% от стоимости заказа. На какую сумму надо найти заказ, чтобы заработать 1 тыс. рублей? *Ответ: 20 тыс. р.*

4. В каком случае процентное отношение больше:

а). 8 отличников из 40 учащихся или 9 отличников из 42 учащихся?

б). 10 разбитых лампочек из 50 или 15 разбитых лампочек из 55?

5. При остывании хлеб теряет до 4% своей массы в результате испарения воды. Сколько килограммов воды испарится при остывании 12 т выпеченного хлеба? *Ответ: 11,52 т.*

6. Яблоки при сушке теряют 84% своей массы. Сколько получится сушеных яблок из 300 кг свежих? *Ответ: 48 кг.*

7. Из хлопка-сырца получается 24% волокна. Сколько надо взять хлопка-сырца, чтобы получить 480 кг волокна? *Ответ: 2 т.*

8. Из свежих слив выходит 35% сушеных. Сколько надо взять свежих слив, чтобы получить 140 кг сушеных? *Ответ: 400 кг.*

Занятие 2–3

1. Число х увеличили на 15%, получили 109,25. Чему равно х ? *Ответ: 95.*

2. Если 5% некоторого числа составляют 23% от 15,5 , то это число равно… *Ответ: 71,3*

3. Если 90% числа равны $(\sqrt{3}-\sqrt{2}):(\sqrt{3}+\sqrt{2})+2\sqrt{6}$, то это число равно… *Ответ:* $5\frac{5}{9}$

4. Если 40% числа равны $\dfrac{0{,}536^2-0{,}464^2}{3{,}6^2-2\,x\,3{,}6\,x\,2{,}4+2{,}4^2}$, то число равно…

Ответ: 0,125

5. На сколько процентов увеличится дробь, если числитель дроби увеличить на 60%, а знаменатель уменьшить на 20%? *Ответ: на 100%.*

6. На сколько процентов увеличится дробь, если числитель дроби увеличить на 12%, а знаменатель уменьшить на 30%? *Ответ: на 60%.*

7. На сколько процентов увеличится площадь прямоугольника, если его длину увеличить на 20%, а ширину – на 10%? *Ответ: на 32%.*

8. Себестоимость тонны продукции снижена на 10%, после этого она была снижена еще на 10% и составила 16,2 рубля. Найти первоначальную себестоимость. *Ответ: 20 рублей.*

9. Цену товара сначала снизили на 20%, а потом подняли на 45%. На сколько процентов изменилась первоначальная цена товара? *Ответ: цена увеличилась на 16%.*

10. Цену товара сначала снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15% и, наконец, после перерасчета произвели снижение еще на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара? *Ответ: на 38,8%.*

11. Цены на компьютерную технику в среднем понижались за год дважды на 10%. На сколько процентов понизились цены на компьютерную технику за год? *Ответ: на 19%.*

12. Цена на товар была повышена на 25%. На сколько процентов надо теперь ее снизить, чтобы получить первоначальную цену товара? *Ответ: на 20%.*

13. Владелец бензозаправки повысил цены на бензин на 10%. Заметив, что количество клиентов резко сократилось, он понизил цены на 10%. На сколько процентов в результате этих двух изменений понизились или повысились цены на бензин. Если цены понизились, то перед числом процентов в ответе поставьте знак «минус». Если цены стали прежними, в ответе запишите нуль. *Ответ: -1.*

14. На автомобиль подняли цену сначала на 100%, а затем еще на 150%. Какой процент от теперешней цены составляет его первоначальная цена ? *Ответ: 20%.*

Задачи для самостоятельного решения:

1. На сколько процентов уменьшится дробь, если ее числитель уменьшить на 20%, а знаменатель увеличить на 60%? *Ответ: на 50%.*

2. На сколько процентов уменьшится дробь, если ее числитель увеличить на 20%, а знаменатель – на 50%? *Ответ: на 20%.*

3. На сколько процентов уменьшится произведение двух чисел, если одно из них увеличить, а другое уменьшить на 30%? *Ответ: на 9%.*

4. Повышая производительность труда сначала на 10%, а затем – на 20%, рабочий изготовил за смену 264 детали. Сколько деталей он изготовлял до повышения производительности труда? *Ответ: 200 деталей.*

5. Израсходовали 10% топлива, затем еще 25% остатка и осталось 13 литров. Сколько топлива было первоначально? *Ответ: 19 литров.*

6. Цену товара снизили на 20%, затем новую цену снизили на 25%. На сколько процентов снизили первоначальную цену? *Ответ: на 40%.*

7. В течение января цена на яблоки выросла на 30%, а в течение февраля – на 20%. На сколько процентов поднялась цена за два месяца? *Ответ: на 56%.*

8. В коммерческой фирме средняя заработная плата в ноябре понизилась на 20%, затем в январе повысилась на 30%, в августе снова понизилась на 20%, а в октябре повысилась на 10%. Поднялась или понизилась заработная плата сотрудников фирмы за данный период? *Ответ: Заработная плата понизилась приблизительно на 8%.*

9. В двух бочках воды было поровну. Количество воды в первой бочке сначала уменьшилось на 10%, а затем увеличилось на 10%. Количество воды во второй бочке сначала увеличилось на 10%, а затем уменьшилось на 10%. В какой бочке стало больше воды ? *Ответ: в бочках воды осталось поровну.*

10. Процентное содержание соли в растворе сначала снизилось на 20%, а затем повысилось на 20%. На сколько процентов уменьшилось первоначальное содержание соли? *Ответ: снизилось на 4%.*

Занятия 4–8

1. Морская вода содержит 8% соли. Сколько килограммов пресной воды надо добавить к 30 килограммам морской воды, чтобы содержание соли в морской воде составляло 5%? *Ответ: 18 кг.*

2. К 3 килограммам 20%-го раствора соли добавили 2 килограмма 10%-го раствора соли. Найти процентное содержание соли в получившемся растворе. *Ответ: 16 %.*

3. Смешали 30%-й раствор соляной кислоты с 10%-м раствором и получили 600 грамм 15%-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято? *Ответ: 150 г; 450.*

4. При смешивании 40%-го раствора кислоты с 10%-м раствором кислоты получили 800 г 21,25%-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было для этого взято? *Ответ: 300 г ; 500 г.*

5. Имеется 735 г 16%-го раствора йода в спирте. Нужно получить 10%-й раствор йода. Сколько граммов спирта нужно прибавить к имеющемуся раствору? *Ответ: 441 г.*

6. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы он содержал 60% меди? *Ответ: 13,5 кг.*

7. Имеется 200 г сплава, содержащего золото и серебро в отношении 2:3. Сколько граммов серебра надо добавить к этому сплаву, чтобы новый сплав содержал 80% серебра? *Ответ: 200 г.*

8. Имеются два сорта стали с содержанием никеля 5% и 40%.Сколько нужно взять каждого из этих сортов, чтобы получить 140 кг стали с содержанием никеля в 30%? *Ответ: 40 кг; 100 кг.*

9. Имеются два раствора кислоты разной концентрации. Объем одного раствора 4 л, другого – 6 л. Если их слить вместе, то получится 35%-й раствор кислоты. Если слить равные объемы этих растворов, то получится 36%-й раствор кислоты. Сколько литров кислоты содержится в каждом из первоначальных растворов? *Ответ: 1,64 л; 1,86 л.*

10. Имеется два раствора соли в воде, первый 40%-й, второй 60%-й. Их смешали, добавили 5 кг воды и получили 20%-й раствор. Если бы вместо 5 кг воды добавили 5 кг 80%-го раствора, то получился бы 70%-й раствор. Сколько было 40%-го и 60%-го растворов? *Ответ: 1 кг; 2 кг.*

11. Имеется сталь двух сортов, один из которых содержит 5%, другой 10% никеля. Сколько тонн каждого из этих сортов нужно взять, чтобы получить сплав, содержащий 8% никеля, если во втором куске никеля на 4 т больше, чем в первом? *Ответ: 40 т; 60 т.*

12. Имеются два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в два с половиной раза больше, чем процентное содержание золота во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40% золота. Найти, во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплавке равных по весу частей первого и второго слитков получается сплав, в котором 35% золота. *Ответ: первый слиток в 2 раза тяжелее второго.*

13. Имеются два сплава, состоящих из цинка, меди и олова. Первый сплав содержит 40% олова, второй – 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Сколько килограммов олова в новом сплаве? *Ответ: 170 кг.*

Задачи для самостоятельного решения:

1. 5%-й раствор гидроксида натрия смешали с 8%-м и получили 750 г 6%-го раствора. Найдите количество каждого раствора в полученной смеси. *Ответ: 500 г – 5%-го раствора; 250 г – 8%-го раствора.*

2. 5%-й раствор кислоты смешали с 40%-ным и получили 140 г 30%-го раствора. Сколько граммов каждого раствора в полученной смеси? *Ответ: 100 г – 40%-го раствора; 40 г – 5%-го раствора.*

3. В 2 литра 10%-го раствора уксусной кислоты добавили 8 литров чистой воды. Определить процентное содержание уксусной кислоты в полученном растворе. *Ответ: 2%.*

4. К раствору, содержащему 39 г соли добавили 1000 г воды, после чего концентрация соли уменьшилась на 10%. Найти первоначальную процентную концентрацию соли в растворе. *Ответ: на 13%.*

5. Вычислите с точностью до 0,1% концентрацию кислоты в растворе, полученном при разбавлении 321 г 10%-го раствора серной кислоты 179 граммами воды. *Ответ: на 6,42%.*

6. Найдите концентрацию раствора, получившегося при разбавлении 10 л 30%-й серной кислоты 5 литрами воды. *Ответ: на 20%.*

7. Из 15 л 40%-го раствора поваренной соли выпарили 5 л воды. Определите концентрацию получившегося раствора. *Ответ: на 60%.*

8. К 15 л 10%-го раствора соли добавили 5%-й раствор соли и получили 8%-й раствор. Какое количество литров 5%-го раствора добавили? *Ответ: 10 литров 5%-го раствора добавили.*

9. Кусок сплава меди с оловом массой 12 килограмм содержит 45% меди. Сколько килограммов чистого олова надо прибавить к этому куску, чтобы получить новый сплав, содержащий 40% меди ? *Ответ: 1,5 кг.*

10. Имеется руда из двух пластов с содержанием меди в 6% и 11%. Сколько «бедной» руды надо взять, чтобы получить при смешивании с «богатой» 20 т с содержанием меди 8%? *Ответ: 12 т.*

11. Имеются два сплава, в одном из которых содержится 20%, а в другом 30% олова. Сколько нужно взять первого и второго сплавов, чтобы после их сплавления вместе получить 10 кг нового сплава, содержащего 27% олова? *Ответ: 3 кг; 7 кг.*

12. Сплав золота и серебра содержит 20% золота. Какую массу сплава и какую массу чистого золота нужно взять для получения 80 кг нового сплава, содержащего 50% золота? *Ответ: 50 кг; 30 кг.*

13. Сплав олова и свинца содержит 40% олова. Какую массу сплава и какую массу чистого свинца нужно взять для получения 40 кг нового сплава, содержащего 10% олова? *Ответ: 10 кг; 30 кг.*

14. Кусок железа с медью массой в 30 кг содержит 45% железа. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 30% железа? *Ответ: 15 кг.*

Занятие 9

1.Только что добытый каменный уголь содержит 2% воды, а после двухнедельного пребывания на воздухе он содержит 12% воды. На сколько килограммов увеличилась масса добытой тонны угля после того, как уголь две недели пролежал на воздухе? *Ответ: 114 кг.*

2. Собрали 100 килограмм грибов. Оказалось, что их влажность 99%. Когда грибы подсушили, влажность снизилась до 98%. Какой стала масса грибов после подсушивания? *Ответ: 50 кг.*

3. Свежие фрукты содержат 72% воды, а сухие 20%. Сколько получится сухих фруктов из 20 килограмм свежих? *Ответ: 7 кг.*

4. Определить, сколько килограммов сухарей с влажностью 15% можно получить из 255 кг хлеба с влажностью 45%? *Ответ: 165 кг.*

5. Сколько надо добавить воды к 100 г сухого молока с содержанием 7% воды, чтобы получить молоко с содержанием 60% воды? *Ответ: 132,5 г.*

6. Сколько килограммов воды нужно выпарить из 0,5 тонны целлюлозной массы, содержащей 85% воды, чтобы получить массу с содержанием целлюлозы 25%? *Ответ: 200 кг.*

7. Влажность сухой цементной смеси на складе составляет 17%. Во время перевозки из-за дождей влажность повысилась на 3%. Найти массу привезенной смеси, если со склада ее было отправлено 800 кг. *Ответ: 830 кг.*

8. 5 литров сливок с содержанием жира 35% смешали с 4 литрами 20%-х сливок и к смеси добавили 1 литр чистой воды. Какой жирности получилась смесь? *Ответ: 25,5%.*

Задачи для самостоятельного решения:

1. Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сушеные 20% воды. Сколько свежих грибов нужно собрать, чтобы получить из них 4,5 килограмм сушеных? *Ответ: 36 кг.*

2. В магазин завезли 100 кг фруктов с содержанием воды 99%. После хранения процент содержания воды уменьшился на 1%. Каков стал вес фруктов? *Ответ: 50 кг.*

3. Сколько граммов воды нужно выпарить из 0,5 кг солевого раствора, содержащего 85% воды, чтобы получить массу с содержанием 75% воды? *Ответ: 200 г.*

4. Сколько килограммов воды надо выпарить из 100 килограмм массы, содержащей 90% воды, чтобы получить массу, содержащую 80% воды? *Ответ: 50 кг.*

5. Древесина только что срубленного дерева содержит 64% воды. Через неделю количество воды стало уже 48% от веса дерева. На сколько уменьшился при этом вес дерева, если только что срубленное оно весило 7,5 ц? (Ответ дать с точностью до 0,1 ц). *Ответ: на 2,3 ц.*

6. Пчелы, перерабатывая цветочный нектар в мед, освобождают его от значительной части воды. Исследования показали, что нектар обычно содержит 70% воды, а полученный из него мед содержит только 17% воды. Сколько килограммов нектара приходится перерабатывать пчелам для получения 1 кг меда? *Ответ: 2,77 кг.*

Занятие 10

Вопросы командам:

№ вопроса	Вопросы команде 1	Вопросы команде 2
1	2	3
1.	Найти 1% от 34 000 рублей. *Ответ: 340 рублей*	Найти 1% от 1 км. *Ответ: 10 метров*
2.	Найти 1% от 0,3 литра. *Ответ: 0,003 литра*	Найти 1% от 200 г. *Ответ: 2 грамма*
3.	Найти 1% от 6 тыс. жителей. *Ответ: 60 человек*	Найти 1% от 6 га. *Ответ: 0,06 га*
4.	Найти 1% от 700 овец. *Ответ: 7 овец*	Найти 1% от 12 рублей. *Ответ: 12 копеек*
5.	Найти целое, если 1% от него составляет 0,2 литра. *Ответ: 20 литров*	Найти целое, если 1% от него составляет 30 м^3. *Ответ: 3000 м^3.*
6.	Найти целое, если 1% от него составляет 10 рублей. *Ответ: 1000 рублей*	Найти целое, если 1% от него составляет 38 человек. *Ответ: 3800 человек*
7.	Верно ли, что 1см равен 1% от 1 метра? *Ответ: верно*	Верно ли, что 1 грамм равен 1% от 1 килограмма? *Ответ: неверно*
8.	Верно ли, что 1 ар равен 1% от 1 гектара? *Ответ: верно*	Верно ли, что 1 литр равен 1% от 1 м^3? *Ответ: неверно*
9.	Найти 200% от 200 литров. *Ответ: 400 литров*	Найти 25% от 10 км. *Ответ: 2,5 км*
10.	Найти 10% от 140 экземпл. *Ответ: 14 экземпляров*	Найти 50% от 30 человек.. *Ответ: 15 человек*
11.	Найти 40% от 45 штук. *Ответ: 18 штук*	Найти 20% от 600 штук. *Ответ: 120 штук*
12.	Сколько сахара потребуется для получения 500 г 10%-го сиропа? *Ответ: 50 г сахара*	К одной части сахара прибавили 4 части воды. Какова концентрация полученного раствора? *Ответ: 20%*

Задачи командам:

№ п/п	Задачи команде 1
1.	В результате смешивания 15%-го и 30%-го растворов соли получено 600 г 20%-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?
2.	Имеется два сплава, в одном из которых содержится 40%, а в другом 20% серебра. Сколько килограммов второго сплава нужно добавить к 20 кг первого, чтобы после сплавления вместе получить сплав, содержащий 32% серебра?

№ п/п	Задачи команде 2
1.	Имеются два раствора соли 10%-й и 40%-й концентрации. Сколько потребуется 40%-го раствора, чтобы при смешивании получить 8 литров 28%-го раствора?
2.	Имеются два сплава золота и серебра, в одном из которых содержится 30%, а в другом 50% золота. Сколько килограммов второго сплава нужно добавить к 10 кг первого, чтобы после сплавления вместе получить сплав, содержащий 55% серебра?

Межпредметные курсы по математике, физике, химии

ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ

***И. Л. Бабкина**, учитель химии; **Н. А. Рябинина**, учитель физики;*
***Н. С. Вострилова**, учитель математики МОУ «СОШ № 2» г. Грязовца*

Пояснительная записка

Элективный курс для предпрофильной подготовки учащихся 9-х классов посвящен решению текстовых задач на проценты в курсе математики, физики, химии.

В процессе изучения математики в пятых-девятых классах, физики в седьмых-девятых классах, химии в восьмых-девятых классах постоянно расширяется круг рассматриваемых задач, возрастает их сложность. Учащиеся решают большое количество текстовых задач, в которых встречается понятие «процент», знакомятся с формулами процентного сравнения и сложных процентов. Тему «Проценты» нельзя отнести к легко усваиваемой. Ее традиционное изучение сосредоточено в строгих временных рамках курса 5–6 классов, что не позволяет расширить спектр практических приложений и полноценно учитывать возрастные возможности учащихся в формировании ряда важных практических умений в работе с процентами.

Прежде всего отметим, что при изложении темы «Проценты» реализуются многие общие методические особенности, характерные для курса в целом. Тема разворачивается по спирали. На каждом занятии учащиеся возвращаются к процентам на новом уровне, их знания дополняются, добавляются новые типы задач и приемы решения. Появляется возможность включать задачи, которые сейчас в действующих учебниках не могут рассматриваться просто в силу возрастных особенностей школьников. Вопросы, связанные с процентами, позволяют сориентировать курс на практику, показать учащимся, что приобретаемые ими математические знания применяются в повседневной жизни. Интерес в значительной степени поддерживается также и содержанием задач, суть которых приближена к современной тематике и к жизненному опыту подростков. Это служит достаточно сильным мотивом для решения предлагаемых задач. Изучение процентов опирается на предметно-практическую деятельность школьников.

При изложении этой темы реализованы широкие возможности для дифференцированного обучения учащихся. Задачи предлагаются в широком диапазоне сложности – от самых простых, базовых, до достаточно трудных. Учитель может подобрать материал, соответствующий возможностям школьников. При обучении решению задач на проценты учащиеся знакомятся с разными способами решения задач, причем спектр приемов шире, чем это бывает обычно. Ученик овладевает разнообразными способами рассуждения, обогащая свой арсенал приемов и методов. Но при этом также важно, что он имеет возможность выбора и может пользоваться тем приемом, который ему кажется более удобным.

Программа содержит три блока: задачи по математике, физике, химии. Учитель в зависимости от уровня математической подготовки класса, может менять порядок блоков и тем в нем, рассматривать не все включенные в него вопросы, а отбирать материал по своему усмотрению в соответствии с возможностями и интересами детей. Важно, что курс является открытым: в нем можно добавлять новые фрагменты, развивать предложенную тематику или заменять.

Первый блок содержит материал по математике. Здесь систематизируется материал по теме «Проценты». Каждое занятие направлено на то, чтобы развить интерес школьников к предмету, познакомить их с новыми идеями и методами, расширить представления об изучаемом в основном курсе материале, а главное, порешать интересные задачи. Материал для занятий подобран таким образом, чтобы можно было проиллюстрировать применение математики на практике, показать связь математики с другими областями. На блок отводится 7 часов.

На второй блок отводится 3 часа, его цель – развитие познавательного интереса учащихся к систематическому и глубокому изучению курса физики.

Задача учителя состоит в том, чтобы стимулировать применение теоретических основ физики как рабочего аппарата для решения конкретных задач, помочь глубже и полнее освоить курс физики учащимся, желающим в дальнейшем изучать естественные дисциплины.

На третий блок отводится 4 часа.

Освоение химии невозможно без решения расчетных задач, решение которых позволяет лучше усвоить и систематизировать теоретический материал. Без практики решения задач знания учащихся бывают сильно формализованы и целями данного блока являются:

– выработать у учащихся умения и навыки в решении расчетных задач;

– способствовать развитию у учащихся познавательного интереса к науке – химия;

– способствовать развитию логического и творческого мышления;

– научить учащихся применять имеющиеся и приобретаемые химические знания в новых, незнакомых ситуациях.

На изучение трех блоков отводится 14 часов. Заметим, что проверка усвоения материала в конце курса не предполагается. Предлагается поэтапный контроль знаний в конце каждого блока в выбираемой учителем форме.

В процессе реализации курса рекомендуется провести интегрированные занятия по темам: «Задачи предпринимателя» и «КПД механизмов» (математика и физика)*, задачи на сплавы и смеси (математика и химия)**, задачи на концентрацию и процентное содержание (математика и химия)***, решение всех типов задач (сушка грибов, фруктов, овощей ...) и влажность воздуха (математика и физика)****.

Программа содержит приложение, откуда учитель может выбрать задачи для работы с учащимися. Задачи каждого раздела расположены по принципу усложнения и углубления содержания.

УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№ п/п	Наименование блоков, разделов и тем	Всего часов	Форма контроля
1	2	3	4
I.	**МАТЕМАТИКА**		
1.	Что такое проценты: – типы задач на проценты; – задачи предпринимателя*	1	
2.	Сложные проценты	1	Сам. работа
3.	Задачи на процентные соотношения и части (повышение, понижение цены, объема продукции)	1	
4.	Задачи на сплавы и смеси**	1	
5.	Задачи на концентрацию и процентное содержание***	1	Самоконтроль, взаимоконтроль
6.	Задачи на разбавление	1	
7.	Решение всех типов задач****	1	Собеседование
II.	**ФИЗИКА**		
1.	Что такое КПД (коэффициент полезного действия) механизмов. Решение задач на КПД механизмов	1	
2.	Тепловые явления. Тепловые двигатели. Электрические явления. Работа и мощность электрического тока	1	
3.	Влажность воздуха ****	1	Практическая работа
III.	**ХИМИЯ**		
1.	Химические формулы. Закон постоянства состава веществ: – задачи на установление молекулярной формулы вещества по массовой доле элементов; – расчеты по химическим формулам (определение массовой доли элементов в сложном веществе)	1	Самостоятельная работа (5–7 мин)
2.	Растворы. Насыщенные растворы. Концентрации растворов, в которых проходят химические реакции: – процентная концентрация***; – молярная концентрация; – на смешение растворов с различным содержанием растворенного вещества	1	Самостоятельная работа (5–7 мин)
3.	Закон сохранения массы веществ. Расчеты по уравнениям химических реакций: – с учетом массовой и объемной доли; – с учетом массовой доли примесей в реагенте; – с учетом выхода продукта реакции в процентах от теоретически возможного; – нахождением, какое из веществ вступает в реакцию полностью (избыток веществ)	1	Самостоятельная работа (5–7 мин)
4.	Задачи на сплавы и смеси**: – определение состава двух- и трехкомпонентной смеси по массам веществ, образующихся в ходе одной или нескольких реакций	1	

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

МАТЕМАТИКА

1. Что такое проценты.

Основная цель этого этапа – вспомнить и систематизировать понятие процента и типов задач на проценты. Обратить внимание на ключевые слова, подсказывающие выбор типа задачи.

Познакомив учащихся с «задачами предпринимателя», полезно организовать работу в малых группах и предложить самим составить аналогичные задачи. *

2. Сложные проценты.

Сведения о простых и сложных процентах, которые сами по себе имеют большую практическую значимость, являются достаточно благоприятным материалом для применения знаний, полученных ранее. На примере задачи дается формула сложных процентов, предлагается система упражнений для ее закрепления. Формируется умение выполнять прикидку или оценку результата вычисления. Используется калькулятор.

3. Задачи на процентные соотношения и части.

Предлагаемые в системе упражнений задачи, как правило, допускают разные способы рассуждений, и учащиеся самостоятельно выбирают более удобный и понятный для себя. Кроме задач на нахождение процента от величины, рассматриваются задачи на нахождение величины по известному ее проценту.

4. Задачи на сплавы и смеси.

По мере овладения новым математическим аппаратом при изучении алгебры, учащиеся осваивают новую стратегию решения расчетных задач на проценты – с помощью составления уравнения.**

5. Задачи на концентрацию и процентное содержание.

Данный раздел начинается с изучения теории и содержит большое количество разнообразных задач. Задачи на «концентрацию», «сплавы», «банковские расчеты» – это примеры практических задач, позволяющие продемонстрировать, как формальные алгебраические знания применяются в реальных жизненных ситуациях. Несколько задач раздела предложить для контроля.***

6. Задачи на разбавление.

Аналогично предыдущему разделу решение задач этого типа также начинается с теории.

7. Решение всех типов задач.

Обобщающее занятие рекомендуется провести в форме собеседования с целью выявления уровня усвоения материала, изучения мнения о содержании задач.****

ФИЗИКА

1. Что такое коэффициент полезного действия механизма. Решение задач на КПД механизмов.*

Учащиеся должны знать определение КПД, уметь вычислять КПД по формуле $\eta = \frac{A_п}{A_з} \cdot 100\%$, знать, что полезная работа – это часть работы для выполнения которой создан механизм, объяснять, что КПД реальных машин и механизмов меньше единицы.

2. Тепловые явления, тепловые двигатели. Электрические явления. Работа и мощность электрического тока.

Рассматривается несколько задач на процентное изменение физической величины, а далее на КПД. Учащиеся должны выполнить формулы для расчета сопротивления проводника, работы и мощности электрического тока, а также формулы на расчет количества теплоты.

3. Влажность воздуха.**

Повторить, что такое относительная влажность, уметь находить ее, используя таблицы и формулы. На этом уроке необходимо также провести самостоятельную работу с целью выяснения усвоения материала.

ХИМИЯ

1. Химические формулы. Закон постоянства состава веществ.

Из теоретических вопросов вспомнить, что такое химическая формула, каких видов она бывает (простейшая и истинная), сравнить их. Вспомнить формулировку закона постоянства состава веществ и, используя теоретические материалы, прорешать задачи на установление молекулярной формулы вещества по массовой доле элементов и на определение массовой доли элементов в сложном веществе.

2. Растворы. Насыщенные растворы. Концентрации растворов, в которых проходят химические реакции.

На этом занятии следует еще раз отметить огромное значение растворов в природе, технике, быту. Разные вещества растворимы в воде по-разному. Как же сравнить два раствора? Важнейшей характеристикой раствора является его концентрация, т. е. содержание в нем растворенного вещества. В химии используются несколько методов выражения концентрации раствора. Мы рассматриваем наиболее распространенные:

1) массовая доля (процентная концентрация по массе), которая вычисляется по формуле:

$$\omega_{\%вещ-ва} = \frac{m_{в-ва}}{m_{р-ра}} \cdot 100\% = \frac{m_{в-ва}}{\rho \cdot V_{р-ра}} \cdot$$

где ρ – плотность раствора;

2) молярная концентрация (молярность):

$$C = \frac{\upsilon(n)}{V}\, моль / литр,$$

где υ или n – количество вещества,

V – объем раствора.

При решении задач на смешивание растворов с разными концентрациями формулируем правило смешивания: массы смешиваемых растворов m_1 и m_2 обратно пропорциональны разностям массовых долей ω_1 и ω_2 смешиваемых растворов и массовой доли смеси ω_3. Для облегчения использования правила смешения можно применять правило креста или квадрат Пирсона:

$$\begin{array}{ccccc} \omega_1 & & & \omega_3 - \omega_2 & m_1 \\ & \searrow \; \omega_3 \; \nearrow & & & \\ & \nearrow \quad\;\; \searrow & & & \\ \omega_1 & & & \omega_3 - \omega_2 & m_2 \end{array}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_3}$$

Для этого по диагонали из большей величины концентрации вычитают меньшую $(\omega_1 - \omega_3)$, $\omega_1 > \omega_3$, и $(\omega_3 - \omega_2)$, $\omega_3 > \omega_2$. Затем составляют отношение масс исходных растворов m_1/m_2 и решают задачу***.

3. Закон сохранения массы веществ. Расчеты по уравнениям химических реакций.

Расчеты по уравнениям химических реакций ведутся на основе закона сохранения массы веществ с применением стехиометрических расчетов. Задачи данной группы способствуют пониманию химических процессов, приобщают учащихся к решению производственных проблем химической промышленности, и в какой-то степени способствуют профориентации учащихся.

4. Решение задач на сплавы и смеси.**

Решение задач на смеси и сплавы требует синтеза знаний внутрипредметных (химия) и межпредметных (химия и математика).

БАНК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Что такое проценты

1. Ежемесячный подоходный налог взимается в размере 12% от суммы, превышающей минимальную з/плату. Найти величину налога, если размер минимальной з/платы1000 рублей, а зарплата 6000 рублей в месяц.

2. Торговая фирма покупает товар по оптовой цене 2300 рублей и продает его в розницу с надбавкой в 6%. Какова розничная цена?

3. Какую сумму надо вложить в банк, чтобы при годовой процентной ставке в 80% через год получить доход в 1млн. рублей.

4. Пеня за несвоевременную квартирную плату начисляется в размере 0.1% от неуплаченной суммы за каждый день просрочки. На сколько дней была задержана квартирная плата, если на сумму 200 рублей была начислена пеня 10 рублей.

5. Цена увеличилась в 2 раза. На сколько % увеличилась цена?

6. Цена увеличилась на 250%. Во сколько раз увеличилась цена?

7. После снижения цен на 5% стоимость 1м ткани стала равной 38руб. Сколько стоил 1м ткани до снижения?

Задачи предпринимателя

1. Расходы предпринимателя на один проект составили 1000 руб., а на второй – 1200 руб. В результате осуществления первого проекта он получил прибыль 2700 руб., а второго 3000 руб. Какой проект более выгодный?

2. Чистый доход предпринимателя за месяц составил 34 500 руб. В виде налогов он должен уплатить 31% от дохода. Какую сумму он получил после уплаты налогов?

3. После уплаты всех налогов, которые в сумме составили 31% от дохода, предприниматель оставил себе на законном основании 34 500 руб. Какова была величина чистого дохода предпринимателя?

4. Предприниматель реализовал партию товара, 80% которой составил товар первого сорта и 20% товар второго сорта, получив прибыль 11%. Определите, какую прибыль получил предприниматель при реализации товара 1 сорта, если при реализации товара 2 сорта убыток составляет 5%.

5. Предприниматель реализовал продукцию двух видов, получив прибыль 18% на продукцию первого вида и 8% на продукцию второго вида. Найдите процентное соотношение продукции первого и второго вида, если общая прибыль составила 12%.

6. Предприниматель, продав продукцию за 29 900 руб. получил бы 15% прибыли. За сколько он должен продать продукцию, чтобы получить 20% прибыли.

Сложные проценты

1. Цена на бензин в первом квартале увеличилась на 20%, а во втором – на 30%. На сколько процентов увеличилась цена на бензин за два квартала?

2. Банк принимает вклады на один месяц с выплатой 10% от вложенной суммы. Так, вложив в этот банк, например100 руб., через месяц можно получить 110 руб. (т. к. 10% = 0,1, 100 х 0,1 = 10 руб.) в итоге 110 руб.

На следующий месяц можно опять положить 100 руб. и к концу второго месяца получить еще 10 руб. Но можно поступить и по-другому – на второй месяц положить в банк и 100 руб. и 10 руб. дохода, и тогда суммарный доход за два месяца составит не 20 руб. как в первом случае, а 21руб. (т.к. 10% от 10 руб. это 1 руб.). Как правило, банки объявляют годовую ставку – для примера возьмем 50% годовых. Это значит, что через год вложенная сумма увеличится на 50% , а еще через год – на 50% от накопленной суммы. В этом случае говорят о сложных процентах.

Сложные проценты лишь в первый год начисляются на первоначальную сумму, а во все последующие на ту сумму, которая образовалась в конце предыдущего года от прибавления дохода по процентам.

Точно также, если инфляция составляет 5% в неделю, то через две недели она составит не 10%, а 10,25% т. к. 5% от 5% это 5 х 0,5 = 0,25%, а через месяц не 20%, а почти 22%.

Вообще, если некоторая величина первоначально имела значение *а*, а затем, через определенные промежутки времени она увеличивается по правилу сложных процентов, возрастая каждый раз на *р %* (увеличиваясь в $(1+\frac{p}{100})$ раз), то через n промежутков времени она примет значение

$$в = а\,(1+\frac{p}{100})^n.$$

3. 150 руб. положены в банк. Вычислить сумму, которую можно получить через шесть лет при ставке 5% годовых.

4. Какой должна быть процентная ставка в банке, чтобы каждые 3 года капитал увеличивался в 3 раза?

5. Какой должен быть первоначальный капитал, чтобы при начислении по 15% в месяц получить через пол года 1000 руб.

6. Через какое время цены возрастут вдвое, если инфляция составляет в среднем 20% в месяц?

7. В банк положен вклад из расчета 3 % годовых. Какой доход (в %) принесет вклад через 4 года?

8. Сберкасса выплачивает 3 % годовых. Через сколько лет внесенная сумма удвоится?

9. В банк положен вклад из расчета 8% годовых. Через год вкладчик положил на счет сумму, составляющую 20 % первоначального вклада, а еще через три года снял весь вклад. Какая сумма (в % к первоначальному вкладу) оказалась на счету вкладчика?

10. Рост кристалла в год составляет 4% по отношению к его массе. Найдите массу кристалла через 4 года, если первоначально она была равна 10 г.

11. Население страны увеличивается ежегодно на 5%. На сколько процентов увеличится население за 5 лет?

12. Капитал в 54 000 руб. был сдан в банк и через год обратился в 56 700 руб. какую сумму получит вкладчик через 2 года?

13. Выработка продукции за год работы предприятия возросла на 4%. На следующий год она увеличилась на 8%. Определить средний ежегодный прирост продукции за двухлетний период.

14. Мероприятия по дезактивации радиоактивного заражения территории проводились в 4 этапа. На каждом из них уровень радиации снижался на определенное количество процентов по отношению к ее уровню на предыдущем этапе: на первом этапе – на 20%; на втором этапе – на 30%, на третьем этапе – на 40 %, на четвертом этапе – на 50%. На сколько процентов в результате уменьшится уровень радиации на зараженной территории?

15. Предположим, что ежемесячный процент инфляции составляет 30%, а ежеквартальное увеличение денежных доходов населения – 95%. На сколько процентов и в какую сторону меняется жизненный уровень населения за квартал?

16. Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк 3/4 от всей суммы, которую он был должен банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму, на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

17. Гражданин положил в сбербанк некоторую сумму денег под фиксированный процент годового дохода. За первые два года сумма вклада возросла на 60 000 руб. а за третий год еще на 49 000 руб. Какова первоначальная сумма вклада?

18. В коммерческий банк положили 1 млн. руб. Определить величину вклада через 2 года, если за каждый год начисляется 2%.

19. Сберкасса выплачивает 3% годовых. Через сколько лет внесенная сумма удвоится?

20. Предприятие увеличивало объем выпускаемой продукции ежегодно на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что за два года объем выпускаемой продукции возрос в 2 раза.

Задачи на процентные соотношения и части

1. В январе завод выполнил 105% месячного плана выпуска годовой продукции, в феврале дал продукции на 4% больше, чем в январе. На

сколько процентов завод перевыполнил двухмесячный план выпуска продукции?

2. Найти три числа, если первое составляет 80% второго, второе относится к третьему, как 10:9, а сумма первого и третьего – на 70 больше второго.

3. Студент купил две книги, уплатив за них 60 руб. Если бы первая стоила на 25% меньше, а вторая – на 50% больше, то цены книг были бы одинаковы. Сколько денег уплатил студент за каждую книгу?

4. В первую поездку автомобиль израсходовал 10% бензина, имеющегося в баке, во вторую поездку – 25% остатка. После этого в баке осталось на 13 литров меньше, чем было первоначально. Сколько литров бензина находилось в баке первоначально?

5. В библиотеке имеются книги на трех языках – русском, английском и немецком. Русские книги составляют 75% фонда, английские 20% от количества русских книг, а остальные 108 книг – немецкие. Сколько всего книг в библиотеке?

6. Сумма двух чисел равна 24. Найдите большее из чисел, если 35% одного из них равно 85% другого.

7. Стоимость 60 экземпляров первого тома и 75 экземпляров второго тома составляет 2700 руб. В действительности за книги было уплачено 2370 руб. т. к. была произведена скидка в размере 15% на первый том и 10% на второй. Найдите первоначальную стоимость каждого тома.

8. На сколько процентов изменится частное двух чисел, если числитель уменьшить на 40%, а знаменатель – на 20%.

9. На сколько процентов изменится произведение двух чисел, если одно из них уменьшить на 20%, а другое увеличить на 40%?

10. Как изменится произведение двух чисел, если одно из них увеличить, а другое уменьшить на 30%?

11. На сколько процентов увеличится дробь, если ее числитель уменьшить на 30%, а знаменатель – на 50%.

12. Студент купил две книги, уплатив за них 6 руб. Если бы первая стоила на 25% меньше, а вторая – на 50% больше, то цены книг были бы одинаковые. Сколько денег уплатил бы студент за каждую книгу?

13. Антикварный магазин, купив два предмета за 225 руб., продал их, получив 40% прибыли. Что стоит магазину каждый предмет, если на первом прибыли было получено 25%, а на втором – 50%?

14. За килограмм одного продукта и 10 кг другого заплачено 2 рубля. Если при сезонном изменении цен первый продукт подорожает на 15%, а второй подешевеет на 25%, то за такое же количество этих продуктов будет заплачено 1р. 82к. Сколько стоит килограмм каждого продукта?

15. В начале года в сберкассу на книжку было внесено 1640 руб., а в конце года было взято обратно 882 рубля. Еще через год на книжке оказалось 882 рубля. Сколько процентов в год начисляет сберкасса?

16. Объемы работ, выполненных тремя организациями относятся как 1:7:12. Какой процент от общего объема работ выполнен второй организацией?

17. В первый сплав входят два металла в отношении 1:2, во второй сплав входят те же металлы, но в отношении 3:2. Из частей первого и второго сплавов получили третий сплав, в котором те же металлы входят в отношении 2:3. Во сколько раз больше взяли частей первого сплава, чем частей второго сплава?

18. Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1:2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2:3. Из какого количества обоих сплавов можно получить 44 кг третьего сплава, содержащего те же металлы в отношении 17:27?

Повышение, понижение цены, объема продукции...

1. Цену товара снизили на 20%, затем ее снизили еще на 30%. На сколько процентов снизилась первоначальная цена товара?

2. Цена изделия сначала возросла на 10%, а затем была снижена на 20%. На сколько процентов изменилась цена по отношению к первоначальной?

3. Аквариум частично заполнен водой. За месяц 40% воды испарилось. При этом объем воздуха в аквариуме увеличился на 60%. Какую часть объема занимала вода в конце месяца?

4. Первоначальная себестоимость единицы продукции была равна 50 000 руб. В течение первого года производства она повысилась на некоторое число процентов, а в течение второго года снизилась (по отношению к повышенной себестоимости) на такое же число процентов, в результате чего она стала равной 48 000 рублей. Определить проценты повышения и снижения себестоимости продукции.

Задачи на сплавы и смеси

1. Сплав серебра и меди имеет массу 5 кг, при чем масса серебра составляет $14\frac{2}{7}$ % массы меди. Сколько серебра и меди в данном сплаве?

2. В результате переплавки двух брусков сплава меди с цинком получено 40 кг сплава, содержащего 60% меди. Определите массу второго бруска и процентное содержание в нем меди, если первый брусок содержал 18 кг меди и 6 кг цинка.

3. В результате смешивания 15%-го и 30%-го раствора соли получено 600 г 20%-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

4. Имеется 2 раствора соли д10%-й и 40%-й концентрации. Сколько потребуется 40%-го раствора, чтобы при смешивании получить 8 л 28%-го раствора?

Задачи на концентрацию и процентное содержание

Пусть даны три различных вещества *а, в, с* с массами M_a, $M_в$, M_c. Масса смеси, составленной из этих веществ, равна $M_a + M_в + M_c$. Массовой концентрацией вещества *а* в смеси называется величина C_a, вычисляемая по формуле:

$$C_a = \frac{M_a}{M_a + M_в + M_c}; \quad C_в = \frac{M_в}{M_a + M_в + M_c}; \quad C_c = \frac{M_c}{M_a + M_в + M_c}.$$

Массовые концентрации C_a, $C_в$, C_c связаны равенством $C_a + C_в + C_c = 1$.

Процентным содержанием веществ *а, в* и *с* в данной смеси называются величины $r_a\%$, $r_в\%$, $r_c\%$ соответственно, вычисляемые по формулам: $r_a\% = c_a$ x 100 %; $r_в\% = c_в$ x 100 %; $r_c\% = c_c$ x 100 %.

Объемные концентрации веществ в смеси определяются такими же формулами, как и массовые концентрации, только вместо компонентов масс M_a, $M_в$, M_c будут стоять компоненты $\sqrt{a}, \sqrt{в}, \sqrt{c}$.

1. Морская вода содержит 7% соли по массе. Сколько пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли составила 3%?

2. Морская вода содержит 5% (по весу) соли. Сколько кг пресной воды нужно добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в последней составляло 2%?

3. Имеется 2 сорта стали с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов, чтобы получить 140 кг стали с содержанием никеля 30%?

4. Из 38 тонн сырья второго сорта, содержащего 25% примесей, после очистки получается 30 тонн сырья первого сорта. Каков процент примесей в сырье первого сорта?

5. Сколько кг воды нужно выпарить из 0,5 тонн целлюлозной массы, содержащей 85% воды, чтобы получить массу с содержанием воды 75%?

6. В 2 л 10%-го раствора уксусной кислоты добавили 8 л чистой воды. Определить процентное содержание уксусной кислоты в полученном растворе.

7. К раствору, содержащему 39 г соли, добавили 1000 г воды, после чего концентрация соли уменьшилась на 10%. Найти первоначальную концентрацию соли в растворе.

8. Сколько кг воды надо выпарить из 100 кг раствора, содержащего 90% воды, чтобы получить раствор, содержащий 80% воды?

9. Имеется 200 г сплава, содержащего золото и серебро в отношении 2:3. Сколько граммов серебра надо добавить к этому сплаву, чтобы новый сплав содержал 80% серебра?

10. При смешивании 30%-го раствора кислоты с 10%-м раствором кислоты получилось 400 г 15%-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

11. Имеются 2 сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй – 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и во втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получим новый сплав, в котором будет 30% цинка. Определить сколько кг олова содержится в новом сплаве.

Дополнительно

1. Сколько воды надо добавить к 80 г раствора, содержащего 15% соли, чтобы получить 12%-й раствор?

2. Сколько воды надо добавить к 180 г сиропа, концентрация сахара в котором 25%, чтобы получить сироп с концентрацией сахара 20%?

3. Сколько 20%-го сахарного сиропа надо добавить к 200 г воды, чтобы концентрация сахара в полученном растворе была 5%?

4. Сколько воды надо выпарить из 80 г 6%-го раствора соли, чтобы получить раствор, содержащий 10% соли?

5. Сколько 30%-го раствора соли надо добавить к 80 г 12%-го раствора этой же соли, чтобы получить 20%-й раствор соли?

6. 2 слитка, один из которых содержит 35% серебра, а другой – 65%, сплавляют и получают слиток массой 20 г, содержащий 47% серебра. Какова масса каждого из этих слитков?

Задачи на разбавление

В сосуде находится $M_{кг}$ p%-го раствора соли. Из сосуда выливается $a_{кг}$ смеси и доливается $a_{кг}$ воды, после чего раствор перемешивается. Эта процедура повторяется n раз. По какому закону меняется концентрация соли в сосуде, т. е. какова будет концентрация соли после n процедур

$$C_n = \frac{p}{100}(1 - \frac{a}{M})^n ?$$

1. Из бутылки, наполненной 12%-м (по массе) раствором соли, отлили 1 л соли и добавили 1 л воды, затем еще 1 л отлили и опять долили водой. В бутылке оказался 3%-й раствор соли. Какова вместимость бутылки?

2. Из сосуда с кислотой отлили 60 л кислоты и долили 60 л воды. После этого отлили 60 л смеси и опять долили в сосуд 60 л воды. После чего оказалось, что раствор содержит 10 л кислоты. Сколько литров кислоты было в сосуде первоначально?

3. Сосуд емкостью 20 л заполнен обезвоженной кислотой. Часть этой кислоты отлили, а сосуд доверху долили водой. Затем снова отлили столько же жидкости, сколько кислоты в первый раз, и сосуд опять долили водой. В результате получился 16%-й раствор. Сколько кислоты отлили из сосуда в первый раз?

Сушка грибов, фруктов, овощей...

1. Свежие грибы содержат по весу 88% воды, а сухие – 10%. Сколько получится сухих грибов из 25 кг свежих?

2. Сколько сухарей с влажностью 15% можно получить из 255 кг хлеба с влажностью 45%?

3. Цветы при сушке теряют 72% своей массы. Сколько цветов надо взять, чтобы приготовить из них $12\frac{1}{4}$ кг сухих цветов?

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

КПД механизмов

1. Поднимая при помощи подвижного блока ведро с песком весом 200 Н на высоту 5 м, производят работу 1020 Дж. Какой процент составляет энергия, которая была затрачена непроизводительно? *(2%)*

2. Ведро с песком массой 24,5 кг поднимают при помощи неподвижного блока на высоту 10 м, действуя на веревку силой 250 Н. Вычислите КПД установки. *(98%)*

3. С помощью неподвижного блока груз массой 100 кг поднят на высоту 5 м. Определите совершенную при этом работу, если КПД равен 70%. *(7 кДж)*

4. Ящик с гвоздями, масса которого 54 кг, поднимают на пятый этаж строящегося дома при помощи подвижного блока, действуя на трос силой 360 Н. Вычислите КПД установки. *(75%)*

5. Груз, масса которого 1,2 кг, ученик равномерно переместил к вершине наклонной плоскости длиной 0,8 м и высотой 0,2 м. При этом пе-

ремещении сила, направленная параллельно длине наклонной плоскости, была равна 5,4 Н. Какой результат должен получить ученик при вычислении КПД установки? *(55%)*

6. При равномерном перемещении груза массой 15 кг по наклонной плоскости динамометр, привязанный к грузу, показывал силу, равную 40 Н. Вычислите КПД наклонной плоскости, если длина ее – 1,8 м, а высота – 30 см. *(62,5%)*

7. По наклонной плоскости длиной 5 м и высотой 1,5 м поднимается груз массой 180 кг. Чему равны полезная работа и КПД, если коэффициент трения равен 0,3? *(51%)*

8. Двигатель подъемного крана мощностью 6 кВт поднимает груз массой 6 т на высоту 8 м. Определите время подъема груза, если КПД установки равен 80%. *(98 с)*

9. Сколько воды можно поднять из колодца глубиной 36 м в течение 1 часа, если мощность электродвигателей насоса 4,9 кВт, а КПД установки равен 70%. *(35т)*

10. Моторы электропоезда при движении со скоростью 54 км/ч потребляют мощность 900 Вт. Коэффициент полезного действия моторов и передающих механизмов равен 80%. Определить силу тяги моторов. *(48 Н)*

11. Клеть поднимается с постоянным ускорением а = 0,1 м/с^2 в течение 5 с. Определить среднюю мощность, развиваемую мотором подъемника за этот промежуток времени. КПД мотора – 80%, масса клети с грузом – 5000 кг. *(15,5 кВт)*

12. Мощность гидростанции N = 75 МВт. Какой объем воды расходуется в секунду (м^3/с) если КПД станции – 75% и плотина поднимает уровень воды на высоту 10 м (плотность воды 1000 кг/м^3). *(562,5 м^3/с)*

13. Бетононасос при перекачке бетона к месту бетонирования при полной нагрузке двигателя каждую минуту производит работу 9450 кДж. Определите мощность двигателя бетононасоса, если его КПД – 70%. *(2250 кВт)*

14. Мощность двигателя токарного станка 7,3 кВт. Чему равна скорость резания, если сопротивление, оказываемое резцу равно 2250 Н, а КПД станка – 75%. *(844 Вт)*

15. Животноводческая ферма снабжается водой при помощи насосной установки, поднимающей воду с глубины 7,5 м. Суточный расход воды 250 м^3. Насос работает по 10 ч в сутки. Определите мощность электродвигателя, если КПД установки 60%. (868 Вт)

16. Поднимая груз по наклонной плоскости на высоту 4 м, совершили работу 12 000 Дж. Определите массу груза, если КПД плоскости 60%. *(180 кг)*

17. Электродвигатель мощностью 10 кВт соединен ременной передачей с насосом, который за 30 мин подает воду в объеме 58,75 м^3 на высоту 25 м в резервуар. Определите КПД всей установки. *(80%)*

18. Определить КПД рычага, с помощью которого груз массой 80 кг был поднят на высоту 0,9 м. При этом длинное плечо рычага, к которому была приложена сила 500 Н, опустилась на 1,8 м. *(80%)*

Тепловые явления. Тепловые двигатели

1. Сколько льда при температуре 0° С можно превратить в стоградусный пар за счет энергии, выделенной при полном сгорании 1 кг керосина. КПД нагревателя 25%. *(3,8 кг)*

2. Мощность Саяно-Шушенской ГЭС равна 64 х 10^6 кВт. Считая, что КПД тепловых электростанций составляет 37%, определите сколько условного топлива сэкономит эта ГЭС за сутки. Удельная теплота сгорания топлива 30 х 106 Дж/кг. *(49 х 10^6 кг)*

3. Расход условного топлива для тепловых электростанций уменьшился от 645 до 327 г/кВт ч. На сколько увеличился КПД тепловых электростанций? *(17%)*

4. Двигатель внутреннего сгорания совершил полезную работу, равную 4,6 х 10^7 Дж и израсходовал при этом 4 кг бензина. Вычислите КПД этого двигателя. *(25%)*

5. Определите КПД двигателя автобуса, расходующего 63 кг топлива (q = 4,33 х 10^7 Дж/кг) за 2,5 часа работы при средней мощности 70 кВт. *(23%)*

6. Автомобиль на пути 110 км израсходовал 6,9 кг бензина. Средняя мощность, развиваемая двигателем, была равна 13 кВт, а средняя скорость движения – 75 км/ч. Определите КПД двигателя автомобиля. *(22%).*

7. В одной из паровых турбин для совершения полезной работы используется 1/5 часть энергии, выделяющейся при сгорании топлива, в другой – 1/4 часть. КПД какой турбины больше? *(η_1 = 20%, η_2 = 25%)*

8. Электрическая лампа мощностью 60 Вт опущена в прозрачный калориметр, содержащий воду массой 600 г. За 5 мин вода нагрелась на Δt = 4° С. Какую часть энергии, потребляемой лампой, калориметр пропустил наружу в виде излучения? (44%)

9. В ущелье с высоты 250 м падает камень. Вследствие трения о воздух и удара о Землю камень нагревается на 1,5° С. Определите удельную теплоемкость камня, считая, что 50% энергии камня расходуется на его нагревание. (816 Дж/кг°С)

10. Какое количество дров необходимо для нагревания от 10 до 50°С кирпичной печи массой 1,2 т? Удельная теплоемкость кирпича – 880 Дж/кг°С. КПД печи – 30%, а теплота сгорания дров – 13 х 10^6 Дж/кг. *(10,7 кг)*

11. Определите КПД газовой горелки, если для нагревания на ней чайника с 3 л воды от 18° С до 90° С было израсходовано 0,04 кг газа. Теплоемкость чайника – 100 Дж/град., а теплота сгорания газа – 3,6 х 10^{7}Дж/кг. *(63,5%)*

Электрические явления

1. На сколько процентов увеличится сопротивление проволоки, если ее длину увеличить в 2 раза, а площадь сечения оставить неизменной? *(На 100%)*

2. На сколько процентов изменится сопротивление проволоки, если ее длину увеличить в 2 раза, а площадь уменьшить в 2 раза? *(Увеличится на 300%)*

3. На сколько процентов изменится сопротивление проволоки, если ее длину уменьшить в 2 раза, а площадь увеличить в 2 раза? *(Уменьшится на 75%)*

4. Башенный кран поднимает груз массой 600 кг равномерно со скоростью 20 м/мин. Через его электродвигатель, рассчитанный на 220 В, проходит ток 16,5 А. Определить КПД крана. *(54%)*

5. Определите тепловую отдачу электрического чайника, в котором 720 г воды за 10 мин нагрелось от 16° С до 100° С при силе тока 8А и напряжении 120 В. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/кг° С. *(44%)*

6. Определите тепловую отдачу кипятильника емкостью 3 л, если вода, налитая в него при 12° С закипает через 15 минут при силе тока 10 А и сопротивлении обмотки кипятильника 22 Ом. *(56%)*

7. В электрической печи, сопротивление спирали которой 10 Ом нагревают 10 кг стальных деталей. До какой температуры нагреются за 20 минут детали, взятые при 0°С, если печь подключить в сеть напряжением 220 В а ее КПД – 30%? *(до 380^{o}С)*

8. Краны, применяемые на строительстве Саяно-Шушенской ГЭС были способны поднимать бадью массой 25 т со скоростью 2,6 м/с. Определите КПД крана, если электролебедка при подъеме такого груза развивает мощность 670 кВт. *(95%)*

9. Скоростной лифт массой 1600 кг поднимается со скоростью 1 м/с. Какова мощность электродвигателя, приводящего в движение лифт, если напряжение на его клеммах – 380 В, а КПД двигателя – 90%? Какова сила тока, потребляемая электродвигателем? *(17,4 кВт, около 45 А)*

Влажность воздуха

1. Какова относительная влажность воздуха, если температура воздуха – 18°С, а его точка росы – 10°С? *(59%)*

2. На море при температуре воздуха 25°С относительная влажность воздуха равна 95%. При какой t можно ожидать появление тумана? (24°С)

3. Вечером при температуре воздуха 2°С относительная влажность воздуха равна 60%. Выпадет ли ночью иней, если температура ночью снизится до – 3°С, до – 4°С, до – 5°С? *(Нет, да)*

4. Относительная влажность воздуха вечером при 16°С равна 55%. Выпадет ли роса, если ночью температура снизится до 8°С? *(Не выпадет)*

5. Парциальное давление водяного пара в воздухе при 19°С было 1,1 кПа. Найти относительную влажность. *(50%)*

ЗАДАЧИ ПО ХИМИИ

I. ХИМИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Задачи на установление молекулярной формулы вещества по массовой доле элементов

1. Массовые доли серы и кислорода в оксиде серы равны соответственно 40 и 60%. Определите простейшую формулу этого оксида. *(SO_3)*

2. В состав химического соединения входят натрий, фосфор и кислород. Массовые доли элементов составляют: натрия – 34,6%, фосфора – 23,3%, кислорода – 42,1%. Определите простейшую формулу соединения. *($Na_4P_2O_7$)*.

3. Газообразное соединение азота с водородом содержит 12,5% водорода. Плотность соединения по водороду равна 16. Найти молекулярную формулу соединения. *(N_2H_4)*

4. При механической уборке хлопчатника его предварительно обрабатывают дефолиантом – препаратом, вызывающим опадение листвы. Вывести химическую формулу этого соединения, если экспериментально установлено, что его качественный состав: кальций, углерод, азот, а количественный: $\omega_{(Ca)}$= 50%, $\omega_{(C)}$ = 15%, $\omega_{(N)}$ = 35%. *($CaCN_2$ – цианамид кальция).*

5. Выведите формулу кристаллогидрата гидрофосфата натрия, имеющего относительную молекулярную массу 358. *($Na_2HPO_4 \cdot 12H_2O$)*

6. Выведите формулу кристаллогидрата фосфата цинка, если известно, что массовая доля соли в нем равна 84,2%. *($Zn_3(PO_4)_2 \cdot 4H_2O$)*

7. Определите формулу соединения, если массовые доли веществ, входящих в его состав равны: кристаллизационной воды 40,10%, железа 13,86%, азота 10,40%, кислорода, не считая того, который входит в кристаллизационную воду, 35,64%. *($Fe(NO_3)_3 \cdot 9H_2O$)*

8. Массовая доля металла в кристаллогидрате $MeCl_2 \cdot 6H_2O$ равна 11,823%. Определите металл. *(металл – кальций, $CaCl_2 \cdot 6H_2O$)*

Вычисления массовых долей элементов в веществе по формуле

Используют формулу: $\omega_{(э)} = \dfrac{n \cdot A_{г(э)}}{M_{г(вещ-ва)}}$,

где $A_{г(э)}$ – относительная атомная масса элемента;
N – число атомов данного элемента;
$M_{г(в-ва)}$ – относительная молекулярная масса вещества
ω – массовая доля, величина безразмерная, выражается в долях от единицы или в процентах.

1. Вычислить массовые доли элементов в углекислом газе – оксид углерода (IV). *($\omega_{(c)}$ = 27%; $\omega_{(o)}$ = 73%.)*

2. Какое из удобрений богаче азотом:
1) NH_4NO_3 – аммиачная селитра;
2) KNO_3 – калийная селитра;
3) $(NH_4)_2SO_4$ – сульфат аммония?
(Самое богатое азотом удобрение из данных – аммиачная селитра, т. к. в ней наибольшая массовая доля азота.)

3. Определить массовую долю кристаллизационной воды в дигидрате хлорида бария $BaCl_2 \cdot 2H_2O$. *(14,75 %)*

4. Вычислить процентное содержание металла и кристаллизационной воды в гипсе $CaSO_4 \cdot 2H_2O$. *(ω_{Ca} = 23,26% , ω_{H_2O}= 20,93%)*

5. Массовая доля азота в удобрении составляет 14%. Весь азот входит в удобрение в составе мочевины $CO(NH_2)_2$. Вычислите массовую долю мочевины в этом удобрении. *($\omega_{CO(NH_2)_2}$ = 30%)*

6. Массовая доля углерода в чугуне составляет 3,6 %. Углерод содержится в сплаве в виде соединения – карбида железа Fe_3C. Определите массовую долю карбида железа в чугуне. *(54 %)*

II. РАСТВОРЫ

Процентная концентрация (массовая доля вещества)

1. Вычислить массовую долю растворенного вещества в растворе, полученном после растворения (осторожного) металлического натрия массой 6,9 г в воде объемом 500 мл. *(ω = 2,4%)*

2. Содержание солей в морской воде достигает 3,5%. Вычислить массу солей, полученных выпариванием морской воды массой 2 кг и объем испарившейся воды. *($m_{солей}$= 70 г; V_{H_2O} = 1,93 л)*

3. Вычислить массу соли, которую нужно растворить в 276 мл воды, чтобы получить 8%-й раствор этой соли. *($m_{соли}$ = 24 г)*

4. Вычислить процентную концентрацию раствора соляной кислоты, полученного растворением хлороводорода объемом 179,2 л (при н.у.) в воде объемом 708 мл. *(ω_{HCl}= 29,2%)*

5. В воде массой 450 г растворили кристаллогидрат $CuSo_4 \cdot 5H_2O$ (медный купорос) массой 50 г. Вычислить массовую долю сульфата меди (II) в растворе. *(ω_{CuSO_4} = 6,4%)*

6. В каком объеме воды надо растворить соль массой 20 г, чтобы получить раствор с массовой долей соли 5%? *(V_{H_2O} = 380 мл)*

Молярная концентрация (молярность раствора)

1. Вычислить массу нитрата бария для приготовления 500 мл 0,5 М раствора. *($m_{Ba(NO_3)_2}$= 65,25 г)*

2. Вычислить молярность раствора азотной кислоты (ρ = 1,31 г/см^3) с массовой долей кислоты в нем 49 % *(10,19 М р-ра HNO_3)*

3. Раствор объемом 2 л содержит 0,5 моль нитрата калия. Вычислить молярную концентрацию раствора (молярность) и массу нитрата калия в растворе. *(0,25 М, m_{KNO_3} = 50,5 г)*

4. Вычислить количество вещества и массу хлорида кальция в 0,5 М растворе объеме 0,5 л. *(m_{CaCl_2} = 27,75 г)*

5. В растворе объемом 2 л содержится карбонат натрия массой 10,6 г. Вычислить молярность раствора. *(0,5 М)*

На смешивание растворов с различным содержанием растворенного вещества

1. Вычислить массовую долю соли в растворе, образовавшемся при сливании 200 г 10%-го раствора с 400 г 40%-го раствора этой же соли. *(ω_3 = 30%)*

2. Сколько по массе (в граммах) иодида калия необходимо прибавить к 150 г 10 %-го раствора иодида калия, чтобы получить 25%-й раствор иодида калия? *(m_{KI} = 30 г)*

3. К 187,65 мл 25%-го раствора хлорида бария (плотность 1,279 г/мл) прилили 135,50 мл 20%-го раствора сульфата железа (III) (плотность 1,181 г/мл). Определите массовые доли веществ (%) в растворе после реакции. *(ω % ($FeCl_3$) = 7,556%; ω % ($BaCl_2$) = 3,627%)*

4. Определите массовые доли веществ в растворе, полученном при взаимодействии 60 mk 25% раствора гидроксида натрия (ρ = 1,28 г/мл) с 156,3 мл 20,25%-го раствора ортофосфорной кислоты (ρ = 1,115 г/мл). *($\omega_{(Na_2HPO_4)}$ = 6,79%), ($\omega_{(NaH_2PO_4)}$ = 11,47%)*

5. К 200 мл 15%-го раствора серной кислоты с плотностью 1,1 г/мл добавили 50 г воды. Определите массовую долю серной кислоты в полученном растворе. *(12,2%)*

6. Определите концентрацию раствора, полученного при смешивании 45 мл 60%-го раствора серной кислоты (плотность 1,5 г/мл) и 20 мл 30%-го раствора серной кислоты (плотность 1,2 г/мл) *(52,1%)*

7. Какие массы 10%-го и 30%-го растворов едкого натрия необходимо взять для приготовления 400 г 25%-го раствора NaOH? *(100 г 10%-го раствора NaOH и 300 г 30%-го раствора NaOH).*

8. Какие объемы серной кислоты с концентрацией 88% (плотность 1,8 г/мл) и 40% (плотность 1,3 г/мл) нужно взять для приготовления 300 мл 60%-го раствора (плотность 1,5 г/мл). *(104,2 мл 88%-го раствора серной кислоты и 201,9 мл 40%-го раствора серной кислоты).*

Вычисления по уравнениям реакций с применением понятия «массовая доля выхода продукта реакции от теоретически возможного»

1. При помощи окисления 8,4 г дисульфида железа (II) (серный, железный колчедан) выделилось 2,58 л газа. Определите выход продукта в процентах от теоретически возможного. *($\eta_{(SO_2)}$= 82,27%)*

2. Какая масса аммиака потребуется для получения азотной кислоты массой 12,6 т, учитывая, что потери в производстве составляют 5%? *(3,58 т)*

3. Сколько песка нужно взять для получения 200 г силиката натрия, если выход реакции составляет 90%, а массовая доля SiO_2 в песке составляет 96%? *($m_{песка}$= 113,8 г.)*

4. К раствору, содержащему сульфат меди (II) массой 5,6 г добавили раствор гидроксида натрия (взят в избытке), при этом образовался осадок массой 3,06 г. Определите массовую долю выхода гидроксида меди (II). *($\eta_{Cu(OH)_2}$= 89,2%)*

5. Рассчитайте объем кислорода, который можно получить при разложении 0,079 кг перманганата калия, если известно, что потери составляют 15 %. *(V_{O_2} = 4,76 л)*

6. Определите объем аммиака (при н. у.), образующегося при взаимодействии 89,6 л азота с водородом, если известно, что практический выход его составляет 30 % от теоретически возможного. *(53,76 л)*

Вычисления по уравнениям химических реакций, когда одно из исходных веществ взято в избытке

1. Сколько по массе осадка образуется при взаимодействии 141,5 мл 20%-го раствора хлорида кальция (ρ = 1,177 г/мл) с 141,6 мл 16%-го раствора карбоната натрия? *(ρ = 1,177 г/мл)*

2. Сколько по массе осадка образуется при взаимодействии 56,585 мл 25%-го раствора хлорида кальция ((ρ =1,177 г/мл) с 84,936 мл 16%-го раствора карбоната натрия? *(ρ = 1,17 г/мл) (m_{CaCO_3}= 12 г)*

3. Цинковые опилки массой 3,2 г обработать 30,7 мл раствора серной кислоты с массовой долей вещества, равной 19,6%. (ρ = 1,14 г/мл) Какой газ при этом выделился? Определите его объем, измеренный при нормальных условиях. (V_{H_2}= *1,103 л)*

III. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ ВЕЩЕСТВ. РАСЧЕТЫ ПО УРАВНЕНИЯМ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

Задачи с применением массовой и объемной доли

1. При обжиге известняка массой 100 г получился оксид углерода (IV) массой 40 г. Определите массовую долю (%) карбоната кальция в этом известняке. (ω_{CaCO_3} = *90,9%*)

2. В почву под плодовое дерево необходимо внести оксид фосфата (V) массой 0,4 кг. Какую массу суперфосфата надо взять в этом случае, если массовая доля усвояемого оксида фосфора (V) в нем равна 20%. *(2 кг)*

3. Массовая доля азота в удобрении составляет 14%. Весь азот входит в удобрение в составе мочевины $CO(NO_2)_2$. Вычислите массовую долю мочевины в этом удобрении. ($\omega_{CO(NH_2)_2}$ = *30%*)

4. При сплавлении природного известняка массой 150 г с оксидом кремния (IV) образовался силикат кальция массой 145 г. Определите массовую долю карбоната кальция в природном известняке. (83,3%)

5. 14,45 г цинковой пыли с массовой долей цинка 90% растворили в соляной кислоте. Найти объем, массу и количество вещества водорода.

Вычисления по уравнениям реакций с учетом примесей

1. Вычислите объем водорода, затраченного на полное восстановление 1 кг оксида железа (III), содержащего 20% примесей.

2. Технический сульфид железа (II) содержит несульфидные примеси, массовая доля которых равна 4%. Рассчитайте объем сероводорода, приведенный к нормальным условиям, который образуется при действии серной кислоты на технический сульфид железа массой 44 г. *(V_{H_2S}= 10,752 л).*

3. Рассчитайте массу кальциевой селитры, используемой как удобрение, которую можно получить из 148 кг гашеной извести, содержащей 8% примесей. *($m_{Ca(NO_3)_2}$= 306 кг, 1301,8 кг)*

4. Какой объем оксида серы (IV) измеренный при температуре 27°С и давлении 98,5 кПа, образуется при обжиге пирита массой 30 г, который кроме дисульфида железа FeS_2 содержит примеси, не образующиеся при обжиге SO_2? Массовая доля примесей в пирите составляет 20%. *(V_{SO_2}= 10,1л).*

IV. ЗАДАЧИ НА СПЛАВЫ И СМЕСИ

Смеси

1. При восстановлении водородом смеси оксида железа (II) массой 148 г получили железо массой 112 г. Определите массовые доли каждого из оксидов в смеси. *(ω_{FeO} = 73%; $\omega_{F_2O_3}$= 27%.)*

2. На смесь меди и оксида меди (II) массой 75 г подействовали избытком концентрированной азотной кислоты. При этом образовался газ объемом 26,88 л (н.у.). Определите массовую долю оксида меди (II) и в исходной смеси. *(48,8 %)*

3. При обработке соляной кислотой 12,3 г смеси магния и карбоната магния выделяется 7,28 л (н.у.) газа. Вычислите массовую долю магния и карбоната магния в смеси. *(ω_{Mg}= 48,78%; ω_{MgCO_3}= 51,22%)*

4. Газовая смесь объемом 11,2 л (н.у.), состоящая из оксида серы (IV) и углекислого газа, имеет массу 26 г. Определите объемные и массовые доли газов в смеси. *(φ_{SO_2}= 40%; φ_{CO_2}= 60%; ω_{SO_2}= 49,23%; ω_{CO_2}= 50,77%)*

5. Имеется газовая смесь, массовые доли газов в которой азота – 65%, водорода – 35%, определить объемные доли газов в смеси. *(φ_{H_2}= 88%; φ_{N_2}= 12%)*

6. При взаимодействии смеси алюминия и магния массой 15,6 г с соляной кислотой выделилось 17,92 л водорода (н. у.). Определить состав смеси (в % по массе). *(ω_{Al}= 69%, ω_{Mg}= 31%)*

7. 5,1 г порошка частично окисленного магния обработали соляной кислотой. При этом выделилось 3,74 л водорода, измеренного при нормальных условиях. Сколько процентов магния (по массе) содержалось в образце? *(ω_{Mg}= 80%)*

8. Сколько л водорода (н.у.) выделится при растворении 50 г смеси металлов, содержащей 32,5% цинка, 56% железа, 11,5% меди, в соляной кислоте? (v_{H_2}= *16,8л*)

9. Имеется смесь порошков железа, алюминия и меди массой 16 г. На половину смеси подействовали избытком концентрированного раствора гидроксида калия, получив газ объемом 3,36 л. К другой половине смеси добавили избыток раствора соляной кислоты. При этом выделился газ объемом 4,48 л. Определите массовые доли металлов в смеси. Объемы газов приведены к нормальным условиям. *(ω_{Al}= 33,75%; ω_{Fe}= 35%; ω_{Cu}= 31,25%).*

Сплавы

1. Вычислите объем водорода (н.у), который может быть получен, если в соляной кислоте полностью растворить 10 г сплава, массовая доля алюминия в котором – 90%, меди – 4%, магния – 6%.

2. При растворении в соляной кислоте 25,8 г сплава, состоящего из меди и цинка, получили 4,48 л (н. у.) газа. Вычислите массовую долю каждого металла в сплаве.

3. Сплав меди с алюминием массой 1 г обработали избытком раствора щелочи. Объем выделившегося газа при нормальных условиях составил 340 мл. Определите массовые доли металлов в сплаве. *(ω_{Al} = 27,3%, ω_{Cu} = 72,7%)*

4. Сплав железа с углеродом массой 5 г поместили в соляную кислоту (кислота в избытке). По окончании реакции объем выделившегося водорода составил 1,96 л (н. у.). Вычислите массовую долю углерода в сплаве с железом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонов Н. П., Выготский М. Я., Никитин В. В., Санкин А. И. Сборник задач по элементарной математике. – М.: Гос. изд.-во физ.-мат. лит-ры, 1962.
2. Василюк Л. И., Куваева Л. А., Галякевич Б. К. Математика в экзаменационных вопросах и ответах. – Мн.: Бел Эн, 1996.
3. Волович П., Бровко М. Готовимся к экзаменам по химии. Школа и вуз. – М.: Айрис-пресс, 1999.
4. Зеленский А. С. Сборник конкурсных задач по математике 1992–1995. – М.: Научно-технический центр «Университетский»: АСТ-ПРЕСС, 1996.
5. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – М.: Просвещение; Владос, 1994.
6. Куланин Е. Д., Федин С. Н. Математика. Варианты вступительных экзаменов. Финансово-экономические специальности. – М.: Рольф; Айрис-пресс, 1998.
7. Куланин Е. Д., Федин С. Н. Математика. Варианты вступительных экзаменов. Химико-биологические специальности. – М.: Рольф, Айрис-Пресс, 1998.
8. Лукашик В. И. Сборник вопросов и задач по физике. –М., 1966 (2002).
9. Лурье М. В., Александров В. И. Задачи на составление уравнений. – М.: Наука, 1980.

10. Моденов В. П. Пособие по математике. – Часть 1. – М.:Изд-во московского университета, 1997.
11. Рымкевич А. П. Задачник. 10–11 классы. – М.: Дрофа, 2001.
12. Сборник задач по математике для поступающих в вузы: Учебное пособие / Под редакцией М. И. Сканави. – М.: Столетие, 1997.
13. Слета Л. А., Хомин Ю. В., Черный А. В. Конкурсные задачи по химии с решениями. Пособие для старшеклассников и абитуриентов. – Москва-Харьков: Илекса; Гимназия, 1998.
14. Хомченко Г. П., Хомченко И. Г. Сборник задач по химии для поступающих в вузы. – М.: Новая волна, 2000.
15. Хомченко И. Г. Общая химия. Сборник задач и упражнений. – М.: Новая волна, 1998.
16. Хомченко И. Г. Сборник задач и упражнений по химии. – М.: Новая волна, 1997.
17. Шарыгин И. Ф. Решение задач: Учебное пособие для 10 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 1994.
18. Черкасов О. Ю., Якушев А. Г. Математика. Интенсивный курс подготовки к экзамену. – М.: Рольф; Айрис-пресс, 1998.

МЕТОДЫ ФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

***О. Л. Халвицкая**, учитель физики МОУ «СОШ № 3» г. Вологды*

Пояснительная записка

Исследовательские умения учащихся являются важными умениями, особенно в случае, когда учащиеся планируют продолжать обучение в вузах технического профиля. Умение ставить цель работы, проводить исследование, получать результаты, оценивать их достоверность, делать выводы являются общеучебными умениями, следовательно, способствуют качественному освоению учебных программ не только по физике, но и по другим общеобразовательным дисциплинам.

Количество лабораторных работ по физике в базовой школе, условия их проведения не способствуют формированию качественных практических умений учащихся.

На средней ступени при проведении лабораторного эксперимента в настоящее время не предусмотрена необходимость оценки погрешностей полученного результата; однако в классах профильной школы проведение лабораторных работ по физике предполагает сформированное умение оценивать погрешности результата. Поэтому при предпрофильной подготовке к обучению в классах физико-математического и физико-технического профиля следует обратить внимание на формирование практических умений учащихся и вполне допустимо выделить время на изучение элементов теории погрешностей.

Цель курса – познакомить учащихся с методами физических исследований – наблюдением и экспериментом; познакомить с элементами теории погрешностей; формировать умения в области физического эксперимента.

В процессе обучения учащиеся приобретут и закрепят следующие *умения:*

- наблюдать явления и изучать свойства веществ и тел;
- описывать результаты наблюдений;
- выдвигать гипотезы;
- отбирать необходимые приборы для измерений;

- выполнять измерения, проводить измерения разными методами;
- вычислять погрешности некоторых прямых и косвенных измерений;
- представлять результаты измерений (в виде таблиц и графиков);
- интерпретировать результаты эксперимента;
- делать выводы;
- обсуждать результаты эксперимента, участвовать в дискуссии.

Перечисленные умения формируются на основе следующих *знаний:*

- цикл познания в естественных науках: факты, гипотеза, эксперимент, следствия;
- роль эксперимента в познании;
- соотношение теории и эксперимента в познании;
- правила пользования измерительными приборами;
- происхождение погрешностей измерений, их виды;
- абсолютная и относительная погрешности;
- запись результата прямых измерений с учетом погрешности;
- сущность метода границ при вычислении погрешности косвенных измерений;
- индуктивный вывод, его структура.

Программа курса «Методы физических исследований» рассчитана на 18 часов (1–2 ч в неделю), но количество часов учитель может изменить с учетом особенностей класса.

ПОУРОЧНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ КУРСА

№ п/п	Предлагаемая форма	Тема занятия	Содержание	Оборудование	Примечание
1	2	3	4	5	6
1.	Групповая дискуссия	Наблюдение – первый этап решения задачи	Наблюдение горящей свечи, запись увиденного. Обсуждение физических процессов, происходящих при горении свечи	Свеча (1 на группу, или 1 на пару)	Непременно нужен вывод по дискуссии: 1) всегда должна быть цель наблюдения; 2) всегда остается что-то, чего ты не увидел – наблюдай чаще; 3) увидеть можно только то, на что смотришь

1	2	3	4	5	6
2.	Практи-ческая работа	Простые измерения	Измерение длин, высот доступных и недоступных объектов, измере-ние длин кривых.	Линейка, сантиметро-вая лента, ру-летка, курви-метр (или де-тали для его изготовле-ния), угломер (или детали для его изго-товления), фотографии зданий, фото-графия вида Земли из космоса	
3.	Практи-ческая работа	Простые измерения	Измерение пло-щадей, объемов. Определять мож-но площади ладо-ни, стопы учени-ка, площадь клас-са, коридора шко-лы, объем тел правильной и не-правильной фор-мы, объем сосед-него дома	Линейка, рулетка, палетка, миллимет-ровая бума-га, мензур-ка, бруски разного раз-мера, тела неправиль-ной формы	На этом заня-тии важно дать понятия прямых и косвенных измерений
4.	Практи-ческая работа	Простые измерения	Определение раз-меров малых тел	Пшено, го-рох, прово-лока разной толщины, листы бума-ги, микро-метр, штан-генциркуль, линейка, рулетка	Главное на этом занятии – познакомить учащихся с ме-тодом рядов, показать важ-ность выбора правильного инструмента для наилучше-го измерения
5.	Экспе-римент	Экспери-мент	Правила проведе-ния и оформле-ния эксперимента	Пружина, указатель, набор грузов по механике, шкала	Проводится демонстра-ционный экс-перимент, уча-щиеся записы-

1	2	3	4	5	6
					вают в тетради отчет о прове-дении экспе-римента
6.	Практи-ческая работа	Исследова-ние	Исследование зависимости плотности воды от температуры	Вода, термо-метр, смесь льда и соли, нагреватель, набор арео-метров, мил-лиметровая бумага	Главное на этом занятии – построение примерного графика зависимости
7.	Практи-ческая работа	Исследо-вание	Исследование зависимости плотности воды от температуры	Вода, термо-метр, смесь льда и соли, колба с рас-ширительной трубкой, большой ла-бораторный стакан	Главное на этом занятии – доказатель-ство того, что разными мето-дами можно получить по-хожие резуль-таты
8.	Лекция с элемен-тами бе-седы, фронталь-ный экс-перимент	Ошибки прямых измерений	Элементы теории погрешности. Запись результата с учетом погреш-ности измерения	Линейка, рулетка, весы, разновес	Сформировать понятие абсо-лютной и относительной погрешностей прямого измерения
9.	Лекция с элемен-тами беседы	Ошибки косвенных измерений	Элементы теории погрешности. За-пись результата с учетом погреш-ности измерения		Познакомить с формулами погрешностей косвенных измерений
10.	Практи-ческая работа	Исследо-вание	Определение ускорения свободного падения	Нитяной маятник, сантиметро-вая лента, секундомер	Метод математиче-ского маятника
11.	Практи-ческая работа	Исследо-вание	Определение ускорения свободного падения	Баллистиче-ский писто-лет, сантиме-тровая лента, копироваль-ная бумага	Метод – дви-жение тела, брошенного под углом к горизонту

1	2	3	4	5	6
12.	Практическая работа	Исследование	Определение ускорения свободного падения	Машина Атвуда (или аналог)	Метод – движение связанных тел. В конце занятия делается вывод о важности выбора метода для получения наиболее точного результата.
13.	Решение практических задач	Эксперимент – проверка гипотезы	Определение длины куска проволоки в мотке	Источник тока, амперметр, вольтметр, ключ, соединительные провода, реостат, кусок проволоки, смотанный в моток	На этих уроках следует вначале решать задачи теоретически, в ходе обсуждения совместно выбирать возможное оборудование, и только затем это оборудование выдавать учащимся. Приведенные задачи можно заменить любыми другими
14.			Какие вещества лучше всего проводят тепло; обладают лучшей электропроводностью?	Проволока (стальная, алюминиевая, медная), пластмассовая, стеклянные палочки, спиртовка, омметр	
15.			Какой выигрыш в силе дают простые механизмы? Сочетание простых механизмов?	Блоки (5–6 штук), нить, трибометр, штатив, кусачки, плоскогубцы, силомер	
16.			На вращающийся горизонтально расположенный	Тело (монета, шайба), проигрыва-	

1	2	3	4	5	6
			диск проигрывателя положили небольшое тело. Определить коэффициент трения между диском проигрывателя и телом	тель грампластинок (либо деревянный диск, насаженный на вал электромотора с небольшой скоростью вращения)	
17.			Определение удельной теплоты плавления парафина	Вода, термометр, мензурка, весы, разновес, нагреватель, парафин	
18.	Конференция	Отчет о домашнем эксперименте			Отчетный урок

Перечень возможных домашних экспериментов:

1. Определение плотностей домашних продуктов.
2. Наблюдение связи между атмосферным давлением, ветром, влажностью воздуха и изменением погоды.
3. Изготовление из бумаги модели моста, выдерживающего наибольшую нагрузку.
4. Исследование зависимости формы изображений тела, получаемых в системе двух плоских зеркал, от угла взаимного расположения зеркал.

ЛИТЕРАТУРА

1. Всероссийские олимпиады по физике. 1992–2001 / Под. ред. С. М. Козела, В. П. Слободянина. – М.: Вербум-М, 2002. – 392 с.
2. Камин А. Л. Физика. Развивающее обучение: Книга для учителей. 7-й класс. – Ростов н/Д: изд-во «Феникс», 2003. – 352 с.
3. Покровский С. Ф. Опыты и наблюдения в домашних заданиях по физике. – М., 1963. – 416 с.
4. Роуэлл Г., Герберт С. Физика / Под ред. В. Г. Разумовского; Пер. с англ. – М.: Просвещение, 1994. – 576 с.
5. Рымкевич А. П. Сборник задач по физике для 9–11 классов средней школы. – Изд. 13-е, дораб. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.

ПРЕДПРОФИЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА УЧАЩИХСЯ: КУРСЫ ПО ВЫБОРУ

Выпуск 2

Математика. Физика

Технический редактор *В. А. Смирнова*
Корректор *Е. А. Черкашина*
Компьютерная верстка *А. Л. Малковой*

Подписано в печать10. 06. 2005. Формат 60 х 84/16.
Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 6,27. Тираж 500 экз. Заказ 1061

Издательский центр Вологодского института развития образования
160012, г. Вологда, ул. Козленская, 99а