И.В. ОРЛОВА

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Москва
ВУЗОВСКИЙ УЧЕБНИК · ВЗФЭИ
2008

ВВЕДЕНИЕ

Новый Государственный стандарт высшего профессионального образования обязывает активизировать лабораторный компонент образования. В требованиях к учебно-методическому обеспечению учебного процесса указано: «Реализация основной образовательной программы подготовки дипломированного специалиста должна включать выполнение студентом лабораторно-практических работ по дисциплинам специальности, включая как обязательный компонент выполнение практических заданий на персональных компьютерах с использованием пакетов прикладных программ»[1].

Учебное пособие составлено в соответствии с требованиями Государственных образовательных стандартов подготовки специалистов по специальностям «Бухгалтерский учет и аудит», «Менеджмент», «Финансы и кредит», «Маркетинг», «Экономика труда» и «Государственное и муниципальное управление».

Пособие состоит из четырех глав.

В первой главе «Оптимизационные экономико-математические модели» подробно рассмотрена технология решения задач оптимального использования ресурсов и специальных задач линейного программирования (транспортная задача, задача о назначениях, задачи целочисленного программирования) с помощью надстройки Excel/Поиск решения. Большое внимание уделено анализу полученных оптимальных решений с помощью двойственных оценок.

Изложение практических примеров показывает возможные пути совершенствования учебного процесса за счет передачи рутинных вычислений компьютеру. Это позволяет преподавателю направить внимание учащихся на глубокое осмысление изучаемых явлений, применять активные методы обучения.

Вторая глава «Балансовые модели» содержит описание метода «затраты — выпуск». В ней приведены примеры построения моделей международной торговли и межотраслевого баланса.

В третьей главе «Методы и модели анализа и прогнозирования экономических процессов с использованием временных рядов» приведены примеры построения прогнозов с использованием «Пакета анализа»/Excel.

---

[1] Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования. Специальность — 060500 Бухгалтерский учет, анализ и аудит.

Четвертая глава — лабораторная работа «Решение задач линейного программирования с использованием Microsoft Excel». Она содержит руководство к выполнению лабораторной работы, инструкцию по использованию Microsoft Excel для решения задач и порядок выполнения работы. Все задания для выполнения лабораторных работ имеют выраженное экономическое содержание.

Глава 1. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

1.1. ОБЩАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В экономике оптимизационные задачи возникают в связи с многочисленностью возможных вариантов функционирования конкретного экономического объекта, когда возникает ситуация выбора варианта, наилучшего по некоторому правилу, критерию, характеризуемому соответствующей целевой функцией (например, иметь минимум затрат, максимум продукции).

Оптимизационные модели отражают в математической форме смысл экономической задачи. Отличительной особенностью этих моделей является наличие условия нахождения оптимального решения (критерия оптимальности), которое записывается в виде функционала. Эти модели при определенных исходных данных задачи позволяют получить множество решений, удовлетворяющих условиям задачи, и обеспечивают выбор оптимального решения, отвечающего критерию оптимальности.

В общем виде математическая постановка задачи математического программирования состоит в определении наибольшего или наименьшего значения целевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при условиях $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i$; $(i = 1, 2, ..., m)$, где f и g_i — заданные функции, а b_i — некоторые действительные числа.

Задачи математического программирования делятся на задачи линейного и нелинейного программирования. Если все функции f и g_i — линейные, то соответствующая задача является задачей линейного программирования. Если хотя бы одна из указанных функций — нелинейная, то соответствующая задача является задачей нелинейного программирования.

Линейное программирование — область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т.е. линейных равенств или неравенств, связывающих эти переменные. К задачам линейного программирования сводится широкий круг вопросов планирования экономических процессов, где ставится задача поиска наилучшего (оптимального) решения.

Среди задач нелинейного программирования наиболее глубоко изучены задачи выпуклого программирования. Это задачи, в результате решения которых определяется минимум выпуклой (или максимум вогнутой) функции, заданной на выпуклом замкнутом множестве.

В свою очередь, среди задач выпуклого программирования более подробно исследованы задачи квадратичного программирования. В результате решения таких задач требуется в общем случае найти максимум (или минимум) квадратичной функции при условии, что ее переменные удовлетворяют некоторой системе линейных неравенств или линейных уравнений либо некоторой системе, содержащей как линейные неравенства, так и линейные уравнения.

Отдельными классами задач математического программирования являются задачи целочисленного, параметрического и дробно-линейного программирования.

В общем виде задача линейного программирования (ЗЛП) ставится следующим образом:

найти вектор $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, максимизирующий линейную форму

$$f(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1.1}$$

и удовлетворяющий условиям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \tag{1.2}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = 1, ..., n. \tag{1.3}$$

Линейная функция $f(\overline{X})$ называется целевой функцией задачи. Условия (1.2) называются функциональными, а (1.3) — прямыми ограничениями задачи.

Вектор $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, компоненты которого удовлетворяют функциональным и прямым ограничениям задачи, будем называть планом, или допустимым решением ЗЛП.

Все допустимые решения образуют область определения задачи линейного программирования, или область допустимых решений. Допустимое решение, максимизирующее целевую функцию $f(\overline{X})$, называется оптимальным планом задачи

$$f(\overline{X}^*) = \max f(\overline{X}),$$

где $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ — оптимальное решение ЗЛП.

На практике хорошо зарекомендовали себя следующие модели, относящиеся к оптимизационным: определения оптимальной производственной программы; оптимального смешивания компонентов; оптимального раскроя; оптимального размещения предприятий некоторой отрасли на определенной территории; формирования оптимального портфеля ценных бумаг; транспортной задачи.

Для решения ЗЛП существует универсальный метод — метод последовательного улучшения плана, или симплекс-метод, который состоит из двух вычислительных процедур: симплекс-метода с естественным базисом и симплекс-метода с искусственным базисом (М-метод).

Выбор конкретной вычислительной процедуры осуществляется после приведения исходной задачи к каноническому виду задачи линейного программирования (КЗЛП):

$$\max f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum c_j x_j,$$

$$\sum a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n; \quad b_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Будем считать, что ЗЛП записана в канонической форме, если ее целевая функция максимизируется, ограничения имеют вид равенств с неотрицательной правой частью и все переменные неотрицательные.

В теории линейного программирования показано, что оптимальное решение ЗЛП связано с угловыми (крайними) точками многогранника решений, которым отвечают опорные планы (неотрицательные базисные решения системы уравнений КЗЛП). Каждый из опорных планов определяется системой m линейно независимых векторов, содержащихся в данной системе из n векторов A_1, A_2, ..., A_n. Верхняя граница количества опорных планов, содержащихся в данной задаче, определяется числом сочетаний C_m^n.

Решение ЗЛП симплекс-методом «вручную» подробно рассмотрено в [1], [5] и др.

Рассмотрим несколько примеров задач линейного программирования.

1.1.1. Задача оптимального использования ресурсов (задача о коврах)

В распоряжении фабрики имеется определенное количество ресурсов: рабочая сила, деньги, сырье, оборудование, производственные площади и т.п. Например, пусть это будут ресурсы трех видов: рабочая сила (80 чел./дней), сырье (480 кг) и оборудование (130 станко/час). Фабрика может выпускать ковры четырех видов. Информация о количестве единиц каждого ресурса, необходимых для производства одного ковра каждого вида, и доходах, получаемых предприятием от единицы каждого вида товаров, приведена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на единицу изделия				Наличие ресурсов
	Ковер «Лужайка»	Ковер «Силуэт»	Ковер «Детский»	Ковер «Дымка»	
Труд	7	2	2	6	80
Сырье	5	8	4	3	480
Оборудование	2	4	1	8	130
Цена ед. изделия (тыс. руб.)	3	4	3	1	

Требуется найти такой план выпуска продукции, при котором общая стоимость продукции будет максимальной.

Экономико-математическая модель задачи

Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 число ковров каждого типа. *Целевая функция* — это выражение, которое необходимо максимизировать:

$$f(\overline{X}) = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4.$$

Ограничения по ресурсам

$$7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 80,$$

$$5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 480,$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 \le 130,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

1.1.2. Задача о размещении производственных заказов [3]

В планируемом периоде предприятию необходимо обеспечить производство 300 тыс. однородных новых изделий, которые могут выпускать четыре филиала. Для освоения этого нового вида изделий выделены капитальные вложения в размере 18 млн руб. Разработанные для каждого филиала предприятия проекты освоения нового вида изделия характеризуются величинами удельных капитальных вложений и себестоимостью единицы продукции в соответствии с табл. 1.2.

Таблица 1.2

Показатели	Филиалы предприятия			
	1	2	3	4
Себестоимость производства изделия, руб.	83	89	95	98
Удельные капиталовложения, руб.	120	80	90	40

Себестоимость производства и удельные капиталовложения для каждого из филиалов условно приняты постоянными, т.е. потребность в капитальных вложениях и общие издержки будут изменяться пропорционально изменению объемов производства изделий.

Необходимо найти такой вариант распределения объемов производства продукции и капитальных вложений по филиалам, при котором суммарная стоимость изделий будет минимальной.

Экономико-математическая модель задачи

Введем следующие обозначения:

i — номер филиала ($i = 1, ..., n$; $n = 4$);
x_i — объем выпускаемой продукции в филиале i;
T — суммарная потребность в изделиях ($T = 300$ тыс. шт.);
K — выделяемые капиталовложения ($K = 18$ млн руб.);
c_i — себестоимость производства продукции в филиале i;
k_i — удельные капитальные вложения на единицу продукции в филиале i.

Экономико-математическая модель задачи будет иметь вид:

$$f(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq T;$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i x_i \leq K;$$

$$x_i \geq 0; \quad i = 1, ..., n.$$

Подставляя исходные данные, имеем:

$$f(\overline{X}) = 83x_1 + 89x_2 + 95x_3 + 98x_4 \to \min,$$

ограничения

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 300 \text{ (тыс. шт.)},$$

$$120x_1 + 80x_2 + 50x_3 + 40x_4 \leq 18 \text{ (млн руб.)},$$

$$x_{1,\,2,\,3,\,4} \geq 0.$$

1.2. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Наиболее простым и наглядным методом линейного программирования (ЛП) является графический метод. Он применяется для решения задач ЛП с двумя переменными. Рассмотрим задачу ЛП в стандартной форме:

$$\max f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Положим $n = 2$ и будем рассматривать задачу на плоскости. Пусть система неравенств совместна (имеет хотя бы одно решение).

Каждое неравенство этой системы геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $i = 1, 2, ..., m$. Условия неотрицательности определяют полуплоскости с граничными прямыми $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ соответственно. Система совместна, поэтому полуплоскости, как выпуклые множества, пересекаясь, образуют общую часть, которая является выпуклым множеством и представляет собой совокупность точек, где координаты каждой точки являются решением данной системы. Совокупность этих точек называют *многоугольником решений*. Он может быть точкой, отрезком, лучом, ограниченным и неограниченным многоугольником.

Таким образом, геометрически ЗЛП представляет собой отыскание такой точки многоугольника решений, координаты которой доставляют линейной функции цели максимальное (минимальное) значение, причем допустимыми решениями являются все точки многоугольника решений.

Линейное уравнение описывает множество точек, лежащих на одной прямой. Линейное неравенство описывает некоторую область на плоскости. Определим, какую часть плоскости описывает неравенство $2x_1 + 3x_2 \leq 12$.

Во-первых, построим прямую $2x_1 + 3x_2 = 12$. Она проходит через точки (6; 0) и (0; 4). Для того чтобы определить, какая полуплоскость удовлетворяет неравенству, необходимо выбрать любую точку на графике, не принадлежащую прямой, и подставить ее координаты в неравенство. Если неравенство будет выполняться, то данная точка является допустимым решением, и полуплоскость, содержащая точку, удовлетворяет неравенству. Для подстановки в неравенство удобно использовать точку начала координат. Подставим $x_1 = x_2 = 0$ в неравенство $2x_1 + 3x_2 \leq 12$. Получим $2 \times 0 + 3 \times 0 \leq 12$. Данное утверждение является верным, следовательно, неравенству $2x_1 + 3x_2 \leq 12$ соответствует нижняя полуплоскость, содержащая точку (0; 0). Это отражено на графике, изображенном на рис. 1.1.

Аналогично графически можно изобразить все ограничения задачи ЛП.

Решением каждого неравенства системы ограничений ЗЛП является полуплоскость, содержащая граничную прямую и расположенная по одну сторону от нее. Пересечение полуплоскостей, каждая из которых определяется соответствующим неравенством системы, называется *областью допустимых решений*, или *областью*

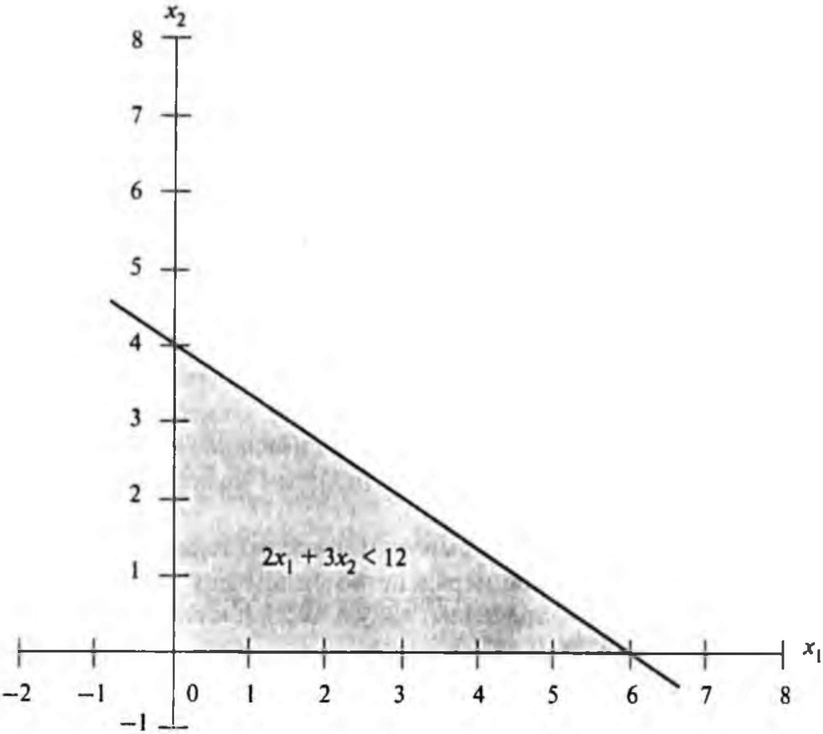


Рис. 1.1. Неравенству $2x_1 + 3x_2 \leq 12$ соответствует нижняя полуплоскость

определения. Необходимо помнить, что область допустимых решений удовлетворяет условиям неотрицательности ($x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$). Координаты любой точки, принадлежащей области определения, являются допустимым решением задачи.

Для нахождения экстремального значения целевой функции при графическом решении задач ЛП используют вектор-градиент, координаты которого являются частными производными целевой функции, т.е.

$$\nabla = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} = c_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = c_2 \right).$$

Этот вектор показывает направление наискорейшего изменения целевой функции. Прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = f(x_0)$, перпендикулярная вектору-градиенту, является линией уровня целевой функции. В любой точке линии уровня целевая функция принимает одно и то же значение. Приравняем целевую функцию постоянной величине «a». Меняя значение «a», получим семейство параллельных прямых, каждая из которых является линией уровня целевой функции.

Важное свойство линии уровня линейной функции состоит в том, что при параллельном смещении линии в одну сторону уровень только возрастает, а при смещении в другую сторону — только убывает.

С геометрической точки зрения в задаче линейного программирования ищется такая угловая точка или набор точек из допустимого множества решений, на котором достигается самая верхняя (нижняя) линия уровня, расположенная дальше (ближе) остальных в направлении наискорейшего роста.

Графический метод решения ЗЛП состоит из следующих этапов.

1. Строится многоугольная область допустимых решений (ОДР) ЗЛП.
2. Строится вектор-градиент целевой функции (ЦФ) в какой-нибудь точке x_0, принадлежащей ОДР:

   $\nabla = (c_1, c_2)$.
3. Линия уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = a$ (a — постоянная величина) — прямая, перпендикулярная вектору-градиенту ∇, — передвигается в направлении этого вектора в случае максимизации $f(x_1, x_2)$ до тех пор, пока не покинет пределов ОДР. Предельная точка (или точки) области при этом движении и является точкой максимума $f(x_1, x_2)$.
4. Для нахождения координат точки максимума достаточно решить два уравнения прямых, получаемых из соответствующих ограничений и дающих в пересечении точку максимума. Значение $f(x_1, x_2)$, найденное в получаемой точке, является максимальным.

При минимизации (максимизации) функции $f(x_1, x_2)$ линия уровня перемещается в направлении, противоположном вектору-градиенту. Если прямая, соответствующая линии уровня, при своем движении не покидает ОДР, то минимум (максимум) функции $f(x_1, x_2)$ не существует.

Если линия уровня параллельна какому-либо функциональному ограничению задачи, то оптимальное значение ЦФ будет достигаться в любой точке этого ограничения, лежащей между двумя оптимальными угловыми точками, и, соответственно, любая из этих точек является оптимальным решением ЗЛП. Возможные ситуации графического решения задач ЛП представлены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Возможные ситуации графического решения задач ЛП

№	Вид ОДР	Вид оптимального решения
1	Ограниченная	Единственное решение
		Бесконечное множество решений
2	Неограниченная	ЦФ не ограничена снизу
		ЦФ не ограничена сверху
		Единственное решение
		Бесконечное множество решений
3	Отрезок	Единственное решение
		Бесконечное множество решений

Рассмотрим графическое решение задач линейного программирования на следующем примере.

Пример 1.1. *Планирование выпуска продукции пошивочного предприятия (задача о костюмах).*

Намечается выпуск двух видов костюмов — мужских и женских. На женский костюм требуется 1 м шерсти, 2 м лавсана и 1 чел./день трудозатрат. На мужской костюм — 3,5 м шерсти, 0,5 м лавсана и 1 чел./день трудозатрат. Всего имеется 350 м шерсти, 240 м лавсана и 150 чел./дней трудозатрат. Требуется определить, сколько костюмов каждого вида необходимо сшить, чтобы обеспечить максимальную прибыль, если прибыль от реализации женского костюма составляет 10 денежных единиц, а от мужского — 20 денежных единиц. При этом следует иметь в виду, что необходимо сшить не менее 60 мужских костюмов.

Экономико-математическая модель задачи

Введем следующие обозначения: x_1 — число женских костюмов; x_2 — число мужских костюмов. Прибыль от реализации женских костюмов составляет $10x_1$, а от реализации мужских — $20x_2$, т.е. необходимо максимизировать целевую функцию:

$$f(\bar{x}) = 10x_1 + 20x_2 \to \max.$$

Ограничения задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} x_1 + \, x_2 &\le 150, \\ 2x_1 + 0{,}5\, x_2 &\le 240, \\ x_1 + 3{,}5\, x_2 &\le 350, \\ x_2 &\ge 60, \\ x_1 &\ge 0. \end{aligned}$$

Первое ограничение по труду $x_1 + x_2 \leq 150$. Прямая $x_1 + x_2 = 150$ проходит через точки (150; 0) и (0; 150) (рис. 1.2).

Второе ограничение по лавсану $2x_1 + 0{,}5x_2 \leq 240$. Прямая $2x_1 + 0{,}5x_2 = 240$ проходит через точки (120; 0) и (0; 480). Третье ограничение по шерсти $x_1 + 3{,}5x_2 \leq 350$. Добавим четвертое ограничение по количеству мужских костюмов $x_2 \geq 60$. Решением этого неравенства является полуплоскость, лежащая выше прямой $x_2 = 60$. На рис. 1.3 заштрихована область допустимых решений. Для определения направления движения к оптимуму построим вектор-градиент ∇, координаты которого являются частными производными целевой функции, т.е.

$$\nabla = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} = c_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = c_2 \right) = (10; 20).$$

Чтобы построить такой вектор, нужно соединить точку (10; 20) с началом координат. При максимизации целевой функции необходимо двигаться в направлении вектора-градиента, а при минимизации — в противоположном направлении. Для удобства можно строить вектор, пропорциональный вектору ∇. Так, на рис. 1.4 изображен вектор-градиент (30; 60).

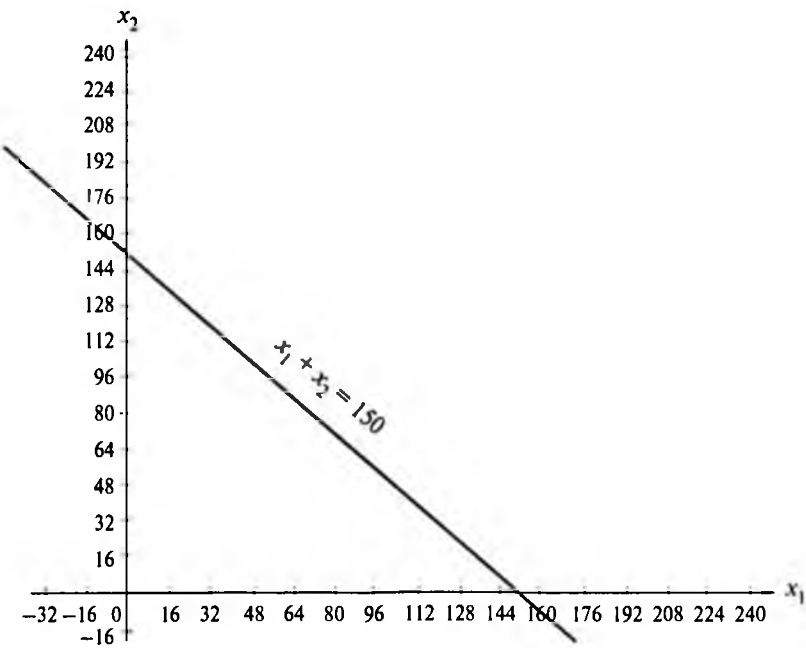


Рис. 1.2. Решением первого неравенства является нижняя полуплоскость

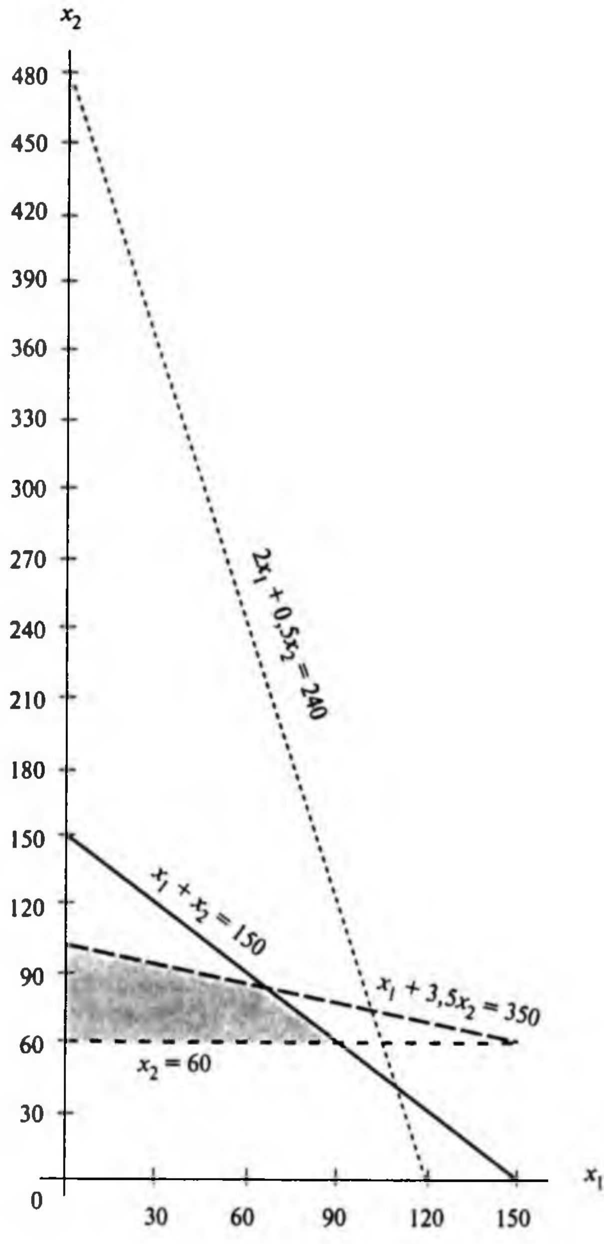


Рис. 1.3. Заштрихована область допустимых решений

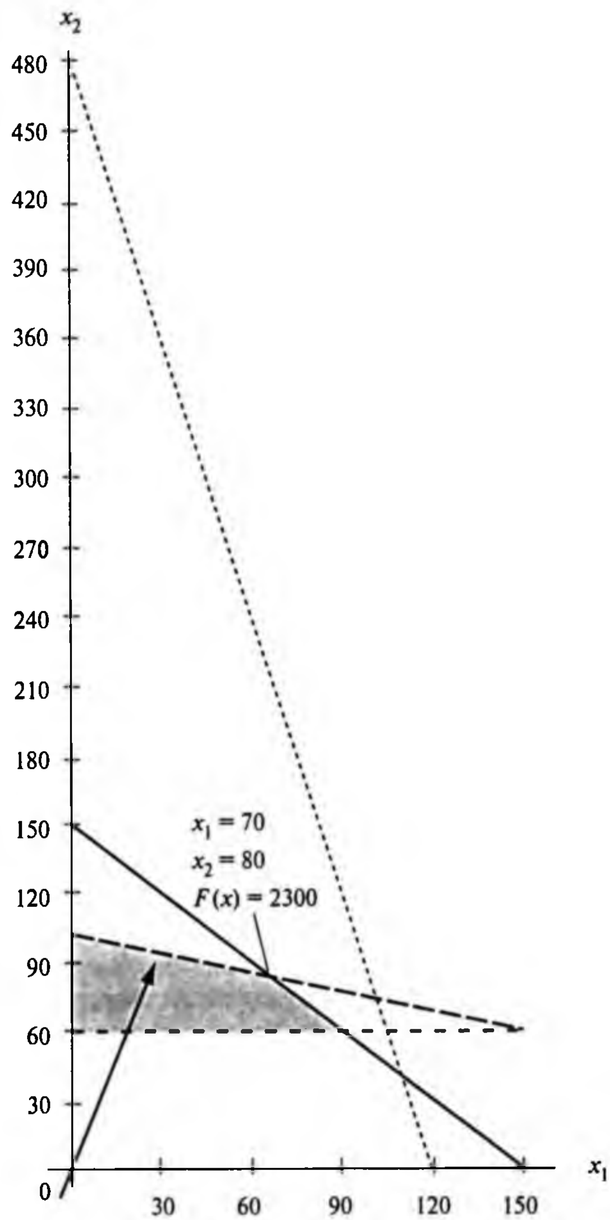


Рис. 1.4. Максимум целевой функции достигается в точке (70; 80)

В нашем случае движение линии уровня будем осуществлять до ее выхода из области допустимых решений. В крайней, угловой, точке достигается максимум целевой функции. Для нахождения координат этой точки достаточно решить два уравнения прямых, получаемых из соответствующих ограничений и дающих в пересечении точку максимума:

$$x_1 + 3{,}5x_2 = 350,$$

$$x_1 + x_2 = 150.$$

Отсюда легко записать решение исходной ЗЛП: $\max f(x) = 2300$ и достигается при $x_1 = 70$ и $x_2 = 80$ (см. рис. 1.4).

1.3. ТЕХНОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ НАДСТРОЙКИ ПОИСК РЕШЕНИЯ В СРЕДЕ EXCEL

1.3.1. Общие сведения о работе с табличным процессором Excel

Рассмотрим некоторые аспекты работы с табличным процессором Excel, которые позволят упростить расчеты, необходимые для решения оптимизационных задач. Табличный процессор — это программный продукт, предназначенный для автоматизации обработки данных табличной формы.

Элементы экрана Excel. После запуска Excel на экране появляется таблица, вид которой показан на рис. 1.5.

Это изображение называют рабочим листом. Оно представляет собой сетку строк и столбцов, пересечения которых образуют прямоугольники, называемые ячейками. Рабочие листы предназначены для ввода данных, выполнения расчетов, организации информационной базы и т.п. Окно Excel отображает основные программные элементы: строку заголовка, строку меню, строку состояния, кнопки управления окнами.

Работа с формулами. В программах электронных таблиц формулы служат для выполнения множества разнообразных расчетов. С помощью Excel можно быстро создать формулу. Формула состоит из трех основных частей:

1) знака равенства;

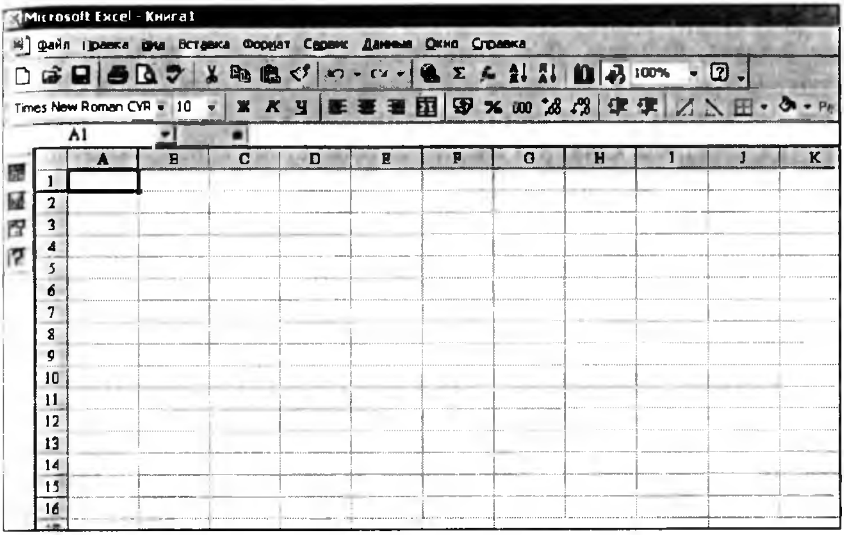


Рис. 1.5. Рабочий лист Excel

2) совокупности значений или ссылок на ячейки, с которыми выполняются расчеты;
3) операторов.

Если знак равенства отсутствует, то Excel интерпретирует данные не как формулу, а как ввод данных в ячейку. Формулы можно вводить непосредственно в ячейку или в строку формул — как текст, так и число. При этом нужно выполнить следующие действия:

- выделить ячейку, которая должна содержать формулу и ввести знак (=);
- ввести оператор или знак действия;
- выделить другую ячейку, включаемую в формулу;
- опять ввести оператор и так далее, пока не завершится ввод формулы;
- нажать на клавишу Enter.

В строке формул появится введенная формула, в ячейке — результат расчета.

Использование в формулах функций. Чтобы облегчить ввод формул, можно воспользоваться функциями Excel. Функции — это встроенные в Excel формулы. Excel содержит множество формул. Они сгруппированы по различным типам: логические, математические, инженерные, статистические и др.

Для активизации той или иной формулы следует нажать кнопки Вставка, Функции. В появившемся окне Мастер функций слева содержится перечень типов функций. После выбора типа справа будет помещен список самих функций. Выбор функции осуществляется щелчком клавиши мыши на соответствующем названии.

Различные функции выполняют разные типы вычислений по определенным правилам. Когда функция является единичным объектом в ячейке рабочего листа, она начинается со знака (=), далее следует название функции, а затем — аргументы функции, заключенные в скобки.

Поиск решения — это надстройка Excel, которая позволяет решать оптимизационные задачи. Если в меню Сервис отсутствует команда Поиск решения, значит, необходимо загрузить эту надстройку. Выберите команду Сервис ⇒ Надстройки и активизируйте надстройку Поиск решения. Если же этой надстройки нет в диалоговом окне Надстройки, то вам необходимо обратиться к панели управления Windows, щелкнуть на пиктограмме Установка и удаление программ и с помощью программы установки Excel (или Office) установить надстройку Поиск решения.

После выбора команд Сервис ⇒ Поиск решения появится диалоговое окно Поиск решения.

В диалоговом окне Поиск решения есть три основных параметра:

- Установить целевую ячейку.
- Изменяя ячейки.
- Ограничения.

Сначала нужно заполнить поле Установить целевую ячейку. Во всех задачах для средства Поиск решения оптимизируется результат в одной из ячеек рабочего листа. Целевая ячейка связана с другими ячейками этого рабочего листа с помощью формул. Средство Поиск решения использует формулы, которые дают результат в целевой ячейке, для проверки возможных решений. Можно выбрать поиск наименьшего или наибольшего значения для целевой ячейки или установить конкретное значение.

Второй важный параметр средства Поиск решения — это параметр Изменяя ячейки. Здесь указываются ячейки, значения в которых будут изменяться для того, чтобы оптимизировать результат в целевой ячейке. Для поиска решения можно указать до 200 изменяемых ячеек. К этим ячейкам предъявляется два основных требования: они не должны содержать формул и изменение их значений должно отражаться на изменении результата в целевой ячейке. Другими словами, целевая ячейка зависит от изменяемых ячеек.

Третий параметр, который нужно вводить на вкладке Поиск решения, — это ограничения.

Для решения задачи необходимо:

1) указать адреса ячеек, в которые будет помещен результат решения (изменяемые ячейки);
2) ввести исходные данные;
3) ввести зависимость для целевой функции;
4) ввести зависимости для ограничений;
5) запустить команду Поиск решений;
6) назначить ячейку для целевой функции (установить целевую ячейку);
7) ввести ограничения;
8) ввести параметры для решения ЗЛП.

Рассмотрим технологию решения, используя условия примера 1.1 (*задача о костюмах*).

Экономико-математическая модель задачи

Пусть x_1 — число женских костюмов; x_2 — число мужских костюмов,

$f(x) = 10 \times x_1 + 20 \times x_2 \to \max.$

Ограничения задачи имеют вид:

$$x_1 + x_2 \le 150 \text{ — ограничение по труду;}$$
$$2 \times x_1 + 0{,}5 \times x_2 \le 240 \text{ — ограничение по лавсану;}$$
$$x_1 + 3{,}5 \times x_2 \le 350 \text{ — ограничение по шерсти;}$$
$$x_2 \ge 60 \text{ — ограничение по мужским костюмам;}$$
$$x_1 \ge 0 \text{ — ограничение по женским костюмам.}$$

Решение

1. Указать адреса ячеек, в которые будет помещен результат решения (изменяемые ячейки).

Обозначьте через x_1, x_2 количество костюмов каждого типа. В нашей задаче оптимальные значения вектора $\overline{X} = (x_1, x_2)$ будут помещены в ячейках **A2:B2**, оптимальное значение целевой функции — в ячейке **C3**.

2. Ввести исходные данные.

Введите исходные данные задачи, как показано на рис. 1.6.

	A	B	C	D	E
1	x1	x2			
2					
3	10	20			
4	1	3.5		350	
5	2	0.5		240	
6	1	1		150	
7		1		60	
8					

Рис. 1.6. Введены исходные данные

3. Ввести зависимость для целевой функции.

- Поместить курсор в ячейку «С3», произойдет выделение ячейки.
- Поместить курсор на кнопку Мастер функций, расположенную на панели инструментов.
- Ввести Enter. На экране появляется диалоговое окно Мастер функций шаг 1 из 2.
- В окне Категория выбрать категорию Математические.
- В окне Функции выбрать строку СУММПРОИЗВ (рис. 1.7). На экране появляется диалоговое окно СУММПРОИЗВ (рис. 1.8).
- В строку Массив 1[1] ввести **А2:В2**.
- В строку Массив 2 ввести **А3:В3**.

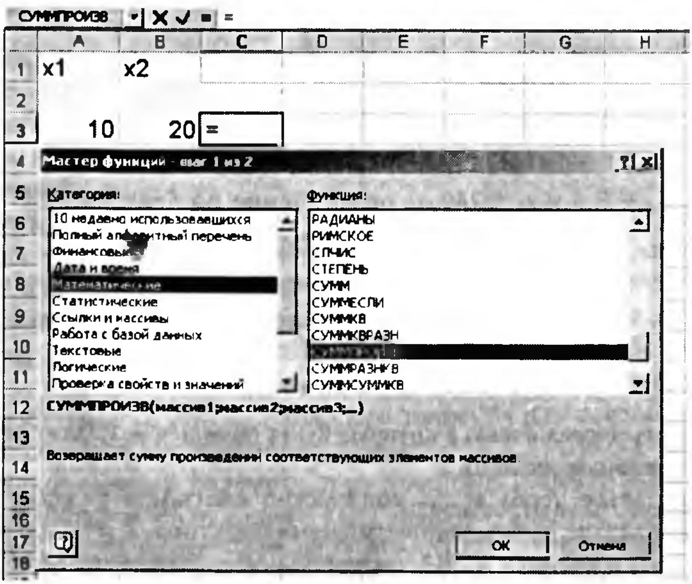


Рис. 1.7. Выбор функции

[1] Адреса ячеек во все диалоговые окна удобно вводить не с клавиатуры, а помещая курсор мыши в ячейки, чьи адреса следует ввести.

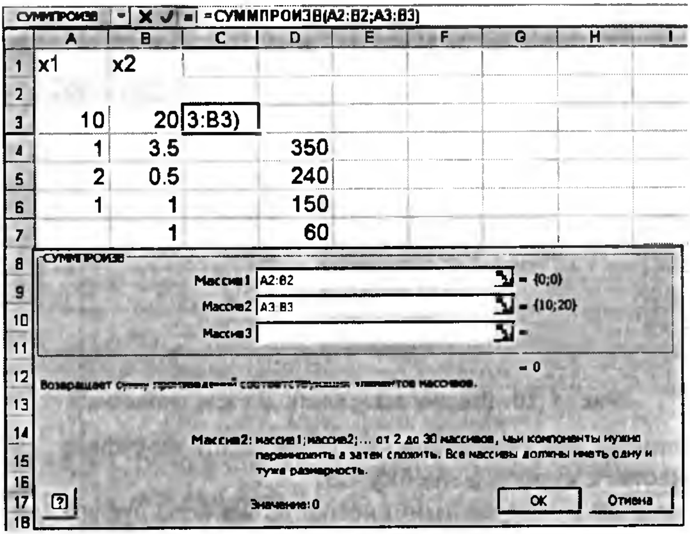


Рис. 1.8. Ввод данных для функции СУММПРОИЗВ

Массив 1 будет использоваться при вводе зависимостей для ограничений, поэтому на этот массив надо сделать абсолютную ссылку[1]. На рис. 1.9 показано, что в ячейку **C3** введена функция.

4. Ввести зависимости для ограничений (рис. 1.10).

- Поместить курсор в ячейку **C3**.
- На панели инструментов кнопка Копировать в буфер.
- Поместить курсор в ячейку **C4**.

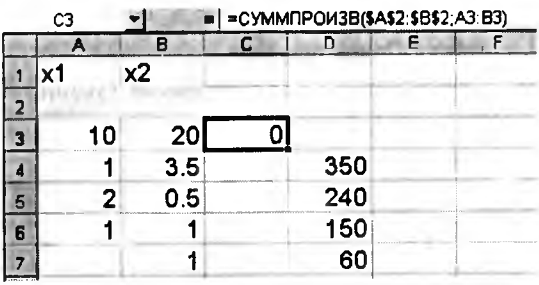


Рис. 1.9. Введена зависимость для целевой функции

[1] В зависимости от выполняемых задач в Excel можно использовать *относительные ссылки*, определяющие положение ячейки относительно положения ячейки формулы, и *абсолютные ссылки*, которые всегда указывают на конкретные ячейки. Если перед буквой или номером стоит знак доллара, например **$A$2**, то ссылка на столбец или строку является абсолютной. Относительные ссылки автоматически корректируются при копировании, а абсолютные ссылки — нет.

C3 =СУММПРОИЗВ($A$2:$B$2;A3:B3)

	A	B	C	D	E	F
1	x1	x2				
2						
3	10	20	0			
4	1	3.5	0	350		
5	2	0.5	0	240		
6	1	1	0	150		
7		1	0	60		

Рис. 1.10. Введены зависимости для всех ограничений

- На панели инструментов кнопка Вставить из буфера.
- Поместить курсор в ячейку **C5**.
- На панели инструментов кнопка Вставить из буфера.
- Поместить курсор в ячейку **C6**.
- На панели инструментов кнопка Вставить из буфера.
- Поместить курсор в ячейку **C7**.
- На панели инструментов нажать кнопку Вставить из буфера. (Содержимое ячеек **C4—C7** необходимо проверить. Они **обязательно** должны содержать информацию, как это показано для примера на рис. 1.11; в качестве примера представлено содержимое ячейки **C5.**)
- В строке Меню указатель мышки поместить на Сервис. В развернутом меню выбрать команду Поиск решения. Появляется диалоговое окно Поиск решения (рис. 1.12).

5. **Запустить команду** Поиск решения.
6. **Назначить ячейку для целевой функции** (установить целевую ячейку), указать адреса изменяемых ячеек.

C5 =СУММПРОИЗВ($A$2:$B$2;A5:B5)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x1	x2					
2							
3	10	20	0				
4	1	3.5	0	350			
5	2	0.5	0	240			
6	1	1	0	150			
7		1	0	60			

Рис. 1.11. Проверка содержимого ячейки **C5**

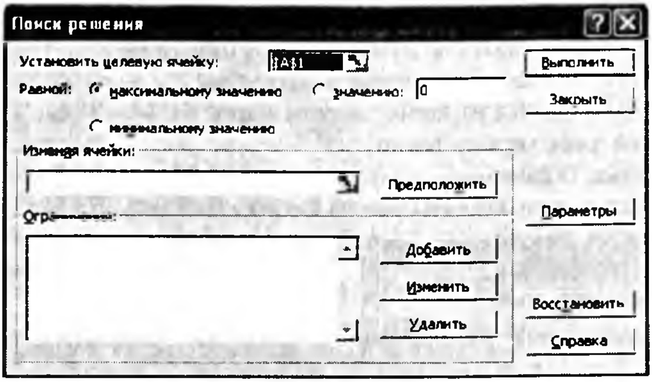


Рис. 1.12. Меню Поиск решения

- Поместить курсор в строку Установить целевую ячейку.
- Ввести адрес ячейки **$C$3**.
- Ввести тип целевой функции в зависимости от условия вашей задачи. Для этого отметьте, чему равна целевая функция — Максимальному значению или Минимальному значению.
- Поместить курсор в строку Изменяя ячейки.
- Ввести адреса искомых переменных **A$2:B$2** (рис. 1.13).

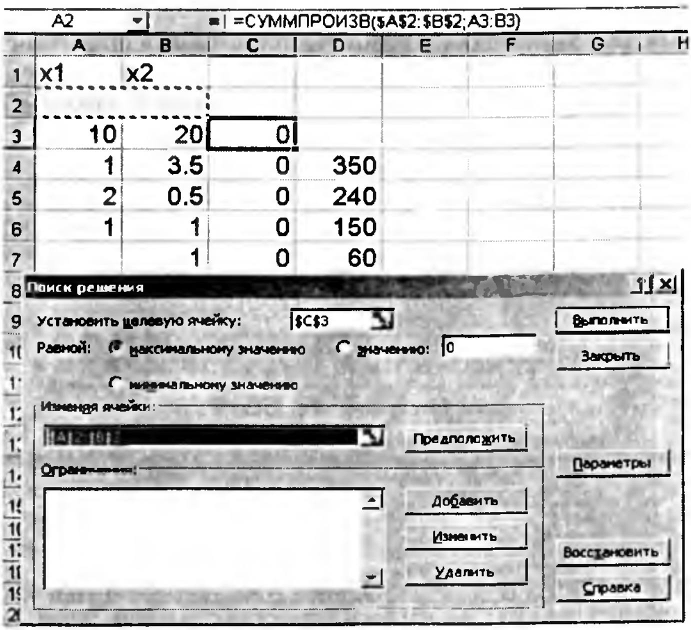


Рис. 1.13. Ввод адресов исходных переменных

7. **Ввести ограничения.**

- Поместить указатель мыши на кнопку Добавить. Появляется диалоговое окно Добавление ограничения.
- В строке Ссылка на ячейку ввести адрес **$C$4**.
- Ввести знак ограничения.
- В строке Ограничение ввести адрес **$D$4** (рис. 1.14).
- Поместить указатель мыши на кнопку Добавить. На экране вновь появится диалоговое окно Добавление ограничения.
- Ввести остальные ограничения задачи по вышеописанному алгоритму.
- После введения последнего ограничения нажать на кнопку ОК. На экране появится диалоговое окно Поиск решения с введенными условиями (рис. 1.15).

8. **Ввести параметры для решения задачи линейного программирования.**

- В диалоговом окне поместить указатель мышки на кнопку Параметры. На экране появится диалоговое окно Параметры поиска решения (рис. 1.16).
- Установить флажки в окнах Линейная модель (это обеспечит применение симплекс-метода) и Неотрицательные значения.
- Поместить указатель мыши на кнопку ОК. На экране появится диалоговое окно Поиск решения.
- Поместить указатель мыши на кнопку Выполнить.

Через непродолжительное время появятся диалоговое окно Результаты поиска решения и исходная таблица с заполненными

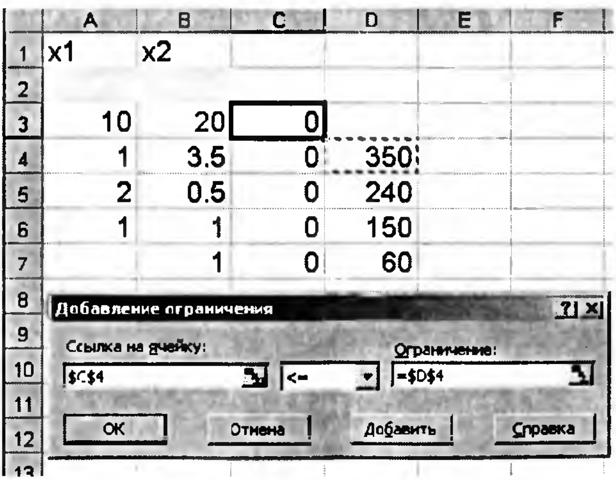


Рис. 1.14. Добавление ограничения

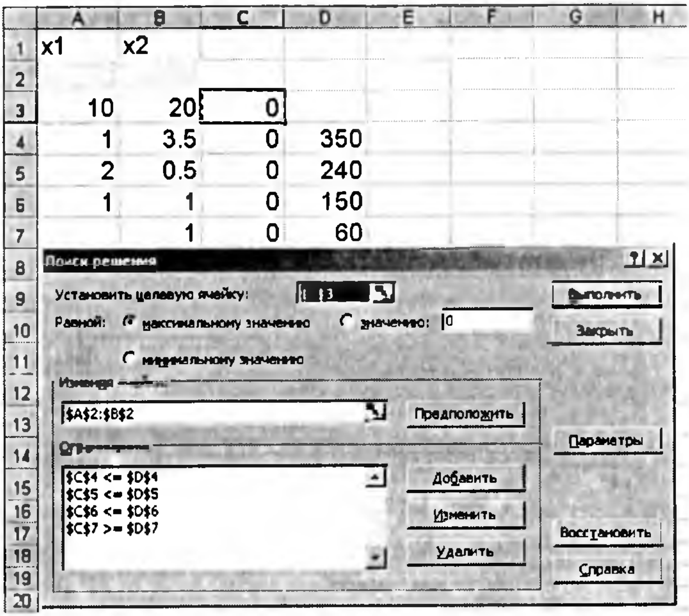


Рис. 1.15. Введены все условия задачи

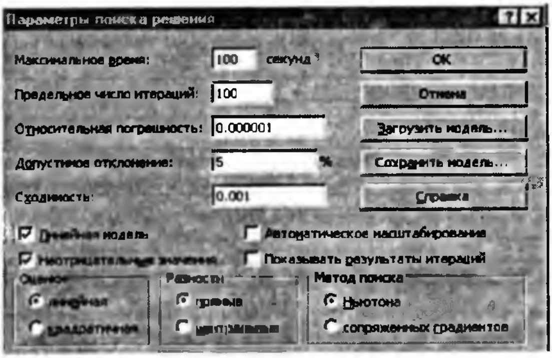
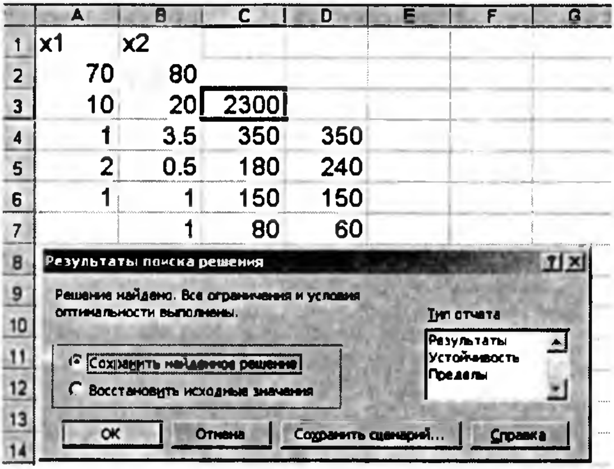


Рис. 1.16. Ввод параметров

ячейками **A3:B3** для значений x_i и ячейка **C3** с максимальным значением целевой функции (рис. 1.17).

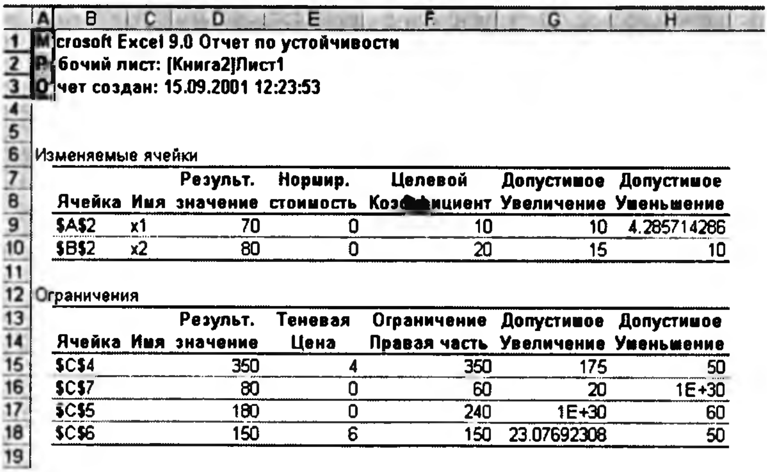
Если указать тип отчета Устойчивость, то можно получить дополнительную информацию об оптимальном решении (рис. 1.18).

В результате решения задачи был получен ответ: необходимо сшить **70 шт.** женских костюмов и **80 шт.** мужских костюмов, чтобы получить максимальную прибыль **2300 у.е.**



	A	B	C	D
1	x1	x2		
2	70	80		
3	10	20	2300	
4	1	3.5	350	350
5	2	0.5	180	240
6	1	1	150	150
7		1	80	60

Рис. 1.17. Решение получено



Microsoft Excel 9.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Книга2]Лист1
Отчет создан: 15.09.2001 12:23:53

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$A$2	x1	70	0	10	10	4.285714286
$B$2	x2	80	0	20	15	10

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$C$4		350	4	350	175	50
$C$7		80	0	60	20	1E+30
$C$5		180	0	240	1E+30	60
$C$6		150	6	150	23.07692308	50

Рис. 1.18. Содержимое протокола Устойчивость

1.4. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

В 1975 г. наш соотечественник Л.В. Канторович был удостоен Нобелевской премии по экономике (совместно с американским экономистом Т. Купмансом) за разработку теории оптимального использования ресурсов (см. Приложение 1).

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая двойственной; первоначальная задача называется *исходной*, или *прямой*. Связь исходной и двойственной задач заключается, в частности, в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой.

Переменные двойственной задачи y_i называются *объективно обусловленными оценками*, или двойственными оценками, или «ценами» ресурсов, или теневыми ценами.

Каждая из задач двойственной пары фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо от другой.

Двойственная задача по отношению к исходной составляется согласно следующим **правилам**:

1) целевая функция исходной задачи формулируется на максимум, а целевая функция двойственной задачи — на минимум, при этом в задаче на максимум все неравенства в функциональных ограничениях имеют вид ($\le$), в задаче на минимум — вид ($\ge$);
2) матрица A, составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений исходной задачи, и аналогичная матрица A^T в двойственной задаче получаются друг из друга транспонированием;
3) число переменных в двойственной задаче равно числу функциональных ограничений исходной задачи, а число ограничений в системе двойственной задачи — числу переменных в исходной;
4) коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в системе ограничений исходной задачи, а правыми частями в ограничениях двойственной задачи — коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной;
5) каждому ограничению одной задачи соответствует переменная другой задачи, номер переменной совпадает с номером ограничения. При этом ограничению, записанному в виде неравенства $\le$, соответствует переменная, связанная условием неотрицательности. Если функциональное ограничение исходной задачи является равенством, то соответствующая переменная двойственной задачи может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Модель исходной (прямой) задачи в общем виде может быть записана следующим образом:

$$\max f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = 1, 2, ..., m,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

а модель двойственной задачи —

$$g(\overline{Y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j,$$

$$y_i \ge 0.$$

Две приведенные задачи образуют пару симметричных двойственных задач. Основные утверждения о взаимно двойственных задачах содержатся в двух следующих теоремах.

Первая теорема двойственности. *Для взаимно двойственных задач имеет место один из взаимоисключающих случаев.*

1. *В прямой и двойственной задачах имеются оптимальные решения, при этом значения целевых функций на оптимальных решениях совпадают*

   $$f^*(\overline{X}) = g^*(\overline{Y}).$$

2. *В прямой задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена сверху. При этом у двойственной задачи будет пустое допустимое множество.*
3. *В двойственной задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена снизу. При этом у прямой задачи допустимое множество оказывается пустым.*
4. *Обе из рассматриваемых задач имеют пустые допустимые множества.*

Вторая теорема двойственности (теорема о дополняющей нежесткости). *Пусть* $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ — *допустимое решение прямой задачи, а* $\overline{Y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$ — *допустимое решение двойственной задачи. Для того чтобы они были оптимальными решениями соответственно прямой и двойственной задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:*

$$y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) = 0; \qquad (1.4)$$

$$x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j - c_j\right) = 0. \quad (1.5)$$

Условия (1.4) и (1.5) позволяют, зная оптимальное решение одной из взаимно двойственных задач, найти оптимальное решение другой задачи.

Рассмотрим еще одну теорему, выводы которой будут использованы в дальнейшем.

Теорема об оценках. *Значения переменных y_i в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов b_i системы ограничений (неравенств) прямой задачи на величину*

$$\Delta f(X) = \Delta b_i y_i.$$

Решая ЗЛП симплекс-методом, мы одновременно решаем двойственную ЗЛП. Переменные двойственной задачи y_i называют объективно обусловленными оценками.

Рассмотрим экономическую интерпретацию двойственной задачи на примере *задачи о коврах.*

Пример 1.2. Используя постановку **задачи о коврах**, выполнить следующие задания.

1. Сформулировать экономико-математическую модель задачи о коврах на максимум общей стоимости продукции, используя данные табл. 1.1.
2. Используя Поиск решения, найти такой план выпуска продукции, при котором общая стоимость продукции будет максимальной.
3. Сформулировать экономико-математическую модель двойственной задачи к задаче о коврах.
4. Найти оптимальный план двойственной задачи, используя теоремы двойственности, пояснить равенство нулю X_1 и X_4.
5. Используя протоколы Поиска решения, выполнить анализ полученного оптимального решения исходной задачи.
6. Определить, как изменится общая стоимость и план выпуска продукции при увеличении запаса ресурса труб на 12 ед.

Решение

1. Сформулируем экономико-математическую модель задачи.

Обозначим через X_1, X_2, X_3, X_4 число ковров каждого типа. Целевая функция имеет вид

$$f(X) = 3X_1 + 4X_2 + 3X_3 + X_4 \to \max,$$

а ограничения по ресурсам

$$7X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 6X_4 \le 80,$$

$$5X_1 + 8X_2 + 4X_3 + 3X_4 \le 480,$$

$$2X_1 + 4X_2 + X_3 + 8X_4 \le 130,$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0.$$

2. Поиск оптимального плана выпуска.

Решение задачи выполним с помощью надстройки Excel Поиск решения. Технология решения задачи была подробно рассмотрена в *задаче о костюмах*. В нашей задаче оптимальные значения вектора $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ будут помещены в ячейках **B3:E3**, оптимальное значение целевой функции — в ячейке **F4**.

Введем исходные данные. Сначала опишем целевую функцию с помощью функции — СУММПРОИЗВ (рис. 1.19). А потом введем данные для левых частей ограничений. В Поиске решения введем направление целевой функции, адреса искомых переменных, добавим ограничения. На экране появится диалоговое окно Поиск решения с введенными условиями (рис. 1.20).

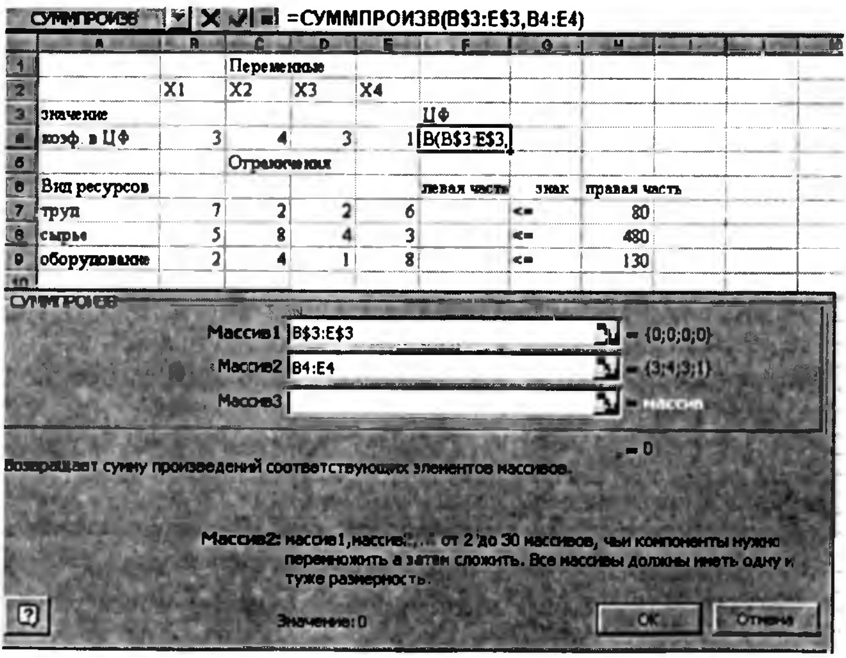


Рис. 1.19. Вводится функция для вычисления целевой функции

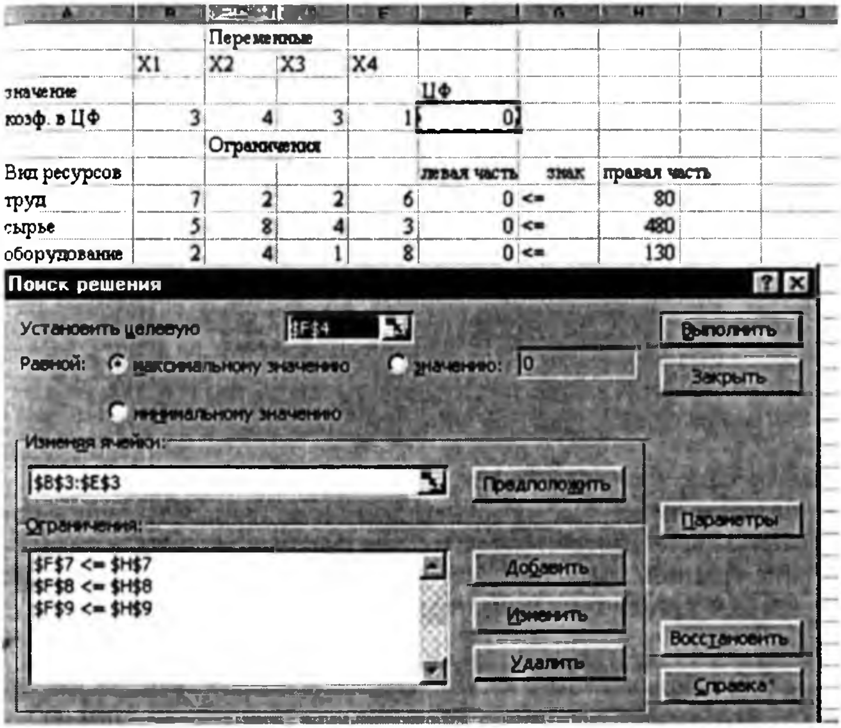


Рис. 1.20. Введены все условия задачи

После ввода параметров для решения ЗЛП следует нажать кнопку Выполнить. На экране появится сообщение, что решение найдено (рис. 1.21).

Полученное решение означает, что максимальный доход **150** тыс. руб. фабрика может получить при выпуске **30** ковров второго вида и **10** ковров третьего вида. При этом ресурсы «труд» и «оборудование» будут использованы полностью, а из 480 кг пряжи (ресурс «сырье») будет использовано 280 кг.

Создание отчета по результатам поиска решения. Excel позволяет представить результаты поиска решения в форме отчета (табл. 1.4). Существует три типа таких отчетов:

- Результаты (Answer). В отчет включаются исходные и конечные значения целевой и изменяемых ячеек, дополнительные сведения об ограничениях.
- Устойчивость (Sensitivity). Отчет, содержащий сведения о чувствительности решения к малым изменениям в изменяемых ячейках или в формулах ограничений.

Рис. 1.21. Решение найдено

- Пределы (Limits). Помимо исходных и конечных значений изменяемых и целевой ячеек, в отчет включаются верхние и нижние границы значений, которые могут принимать влияющие ячейки при соблюдении ограничений.

Таблица 1.4

Содержание отчета по результатам

Отчет по результатам			
Целевая ячейка (максимум)			
Ячейка	**Имя**	**Исходно**	**Результат**
$F$4	коэф. в ЦФ	0	**150**
Изменяемые ячейки			
Ячейка	**Имя**	**Исходно**	**Результат**
$B$3	значение X1	0	**0**
$C$3	значение X2	0	**30**
$D$3	значение X3	0	**10**
$E$3	значение X4	0	**0**
Ограничения			
Ячейка	**Имя**	**Значение**	**Формула**
$F$7	труд левая часть	80	$F$7<=$H$7
$F$8	сырье левая часть	280	$F$8<=$H$8
$F$9	оборудование левая часть	130	$F$9<=$H$9

В отчете по результатам содержатся оптимальные значения переменных X_1, X_2, X_3, X_4, которые соответственно равны 0; 10; 30; 0; значение целевой функции — 150, а также левые части ограничений.

Содержание остальных отчетов будет рассмотрено ниже.

3. **Сформулируем экономико-математическую модель двойственной задачи к задаче о коврах.**

Неизвестные. Число неизвестных в двойственной задаче равно числу функциональных ограничений в исходной задаче. Исходная задача содержит 3 ограничения: по труду, сырью и оборудованию. Следовательно, в двойственной задаче 3 неизвестных:

Y_1 — двойственная оценка ресурса «труд», или «цена» труда;

Y_2 — двойственная оценка ресурса «сырье», или «цена» сырья;

Y_3 — двойственная оценка ресурса «оборудование», или «цена» оборудования.

Целевая функция двойственной задачи формулируется на минимум. **Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в системе ограничений исходной задачи:**

$$g(\overline{Y}) = 80Y_1 + 480Y_2 + 130Y_3 \to \min.$$

Необходимо найти такие «цены» на ресурсы (Y_i), чтобы общая стоимость используемых ресурсов была минимальной.

Ограничения. Число ограничений в системе двойственной задачи равно числу переменных в исходной задаче. В исходной задаче 4 переменных, следовательно, в двойственной задаче 4 ограничения. **В правых частях ограничений двойственной задачи стоят коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи. Левая часть ограничений определяет стоимость ресурсов, затраченных на производство единицы продукции.** Каждое ограничение соответствует определенному виду продукции:

$$\begin{aligned} 7Y_1 + 5Y_2 + 2Y_3 &\ge 3,\\ 2Y_1 + 8Y_2 + 4Y_3 &\ge 4,\\ 2Y_1 + 4Y_2 + Y_3 &\ge 3,\\ 6Y_1 + 3Y_2 + 8Y_3 &\ge 1,\\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

4. **Найдем оптимальный план двойственной задачи, используя теоремы двойственности.**

Воспользуемся первым соотношением второй теоремы двойственности

$$y_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right) = 0,$$

тогда

$$Y_1\ (7X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 6X_4 - 80) = 0,$$
$$Y_2\ (5X_1 + 8X_2 + 4X_3 + 3X_4 - 480) = 0,$$
$$Y_3\ (2X_1 + 4X_2 + X_3 + 8X_4 - 130) = 0.$$

Подставим оптимальные значения вектора $\overline{X}$ в полученные выражения

$$Y_1\ (7 \times 0 + 2 \times 30 + 2 \times 10 + 6 \times 0 - 80) = 0,$$
$$Y_2\ (5 \times 0 + 8 \times 30 + 4 \times 10 + 3 \times 0 - 480) = 0,$$
$$Y_3\ (2 \times 0 + 4 \times 30 + 1 \times 10 + 8 \times 0 - 130) = 0$$

и получим

$Y_1\ (80 - 80) = 0,$

$Y_2\ (280 - 480) = 0$, так как $280 < 480$, то $Y_2 = 0$,

$Y_3\ (130 - 130) = 0.$

Воспользуемся вторым соотношением второй теоремы двойственности

$$x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i - c_j\right) = 0;\quad \text{если } x_j > 0, \text{ то } \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i = c_j.$$

В нашей задаче $X_2 = 30 > 0$ и $X_3 = 10 > 0$, поэтому второе и третье ограничения двойственной задачи обращаются в равенства

$$2 \times Y_1 + 8 \times Y_2 + 4 \times Y_3 = \mathbf{4},$$
$$2 \times Y_1 + 4 \times Y_2 + 1 \times Y_3 = \mathbf{3},$$
$$Y_2 = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, находим Y_1 и Y_3.

Теневые цены ресурсов «труд», «сырье» и «оборудование» соответственно равны $Y_1 = 4/3$, $Y_2 = 0$, $Y_3 = 1/3$, или в десятичных дробях 1,3333; 0; 0,3333.

Проверим выполнение первой теоремы двойственности

$$g(\overline{Y}) = 80 \times Y_1 + 480 \times Y_2 + 130 \times Y_3 =$$
$$= 80 \times 4/3 + 480 \times 0 + 130 \times 1/3 = 150,$$

$$f(\overline{X}) = 3 \times X_1 + 4 \times X_2 + 3 \times X_3 + X_4 =$$
$$= 3 \times 0 + 4 \times 30 + 3 \times 10 + 0 = 150.$$

Это означает, что оптимальный план двойственной задачи определен верно.

Ответ на вопрос о равенстве нулю X_1 и X_4 будет дан позже.

Решение двойственной задачи можно найти, выбрав команду Поиск решений ⇒ Отчет по устойчивости.

Отчет по устойчивости. Отчет по устойчивости приводится в табл. 1.5. Первая часть таблицы содержит информацию, относящуюся к переменным:

- Результат решения задачи.
- Нормированная стоимость, которая показывает, на сколько изменится значение ЦФ в случае принудительного включения единицы этой продукции в оптимальное решение. Например, в отчете по устойчивости для рассматриваемой задачи (см. табл. 1.5) нормированная стоимость для ковров первого вида равна –7 тыс. руб./шт. (строка 1). Это означает, что если мы, несмотря на оптимальное решение (0; 30; 10; 0), попробуем включить в план выпуска один ковер первого вида, то новый план выпуска принесет нам доход 143 тыс. руб., что на 7 тыс. руб. меньше, чем прежнее оптимальное решение.
- Коэффициенты целевой функции.
- Предельные значения приращения целевых коэффициентов Δc_j, при которых сохраняется первоначальное оптимальное решение. Например, *допустимое увеличение цены на ковер первого вида равно 7 тыс. руб./шт., а допустимое уменьшение — практически не ограничено* (строка 1 из табл. 1.5). Это означает, что если цена ковра первого вида возрастет более чем на *7 тыс. руб./шт.*, то оптимальное решение изменится: станет целесообразным выпускать X_1. А если их цена будет снижаться вплоть до нуля, то оптимальное решение (0; 30; 10; 0) останется прежним.

Во второй части табл. 1.5 содержится информация, относящаяся к ограничениям:

- Величина использованных ресурсов в колонке Результ. значение.
- Предельные значения приращения ресурсов Δb_i. В графе Допустимое уменьшение показано, на сколько можно уменьшить (устранить излишек) или увеличить (повысить минимально необходимое требование) ресурс, сохранив при этом оптимальное решение. Рассмотрим анализ *дефицитных* ресурсов. Анализируя отчет по результатам, мы установили, что существуют причины (ограничения), не позволяющие фабрике выпускать больше ковров, чем в оптимальном решении, и получать более высокий доход. В рассматриваемой задаче такими ограничениями являются дефицитные ресурсы «труд» и «оборудование». Поскольку знак ограничений этих запасов имеет вид $\leq$, то возникает вопрос, на сколько максимально должен возрасти запас этих ресурсов, чтобы обеспечить увеличение выпуска

продукции. Ответ на этот вопрос показан в графе Допустимое увеличение. Ресурс «труд» имеет смысл увеличить самое большее на 150 чел./дней, а ресурс «оборудование» — на 30 станко/час.

- Ценность дополнительной единицы ресурса i («теневая цена») рассчитывается только для дефицитных ресурсов.

Таблица 1.5

Содержание отчета по устойчивости

Ячейка	Имя	Результирующее значение	**Нормируемая стоимость**	Целевой коэффициент	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$B$3	Значение X1	0	**–7**	3	7	1E+30
$C$3	Значение X2	30	**0**	4	8	1
$D$3	Значение X3	10	**0**	3	1	1.75
$E$3	Значение X4	0	**–9.667**	1	9.667	1E+30
Ограничения						
Ячейка	Имя	Результирующее значение	**Теневая цена**	Ограничение правая часть	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$F$7	труд левая часть	80	**1.333**	80	150	15
$F$8	сырье левая часть	280	**0**	480	1E+30	200
$F$9	оборудование левая часть	130	**0.333**	130	30	90

5. **Проведем анализ полученного оптимального решения исходной задачи с помощью двойственных оценок.**

- Анализ использования ресурсов в оптимальном плане выполняется с помощью второй теоремы двойственности:

$$\text{если } Y_i > 0, \quad \text{то } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m;$$

$$\text{если } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j < b_i, \quad \text{то } Y_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Ресурсы «труд» и «оборудование» имеют отличные от нуля оценки 4/3 и 1/3 — эти ресурсы полностью используются в оптимальном плане и являются дефицитными, т.е. сдерживающими рост целевой функции. Правые части этих ограничений равны левым частям:

$$7X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 6X_4 \leq 80,$$

$$2X_1 + 4X_2 + X_3 + 8X_4 \leq 130,$$

$$7 \times 0 + 2 \times 30 + 2 \times 10 + 6 \times 0 = \mathbf{80 = 80},$$

$$2 \times 0 + 4 \times 30 + 1 \times 10 + 8 \times 0 = \mathbf{130 = 130}.$$

Ресурс «сырье» используется не полностью (280 < 480), поэтому имеет нулевую двойственную оценку ($Y_2 = 0$).

$$5X_1 + 8X_2 + 4X_3 + 3X_4 \leq 480,$$

$$5 \times 0 + 8 \times 30 + 4 \times 10 + 3 \times 0 = \mathbf{280 < 480}.$$

Этот ресурс не влияет на план выпуска продукции.

Общая стоимость используемых ресурсов при выпуске 30 ковров второго вида и 10 ковров третьего вида составит 150 тыс. руб.:

$$g(\overline{Y}) = 80 \times Y_1 + 480 \times Y_2 + 130 \times Y_3 =$$

$$= 80 \times 4/3 + 480 \times 0 + 130 \times 1/3 = 150 \text{ тыс. руб.}$$

Согласно четвертому ограничению задачи не использованный полностью в оптимальном плане ресурс получает нулевую оценку. Нулевая оценка ресурса свидетельствует о его недефицитности. Недефицитность ресурса возникает не из-за его неограниченных запасов (в задаче они ограничены величиной b_i), а из-за невозможности его полного использования в оптимальном плане. Так как суммарный расход недефицитного ресурса меньше его общего количества, то план производства им не лимитируется. Данный ресурс не препятствует и дальше максимизировать целевую функцию $f(\overline{X})$.

Заметим, что ценность различных видов ресурсов нельзя отождествлять с действительными ценами, по которым осуществляется его закупка. В данном случае речь идет о некоторой мере, имеющей экономическую природу, которая характеризует ценность ресурса только относительно полученного оптимального решения.

- Анализ эффективности отдельных изделий выполняется на основе соотношений из второй теоремы двойственности:

$$\text{если } X_j > 0, \quad \text{то } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i = c_j, \quad j = 1, ..., n;$$

$$\text{если } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i < c_j, \quad \text{то } X_j = 0, \quad j = 1, ..., n.$$

Поясним равенство нулю X_1 и X_4. Если изделие вошло в оптимальный план ($X_j > 0$), то в двойственных оценках оно не убыточно, т.е. стоимость ресурсов, затраченных на производство единицы изделия, равна его цене. Такие изделия эффективны, выгодны с точки зрения принятого критерия оптимальности. В нашей задаче — это ковры второго и третьего видов.

Если стоимость ресурсов, затраченных на производство одного изделия, больше его цены, то это изделие не войдет в оптимальный план из-за его убыточности. **В нашей задаче в план выпуска не вошли ковры первого и четвертого видов, потому что затраты по ним превышают цену на 7 (10 – 3 = 7) тыс. руб. и 9,666 (10,666 – 1 = = 9,666) тыс. руб. соответственно.** Этот факт можно подтвердить, подставив в ограничения двойственной задачи оптимальные значения вектора Y:

$$7 \times 4/3 + 5 \times 0 + 2 \times 1/3 = 30/3 = \mathbf{10 > 3},$$

$$2 \times 4/3 + 8 \times 0 + 4 \times 1/3 = 12/3 = \mathbf{4 = 4},$$

$$2 \times 4/3 + 4 \times 0 + 1 \times 1/3 = 9/3 = \mathbf{3 = 3},$$

$$6 \times 4/3 + 3 \times 0 + 8 \times 1/3 = 32/3 = \mathbf{10{,}666 > 1}.$$

Разницу между правыми и левыми частями ограничений двойственной задачи можно найти в Отчете по устойчивости в столбце Нормируемая стоимость.

6. Анализ влияния изменения правых частей ограничений на значения целевой функции (чувствительность решения к изменению запасов сырья).

Предположим, что запас сырья ресурса «труд» изменился на 12 ед., т.е. теперь он составляет 80 + 12 = 92 ед.

Из теоремы об оценках известно, что колебание величины b_i приводит к увеличению или уменьшению $f(\overline{X})$. Оно определяется величиной y_i в случае, когда при изменении величин b_i значения переменных y_i в оптимальном плане соответствующей двойственной задачи остаются неизменными. В нашей задаче увеличение запасов ресурса «труд» приведет к увеличению значения целевой функции на 16 тыс. руб. $(\Delta f(\overline{X}) = \Delta b_1 y_1 = 12 \times 4/3 = 16)$.

Для двойственных оценок оптимального плана существенное значение имеет их предельный характер. Оценки являются точной мерой влияния ограничений на функционал лишь при малом приращении ограничения. Известно, что оценки не меняют своей величины, если не меняется набор векторов, входящих в базис оптимального плана, тогда как интенсивность этих векторов (значения неизвестных) в плане могут меняться.

Поэтому необходимо знать такие интервалы изменения каждого из свободных членов системы ограничений исходной ЗЛП, или интервалы устойчивости двойственных оценок, в которых оптимальный план двойственной задачи не менялся бы. Эту информацию можно получить из Отчета по устойчивости. В приведенном фрагменте отчета (табл. 1.6) видно, что запасы дефицитных ресурсов «труд» и «оборудование» могут быть как уменьшены, так и увеличены. Увеличение запаса ресурса «сырье» не влияет на план выпуска продукции.

Таблица 1.6

Отчет по устойчивости

Отчет по устойчивости 2 Изменяемые ячейки						
Ячейка	Имя	Результирующее значение	Нормируемая стоимость	Целевой коэффициент	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$B$3	значение X1	**0**	–7	3	7	1E+30
$C$3	значение X2	**28**	0	4	8	1
$D$3	значение X3	**18**	0	3	1	1.75
$E$3	значение X4	**0**	–9,667	1	9,667	1E+30
Ограничения						
Ячейка	Имя	Результирующее значение	Теневая цена	Ограничение правая часть	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$F$7	труд левая часть	92	**1,333**	92	138	27
$F$8	сырье левая часть	296	**0**	480	1E+30	184
$F$9	оборудование левая часть	130	**0,333**	130	54	84

После увеличения запаса ресурса «труд» до 92 чел./час было получено новое решение задачи. Изменение запасов ресурсов в пределах интервалов устойчивости двойственных оценок привело не только к изменению значения целевой функции на 16 тыс. руб., но и к изменению плана выпуска. При этом структура плана не изменилась — изделия, которые были убыточны, не вошли и в новый план выпуска, так как цены на ресурсы не изменились. Новый план выпуска составляет 28 ковров второго вида и 18 ковров третьего вида. Изменение общей стоимости продукции на 16 тыс. руб. (24 – 8 = 16) получено за счет уменьшения плана выпуска на 2 ед. ковров второго вида по цене 4 тыс. руб. ($4 \times (28 - 30) = -8$ тыс. руб.) и увеличения на 8 ед. плана выпуска ковров третьего вида по цене 3 тыс. руб. ($3 \times (18 - 10) = 24$ тыс. руб.).

Пример 1.3. Применяя симплекс-метод к *задаче о размещении производственных заказов* (см. пример 1.1), был получен оптимальный план распределения объемов производства по филиалам предприятия:

X_i — объем выпускаемой продукции в филиале i			
X_1	X_2	X_3	X_4
0	100 тыс. шт.	200 тыс. шт.	0

Требуется: сформулировать экономико-математическую модель прямой и двойственной задачи, используя данные табл. 1.2 и найти оптимальный план двойственной задачи, используя теоремы двойственности.

Решение

1. Экономико-математическая модель исходной задачи.

Пусть X_i — объем выпускаемой продукции в филиале i. Целевая функция задачи имеет вид

$$f(\overline{X}) = 83X_1 + 89X_2 + 95X_3 + 98X_4 \to \min.$$

Ограничения

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &\geq 300 \ (\textit{тыс. шт.}), \\ 120X_1 + 80X_2 + 50X_3 + 40X_4 &\leq 18 \ (\textit{млн руб.}), \\ X_{1,2,3,4} &\geq 0. \end{aligned}$$

В табличном виде их можно записать следующим образом:

	83	89	95	98	
Y_1	1	1	1	1	300 000
Y_2	120	80	50	40	18 000 000

2. Экономико-математическая модель двойственной задачи.

Пусть Y_1 — двойственная оценка выпускаемой продукции, которая может быть ценой изделия; Y_2 — двойственная оценка капитальных вложений, которая может быть представлена как коэффициент эффективности капитальных вложений. Тогда

$$g(\overline{Y}) = 300\,000Y_1 + 18\,000\,000Y_2 \to \max,$$

$1 \times Y_1 + 120 \times Y_2 \leq 83,$

$1 \times Y_1 + 80 \times Y_2 \leq 89,$

$1 \times Y_1 + 50 \times Y_2 \leq 95,$

$1 \times Y_1 + 40 \times Y_2 \leq 98.$

3. Для определения оптимального плана двойственной задачи воспользуемся соотношениями второй теоремы двойственности.

Если какое-либо ограничение исходной задачи выполняется как строгое неравенство, то соответствующая двойственная оценка равна нулю, т.е.

$$\text{если } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j < b_i, \quad \text{то } Y_i = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Подставляя значения вектора $\overline{X}$ в ограничения исходной задачи, получим:

$0 + 100\,000 + 200\,000 + 0 = 300\,000,$

$120 \times 0 + 80 \times 100\,000 + 50 \times 200\,000 + 4 \times 0 = 18\,000\,000.$

Двойственные оценки Y_1 и Y_2 могут принимать любые значения.

Если какая-либо переменная исходной задачи входит в оптимальный план, то соответствующее ограничение двойственной задачи выполняется как строгое равенство:

$$\text{если } X_j > 0, \quad \text{то } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i = c_j.$$

В нашей задаче $X_2 = 100\,000 > 0$ и $X_3 = 200\,000 > 0$, поэтому второе и третье ограничения двойственной задачи обращаются в уравнения, решая которые найдем Y_1 и Y_2:

$$\begin{cases} 1 \times Y_1 + 50 Y_2 = 95, & Y_1 = 105 \text{ — средняя цена изделия,} \\ 1 \times Y_1 + 80 Y_2 = 89, & Y_2 = -0{,}2 \text{ — двойственная оценка капитальных вложений.} \end{cases}$$

Тогда

$105 = 95 + 50 \times 0{,}2 = 105,$

$105 = 89 + 80 \times 0{,}2 = 105.$

Во втором и в третьем филиалах выпускать новые изделия целесообразно, так как затраты на его освоение и выпуск не превышают цену изделия. Проверим выполнение первой теоремы двойственности:

$$g(\overline{Y}) = 300\,000 Y_1 + 18\,000\,000 Y_2 =$$
$$= 300\,000 \times 105 + 18\,000\,000 \times (-0{,}2) = 279\,000\,000,$$

$$f(\overline{X}) = 83X_1 + 89X_2 + 95X_3 + 98X_4 = 83 \times 0 +$$
$$+ 89 \times 100\,000 + 95 \times 200\,000 + 98 \times 0 = 279\,000\,000.$$

Полученные оптимальные планы говорят о том, что в первом и четвертом филиалах размещать заказы по выпуску новых изделий невыгодно ($X_1 = 0$ и $X_4 = 0$), так как затраты на производство единицы изделия в этих филиалах больше цены изделия:

$\mathbf{Y_1 = 105;\ Y_2 = -0{,}2;}$

$1 \times Y_1 + 120 \times Y_2 = 83;\quad 105 + 120 \times (-0{,}2) \leqslant 83;$
$105 \leqslant 83 + 24 = 107;$

$1 \times Y_1 + 40 \times Y_2 \leqslant 98;\ 105 + 40 \times (-0{,}2) \leqslant 98;\ 105 \leqslant 98 + 8 = 106.$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.1. Решите следующую задачу ЛП графическим способом:

$$f(\overline{X}) = -2x_1 - x_2 \to \min(\max),$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 1.2. Решите графическим способом задачу ЛП, связанную с распределением ресурсов:

$$F(\overline{X}) = 2x_1 + 4x_2 \to \max \text{ (прибыль)},$$

при ограничениях:

$x_1 + 2x_2 \le 5$ (ресурс 1),

$x_1 + x_2 \le 4$ (ресурс 2),

$x_1 \ge 0,$

$x_2 \ge 0.$

1. Определите статус каждого ресурса (дефицитный, недефицитный).
2. Найдите максимальный интервал изменения запасов ресурса 1, в пределах которого текущее решение остается допустимым.
3. Выполните задание пункта 2 применительно к ресурсу 2.
4. Для пунктов 2 и 3 определите соответствующее изменение оптимальных значений целевой функции.
5. Найдите максимальный интервал изменения удельной прибыли для переменной x_1, в пределах которого полученное решение остается оптимальным.
6. Выполните задание пункта 5 применительно к переменной x_2.

Задача 1.3. Инвестор, располагающий суммой в 300 тыс. руб., может вложить свой капитал в акции автомобильного концерна А и строительного предприятия В. Чтобы уменьшить риск, акций А должно быть приобретено по крайней мере в два раза больше, чем акций В, причем последних можно купить не более чем на 100 тыс. руб. Дивиденды по акциям А составляют 8% в год, по акциям В — 10%. Какую максимальную прибыль можно получить в первый год?

Задача 1.4. Фирма производит два популярных безалкогольных напитка — «Лимонад» и «Тоник». Фирма может продать всю произведенную продукцию, однако объем производства ограничен количеством основного ингредиента и производственной мощностью оборудования. Для производства 1 л «Лимонада» требуется 0,02 час работы оборудования, а для производства 1 л «Тоника» — 0,04 час. Расход специального ингредиента составляет 0,01 и 0,04 кг на 1 л «Лимонада» и «Тоника» соответственно. Ежедневно в распоряжении фирмы имеется 24 час времени работы оборудования и 16 кг специального ингредиента. Доход фирмы составляет 0,10 руб. за 1 л «Лимонада» и 0,30 руб. за 1 л «Тоника». Сколько продукции каждого вида следует производить ежедневно, если цель фирмы состоит в максимизации ежедневного дохода?

1.5. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.5.1. Задачи целочисленного программирования

Под задачей целочисленного программирования (ЦП) понимается задача, в которой все или некоторые переменные должны принимать целые значения. В том случае, когда ограничения и целевая функция задачи представляют собой линейные зависимости, задачу называют *целочисленной задачей линейного* *программирования*. В противном случае, если хотя бы одна зависимость — нелинейная, это будет *целочисленная задача нелинейного программирования*.

Особый интерес к задачам ЦП вызван тем, что во многих практических задачах необходимо находить целочисленное решение ввиду дискретности ряда значений искомых переменных. К их числу относятся:

- задачи оптимизации раскроя;
- оптимальное проектирование машин и оборудования;
- оптимизация системы сервиса и технического обслуживания машинно-тракторного парка и т.д.

Для нахождения оптимального решения целочисленных задач применяют специальные методы, в которых учитывается, что число возможных решений любой целочисленной задачи является конечным.

Задачи оптимизации, в результате решения которых искомые значения переменных должны быть целыми числами, называются задачами (моделями) целочисленного (дискретного) программирования:

$$\max(\min) f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, ..., n,$$

$$x_j \text{ — целые}, \quad j = 1, 2, ..., p \quad (p \le n).$$

Если $p = n$, то задачу называют полностью целочисленной, если $p < n$ — частично целочисленной.

Существуют различные методы решения задач дискретного программирования (дискретной оптимизации). Наиболее часто используемым методом является метод ветвей и границ. Именно этот метод реализован в программе Поиск решения пакета Excel.

Дискретная оптимизация средствами Excel проводится аналогично решению соответствующих непрерывных задач. Основное отличие заключается в том, что в диалоговом окне Поиск решения устанавливается требование целочисленности соответствующих переменных (при этом в режиме Параметры устанавливается тип задачи — линейная или нелинейная).

Исходя из требования целочисленности в случае дискретной оптимизации возможен вызов только одного Отчета по результатам.

Пример 1.4. *Задача производства неделимой продукции (оптимизация производственной программы мебельного предприятия).*

Мебельное предприятие выпускает книжные полки, тумбу под телевизоры и три вида наборов мебели. Характеристики каждого вида продукции приведены в табл. 1.7. При условии получения максимальной прибыли объем товарной продукции должен составить не менее 459,31 тыс. руб. Ситуация со сбытом продукции сложилась следующая. Книжными полками рынок насыщен, поэтому торговые организации уменьшили объем договоров до 10 тыс. шт. Тумбы для телевизоров могут быть реализованы в объемах от 4 до 7 тыс. шт., наборы мебели 2 — от 7 до 10 тыс. шт. Спрос на наборы мебели 1 и 3 неограничен, и требуется не менее 10 тыс. шт. Предприятие имеет технологическое оборудование, количество которого и нормы затрат времени на изготовление единицы продукции каждого вида приведены в табл. 1.8. Предприятие работает в две смены, эффективное время работы каждой машины — 3945 час (коэффициент сменности 1,9). Оптимизировать производственную программу предприятия.

Таблица 1.7

Показатели	Виды продукции				
	Наборы мебели			Книжные полки	Тумба под телевизор
	1	2	3		
Оптовая цена единицы изделия, тыс. руб.	7,2	14,3	32,5	0,182	1,5
Прибыль от реализации, тыс. руб.	2,4	4,5	8,9	0,06	0,45

Таблица 1.8

Наименование оборудования	Число, шт.	Виды продукции				
		Набор мебели			Книжные полки	Тумба под телевизор
		1	2	3		
Линия раскроя древесностружечных плит	2	0,068	0,096	0,207	0,018	0,042
Гильотинные ножницы	1	0,045	0,080	0,158	0,011	0,035
Линия облицовки	2	0,132	0,184	0,428	0,020	0,060
Линия обрезки кромок	2	0,057	0,082	0,230	0,010	0,028
Лаконаливная машина	2	0,063	0,090	0,217	0,010	0,032
Полировальные станки	4	0,170	0,280	0,620	0,020	0,096

Экономико-математическая модель задачи

Требуется найти план выпуска продукции, максимизирующий прибыль предприятия.

Обозначим через X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 количество продукции каждого типа (шт.). Каждая машина работает в две смены, эффективное время работы — 3945 час. Определим фонд времени работы оборудования каждого типа:

линия раскроя древесностружечных плит	$2 \times 3945 = 7890$ час;
гильотинные ножницы	$1 \times 3945 = 3945$ час;
линия облицовки	$2 \times 3945 = 7890$ час;
линия обрезки кромок	$2 \times 3945 = 7890$ час;
лаконаливная машина	$2 \times 3945 = 7890$ час;
полировальные станки	$4 \times 3945 = 157\ 800$ час.

Целевая функция в этом случае имеет вид

$$f(\overline{X}) = 2{,}4X_1 + 4{,}5X_2 + 8{,}9X_3 + 0{,}06X_4 + 0{,}45X_5 \to \max.$$

Ограничение по объему товарной продукции

$7{,}2X_1 + 14{,}3X_2 + 26{,}9X_3 + 0{,}243X_4 + 1{,}5X_5 \geq 459{,}31$ *тыс. руб.*

Ограничения по фонду времени работы оборудования:

$$0{,}068X_1 + 0{,}096X_2 + 0{,}207X_3 + 0{,}018X_4 + 0{,}042X_5 \leq 7890,$$

$$0{,}045X_1 + 0{,}080X_2 + 0{,}158X_3 + 0{,}011X_4 + 0{,}035X_5 \leq 3945,$$

$$0{,}132X_1 + 0{,}184X_2 + 0{,}428X_3 + 0{,}020X_4 + 0{,}060X_5 \leq 7890,$$

$$0{,}057X_1 + 0{,}082X_2 + 0{,}230X_3 + 0{,}010X_4 + 0{,}028X_5 \leq 7890,$$

$$0{,}063X_1 + 0{,}090X_2 + 0{,}217X_3 + 0{,}010X_4 + 0{,}033X_5 \leq 7890,$$

$$0{,}170X_1 + 0{,}280X_2 + 0{,}620X_3 + 0{,}020X_4 + 0{,}096X_5 \leq 157\ 800.$$

Ограничение по сбыту продукции:

$X_1 \geq 10\ 000$,

$7000 \leq X_2 \leq 10\ 000$,

$X_3 \geq 10\ 000$,

$X_4 \leq 10\ 000$,

$4000 \leq X_5 \leq 7000$,

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$,

X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 — целые числа.

Решение задачи целочисленного программирования с помощью средства Excel Поиск решения

На рис. 1.22—1.25 и табл. 1.9 отражена последовательность действий, необходимая для получения решения задачи.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Виды продукции						
2		Набор мебели 1	Набор мебели 2	Набор мебели 3	Книжные полки	Тумба под телевизор		
3	Число, шт.							
4	***Прибыль***	***2.4***	***4.5***	***8.9***	***0.081***	***0.45***	0	
5	Оптовая цена единицы изделия, тыс. руб	7.2	14.3	26.9	0.243	1.5	0	459310
6	Линия раскроя древесно-стружечных плит	0.068	0.096	0.207	0.018	0.042	0	7890
7	Гильотинные ножницы	0.045	0.08	0.158	0.011	0.035	0	3945
8	Линия облицовки	0.132	0.184	0.428	0.02	0.06	0	7890
9	Линия обрезки кромок	0.057	0.082	0.23	0.01	0.028	0	7890
10	Падокалибная машина	0.063	0.08	0.217	0.01	0.032	0	7890
11	Полировальные станки	0.17	0.28	0.62	0.02	0.096	0	15780
12	Набор мебели 1	1					0	10000
13	Набор мебели 2		1				0	7000
14	Набор мебели 2		1				0	10000
15	Набор мебели 3			1			0	10000
16	Книжные полки				1		0	10000
17	Тумба под телевизор					1	0	4000
18	Тумба под телевизор					1	0	7000

Рис. 1.22. Рабочий лист Excel с введенными данными

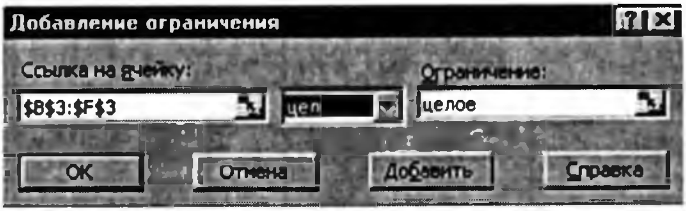


Рис. 1.23. Введение ограничений целочисленности переменных

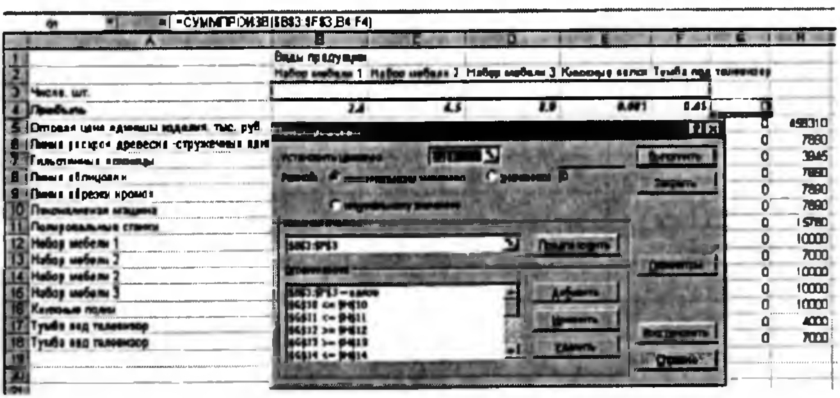


Рис. 1.24. Введены все условия для решения задачи

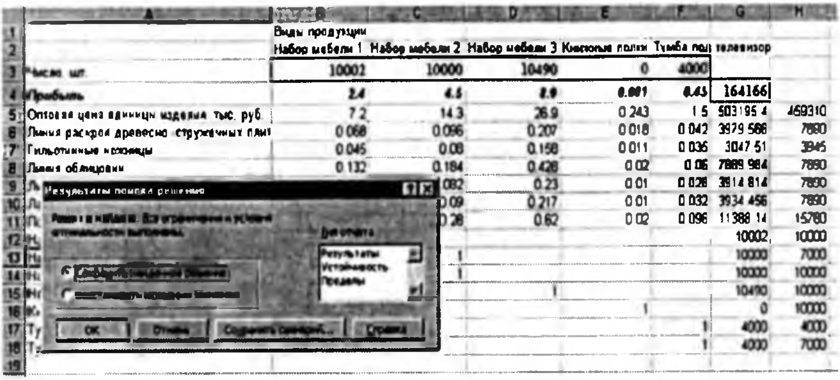


Рис. 1.25. Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены

Таблица 1.9

Результаты применения надстройки Поиск решений

	Виды продукции						
	Набор мебели 1	Набор мебели 2	Набор мебели 3	Книжные полки	Тумба под телевизор		
Количество, шт.	**10 002**	**10 000**	**10 490**	**0**	**4000**		
Прибыль	2,4	4,5	8,9	0,081	0,45	**164 166**	
Ограничения						*Левая часть*	*Правая часть*
Оптовая цена единицы изделия, тыс. руб.	7,2	14,3	26,9	0,243	1,5	503 195,4	459 310
Линия раскроя древесностружечных плит	0,068	0,096	0,207	0,018	0,042	3979,566	7890
Гильотинные ножницы	0,045	0,08	0,158	0,011	0,035	3047,51	3945
Линия облицовки	0,132	0,184	0,428	0,02	0,06	7889,984	7890
Линия обрезки кромок	0,057	0,082	0,23	0,01	0,028	3914,814	7890
Лаконаливная машина	0,063	0,09	0,217	0,01	0,032	3934,456	7890
Полировальные станки	0,17	0,28	0,62	0,02	0,096	11 388,14	15 780
Набор мебели 1	1					10 002	10 000
Набор мебели 2		1				10 000	7000
Набор мебели 2		1				10 000	10 000
Набор мебели 3			1			10 490	10 000
Книжные полки				1		0	10 000
Тумба под телевизор					1	4000	4000
Тумба под телевизор					1	4000	7000

Ответ. Для получения максимальной прибыли необходимо произвести: 10 002 шт. наборов мебели вида 1; 10 000 шт. наборов мебели вида 2; 10 490 шт. наборов мебели вида 3; 4000 шт. тумб под телевизор. Книжные полки в этом месяце производить не нужно.

1.5.2. Транспортная задача и ее реализация в среде Excel

Транспортная задача является одной из наиболее распространенных задач линейного программирования и находит широкое практическое приложение.

Постановка транспортной задачи. Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у m поставщиков A_i в количестве a_i ($i = 1, ..., m$) единиц, необходимо доставить n потребителям B_j в количестве b_j ($j = 1, ..., n$) единиц. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза от поставщика i к потребителю j. Составить план перевозок, позволяющий с минимальными затратами вывести все грузы и полностью удовлетворить потребителей.

Сформулируем экономико-математическую модель транспортной задачи. Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, запланированных к перевозке от поставщика i к потребителю j. Так как от поставщика i к потребителю j запланировано перевезти x_{ij} единиц груза, то стоимость перевозки составит $c_{ij}x_{ij}$.

Транспортная задача относится к двухиндексным задачам линейного программирования, так как в результате решения задачи необходимо найти матрицу X с компонентами x_{ij}.

Стоимость всего плана выразится двойной суммой

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Систему ограничений получаем из следующих условий задачи:

а) все грузы должны быть перевезены, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, ..., m;$$

б) все потребности должны быть удовлетворены, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, ..., n.$$

Таким образом, математическая модель транспортной задачи имеет следующий вид. Найти минимальное значение линейной функции

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{1.6}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1, ..., m; \tag{1.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \ j = 1, ..., n; \tag{1.8}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, ..., m, \ j = 1, ..., n. \tag{1.9}$$

В рассмотренной модели предполагается, что суммарные запасы равны суммарным потребностям, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1.10}$$

Транспортная задача, в которой суммарные запасы и потребности совпадают, т.е. выполняется условие (1.10), называется закрытой моделью; в противном случае — открытой. Для открытой модели может быть два случая:

а) суммарные запасы превышают суммарные потребности

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

б) суммарные потребности превышают суммарные запасы

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Линейная функция одинакова в обоих случаях, изменяется только вид системы ограничений. Найти минимальное значение линейной функции

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях:

в случае «а»

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \ i = 1, ..., m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1, ..., n, \ x_{ij} \geq 0;$$

в случае «б»

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1, ..., m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \ j = 1, ..., n, \ x_{ij} \ge 0.$$

Открытая модель решается приведением к закрытой модели.

В случае «а», когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, вводится фиктивный потребитель B_{n+1}, потребность которого описывается формулой

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

а для случая «б», когда суммарные потребности превышают суммарные запасы, вводится фиктивный поставщик A_{m+1}, запасы которого описываются формулой

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Стоимость перевозки единицы груза до фиктивного потребителя и стоимость перевозки груза от фиктивного поставщика полагаются равными нулю, так как груз в обоих случаях не перевозится.

Транспортная задача имеет $n + m$ уравнений с $m \times n$ неизвестными. Матрицу перевозок $X = (x_{ij})_{mn}$, удовлетворяющую условиям (1.7)—(1.9), называют *планом перевозок* транспортной задачи, а x_{ij} — перевозками.

План X^*, при котором целевая функция (1.6) обращается в минимум, называется оптимальным.

Применение транспортных моделей к решению некоторых экономических задач

Алгоритм и методы решения транспортной задачи могут быть использованы при решении некоторых экономических задач, не имеющих ничего общего с транспортировкой груза. В этом случае величины тарифов C_{ij} имеют различный смысл в зависимости от конкретной экономической задачи. К таким задачам относятся [8]:

- Оптимальное закрепление за станками операций по обработке деталей. В них C_{ij} является таким экономическим показателем, как производительность. Задача позволяет определить, сколько времени и на какой операции нужно использовать каждый из станков, чтобы обработать максимальное количество деталей.

- Оптимальные назначения, или проблема выбора. Имеется m механизмов, которые могут выполнять n различных работ с производительностью C_{ij}. Задача позволяет определить, какой механизм и на какую работу надо назначить, чтобы добиться максимальной производительности.
- Задача о сокращении производства с учетом суммарных расходов на изготовление и транспортировку продукции.
- Задача о закреплении самолетов за воздушными линиями.
- Решение задач с помощью метода запрещения перевозок. Используется в том случае, если груз от некоторого поставщика по каким-то причинам не может быть направлен одному из потребителей. Данное ограничение можно учесть, присвоив соответствующей клетке достаточно большое значение стоимости, тем самым в эту клетку не будут производиться перевозки.

Решение транспортной задачи с помощью средства Excel Поиск решения

Исходные данные транспортной задачи приведены схематически: внутри прямоугольника заданы удельные транспортные затраты на перевозку единицы груза c_{ij}, слева указаны мощности поставщиков a_i, а сверху — мощности потребителей b_j. Найти оптимальный план закрепления поставщиков за потребителями x_{ij}.

Мощности поставщиков	Мощности потребителей			
	250	100	150	50
80	6	6	1	4
320	8	30	6	5
100	5	4	3	30
50	9	9	9	9

В данной задаче суммарные запасы равны суммарным потребностям, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = 550.$$

Транспортная задача, в которой суммарные запасы и потребности совпадают, является *закрытой*[1].

Ввод условий задачи состоит из следующих шагов.

1. **Создание формы для решения задачи.**

Этот шаг предполагает *создание матрицы перевозок*. Для этого необходимо выполнить *резервирование изменяемых ячеек*, поэтому в блок ячеек **B3:E6** вводятся «1» — так резервируется место, где после решения задачи будет находиться распределение поставок, обеспечивающее минимальные затраты на перевозку груза.

2. **Ввод исходных данных.**

В конкретном примере осуществляется ввод мощностей четырех поставщиков (ячейки **A10:A13**), потребности регионов в их продукции (**B9:E9**), а также удельные затраты по доставке нефтепродуктов от конкретного поставщика потребителю (блок **B10:E13**) (рис. 1.26).

3. **Ввод граничных условий.**

3.1. ***Вводим условия реализации мощностей поставщиков***

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} x_j ,$$

где a_i — мощность поставщика i;

x_{ij} — объем поставки груза от поставщика i к потребителю j;

n — количество потребителей.

Для этого необходимо выполнить следующие операции:

- поместить курсор в ячейку **A3**;
- выбрать знак Σ;

	A	B	C	D	E	F
1						
2	**Матрица**	**перевозок (изменяемые ячейки)**				
3		1	1	1	1	
4		1	1	1	1	
5		1	1	1	1	
6		1	1	1	1	
7						
8	**Исходные данные**					
9		250	100	150	50	
10	80	6	6	1	4	
11	320	8	30	6	5	
12	100	5	4	3	30	
13	50	9	9	9	9	
14						
15						

Рис. 1.26. Создание формы для ввода условий задачи. Ввод исходных данных и граничных условий. Изменяемые ячейки – **B3:E6**. В эти ячейки будет записан оптимальный план перевозок – x_{ij}

[1] Для открытой модели изменяется только вид системы ограничений.

- выделить необходимые для суммирования ячейки **B3:E3**;
- нажать ENTER для подтверждения ввода формулы для суммирования.

Аналогичные действия выполнить для ячеек **A4**, **A5**, **A6**, т.е. ввести условия реализации мощностей всех поставщиков (для всех строк). Эти действия можно реализовать иначе:

- поместить курсор в ячейку **A3**;
- выбрать команду Копировать, т.е. скопировать в буфер формулу, введенную для ячейки **A3**;
- выделить ячейки **A4:A6**;
- выбрать команду Вставить, тем самым из буфера будет вставлена формула для суммирования в **A4:A6**.

3.2. *Вводим условия удовлетворения запросов потребителей*, т.е.

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij},$$

где b_i — мощность потребителя j;
m — количество поставщиков.

Для этого необходимо выполнить следующие операции:

- поместить курсор в ячейку **B7**;
- выбрать знак Σ, при этом автоматически выделяется весь столбец **B3:B6**;
- нажать ENTER для подтверждения суммирования показателей выделенного столбца.

Эту же последовательность действий выполнить для ячеек **C7** и **E7** или же проделать следующие действия:

- поместить курсор в ячейку **C7**;
- выбрать команду Копировать;
- выделить ячейки **C7:E7**;
- выбрать команду Вставить.

Таким образом, введены ограничения для всех поставщиков и всех потребителей.

4. Назначение целевой функции.

Для вычисления значения целевой функции, соответствующей минимальным суммарным затратам на доставку груза, необходимо зарезервировать ячейку и ввести формулу для ее вычисления

$$F = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij},$$

где c_{ij} — стоимость доставки единицы груза от поставщика i к потребителю j;
x_{ij} — объем поставки груза от поставщика i к потребителю j.

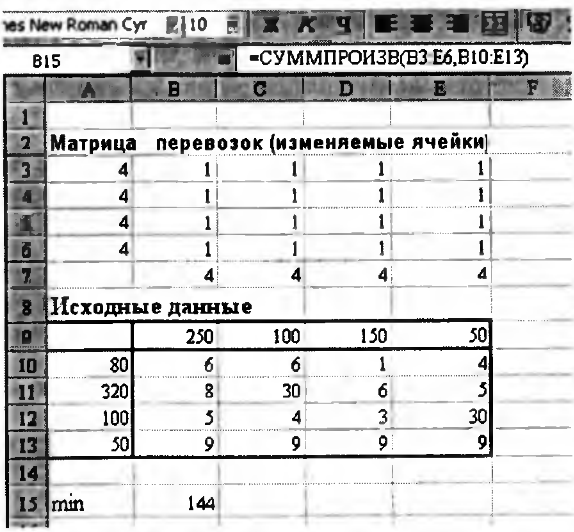
Для этого необходимо произвести следующие действия:

- поместить курсор в ячейку **B15** (после решения задачи в данной ячейке будет находиться значение целевой функции);
- запустить Мастер функций (значок f_x);
- в окне Категория выбрать Математические;
- в окне Функция при помощи спинера выбрать СУММПРОИЗВ;
- нажать кнопку ОК;
- в окне СУММПРОИЗВ указать адреса массивов, элементы которых обрабатываются этой функцией.

В задаче целевая функция представляет собой произведение удельных затрат на доставку груза (расположенных в блоке ячеек **B10+E13**) и объемов поставок для каждого потребителя (содержимое ячеек **B3+E6**). Для этого надо:

- в поле Массив 1 указать адреса **B10:E13**;
- в поле Массив 2 указать адреса **B3:E6**;
- нажать кнопку ОК — подтверждение окончания ввода адресов массивов.

В поле ячейки **B15** появится некоторое числовое значение, равное произведению единичных поставок на удельные коэффициенты затрат по доставке грузов (в данной задаче — это число 144) (рис. 1.27).



B15 =СУММПРОИЗВ(B3:E6,B10:E13)

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Матрица	перевозок (изменяемые ячейки)				
3	4	1	1	1	1	
4	4	1	1	1	1	
5	4	1	1	1	1	
6	4	1	1	1	1	
7		4	4	4	4	
8	Исходные данные					
9		250	100	150	50	
10	80	6	6	1	4	
11	320	8	30	6	5	
12	100	5	4	3	30	
13	50	9	9	9	9	
14						
15	min	144				

Рис. 1.27. Введены зависимости из математической модели. Выражение для вычисления значения целевой функции получено с помощью функции СУММПРОИЗВ (**B3:E6, B10:E13**)

5. **Ввод зависимостей из математической модели.**

Для этого необходимо выполнить следующие действия:

- выбрать Сервис ⇒ Поиск решения;
- поместить курсор в поле Установить целевую (ячейку);
- ввести адрес **$B$15** (тем самым мы резервируем ячейку, куда после решения задачи помещается значение целевой функции) или поместить курсор в **B15**, а затем выбрать Поиск решения. При этом в поле адреса целевой ячейки будет автоматически введен адрес **$B$15**;
- установить направление изменения целевой функции, равное Минимальному значению;
- ввести адреса изменяемых ячеек **B3+E6**. Для этого необходимо:
  - выбрать Изменяя ячейки;
  - ввести адреса **$B$3:$E$6** или щелкнуть на красной стрелке рядом с этим полем, выйти в таблицу с матрицей перевозок, выделить блок ячеек **B3+E6**, щелкнуть на красной стрелке и вернуться в блок Поиск решения. Такая последовательность действий приводит к тому, что будут введены нужные адреса.

6. **Ввод ограничений задачи.**

В матрицу перевозок, содержащую исходные данные по задаче, необходимо ввести условие реализации мощностей всех поставщиков (рис. 1.28). Для этого необходимо:

- выбрать Добавить ограничения;
- в поле Ссылка на ячейку ввести адреса **$A$3:$A$6**;
- в среднем поле установить знак «=». Для этого щелкнуть спинер и выбрать необходимый знак «=»[1];

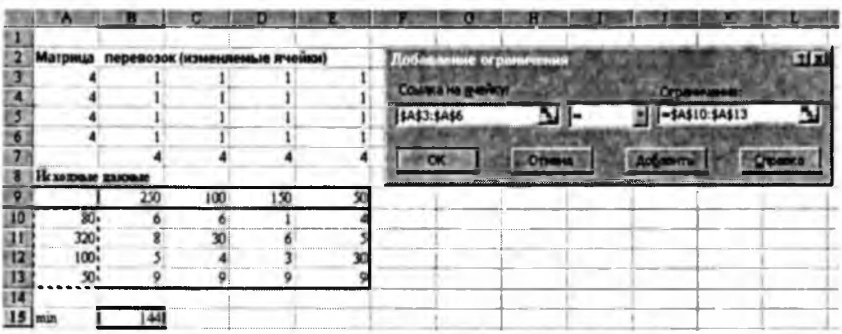


Рис. 1.28. Все грузы должны быть перевезены:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1, \ldots, m,$$ т.е. **A3:A6 = A10:A13**

[1] Для открытой модели знак «=» следует заменить знаком «≤».

- в поле Ограничение установить адреса **$A$10:$A$13**;
- для подтверждения введенного условия нажать кнопку ОК.

Далее вводится ограничение, которое реализует условие удовлетворения мощностей всех потребителей (рис. 1.29). Для этого необходимо:

- выбрать Добавить ограничения;
- в поле Ссылка на ячейку ввести адреса **$B$7:$E$7**;
- в поле знака выбрать при помощи спинера знак «=»;
- в поле Ограничение установить адреса **$B$9:$E$9**;
- нажать кнопку ОК;
- после этого надо вернуться в поле Поиск решения;
- после ввода всех ограничений ввести ОК. На экране появится окно Поиск решения с введенными ограничениями (рис. 1.30).

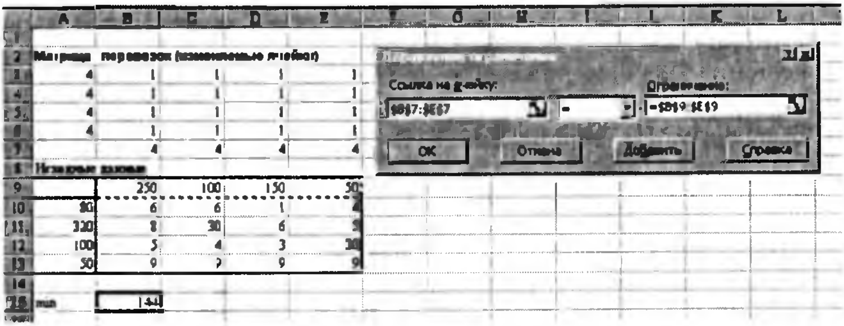


Рис. 1.29. Диалоговое окно «Добавление ограничений».
Все потребности должны быть удовлетворены:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1, \ldots, n, \text{ т.е. } \mathbf{B7{:}E7 = B9{:}E9}$$

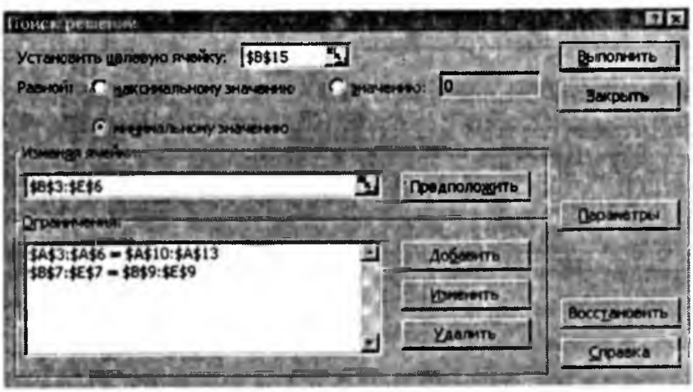


Рис. 1.30. Ввод зависимостей из математической модели

7. Ввод параметров.

С помощью окна Параметры можно вводить условия для решения оптимизационных задач. В нашей задаче следует установить флажок Неотрицательные значения и флажок Линейная модель. Нажать кнопку ОК. Опять появится диалоговое окно Поиск решения. Далее необходимо:

- щелкнуть по кнопке Параметры;
- выбрать переключатель Линейная модель;
- выбрать переключатель Неотрицательные значения (так как объемы поставок груза не могут быть отрицательными);
- нажать кнопку ОК. После этого произойдет переход в поле Поиск решения;
- нажать кнопку Выполнить.

Решение

Решение задачи выполняется сразу же после ввода данных, когда на экране находится диалоговое окно Поиск решения. Нажать кнопку Выполнить. На экране появится диалоговое окно Результаты поиска решения (рис. 1.31).

В результате нами был получен оптимальный план перевозок:

Матрица перевозок (изменяемые ячейки)				
80	**0**	**0**	**80**	**0**
320	**200**	**0**	**70**	**50**
100	**0**	**100**	**0**	**0**
50	**50**	**2.13E-14**	**0**	**0**
550	250	100	150	50

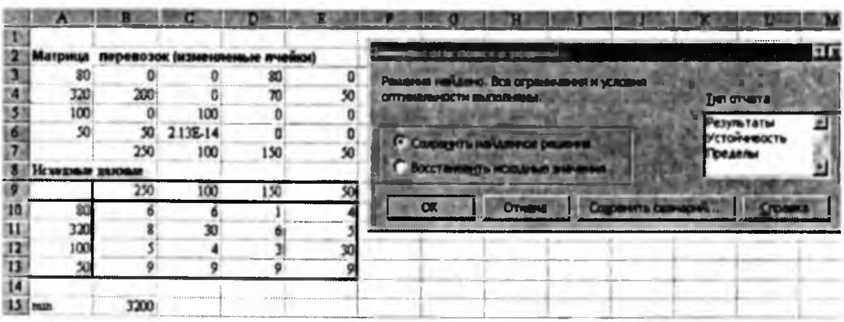


Рис. 1.31. Диалоговое окно Результаты поиска решения

План перевозок означает, что:

X_{13} = 80 ед. груза следует перевезти от поставщика 1 потребителю 3;

X_{21} = 200 ед. груза следует перевезти от поставщика 2 потребителю 1;

X_{23} = 70 ед. груза следует перевезти от поставщика 2 потребителю 3;

X_{24} = 50 ед. груза следует перевезти от поставщика 2 потребителю 4;

X_{32} = 100 ед. груза следует перевезти от поставщика 3 потребителю 2;

X_{41} = 50 ед. груза следует перевезти от поставщика 4 потребителю 1;

X_{42} = 0 (2.13E – 14 = 0) ед. *груза следует перевезти от поставщика 4 потребителю 2.*

Общая стоимость перевозок = 3200.

1.5.3. Задача о назначениях

Задача о назначениях — это распределительная задача, в которой для выполнения каждой работы требуется один и только один ресурс (один человек, одна автомашина и т.д.) и каждый ресурс может быть использован на одной и только одной работе. То есть ресурсы неделимы между работами, а работы неделимы между ресурсами. Таким образом, задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи. Задача о назначениях имеет место при распределении людей на должности или работы, автомашин на маршруты, водителей на машины, групп по аудиториям, научных тем по научно-исследовательским лабораториям и т.п.

Исходные параметры задачи о назначениях (табл. 1.10):

n — количество ресурсов;

m — количество работ;

$a_i = 1$ — единичное количество ресурса A_i, $i = 1, ..., n$ (например: один работник, одно транспортное средство, одна научная тема и т.д.);

$b_j = 1$ — единичное количество работы B_j, $j = 1, ..., m$ (например: одна должность, один маршрут, одна лаборатория);

c_{ij} — характеристика качества выполнения работы B_j с помощью ресурса A_i (например: компетентность работника i при работе на должности j; время, за которое транспортное средство i перевезет груз по маршруту j; степень квалификации лаборатории i при работе над научной темой j).

Искомые параметры:

x_{ij} — факт назначения или неназначения ресурса A_i на работу B_j:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, \text{если ресурс } i \text{ не назначен на работу } j, \\ 1, \text{если ресурс } i \text{ назначен на работу } j; \end{cases}$$

$L(\overline{X})$ — общая (суммарная) характеристика качества распределения ресурсов по работам.

Таблица 1.10

Общий вид транспортной матрицы задачи о назначениях

Ресурсы	Работы				Количество ресурсов
	B_1	B_2	...	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1m}	1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2m}	1
...	...	...	...	...	...
A_n	c_{n1}	c_{n2}	...	c_{nm}	1
Количество работ	1	1	...	1	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Экономико-математическая модель задачи

$$f(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, ..., n, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, ..., m, \\ x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \quad i = 1, ..., n, \ j = 1, ..., m. \end{cases}$$

По сравнению с *транспортной задачей* процесс приведения задачи о назначениях к сбалансированному виду имеет свои особенности (принимают значение «0» или «1»). Для этого необходимо при вводе ограничений указать тип переменных Двоичное (рис. 1.32).

При решении задач о назначении в Excel необходимо учитывать, что переменные x_{ij} являются булевыми.

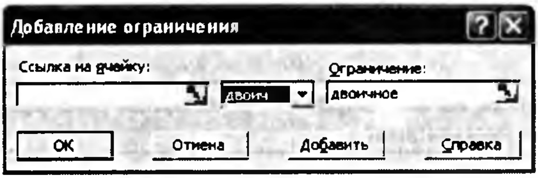


Рис. 1.32. Ввод типа ограничений

1.6. ВОЗМОЖНЫЕ ОШИБКИ ПРИ ВВОДЕ УСЛОВИЙ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Если при решении задачи ЛП выдается сообщение, что решение не может быть найдено, то, возможно, причина заключается в ошибках, возникших при вводе условий задачи в Excel. Поэтому, прежде чем делать вывод об отсутствии оптимального решения задачи, ответьте на вопросы из табл. 1.11.

Таблица 1.11

Список вопросов, позволяющих выявить ошибки ввода условия задачи в Excel

№	Вопрос	Месторасположение в Excel
1	2	3
1	Правильно ли Вы ввели численные значения и знаки (+, –) коэффициентов целевой функции и ограничений, правых частей ограничений?	Экранная форма
2	Сбалансирована ли двухиндексная задача?	Экранная форма
3	Правильны ли формулы в целевой ячейке и в ячейках левых частей ограничений? Для наглядности проверки поставьте курсор на ячейку с формулой и сделайте двойной щелчок левой клавишей мыши. Рамкой в экранной форме будут выделены ячейки, участвующие в данной формуле (см. рис. 1.4, 1.5)	Экранная форма
4	Правильно ли указан адрес целевой ячейки?	Окно Поиск решения
5	Правильно ли указано направление оптимизации ЦФ?	Окно Поиск решения
6	Правильно ли указаны адреса ячеек переменных?	Окно Поиск решения Поле Изменяя ячейки
7	Правильно ли введены знаки ограничений (<=, >=, =)?	Экранная форма Окно Поиск решения Поле Ограничения
8	Правильно ли указаны адреса ячеек левых и правых частей ограничений?	Окно Поиск решения Поле Ограничения

1	2	3
9	Не забыли ли Вы задать требование неотрицательности переменных?	Окно Поиск решения Поле Ограничения
10	Не забыли ли Вы задать требования по единичному значению верхней границы переменных (для задач с булевыми переменными)?	Окно Поиск решения Поле Ограничения
11	Не забыли ли Вы задать условие целочисленности переменных (согласно условию задачи)?	Окно Поиск решения Поле Ограничения
12	Проверьте правильность установки параметров	Окно Параметры поиска решения

Вопросы и задачи для самостоятельного решения

1. Что называется планом задачи линейного программирования?
2. Какими свойствами обладает КЗЛП?
3. Дайте определение линии уровня целевой функции ЗЛП.
4. Перечислите правила формулировки двойственной задачи.
5. К чему приведет включение в план выпуска изделия, для которого $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i > c_j$?
6. Какие задачи называются задачами дискретного программирования?
7. Частным случаем какой задачи является задача о назначениях?

I. Написать двойственную задачу к следующей задаче линейного программирования:

а) $\max f(x_1x_2) = -3x_1 + 2x_2,$

$2x_1 + 3x_2 = 5,$

$3x_1 + 2x_2 \le 7,$

$x_1 \ge 0.$

б) $\min f(x_1x_2) = 2x_1 - 3x_2,$

$2x_1 - x_2 \le -4,$

$x_1 + x_2 \ge 5.$

Совет. Для проверки правильности записи двойственной задачи постройте двойственную задачу к уже полученной двойственной задаче — в результате должна получиться исходная задача.

II. Решить следующие задачи при помощи двойственных к ним задач:

а) $\max f(X) = 3x_1 + 2x_2 - x_3,$
$2x_1 + x_2 + x_3 \le 10,$
$-x_1 + x_2 + 2x_3 \le -5,$
$x_{1,\,2,\,3} \ge 0.$

Ответ:
$x_1 = 5,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,$
$\max f(X) = 15.$

б) $\min f(X) = 2x_1 - x_2 + x_4,$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le 10,$
$-2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \ge 10,$
$x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, 4.$

Ответ:
решений нет.

в) $\min f(X) = 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2,$
$2x_1 + x_2 \ge 6,$
$2x_1 + 4x_2 \ge 12,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Ответ:
$x_1 = 2,\ x_2 = 2,$
$\min f(X) = 1.$

Глава 2. БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ

Эффективное функционирование экономики предполагает наличие баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль при этом выступает, с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой — как потребитель продуктов, вырабатываемых другими отраслями. Для наглядного выражения взаимной связи между отраслями используют таблицы определенного вида, которые называют *таблицами межотраслевого баланса.* Впервые эти таблицы были опубликованы в 1926 г. в России. Математическая *модель межотраслевого баланса* (МОБ), допускающая широкие возможности анализа и прогноза, появилась позже (1936 г.) в трудах американского экономиста Василия Леонтьева (см. Приложение 1).

2.1. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА (МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА)

Рассмотрим наиболее простой вариант модели межотраслевого баланса (ее называют *моделью Леонтьева*, или *моделью «затраты — выпуск»*).

Алгебраическая теория анализа модели «затраты — выпуск» сводится к решению системы линейных уравнений, в которых параметрами являются коэффициенты затрат на производство продукции.

Пусть весь производственный сектор народного хозяйства разбит на n «чистых» отраслей. *«Чистая» отрасль* — это условное понятие — некоторая часть народного хозяйства, более или менее цельная (например, энергетика, машиностроение, сельское хозяйство и т.п.).

Пусть x_{ij} — объем продукции отрасли i, расходуемый в отрасли j; X_i — объем производства отрасли i за данный промежуток времени (так называемый *валовой выпуск* продукции i); Y_i — объем потребления продукции отрасли i в непроизводственной сфере (*объем конечного потребления*); Z_j — условно чистая продукция, которая включает оплату труда, чистый доход и амортизацию.

Единицы измерения всех указанных величин могут быть или натуральными (кубометры, тонны, штуки и т.п.), или стоимостными. В зависимости от этого различают *натуральный* и *стоимостной* межотраслевые балансы. Ниже мы будем рассматривать стоимостной баланс. В табл. 2.1 представлена принципиальная схема межотраслевого баланса в стоимостном выражении.

Таблица 2.1

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	...	n		
1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1n}	Y_1	X_1
2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2n}	Y_2	X_2
...	...	...	...	...	...	...
n	X_{n1}	X_{n2}	...	X_{nn}	Y_n	X_n
Условно чистая продукция	Z_1	Z_2	...	Z_n	$\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$	
Валовой продукт	X_1	X_2	...	X_n		$\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$

Рассматривая схему баланса по столбцам, можно заметить, что итог материальных затрат любой потребляющей отрасли и ее условно чистой продукции равен валовой продукции этой отрасли. Данный вывод можно записать в виде соотношения:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j, \quad j = 1, ..., n. \qquad (2.1)$$

Напомним, что величина условно чистой продукции Z_j равна сумме амортизации, оплаты труда и чистого дохода отрасли j. Соотношение (2.1) охватывает систему из n уравнений, отражающих стоимостный состав продукции всех отраслей материальной сферы.

Рассматривая схему МОБ по строкам для каждой производящей отрасли, замечаем, что валовая продукция той или иной отрасли равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_j = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \quad i = 1, ..., n. \qquad (2.2)$$

Формула (2.2) описывает систему из n уравнений, которые называются уравнениями распределения продукции отраслей материального производства по направлениям использования.

Балансовый характер таблицы выражается в том, что

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} Z_j.$$

Коэффициенты прямых материальных затрат. Основу экономико-математической модели МОБ составляет технологическая матрица коэффициентов прямых затрат $A(a_{ij})$.

Коэффициент прямых материальных затрат a_{ij} показывает, сколько необходимо единиц продукции отрасли i для производства единицы продукции отрасли j, если учитывать только прямые затраты:

$$a_{ij} = x_{ij} / X_j, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Сделаем два важных предположения, необходимых для дальнейшего рассмотрения модели Леонтьева.

1. Сложившуюся технологию производства считаем неизменной. Таким образом, матрица $A = (a_{ij})$ постоянна.

2. Постулируем свойство линейности существующих технологий: для выпуска отраслью j любого объема продукции X_j необходимо затратить продукцию отрасли i в количестве $a_{ij}X_j$, т.е. материальные издержки пропорциональны объему производимой продукции:

$$x_{ij} = a_{ij} X_j. \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в балансовое соотношение (2.2), получаем

$$X_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_i + Y_i, \tag{2.5}$$

или в матричной форме

$$X = AX + Y. \tag{2.6}$$

С помощью этой модели можно выполнять три вида плановых расчетов:

- задавая для каждой отрасли величины валовой продукции (X_i), можно определить объемы конечной продукции каждой отрасли (Y_i):

$$Y = (E - A)X; \tag{2.7}$$

- задавая величины конечной продукции всех отраслей (Y_i), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (X_i):

$$X = (E - A)^{-1} Y; \tag{2.8}$$

- задавая для ряда отраслей величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей — объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых.

В формулах (2.7) и (2.8) символ E обозначает единичную матрицу порядка n, а $(E - A)^{-1}$ — матрицу, *обратную* к матрице $(E - A)$. Если определитель матрицы $(E - A)$ не равен нулю, т.е. эта матрица невырожденная, то существует обратная к ней матрица. Обозначим обратную матрицу через $B = (E - A)^{-1}$, тогда систему уравнений в матричной форме (2.8) можно записать в виде $X = BY$.

Элементы матрицы B называются *коэффициентами полных материальных затрат*. Они показывают, сколько всего нужно произвести продукции отрасли i для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции отрасли j. Плановые расчеты по модели Леонтьева можно выполнять, если соблюдается условие продуктивности.

Неотрицательную матрицу A будем называть **продуктивной**, если существует такой неотрицательный вектор $X \geqslant 0$, что

$$X > AX. \tag{2.9}$$

Очевидно, что условие (2.9) означает существование положительного вектора конечной продукции $Y > 0$ для модели межотраслевого баланса (2.6).

Для того чтобы матрица коэффициентов прямых материальных затрат A была продуктивной, **необходимо и достаточно**, чтобы выполнялось одно из перечисленных ниже условий:

1) матрица $(E - A)$ неотрицательно обратима, т.е. существует обратная матрица $(E - A)^{-1} \geqslant 0$;

2) матричный ряд $E + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A^k$ сходится, причем его сумма равна обратной матрице $(E - A)^{-1}$:

$$B = (E - A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \ldots \tag{2.10}$$

3) наибольшее по модулю *собственное значение* λ матрицы A, т.е. решение характеристического уравнения $|\lambda E - A| = 0$, строго меньше единицы;

4) все главные миноры матрицы $(E - A)$, т.е. определители матриц, образованные элементами первых строк и первых столбцов этой матрицы, порядка от 1 до n, положительны.

Более простым способом проверки продуктивности матрицы A является ограничение на величину ее нормы, в данном случае на величину наибольшей из сумм элементов матрицы A в каждом столбце. Если норма матрицы A строго меньше единицы, то эта матрица продуктивна. Данное условие является достаточным, но не необходимым условием продуктивности, поэтому матрица A может оказаться продуктивной и в случае, когда ее норма больше единицы.

Пример 2.1. Даны коэффициенты прямых затрат a_{ij} и конечный продукт Y_i для трехотраслевой экономической системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Требуется определить:

а) коэффициенты полных затрат;

б) вектор валового выпуска;

в) межотраслевые поставки продукции;

г) проверить продуктивность матрицы A;

д) заполнить схему межотраслевого баланса.

Для решения задачи воспользуемся функциями Excel[1].

В табл. 2.2 приведены результаты решения задачи по первым трем пунктам.

1. Вычислим матрицу коэффициентов полных затрат $B = (E - A)^{-1}$.

Таблица 2.2

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
1							
2		0,3	0,1	0,4			
3	*A*	0,2	0,5	0			
4		0,3	0,1	0,2			
5							
6		0,7	–0,1	–0,4			
7	*E – A*	–0,2	0,5	0			

[1] В работе [2] подробно рассмотрено выполнение матричных операций в Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
8		–0,3	–0,1	0,8			
9	1)						
10		**2,040816**	**0,612245**	**1,020408163**			200
11	*B*	**0,816327**	**2,244898**	**0,408163265**	*Y*		100
12		**0,867347**	**0,510204**	**1,683673469**			300
13							
14	2)						
15		**775,5102**					
16	*X*	**510,2041**					
17		**729,5918**					
18							
19	3)						
20		**232,6531**	**51,02041**	**291,8367347**			
21	*X*	**155,102**	**255,102**	**0**			
22		**232,6531**	**51,02041**	**145,9183673**			

Для вычисления обратной матрицы необходимо:

- выделить диапазон ячеек для размещения обратной матрицы;
- выбрать функцию МОБР в категории Математические;
- ввести диапазон ячеек, где содержится матрица $E - A$;
- нажать клавиши CTRL+SHIFT+ENTER.

В ячейки **B6:D8** запишем элементы матрицы $E - A$. Массив $E - A$ задан как диапазон ячеек. Выделим диапазон **B10:D12** для размещения обратной матрицы $B = (E - A)^{-1}$ и введем формулу для вычислений МОБР (**B6:D8**). Затем следует нажать клавиши CTRL+SHIFT+ENTER.

Все элементы матрицы коэффициентов полных затрат B неотрицательны, следовательно, матрица A продуктивна (это ответ на пункты «а»—«г»).

2. Вычислим вектор валового выпуска X по формуле $X = BY$.

Для умножения матриц необходимо:

- выделить диапазон ячеек для размещения результата умножения матриц;
- выбрать функцию МУМНОЖ в категории Математические;
- ввести диапазоны ячеек, где содержатся матрицы B и Y;
- нажать клавиши CTRL+SHIFT+ETER.

В ячейки **G10:G12** запишем элементы вектора конечного продукта Y. Выделим диапазон **B15:B17** для размещения вектора валового выпуска X, вычисляемого по формуле $X = (E - A)^{-1} Y$. Затем вводим формулу для вычислений МУМНОЖ (**B10:D12, G10:G12**). Далее следует нажать клавиши CTRL+SHIFT+ENTER.

3. Межотраслевые поставки x_{ij} вычисляем по формуле $x_{ij} = a_{ij}X_j$.
4. Заполняем схему МОБ (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3		
1	232,6	51,0	291,8	200	775,3
2	155,1	255,0	0,0	100	510,1
3	232,6	51,1	145,9	300	729,6
Условно чистая продукция	155,0	153,1	291,9	600	
Валовой продукт	775,3	510,1	729,6		**2 015**

2.2. МЕЖОТРАСЛЕВЫЕ БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ В АНАЛИЗЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

К числу важнейших аналитических возможностей данного балансового метода относится определение прямых и полных затрат труда на единицу продукции и разработка на этой основе балансовых продуктово-трудовых моделей. При этом исходной моделью служит отчетный межпродуктовый баланс в натуральном выражении. В отдельной строке баланса дается распределение затрат живого труда в производстве всех видов продукции. Предполагается, что трудовые затраты выражены в единицах труда одинаковой степени сложности.

Пусть L_j — затраты живого труда в производстве продукта j, а X_j — объем производства этого продукта (валовой выпуск). Тогда прямые затраты труда на единицу продукции вида j (*коэффициент прямой трудоемкости*) можно задать следующей формулой:

$$t_j = \frac{L_j}{X_j}; \quad j = 1, ..., n. \tag{2.11}$$

Введем понятие *полных затрат труда* как суммы прямых затрат живого труда и затрат овеществленного труда, перенесенных на продукт через израсходованные средства производства. Если обозначить величину полных затрат труда на единицу продукции вида j через T_j, то произведения вида $a_{ij}T_i$ отражают затраты овеществленного труда, перенесенного на единицу продукта j через средство производства i. Будем предполагать, что коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} выражены в натуральных единицах. Тогда полные трудовые затраты на единицу продукции вида j (*коэффициент полной трудоемкости*) будут равны

$$T_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} T_i + t_j; \quad j = 1, ..., n. \tag{2.12}$$

Введем вектор-строку коэффициентов прямой трудоемкости $\bar{t} = (t_1, t_2, ..., t_n)$ и вектор-строку коэффициентов полной трудоемкости $\overline{T} = (T_1, T_2, ..., T_n)$. Тогда с помощью матрицы коэффициентов прямых материальных затрат $\boldsymbol{A}$ (в натуральном выражении) систему (2.12) можно переписать в матричном виде

$$\overline{T} = \overline{T} A + \bar{t}. \tag{2.13}$$

Произведя очевидные матричные преобразования с использованием единичной матрицы $\boldsymbol{E}$:

$$\overline{T} - \overline{T} A = \overline{T} E - \overline{T} A = \overline{T}(E - A) = \bar{t},$$

получим следующее соотношение для вектора коэффициентов полной трудоемкости:

$$\overline{T} = \bar{t}(E - A)^{-1}. \tag{2.14}$$

Матрица $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}$ нам уже знакома, это матрица коэффициентов полных материальных затрат — $\boldsymbol{B}$, поэтому равенство (2.14) можно переписать в виде

$$\overline{T} = \bar{t} B. \tag{2.15}$$

Обозначим через $\boldsymbol{L}$ величину совокупных затрат живого труда по всем видам продукции, которая с учетом формулы (2.11) будет равна

$$L = \sum_{j=1}^{n} L_j = \sum_{j=1}^{n} t_j X_j = \bar{t}\,\overline{X}. \tag{2.16}$$

Используя соотношения (2.9), (2.15) и (2.16) приходим к следующему равенству:

$$\bar{t}\,\overline{X} = \overline{T}\,\overline{Y}. \tag{2.17}$$

Здесь $\bar{t}$ и $\bar{T}$ — векторы-строки коэффициентов прямой и полной трудоемкости а $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ — векторы-столбцы валовой и конечной продукции соответственно.

Соотношение (2.17) представляет собой основное балансовое равенство в теории межотраслевого баланса труда. В данном случае его конкретное экономическое содержание заключается в том, что стоимость конечной продукции, оцененной по полным затратам труда, равна совокупным затратам живого труда. Сопоставляя потребительский эффект различных взаимозаменяемых продуктов с полными трудовыми затратами на их выпуск, можно судить о сравнительной эффективности их производства. Показатели полной трудоемкости выявляют структуру затрат на выпуск различных видов продукции, и прежде всего соотношение между затратами живого и овеществленного труда.

На основе коэффициентов прямой и полной трудоемкости могут быть разработаны межотраслевые и межпродуктовые балансы затрат труда и использования трудовых ресурсов. Схематически эти балансы строятся по общему типу матричных моделей, однако все показатели в них (межотраслевые связи, конечный продукт, условно чистая продукция и др.) выражены в трудовых измерителях.

Пример 2.2. Пусть в дополнение к исходным данным примера 2.1 заданы в некоторых единицах измерения затраты живого труда (трудовые ресурсы) в трех отраслях: $L_1 = 1160$, $L_2 = 460$, $L_3 = 875$. Требуется определить коэффициенты прямой и полной трудоемкости и составить межотраслевой баланс затрат труда.

Решение

1. Воспользовавшись формулой (2.11) и результатами примера 2.1, находим коэффициенты прямой трудоемкости:

$$t_1 = 1160/775{,}3 = 1{,}5; \qquad t_2 = 460/510{,}1 = 0{,}9;$$

$$t_3 = 875/729{,}6 = 1{,}2.$$

2. По формуле (2.15), где $\boldsymbol{B}$ — это матрица коэффициента полных материальных затрат, найденная в примере 2.1, находим коэффициенты полной трудоемкости:

$$\bar{T} = (1{,}5;\ 0{,}9;\ 1{,}2) \times \begin{pmatrix} 2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020 \\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408 \\ 0{,}867 & 0{,}510 & 1{,}684 \end{pmatrix} = (4{,}84;\ 3{,}55;\ 3{,}92).$$

3. Умножая строки 1—3 первого и второго квадрантов межотраслевого материального баланса, построенного в примере 2.1, на соответствующие коэффициенты прямой трудоемкости, получаем схему межотраслевого баланса труда (в трудовых измерителях) (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Межотраслевой баланс затрат труда

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				
	Межотраслевые затраты овеществленного труда			Затраты труда на конечную продукцию	Затраты труда в отраслях (трудовые ресурсы)
	1	2	3		
1	348,9	76,5	437,7	300,0	1163,0
2	139,6	229,5	0,0	90,0	459,1
3	279,1	61,2	175,1	360,0	875,5

2.3. МОДЕЛЬ МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛИ (ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ОБМЕНА)

В модели международной торговли процесс взаимных закупок товаров анализируется с использованием понятий собственного числа и собственного вектора матрицы A. Будем полагать, что бюджеты n стран, которые мы обозначим соответственно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, расходуются на покупку товаров. Обозначим:

x_i — национальный доход страны i;

a_{ij} — доля национального дохода страны j, которую она расходует на закупку товаров страны i;

p_i — общая выручка страны от внутренней и внешней торговли.

Предположим, что государство расходует весь свой национальный доход на закупку товаров внутри страны и на импорт из других стран. Это означает, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Матрица A, элементами которой являются коэффициенты a_{ij}, называется *структурной матрицей торговли*. Сумма элементов каждого столбца этой матрицы равна единице.

Предположим, что в течение некоторого фиксированного промежутка времени не меняется структура международной торговли (т.е. структурная матрица торговли остается постоянной), тогда как национальные доходы торгующих стран могут измениться. Требуется определить, какими могут быть национальные доходы, чтобы международная торговля осталась сбалансированной, т.е. чтобы сумма платежей всех государств была равна суммарной выручке от внешней и внутренней торговли.

Для любой страны выручка от внутренней и внешней торговли составит

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n.$$

В сбалансированной системе международной торговли не должно быть дефицита, т.е. у каждой страны выручка от торговли должна быть не меньше ее национального дохода: $p_i \geqslant x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Последнее неравенство справедливо только в случае, когда $p_i = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, т.е. у всех торгующих стран выручка от внешней и внутренней торговли должна совпадать с национальным доходом [4]. В матричной записи это означает, что имеет место равенство $A\overline{X} = \overline{X}$, где A — структурная матрица международной торговли, а X — вектор национальных доходов.

Вектор X является *собственным вектором* структурной матрицы торговли A, а соответствующее собственное значение равно единице. Отсюда следует, что баланс в международной торговле будет достигнут, если собственное значение структурной матрицы международной торговли равно единице, а вектор национальных доходов торгующих стран является собственным вектором, отвечающим этому единичному собственному значению.

Пример 2.3. Найти национальные доходы X_1, X_2, X_3 торгующих стран в сбалансированной системе международной торговли. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Решение

Найдем собственный вектор $\overline{X}$, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$, решив уравнение $(A - \lambda E) = 0$. Система уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & -3/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

С помощью метода Жордана—Гаусса найдем общее решение этой системы

$$\begin{cases} x_1 = 2{,}25, \\ x_2 = 2{,}5, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Из приведенных вычислений видно, что сбалансированность торговли трех стран достигается при векторе национальных доходов $X = (2{,}25c;\ 2{,}5c;\ c)$, т.е. при соотношении национальных доходов стран 2,25 : 2,5 : 1, или 9 : 10 : 4.

2.4. МОДЕЛЬ НЕЙМАНА

Модель Неймана является обобщенной моделью Леонтьева, поскольку допускает производство одного продукта разными способами (в модели Леонтьева каждая отрасль производит один продукт и никакая другая отрасль не может производить этот продукт) [9].

В модели представлено n продуктов и m способов их производства, каждый способ j задается вектором-столбцом затрат a_j и вектором-столбцом выпусков b_j в расчете на единицу интенсивности процесса

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \quad b_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix}.$$

Из векторов затрат и выпуска образуются матрицы затрат и выпуска

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_m), \quad B = (b_1, b_2, \dots, b_m).$$

Коэффициенты затрат a_{ij} и выпуска b_{ij} неотрицательны. Предположим, что для реализации любого процесса необходимы затраты хотя бы одного продукта, т.е. для каждого j найдется хотя бы одно i, такое что

$$a_{ij} > 0, \qquad (2.18)$$

и каждый продукт может быть произведен хотя бы одним способом, т.е. для каждого i существует некоторое j, такое что

$$b_{ij} > 0. \tag{2.19}$$

Из (2.18) и (2.19) следует, что каждый столбец матрицы $\boldsymbol{A}$ и каждая строка матрицы $\boldsymbol{B}$ должны иметь по крайней мере один положительный элемент.

Обозначим через x_t неотрицательный вектор-столбец интенсивности производственных процессов

$$x_t = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_m(t) \end{pmatrix},$$

а через p_t — вектор-строку неотрицательных цен

$$p_t = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_m(t)).$$

Вектор $y_t = \boldsymbol{A}x_t$ — это вектор затрат при заданном векторе интенсивности процессов x_t, а вектор $z_t = \boldsymbol{B}x_t$ — вектор выпусков.

Модель Неймана описывает замкнутую экономику в том смысле, что для производства продукции в следующем производственном цикле (в год t) расходуется продукция, произведенная в предыдущем производственном цикле, т.е. в год $(t - 1)$:

$$\boldsymbol{A}x_t \leqslant \boldsymbol{B}x_{t-1}, \quad x_t > 0, \quad t = 1, 2, \dots T. \tag{2.20}$$

При этом предполагается, что задан первоначальный вектор запасов $\boldsymbol{B}x_0 \geqslant 0$, $\boldsymbol{B}x_0 \neq 0$. Система (2.12) — это модель Неймана в натуральной форме.

Вопросы и задачи для самостоятельного решения

1. Поясните принципиальную схему межотраслевого баланса.
2. Как распределяется валовая продукция отраслей материальной сферы производства?
3. Каково различие между промежуточной и конечной продукцией в модели МОБ?
4. Что показывают коэффициенты прямых затрат?
5. Дайте определение коэффициентов полных материальных затрат.
6. При каких условиях модель Леонтьева продуктивна?

7. Раскройте экономическое содержание и укажите способ вычисления показателей прямой и полной трудоемкости продукции.

Задача 2.1. В табл. 2.5 приведены данные об исполнении баланса за отчетный период (у. д. е.).

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт первой отрасли увеличится вдвое, второй отрасли — на 20%, а третьей отрасли сохранится на прежнем уровне.

Таблица 2.5

Производство	Отрасль				
	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	10	5	15	70	100
2	15	15	10	60	100
3	5	10	20	65	100

Задача 2.2. В табл. 2.6 даны коэффициенты прямых затрат a_{ij} и конечный продукт Y_i. Требуется определить:

1) межотраслевые поставки продукции;
2) проверить продуктивность матрицы A;
3) заполнить схему межотраслевого баланса.

Таблица 2.6

Отрасли	Коэффициенты прямых затрат a_{ij}			Конечный продукт Y_i
	1	2	3	
1	0,1	0,2	0,1	200
2	0,2	0,1	0,0	150
3	0,1	0,2	0,3	250

Задача 2.3. На основании данных, приведенных в табл. 2.7, требуется рассчитать коэффициенты прямых и полных затрат и условно чистую продукцию для промышленности, сельского хозяйства и непроизводственной сферы.

Таблица 2.7

№	Отрасли	Промежуточная продукция			Конечная продукция
		Промышленность	Сельское хозяйство	Непроизводственная сфера	
1	Промышленность	50	60	80	60
2	Сельское хозяйство	25	90	40	25
3	Непроизводственная сфера	25	60	40	35

Глава 3. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ АНАЛИЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В современной экономике и в бизнесе без прогноза не обойтись. Любое серьезное решение, в особенности связанное с вложением денег, требует прогноза, предвидения развития экономической ситуации. В настоящее время разработано много методов прогнозирования, которые с той или иной степенью надежности предсказывают будущие события.

Имеется два подхода к прогнозированию. Первый — использование методов качественного прогнозирования. Эти методы применимы в тех ситуациях, когда данные за прошедшие периоды времени недоступны и/или ненадежны, например при прогнозировании объема продаж совершенно нового товара, не существовавшего ранее на рынке. Второй подход — использование количественных методов. В этом случае данные за прошедшие периоды времени доступны для исследователя.

Информационной базой для анализа экономических процессов являются динамические и временные ряды. Совокупность наблюдений некоторого явления (показателя), упорядоченная в зависимости от последовательности значений другого явления (признака), называют *динамическим рядом*. Динамические ряды, у которых в качестве признака упорядочения используется время, называют *временными*.

Если в течение длительного времени регулярно фиксировать курсы валют, акций, цены на товары, и т.д., то такие данные образуют временные ряды. Сюда относятся данные о выпуске или потреблении различных товаров и услуг по месяцам, кварталам, годам. В производстве временные ряды возникают при:

- измерении количества изделий, выпускаемых подразделениями предприятия за некоторую единицу времени (час, смену, декаду);
- оценках количества брака за тот же период времени;
- наблюдении за изменениями запасов на складах.

В экономике и бизнесе временные ряды — это очень распространенный тип данных. Во временном ряде содержится информация об особенностях и закономерностях протекания процесса, а статистический анализ позволяет выявить закономерности и использовать их для оценки характеристик процесса в будущем, т.е. для прогнозирования.

Временной ряд — это набор чисел, привязанный к последовательным, обычно равноотстоящим моментам времени. Числа, составляющие временной ряд и получающиеся в результате наблюдения за ходом некоторого процесса, называются *уровнями* временного ряда, или *элементами*. Интервал между двумя последовательными моментами времени называют *тактом* (шагом, квантом). Под длиной временного ряда понимают количество входящих в него уровней n. Временной ряд обычно обозначают $Y(t)$, или y_t, где $t = 1, 2, ..., n$.

Формально задача прогнозирования сводится к получению оценок значений ряда для некоторого периода будущего, т.е. к получению значения $Y_{\text{прогноз}}(t)$, где $t = n + 1, n + 2, ...$ При использовании методов экстраполяции исходят из предположения о сохранении закономерностей прошлого развития на период прогнозирования. Во многих случаях (но не всегда!) при разработке оперативного (до года) и краткосрочного (до 2 лет) прогноза эти предположения являются справедливыми.

Статистические методы исследования исходят из предположения возможности представлять уровни временного ряда в виде суммы нескольких компонент, отражающих закономерность и случайность развития, в частности, в виде суммы четырех компонент:

$$Y(t) = f(t) + S(t) + U(t) + E(t), \tag{3.1}$$

где $f(t)$ — тренд (долговременная тенденция) развития;

$S(t)$ — сезонная компонента;

$U(t)$ — циклическая компонента;

$E(t)$ — остаточная компонента.

В модели временного ряда принято выделять две основные составляющие: детерминированную (систематическую) и случайную (рис. 3.1). Под детерминированной составляющей временного ряда $y_1, y_2, ..., y_n$ понимают числовую последовательность, элементы которой вычисляются по определенному правилу как функция времени t. Исключив детерминированную составляющую из данных, мы получим колеблющийся вокруг нуля ряд, который может в одном предельном случае представлять случайные скачки, а в другом — плавное колебательное движение.

Детерминированная составляющая может содержать следующие структурные компоненты.

1. *Тренд*, или *тенденция* $f(t)$, представляет собой устойчивую закономерность, наблюдаемую в течение длительного периода времени. В качестве примера таких факторов в экономике можно назвать:
   а) изменение демографических характеристик популяции (численности, возрастной структуры);
   б) технологическое и экономическое развитие;
   в) рост потребления.

   Обычно тренд (тенденция) описывается с помощью той или иной неслучайной функции $F_{тр}(t)$ (аргументом которой является время), как правило, монотонной. Эту функцию называют функцией тренда, или просто — трендом.
2. *Сезонная компонента* $S(t)$ связана с наличием факторов, действующих с заранее известной периодичностью. Это регулярные колебания, которые носят периодический или близкий к нему характер и заканчиваются в течение года. Типичные примеры сезонного эффекта: изменение загруженности автотрассы в течение суток, по дням недели, временам года, пик продаж товаров для школьников в конце августа — начале сентября. Сезонная компонента со временем может меняться либо иметь плавающий характер.
3. *Циклическая компонента* $U(t)$ — неслучайная функция, описывающая длительные периоды (более одного года) относительного подъема и спада и состоящая из циклов переменной длительности и амплитуды. Примером циклической (конъюнктурной) компоненты являются волны Кондратьева, демографические «ямы» и т.п. Подобная компонента весьма характерна для рядов макроэкономических показателей. Здесь циклические изменения обусловлены взаимодействием спроса и предложения, а также наложением таких факторов, как истощение ресурсов, погодные условия, изменения в налоговой политике и т.п. Отметим, что циклическую компоненту крайне трудно идентифицировать формальными методами, исходя только из данных изучаемого ряда.

Случайная составляющая ряда отражает воздействие многочисленных факторов случайного характера и может иметь разнообразную структуру, начиная от простейшей в виде «белого шума» до весьма сложных, описываемых моделями авторегрессии и скользящего среднего (рис. 3.1).

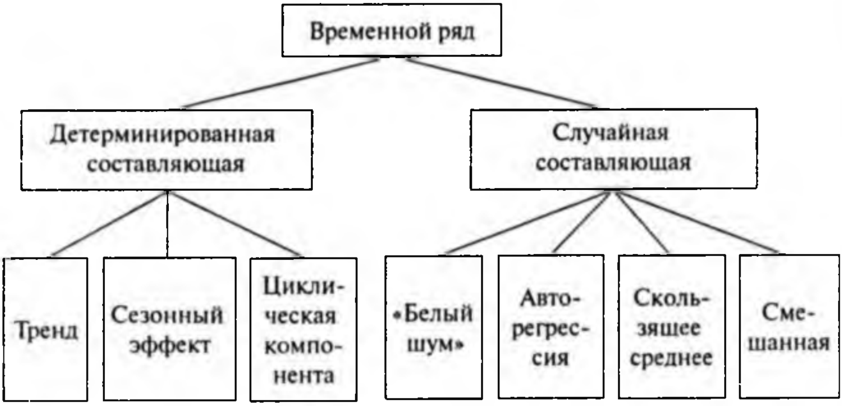


Рис. 3.1. Структурные компоненты временного ряда

Основная цель статистического анализа временных рядов — изучение соотношения между закономерностью и случайностью в формировании значений уровней ряда, оценка количественной меры их влияния. Закономерности, объясняющие динамику показателя в прошлом, используются для прогнозирования его значений в будущем, а учет случайности позволяет определить вероятность отклонения от закономерного развития и его возможную величину.

3.1.1. Требования к исходной информации

Анализ временных рядов, отражающих развитие экономических процессов, начинается с оценки данных. Уровни исследуемого показателя обязательно должны быть сопоставимыми, однородными и устойчивыми, а их число должно быть достаточно велико.

Сопоставимость достигается в результате одинакового подхода к наблюдениям на разных этапах формирования динамического ряда. Уровни во временных рядах должны иметь одинаковые:

- единицы измерения;
- шаг наблюдений;
- интервал времени;
- методику расчета;
- элементы, относящиеся к неизменной совокупности.

Однородность данных означает отсутствие сильных изломов тенденций, а также *аномальных* (т.е. резко выделяющихся, нетипичных для данного ряда) наблюдений. Аномальные наблюдения проявляются в виде сильного изменения уровня — скачка или спада — с последующим приблизительным восстановлением предыдущего уровня. Наличие аномалии резко искажает результаты моделирования. Поэтому аномальные наблюдения необходимо исключить из временного ряда, заменив их расчетными значениями.

Устойчивость характеризуется преобладанием закономерности над случайностью в изменении уровней ряда. На графиках устойчивых временных рядов закономерность прослеживается визуально, на графиках неустойчивых рядов изменения последовательных уровней представляются хаотичными, и поэтому поиск закономерностей в формировании значений уровней таких рядов лишен смысла.

Требование полноты данных обусловливается тем, что закономерность может обнаружиться лишь при наличии минимально допустимого объема наблюдений.

3.1.2. Этапы построения прогноза по временным рядам

Экстраполяционное прогнозирование экономических процессов, представленных одномерными временными рядами, сводится к выполнению следующих основных этапов:

1) предварительный анализ данных;
2) построение моделей: формирование набора аппроксимирующих функций (кривых роста) и численное оценивание параметров моделей;
3) проверка адекватности моделей и оценка их точности;
4) выбор лучшей модели;
5) расчет точечного и интервального прогнозов

1. Предварительный анализ данных.

На этом этапе производится:

- выявление аномальных наблюдений;
- проверка наличия тренда;
- сглаживание временных рядов;
- расчет показателей развития динамики экономических процессов.

Так как наличие *аномальных* наблюдений приводит к искажению результатов моделирования, то необходимо убедиться в отсутствии аномалий данных. В качестве примера аномалии может служить скачок курса доллара, зафиксированный в «черный вторник».

Для диагностики аномальных наблюдений разработаны различные критерии, например метод Ирвина [1]. Для всех или только для подозреваемых в аномальности наблюдений вычисляется величина λ_t:

$$\lambda_t = |y_t - y_{t-1}|/S_y,$$

где $$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}{n-1}}, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t.$$

Если рассчитанная величина λ_t превышает табличный уровень (например, для 10 наблюдений значение критерия Ирвина равно 1,5), то уровень y_t считается аномальным. Аномальные наблюдения необходимо исключить из временного ряда и заменить их расчетными значениями (самый простой способ замены — в качестве нового значения принять среднее из двух соседних значений).

Следующая процедура этапа предварительного анализа данных — *выявление наличия тенденций* в развитии исследуемого показателя. Отметим, что тенденция прослеживается не только в увеличении или уменьшении среднего текущего значения временного ряда, но она присуща и другим его характеристикам: дисперсии, автокорреляции, корреляции с другими показателями и т.д. Тенденцию среднего визуально можно определить из графика исходных данных, а более точно — с помощью метода Фостера—Стьюарта, метода проверки существенности разности средних и т.п., подробное описание которых дано в работе [1].

Наличие тенденции среднего уровня на графике становится более заметным, когда на нем отражены сглаженные значения исходных данных.

Процедура сглаживания необходима при построении некоторых математических моделей и для устранения аномальных наблюдений. Чаще всего для сглаживания применяются методы простой скользящей средней, взвешенной скользящей средней и экспоненциального сглаживания.

Традиционными показателями, характеризующими развитие экономических процессов, были и остаются *показатели роста и прироста*. Для характеристики динамики изменения экономических показателей все чаще используется понятие автокорреляции, которая характеризует не только взаимозависимость уровней одного и того же ряда, относящихся к разным моментам наблюдений, но и степень устойчивости развития процесса во времени, величину оптимального периода прогнозирования и т.п.

2. Построение моделей.

Для решения задач анализа и моделирования тенденций изменения исследуемого показателя используются *модели кривых роста*. Плавную кривую (гладкую функцию), аппроксимирующую временной ряд, принято называть кривой роста. Подбор такой кривой является аналитическим (не механическим) выравниванием. Чаще всего используются полиномиальные, экспоненциальные и S-образные кривые роста. Примеры кривых роста:

- полином первой степени (прямая) $Y(t) = a_0 + a_1 t$,
- полином второй степени (парабола) $Y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$.

Математические методы позволяют представить прогнозирующую модель в виде полинома любого порядка. Однако без необходимости использование полиномов высокого порядка представляется излишним.

Параметры «кривых роста» оцениваются методом наименьших квадратов (МНК), т.е. подбираются таким образом, чтобы график функции «кривой роста» располагался на минимальном удалении от точек исходных данных.

Предпочтение, как правило, отдается простым моделям, допускающим содержательную интерпретацию. К числу таких моделей относится линейная модель роста

$$y_t = a_0 + a_1 t, \tag{3.2}$$

где a_0 и a_1 — параметры модели, а $t = 1, 2, ..., n$.

Математически критерий оценки параметров модели записывается в виде

$$S_\Sigma(a_0, a_1) = \sum_{t=1}^{n} [y_t - (a_0 + a_1 t)]^2 \to \min. \tag{3.3}$$

Для нахождения минимума функции двух переменных $S_\Sigma(a_0, a_1)$ следует взять частные производные по a_0 и a_1, а затем приравнять их нулю. В результате получим так называемую систему нормальных уравнений

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum\limits_{t=1}^{n} t = \sum\limits_{t=1}^{n} y_t, \\ a_0 \sum\limits_{t=1}^{n} t + a_1 \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 = \sum\limits_{t=1}^{n} y_t t. \end{cases} \tag{3.4}$$

Решая систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными, получим

$$\begin{cases} a_1 = \left(\sum_{t=1}^{n} (t-\bar{t})(y_t - \bar{Y}) \right) / \sum_{t=1}^{n} (t-\bar{t})^2, \\ a_0 = \bar{Y} - a_1 - a_1 \bar{t}, \end{cases} \tag{3.5}$$

где $\bar{t}$ и $\bar{Y}$ — средние значения моментов наблюдения и уровней ряда соответственно.

3. Оценка качества построенных моделей.

Важным этапом прогнозирования социально-экономических процессов является проверка *адекватности* модели реальному явлению. Для этого исследуют ряд остатков $\varepsilon_t = y_1 - \bar{Y}_t$, т.е. отклонения расчетных значений от фактических.

Для оценки адекватности построенных моделей исследуются свойства остаточной компоненты, т.е. расхождения уровней, рассчитанных по модели, и фактических наблюдений. Наиболее важными свойствами остаточной компоненты являются независимость уровней ряда остатков, их *случайность* и *соответствие нормальному закону распределения*.

Проверка равенства математического ожидания уровней ряда остатков нулю осуществляется в ходе проверки соответствующей нулевой гипотезы $H_0 : |\bar{\varepsilon}| = 0$. С этой целью строится t-статистика:

$$t_{расч} = \frac{|\bar{\varepsilon}|}{S_\varepsilon} \sqrt{n},$$

где $\bar{\varepsilon}$ — среднее арифметическое значение уровней ряда остатков ε_t;

$S_\varepsilon = \sqrt{\dfrac{\sum_{t=1}^{n} (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2}{n-1}}$ — среднеквадратическое отклонение для этой последовательности, рассчитанное по формуле для малой выборки.

На уровне значимости гипотеза отклоняется, если $t_{расч} > t_{\alpha.\nu}$, где $t_{\alpha.\nu}$ — критерий распределения Стьюдента с доверительной вероятностью $(1 - \alpha)$ и степенями свободы $\nu = n - 1$.

Проверка условия случайности возникновения отдельных отклонений от тренда. Здесь часто используется критерий, основанный на поворотных точках. Значение случайной переменной считается поворотной точкой, если оно одновременно больше (меньше) соседних с ним элементов. Если остатки случайны, то поворотная точка приходится примерно на каждые 1,5 наблюдения. Если их больше, то возмущения быстро колеблются, и это не может быть объяснено только случайностью. Если же их меньше, то последовательные значения случайного компонента положительно коррелированны.

Критерий случайности отклонений от тренда при уровне вероятности 0,95 можно представить как

$$p > \left[\frac{2}{3}(n-2) - 1{,}96\sqrt{\frac{16n-29}{90}}\right], \tag{3.6}$$

где p — фактическое количество поворотных точек в случайном ряду;

1,96 — квантиль нормального распределения для 5%-ного уровня значимости.

Квадратные скобки означают, что от результата вычисления следует взять целую часть (не путать с процедурой округления!).

Если неравенство не соблюдается, то ряд остатков нельзя считать случайным (т.е. он содержит регулярную компоненту), стало быть, модель не является адекватной.

Наличие (отсутствие) автокорреляции в отклонениях от модели роста проверяют с помощью критерия Дарбина—Уотсона. С этой целью строится статистика Дарбина—Уотсона (d-статистика), в основе которой лежит формула

$$d = \left(\sum_{t=2}^{n}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2\right) / \sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2 . \tag{3.7}$$

При отсутствии автокорреляции $d \approx 2$, а при полной автокорреляции равно 0 или 4. Следовательно, оценки, получаемые по критерию, являются не точечными, а интервальными. Верхние (d_2) и нижние (d_1) критические значения, позволяющие принять или отвергнуть гипотезу об отсутствии автокорреляции, зависят от количества уровней динамического ряда и числа независимых переменных модели. Значения этих границ для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ даны в специальных таблицах (см. Приложение 2 табл. П-3). При сравнении расчетного значения d-статистики (3.7) с табличным могут возникнуть такие ситуации: $d_2 < d < 2$ — ряд остатков не коррелирован; $d < d_1$ — остатки содержат автокорреляцию; $d_1 < d < d_2$ — область неопределенности, когда нет оснований ни принять, ни отвергнуть гипотезу о существовании автокорреляции. Если d превышает 2, то это свидетельствует о наличии отрицательной корреляции. Перед сравнением с табличными значениями d критерий следует преобразовать по формуле $d' = 4 - d$.

Установив наличие автокорреляции остатков, переходят к улучшению модели. Если же ситуация оказалась неопределенной, применяют другие критерии. В частности, можно воспользоваться первым коэффициентом автокорреляции

$$r(1) = \left(\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} \right) / \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2 . \qquad (3.8)$$

Для принятия решения о наличии или отсутствии автокорреляции в исследуемом ряду фактическое значение коэффициента автокорреляции $r(1)$ сопоставляется с табличным (критическим) для 5%-ного уровня значимости (вероятности допустить ошибку при принятии нулевой гипотезы о независимости уровней ряда). Если фактическое значение коэффициента автокорреляции меньше табличного, то гипотеза об отсутствии автокорреляции в ряду может быть принята, а если фактическое значение больше табличного — делают вывод о наличии автокорреляции в ряду динамики.

Соответствие ряда остатков нормальному закону распределения можно проверить с помощью RS-критерия:

$$RS = (\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}) / S_\varepsilon, \qquad (3.9)$$

где ε_{max} и ε_{min} — соответственно максимальный и минимальный уровни ряда остатков;

S_ε — среднеквадратическое отклонение ряда остатков $S_\varepsilon = \sqrt{\dfrac{\sum_{n-1}^{n} \varepsilon_t^2}{n-1}}$.

Если расчетное значение RS попадает между табулированными границами с заданным уровнем вероятности, то гипотеза о нормальном распределении ряда остатков принимается. В этом случае допустимо строить доверительный интервал прогноза.

Если все пункты проверки дают положительный результат, то выбранная трендовая модель является адекватной реальному ряду экономической динамики, и, следовательно, ее можно использовать для построения прогнозных оценок. В противном случае — модель надо улучшать.

4. Построение точечных и интервальных прогнозов.

Идея социально-экономического прогнозирования базируется на предположении, что закономерность развития, действовавшая в прошлом (внутри ряда экономической динамики), сохранится и в прогнозируемом будущем. В этом смысле прогноз основан на *экстраполяции*. Экстраполяция, проводимая в будущее, называется *перспективной*, а в прошлое — *ретроспективной*.

Прогнозирование методом экстраполяции базируется на следующих предположениях:

а) развитие исследуемого явления в целом описывается плавной кривой;

б) общая тенденция развития явления в прошлом и настоящем не указывает на серьезные изменения в будущем;

в) учет случайности позволяет оценить вероятность отклонения от закономерного развития.

Поэтому надежность и точность прогноза зависят от того, насколько близкими к действительности окажутся эти предположения и насколько точно удалось охарактеризовать выявленную в прошлом закономерность.

На основе построенной модели рассчитываются точечные и интервальные прогнозы. Точечный прогноз на основе временных моделей получается подстановкой в модель (уравнение тренда) соответствующего значения фактора времени, т.е. $t = n + 1, n + 2, \ldots, n + k$.

Точное совпадение фактических данных и прогностических точечных оценок, полученных путем экстраполяции кривых, характеризующих тенденцию, имеет малую вероятность. Возникновение соответствующих отклонений объясняется следующими причинами.

1. Выбранная для прогнозирования кривая не является единственно возможной для описания тенденции. Можно подобрать такую кривую, которая дает более точные результаты.
2. Прогноз осуществляется на основании ограниченного числа исходных данных. Кроме того, каждый исходный уровень обладает еще и случайной компонентой. Поэтому и кривая, по которой осуществляется экстраполяция, также будет содержать случайную компоненту.
3. Тенденция характеризует движение среднего уровня ряда динамики, поэтому отдельные наблюдения могут от него отклоняться. Если такие отклонения наблюдались в прошлом, то они будут наблюдаться и в будущем.

Интервальные прогнозы строятся на основе точечных прогнозов. *Доверительным интервалом* называется такой интервал, относительно которого можно с заранее выбранной вероятностью утверждать, что он содержит значение прогнозируемого показателя. Ширина интервала зависит от качества модели, т.е. степени ее близости к фактическим данным, числа наблюдений, горизонта прогнозирования и выбранного пользователем уровня вероятности.

При построении доверительного интервала прогноза рассчитывается величина $U(k)$, которая для линейной модели имеет вид

$$U(k) = S_{\hat{Y}} t_\alpha \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(n + k - \bar{t})^2}{\sum\limits_{t=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2}}, \qquad (3.10)$$

где

$$S_{\hat{Y}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2}{n - m - 1}}; \qquad (3.11)$$

$S_{\hat{Y}}$ — стандартная ошибка (среднеквадратическое отклонение от модели);

m — количество факторов в модели, для линейной модели $m = 1$.

Коэффициент t_α[1] является табличным значением t-статистики Стьюдента при заданном уровне значимости и числе наблюдений. Если исследователь задает уровень вероятности попадания прогнозируемой величины внутрь доверительного интервала, равной 70%, то при $n = 9$ $t_\alpha = 1{,}12$. При вероятности, равной 95%, $t_\alpha = 2{,}36$.

Для других моделей величина $U(k)$ рассчитывается аналогичным образом, но имеет более громоздкий вид. Как видно из формулы (3.10), величина U зависит прямо пропорционально от точности модели, коэффициента доверительной вероятности t_α степени углубления в будущее на k шагов вперед, т.е. на момент $t = n + k$, и обратно пропорциональна объему наблюдений. Доверительный интервал прогноза будет иметь следующие границы:

- верхняя граница прогноза $= Y_{прогноз}(n + k) + U(k)$;
- нижняя граница прогноза $= Y_{прогноз}(n + k) - U(k)$.

---

[1] Значение t_α можно получить с помощью функции Excel СТЬЮДРАСПОБР.

Если построенная модель адекватна, то с выбранной пользователем вероятностью можно утверждать, что при сохранении сложившихся закономерностей развития прогнозируемая величина попадает в интервал, образованный верхней и нижней границей.

После получения прогнозных оценок необходимо убедиться в их разумности и непротиворечивости оценкам, полученным иным способом.

3.2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НАДСТРОЙКИ EXCEL АНАЛИЗ ДАННЫХ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

При решении задач рекомендуется использовать стандартную офисную программу Excel. Пакет анализа в Excel — это надстройка, которая предоставляет широкие возможности для проведения статистического анализа.

Установка Пакета анализа

Ни в одном меню стандартной конфигурации программы Excel вы не найдете указания на Пакет анализа. Даже после установки с компакт-диска Excel он не появится в меню Сервис до тех пор, пока вы не выполните следующие действия:

1) выберите команду Сервис ⇒ Надстройки;
2) в диалоговом окне Надстройки (рис. 3.2) установите флажок Пакет анализа, а затем нажмите кнопку ОК;
3) выберите команду Сервис ⇒ Анализ данных. Если в меню отсутствует команда Анализ данных, то необходимо выполнить уста-

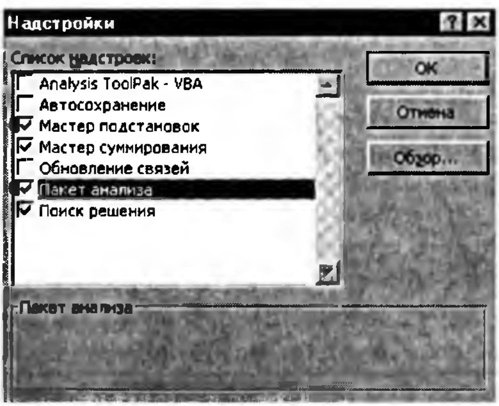


Рис. 3.2. Установка Пакета анализа

новку Пакета анализа с компакт-диска Excel. После этого в нижней части меню Сервис появится новая команда Анализ данных, которая предоставляет доступ к средствам анализа. Для активизации надстройки Пакет анализа следует установить соответствующий флажок.

Пример 3.1. *Проверка наличия тренда.*

Один из способов проверки обнаружения тренда основан на сравнении средних уровней ряда: временной ряд разбивают на две примерно равные по числу уровней части, каждая из которых рассматривается как некоторая самостоятельная выборочная совокупность, имеющая нормальное распределение. Если временной ряд имеет тенденцию к тренду, то средние, вычисленные для каждой совокупности, должны существенно (значимо) различаться между собой. Если же расхождение незначительно, несущественно (случайно), то временной ряд не имеет тенденции. Таким образом, проверка наличия тренда в исследуемом ряду сводится к проверке гипотезы о равенстве средних двух нормально распределенных совокупностей.

Определим наличие основной тенденции (тренда) по данным табл. 3.1 (рис. 3.3).

Таблица 3.1

Урожайность ячменя в одной из областей Среднего Поволжья, ц/га

Годы	1	2	3	4	5	6	7	8
Урожайность	14,1	9,3	19,4	19,7	5,4	24,2	13,8	24,5
Годы	9	10	11	12	13	14	15	
Урожайность	14,7	16,6	5,6	16,2	25,3	11,9	18,5	

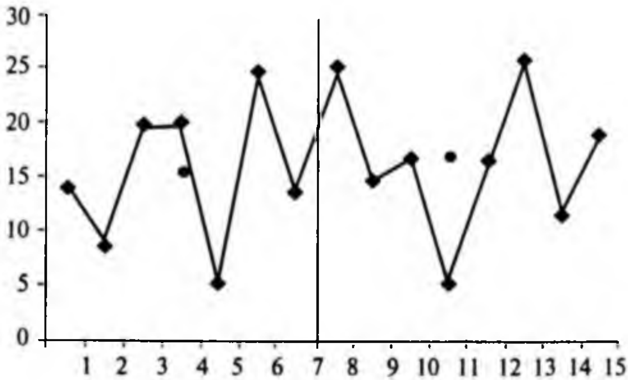


Рис. 3.3. График урожайности ячменя

Решение

1. Делим исходный временной ряд на две примерно равные по числу уровней части: $n_1 = 7$, $n_2 = 8$ ($n_1 + n_2 = n = 15$).
2. Для каждой из этих частей вычисляем средние значения:

   $Y_1 = 15{,}13$; $Y_2 = 16{,}66$

   и дисперсии:

   $S^2_{y1} = 42{,}15$; $S^2_{y2} = 41{,}22$.
3. Проверяем гипотезу о равенстве (однородности) дисперсий обеих частей ряда с помощью F-критерия Фишера. Для вычисления F-критерия большую дисперсию делят на меньшую:

   $F_{расч} = S^2_{y2} / S^2_{y1} = 42{,}15 / 41{,}22 = 1{,}022$,

   $F_{кр} = (0{,}05;\ 6{,}7) = 3{,}86$.

   Так как $F_{расч} < F_{кр}$ (0,05; 7,6), то нет оснований отвергать нулевую гипотезу. По данным наблюдения дисперсии генеральных совокупностей равны $S_1^2 = S_2^2$, исправленные выборочные дисперсии (S^2_{y2} и S^2_{y1}) различаются незначимо (расхождение между ними — величина случайная).
4. Тогда можно проверить основную гипотезу о равенстве средних значений с использованием t-критерия Стьюдента:

$$t = \frac{\overline{Y_1} - \overline{Y_2}}{\sqrt{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}, \qquad (3.12)$$

подставляя числовые значения, получим:

$$t = \frac{15{,}13 - 16{,}66}{\sqrt{6 \times 42{,}146 + 7 \times 41{,}22}} \sqrt{\frac{7 \times 8 \times 13}{15}} = -0{,}46,$$

$t_{кр\ (0{,}05;\ 13)} = 2{,}16$[1].

Так как $|t_{расч}| < t_{кр}$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу о равенстве средних, расхождение между вычисленными средними незначимо. Отсюда вывод: тренд урожайности ячменя отсутствует.

Решение задачи с помощью Пакета анализа Excel

1. Гипотезу о равенстве дисперсий проверим с помощью F-теста, который можно найти среди инструментов Анализа данных (рис. 3.4).

[1] $t_{кр}$ можно получить с помощью функции Excel СТЬЮДРАСПОБР.

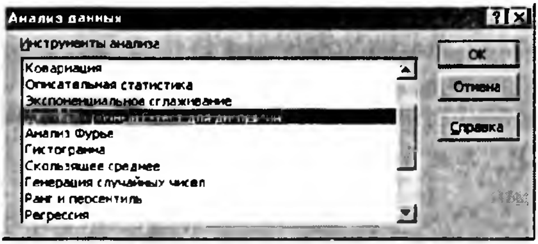


Рис. 3.4. Вызов надстройки Excel Анализ данных

2. Вводим данные для выполнения *F*-теста, указывая интервал для первой и второй переменных (рис. 3.5). Результат выполнения теста приведен в табл. 3.2. Анализируя результаты выполнения двухвыборочного *F*-теста для проверки гипотезы о равенстве дисперсий, приходим к выводу, что исправленные выборочные дисперсии (S_{y2}^2 и S_{y1}^2) различаются незначимо.

Таблица 3.2

Результат выполнения двухвыборочного *F*-теста для дисперсии

	Переменная 1	Переменная 2
Среднее	15,129	16,663
Дисперсия	42,146	41,220
Наблюдения	7	8
df — число степеней свободы	6	7
F	1,022	
P(*F* <= *f*) одностороннее	0,481	
F критическое одностороннее	3,866	

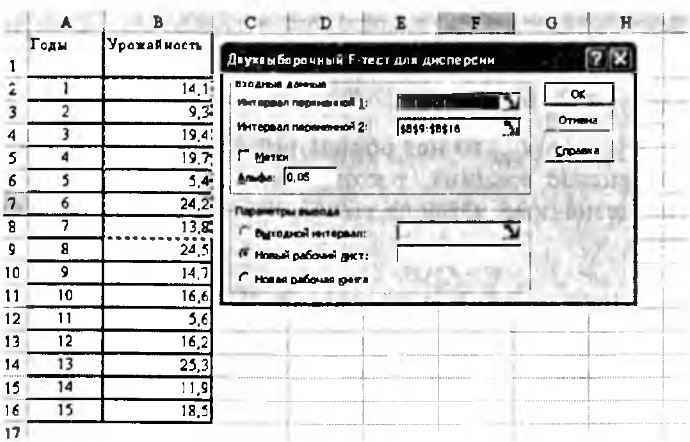


Рис. 3.5. Ввод данных для двухвыборочного *F*-теста

3. Выбираем инструмент анализа Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями (рис. 3.6). Вводим данные. Результат выполнения t-теста приведен в табл. 3.3, анализируя который убеждаемся, что тренда нет.

Таблица 3.3

Результат выполнения *t*-теста

Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями	Переменная 1	Переменная 2
Среднее	15,129	16,663
Дисперсия	42,146	41,220
Наблюдения	7	8
Объединенная дисперсия	41,647	
Гипотетическая разность средних	0,000	
df — число степеней свободы	13	
t-статистика	−0,459	
$P(T \leqslant t)$ одностороннее	0,327	
t критическое одностороннее	1,771	
$P(T \leqslant t)$ двустороннее	0,654	
t критическое двустороннее	2,160	

Пример 3.2. На основании данных, приведенных в табл. 3.4 требуется:

1) построить линейную модель $Y(t) = a_0 + a_1 t$, параметры которой оценить МНК;
2) оценить адекватность построенной модели на основе исследования:
   - случайности остаточной компоненты по критерию пиков;

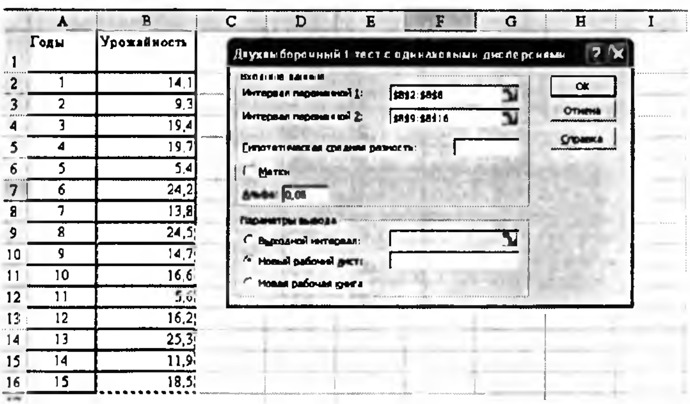


Рис. 3.6. Ввод данных для двухвыборочного t-теста с одинаковыми дисперсиями

- независимости уровней ряда остатков по d-критерию (в качестве критических значений следует использовать уровни $d_1 = 1{,}08$ и $d_2 = 1{,}36$) и по первому коэффициенту автокорреляции, критический уровень которого $r(1) = 0{,}36$;
- нормальности распределения остаточной компоненты по RS-критерию с критическими уровнями 2,7—3,7;

3) для оценки точности модели используйте среднеквадратическое отклонение и среднюю по модулю относительную ошибку;
4) построить точечный и интервальный прогнозы на два шага вперед (для вероятности $P = 70\%$ используйте коэффициент равный 1,12);
5) отобразить на графике фактические данные, результаты расчетов и прогнозирования.

Таблица 3.4

Исходные данные

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	41	46	49	48	65	55	61	59	65

Решение

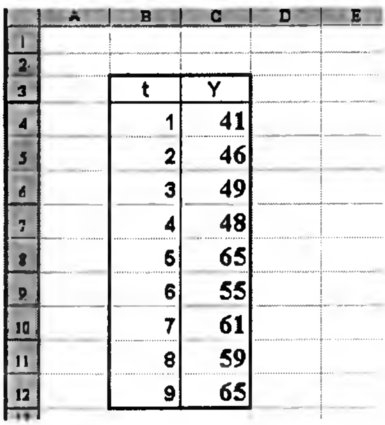
1. **Ввод исходных данных.**

Сделаем это способом, который был описан раньше. Результат показан на рис. 3.7.

2. **Оценка параметров модели.**

2.1. ***Оценка параметров модели с помощью надстройки EXCEL* Анализ данных.**

Построим линейную однопараметрическую модель регрессии Y от t. Для проведения регрессионного анализа выполните следующие действия:



	A	B	C	D	E
1					
2					
3		t	Y		
4		1	41		
5		2	46		
6		3	49		
7		4	48		
8		6	65		
9		6	55		
10		7	61		
11		8	59		
12		9	65		

Рис. 3.7. Исходные данные введены в Excel

- выберите команду Сервис ⇒ Анализ данных;
- в диалоговом окне Анализ данных выберите инструмент Регрессия (рис. 3.8), а затем щелкните на кнопке OK;
- в диалоговом окне Регрессия в поле Входной интервал *Y* введите адрес одного диапазона ячеек, который представляет зависимую переменную. В поле Входной интервал *X* введите адрес диапазона, который содержит значения независимой переменной *t* (рис. 3.9);
- если выделены и заголовки столбцов, то установите флажок Метки в первой строке;
- выберите параметры вывода. В данном примере — Новая рабочая книга;
- в поле График подбора поставьте флажок;

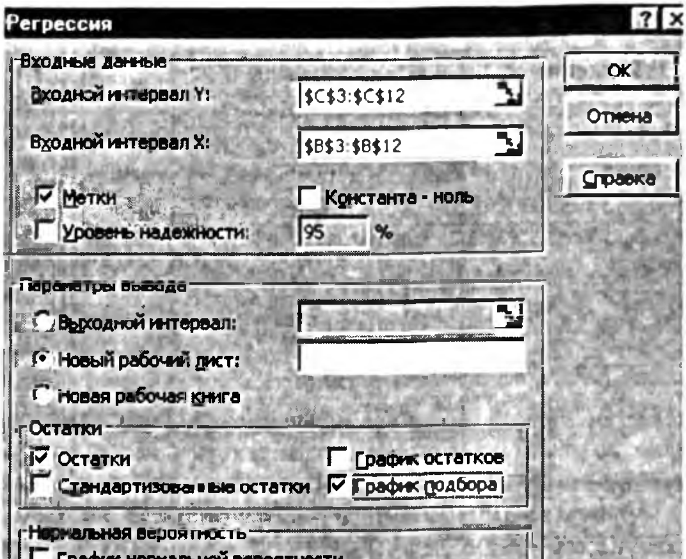


Рис. 3.8. Выбран инструмент анализа Регрессия

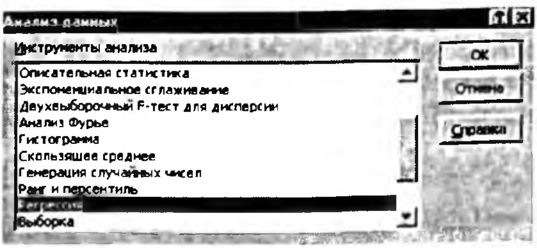


Рис. 3.9. Ввод исходных данных для Регрессии

- в поле Остатки поставьте необходимые флажки и нажмите кнопку ОК.

Результат регрессионного анализа содержится в табл. 3.5 и 3.6 (более подробные пояснения можно найти в [2]).

Таблица 3.5

Переменная		Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика
Y-пересечение	a_0	40,5	3,37	12,01
t	a_1	2,77	0,60	4,62

Таблица 3.6

Вывод остатка

Наблюдение	Предсказанное Y	Остатки
1	43,27	–2,27
2	46,03	–0,03
3	48,80	0,20
4	51,57	–3,57
5	54,33	10,67
6	57,10	–2,10
7	59,87	1,13
8	62,63	–3,63
9	65,40	–0,40
Сумма		0,00

Во втором столбце табл. 3.5 содержатся коэффициенты уравнения регрессии a_0, a_1, в третьем столбце — стандартные ошибки коэффициентов уравнения регрессии, а в четвертом — t-статистика, используемая для проверки значимости коэффициентов уравнения регрессии.

Уравнение регрессии зависимости y_t (прибыль коммерческого банка) от t_t (время) имеет вид

$$Y(t) = 40{,}5 + 2{,}77t.$$

При вычислении «вручную» по формуле (3.4) получаем те же результаты.

2.2. ***Оценка параметров модели по формуле* (3.5) *«вручную».*** Промежуточные расчеты параметров линейной модели по формулам (3.5) приведены в табл. 3.7.

Таблица 3.7

	t	y	$t - t_{ср}$	$(t - t_{ср})^2$	$y - y_{ср}$	$(t - t_{ср})(y - y_{ср})$
	1	41	−4	16	−13,33	53,33
	2	46	−3	9	−8,33	25,00
	3	49	−2	4	−5,33	10,67
	4	48	−1	1	−6,33	6,33
	5	65	0	0	10,67	0,00
	6	55	1	1	0,67	0,67
	7	61	2	4	6,67	13,33
	8	59	3	9	4,67	14,00
	9	65	4	16	10,67	42,67
Сумма	45	489	0	**60**	0,00	**166,00**
Среднее	5	**54,33**				

$$a_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(t - t_{ср})(y - y_{ср})}{\sum(t - t_{ср})} = \frac{166}{60} = 2,766667 = 2,77,$$

$$a_0 = y_{ср} - a_1 t_{ср} = 54,33 - 2,77 \times 5 = 40,496667 \approx 40,5.$$

3. Оценка качества построенной модели.

Для этого исследуем адекватность модели. Модель является адекватной, если математическое ожидание значений остаточного ряда близко или равно нулю и если значения остаточного ряда случайны, независимы и подчинены нормальному закону распределения.

- При ***проверке независимости*** (отсутствие автокорреляции) определяется отсутствие в ряду остатков систематической составляющей, например, с помощью d-критерия Дарбина—Уотсона по формуле (3.7):

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}[\varepsilon_{(t)} - \varepsilon_{(t-1)}]^2}{\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{(t)}^2} = 2,84,$$

$$d' = 4 - 2,84 = 1,16.$$

Так как d' попало в интервал от d_1 до d_2 (рис. 3.10), то по данному критерию нельзя сделать вывод о выполнении свойства независимости.

Необходимо вычислить коэффициент автокорреляции первого порядка по формуле (3.8):

$$r(1) = \frac{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2} = -0{,}44,$$

т.е. фактическое значение больше табличного. Это означает, что в ряду динамики имеется автокорреляция, следовательно, модель по этому критерию неадекватна.

- ***Проверку случайности уровней ряда остатков*** проведем на основе критерия поворотных точек (формула (3.6)). Количество поворотных точек равно 6 (рис. 3.11). Неравенство выполняется (6 > 2). Следовательно, свойство случайности выполняется. Модель по этому критерию адекватна.
- ***Соответствие ряда остатков нормальному закону распределения*** определим при помощи RS-критерия:

$RS = [\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}]/S_\varepsilon,$

где ε_{max} — максимальный уровень ряда остатков, $\varepsilon_{max} = 10{,}67$;
ε_{min} — минимальный уровень ряда остатков, $\varepsilon_{min} = -3{,}63$;
S_ε — среднеквадратическое отклонение,

$$S_\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_{(t)}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{150{,}73}{8}} = 4{,}34;$$

$RS = [10{,}67 - (-3{,}63)]/4{,}34 = 3{,}28.$

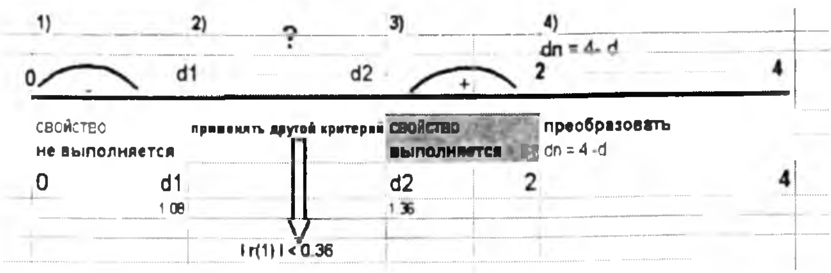


Рис. 3.10. Анализ независимости с помощью критерия Дарбина–Уотсона

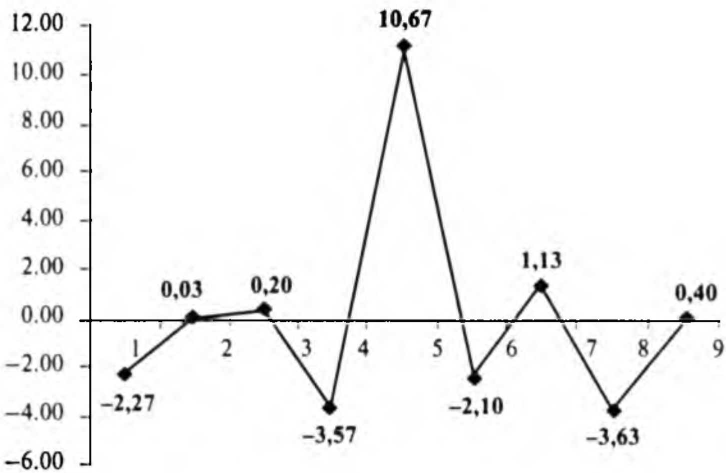


Рис. 3.11. График остатков

Расчетное значение попадает в интервал (2,7—3,7), следовательно, выполняется свойство нормальности распределения. Модель по этому критерию адекватна.

- ***Проверка равенства нулю математического ожидания уровней ряда остатков.***

В нашем случае $\bar{e} = 0$, поэтому гипотеза о равенстве математического ожидания значений остаточного ряда нулю выполняется.

В табл. 3.8 собраны данные анализа ряда остатков.

Таблица 3.8

Анализ ряда остатков

Проверяемое свойство	Используемые статистики		Граница		Вывод
	наименование	значение	нижняя	верхняя	
Независимость	d-критерий Дарбина–Уотсона	$d = 2{,}84$ $d_n = 4 - 2{,}84 =$ $= 1{,}16$	0,98	1,36	нельзя сделать вывод по этому критерию
	$r(1)$ — коэффициент автокорреляции	$-0{,}44$		0,36	*abs* $\lvert r(1)\rvert > 0{,}36$ **неадекватна** *abs* $\lvert r(1)\rvert > 0{,}36$ **Нет**
Случайность	Критерий пиков (поворотных точек)	$6 > 2$	2		**адекватна**
Нормальность	RS-критерий	3,28	2,6	2,7	**адекватна**
Среднее = 0 ?	t-статистика Стьюдента	0,000	−2,179	2,179	**адекватна**
Вывод: модель статистически неадекватна					

4. Построить точечный и интервальный прогнозы на два шага вперед (для вероятности 70% использовать $t = 1{,}12$):

$$Y_{10} = a_0 + a_1 t = 40{,}5 + 2{,}77 \times 10 \approx 68{,}17,$$

$$Y_{11} = a_0 + a_1 t = 40{,}5 + 2{,}77 \times 11 \approx 70{,}93.$$

Для построения интервального прогноза рассчитаем доверительный интервал. Примем значение уровня значимости $\alpha = 0{,}3$, следовательно, доверительная вероятность равна 70%, а критерий Стьюдента при $\nu = n - 2 = 7$ равен 1,12. Ширину доверительного интервала вычислим по формуле (3.10):

$$U(k) = \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(n + 1 - t_{\text{ср}})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i - t_{\text{ср}})^2}},$$

где $S_{\hat{Y}} = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2}{n - m - 1}} = 4{,}64, \quad t_{\alpha,\nu} = 1{,}12, \quad \bar{t} = 5, \quad \sum\limits_{i=1}^{N}(t_i - \bar{t})^2 = 60$

(находим из табл. 3.7),

$$U(1) = 4{,}64 \times 1{,}12\sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{(9 + 1 - 5)^2}{60}} = 6{,}42,$$

$$U(2) = 4{,}64 \times 1{,}12\sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{(9 + 2 - 5)^2}{60}} = 6{,}79.$$

Далее вычисляем верхнюю и нижнюю границы прогноза (см. табл. 3.9).

Таблица 3.9

$n + k$	$U(k)$	Прогноз	Формула	Верхняя граница	Нижняя граница
10	$U(1) = 6{,}42$	68,17	Прогноз + $U(1)$	74,59	61,75
11	$U(2) = 6{,}79$	70,93	Прогноз – $U(2)$	77,73	64,14

5. Отобразить на графике фактические данные, результаты расчетов и прогнозирования.

Для этого следует преобразовать график подбора, который был получен с помощью инструмента Регрессия (рис. 3.12).

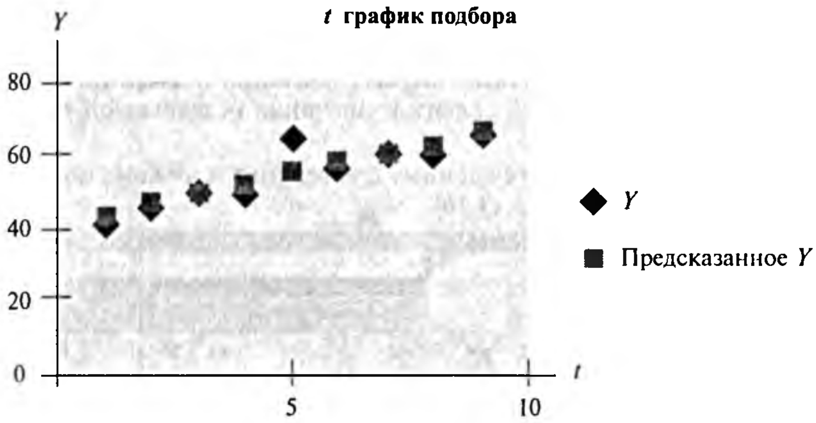


Рис. 3.12. График подбора

- Выберем тип диаграммы — *точечная, на которой значения соединены отрезками.*
- В формате области построения укажем тип заливки — *обычная*; рамка — *невидимая*. Результат действий виден на рис. 3.13.
- Далее на графике изобразить результаты прогнозирования. Для этого следует «кликнуть» правой кнопкой мышки и в появившемся меню выбрать Исходные данные. Затем последовательно нажать кнопки Ряд, Добавить и указать диапазоны размещения данных (рис. 3.14).

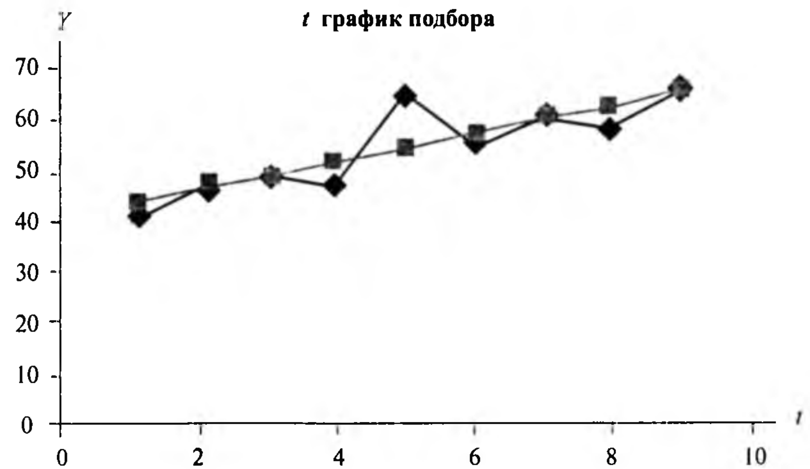


Рис. 3.13. Преобразованный график подбора

- В диалоговом окне Исходные данные в поле значения *Y* введите адрес диапазона ячеек, который представляет прогноз зависимой переменной. В поле значения *X* введите адрес диапазона, который содержит значения независимой переменной *t*.
- Аналогично вводятся данные для верхних и нижних границ прогноза (рис. 3.15, 3.16).

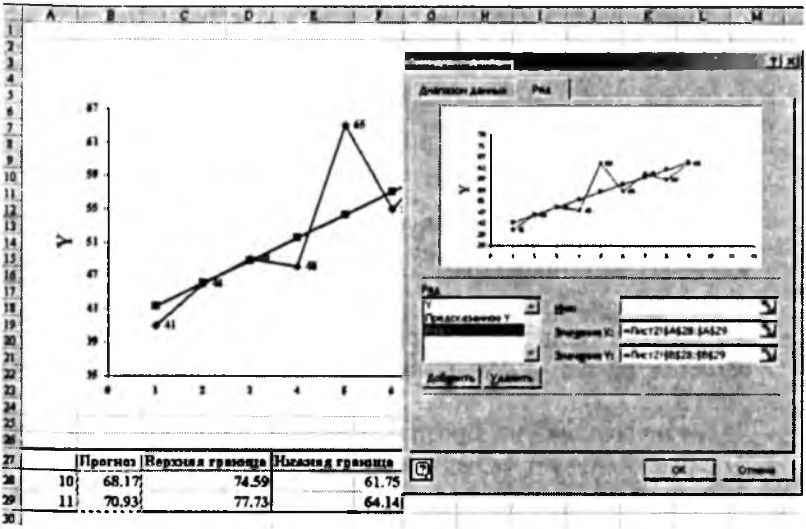


Рис. 3.14. Ввод данных для построения точечного прогноза

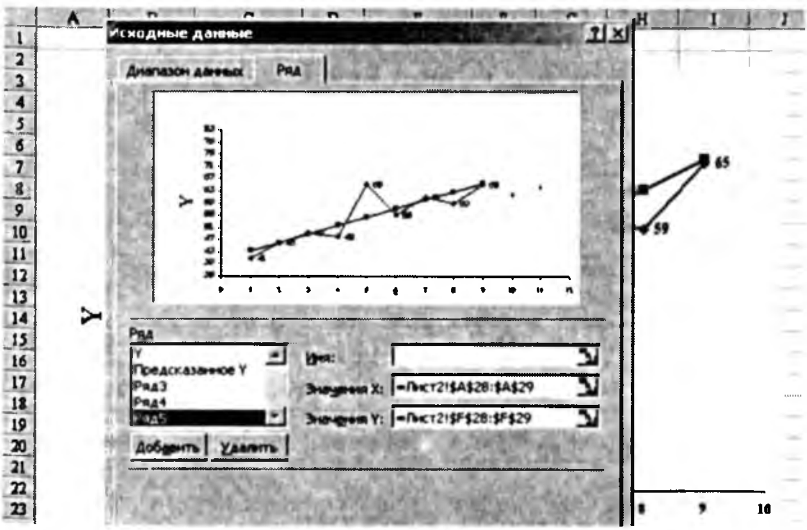


Рис. 3.15. Добавление ряда 4 и ряда 5 для отображения верхних и нижних границ

Рис. 3.16. Результаты моделирования и прогнозирования

3.3. АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ПОМОЩЬЮ ИНСТРУМЕНТА МАСТЕР ДИАГРАММ

При анализе временных рядов широко применяются графические методы. Это объясняется тем, что табличное представление временного ряда и описательные характеристики не позволяют понять характер процесса, а по графику временного ряда можно сделать определенные выводы, которые потом могут быть проверены с помощью расчетов:

- наличие тренда и его характер;
- наличие сезонных и циклических компонент;
- степень плавности или прерывистости изменений последовательных значений ряда после устранения тренда.

Так графический анализ ряда обычно задает направление его дальнейшего анализа. В Excel для этого можно использовать средство Мастер диаграмм.

Для создания диаграммы с помощью средства Мастер диаграмм необходимо выделить данные, которые будут отображены на диаграмме (это необязательная операция, однако она позволит сэкономить время при работе мастером). Сюда следует включить как числовые данные, так и подписи к рисункам. Excel автоматически распознает подписи и использует их при построении диаграммы. Пример рабочего листа, соответствующая часть которого (ячейки **A5:A17**) будет выделена для Мастера диаграмм, показан на рис. 3.17.

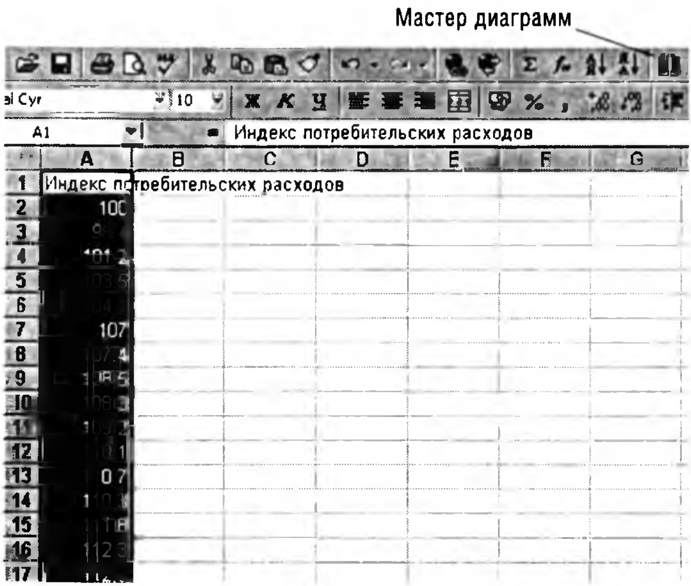


Рис. 3.17. Выделение данных перед началом работы с Мастером диаграмм

Работа Мастера диаграмм состоит из четырех основных шагов, выполнение которых рассмотрим на следующем примере.

Пример 3.3. Построить график временного ряда *Индекс потребительских расходов*, выделить тренд этого временного ряда и сделать прогноз на два шага вперед. Исходные данные по этому временному ряду за 16 месяцев приведены в табл. 3.10.

Таблица 3.10

Индекс потребительских расходов

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
100	98,4	101,2	103,5	104,1	107	107,4	108,5	108,3	109,2	110,1	110,7	110,3	111,8	112,3

Шаг 1. Выбор типа и вида диаграммы. Во вкладке Стандартные можно увидеть основные типы диаграмм. На рис. 3.18 на вкладке Стандартные выделен тип График. Выбрав вид График с маркерами, необходимо нажать на кнопку Далее.

Шаг 2. Выбор и уточнение ориентации диапазона данных и ряда. На экране появилось диалоговое окно, показанное на рис. 3.19. Вкладка Диапазон данных позволяет выполнить следующие операции:

- выбрать (или изменить) диапазон данных листа. Если перед началом работы с Мастером диаграмм данные не были выделены, то, используя это поле, можно выбрать их сейчас;

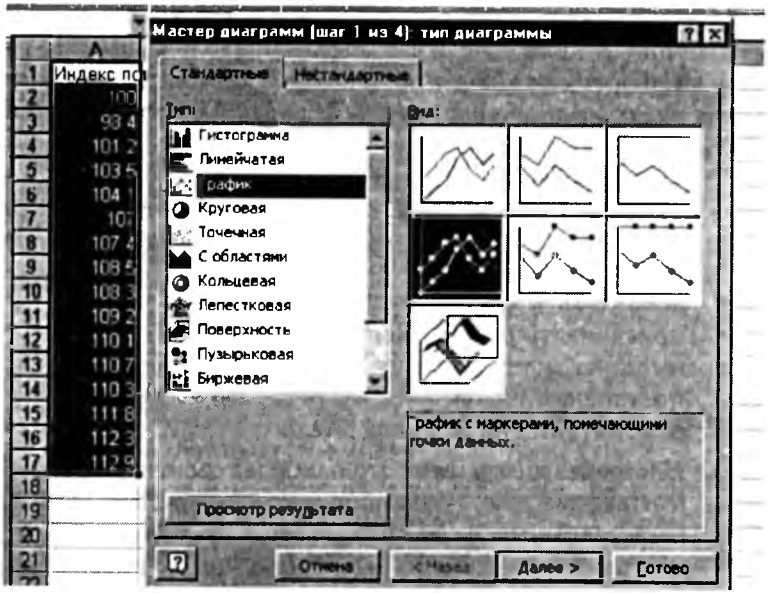


Рис. 3.18. На первом этапе выбирается вид создаваемой диаграммы

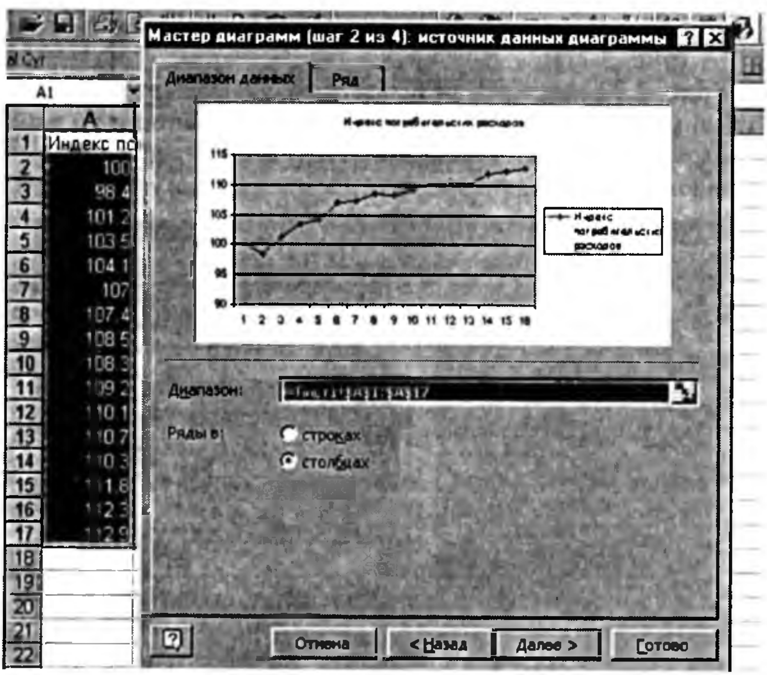


Рис. 3.19. Вкладка Диапазон данных

- уточнить ориентацию диапазона данных диаграммы с помощью переключателя Ряды в строках и столбцах. При выборе переключателя В строках строки рабочего листа будут рассматриваться как ряды диаграммы, а при выборе переключателя В столбцах — рядами диаграммы будут столбцы данных.

Вкладка Ряд позволяет управлять параметрами каждого ряда диаграммы. С ее помощью можно выполнить следующие операции:

- добавлять и удалять ряды;
- присваивать рядам имена;
- выделять (или переопределять) данные, используемые для построения рядов;
- изменять подписи категорий.

Шаг 3. **Настройка диаграммы.** Это наиболее сложный этап работы Мастера диаграмм. В появившемся диалоговом окне предлагается большое количество самых различных параметров диаграммы (рис. 3.20). Если параметры не изменяются, то используется установленное по умолчанию значение.

Шаг 4. **Выбор месторасположения диаграммы.** На этом шаге определяется месторасположение созданной диаграммы (рис. 3.21).

На рис. 3.22 приведен результат работы Мастера диаграмм.

Excel предоставляет дополнительные возможности по работе с диаграммами. Наиболее полезной с точки зрения анализа временных рядов представляется возможность создания линий тренда.

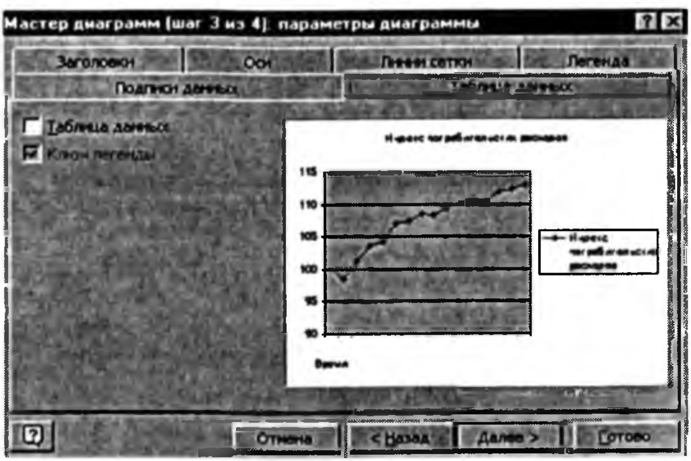


Рис. 3.20. Диалоговое окно Мастера диаграмм на третьем шаге

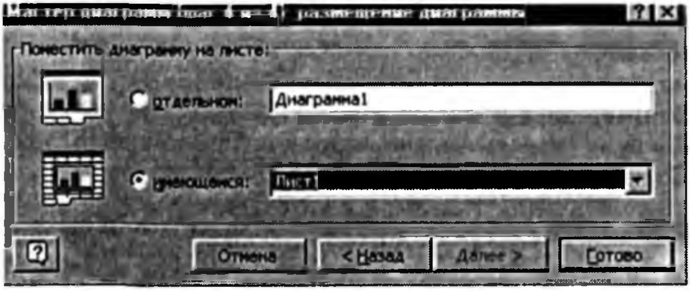


Рис. 3.21. Диаграмма будет расположена на одном листе с исходными данными

Рис. 3.22. Результат работы Мастера диаграмм. Новая диаграмма внедрена как объект в рабочий лист

Построение линий тренда

Для описания закономерностей в исследуемом временном ряду строятся линии тренда. В табл. 3.11 приведены типы линий тренда, используемые в Excel.

Таблица 3.11

Типы линий тренда и их математические уравнения

Тип зависимости	Уравнение
Линейная	$Y = a_0 + a_1X$
Полиномиальная	$Y = a_0 + a_1X + a_2X_2 + \ldots + a_6X_6$
Логарифмическая	$Y = a \ln X + b$
Экспоненциальная	$Y = ae^{bx}$
Степенная	$Y = ax^b$

Для добавления линии тренда в диаграмму выполните следующие действия:

1) щелкните правой кнопкой мыши на одном из рядов диаграммы;
2) выберите команду Добавить линию тренда из контекстного меню. На экране появится диалоговое окно Линия тренда (рис. 3.23);
3) выберите тип регрессии. Если это Полиномиальная регрессия введите значение степени в поле Степень. Если же вы выбрали тип Скользящее среднее (который не является регрессией), то в поле Точки введите число точек, необходимых для вычисления средней величины;
4) убедитесь в том, что ряд, для которого необходимо построить линию тренда, выделен в списке Построение линии тренда на ряде. Если нет, то выделите его, а затем переключитесь на вкладку Параметры (рис. 3.24);
5) в разделе Название аппроксимирующей (сглаженной) кривой установите переключатель Автоматическое или Другое, после чего введите название кривой. Оно появится в легенде диаграммы;
6) если линия тренда создается с помощью регрессии (т.е. на вкладке выбран любой тип, кроме скользящего среднего), то в соответствующих полях можно ввести прогнозируемое количество периодов, которые будут добавлены к линии тренда;
7) в случае необходимости можете установить и остальные параметры (они могут быть доступны или недоступны в зависимости от выбранного типа регрессии). Так, можно установить

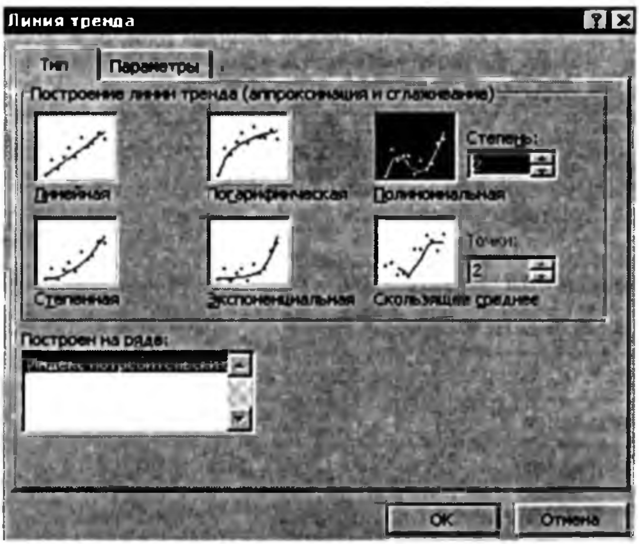


Рис. 3.23. Вкладка Тип используется для выбора типа создаваемой линии тренда

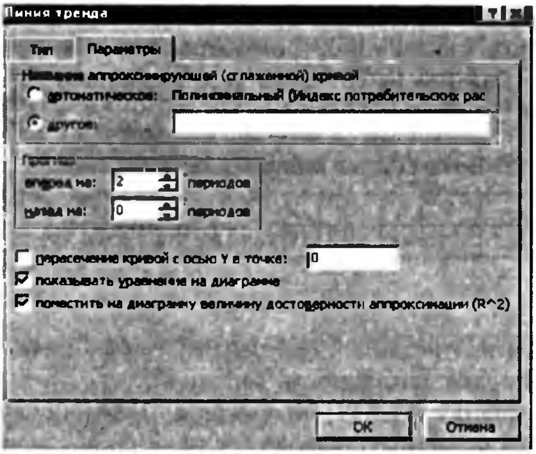


Рис. 3.24. Установка остальных параметров линии тренда выполняется с помощью вкладки Параметры

пересечение с осью *Y*, отображение на диаграмме уравнения или величины достоверности аппроксимации (*R*2)[1];

8) щелкните на кнопке ОК для завершения процесса создания линии тренда.

На рис. 3.25 приведен результат построения тренда для временного ряда *Индекс потребительских расходов*. В качестве аппроксимирующей функции выбран полином второй степени (парабола), по которой построен графический прогноз на два шага вперед.

Рис. 3.25. Результат прогнозирования по тренду $Y = 97{,}008 + 1{,}739t - 0{,}0488t^2$

[1] *R*2 — коэффициент детерминации. Подробнее о характеристиках качества регрессионных моделей см. в [2].

Пример 3.4. Для временного ряда *Затраты на рекламу* выбрать наилучший вид тренда и построить графический прогноз на два шага вперед. Данные за 16 месяцев приведены в табл. 3.12.

Таблица 3.12

Затраты на рекламу по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	4,8	3,8	8,7	8,2	9,7	14,7	18,7	19,8	10,6	8,6	6,5	12,6	6,5	5,8

Решение

Для решения поставленной задачи необходимо выполнить следующую последовательность действий:

- выделить ячейки **A1:A17**, содержащие наименование временного ряда и исходные данные;
- вызвать Мастер диаграмм:
  - Шаг 1. Выбрать тип диаграммы — График; вид — Первый;
  - Шаг 2. Щелкнуть кнопку Далее;
  - Шаг 3. В появившемся окне снова выбрать кнопку Далее;
  - Шаг 4. Щелкнуть кнопку Готово. На экране появится построенный график;
- щелкнуть правой кнопкой на линии графика. График выделен метками (рис. 3.26);

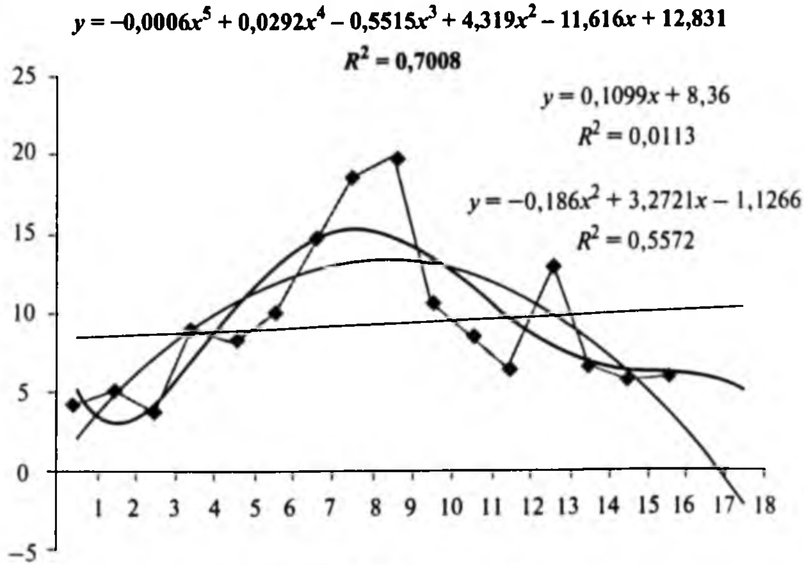


Рис. 3.26. Выбор наилучшей модели

- в диалоговом окне **Линия тренда** выбрать тип **Линейная** (потом **Полиномиальная второй степени**, потом **Полиномиальная пятой степени**);
- на вкладке **Параметры** назначаем: **Показывать уравнение на диаграмме**, **Поместить на диаграмму** $R2$, **Прогноз на два шага**;
- для построения прогноза выбрать модель с наибольшим коэффициентом детерминации $R2$;
- в качестве лучшего выбран полиномиальный тренд пятого порядка.

Вопросы и задачи для самостоятельного решения

1. В чем суть прогнозирования экономических процессов на основе метода экстраполяции?
2. На какие компоненты в общем случае можно разложить уровни временного ряда?
3. Перечислите методы выявления наличия тренда.
4. Укажите правильный вид линейной модели временного ряда:
   а) $Y(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$;
   б) $Y(t) = a_0 + a_1k$;
   в) $Y(t) = a_0 + a_1t$;
   г) $Y(t) = a_0 + a_1e^t$.
5. Чем определяется качество математической модели временного ряда:
   а) случайным характером остаточной компоненты;
   б) альтернативностью и системностью подхода к моделированию;
   в) адекватностью и точностью модели;
   г) интервальным прогнозом.
6. Каким образом выполняется оценка адекватности трендовых моделей?
7. Назовите статистические критерии оценки точности моделей прогнозирования.
8. От каких факторов зависит ширина доверительного интервала прогноза?

Задача 3.1. Имеются данные за 9 месяцев об уровне безработицы y_t (в % к общему числу трудоспособного населения области):

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_t	15	13	11	12	13	11	10	8	5

Проверьте наличие тренда, гарантируя результат с вероятностью $P = 0.9$ ($t_\alpha = 1,89$; $F_{кр} = 5.34$). Отобразите на графике фактические данные.

Задача 3.2. Дан временной ряд котировок евро за январь 2000 г. (по дням):

t	1	2	3	4	5	6	7
Котировки	29,48	29,29	28,92	28,84	28,94	28,84	28,93

Определить прогнозные значения данного показателя на следующие 2 дня с использованием модели $Y = a_0 + a_1 t$. Табличное значение критерия Стьюдента:

$t_{табл}$ ($\alpha = 0,1$; $k = n - 2 = 5$) $= 2,01$.

Задача 3.3. Оценить адекватность модели $f(t) = 22,89 - 1,25t$, описывающей временной ряд $Y(t) = (25; 17; 18; 16; 20; 15; 14)$, на основе исследования:

- случайности остаточной компоненты по критерию пиков;
- независимости уровней ряда остатков по d-критерию (в качестве критических используйте уровни $d_1 = 1,08$ и $d_2 = 1,36$) или по первому коэффициенту корреляции, критический уровень которого $r(1) = 0,36$;
- нормальности распределения остаточной компоненты по RS-критерию с критическими уровнями 2,7—3,7.

Глава 4. АУДИТОРНАЯ РАБОТА «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MICROSOFT EXCEL»

Целью работы является приобретение навыков построения математических моделей задач линейного программирования и их решения в среде Microsoft Excel.

4.1. РУКОВОДСТВО К ВЫПОЛНЕНИЮ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

Для выполнения аудиторной работы каждый студент обязан:

1) изучить технологию решения задач линейного программирования с помощью надстройки Поиск решений в среде Excel (см. главу 1) и руководство к аудиторной работе, уяснить основную задачу занятия, методику и порядок ее выполнения;
2) повторить теоретический материал, относящийся к данному занятию;
3) по номеру своего варианта выбрать условие задачи и построить ее модель;
4) вызвать инженера компьютерного класса, который произведет включение питания компьютера;
5) в процессе работы студенты должны руководствоваться описанием аудиторной работы, строго придерживаясь рекомендованного порядка ее проведения;
6) после выполнения всех пунктов задания и распечатки результатов расчетов студент должен сдать зачет по работе.

4.2. ИНСТРУКЦИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ MICROSOFT EXCEL ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Для того чтобы решить задачу ЛП в табличном редакторе Microsoft Excel, необходимо выполнить следующие действия.

1. **Ввести условия задачи.**
   1) ***Создать экранную форму для ввода***:
   - переменных;
   - целевой функции;
   - ограничений;
   - граничных условий;
   2) ***В экранную форму ввести описания исходных данных***:
   - коэффициенты целевой функции;
   - коэффициенты при переменных в ограничениях;
   - правые части ограничений;
   3) ***В экранную форму ввести из математической модели***:
   - формулу для расчета целевой функции;
   - формулы для расчета значений левых частей ограничений;
   4) ***В окне* Поиск решения *для описания целевой функции задать***:
   - целевую ячейку;
   - направление оптимизации целевой функции;
   5) ***В окне* Поиск решения *ввести для описания ограничений и граничных условий***:
   - ячейки со значениями переменных;
   - граничные условия для допустимых значений переменных;
   - соотношения между правыми и левыми частями ограничений.
2. **Решить задачу.**
   1) ***В окне* Поиск решения *установить параметры решения задачи***;
   2) ***В окне* Поиск решения *запустить задачу на решение***;
   3) ***В окне* Результат *выбрать формат вывода решения***.

4.3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание. *Найти оптимальное решение задачи в Excel и показать его преподавателю. Оформить аудиторную работу согласно требованиям к отчету.*

Отчет по аудиторной работе должен занимать 3—7 страниц и содержать:
- титульный лист;
- постановку экономической задачи (исходные данные варианта);
- экономико-математическую модель с необходимыми комментариями по ее элементам с указанием всех единиц измерения;
- протокол решения задачи, куда должны входить:
  - фрагмент исходного рабочего листа Excel;
  - диалоговое окно Поиск решения;

- фрагмент Отчета по результатам или фрагмент рабочего листа Excel, содержащий результаты решения;
- желательно включить диалоговые окна Параметры поиска решения и Результаты поиска решения;

- описание компьютерной информационной технологии получения оптимального решения;
- предложения (рекомендации) лицу, ответственному за принятие решений, по оптимальному управленческому поведению.

Отчет оформляется в установленные преподавателем сроки.

4.4. ВАРИАНТЫ

Номер варианта определяется по последней цифре зачетной книжки.

ЗАДАНИЕ 1

Задача 1.1. На кондитерской фабрике

Маленькая кондитерская фабрика должна закрыться на реконструкцию, поэтому надо реализовать оставшиеся запасы сырья, получив максимальную прибыль. Запасы и расход сырья для производства единицы продукции каждого вида, а также получаемая при этом прибыль представлены в таблице.

Ресурсы	Кондитерские изделия					Ограничения
	Ореховый звон	Райский вкус	Батончик	Белка	Ромашка	
Темный шоколад	0,8	0,5	1	2	1,1	1411
Светлый шоколад	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	149
Сахар	0,3	0,4	0,6	1,3	0,05	815,5
Карамель	0,2	0,3	0,3	0,7	0,5	466
Орехи	0,7	0,1	0,9	1,5	0	1080
Прибыль	1	0,7	1,1	2	0,6	

1. Мастер, используя свой 20-летний опыт, предлагает «на глазок» выпустить по 200 пакетов каждого продукта, утверждая, что ресурсов «должно хватить», а прибыль получится 1080 у.е. Сын владельца фабрики, только что прошедший курсы по ма-

тематическому моделированию, утверждает, что такие проблемы надо решать с помощью линейного программирования. Отец обещает сыну всю прибыль сверх 1080 у.е., если он предложит лучший план, чем опытный мастер.

Требуется:

1) определить оптимальный план выпуска продукции. Какую прибыль планирует получить сын?
2) проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане.

Задача 1.2. Оптимальный план производства

Фирма производит три модели электронных реле. Каждая модель требует две стадии сборки. Время (в мин), необходимое для сборки на каждой стадии, приведено в таблице.

Продукт	Стадия 1	Стадия 2	Прибыль	Заказ
Модель *A*	2,5	2,0	82,5	20
Модель *B*	1,8	1,6	70,0	20
Модель *C*	2,0	2,2	78,0	20
Ресурс	450	450		

Оборудование на каждой стадии работает 7,5 час в день. Менеджер хочет максимизировать прибыль за следующие 5 рабочих дней. Модель *A* дает прибыль 82,5 руб. за шт.; модель *B* — 70,0 руб.; модель *C* — 78,0 руб. Фирма может продать все, что произведет, и, кроме того, у нее на следующую неделю есть оплаченный заказ на 60 шт. изделий (по 20 шт. устройства каждого типа).

1. Каков должен быть оптимальный производственный план?
2. Все ли типы моделей выгодно производить?
3. Если есть убыточная модель, то какие изменения надо внести, чтобы ее производство стало выгодным? Попробуйте изменить что-нибудь в ценовой политике или увеличить время работы оборудования (за счет сверхурочных) так, чтобы все модели стали выгодными. Опишите результаты ваших попыток.
4. Допустим, что вы можете установить 2 сверхурочных часа для одной из стадий. Для какой именно стадии следует назначить эти сверхурочные часы, чтобы получить наибольшую прибыль?

Задача 1.3. Оптимизация инвестиционного портфеля

Частный инвестор предполагает вложить 500 тыс. руб. в различные ценные бумаги (см. таблицу).

Вложение	Доход, %	Риск
Акции *A*	15	высокий
Акции *B*	12	средний
Акции *C*	9	низкий
Долгосрочные облигации	11	—
Краткосрочные облигации	8	—
Срочный вклад	6	—

После консультаций со специалистами фондового рынка он отобрал 3 типа акций и 2 типа государственных облигаций. Часть денег предполагается положить на срочный вклад в банк.

Имея в виду качественные соображения диверсификации портфеля и неформализуемые личные предпочтения, инвестор выдвигает следующие требования к портфелю ценных бумаг:

- все 500 тыс. руб. должны быть инвестированы;
- по крайней мере 100 тыс. руб. должны быть на срочном вкладе в банке;
- по крайней мере 25% средств, инвестированных в акции, должны быть инвестированы в акции с низким риском;
- в облигации нужно инвестировать по крайней мере столько же, сколько в акции;
- не более чем 125 тыс. руб. должно быть вложено в бумаги с доходом менее 10%.

1. Определить портфель бумаг инвестора, удовлетворяющий всем требованиям и максимизирующий годовой доход. Какова величина этого дохода?
2. Если инвестор вносит дополнительные средства в портфель бумаг, сохраняя сформулированные выше ограничения, как изменится ожидаемый годовой доход? Зависит ли изменение ожидаемого годового дохода от величины дополнительно инвестированных средств? Почему?
3. Ожидаемый годовой доход по той или иной бумаге (особенно по акциям) — это не более чем оценка. Насколько оптимальный портфель и ожидаемая величина дохода от портфеля выбранных бумаг чувствительны к этим оценкам? Какая именно бумага портфеля наиболее сильно влияет на оценку суммарного ожидаемого дохода?

Задача 1.4. Максимизация прибыли универмага

Большой универсальный магазин собирается заказать новую коллекцию костюмов для весеннего сезона. Решено заказать 4 типа костюмов. Три типа — костюмы широкого потребления (из полиэстровых смесей, шерстяные, хлопковые). Четвертый тип — дорогие импортные модельные костюмы из различных тканей. Имеющийся у менеджеров магазина опыт и специальные исследования позволяют оценить средние затраты рабочего времени продавцов на продажу одного костюма каждого типа, объем затрат на рекламу и площади в расчете на один костюм каждого типа. Все эти данные, а также прибыль от продажи одного костюма каждого типа представлены в таблице.

Тип костюма	Прибыль, дол.	Время, час	Реклама, у.е.	Площадь, $м^2$
Полиэстер	35	0,4	2	1,00
Шерсть	47	0,5	4	1,50
Хлопок	30	0,3	3	1,25
Эластик	90	1,0	9	3,00

Предполагается, что весенний сезон будет длиться 90 дней. Магазин открыт 10 часов в день, 7 дней в неделю. Два продавца постоянно будут в отделе костюмов. Выделенная отделу костюмов площадь составляет прямоугольник 100×60 $м^2$. Бюджет, выделенный на рекламу всех костюмов на весенний сезон, составляет 15 000 у.е.

1. Сколько костюмов каждого типа надо закупить, чтобы максимизировать прибыль?
2. Допустим, что менеджмент магазина считает необходимым закупить не менее 200 костюмов каждого типа. Как это требование повлияет на прибыль магазина?

   При ответе на следующие вопросы сохраните ограничение (2).
3. Изменится ли оптимальное решение, если прибыль от продажи одного полиэстрового костюма переоценена (недооценена) на 1 у.е.? На 2 у.е.?
4. Обоснуйте, будет ли каждое из предлагаемых решений полезно для магазина:
   - отдать в распоряжение отдела костюмов 400 $м^2$ от отдела женской спортивной одежды. Предполагается, что на этой площади магазин может получить прибыль всего лишь 750 у.е. за последующие 90 дней;
   - истратить дополнительно 400 у.е. на рекламу.
5. Если общее число закупленных костюмов не может превысить 5000 шт., то как такое ограничение повлияет на оптимальное решение?

Задача 1.5. Выбор оптимальных проектов для финансирования

Управляющему банка были представлены 4 проекта, претендующие на получение кредита в банке. Доступная наличность банка, потребности проектов и прибыль по ним приведены в таблице (тыс. дол.).

Проект	Период 1	Период 2	Период 3	Период 4	Прибыль
A	8	8	10	10	21
B	7	9	9	11	18
C	5	7	9	11	16
D	9	8	7	6	17,5
Ресурс банка	22	25	38	30	

При оценке этих предложений следует принять во внимание потребность проектов в наличности и массу доступной наличности для соответствующих периодов.

Какие проекты следует финансировать и какое количество наличности необходимо в течение каждого периода, если цель состоит в том, чтобы максимизировать прибыль?

Задача 1.6. Оптимальный план развития программных продуктов

Компания «Корвет» производит и реализует программное обеспечение на CD-дисках. Компания оценивает возможность разработки шести новых программных приложений. В таблице представлена информация о затратах и ожидаемой прибыли от продажи приложений (в тыс. дол.).

Приложение	Затраты на развитие	Число программистов	Чистая прибыль
П1	400	6	2000
П2	1100	18	3600
П3	940	20	4000
П4	760	16	3000
П5	1260	28	4400
П6	1800	34	6200
Ресурсы	3500	60	

У «Корвета» 60 программистов. Фирма может выделить 3,5 млн дол. на разработку новых программных приложений.

Каков оптимальный набор приложений, которые следует развивать, если:

1) ожидается, что клиенты, заинтересованные в приложении 4, будут заинтересованы также и в приложении 5, и наоборот; поэтому эти два приложения должны развиваться или не развиваться вместе;
2) развитие приложения 1 имеет смысл только при наличии приложения 2, поэтому, если развивается приложение 1, должно развиваться и приложение 2, но приложение 2 может развиваться и без приложения 1;
3) развиваться может только одно из приложений 3 или 6;
4) стремясь обеспечить качество продукции, «Корвет» не склонен разрабатывать более трех программных продуктов.

Проанализируйте влияние каждого из ограничений на оптимальное решение.

Задача 1.7. Оптимальный план размещения рекламы

Фирма планирует рекламную кампанию нового продукта. Отведенный на эти цели бюджет составляет 120 000 руб. Предполагается, что тираж рекламных объявлений должен составить не менее 800 млн экземпляров; объявления будут размещены в шести изданиях. Каждое издание имеет свой тираж (см. таблицу). Фирма подсчитала стоимость размещения рекламы в одном выпуске издания.

№ издания	Стоимость размещения рекламы в одном выпуске издания, руб.	Тираж одного выпуска, млн экз.
1	1474,2	9,9
2	1244,1	8,4
3	1131,0	8,2
4	700,7	5,1
5	530,0	3,7
6	524,4	3,6

Необходимо распространить рекламу с минимальными издержками при следующих ограничениях:

1) в каждом издании реклама должна пройти в шести или более выпусках;
2) на любое издание может быть истрачено не более одной трети отпущенной суммы;
3) общая стоимость рекламы в третьем и четвертом изданиях не должна превышать 75 000 руб.

Задача 1.8. Распределение рекламного бюджета

Фирма рекламирует свою продукцию с использованием четырех средств: телевидения, радио, газет и афиш. Из различных рекламных экспериментов, которые проводились в прошлом, известно, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на 10, 3, 7 и 4 у.е. в расчете на 1 у.е., затраченную на рекламу.

Распределение рекламного бюджета по различным средствам подчинено следующим ограничениям:

а) полный бюджет не должен превосходить 500 000 у.е.;

б) следует расходовать не более 40% бюджета на телевидение и не более 20% бюджета на афиши;

в) вследствие привлекательности для подростков радио на него следует расходовать по крайней мере половину того, что планируется на телевидение.

Сформулируйте задачу распределения средств по различным источникам как задачу линейного программирования и решите ее.

Задача 1.9. Оптимальный план выпуска молочной продукции

Продукцией городского молочного завода являются молоко, кефир и сметана. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1,01; 1,01 и 9,45 т молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 машино/час. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 час. Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136 т молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино/час, а автоматы по расфасовке сметаны — в течение 16,25 час. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 22 и 136 руб. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т молока.

Требуется:

1) определить объемы выпуска молочной продукции, позволяющие получить наибольшую прибыль;
2) проанализировать, как изменится прибыль и план выпуска молочной продукции, если основное оборудование может быть занято на 2 часа больше;
3) определить, к чему приведет задание по выпуску кефира в объеме не менее 10 т.

Задача 1.10. Максимизация прибыли мебельного комбината

Цех мебельного комбината выпускает трельяжи, трюмо и тумбочки под телевизоры. Норма расхода материала в расчете на одно изделие, плановая себестоимость, оптовая цена предприятия, плановый ассортимент и трудоемкость единицы продукции приведены в таблице. При этом запас древесно-стружечных плит, досок еловых и березовых 90, 30 и 14 м^3 соответственно. Плановый фонд рабочего времени 16 800 чел./час.

Показатели	Изделия		
	трельяж	трюмо	тумбочка
Норма расхода материала, м^3: древесностружечные плиты	0,032	0,031	0,038
доски еловые	0,020	0,020	0,008
доски березовые	0,005	0,005	0,006
Трудоемкость, чел./ час	10,2	7,5	5,8
Плановая себестоимость, у.е.	88,81	63,98	29,60
Оптовая цена предприятия, у.е.	93,00	67,00	30,00
Плановый ассортимент, шт.	350	290	1200

Исходя из необходимости выполнить план по ассортименту и возможности его перевыполнения по отдельным (и даже всем) показателям построить модель, на основе которой можно найти план производства, максимизирующий прибыль.

1. Как изменится план выпуска при увеличении запаса досок еловых на 5 м^3?
2. К чему приведет увеличение плана выпуска по тумбочкам на 100 штук?

ЗАДАНИЕ 2

Задача 2.1. Задача коммивояжера

Коммивояжеру, находящемуся в Париже, необходимо посетить три города. Он получил информацию о стоимости перелета в каждый из выбранных городов из Парижа и стоимости перелета из одного города в другой. На основании полученных данных он составил матрицу стоимостей (см. таблицу) перелета в выбранные города и обратно. И теперь ему надо так составить маршрут поездки, чтобы затраты на дорогу были минимальными и чтобы каждый пункт посещался только один раз.

Пункты	Париж	Берлин	Рим	Лондон
Париж	0	270	430	160
Берлин	70	0	160	10
Рим	200	130	0	350
Лондон	210	160	250	0

Задача 2.2. Оптимальный план перевозок грузов

На трех станциях отправления *A*, *B* и *C* имеется соответственно 50, 20 и 30 ед. однородного груза, который нужно доставить в пять пунктов назначения согласно их потребностям. Эти данные, а также стоимость перевозки единицы груза от каждой станции отправления к каждому пункту назначения указаны в таблице.

Пункты отправления	Запасы груза	Пункты назначения и их потребности				
		П1	П2	П3	П4	П5
A	50	4	1	2	3	3
B	20	3	1	5	2	4
C	30	5	6	1	4	2
		30	5	25	15	25

Составить такой план перевозок грузов, чтобы затраты на эти перевозки были минимальными.

Задача 2.3. Распределение самолетов по маршрутам

Требуется распределить самолеты трех типов по авиалиниям так, чтобы при минимальных суммарных эксплуатационных расходах перевезти по каждой из четырех авиалиний соответственно не менее 300, 200, 900 и 600 ед. груза.

Ниже в таблицах приведены исходные данные.

Тип самолета	Число самолетов	Месячный объем перевозок одним самолетом по авиалиниям			
		1	2	3	4
1	40	15	10	20	50
2	25	30	20	10	17
3	30	25	50	30	45

Тип самолета	Эксплуатационные расходы на один рейс по данному маршруту, дол.			
	1	2	3	4
1	10	20	25	40
2	70	22	15	45
3	40	50	40	65

Необходимо так распределить самолеты по авиалиниям, чтобы суммарные эксплуатационные расходы были минимальны.

Задача 2.4. Распределение аудиторов по фирмам

Менеджер-координатор аудиторской фирмы должен распределить аудиторов для работы на следующий месяц. Есть заявки от 10 клиентов на 75 аудиторов. В четырех конторах фирмы работают 90 аудиторов. 15 аудиторов можно отправить на плановую учебу. Аудиторы различаются по квалификации и опыту работы. Прежде чем приступить к аудиту конкретной фирмы, они должны затратить определенное время на подготовку и консультации. Менеджер-координатор, учитывая опыт работы аудиторов каждой конторы, оценил время, необходимое в среднем аудитору каждой конторы для подготовки к аудиту конкретного клиента. Результаты приведены в таблице. Знаки вопроса в клетках таблицы означают, что аудиторы из этой конторы не имеют опыта аудита в отрасли, которой занимается данный клиент, и их нельзя к нему посылать. Распределить аудиторов так, чтобы суммарные временные затраты на подготовку были минимальны.

Конторы	Клиенты										Ресурсы
	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	K9	K10	
A1. ГААПвилл	8	21	15	13	9	17	18	7	26	9	35
A2. Финанстаун	14	18	17	19	12	6	0	15	24	13	20
A3. ИСАбург	9	15	18	16	16	15	11	13	21	19	25
A4. Нью-Баланс	11	?	14	7	23	9	6	18	?	7	10
Заявки	4	9	2	12	7	6	9	3	18	5	

В реальной практике обычно требуют, чтобы аудиторы не все были из одной конторы. Попробуйте выполнить это условие и не слишком ухудшить решение.

Задача 2.5. Закрепление самолетов за воздушными линиями

Три типа самолетов требуется распределить между четырьмя авиалиниями. В приводимых ниже таблицах заданы число самолетов каждого типа, месячный объем перевозок каждым самолетом на каждой авиалинии и соответствующие эксплуатационные расходы.

Требуется распределить самолеты по авиалиниям так, чтобы при минимальных суммарных эксплуатационных расходах перевезти по каждой из четырех авиалиний соответственно не менее 300, 200, 1000 и 500 ед. груза.

Тип самолета	Число самолетов	Месячный объем перевозок одним самолетом по авиалиниям			
		I	II	III	IV
1	50	15	10	20	50
2	20	30	25	10	17
3	30	25	50	30	45

Тип самолета	Эксплуатационные расходы			
	I	II	III	IV
1	15	20	25	40
2	70	28	15	45
3	40	70	40	65

Задача 2.6. Транспортная задача

Менеджер транспортного отдела составляет план перевозок продукции фирмы в стандартных контейнерах на следующий месяц. Цены перевозок одного контейнера, величины заказов и запасы на складах даны в таблице.

Склады	Клиенты									Ресурсы
	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	K9	
C1	14	7	10	7	3	12	7	2	14	7
C2	10	4	16	15	16	9	10	6	12	10
C3	10	11	9	6	7	11	15	8	11	12
C4	9	12	3	8	5	17	16	17	13	8
C5	3	12	8	17	5	13	16	8	3	2
C6	13	9	11	5	17	7	17	17	16	5
C7	3	6	10	18	14	12	8	9	7	6
Заказ	5	11	5	9	3	6	9	4	8	

Имеется 9 заказов от 9 потребителей. Заказы в сумме превышают запас на складах C1, ..., C7. Найдите план перевозок, минимизирующий транспортные издержки. Как изменится план перевозок, если ввести запрет на перевозки с четвертого склада третьему клиенту?

Задача 2.7. Транспортная задача

Менеджер транспортного отдела составляет план перевозок продукции фирмы в стандартных контейнерах на следующий месяц. Цены перевозок одного контейнера, величины заказов и запасы на складах даны в таблицах.

Склады	Клиенты										Ресурсы
	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	K9	K10	
C1	3	17	7	17	9	14	9	14	8	14	4
C2	3	6	6	8	17	12	16	5	5	13	11
C3	9	5	6	16	8	10	11	8	8	18	17
C4	12	16	6	16	14	3	5	14	11	17	20
Заказ	2	2	5	4	5	4	4	1	2	3	

Имеется 10 заказов от 10 потребителей. Заказы в сумме меньше запаса на складах C1, ..., C4. Найдите план перевозок, минимизирующий транспортные издержки.

Задача 2.8. Задача о назначениях

Мастер должен назначить на 10 типовых операций 12 рабочих. Время, которое тратит каждый рабочий на выполнение каждой операции, приведено в таблице.

Рабочие	Операции									
	Д1	Д2	Д3	Д4	Д5	Д6	Д7	Д8	Д9	Д10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P1	29	31	16	16	17	34	20	28	16	13
P2	29	25	22	30	24	31	37	23	16	27
P3	27	32	?	14	34	30	27	16	19	17
P4	21	35	?	32	31	28	30	29	31	16
P5	21	36	?	14	24	30	21	28	29	27
P6	28	35	25	30	22	16	?	18	25	18
P7	27	34	33	26	14	19	18	37	19	16

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P8	27	34	27	30	37	37	26	22	35	33
P9	16	26	18	26	16	20	31	34	28	29
P10	16	22	33	22	21	19	19	37	36	24
P11	26	35	13	14	17	36	17	17	25	21
P12	34	25	19	14	36	36	17	36	26	33

Знак вопроса означает, что этот рабочий не может выполнять эту операцию. Определите расстановку рабочих по операциям, при которой суммарное время на выполнение работ будет минимально.

Задача 2.9. Задача о распределении работ

На предприятии имеется четыре группы станков, каждый из которых может выполнять любую из пяти видов элементарных операций по обработке деталей, причем операции могут производиться в любом порядке. Максимальное время работы каждой группы станков соответственно равно 320, 400, 240 и 400 час; каждая операция должна выполняться соответственно в течение 336, 224, 224, 288 и 288 час.

Требуется определить, на какой операции и сколько времени использовать каждую группу станков, чтобы обработать максимальное число деталей, если производительность каждого станка группы задана матрицей C, где c_{ij} — производительность станка i при выполнении операции j:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

К чему приведет запрет на использование станков второй группы для выполнения операции первого типа?

Задача 2.10. Задача о доставке

Фирма обслуживает 5 клиентов. Каждый день она доставляет им товары на грузовых машинах. Существует 3 допустимых маршрута доставки, каждый из которых позволяет обслужить определенное количество клиентов и требует использования в течение дня одного транспортного средства. Каждый маршрут характеризуется определенными расходами (см. таблицу).

Клиенты	Маршруты		
	1	2	3
1	1		1
2	1		
3	1		1
4		1	
5		1	1
Расходы по маршруту	900	1000	800

Необходимо выбрать такое множество маршрутов, при котором обеспечивается обслуживание каждого клиента и, кроме того, суммарные расходы минимальны, при условии, что каждый клиент обслуживается один раз в день.

Примерные вопросы на защите работы

1. Каков вид и способы задания формул для целевой ячейки и ячеек левых частей ограничений?
2. В чем смысл использования символа $ в формулах Excel?
3. Почему при вводе формул в ячейки целевой функции и левых частей ограничений в них отображаются нулевые значения?
4. Каким образом в Excel задается направление оптимизации целевой функции?
5. Поясните общий порядок работы с окном Поиск решения.
6. Каким образом можно изменять, добавлять, удалять ограничения в окне Поиск решения?
7. Какие сообщения выдаются в Excel в случаях:
   - успешного решения задачи линейного программирования;
   - несовместности системы ограничений задачи;
   - неограниченности целевой функции?
8. Объясните смысл параметров, задаваемых в окне Параметры поиска решения.
9. Каковы особенности решения в Excel целочисленных задач ЛП?
10. Каковы особенности решения в Excel задач ЛП с булевыми переменными?
11. Что такое связывающие, несвязывающие, избыточные ограничения; дефицитные и недефицитные ресурсы?
12. Что такое ценность дополнительной единицы ресурса i?
13. Как численно определить диапазон изменения коэффициентов целевой функции, не изменяющий оптимального решения?
14. Какую информацию о чувствительности оптимального решения задачи ЛП можно получить из отчета по результатам и отчета по устойчивости?

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

НОБЕЛЕВСКИЕ ЛАУРЕАТЫ ПО ЭКОНОМИКЕ

Премии имени шведского изобретателя *Альфреда Нобеля* для выдающихся ученых присуждаются за исключительно важные научные достижения ежегодно. В 1968 г. учреждены Нобелевские премии в области экономических наук.

Василий Васильевич ЛЕОНТЬЕВ
5 августа 1906 г. – 5 февраля 1999 г.

Американский экономист Василий Леонтьев родился в Санкт-Петербурге 5 августа 1906 г. В 1921 г. он поступил в Петроградский университет и сначала изучал философию и социологию, а затем экономические науки.

Одна из его первых научных статей была посвящена анализу баланса народного хозяйства СССР за 1923—1924 гг., это была первая в экономической практике тех лет попытка представить в цифрах производство и распределение общественного продукта. Баланс явился прообразом разработанного впоследствии Леонтьевым метода «затраты — выпуск» (в СССР его назвали экономико-математическими моделями межотраслевого баланса).

Предложенная Леонтьевым алгебраическая теория анализа «затраты — выпуск» сводилась к системе линейных уравнений, в которых параметрами были коэффициенты затрат на производство продукции. Леонтьев показал, что коэффициенты, выражающие отношения между секторами экономики (коэффициенты текущих материальных затрат), могут быть оценены статистически, что они достаточно устойчивы и их можно прогнозировать, обосновал существование наиболее важных коэффициентов, изменения которых необходимо отслеживать в первую очередь. Реалистическая гипотеза и относительная простота измерений определили громадные аналитические и прогностические возможности метода «затраты — выпуск».

В 1973 г. В. Леонтьев был удостоен премии Альфреда Нобеля по экономике «За развитие метода «затраты — выпуск» и его применение к важным экономическим проблемам».

Россия отнюдь не была для Василия Васильевича чужой страной. Он регулярно приезжал в СССР, следил за публикациями своих работ в нашей стране, переписывался с советскими учеными. В 1991 г. в Санкт-Петербурге он присутствовал при учреждении Леонтьевского центра, занимающегося организацией научных исследований в области экономики.

Леонтьев много писал о судьбах России. Он сравнивал экономику с каравеллой, чьи паруса надувает ветер частного интереса и инициативы, а рулем служит государственное регулирование. У советской экономики не было парусов — и в этом была главная причина ее неэффективности. Однако, добавлял Леонтьев, нельзя доверяться только ветру и парусам, оставив без внимания руль. Надо правильно пользоваться рулем и не вертеть им наугад.

На русском языке изданы такие работы В.В. Леонтьева, как «Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика» (М.: ИПЛ, 1990), «Межотраслевая экономика». (М.: Экономика, 1997).

Леонид Витальевич КАНТОРОВИЧ
19 января 1912 г. – 7 апреля 1986 г.

Леонид Витальевич Канторович родился 19 января 1912 г. в Санкт-Петербурге. В 18 лет он закончил математический факультет Ленинградского университета (1930 г.) и уже через четыре года получил звание профессора. В 1935 г. ему была присуждена ученая степень доктора физико-математических наук без защиты диссертации. Годы его работы в Ленинграде (до 1960 г.) связаны прежде всего с математико-механическим факультетом ЛГУ и Ленинградским отделением Математического института АН СССР. Эти годы ознаменовались выдающимися достижениями в области чистой и прикладной математики и экономики. Л.В. Канторович является одним из основателей отечественных школ функционального анализа, вычислительной математики, языков программирования.

Крупнейшим его открытием является введение в математическую и экономическую науки понятия «линейное программирование» (1939). Линейное программирование является универсальной математической моделью оптимального функционирования экономических систем. Основная заслуга Л.В. Канторовича заключается в разработке единого подхода к широкому кругу экономических задач о наилучшем использовании ресурсов на базе линейного программирования. Им были введены «двойственные оценки» ресурсов (сам Л.В. Канторович называл их объективно обусловленными оценками), показывающие степень ценности этих ресурсов для общества. Двойственные оценки получили разнообразное истолкование в зависимости от рассматриваемого круга задач в работах самого Л.В. Канторовича, его последователей в СССР и западных ученых (независимо открывших линейное программирование в середине 40-х годов). Если в западной литературе наиболее популярны так называемые «теневые цены» на ресурсы, то любимым детищем Л.В. Канторовича стала основанная на двойственных оценках теория дифференциальной ренты.

В 1975 г. Л.В. Канторович был удостоен Нобелевской премии по экономике (совместно с американским экономистом Т. Купмансом) за работы по теории оптимизации.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица П-1. Значения *F*-критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0,05$

df_2 \ df_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	199,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	254,32
2	18,5	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3.49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3.63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69

Окончание табл. П-1

df_1 / df_2	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2.22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,52
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1.74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	‘3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79.	1,55	1,10
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	

Таблица П-2. Значения t-критерия Стьюдента при уровне значимости 0,10; 0,05; 0,01 (двусторонний)

Число степеней свободы df	α			Число степеней свободы df	α		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,6041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199,	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6449	1,9600	2,5758

Таблица П-3. Статистические таблицы критических уровней при уровне значимости 0,05

Количество наблюдений	Первый коэффициент автокорреляции, $r(1)$	Модель				Граница RS-критерия	
		однопараметрическая ($m = 1$)		двухпараметрическая ($m = 2$)		нижняя	верхняя
		d_1	d_2	d_1	d_2		
10	0,360	—	—	—	—	2,67	3,69
15	0,328	1,08	1,36	0,95	1,54	2,96	4,14
20	0,300	1,20	1,41	1,10	1,54	3,18	4,49
25	0,276	1,28	1,45	1,20	1,55	3,34	4,71
30	0,257	1,35	1,49	1,28	1,57	3,47	4,89

Литература

1. **Федосеев В.В., Гармаш А.Н., Дайитбегов Д.М., Орлова И.В., Половников В.А.** Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В.В. Федосеева. М.: ЮНИТИ, 1999.
2. **Орлова И.В.** Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде EXCEL: Практикум: Учеб. пособие для вузов. М.: Финстатинформ, 2000.
3. **Горчаков А.А., Орлова И.В.** Компьютерные экономико-математические модели. М.: ЮНИТИ, 1995.
4. **Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В.** Математика в экономике: Учебник. В 2-х частях. Ч. 1. М.: Финансы и статистика, 1999.
5. **Таха Х.** Введение в исследование операций. М.: Мир, 1985.
6. **Эддоус М., Стенсфилд Р.** Методы принятия решений. М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997.
7. **Зайцев М.Г.** Методы оптимизации управления для менеджеров. Компьютерно-ориентированный подход: Учеб. пособие. М.: Дело, 2002.
8. **Красс М.С., Чупрынов Б.П.** Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: Дело, 2000.
9. **Колемаев В.А.** Математическая экономика: Учебник для вузов. М.: ЮНИТИ—ДАНА, 2002.

ОГЛАВЛЕНИЕ