

В. И. Игонин, Ю. Р. Осипов

МОДЕЛИ  
ТЕМПЕРАТУРНОГО  
И НАПРЯЖЕННОГО  
СОСТОЯНИЯ В ЭЛЕМЕНТАХ  
КОНСТРУКЦИИ  
ТУРБОНАГНЕТАТЕЛЬНЫХ  
АГРЕГАТОВ

*К1271556*

Вологда  
1995

духом и телом лопатки	... 58
5.1.5 Электрическое моделирование процесса теплообмена в потоках жидкости при двухстороннем обтекании пластины	... 64
5.1.6 Электромоделирование полей концентраций в ограждающих турбулентных струях	... 67
5.2 Определение температурных полей в охлаждаемых дефлекторных лопатках в квазисопряженной постановке	... 70
5.3 Расчет стационарного температурного поля в охлаждаемой лопатке газовой турбины методом разложения по ортогональным функциям	... 83
6. Исследование температурного состояния диска первой ступени газотурбинного двигателя	... 89
6.1 Определение стационарных полей температур электромоделированием	... 91
6.2 Методика определения стационарных температурных полей в диске методом Сперроу-Хаджи-Шейха	... 93
6.2.1 Постановка контактной задачи теплопроводности "вал-диск"	... 93
6.3 Определение нестационарных температур за эксплуатационный цикл работы двигателя	... 102
7. Оценка влияния нестационарных режимов на ресурс двигателя	... 106
7.1 Исследование температурных напряжений в лопатках	... 106
7.1.1 Оценка влияния нестационарных режимов приемистости и сброса на долговечность сопловых лопаток	... 116
7.2 Исследование напряженного состояния диска	... 120
7.2.1 Метод расчета термонапряженного состояния диска	... 123
7.2.2 Исследование напряжений в диске турбин	... 130
Литература	... 143

Одной из актуальнейших и важнейших проблем современной науки и техники являются вопросы исследования и проектирования температурных режимов и термонапряженного состояния конструкций, работающих в условиях нестационарного термомеханического нагружения.

Для обеспечения необходимого запаса прочности деталей нужно с достаточной степенью достоверности знать их термонапряженное состояние. Эта степень достоверности опирается на знание механизма протекания переходных процессов и умение исследователя вести их расчет. Тогда появляется возможность вести оценку тех или иных конструктивных решений и режимных мероприятий в свете экономической и безотказной работы оборудования. Знание механизма протекания переходных процессов и умение вести их расчет позволяет не только создавать новое оборудование, но и правильно эксплуатировать его на базе разработки надежных и быстродействующих схем автоматического регулирования и управления процессами.

Очень актуальны эти вопросы при изучении нестационарных режимов работы газотурбинных двигателей. Знание вопросов нестационарного теплообмена, теплопроводности и термических напряжений особенно нужно для охлаждаемых высокотемпературных Г.Т.У. Нестационарные термические воздействия на элементы охлаждаемых деталей турбин, в частности на такие детали как лопатки и диски, могут быть среди возможных причин отказов и неисправностей лимитирующих надежность и ресурс авиадвигателей. Эти воздействия приводят к термоусталостным разрушениям металла, из которого изготовлены эти детали.

Настоящая работа посвящена исследованию стационарных и нестационарных температурных полей и напряжений, возникающих в диске, в сопловых и рабочих лопатках и первых ступенях авиационного двигателя, работающего на различных режимах его эксплуатационного цикла. Это режимы запуска, приемистости останова двигателя. Экспериментальные методы исследования этих быстропротекающих процессов не всегда реализуемы из-за трудности и сложности эксперимента по определению термонапряженного состояния вращающихся изделий (рабочие лопатки, диски) или из-за достаточно малой толщины стенок (сопловые лопатки). В этих условиях

сочетание эксперимента и численных методов расчета наиболее достоверно отражают действительную картину явлений и процессов, идущих в лопатках и дисках. Однако экспериментальные работы требуют значительных средств, и количество их можно сократить, если провести численный эксперимент на электронно-вычислительных машинах, тем самым получить значительный экономический эффект.

## 1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Наряду с чисто экспериментальными методами определения теплового и напряженного состояния тел, в инженерной практике широко применяют расчетные методы исследований. Особенно это удобно, когда граничные условия заданы на основе экспериментальных данных.

Так как при изучении теплового состояния лопаток и дисков Г.Т.У. приходится чаще всего решать третью краевую задачу теплопроводности, то экспериментально определяют коэффициенты теплоотдачи и температуры теплоносителей, омывающих изучаемые детали. А далее расчетным путем находят градиенты температур в металле и на их основе температурные напряжения. Из расчетных методов теории теплопроводности получили наибольшее распространение, из-за их универсальности, методы конечных разностей [5, 18, 43, 62, 69, 80, 97], конечных элементов [48, 66, 82].

Эти методы позволяют решать как стационарные, так и нестационарные задачи теплопроводности, а также задачи термоупругости и термопластичности [129]. Теория этих методов изложена во многих работах. Однако, наиболее надежными и проверенными на практике являются методы электромоделирования, которые позволяют решить широкий круг задач теплофизики как линейных, так и нелинейных с меняющимися в пространстве граничными условиями теплообмена и рекомендуются к использованию [45, 49, 52]. Однако, недостатком их является требуемое наличие аналоговых вычислительных машин и значительная трудность получения решения для трехмерных нестационарных задач теплопроводности с переменными во времени граничными условиями. В какой-то мере эти недостатки позволяет устранить предложенный проф. Темниковым квазианалоговый метод электромоделирования температурных полей [71, 157]. Этот метод позволяет расширить класс решаемых на электромоделях задач—это задачи по определению температур в быстродвижущихся относительно друг друга телах [158]. Эти методы были применены в настоящей работе к исследованию нестационарного теплового состояния лопаток и дисков г.т.у. авиационного двигателя, работающего на переходных режимах [159]. Термонапряженное состояние изучаемых изделий в настоящее время определяют, решая плоские задачи термоупругости и термопластичности, используя вариационные принципы и постановки [6, 7], а так

же методами электро моделирования [71,105]. Однако, наибольшее распространение получили методы, полученные из теории сопротивления материалов (например, формула Биргера-Малинина) [7,109,110,178]. Преимущество этого метода в сравнении с другими состоит в его простоте. Он позволяет учитывать зависимость модуля упругости и коэффициента линейного расширения от температуры, геометрию тела, может быть применим для цельных и полых лопаток [111,112].

Определяются, обычно, радиальные напряжения в одном из сечений лопатки, отстоящих на величину не менее  $1/3$  ее высоты. Зависимости для выведены также с учетом действия центробежных сил в исследуемом сечении лопатки [26,46]. Одномерность задачи и ограничения выбора исследуемых сечений по высоте лопатки можно отнести к недостаткам метода. Метод изложен в разделе 7 настоящей работы, т.к. использован для определения термических напряжений в полых и цельных лопатках.

Для определения напряжений в диске наиболее популярней метод, изложенный в работе [46,47]. Определяются этим методом радиальные и тангенциальные напряжения как термические, так и от динамических сил. К этому можно добавить также еще то, что можно, правда итеративным путем, но вычислять напряжения в неравномерно нагретом диске произвольного профиля с центральным отверстием.

Указанные методы расчета термоупругих напряжений в дисках и лопатках г.т.у., с помощью теорий малых пластических деформаций, широко используют для определения термопластических деформаций с учетом ползучести материала, из которого изготовлены изделия [3,7,46,47,180].

Однако, в настоящее время, в связи с интенсификацией силовых процессов для получения значительных мощностей и увеличения экономичности термодинамического цикла, за счет поднятия уровня используемых температур теплоносителей, требуется решение двумерных задач о термонапряженном состоянии деталей г.т.у. Это позволит иметь более подробное поле напряжений и перейти к его проектированию по заданному температурному состоянию. Однако, это требует сложных алгоритмов и мощных вычислительных средств.

Для оценочных расчетов применение таких средств нецелесообразно. Термонапряженное состояние дисков г.т.у. излагается в разделе 7.

Использование полученных в работе алгоритмов и прог-

рами позволяет вести расчет с помощью кривых деформирования металла изделий, суммарные пластические деформации за весь цикл нагружения. А далее по зависимостям, приведенным в работе [7,121], оценить ресурс работы изделия. В настоящей работе сделана попытка оценить ресурс сопловой лопатки первой ступени двигателя, состояние которой оказывает значительное влияние на общий ресурс двигателя [93, 94].

## 2. КОНСТРУКТИВНЫЕ СХЕМЫ ОХЛАЖДЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ГАЗОТУРБИННОГО АГРЕГАТА

В работе поставлена задача исследовать температурное и напряженное состояние следующих элементов двигателя: диска, сопловой и рабочей лопаток первой ступени турбины, рабочей лопатки второй ступени. Эти исследования проведены для различных рабочих режимов.

На рис.2.1 даны относительные характеристики рабочих режимов. Они заданы в виде графика. Этот график показывает зависимость положения руля управления двигателя р.у.д. в градусах от безразмерного времени  $t_i/t_{\max} = \bar{T}_i$ , за которое осуществляется эксплуатационный цикл работы изделия. Зависимость представляет собой пилообразную кривую. Зубцы кривой характеризуют продолжительность выдержки по времени руля управления на четырех базовых режимах. Это режимы: I—малого газа, II—семидесятипроцентной от номинальной мощности, III—максимальной мощности, IV—крейсерские режимы.

По промежуточному положению руля, не соответствующему положениям  $\alpha_I$  р.у.д. = 9 град.,  $\alpha_{II}$  р.у.д. = 48,5 град.,  $\alpha_{III}$  р.у.д. = 72 град.,  $\alpha_{IV}$  р.у.д. = 110 град., можно судить о времени переходных режимов.

Качественно эксплуатационный цикл состоит из следующих этапов: относительного времени запуска  $\bar{T}_{\text{зап.}}$ , прогрева  $\Delta \bar{T}_{\text{прогр}}$ , приемистости  $\Delta \bar{T}_{\text{пр}}$ , руления и взлета  $\Delta \bar{T}_{\text{рул}} + \Delta \bar{T}_{\text{взл}}$ , полета и посадки  $\Delta \bar{T}_{\text{пол}} + \Delta \bar{T}_{\text{пос}}$ . Крейсерские режимы различаются относительной высотой  $\bar{H}$ , на которой идет полет.

Требуется определить:

1. Стационарные температурные поля в диске на режимах малого газа (режим I), на семидесятипроцентной от номинальной нагрузки (режим II), максимальной (режим III) и полетной нагрузках (режим IV).
2. Нестационарные температурные поля в диске за весь эксплуатационный цикл.
3. Нестационарные температурные поля и напряжения в диске и лопатках указанных типов на режиме приемистости двигателя.

Рассмотрим систему охлаждения диска рабочего колеса первой ступени изделия рис.2.2.

Охлаждающий тракт, в данном случае, представляет собой сложную, разветвленную гидравлическую сеть со значи-



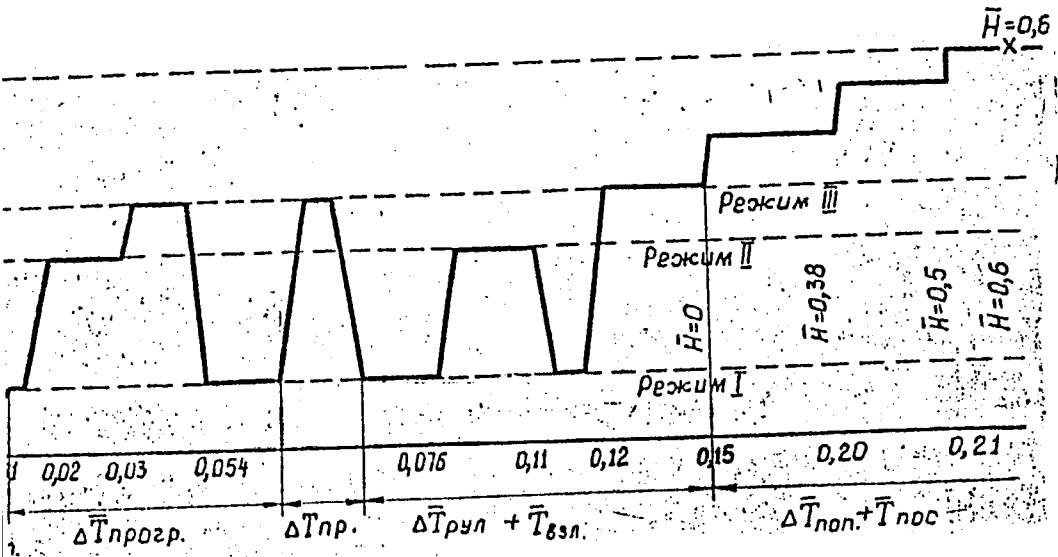
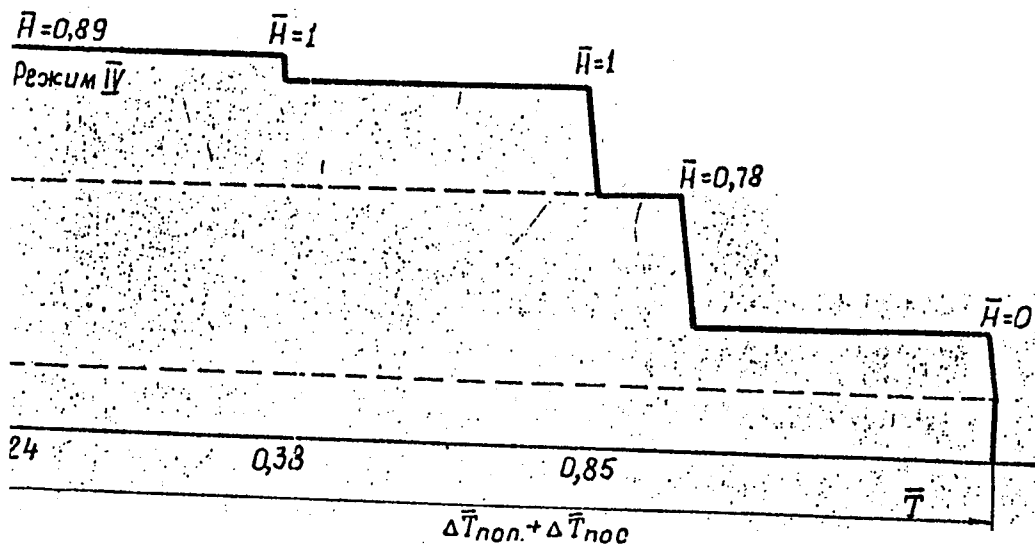


рис. 2.1. Эксплуатационный цикл работы двигателя



• 2.1. Эксплуатационный цикл работы двигателя (продолжение)

тельным числом разветвлений и узловых точек и существенным изменением параметров среды по течению.

Поток охлаждающегося воздуха в точке "А" разветвляется на потоки  $G_1$  и  $G_2$ . Поток  $G_1$  движется радиально между левой поверхностью диска и вращающимся вместе с ним экраном. В точке "Б" часть его  $G_3$  поступает в охлаждаемую лопатку дефлекторного типа, а часть  $G_4$  продувается через монтажные зазоры хвостовика. В точке "В" к  $G_4$  подмешивается некоторое количество горячего газа из проточной части  $G_{11}$ . Часть суммарного потока  $G_6$  поступает в топку "Г", а часть  $G_5$  уходит из системы охлаждения диска. В точку "Г" поступает также разность потоков  $G_2$  и  $G_7$  равная  $G_8$ . В кольцевой зазор между валом и диском, участок "Ж-З" поступает какое-то количество воздуха  $G_{10}$  из компрессора газовой турбины.

На рис. 2.3 представлены схемы охлаждения исследованных типов лопаток. На рис. 2.3 а, б изображено сечение рабочей и сопловой лопатки дефлекторного типа. Воздух струями вытекает из носика дефлектора.

После удара о внутреннюю поверхность входной кромки газовый поток разворачивается и входит в междефлекторный канал, прижимаясь к поверхности охлаждения. Затем он выбрасывается в проточную часть. Схема "а" и "б" отличаются тем, что во втором случае дефлектор лопатки перфорирован по длине канала охлаждения. Перфорация позволяет эффективно охлаждать лопатку потоком воздуха переменной массы.

Третий тип исследованных лопаток — рабочие лопатки второй ступени турбины. Они охлаждаются лишь только через хвостовик. На рис. "в" изображено плоское профильное ее сечение.

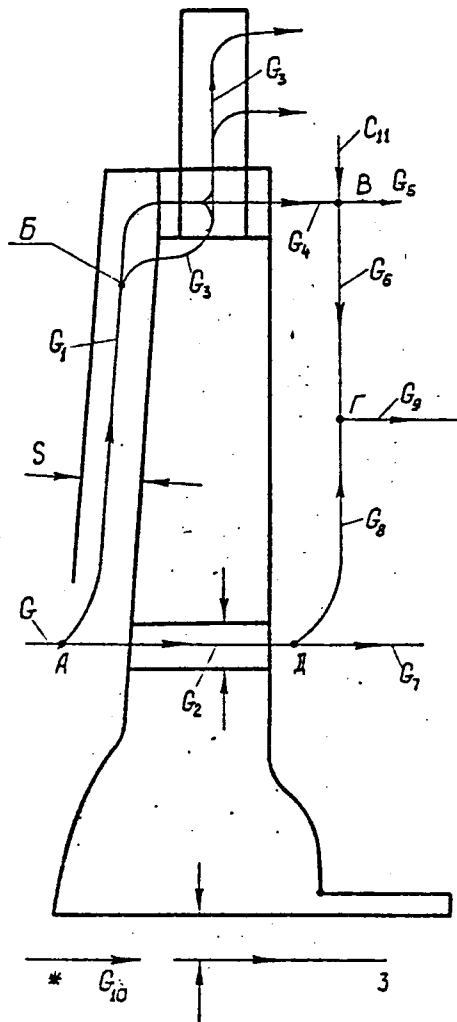


рис.2.2. Потoki хладоагента в диске

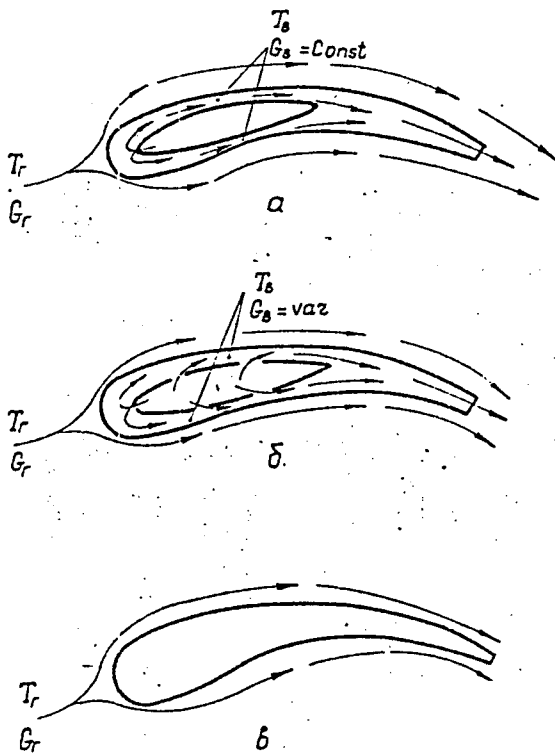


рис.2.3. Схемы охлаждения исследованных типов лопаток

- а) Рабочая лопатка с поперечным течением охладителя постоянной массы
- б) Сопловая лопатка с поперечным течением охладителя переменной массы
- в) Неохлаждаемая рабочая лопатка

### 3. ОБЩИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛИРОВКИ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ПРИ ТЕПЛОБМЕНЕ ЕГО С ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА

В настоящей работе исследуется теплообмен и теплопроводность в дисках и лопатках газотурбинных установок. Поскольку диск и лопатка неправильной формы, то удобно выбрать систему координат, в которой надо решать задачу нестационарного теплообмена [8, 24, 86, 153].

Рассмотрим формулировку задачи теплообмена твердое "тело-жидкость" сначала в общем виде, в независимости от системы координат, затем в ортогональных криволинейных координатах и в цилиндрической системе координат, которая как частный случай вытекает из криволинейной ортогональной системы.

#### 3.1. Формулировка сопряженной задачи тело-жидкость в общем виде

Пусть некоторое твердое тело, имеющее объем  $\Omega$  и ограниченное поверхностью  $S$  находится в потоке жидкости или газа (рис. 3.1).

Процесс нестационарной теплопроводности в изотропном теле в общем случае описывается нелинейным дифференциальным уравнением Фурье [28, 95, 96]:

$$c_{p1} \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda_1 \operatorname{grad} T_1) + q_{12} \quad (3.1)$$

с начальным условием

$$t = 0 \quad ; \quad T_1 = T_1(M) \quad , \quad (3.2)$$

где  $M$  — точка с координатами  $x, y, z$ ;  $M \in \Omega$  с физическими условиями

$$\rho_1 = \rho_1(T_1) \quad , \quad c_{p1} = c_{p1}(T_1) \quad , \quad \lambda_1 = \lambda_1(T_1) \quad (3.3)$$

Процесс теплообмена в потоке вязкой сжимаемой однофазной и изотропной жидкости, когда работа внешних сил и кинетическая энергия потока мало меняются по сравнению с его энтальпией, а коэффициент вязкости  $\mu$  зависит от температуры, описывается следующей системой уравнений:

1. Уравнение энергии Фурье-Кирхгофа

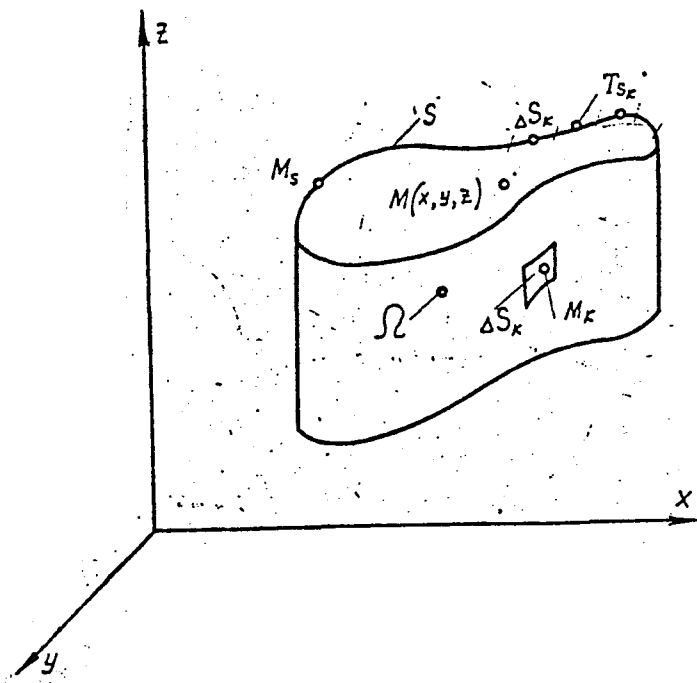


рис.3.1. К математической модели теплового состояния тела

$$c_p \rho \frac{dT_2}{dt} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T_2) + q_{v_2} + \Phi_v, \quad (3.4)$$

где  $\Phi_v$  — диссипативная функция.

2. Уравнение движения Навье-Стокса

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \bar{v} \times \operatorname{rot} \bar{v} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 \right) = \rho \bar{F} - \operatorname{grad} P + \\ + \frac{4}{3} \operatorname{grad}(\mu \operatorname{div} \bar{v}) + \operatorname{grad}(\bar{v} \operatorname{grad} \mu) - \bar{v} \nabla^2 \mu + \\ + \operatorname{grad} \mu \times \operatorname{rot} \bar{v} - \operatorname{div} \bar{v} \operatorname{grad} \mu - \operatorname{rot} \mu \bar{v}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

3. Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0. \quad (3.6)$$

4. Уравнение состояния

$$\rho = \rho(P, T_2). \quad (3.7)$$

5. Зависимость коэффициента динамической вязкости от температуры

$$\mu = \mu(T_2). \quad (3.8)$$

Система из шести уравнений (3.4), (3.5), (3.6) и (3.7) содержит 6 неизвестных:  $T_2$ ,  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ ,  $P$ ,  $\rho$  и является замкнутой. (Уравнение (3.7) отнесем к уравнениям, входящим в физические условия). Кроме этого, к этой системе уравнений необходимо присовокупить краевые условия: начальные условия, т.е. значения всех искомых функций в начальный момент времени  $t=0$ , и граничные условия. Граничные условия состоят в задании значений искомых переменных на границе области, занятой жидкостью, вдали от твердого тела, а также так называемых условий сопряжения на границе с твердым телом [19, 32, 100, 131].

Если считать контакт жидкости с твердым телом идеальным (отсутствие накипи или окисной пленки на поверхности тела), то условия сопряжения состоят в задании равенства температур и тепловых потоков для твердого тела и жидкости на поверхности, т.е.

$$T_{1/s} = T_{2/s} \quad (3.9)$$

и



$$\lambda_1 \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_s = \lambda \left( \frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_s \quad (3.10)$$

В случае чисто внутренней задачи или в смешанной задаче, когда одновременно имеет место и внутреннее, и внешнее обтекание (например, при теплопередаче через стенку трубчатого теплообменника) задачи в принципе описываются теми же выше приведенными уравнениями. Усложняются же лишь граничные условия, которые, как правило, становятся условиями смешанного типа. На поверхностях твердого тела, омываемых подвижными средами по-прежнему следует задавать условия сопряжения вида (3.9) и (3.10).

Задача в такой сопряженной постановке является наиболее правильно поставленной, в противоположность постановке задачи с использованием граничных условий третьего рода, т.е. путем задания коэффициентов теплоотдачи от теплоносителей к твердой стенке [29, 149].

Следует, однако, указать еще на существенную ограниченность приведенной выше математической постановки задачи о теплообмене для реальных процессов.

Дело в том, что на практике, особенно при изучении современных высокоинтенсивных процессов теплоотдачи, в большинстве случаев приходится встречаться с турбулентным режимом течения теплоносителей.

И хотя приведенная система уравнений в актуальных величинах верна как для ламинарного, так и для турбулентного движения, воспользоваться ей для изучения теплообмена в турбулентном потоке практически не удастся.

Турбулентное течение, в виду его беспорядочности, приходится рассматривать в осредненных, а не актуальных величинах, поэтому исходную систему уравнений необходимо тем или иным образом осреднить.

Однако, после осреднения в системе уравнений появляются новые члены в виде моментов второго и более высокого порядка между пульсационными составляющими переменных задачи.

Эти члены, которые при таком способе описания движения, можно придать смысл дополнительных турбулентных напряжений, оказываются новыми неизвестными, и исходная система уравнений становится разомкнутой. Для замыкания этой системы возникает необходимость в привлечении новых соотношений, которые обычно устанавливаются на основе так называемых полуэмпирических теорий турбулентности.

В целом задача настолько усложняется, что становится невозможным рассмотреть ее в общем случае и приходится ограничиваться изучением лишь достаточно простых частных случаев теплообмена. Даже проблема привлечения упомянутых полуэмпирических теорий турбулентности более или менее строго решается лишь для простейших квазистационарных течений. Для нестационарных течений достаточно обоснованные теории находятся еще в стадии развития [82, 83, 89, 90, 92, 98, 189, 190].

Существенным препятствием для решения сопряженных задач в строгой постановке является их чрезвычайная сложность и недостаточное развитие методов их исследования.

В настоящей работе показано, что применение квазианалоговых методов электрического моделирования подвижных температурных полей, предложенных А.В.Темниковым, позволяет заметно облегчить решение подобных задач [164-169].

Другим способом упрощения решения подобных задач является одномерный способ описания процессов теплообмена в каналах и пограничном слое [82, 83]. При таком способе переменные величины, характеризующие теплоноситель, осредняются по живому сечению канала. Вводятся среднemasсовая скорость, среднemasсовая температура или среднemasсовая энтальпия потока. При этом все основные уравнения для потока существенно упрощаются и принимают вид:

1. Уравнение движения

$$\frac{G}{U} \frac{\partial U}{\partial t} + G \frac{\partial U}{\partial Z} = f \bar{p} F_z - f \frac{\partial P}{\partial Z} - \xi \frac{\rho U^2}{2d_3} f. \quad (3.11)$$

2. Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} f + \frac{\partial G}{\partial Z} = 0. \quad (3.12)$$

3. Уравнение энергии

$$\frac{G C_p \partial \delta}{U \partial t} + G C_p \frac{\partial \delta}{\partial Z} = \alpha U (T_{1s} - \delta), \quad (3.13)$$

где коэффициент местного гидравлического сопротивления и коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  находятся либо экспериментально, либо из решения вспомогательных задач теплообмена.

Задачу решения системы уравнений (3.11) → (3.13) совместно с уравнением теплопроводности (3.1) для твердого тела (при соответствующем начальном условии (3.2)) мы бу-

дем называть квазисопряженной.

Наконец, в инженерной практике очень распространен способ определения нестационарных температурных полей в твердом теле при задании граничных условий третьего рода

$$-\lambda_1 \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_s = \alpha (T_{1s} - \delta), \quad (3.14)$$

где коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  часто рассматривается как функция точки поверхности  $S$  и времени  $t$ , т.е.

$$\alpha = \alpha(S, t) \quad (3.15)$$

или как функция температур поверхности тела  $T_{1s}$  и среды  $\delta$ , т.е.

$$\alpha = \alpha(T_{1s}, \delta). \quad (3.16)$$

В зависимость (1.15) часто включаются также свойства поверхности тела (при излучении).

Иногда ограничиваются зависимостью коэффициента теплоотдачи от среднemasсовой скорости потока, т.е.

$$\alpha = \alpha(U). \quad (3.17)$$

Эти соотношения, вид которых устанавливается в зависимости от характера задачи находят также либо экспериментальным путем, либо в результате решения задач, близких к исследуемой.

Такой подход в последние годы подвергается серьезной критике [82, 98] особенно в применении к нестационарным задачам. Тем не менее, он завоевал себе прочное место в инженерной практике и используется также и в настоящей работе. Некоторым оправданием такого положения служит то, что при указанном способе описания явлений, мы получаем результаты, удовлетворяющие потребностям инженерных разработок [153].

## 3.2. Дифференциальные операторы поля в ортогональных системах координат

### 3.2.1. Криволинейные координаты

Во многих задачах удобнее определить положение точки  $M$  пространства не тремя декартовыми координатами  $x, y, z$ , а тремя другими числами, более отвечающими требованиям рассматриваемой частной задачи.

Положение точки  $M$  (рис.3.2) можно задать любой тройкой чисел  $q_1, q_2, q_3$  связанных взаимно однозначным функциональным соответствием с координатами  $x, y, z$ . В параметрическом виде это соответствие выглядит:

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3); \\ y &= y(q_1, q_2, q_3); \\ z &= z(q_1, q_2, q_3). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Аналогичная векторная функция запишется так

$$\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, q_3). \quad (3.19)$$

Построим элемент тела в точке  $M$  пространства в криволинейной ортогональной системе координат. Его образуют координатные линии, координатные поверхности.

Изменяя только один из параметров  $q_i$ , получим некоторые кривые линии - называемые координатами  $(q_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Каждая координатная линия представляет собой годограф вектора-функции  $\bar{r}(q)$ , т.е. кривую в пространстве, когда начало координат  $r(q)$  помещено в фиксированную точку пространства  $O$ , рис.3.2. Касательные к координатным линиям в точке  $M$ , направленные в сторону возрастания отдельных координатных линий, есть координатные оси  $X_i$ .

Полный дифференциал от выражения (3.19) запишется в виде формулы:

$$d\bar{r} = H_1 dq_1 e_1 + H_2 dq_2 e_2 + H_3 dq_3 e_3, \quad (3.20)$$

здесь

$$H_i = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.21)$$

-модуль от производной данной векторной функции по скалярному аргументу,

$$\Delta \bar{r} = e_1 x(q_1) + e_2 y(q_2) + e_3 z(q_3)$$

-приращение вектора функции вдоль координатной линии,

$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}$  - частная производная вектора в точке  $M$ ,  $e_1, e_2, e_3$  - орты, которые попарно ортогональны. В декартовой системе векторы  $e_1, e_2, e_3$  постоянны для всех точек пространства и равны соответственно  $i, j, k$ . Во всякой другой системе они будут изменять свои направления при переходе от одной точки  $M$  к другой, например,  $M_1$ .

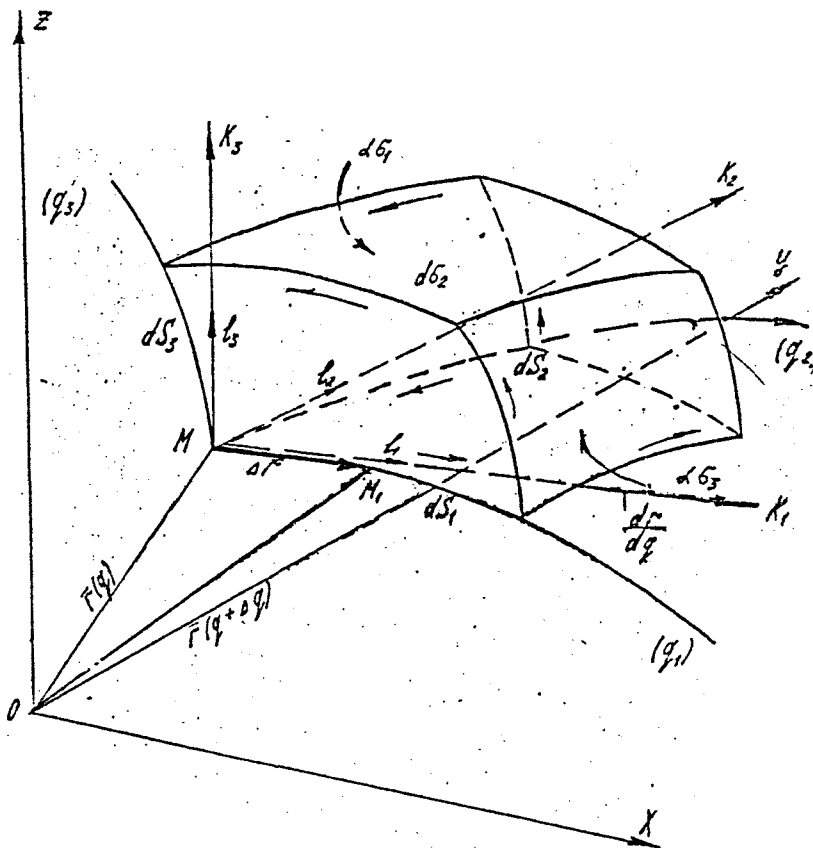


рис.3.2. Элемент тела в криволинейной ортогональной системе координат

Определим приращение вектора функции вдоль координатной линии  $(q_i)$ . Дифференциал дуги  $dS$ , координатной линии  $(q_i)$  равен модулю частного дифференциала по аргументу

$$dS_i = |dq_i \bar{r}| = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right| dq_i = H_i dq_i. \quad (3.22)$$

В ортогональной системе координат дифференциал  $dS$ , произвольно ориентированной дуги, складывается из дифференциалов дуг координатных линий по правилу прямоугольного параллелепипеда

$$dS^2 = dS_1^2 + dS_2^2 + dS_3^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2. \quad (3.23)$$

Уравнение координатной поверхности  $[q_i]$  сформируется из выражений (3.18) и (3.19) при одной постоянной координате и переменных двух других. В случае ортогональной системы координат через каждую точку  $M$  можно провести три взаимно перпендикулярные координатные плоскости. Каждая координатная линия  $(q_i)$  будет перпендикулярна к соответствующей ей ортогональной поверхности  $[q_i]$ . Попарным перемножением дифференциалов дуг координатных линий получим элементарные координатные площади  $d\sigma_i$

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= dS_2 dS_3 = H_2 H_3 dq_2 dq_3; \\ d\sigma_2 &= dS_3 dS_1 = H_3 H_1 dq_3 dq_1; \\ d\sigma_3 &= dS_2 dS_1 = H_3 H_1 dq_3 dq_1. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Для элемента объема

$$d\tau = dS_1 dS_2 dS_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (3.25)$$

Системы цилиндрических и сферических координат служат примером ортогональных криволинейных систем координат.

В цилиндрических координатах положение точки  $M$  пространства определяется тремя координатами

$$q_1 = \rho, \quad 0 \leq \rho < +\infty, \quad q_2 = \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad q_3 = z, \quad -\infty < z < +\infty. \quad (3.26)$$

Координатными поверхностями являются:

- $[\rho]$  - круговые цилиндры с осью  $OZ$ ;
- $[\varphi]$  - полуплоскости, примыкающие к оси  $OZ$ ;
- $[z]$  - плоскости, перпендикулярные оси  $OZ$ .

Координатными линиями являются: линии  $(\rho)$  - лучи,

перпендикулярные оси  $OZ$  и имеющие начало на этой оси; линии ( $\mathcal{E}$ ) – окружности с центром на оси  $OZ$ , лежащие в плоскостях, перпендикулярных этой оси; линии ( $\mathcal{Z}$ ) – прямые, параллельные оси  $OZ$  рис.3.3.

Связь декартовых координат с цилиндрическими определяется формулами

$$x = r \cos \mathcal{E}; \quad y = r \sin \mathcal{E}; \quad z = z; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.27)$$

В сферических координатах положение точки  $M$  пространства определяется следующими координатами:

$$q_1 = R; \quad 0 \leq R < +\infty; \quad q_2 = \Theta; \quad 0 \leq \Theta \leq \pi; \quad q_3 = \mathcal{E}; \quad 0 \leq \mathcal{E} < 2\pi. \quad (3.28)$$

Координатными поверхностями являются (рис.3.4)

[ $R$ ] = const – сферы с центром в точке  $O$

[ $\Theta$ ] = const – круговые полуконусы с осью  $OZ$

[ $\mathcal{E}$ ] = const – полуплоскости, примыкающие к оси  $OZ$

Координатными линиями являются:

линии ( $R$ ) – лучи, выходящие из точки  $O$

линии ( $\Theta$ ) – меридианы на сфере

линии ( $\mathcal{E}$ ) – параллели на сфере.

Связь декартовых координат со сферическими определяется формулами

$$x = R \cos \mathcal{E} \sin \Theta; \quad y = R \sin \mathcal{E} \sin \Theta; \quad z = R \cos \Theta. \quad (3.29)$$

Элементы площадей и координатных поверхностей можно получить в цилиндрической и сферической системах координат, используя зависимости (3.18), (3.24), (3.25), (3.26), (3.27).

В цилиндрических координатах в силу (3.26) и (3.27) имеем

$$H_1 = H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = 1; \quad ;$$

$$H_2 = H_{\mathcal{E}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \mathcal{E}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mathcal{E}}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mathcal{E}}\right)^2} = \rho; \quad ;$$

$$H_3 = H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1. \quad .$$

В сферических координатах, подставляя (3.28) и (3.27) в (3.21), имеем

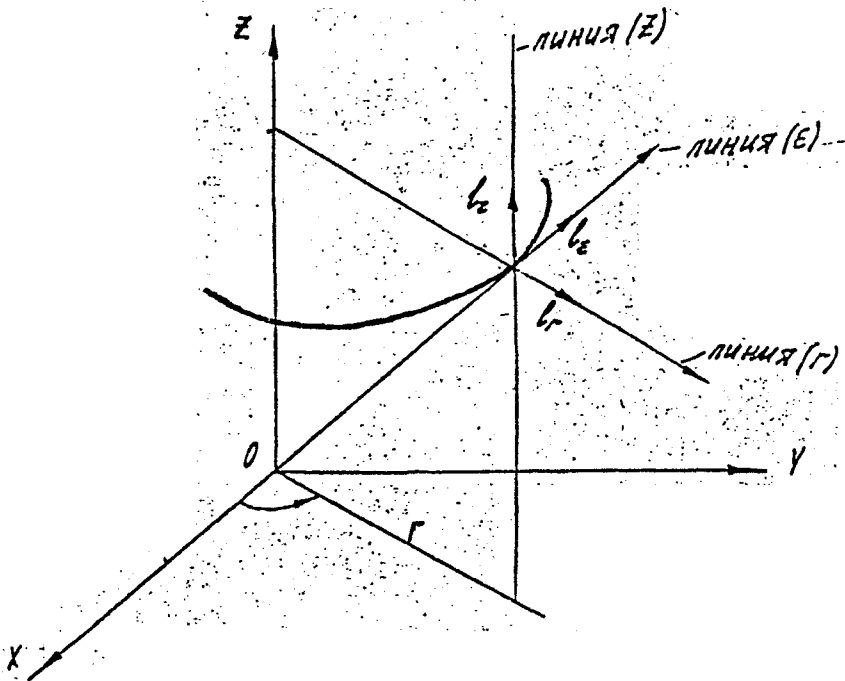


рис. 3.3. Координатные линии в цилиндрической системе координат



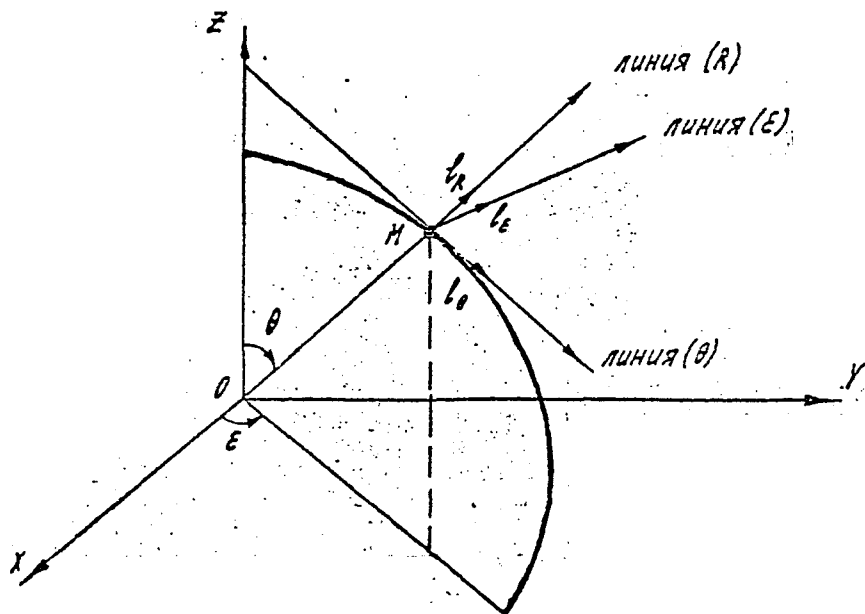


рис.3.4. Координатные линии в сферической системе координат

$$H_1 = H_R = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial R}\right)^2} = 1;$$

$$H_2 = H_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = R;$$

$$H_3 = H_\epsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \epsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \epsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \epsilon}\right)^2} = R \sin \theta.$$

Элементы площадей и координатных плоскостей можно свести в таблицу 3.1.

Элементы площадей и координатных плоскостей.

Таблица 3.1.

Координаты криволинейные ортогональные	Координатные поверхности	Элементы площадей и объемов
Общие $a_1, a_2, a_3$	$c_1 = c = \text{const}$ $a_2 = c = \text{const}$ $a_3 = c = \text{const}$	$d\sigma_1 = H_2(c, a_2, a_3) H_3(c, a_2, a_3) da_2 da_3$ $d\sigma_2 = H_3(c, a_1, c) H_1(a_1, c, a_3) da_1 da_3$ $d\sigma_3 = H_1(a_1, a_2, c) H_2(a_1, a_2, c) da_1 da_2$ $d\tau = H_1 H_2 H_3 da_1 da_2 da_3$
Цилиндрические $a_1 = r$ $a_2 = \epsilon$ $a_3 = z$	$r = c = \text{const}$ $\epsilon = c = \text{const}$ $z = c = \text{const}$	$d\sigma = cd\epsilon dz$ $d\sigma = dr dz$ $d\sigma = r dr d\epsilon$ $d\tau = r dr d\epsilon dz$
Сферические $a_1 = R$ $a_2 = \theta$ $a_3 = \epsilon$	$R = c = \text{const}$ $\theta = c = \text{const}$ $\varphi = c = \text{const}$	$d\sigma = c^2 \sin \theta d\theta d\epsilon$ $d\sigma = R \sin \theta dR d\epsilon$ $d\sigma = R dR d\theta$ $d\tau = R^2 \sin \theta dR d\theta d\epsilon$

### 3.2.2. Основные операции векторного анализа в ортогональных координатах

Задано скалярное поле  $U = U(x, y, z)$  в данной точке  $M$ .

Тогда

$$\overline{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Оператор Лапласа

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

В координатах  $U = U(q_1, q_2, q_3)$

$$\overline{\text{grad}} U = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} e_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} e_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} e_3.$$

Оператор Лапласа

$$\nabla^2 U = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \right].$$

В цилиндрических координатах  $U = U(r, \varepsilon, z)$

$$\overline{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} e_\varepsilon + \frac{\partial U}{\partial z} e_z.$$

Оператор Лапласа

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

В сферических координатах  $U = U(R, \theta, \varepsilon)$

$$\overline{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial R} e_R + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} e_\varepsilon.$$

Оператор Лапласа

$$\nabla^2 U = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon^2}.$$

Задано векторное поле в декартовых координатах

$$\vec{a} = a_1(x, y, z) \mathbf{i} + a_2(x, y, z) \mathbf{j} + a_3(x, y, z) \mathbf{k},$$

тогда

$$\text{div} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}, \quad \text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Определитель раскрывается по элементам первой строки.

Векторное поле задано в ортогональных криволинейных координатах

$$\vec{a} = a_1(q_1, q_2, q_3) \mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3) \mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3) \mathbf{e}_3,$$

тогда

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right];$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{H_2 H_3} \mathbf{e}_1 & \frac{1}{H_1 H_3} \mathbf{e}_2 & \frac{1}{H_1 H_2} \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1 H_1 & a_2 H_2 & a_3 H_3 \end{vmatrix}.$$

В цилиндрической системе координат

$$\vec{a} = a_1(r, \varepsilon, z) \mathbf{e}_r + a_2(r, \varepsilon, z) \mathbf{e}_\varepsilon + a_3(r, \varepsilon, z) \mathbf{e}_z;$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_1)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial a_3}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varepsilon & \frac{1}{r} \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & r a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

В сферических координатах

$$\vec{a} = a_1(R, \theta, \varepsilon) \mathbf{e}_R + a_2(R, \theta, \varepsilon) \mathbf{e}_\theta + a_3(R, \theta, \varepsilon) \mathbf{e}_\varepsilon;$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial(a_1 R^2)}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial(a_2 \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial a_3}{\partial \varepsilon};$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{R^2 \sin \theta} \mathbf{e}_R & \frac{1}{R \sin \theta} \mathbf{e}_\theta & \frac{1}{R} \mathbf{e}_\varepsilon \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \\ a_1 & R a_2 & a_3 R \sin \theta \end{vmatrix}.$$

3.3. Система уравнений сопряженного теплообмена  
твердое тело — жидкость в различных  
системах координат

Уравнение движения Навье-Стокса через составляющие скорости  $U_x, U_y, U_z, \rho = \text{const}, \mu = \text{const}$  в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) &= \rho q_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 U_x; \\ \rho \left( \frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) &= \rho q_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 U_y; \\ \rho \left( \frac{\partial U_z}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) &= \rho q_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 U_z. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0. \quad (3.31)$$

Уравнение Фурье-Кирхгофа  $\rho = \text{const}, \lambda = \text{const}, \mu = \text{const}$ , при  $C_p = C_v$

$$\rho C_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + U_x \frac{\partial T}{\partial x} + U_y \frac{\partial T}{\partial y} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \Phi_v. \quad (3.32)$$

Уравнение теплопроводности

$$c_p \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \right) + q_v. \quad (3.33)$$

Условия сопряжения на поверхности

$$T|_s = T_1|_s; \quad \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = \lambda_1 \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_s. \quad (3.34)$$

Компоненты потока тепла

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Начальные условия

$$\begin{aligned} t=0; \quad T_1 &= T_1(x, y, z); \\ T &= T(x, y, z); \\ U_x &= U_x(x, y, z); \quad P = P(x, y, z); \\ U_y &= U_y(x, y, z); \\ U_z &= U_z(x, y, z). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Граничные и физические условия формируются для частных случаев задачи.

В сферической системе координат  $R, \theta, \epsilon$  система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial R} + \frac{v_r}{R} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\epsilon}{R \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \epsilon} - \frac{v_\theta^2 + v_\epsilon^2}{R} \right) = \\ & = - \frac{\partial p}{\partial R} + \mu \left( \nabla^2 v_r - \frac{2}{R^2} v_r - \frac{2}{R^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{R^2} v_\theta \operatorname{ctg} \theta - \right. \\ & \left. - \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\epsilon}{\partial \epsilon} \right) + \rho g_r; \quad \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial R} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. + \frac{v_\epsilon}{R \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \epsilon} + \frac{v_r v_\theta}{R} - \frac{v_\epsilon^2 \operatorname{ctg} \theta}{R} \right) = - \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ & + \mu \left( \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{R^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{R^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\epsilon}{\partial \epsilon} \right) + \rho g_\theta; \quad (3.36) \\ & \rho \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\epsilon}{\partial R} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\epsilon}{\partial \theta} + \frac{v_\epsilon}{R \sin \theta} \frac{\partial v_\epsilon}{\partial \theta} + \frac{v_\theta v_r}{R} + \right. \\ & \left. + \frac{v_\theta v_\epsilon}{R} \operatorname{ctg} \theta \right) = - \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \epsilon} + \mu \left( \nabla^2 v_\epsilon - \frac{v_\epsilon}{R^2 \sin^2 \theta} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \epsilon} + \frac{2 \cos \theta}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \epsilon} \right) + \rho g_\epsilon. \end{aligned}$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 v_r) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \quad (3.37)$$

$$\text{Уравнение Фурье-Кирхгофа} \quad + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \epsilon} v_\epsilon = 0.$$

$$\begin{aligned} \rho C_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\epsilon}{R \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \epsilon} \right) &= \lambda \left[ \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \frac{\partial T}{\partial R}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta}) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \epsilon^2} \right]. \quad (3.38) \end{aligned}$$

Уравнение теплопроводности

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial T_1}{\partial t} &= \lambda_1 \left[ \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \frac{\partial T}{\partial R}) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \epsilon} (\sin \theta \frac{\partial T_1}{\partial \epsilon}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] + q_v. \quad (3.39) \end{aligned}$$

Условия сопряжения, начальные и граничные условия имеют подобный вид, что и в декартовой системе координат.

Компоненты потока тепла

$$q_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}; \quad q_\theta = -\lambda \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta}; \quad q_\varepsilon = -\lambda \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}.$$

В цилиндрической системе координат  $(r, \varepsilon, z)$  уравнения примут вид:

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varepsilon^2}{r} \right) =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) + \rho g_r;$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + v_z \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial z} - \frac{v_r v_\varepsilon}{r} \right) =$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} + \mu \left( \nabla^2 v_\varepsilon - \frac{v_\varepsilon}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \rho g_\varepsilon; \quad (3.40)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varepsilon} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu (\nabla^2 v_z) +$$

$$+ \rho g_z;$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0; \quad (3.41)$$

$$\frac{\rho v_\varepsilon^2}{r} \quad - \text{центробежная сила}; \quad (3.42)$$

$$\frac{\rho v_z v_\varepsilon}{r} \quad - \text{сила Кориолиса}; \quad (3.43)$$

$$\rho g \quad - \text{сила тяжести}. \quad (3.44)$$

Уравнение Фурье-Кирхгофа в этой же системе координат:

$$\rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) =$$

$$(3.45)$$

$$= \lambda \nabla^2 T + \Phi_v + q_v.$$

Уравнение теплопроводности

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]. \quad (3.46)$$

Компоненты потока тепла

$$q_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}; \quad (3.47)$$

$$q_\varepsilon = -\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}; \quad (3.48)$$

$$q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (3.49)$$

Граничные и начальные условия подобны по виду условиям, взятым в декартовой системе координат.

В ортогональной криволинейной системе координат  $q_1, q_2, q_3$  эта же система уравнений запишется, если  $U_{q_3} = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial q_3} = 0$ ,  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  [92]

$$\rho \left( \frac{\partial U_{q_1}}{\partial t} + \frac{U_{q_1}}{H_1} \frac{\partial U_{q_1}}{\partial q_1} + \frac{U_{q_2}}{H_2} \frac{\partial U_{q_1}}{\partial q_2} + \frac{U_{q_1} U_{q_2}}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{U_{q_2}^2 \partial H_2}{H_1 H_2 \partial q_1} \right) = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial p}{\partial q_1} - \frac{\mu}{H_2} \frac{\partial \xi_3}{\partial q_2};$$

$$\rho \left( \frac{\partial U_{q_2}}{\partial t} + \frac{U_{q_1}}{H_1} \frac{\partial U_{q_2}}{\partial q_1} + \frac{U_{q_2}}{H_2} \frac{\partial U_{q_2}}{\partial q_2} + \frac{U_{q_1} U_{q_2}}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{U_{q_1}^2 \partial H_1}{H_1 H_2 \partial q_2} \right) = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial p}{\partial q_2} + \frac{\mu}{H_1} \frac{\partial \xi_3}{\partial q_1}. \quad (3.50)$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 U_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 U_{q_2}) = 0. \quad (3.51)$$

Уравнение Фурье-Кирхгофа

$$\rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{U_{q_1}}{H_1} \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{U_{q_2}}{H_2} \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{U_{q_3}}{H_3} \frac{\partial T}{\partial q_3} \right) =$$

$$= \frac{\lambda}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial T}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial T}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial T}{\partial q_3} \right) \right] + q_v + \Phi_v. \quad (3.52)$$



Уравнение теплопроводности

$$c_{p1} \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\lambda_1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial T_1}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial T_1}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial T_1}{\partial q_3} \right) \right] + q_{\nu} + \Phi_{\nu}. \quad (3.53)$$

Условие сопряжения на поверхности

$$T|_s = T_1|_s; \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \lambda \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (3.54)$$

Остальные граничные, начальные и физические условия зависят от координат  $q_1, q_2, q_3$ .

$$\xi^3 = \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 v_{q_2}) - \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 v_{q_1}) \right].$$

### 3.3.1. Уравнения движения и уравнение энергии в случае турбулентного течения

Уравнения Навье–Стокса и уравнение энергии справедливы в самом общем случае движения газа, в том числе и для турбулентных течений. Однако, практическое их использование оказывается невозможным, поскольку все величины (скорости, давления и температуры) являются сложными и неизвестными функциями времени. Поэтому вводят расчет определенные по времени величины, которые изменяются вполне закономерно. Каждая из величин представляется как сумма определенного значения (обозначаемого чертой сверху) и пульсационного (отмечаемого штрихом).

В декартовой системе координат для вязкой жидкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho' v_x'}) + \bar{\rho} \frac{d\bar{v}_x}{dt} &= \bar{x} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial z} + \bar{\Psi}_x; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho' v_y'}) + \bar{\rho} \frac{d\bar{v}_y}{dt} &= \bar{y} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \bar{\Psi}_y; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho' v_z'}) + \bar{\rho} \frac{d\bar{v}_z}{dt} &= \bar{z} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zy}}{\partial y} + \bar{\Psi}_z. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Через  $\sigma$  и  $\tau$  обозначены соответственно нормальные и касательные напряжения Рейнольдса [129],  $\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z$  - члены, учитывающие рассеяние энергии. Осредняя уравнение энергии, получим при  $\lambda = \text{const}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho' i_0'}) + \bar{\rho} \frac{d i_0}{dt} = x \bar{v}_x + y \bar{v}_y + z \bar{v}_z + \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \left( \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{q}_z}{\partial z} \right) + \mu \bar{\Phi} + \bar{\Theta}. \quad (3.56)$$

Пульсации сил  $x, y, z$  и вязкости не учитывались [37].

$\Theta$  - функция, зависящая от сил трения,

$i_0 = i + v_z^2$  - полная энтальпия.

В случае установившегося движения несжимаемой жидкост-

ти:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= -\bar{\rho} \overline{v_x'^2}; \quad \bar{\sigma}_y = -\bar{\rho} \overline{v_y'^2}; \quad \bar{\sigma}_z = -\bar{\rho} \overline{v_z'^2}; \\ \tau_{xy} &= -\bar{\rho} \overline{v_y' v_x'}; \quad \tau_{yz} = -\bar{\rho} \overline{v_z' v_y'}; \quad \tau_{xz} = -\bar{\rho} \overline{v_z' v_x'}; \\ \bar{q}_x &= -\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \rho c_p \overline{T' v_x'}; \\ \bar{q}_y &= -\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \rho c_p \overline{T' v_y'}; \\ \bar{q}_z &= -\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \rho c_p \overline{T' v_z'}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Уравнения Рейнольдса - в цилиндрической системе координат для осредненного осесимметричного движения вязкой несжимаемой жидкости [4, 23, 40, 155].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} - \frac{\bar{v}_r^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial r^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} - \frac{\bar{v}_r}{r^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial z^2} \left. \right) - \frac{\partial}{\partial r} (\overline{v_r'^2}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v_r' v_z'}) - \frac{\bar{v}_r'^2}{r} + \\ &+ \frac{\bar{v}_z'^2}{r}; \quad \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} + \frac{\bar{v}_r \bar{v}_z}{r} = \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial r^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} - \frac{\bar{v}_z}{r^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} \left. \right) - \frac{\partial}{\partial r} (\overline{v_r' v_z'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v_z'^2}) - \\ &- 2 \frac{\overline{v_r' v_z'}}{r}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} +$$

$$+ \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} (\overline{v_r' v_z'}) - \quad (3.58)$$

$$- \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v_z'^2}) - \frac{1}{r} \overline{v_r' v_z'};$$

$$\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_r}{r} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0.$$

Уравнение баланса энергии без учета диссипации

$$\rho c_p \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) =$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} - \rho c_p r \overline{v_r' T'} \right) + \quad (3.59)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} - \rho c_p \overline{v_z' T'} \right).$$

#### 4. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИИ ТУРБОАГРЕГАТА

Для исследования температурного состояния дисков и лопаток газовых турбин, работающих на переходных режимах, необходимо решать задачи, описываемые системами уравнений, приведенными в разделе 3.3. работы. Т.к. это тела сложной конфигурации, то для меньшей трудоемкости и большей точности получения численных результатов, надо правильно выбирать систему координат. Основные, чаще всего применяемые на практике системы координат, излагаются в разделе 3.2.1. данной работы.

Рассмотрим в общем виде методы решения, используемые в данной работе.

##### 4.1. Квазианалоговое электро моделирование задач конвективного теплообмена

Для многих физических явлений, в частности механических и тепловых, имеется аналогия в области электрических явлений. Аналогия между различными явлениями означает, что они описываются тождественными дифференциальными уравнениями. Это открывает возможность моделирования одних явлений с помощью других. Поэтому моделирование (в том числе и электрическое) можно рассматривать как своеобразный эксперимент [13, 17, 39, 55, 61, 70, 155-160, 168, 170].

С другой стороны, системы дифференциальных уравнений, описывающие явления, можно представить в конечно-разностной форме и привести их, в конечном итоге, к системам алгебраических уравнений. Тогда моделирование, основанное на аналогии, можно рассматривать так же как реализацию конечно-разностного метода решения систем алгебраических уравнений на моделях с сосредоточенными параметрами (например, на электрических сетках) [75, 117, 141, 161, 197].

В векторной форме системы алгебраических уравнений можно записать в виде:

$$A\bar{X} = \bar{F},$$

где  $A$  - матрица коэффициентов,  
 $\bar{X}$  - вектор неизвестных величин,  
 $\bar{F}$  - заданный вектор свободных членов.

Как показывает анализ [0134 1], посредством электрических сеток можно решать системы алгебраических уравнений в

случае, если:

1. матрица коэффициентов системы симметрична

$$a_{kj} = a_{jk}.$$

2. все недиагональные коэффициенты матрицы имеют одинаковый знак, противоположный знаку диагональных коэффициентов:

$$\text{sign}(a_j) = -\text{sign}(a_{kk}).$$

3. диагональные коэффициенты по абсолютному значению больше суммы остальных коэффициентов в строке:

$$|a_{kk}| > \left| \sum_{j=1}^n a_{kj} \right|, \quad k \neq j.$$

Матрицы, обладающие этим свойством, получаются при конечно-разностном представлении самосопряженных операторов.

Так, оператор дифференциального уравнения теплопроводности Фурье является самосопряженным и поэтому существует аналогия между явлением теплопроводности и электропроводности.

Оператор уравнения энергии Фурье-Кирхгофа

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + Pe \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0. \quad (4.1)$$

является несамосопряженным и поэтому непосредственной аналогии между теплообменом в подвижной среде и явлениями электропроводности нет.

Таким образом, методы прямой аналогии имеют серьезные ограничения. Для преодоления подобных ограничений аналоговых методов чл. корр. АН Украины Г.Е. Пуховым взамен принципа прямой аналогии был выдвинут более плодотворный принцип построения электрических моделей, а именно: принцип эквивалентности а отношении получаемых результатов. Суть этого метода состоит в том, что там, где нет прямой аналогии изучаемых явлений, она создается искусственно за счет приведения специального, так называемого процесса уравновешивания электрической модели. На основе этого нового принципа на кафедре "Теоретические основы теплотехники" КПТИ А.В.Темнишковым были предложены и разработаны эффективные методы моделирования подвижных температурных полей, описываемых уравнениями (13.4, 3.13, 3.32, 13.39, 13.45, 3.52). Идея квазианалогового метода моделирования уравнений этого типа заключается в следующем: рис.4.1.

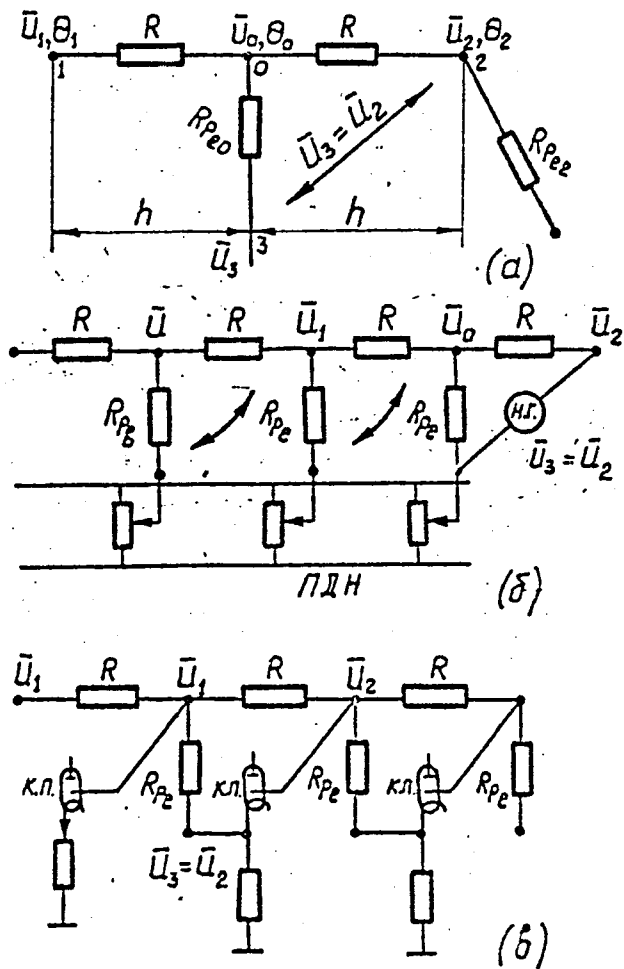


рис.4.1. Электрические схемы квазианалогового моделирования температуры движущей среды  
 а) Принципиальная схема  
 б) Ручное уравнивание  
 в) Автоматическое уравнивание

Если записать 4.1 в конечных разностях

$$\frac{1}{h} \left( \frac{\theta_2 - \theta_0}{h} - \frac{\theta_0 - \theta_1}{h} \right) + \frac{\theta_2 - \theta_0}{h/p_e} = 0$$

или

$$\frac{\theta_2 - \theta_0}{h^2} + \frac{\theta_1 - \theta_0}{h^2} + \frac{\theta_2 - \theta_0}{h/p_e} = 0 \quad (4.2)$$

и сравнить (4.2) с уравнением первого закона Кирхгофа для узла электрической сетки, показанной на рис. 4.1а

$$\frac{\bar{U}_2 - \bar{U}_0}{R/R_M} + \frac{\bar{U}_1 - \bar{U}_0}{R/R_M} + \frac{\bar{U}_3 - \bar{U}_0}{R_{pe}/R_M} = 0, \quad (4.3)$$

то легко усмотреть, что уравнение (4.2) и (4.3) будут аналогичны только в том случае, если

$$\bar{U}_3 = \bar{U}_2, \quad (4.4)$$

т.е. в узле 3 следует поддерживать потенциал  $\bar{U}_2$ , тогда уравнение будет иметь вид

$$\bar{U}_2 - \bar{U}_0 / R/R_M + \frac{\bar{U}_1 - \bar{U}_0}{R/R_M} + \frac{\bar{U}_2 - \bar{U}_0}{R_{pe}/R_M} = 0. \quad (4.5)$$

Сопоставляя (4.2) и (4.5), получим формулы для расчета сопротивлений сетки

$$R = h^2 R_M ; \quad R_{pe} = \frac{h}{p_e} R_M.$$

Таким образом, если сопротивления сетки выбрать в соответствии с этим выражением, то при условии (4.4) будет обеспечено равенство безразмерных температур  $\theta$  безразмерным потенциалом  $\bar{U}$  в соответствующих узлах сетки, т.е.  $\theta_1 = \bar{U}_1$ ,  $\theta_0 = \bar{U}_0$ ,  $\theta_2 = \bar{U}_2$  и т.п. Здесь весьма существенным является выполнение условия (4.4). Непосредственной аналогии в общем случае здесь нет, но она достигается искусственно, за счет выполнения условия (4.4).

Для выполнения этого условия необходимо производить процесс уравнивания квазианалоговой модели. Схема квазианалоговой модели с ручным уравниванием выглядит следующим образом (рис. 4.1б).

Если провести процесс уравнивания последовательно, переходя от точки к точке, то после однократного уравнивания, ввиду взаимного влияния токов, протекающих в различных частях модели, условие (4.4) в предыдущих точках будет нарушено. Поэтому возникает необходимость в повторном уравнивании. Процесс уравнивания ведется итерациями до тех пор, пока с требуемой точностью во

всех узловых точках не будет обеспечено соблюдение условия (4.4). С целью автоматизации процесса уравнивания могут быть применены катодные или эмиттерные повторители. Схема квазианалогового электроинтегратора с автоматическим уравниванием приводится на рис.4.1в.

Квазианалоговый метод электро моделирования в процессах переноса тепла в подвижных средах пригоден для больших скоростей и перемещений среды, при зависимости скорости от координат времени и при зависимости теплофизических коэффициентов от температуры [10,15, 11].

Совместное применение аналогового электро моделирования уравнения теплопроводности в твердом теле и квазианалогового электро моделирования уравнения энергии в подвижной среде позволяет моделировать сопряженные задачи теплообмена в их строгой постановке. Результаты решения сопряженных и квазисопряженных задач теплообмена приведены в разделе 5 данной работы.

#### 4.2. Метод квазианалогового моделирования для определения нестационарных температурных полей в охлаждаемых лопатках газовых турбин

Охлаждение полых сопловых и рабочих лопаток первых ступеней газовых турбин часто осуществляют воздухом, прокачивая его через зазор между стенкой лопатки внутренним дефлектором. При этом различают схемы охлаждения с продольным и поперечным течением охладителя [42, 122, 162, 176].

В настоящей работе излагается методика исследования температурных полей в полый охлаждаемой лопатке турбины с помощью квазианалогового метода электро моделирования [157], который позволяет автоматизировать инерционный процесс определения температур теплоносителей, омывающих тело [11, 88, 140].

Запишем систему дифференциальных уравнений, описывающих явление нестационарного теплообмена для плоского профильного сечения лопатки. В относительных переменных система имеет следующий вид:

$$k_r \frac{\partial \theta_r}{\partial F_0} + z_r \frac{\partial \theta_r}{\partial \eta} + Bi_r(\eta, F_0) [\theta^r(F_0) - \theta(\eta, F_0)] = 0; \quad (4.6)$$



$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \theta}{\partial F_0}; \quad (4.7)$$

$$\theta(0, \eta, \xi) = f(\eta, \xi); \quad (4.8)$$

$$\theta_r = f(F_0), \quad (4.9)$$

$$\text{при } \eta = 0; \quad \theta_B = f(F_0, 0); \quad (4.10)$$

$$k_B \frac{\partial \theta}{\partial F_0} + z_B \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + Bi_B(\eta, F_0)[\theta_B(F_0) - \theta(\eta, F_0)] = 0, \quad (4.11)$$

где

$$k_r = \frac{L 2b_r a_f}{a'_r (2b_r + L) l}; \quad z_r = \frac{G_r c_{pr}}{\lambda_f (2b_r + L)};$$

$$k_B = \frac{b_B a_f}{L a'_B}; \quad z_B = \frac{G_B c_{pB}}{\lambda_f L};$$

где  $2b_r$ ,  $2b_B$  — ширина межлопаточного канала и канала охлаждения, м;

$G_r$  и  $G_B$  — расходы газа и воздуха, кг/с;

$\lambda_f$  — теплопроводность металла лопатки, Вт/град;

$c_{pr}$ ,  $c_{pB}$  — теплоемкость газа и воздуха, Дж/(кг\*град);

$$a'_r = \frac{\lambda_f}{c_{pr} \rho_r}; \quad a'_B = \frac{\lambda_f}{c_{pB} \rho_B} \quad - \text{условные коэффициенты температуропроводности, м}^2/\text{с};$$

(здесь  $\rho_r$ ,  $\rho_B$  — плотности газа и воздуха, кг/м<sup>3</sup>);

$n$  — число лопаток на ступень;

$n-1$  — число межлопаточных каналов;

$l$  — хорда лопатки м;

$L$  — длина лопатки м;

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_M - T_0}; \quad \theta_B = \frac{T_B - T_0}{T_M - T_0}; \quad \theta_r = \frac{T_r - T_0}{T_M - T_0}$$

— текущая относительная температура лопатки, газа и воздуха соответственно;

$\tau$  — время, с;

$a_f$  — коэффициент температуропроводности лопатки, м<sup>2</sup>/с;

$F_0$  - число Фурье;

$$Bi_{\Gamma} = \frac{d_{\Gamma} l}{\lambda} ; \quad Bi_B = \frac{d_B l}{\lambda_f} \quad - \text{число Бив.}$$

Из сопоставления уравнений (4.6 - 4.11), записанных в конечных разностях, с выражениями первого закона Кирхгофа для сетки сопротивлений получим для расчета сопротивлений следующие формулы:

$$R_{\Delta F_0}^B = \frac{\Delta F_0 R_M}{k_B (h_{\eta_1} + h_{\eta_2})} ; \quad R_G^B = \frac{h_{\eta_2} R_M}{z_B (h_{\eta_1} + h_{\eta_2})} ;$$

$$R_{Bi}^B = \frac{R_M}{Bi_B (h_{\eta_1} + h_{\eta_2})} ; \quad R_{\Delta F_0}^{\Gamma} = \frac{\Delta F_0 R_M}{k_{\Gamma} (h_{\eta_1} + h_{\eta_2})} ;$$

$$R_G^{\Gamma} = \frac{\Delta \eta R_M}{z_{\Gamma} (h_{\eta_1} + h_{\eta_2})} ; \quad R_{Bi_{\Gamma}}^{\Gamma} = \frac{R_M}{Bi_{\Gamma} (h_{\eta_1} + h_{\eta_2})} ;$$

$$R_{\xi_1} = \frac{h_{\xi_1} R_M}{(h_{\eta_1} + h_{\eta_2})} ; \quad R_{\xi_2} = \frac{h_{\xi_2} R_M}{(h_{\eta_1} + h_{\eta_2})} ;$$

$$R_{\eta_1} = \frac{h_{\eta_1} R_M}{(h_{\xi_1} + h_{\xi_2})} ; \quad R_{\eta_2} = \frac{h_{\eta_2} R_M}{(h_{\xi_1} + h_{\xi_2})} ;$$

$$R_{\Delta F_0} = \frac{2 \Delta F_0 R_M}{(h_{1\eta} + h_{2\eta}) (h_{1\xi} + h_{2\xi})}$$

Система уравнений (4.6 - 4.11) может быть решена на сетке из омических сопротивлений методом Либманна [97]. При этом для уравнений (4.6) и (4.11) непосредственной аналогии не существует, поэтому для их решения используется квазианалоговый метод электро моделирования.

## 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО СОСТОЯНИЯ ЛОПАТОК ГАЗОВЫХ ТУРБИН, РАБОТАЮЩИХ НА ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМАХ

Рассмотрим сначала решения задач в сопряженной постановке. Для этого надо решать систему из уравнений, сформулированную в разделе 3.3.

### 5.1. Решение сопряженной задачи теплообмена для охлаждаемой лопатки

Рассмотрим вопросы гидродинамики и теплообмена между дефлектором и стенками лопатки. Они нужны для определения эйлер скоростей, коэффициентов тепло-массопереноса в канале охлаждения [30, 56-58, 127, 181, 187].

#### 5.1.1. Гидродинамика и теплообмен между дефлектором и стенками лопатки

Рассмотрим процесс теплообмена, происходящий в полости охлаждаемой лопатки с поперечным сечением охладителя (рис. 2.3а) [30-36].

Каналы между дефлектором и стенкой лопатки узкие и длинные по всей ее высоте, поэтому их можно отнести к плоским. Течение здесь зависит от ширины и конфигурации щели в носике дефлектора, расстояния от дефлектора до внутренней поверхности входной кромки, от степени турбулентности потока, входящего в канал. Вопросы теплообмена и гидродинамики при течении воздуха в каналах охлаждения дефлекторных лопаток данного типа рассмотрены наиболее подробно в работах [41, 93, 94]. Охлаждаемый канал авторами рассматривается от среза носика дефлектора. В работах приведены эйлеры средних и пульсационных скоростей по его сечению и длине. Они получены при симметричном истечении плоской воздушной струи в полость входной кромки. Вблизи входа в канал  $x/d_r \approx 0,9$  (см. рис. 5.1) профиль скорости оказывается вытянутым так, что максимальное значение скорости в 1,6 раза превышает среднее значение. Уровни пульсаций при этом составляют 4 - 6 % в ядре потока, возрастая в 4 - 5 раз в пограничном слое. По длине канала происходит постепенное выравнивание профиля скорости и при  $x/d_r \approx 8$  он становится близким к профилю, характерному

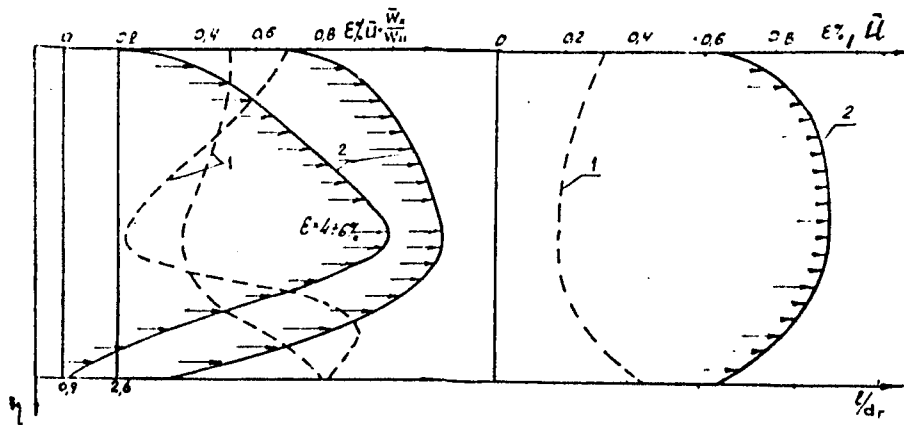


рис.5.1. Профили осредненных скоростей и степени турбулентности по длине канала охлаждения  
 1. Пульсация скорости  
 2. Осредненные скорости.

для развитого турбулентного течения. Профили автомодельны по числу Рейнольдса. Измерения их проводились с помощью анемометра.

Из общей картины течения воздуха видно, что после удара струи газа, вытекающего из носика дефлектора, о внутреннюю поверхность входной кромки, газовый поток разворачивается и входит в междефлекторный канал, прижимаясь к поверхности охлаждения. Поэтому можно предположить, что уже при входе в канал существует всякий подслои и что далее он сохраняется на всей длине канала.

Анализ профилей скорости средних и пульсационных по сечению, показывает, что граница пограничного слоя на входе в канал несколько смещена к стенке лопатки. Это смещение видимо получается за счет центробежных сил, воздействующих на струю при повороте. Авторы работы [041] указывают, что по длине канала между дефлектором и стенками лопатки происходит интенсивное снижение уровня теплообмена, и последний на расстоянии  $x/d_r \cong 20$  от входа в канал приближается к постоянной величине (рис. 5.1.). Обработка экспериментальных данных свидетельствует о том, что на этих участках они обобщаются с погрешностью 10–15% зависимостью:

$$Nu = 0,018 Re^{0,8} \epsilon_e; \quad (5.1)$$

$$\epsilon_e = 2,7 \left( \frac{x}{d_r} \right)^{0,33}; \quad Re = 2,7 \cdot 10^3 \div 5 \cdot 10^4 \quad (5.2)$$

Коэффициенты теплообмена, определяемые этими уравнениями, отнесены к разности температур стенки и среднекасовой температуры воздуха в этом же сечении. Уравнение (5.1) с погрешностью 10% описывает результаты, начиная с  $(5-6)d_r$  от входа в канал. На протяжении первых  $(5-6)d_r$  наблюдается повышенный разброс экспериментальных точек, он составляет 30–35%. Авторы указывают, что такую интенсификацию теплообмена и расхождение опытных данных вызывают вытянутый профиль скорости и высокий уровень турбулентности на входе в канал (рис. 5.1). По данным обзора, приведенного в [0103], влияние асимметрии обогрева стенок на уровень теплообмена и на погрешность участка тепловой стабилизации составляет 10–15% [38, 64, 67, 72, 101, 102, 139, 143, 144, 150].

### 5.1.2. Формулировка сопряженной задачи теплообмена

Сформулируем сопряженную задачу нестационарного теплообмена для канала со стороны спинки охлаждаемой лопатки (рис. 5.2) при следующих допущениях:

1. Гидродинамику внешнего обтекания можно для простоты не рассматривать, а задать на поверхности лопатки коэффициенты теплоотдачи, которые могут быть рассчитаны по методике, приведенной в [41, 50, 124, 133].

2. Температура торможения считается постоянной по длине межлопаточного канала [46, 50, 93, 94, 124].

3. Канал между дефлектором и спинкой лопатки можно рассматривать как плоский, т.к. отношение ширины канала к его высоте намного меньше единицы [189].

4. Поток воздуха на входе в канал турбулентный, с установившейся гидродинамикой [103].

5. Градиенты давления в канале по осям  $X$  и  $Y$  достаточно малы. Малым продольным градиентам давлений соответствует и малый градиент касательных напряжений вблизи стенки, а при больших числах  $Re$  мала толщина вязкого подслоя. Все это позволяет получить для пристеночной области универсальный закон скоростей [189] стр. 53.

6. Согласно формуле Прандтля [189], при отсутствии градиента скорости, касательное напряжение на оси канала принимается равным нулю.

7. На каждом участке канала  $\rho_2, \mu = \text{const}$ , но переменны от участка к участку. Влияние центробежного поджатия воздуха не учитывается.

8. Жидкость рассматривается как несжимаемая, т.к. скорость в канале не превышает 0.3 от критической.

9. Передачей тепла конвекцией в направлении оси  $Y$  и кондукцией по оси  $X$  пренебрегаем ввиду их малости.

10. Теплотой диссипации энергии в жидкости можно пренебречь.

11. Теплообменом между дефлектором и воздушным потоком в канале пренебрегаем. Тогда уравнение движения (3.30) и энергии (3.32) для пограничного слоя запишутся в виде:

$$\rho_2 U_{2x} \frac{\partial U_{2x}}{\partial x} = - \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_2 \frac{\partial U_{2x}}{\partial y} \right); \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial y} = 0; \quad (5.4)$$

$$\rho_2 c_{p2} \bar{U}_{2x} \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_2 \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial y} \right). \quad (5.5)$$

Для турбулентного пограничного слоя система уравнений (3.55), (3.56) примет вид [89, 90, 189]:

$$\rho_2 \bar{U}_{2x} \frac{\partial \bar{U}_{2x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu_2 \frac{\partial \bar{U}_{2x}}{\partial y} - \rho \overline{U'_{2x} U'_{2y}} \right]; \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{P}_2 - \rho_2 \overline{U'_{2y}{}^2} \right) = 0; \quad (5.7)$$

$$\rho_2 \bar{U}_{2x} c_{p2} \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda_2 \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial y} - \rho_2 c_{p2} \overline{T'_2 U'_{2y}} \right]. \quad (5.8)$$

Уравнения движения для турбулентного пограничного слоя решаются с помощью полуэмпирической теории Прандтля с использованием понятия длины пути перемешивания [89, 90, 92, 93, 189, 190]. Обозначая

$$\lambda_{2T} \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial y} \approx -\rho_2 c_{p2} \overline{T'_2 U'_{2y}}; \quad \mu_{2T} \frac{\partial \bar{U}_{2x}}{\partial y} \approx -\rho_2 \overline{U'_{2x} U'_{2y}}.$$

Запишем уравнения (5.6), (5.8) в виде:

$$\rho_2 c_{p2} \bar{U}_{2x} \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\lambda_2 + \lambda_{2T}) \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial y} \right]; \quad (5.9)$$

$$\rho_2 \bar{U}_{2x} \frac{\partial \bar{U}_{2x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu_2 + \mu_{2T}) \frac{\partial \bar{U}_{2x}}{\partial y} \right]. \quad (5.10)$$

С учетом принятых допущений, система дифференциальных уравнений, описывающая теплообмен на участке канала охлаждения длиной  $K$  полый дефлекторной лопатки с поперечным течением охладителя, примет вид (рис. 5.2):

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha_1(x, t) [\delta_1(t) - T]; \quad t \geq 0; \quad 0 \leq x \leq K; \quad (5.11)$$

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda(t) \frac{\partial T}{\partial y} \right]; \quad (5.12)$$

$$t \geq 0; \quad 0 \leq y \leq h; \quad 0 \leq x \leq k;$$

$$\rho_2 \bar{U}_{2x} \frac{\partial \bar{U}_{2x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu_2 + \mu_{2T}) \frac{\partial \bar{U}_{2x}}{\partial y} \right]; \quad t \geq 0; \quad h \leq y < h + 2\delta_2. \quad (5.13)$$

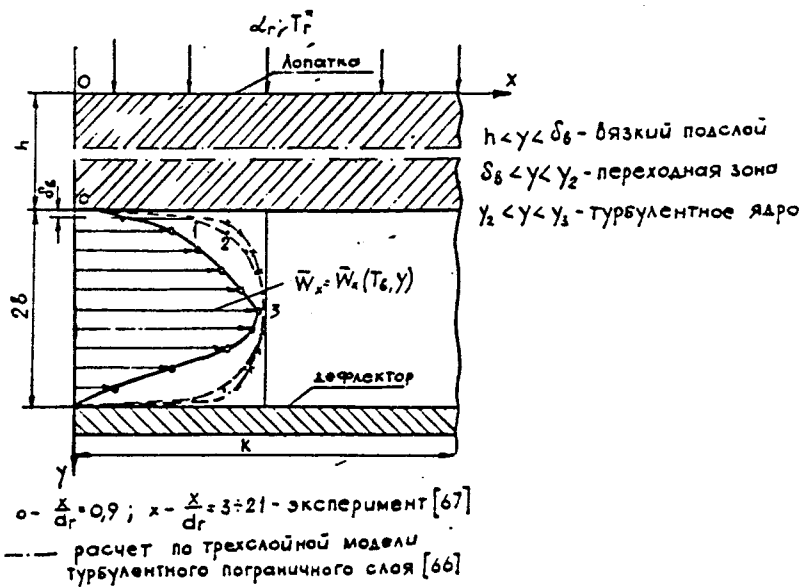


рис.5.2. Схема теплообмена на участке дефлекторной лопатки



$$\rho_2 c_{p2} \bar{v}_{2x} \frac{\partial \bar{v}_{2x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu_2 + \mu_{2T}) \frac{\partial \bar{v}_{2x}}{\partial y} \right]; \quad (5.14)$$

$$P_2 = \rho_2 R \bar{T} \quad ; \quad P_2|_{x=0} = P_2(t); \quad (5.15)$$

$$\bar{v}_{2x}|_{t=0} = \bar{v}_{2x}(x, y); \quad \bar{T}_2|_{t=0} = T(x, y); \quad T|_{t=0} = T(x, y); \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=k} = \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial y} \Big|_{0 \leq x \leq k} = 0; \quad (5.17)$$

$$\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right) \Big|_{y=h} = \lambda_2 \left( \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial n} \right) \Big|_{y=h}; \quad (5.18)$$

$$T(x, t) \Big|_{y=h} = \bar{T}_2(x, t) \Big|_{y=h}; \quad (5.19)$$

$$T_2 \Big|_{x=0} = T_2(t) = \delta_2(t); \quad (5.20)$$

$$\bar{v}_{2x} \Big|_{y=h} = 0 \quad ; \quad \bar{v}_{2x} \Big|_{h \leq y \leq 2b_2} = \bar{v}_{2x}(x, t); \quad (5.21)$$

$$\lambda = \lambda(T); \quad \rho = \text{const}; \quad c_p = c_p(T); \quad (5.22)$$

$$\rho_2 = \rho_2(\bar{T}_2, P_2); \quad \mu_2 = \mu_2(T); \quad c_{p2} = c_{p2}(T_2); \quad \lambda_2 = \lambda_2(\bar{T}_2); \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_{2x}}{\partial y} = 0; \quad y = h + b_2; \quad 0 \leq x \leq k; \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = q = 0; \quad y = h + b_2; \quad 0 \leq x \leq k; \quad (5.25)$$

$$\bar{v}_{2x}' \bar{v}_{2y}' \rightarrow 0; \quad y \rightarrow h + b_2.$$

Турбулентное касательное напряжение в жидкости

$$\mu_{2T} \equiv \rho_2 l_T^2 \left( \frac{\partial \bar{v}_{2x}}{\partial y} \right)^2$$

Закон изменения кажущейся турбулентной вязкости по сечению плоского канала представлен на рис. 5.3.

$l_T = l_T \rho_n^{0,2}$  — длина пути перемешивания с учетом влияния

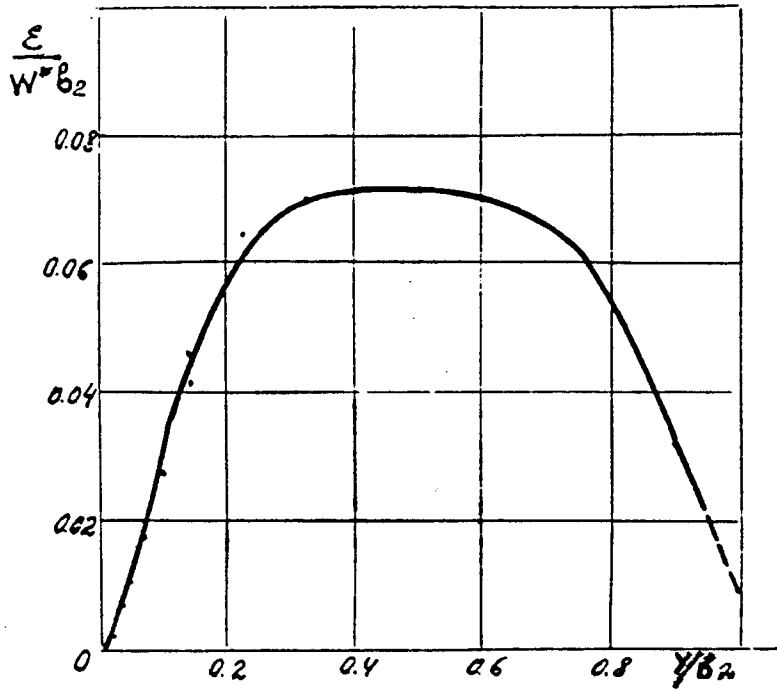


рис.5.3. Распределение безразмерного кинематического коэффициента кажущейся вязкости по сечению канала

$$l = \frac{\alpha y^2}{2\delta_0}$$

температуры [189].

- длина пути перемешивания рис. 5.4 по толщине вязкого подслоя, установленная Л. Д. Ландау [189] стр. 60.

- толщина вязкого подслоя.

$$\bar{l} = \frac{l}{\delta_2} = x \frac{y}{\delta_2^2} \left(1 - \frac{y}{2\delta_2}\right) \left[1 - c \frac{y}{\delta_2^2} \left(1 - \frac{y}{2\delta_2}\right)\right] \quad (5.26)$$

- длина пути перемешивания для переходной зоны и турбулентного ядра рис. 5.5. Рассчитывается эта величина при  $l=0.14$  на оси канала и  $c=0.6$  [189] стр. 44.

$$\lambda_T \cong c_{p2} \rho_2 l_T^2 \left(\frac{\partial \bar{v}_{2x}}{\partial y}\right)^2. \quad (5.27)$$

5.1.3. Алгоритм расчета гидродинамики, коэффициентов турбулентного теплопереноса и сетки резисторов квазианалогового процессора на ЭВМ

Из рассмотрения системы (5.10 - 5.27) приходим к выводу, что при заданных

$$d_r = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad k = 60 d_r; \quad h = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad \rho = 8,1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$c_p = c_p(T); \quad \alpha = \alpha(T); \quad L = 0,101 \text{ м}; \quad G_2 = G_2(t);$$

$$P_2 = P_2(t); \quad \bar{T}_2 = \delta_2(t) \Big|_{y=h+\delta_2}^{x=0}; \quad \rho_2 = \rho_2(\bar{T}_2, P_2);$$

$$\mu_2 = \mu_2(\bar{T}_2); \quad c_{p2} = c_{p2}(\bar{T}_2); \quad T_1 = T_1(t); \quad G_1 = G_1(t);$$

$$\alpha_1 = \alpha_1(x, t),$$

надо определить следующие величины:

$$\bar{v}_{2x} = \bar{v}_{2x}(x, y, t); \quad l_T = l_T(x, y, t); \quad \bar{T}_2 = T_2(x, y, t);$$

$$T(x, y, t); \quad a_{\text{эф}} = a_{\text{эф}}(x, y, t), \quad \lambda_{\text{эф}} = \lambda_{\text{эф}}(x, y, t),$$

$${}^{\text{ГДЭ}} a_{\text{эф}} = a_2 + a_{2T}; \quad \lambda_{\text{эф}} = \lambda_2 + \lambda_{2T}.$$

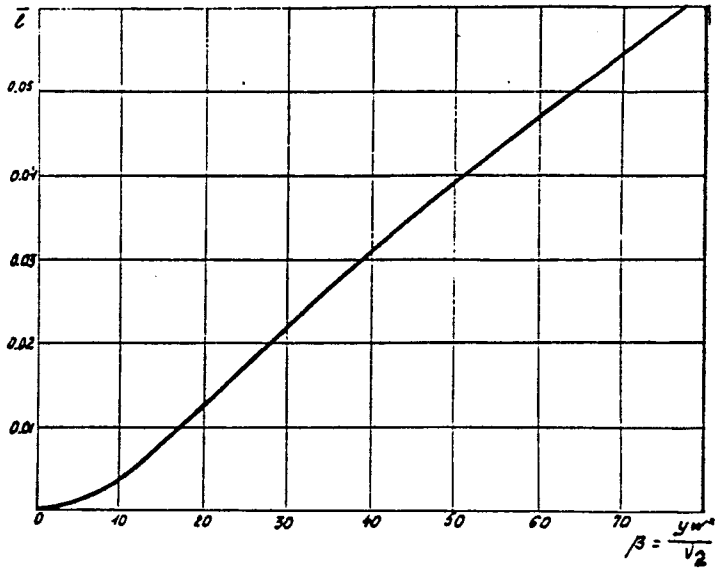


рис.5.4. Закон длины пути перемешивания в пристеночной области

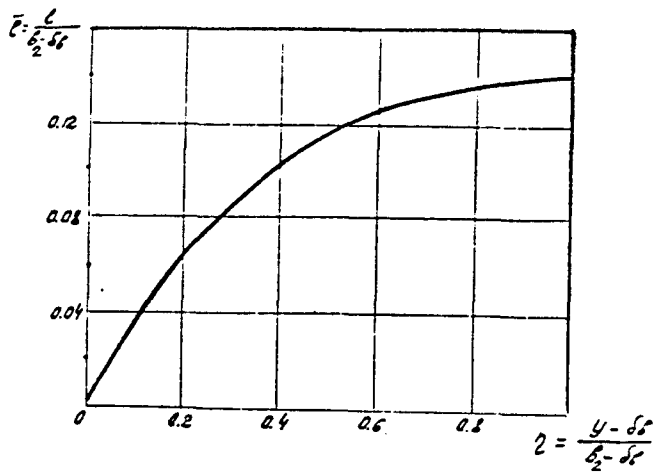


рис.5.5. Длина пути перемещения по сечению канала

Расчет ведется в следующей последовательности.

Разбиваем плоский канал длиной  $K$  и шириной  $2b_2$  на 11 участков по ширине и 12 по длине. Зная расход воздуха, среднерасходную температуру на входе в канал, задаемся распределением этой температуры в канале. По уравнениям (5.15) определяем для каждого участка канала  $\rho_{2cp} = \frac{\rho_2}{Re_2 \delta_2}$ . Рассчитываем среднюю скорость движения воздуха по зависимости:

$$U_{2x} = \frac{G_2}{2\rho F_2} ; F_2 = 2b_2 L.$$

Условное число  $Re_{2\partial} = \frac{1,7 b_2 U_{2x}}{D_2}$ . Коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  находится из решения трансцендентного уравнения:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,03 \lg(2 Re_{2\partial} \sqrt{\lambda}) - 1.$$

Касательное напряжение на стенке  $\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \rho_2 c_p U_{2x}$ . Динамическая  $U^* = \sqrt{\tau_0 / \rho_{2cp}}$ . Средняя безразмерная скорость  $U_{cp} = \sqrt{\beta_2}$ . Безразмерная скорость на оси трубы  $U_m = U_{cp} + 2,6$ . Рассчитываем  $Re^* = \frac{U^* b_2}{\nu_2}$ ,  $\beta = \frac{U^* y}{U_m}$ . Далее с использованием зависимостей  $U_m - U_2 = \frac{U_m^2}{U_m} - U_2 \left(\frac{y}{b_2}\right)$  (рис. 5.6) и  $U_2 = U_2(\beta)$  (рис. 5.7) определяем значения безразмерных скоростей в вязком подслое, переходной зоне, турбулентном ядре. По формулам (5.26), (5.27) и расчетному профилю скоростей определяем зависимость  $f_2 = f_2(\beta)$  (рис. 5.8). В дальнейшем использование графика на рис. 5.8 позволяет быстро по значениям  $\beta$  определять  $a_{2T}$ ,  $\lambda_{2T}$ . Рассчитываем

$$\lambda = \lambda(\bar{T}_2) ; a_2 = \frac{\lambda_2}{c_p \rho_2} ; a_{\partial\phi} = a_{2T} + a_2 ;$$

$$\lambda_{\partial\phi} = a_{\partial\phi} c_p \rho_2 ; Re_{\partial\phi} = \frac{U_{rx}(y) l}{a_{\partial\phi}}.$$

Определяем значение сетки резисторов по формулам, приведенным в разделе 4.1. Приводим сопряжение сетки сопротивлений для твердого тела и воздуха из соотношений (5.18). Набираем поле резисторов. Задаем граничные потенциалы, эквивалентные граничным условиям. Определяем температурные поля первого приближения методом квазианалогового моделирования. Для второго приближения находим среднюю температуру воздушного потока  $\delta_2$  в каждом сечении по длине канала. Затем рассчитываем последовательно среднюю в сечении плотность  $\rho_{2cp}$ ,  $U_{2x}$ ,  $\nu_2$ ,  $Re_{2\partial}$ ,  $\lambda_2$ , а также  $\Delta P_{2i} = \lambda(c/d_r)(U_{2x} \rho_{2cp} / 2g)$  абсолютные величины

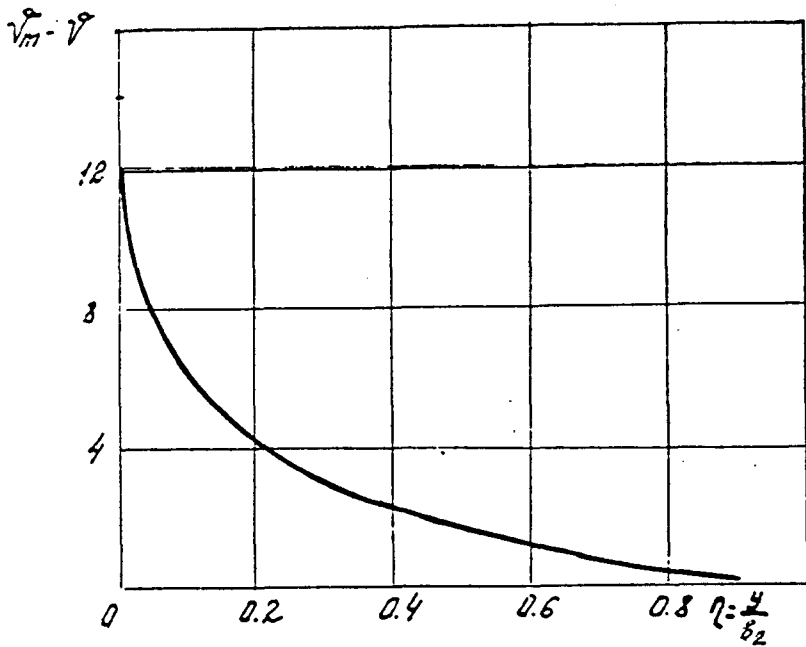


рис. 5.6. Закон скоростей для турбулентного ядра

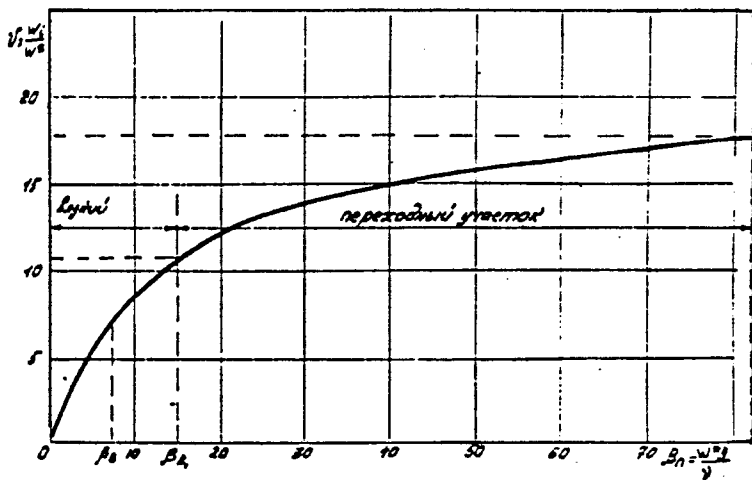


рис.5.7. Закон скоростей для пристеночной области



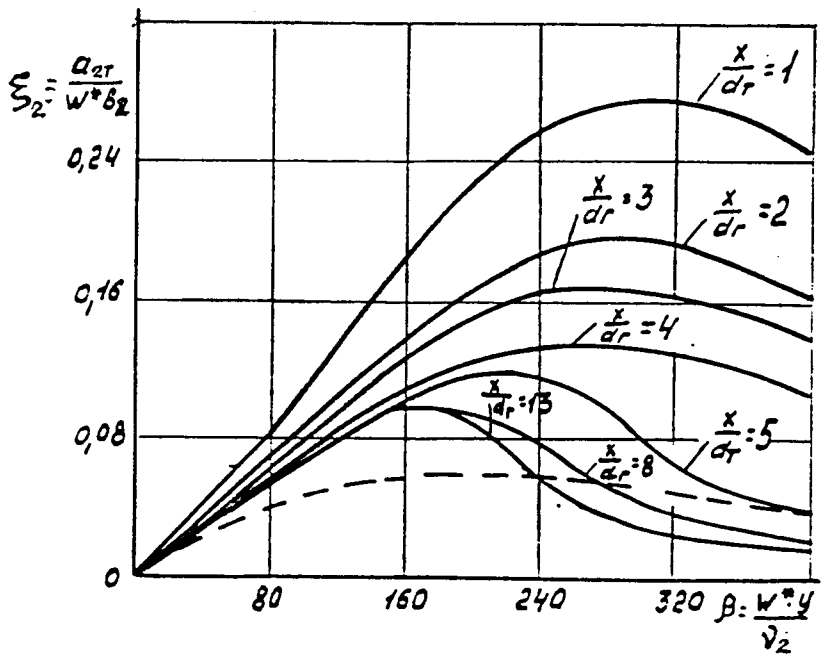


рис. 5.8. Зависимость безразмерного коэффициента турбулентной температуропроводности по сечению канала

давлений от участка к участку канала  $P_{2,i+1} = P_i - \Delta P_{2i}$ , динамическую скорость  $V^* = V_{2x} \sqrt{\lambda/8}$ , значения скоростей в каждом сечении  $\alpha \in \Phi$ ,  $\lambda \in \Phi$ ,  $Re \in \Phi$  сопротивления  $R$  - сетки. Получаем на модели поле температур второго приближения. Далее эти поля температур, координаты сечений, величины давлений вводятся в машину, чтобы получить расчетные данные для третьего приближения. Процесс последовательных приближений ведется до тех пор, пока результаты предыдущего и последующего приближений не будут отличаться на заданную величину [9, 73, 137, 146, 184, 186].

#### 5.1.4. Исследования сопряженных нелинейных задач турбулентного теплообмена между воздухом и телом лопатки

Постановка задачи исследования и математическая формулировка ее приведены в разделе 5.1.1 и 5.1.2. В этом же разделе дан алгоритм расчета гидродинамики и коэффициентов турбулентного теплопереноса.

При допущениях, указанных в разделе 5, математическая формулировка задачи в безразмерной форме будет иметь вид:

$$-\frac{\partial \theta}{\partial N} \Big|_{\eta=0} = Bi(\xi, F_0) [\theta(F_0) - \theta]; \quad \begin{matrix} F_0 \gg 0; \\ 0 \leq \xi \leq \frac{\kappa}{\ell}; \end{matrix} \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial F_0}; \quad \begin{matrix} F_0 \gg 0; \\ 0 \leq z \leq \frac{\kappa}{\ell}; \end{matrix} \quad (5.29)$$

$$Re_{z,\varphi}(\theta, \xi, z, F_0) \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{z,\varphi} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right); \quad \begin{matrix} F_0 \gg 0; \\ 0 \leq \xi \leq \frac{\kappa}{\ell}; \\ 0 \leq z \leq \frac{b_2}{\ell}; \end{matrix} \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\frac{\kappa}{\ell}} = \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \Big|_{0 \leq \xi \leq \frac{\kappa}{\ell}}; \quad (5.31)$$

$$0 \leq z \leq \frac{h}{\ell}; \quad 0 \leq z \leq \frac{h}{\ell}; \quad z = \frac{b_2}{\ell};$$

$$\lambda \left( \frac{\partial \theta}{\partial N} \right) \Big|_{y=h} = \lambda_2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial N} \right) \Big|_{y=h} ; \quad (5.32)$$

$$\theta(\xi, F_0) \Big|_{y=h} = \theta_2(\xi, F_0) \Big|_{y=h} ; \quad (5.33)$$

$$P_{e_{эф}} \Big|_{t=0} = P_{e_{эф}}(\xi, \nu); \quad \theta_2 \Big|_{t=0} = \theta_2(\xi, \nu);$$

$$\theta \Big|_{t=0} = \theta(\xi, \nu); \quad \theta_2 \Big|_{\xi=0} = \theta_2(F_0); \quad (5.34)$$

$$P_{e_{эф}} \Big|_{\substack{0 \leq \xi \leq \kappa \\ h \leq \nu \leq \nu_2}} = P_{e_{эф}}(\xi, \nu, F_0, \theta_2). \quad (5.35)$$

Сопряженные задачи теплообмена решались для сопловых и рабочих лопаток ГТУ, работавших как на переходных режимах, так и на стационарных [56, 57, 163].

Стационарные задачи решались для участка спинки сопловой лопатки, выполненной из стали марки ЖС6К при  $G_2 = 9.92 \cdot 10^{-2} \text{ кг/с}$ ,  $\delta_1 = 1463 \text{ К}$ ,  $\delta_2 = 663 \text{ К}$ . Одна задача решалась без учета участка гидродинамической стабилизации, другая учитывала его наличие. В первом случае эпюра скоростей рассчитывалась по трехслойной модели, описанной в книге А.Н.Шерстюка [189] для плоских каналов. Расчетная эпюра скоростей по сечению канала сравнивалась с экспериментальной, полученной А.И.Мазуром [103] в институте технической теплофизики АН Украины. Сравнение расчетного профиля с экспериментальным на рис.5.9 показывает, что для области турбулентного ядра потока наблюдается их хорошее соответствие.

Наибольшее расхождение в 8% от  $\mathcal{U}_{\text{max}}$  наблюдается в пристеночной области. Такое малое расхождение результатов говорит о приемлимости методики расчета А.Н.Шерстюка не только для зоны турбулентного ядра, но и для вязкого слоя и переходной зоны на участке установившегося движения. Расчет эпюр скоростей для гидродинамически неустановившегося участка движения затруднителен. Экспериментальные эпюры скоростей получены в работе [103] на участке, равном

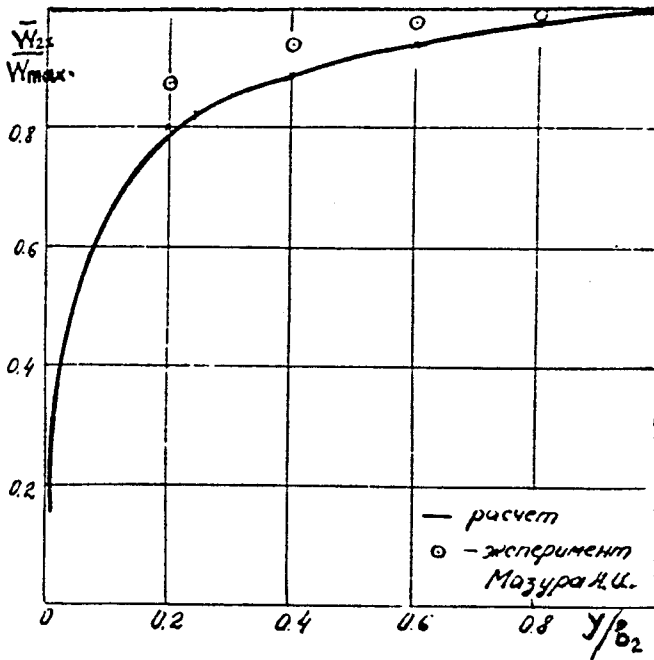


рис.5.9. Сравнение расчетного профиля скорости с экспериментальным

длине канала в 21 гидравлический диаметр.

Основываясь на хорошем совпадении эпюр в турбулентной области потока и на предположении о существовании вязкого слоя на всем участке нестабилизированного движения воздуха по внутренней поверхности лопатки, проведем искусственное сопряжение расчетных и экспериментальных эпюр скоростей. Для этого сочленим расчетную эпюру (рис. 5.7), построенную для вязкого слоя и переходной зоны с экспериментальными эпюрами, полученными для турбулентного ядра (рис. 5.6). Это сочленение произведем для того, чтобы определить коэффициенты турбулентного теплопереноса по сечению канала. Эпюры этих коэффициентов приведены на рис. 5.8.

Из представленных на рис. 5.8 результатов видно, что существенное отличие значений комплекса  $\xi_2 = \alpha_2 T / \nu^* \beta_2$  наблюдается в зоне турбулентного ядра на участках гидродинамически установившегося и неустановившегося течения воздуха. При этом, по мере выравнивания профилей скорости, наблюдается снижение значений безразмерного коэффициента турбулентной теплопроводности. На рис. 5.10 показаны изотермы в теле лопатки и в движущемся теплоносителе, дано распределение температур стенок и среднемассовой температуры воздуха по длине канала охлаждения, полученные из решения сопряженных задач с участком и без участка гидродинамической стабилизации, а также для задачи с граничными условиями третьего рода. Сравнение результатов решения одной и той же задачи при разных допущениях и в разной постановке показывает различие в температурах поверхностей  $T = T_2$  на 12%,  $T = T_1$  на 6%, температур воздуха на выходе из канала на 9% от  $T_M - T_0$ .

По полям температур в теле лопатки и воздухе рассчитывались локальные коэффициенты теплоотдачи. За определяющую температуру принималась средняя температура пограничного слоя, равная

$$T_M = \frac{T_2(x) + \delta(x)}{2}.$$

Величина удельного теплового потока определялась в пристеночной области. Данные расчета сравнивались с экспериментальными, взятыми из работ [103, 189]. Совпадение результатов расчета и эксперимента удовлетворительное на участке стабилизированного течения. Они хорошо описываются за-

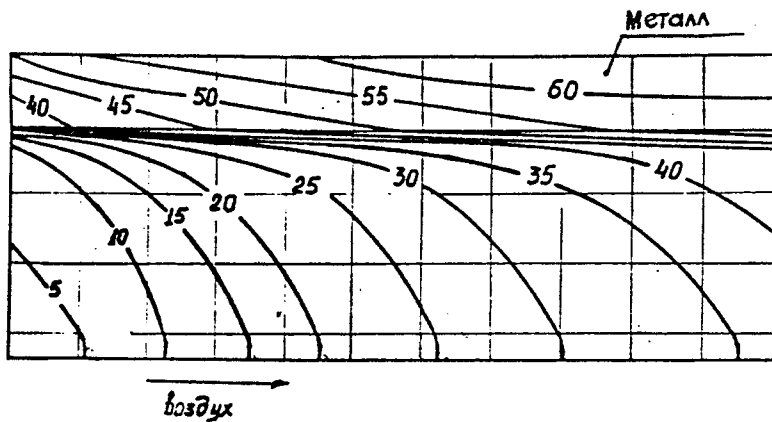


рис.5.10. Изотермы в теле лопатки и движущемся теплоносителе

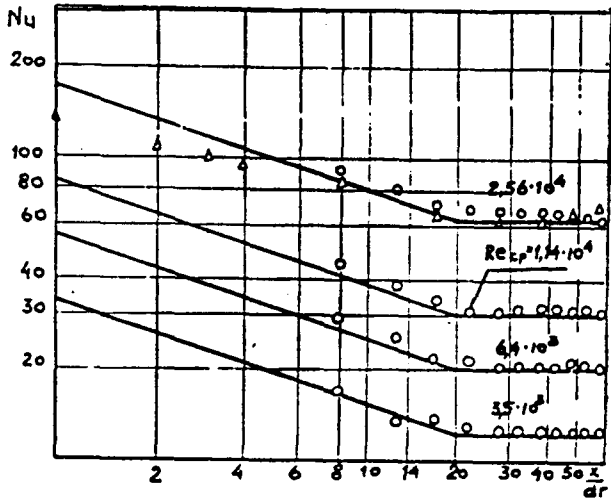


рис.5.11. Распределение локальных коэффициентов теплоотдачи по длине канала охлаждения  
 1. Гидродинамически установившееся движение  
 2. С учетом участка гидродинамической стабилизации

висимостью (5.1). На начальных участках результаты отличаются на 20% от максимального значения числа Нуссельта (рис.5.11).

### 5.1.5. Электрическое моделирование процесса теплообмена в потоках жидкости при двухстороннем обтекании пластины

Полная система уравнений, описывающих перенос тепла при двухстороннем обтекании пластины потоками жидкости, включает уравнения тепловых пограничных слоев и уравнение теплопроводности для пластины [63,69,78,113,183,185].

Взаимное тепловое влияние пластины и обтекающих ее потоков может быть учтено, если математически сформулировать данную задачу как сопряженную, т.е. свести ее к совместному решению уравнений температурных пограничных слоев и уравнения теплопроводности. Такая постановка соответствует граничным условиям четвертого рода.

Рассмотрим полубесконечную пластину толщиной  $\Delta = 0.001$  м, длиной  $l = 1$  м, имеющую коэффициент теплопроводности  $\lambda = 23$  Вт/(м·град), обтекаемую с двух сторон ламинарными потоками жидкости. Исходные данные для теплоносителей приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1

	$T_{in},$ °C	$w_x,$ м/с	$\lambda,$ Вт/ (м град)	$\rho,$ кг/м <sup>3</sup>	$\nu,$ м <sup>2</sup> / с	$Pr$	$\alpha,$ м/с
Поток 1	500	5	$5.74 \cdot 10$	0.456	$79.38 \cdot 10$	0.687	$115.3 \cdot 10$
Поток 2	20	2	$2.59 \cdot 10$	1.205	$15.06 \cdot 10$	0.703	$21.4 \cdot 10$

Теплопроводностью вдоль пластины пренебрегаем. Теплофизические характеристики теплоносителей и пластины считаем постоянными.

Математическую модель данной задачи формулируем в виде трех уравнений с соответствующими граничными условиями [10,79,116,175].

1. Для потока 1 уравнение теплового пограничного слоя



будет иметь вид

$$W_{x_1} \frac{\partial T_1'}{\partial x} + W_{y_1} \frac{\partial T_1'}{\partial y} = \alpha_1 \frac{\partial^2 T_1'}{\partial y^2}, \quad (5.36)$$

где  $T_1' = T_1 - T_{\min}$

Граничные условия можно представить следующим образом:

$$T_1' = T_{1w}(x) - T_{\min}; \lambda_1 \frac{\partial T_1'}{\partial y} = \lambda_{пл} \frac{\partial^2 T_1'}{\partial y^2} \text{ при } y=0; \quad (5.37)$$

$$T_1' = T_{1\infty} - T_{\min} \text{ при } y = -\infty$$

2. Уравнение температурного пограничного слоя для потока 2:

$$W_{x_2} \frac{\partial T_2'}{\partial x} + W_{y_2} \frac{\partial T_2'}{\partial y} = \alpha_2 \frac{\partial^2 T_2'}{\partial y^2} \quad (5.38)$$

с граничными уравнениями

$$T_1' = T_{2w}(x) - T_{\min}; \lambda_2 \frac{\partial T_2'}{\partial y} = \lambda_{пл} \frac{\partial T_{пл}}{\partial y} \text{ при } y=\Delta; \quad (5.39)$$

$$T_2' = T_{2\infty} - T_{\min} \text{ при } y = +\infty,$$

причем  $T_2' = T_2 - T_{\min}$

3. Уравнение теплопроводности для пластины имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 T_{пл}}{\partial y^2} = 0. \quad (5.40)$$

За  $T_{\min}$  принимаем температуру  $T_{2\infty}$ , равную  $+20^\circ\text{C}$ , за  $T_{\max}$  - температуру  $T_1$ , равную  $+500^\circ\text{C}$ .

Аналогично изложенному в работе [17, 20, 104, 136], после приведения к безразмерной форме получим уравнения:

1. Для потока 1

$$Re_1^I \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} + Re_1^{II} \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \eta^2} \quad (5.41)$$

при граничных условиях

$$\theta_1 = \theta_{пл}(1w) \text{ при } \eta = 0; \quad (5.42)$$

$$\theta_1 = 1 \text{ при } \eta = -\infty.$$

2. Для потока 2

$$Re_2^I \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} + Re_2^{II} \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \eta^2} \quad (5.43)$$

при граничных условиях

$$\theta_2 = \theta_{\text{пл}}(2w) \quad \text{при} \quad \eta = \frac{\Delta}{l} ; \quad (5.44)$$

$$\theta_2 = 0 \quad \text{при} \quad \eta = +\infty .$$

3. Для пластины

$$\frac{\partial^2 \theta'_{\text{пл}}}{\partial \eta^2} = 0 . \quad (5.45)$$

Конечно-разностная аппроксимация уравнений (5.41, 5.43, 5.45) и выражение первого закона Кирхгофа для узла  $(i, j)$  записываются аналогично изложенному в работе [17, 136].

С учетом условий сопряжения на границе пластины с потоками жидкости формулы для расчета омических сопротивлений сетки электрической модели будут иметь следующий вид.

Для потока 1

$$R_{i-1}^1 = \frac{2h_1 \xi}{\text{Pe}_1^I (h_1 \eta + h_2 \eta)} \frac{\lambda_{\text{пл}}}{\lambda_1} R_M^{\text{пл}} ; \quad (5.46)$$

$$R_{i,j}^1 = \frac{2h_1 \eta}{\text{Pe}_1^{\text{II}} (h_1 \eta + h_2 \eta)} \frac{\lambda_{\text{пл}}}{\lambda_1} R_M^{\text{пл}} ; \quad (5.47)$$

$$R_{j-1}^1 = h_1 \eta \frac{\lambda_{\text{пл}}}{\lambda_1} R_M^{\text{пл}} ; \quad (5.48)$$

$$R_{j+1}^1 = h_2 \eta \frac{\lambda_{\text{пл}}}{\lambda_1} R_M^{\text{пл}} . \quad (5.49)$$

Для потока 2

$$R_{i-1}^2 = \frac{2h_1 \xi}{\text{Pe}_2^I (h_1 \eta + h_2 \eta)} \frac{\lambda_{\text{пл}}}{\lambda_2} R_M^{\text{пл}} ; \quad (5.50)$$

$$R_{i,j}^2 = \frac{2h_1 \eta}{\text{Pe}_2^{\text{II}} (h_1 \eta + h_2 \eta)} \frac{\lambda_{\text{пл}}}{\lambda_2} R_M^{\text{пл}} ; \quad (5.51)$$

$$R_{j-1}^2 = h_1 \eta \frac{\lambda_{\text{пл}}}{\lambda_2} R_M^{\text{пл}} ; \quad (5.52)$$

$$R_{j+1}^2 = h_2 \eta \frac{\lambda_{\text{пл}}}{\lambda_2} R_M^{\text{пл}} . \quad (5.53)$$

Для пластины

$$R_{j-1}^{\text{пл}} = h_1 \eta R_M^{\text{пл}} ; \quad (5.54)$$

$$R_{j+1}^{\text{пл}} = h_2 \eta R_M^{\text{пл}} . \quad (5.55)$$

Считая известными скорости в различных сечениях пограничного слоя [190], определяем величины сопротивлений по формулам (5.46 – 5.55) и, набрав сетку модели на интеграторе АКАИ-1, квазианалоговым методом моделирования находим поля температур в пластине и омывающих ее потоках жидкости.

Сравнение данных моделирования с аналитическим решением Дорфмана [40, 57, 125] свидетельствует о достаточно высокой степени согласования результатов.

Полученные данные могут быть использованы в практических приложениях при расчете количества тепла, передаваемого через стенку от одной жидкости к другой.

#### 5.1.6. Электромоделирование полей концентраций в ограждающих турбулентных струях

Турбулентные струи могут служить эффективным воздушным ограждением вредных выделений с целью предотвращения распространения вредностей в ранее незагрязненную зону помещения [108].

Рассмотрим процесс диффузии окиси углерода через ограждающую турбулентную струю, вытекающую из плоской щели шириной  $2b = 0.01$  м со скоростью  $W = 5$  м/с.

Уравнение диффузионного пограничного слоя в области основного участка плоской свободной турбулентной струи в безразмерной форме имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \bar{E}_y \frac{\partial \bar{C}_1}{\partial \eta} \right) - \bar{W}_x \frac{\partial \bar{C}_1}{\partial \xi} - \bar{W}_y \frac{\partial \bar{C}_1}{\partial \eta} = 0 . \quad (5.56)$$

Уравнение диффузии в первоначально незагрязненной зоне

$$\frac{\partial^2 \bar{C}_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}_2}{\partial \eta^2} = 0 . \quad (5.57)$$

Граничные условия представляются следующим образом:

$$\bar{C} = 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow +\infty ;$$

$$G_1 = G_2, \quad \bar{C}_1 = C_2 \quad \text{при } \eta \rightarrow -\infty;$$

$$\text{при } \eta = -\frac{b(x)}{2b_0}$$

Здесь  $\bar{C}$  - избыточная концентрация примеси (индекс "1" относится к струе, а индекс "2" - к первоначально незагрязненной зоне);

$$\bar{D} = \frac{D}{2b_0 W_0}$$

- безразмерный коэффициент молекулярной диффузии;

$$W_x \xi \text{ и } W_y \eta$$

- безразмерные координаты;

- соответственно продольная и поперечная составляющие скорости в безразмерном виде;

$$b(x)$$

- полуширина струи, м;

$$\bar{E}_y = 2(c')^2 \xi^2 \frac{d\bar{W}_x}{d\eta}$$

- безразмерный коэффициент турбулентной диффузии;

$$G_1$$

- количество окиси углерода, диффундирующей из струи в незагрязненную зону, г/(м<sup>2</sup>·с);

$$G_2$$

- количество окиси углерода, получаемое струей из первоначально чистой зоны, г/(м<sup>2</sup>·с).

Перенос вредных примесей в турбулентных струях осуществляется, главным образом, благодаря турбулентному перемешиванию частиц. Коэффициенты турбулентного переноса вещества имеют порядок во много раз больший, чем коэффициенты молекулярного переноса, что позволяет пренебречь последним при рассмотрении процесса диффузии через турбулентную ограждающую струю.

Основываясь на математическом описании процесса, перейдем к построению электрической модели. С учетом граничных условий уравнение (5.36) запишется в конечно-разностном виде следующим образом (при  $\bar{W}_x > 0$ ,  $\bar{W}_y > 0$ ):

$$\frac{C_1(i, j+1) - C_1(i, j)}{D h_{1\eta}} + \frac{C_1(i, j-1) - C_1(i, j)}{D h_{2\eta}} + \frac{\bar{E}_y(i, j + \frac{1}{2})(h_{1\xi} + h_{2\xi}) [\bar{E}_y(i, j - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \bar{W}_y(i, j)(h_{1\eta} + h_{2\eta})(h_{1\xi} + h_{2\xi})]}{D 2 h_{2\xi}} + \frac{C_1(i-1, j) - C_1(i, j)}{D 2 h_{2\xi}} = 0, \quad (5.58)$$

$$\bar{W}_x(i, j)(h_{1\xi} + h_{2\xi})(h_{1\eta} + h_{2\eta})$$

где 
$$\bar{E}_y(i, j + \frac{1}{2}) = 2(c')^2 \xi^2 \frac{\bar{W}_x(i, j+1) - \bar{W}_x(i, j)}{h_1 \eta} ;$$

$$\bar{E}_y(i, j - \frac{1}{2}) = 2(c')^2 \xi^2 \frac{\bar{W}_x(i, j) - \bar{W}_x(i, j-1)}{h_2 \eta} .$$

Сопоставив уравнение (5.58) с выражением первого закона Кирхгофа для узла  $(i, j)$  сеточной модели, найдем формулы для расчета омических сопротивлений при  $\bar{W}_x > 0$  и  $\bar{W}_y > 0$ :

$$R_{2\xi}^T = \frac{2 h_2 \xi D}{2 \beta_0 W_0 \bar{W}_x(i, j) (h_1 \xi + h_2 \xi) (h_1 \eta + h_2 \eta)} R_M ; \quad (5.59)$$

$$R_{1\eta}^T = \frac{D h_1 \eta}{\bar{E}_y(i, j + \frac{1}{2}) (h_1 \xi + h_2 \xi) 2 \beta_0 W_0} R_M ; \quad (5.60)$$

$$R_{2\eta}^T = \frac{D h_2 \eta R_M}{[\bar{E}_y(i, j - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} W_y(i, j) (h_1 \eta + h_2 \eta)] (h_1 \xi + h_2 \xi) 2 \beta_0 W_0} . \quad (5.61)$$

Здесь  $R_M$  - масштабное сопротивление.

При  $\bar{W}_y < 0$ , аппроксимируя уравнение (5.56), нужно взять разности "вперед", чтобы в модели не появилось отрицательных сопротивлений.

Вся струя разбивалась на 9 сечений по оси абсцисс, а затем вычислялись продольные и поперечные скорости в пятнадцати точках каждого поперечного сечения струи согласно "старой" полумпирической теории свободной турбулентности Прандтля. Затем по формулам (5.59-5.61) определялись величины омических сопротивлений сетки модели диффузионного процесса в струе и проводилось моделирование на двойной сетке с повторителями [1, 4, 51, 76, 77, 81].

Процесс диффузии в первоначально незагрязненной зоне моделировался на дополнительной сетке из омических сопротивлений, величины которых находились по известной методике [61].

Результаты моделирования свидетельствуют об эффективности использования турбулентных струй в качестве воздушных ограждений.

## 5.2. Определение температурных полей в лопатках в квазисопряженной постановке

Определение температурного состояния всей охлаждаемой лопатки ГТ, работающей на переходных режимах, в сопряженной постановке затруднительно, потому что неизвестны эпюры скоростей в районе входной кромки, в задефлекторной зоне. Недостаток расчетного и экспериментального материала для этих зон объясняется сложностью гидродинамических процессов в них происходящих. В связи с этим возникает необходимость моделирования процесса в охлаждаемой лопатке в более упрощенной постановке, а именно, когда с этой целью используются средние по расходу скорости и коэффициенты теплообмена. Значение тех и других величин легко вычисляется с помощью известных формул и критериальных зависимостей [60, 114, 132, 142, 151].

В настоящем разделе рассматривается возможность определения температурного состояния лопаток, различных конструкций, охлаждаемых различными способами (рис. 2.3) при указанных ниже допущениях, на квазианалоговых  $R$  - сеточных ВМ в сочетании с ЭВМ.

Чтобы оценить температурное состояние охлаждаемых и неохлаждаемых лопаток ГТ во многих случаях достаточно определить двумерное поле температур и рассматривать теплообмен либо в плоских профильных сечениях лопаток [50], либо представить перо лопатки как пластину [44, 71, 105], т.е. во всех случаях задача сводится к определению полей температур в плоской стенке и теплоносителях, ее смывающих, т.е. к двумерному уравнению (3.1) надо присовокупить уравнения (3.11), (3.12), (3.13), (3.14) и решить эту систему.

Решение такой системы уравнений возможно на квазианалоговом интеграторе (рис. 4.15).

Методика квазианалогового моделирования теплового состояния лопаток газовой турбины на этом интеграторе изложена подробно в работе [159]. Там же приведены формулы для расчета сетки сопротивлений в прямоугольной системе

координат. Однако используемый метод моделирования позволяет представить тело лопатки в криволинейной ортогональной системе координат. Расчет сетки для моделирования уравнения Фурье-Кирхгофа вида (3.52) изложен в работе [159]. Для узлового элемента сечения лопатки (рис. 5.12) изложенные в [158] формулы примут следующий вид:

$$R_{\Delta F_0}^B = \frac{\Delta F_0 R_M}{K_2 (\sigma_{ВН,i-1} + 2\sigma_{ВН,i} + \sigma_{ВН,i+1})}; R_{\Delta F_0}^R = \frac{2 \Delta F_0 R_M}{(\sigma_{h_2} + \sigma_{h_3})(\sigma_{1i} + \sigma_{1i+1})};$$

$$R_{\sigma_{1i}}^B = \frac{\sigma_{1i} R_M}{(\sigma_{h_2} + \sigma_{h_3})}; R_{\Delta F_0}^R = \frac{\Delta F_0 R_M}{K (\sigma_{НАР,i-1} + 2\sigma_{НАР,i} + \sigma_{НАР,i+1})};$$

$$R_{\sigma_{h_3}}^B = \frac{2 \sigma_{h_3} R_M}{\sigma_{3,i+1} + \sigma_{3,i-1} + 2\sigma_{3,i}}; R_G^B = \frac{(\sigma_{ВН,i} + \sigma_{ВН,i-1}) R_M}{\sigma_{ВН,i-1} + 2\sigma_{ВН,i} + \sigma_{ВН,i+1}} z_2; \quad (5.62)$$

$$R_G^R = \frac{(\sigma_{НАР,i} + \sigma_{НАР,i-1}) R_M}{(\sigma_{НАР,i-1} + 2\sigma_{НАР,i} + \sigma_{НАР,i+1}) z_1}; R_{\sigma_{1,i+1}}^B = \frac{\sigma_{1,i+1} R_M}{\sigma_{h_2} + \sigma_{h_3}};$$

$$R_{\sigma_{1i}}^R = \frac{R_M}{B_{i1} (\sigma_{НАР,i-1} + 2\sigma_{НАР,i} + \sigma_{НАР,i+1})};$$

$$R_{\sigma_{1i}}^B = \frac{R_M}{B_{i2} (\sigma_{ВН,i-1} + 2\sigma_{ВН,i} + \sigma_{ВН,i+1})};$$

где  $\sigma_{ВН} = \frac{\Delta X_{ВН}}{\ell}; \sigma_{НАР} = \frac{\Delta X_{НАР}}{\ell}; \sigma_1 = \frac{\Delta X_1}{\ell};$

$$\sigma_2 = \frac{\Delta X_2}{\ell}; \sigma_3 = \frac{\Delta X_3}{\ell}; \sigma_{h_2}, \sigma_{h_3} -$$

- относительные расстояния по внешней и внутренней границам участков, между центрами участков, между средней линией и поверхностью лопатки, между границами на 1/4 толщины участков.

Сределение температурных полей в охлаждаемых лопатках проводилось на специально созданном для этой цели квазианалоговом интеграторе с ручным уравниванием.

Схема R-сетки для моделирования теплового состояния данного типа лопаток приведена на рис. 5.13.

### 5.2.1. Исследование теплообмена в охлаждаемых и неохлаждаемых лопатках газовых турбин

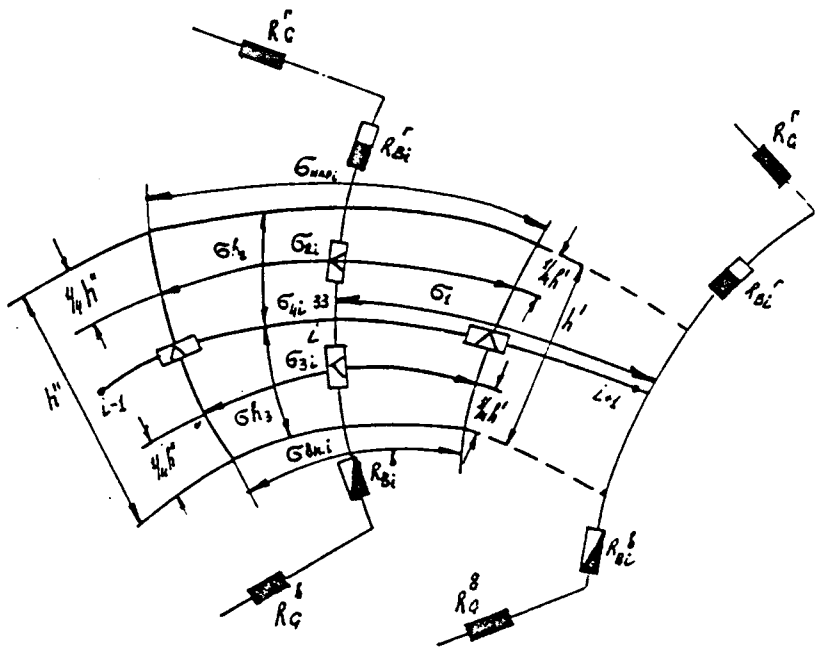


рис.5.12. Элемент ортогональной криволинейной R-сетки



В настоящем разделе определялись двумерные стационарные и нестационарные поля сопловых и рабочих лопатках газовых турбин, работающих на базовых и переходных режимах.

Исследовались охлаждаемые и неохлаждаемые лопатки. При этом принимались допущения, характерные для всех типов лопаток. В основном исследовались температуры в их профильных сечениях. Начальные распределения температур в металле и воздухе были взяты из решения стационарных задач. Температура охлаждающего воздуха бралась постоянной по высоте канала охлаждения и равной его температуре на выходе из отверстий носика дефлектора. Температура газа принималась постоянной вдоль межлопаточного канала для каждой секунды работы двигателя и равной температуре торможения по относительной скорости движения. Коэффициенты теплоотдачи со стороны газа и воздуха определялись по критериальным зависимостям, приведенным в [93]. Все теплофизические коэффициенты принимались по средней температуре газа и воздуха на каждом шаге решения [194].

На квазианалоге решалась задача нестационарной теплопроводности для дефлекторной рабочей лопатки авиационного двигателя (рис. 2.3а), работающего в режиме приенистости.

Моделирование осуществлялось для среднего по длине лопатки сечения. Координаты профиля представлены в таблице п. 1.1.3. Плоское сечение лопатки разбивалось на 30 участков (200 узловых точек). Ортогональная сетка резисторов рассчитывалась по формулам (5.62). Коэффициенты теплоотдачи с горячей стороны рассчитывались по методике ЦИАМа, выделялись пять участков:

1. Входная кромка - цилиндрическая часть лопатки, равная 0.1 хорды.
2. Входная кромка, составляющая 0.3 хорды.
3. Участок корытца.
4. Два участка по спинке лопатки.

За определяющий размер принимался диаметр входной кромки и хорды лопатки. Коэффициенты теплоотдачи по холодной стороне находились по методике А.И.Мазура [103]. В этом случае выделялись четыре основных элемента охлаждающего тракта, подобные по характеру течения воздуха и теплообмена:

1. Полость входной кромки вплоть до сечения, совпадающего со срезом носика дефлектора. За определяющий размер в этом случае принимался гидравлический диаметр на входной кромке дефлектора.

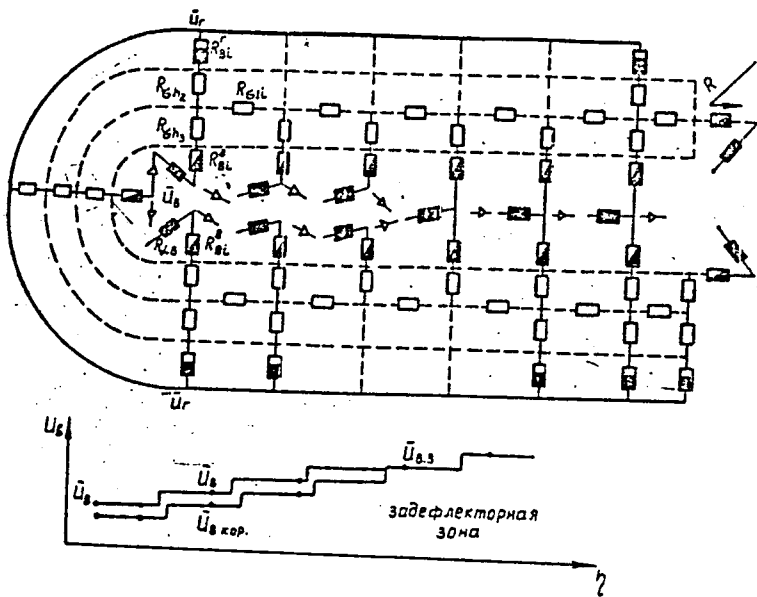


рис.5.13. Схема электрической модели лопатки

2. Каналы между дефлектором и стенкой лопатки. Нижняя граница их лежит в сечении среза кормы дефлектора. Гидравлический размер – удвоенный зазор.

3. Пустота в лопатке за дефлектором. Определяющий размер – ширина канала.

4. Каналы для выпуска воздуха из лопатки. Определяющий размер – гидравлический диаметр выходной решетки.

На рис. 5.14 и 5.15 показаны изотермы на сечения лопатки на нулевой и девятой секундах режима приемистости. Результаты моделирования в таблицах п. 1.1.1.

Из анализа полученных результатов видно, что наиболее сильно двумерность задачи проявляется в районе входной и выходной кромок. На входной кромке наиболее сильно выражена двумерность в зоне входа потоков охлаждающего воздуха в щелевые каналы. Для задефлекторной зоны наиболее характерна в этом отношении зона смещения воздушных потоков, выходящих из каналов охлаждения спинки и корытца.

В конце режима приемистости поле температур выходит на стационарный режим.

Достоверность полученных результатов по моделированию нестационарного температурного состояния лопатки квазианалоговым методом проверялась сравнением с данными расчета, для тех же граничных условий, на ЭВМ методом Голубевой О.К. [21,22]. Температуры поверхностей по периметру лопатки с газовой и воздушной сторон на пятнадцатой секунде работы показаны на рис. 5.16. Разница в температурах, полученных различными методами не превышает 3% от максимальной температуры лопатки на этой секунде режима приемистости.

Помимо исследований температурного состояния охлаждаемых лопаток в работе были проведены расчеты температур в неохлаждаемой рабочей лопатке.

Анализ температурного состояния сопловой лопатки показал, что в стационарном режиме максимальная температура лопатки наблюдается на 24 участке (1099 К), минимальная – на 16, 17, 18 участках (851 К), наибольшие перепады температур приходятся на 8, 9, 10, 11 участки со стороны воздуха, 22, 23, 24, 25 участки со стороны газов и на 60, 61 со стороны газов.

При приемистости двигателя за 10 секунд (1 режим рис.5.18 – 5.20) разность температур, равная 64°С, наблюдается между восьмой и десятой секундой работы двигателя

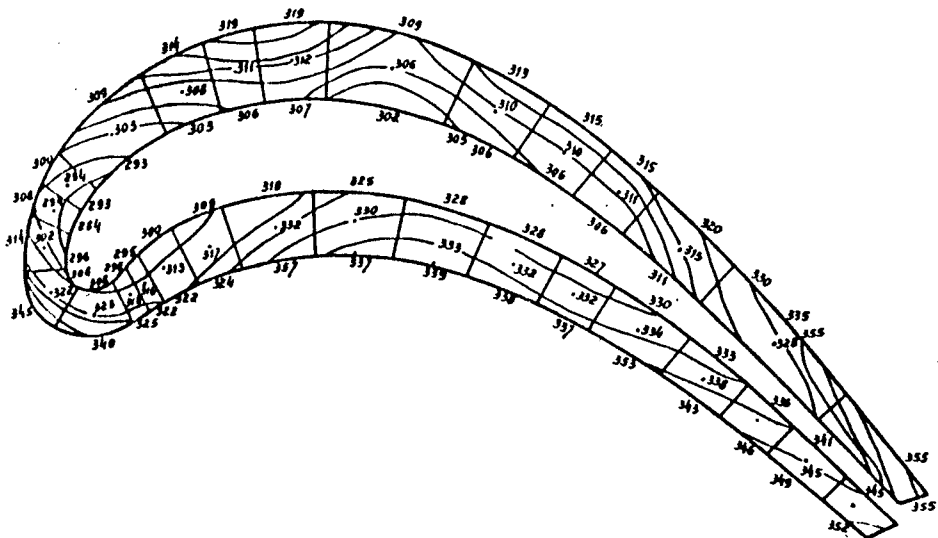


рис.5.14. Изотермы в сечении охлаждаемой лопатки. Нулевая секунда

рис.5.14. Изотермы в сечении охлаждаемой лопатки. Нулевая секунда

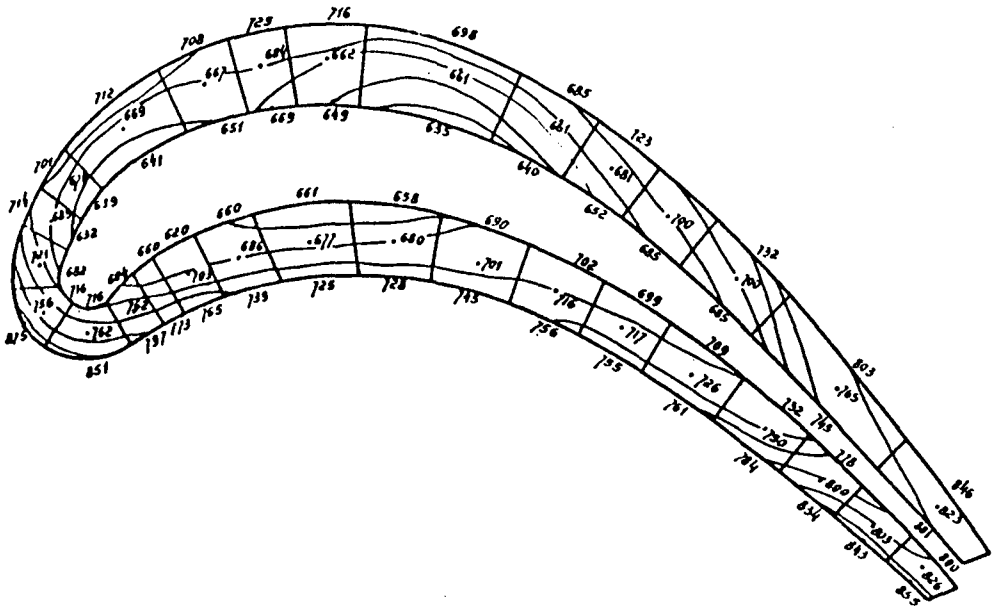


рис.5.15. Изотермы в сечении охлаждаемой лопатки. Девятая секунда

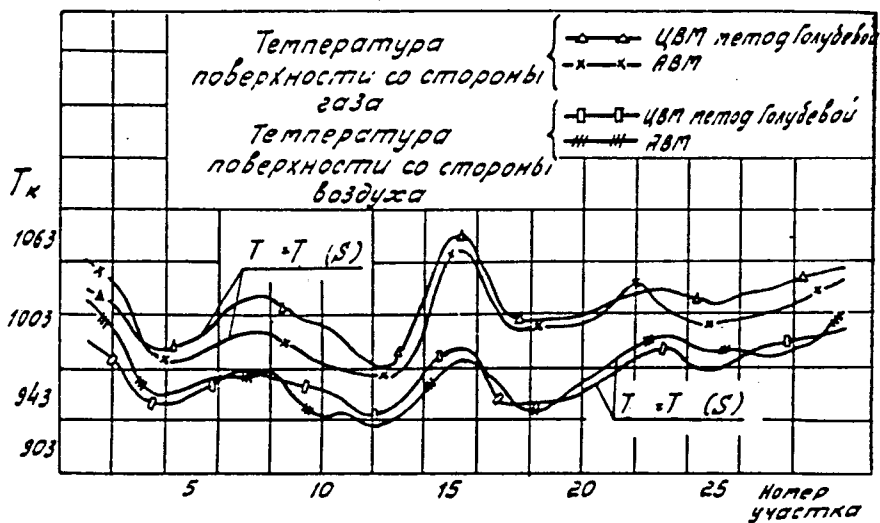


рис.5.16. Температуры поверхности охлаждаемой лопатки.  
 Пятнадцатая секунда работы двигателя

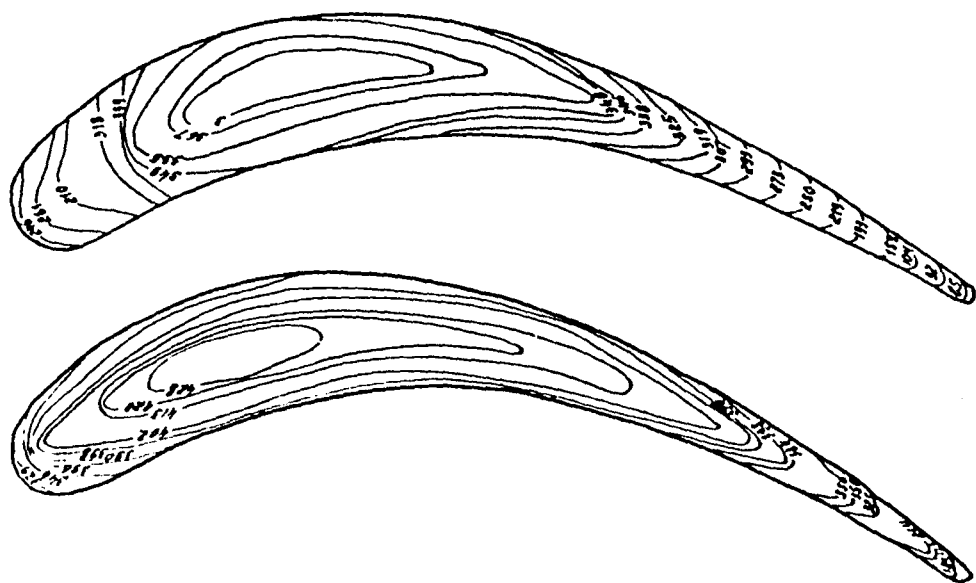


рис.5.17. Изотермы в сечении лопатки 0.5 и 5-я секунды  
останова

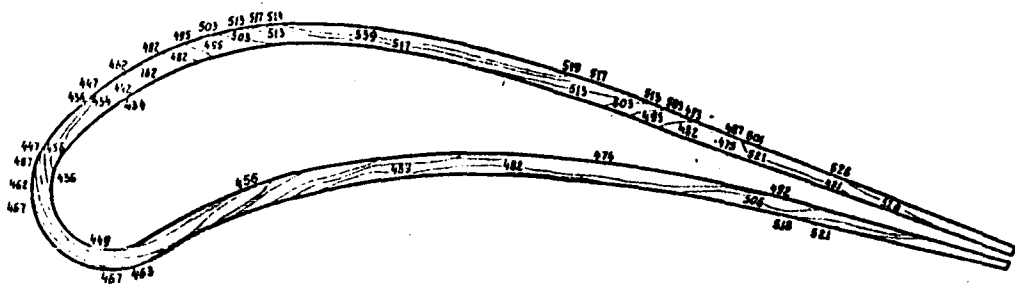


рис.5.18. Поле температур в сопловой лопатке : 2 с



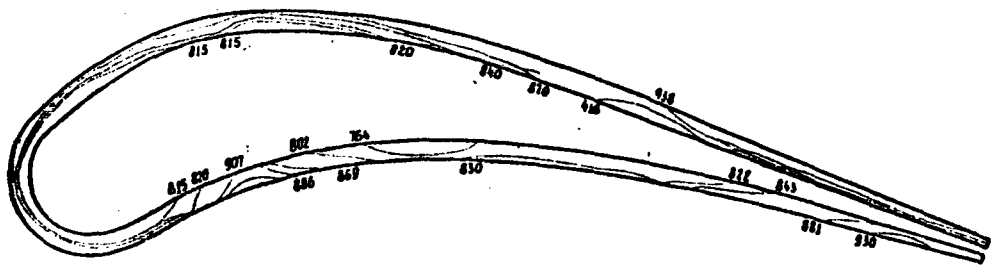


рис.5.19. Поле температур в сопловой лопатке : 5 с

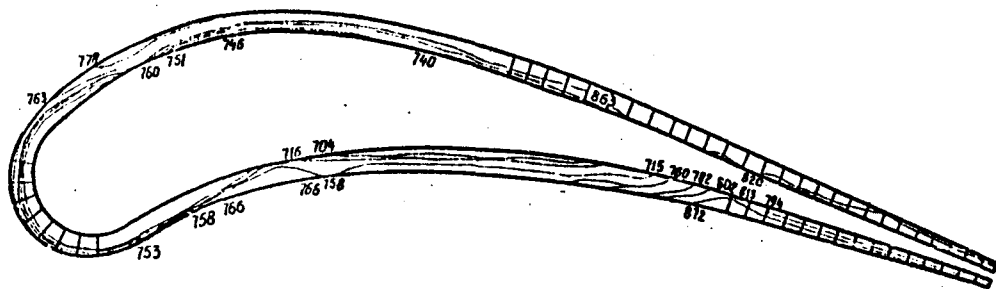


рис.5.20. Поле температур в сопловой лопатке : 8 с

на 3 участке лопатки со стороны воздуха.

Наибольший разброс температур лопатка имеет на десятой секунде и составляет  $234^{\circ}$ .

При приемистости двигателя за 7 секунд максимальная разность температур, равная  $96^{\circ}$ , наблюдается между шестой и седьмой секундой работы двигателя, на 3 участке лопатки со стороны воздуха. Наибольший разброс температур при приемистости за 7 секунд лопатка имеет на седьмой секунде и составляет  $205^{\circ}$ .

При сбросе режима (рис. 5.21 – 5.23) с максимального до малого газа за 3 секунды максимальная разность температур, равная  $77^{\circ}$ , наблюдается между первой и второй секундой режима сброса нагрузки на 3б участке лопатки со стороны охлаждающего воздуха.

Наибольший разброс температур при останове за 4 секунды лопатка имеет на первой секунде и составляет  $128^{\circ}$ .

### 5.3. Расчет стационарного температурного поля в охлаждаемой лопатке газовой турбины методом разложения по ортогональным функциям

В этом разделе предлагается аналитический метод расчета температурного поля лопатки в стационарном режиме с использованием малых ЭЭМ.

Рассматриваемая задача имеет следующую математическую постановку:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 ; \quad (5.63)$$

$$\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial n} \right|_B = \alpha_r (t_r - t_{ct}) ; \quad (5.64)$$

$$-\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial n} \right|_B = \alpha_B (t_{ct} - t_B) . \quad (5.65)$$

Анализируя граничные условия, замечаем, что теплообмен со стороны газа и воздуха можно описать одной формулой.

$$\alpha t_r = \lambda \frac{\partial t}{\partial n} + \alpha t_{ct} ; \quad (5.66)$$

$$\frac{\partial t}{\partial n} = \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} ; \quad (5.67)$$

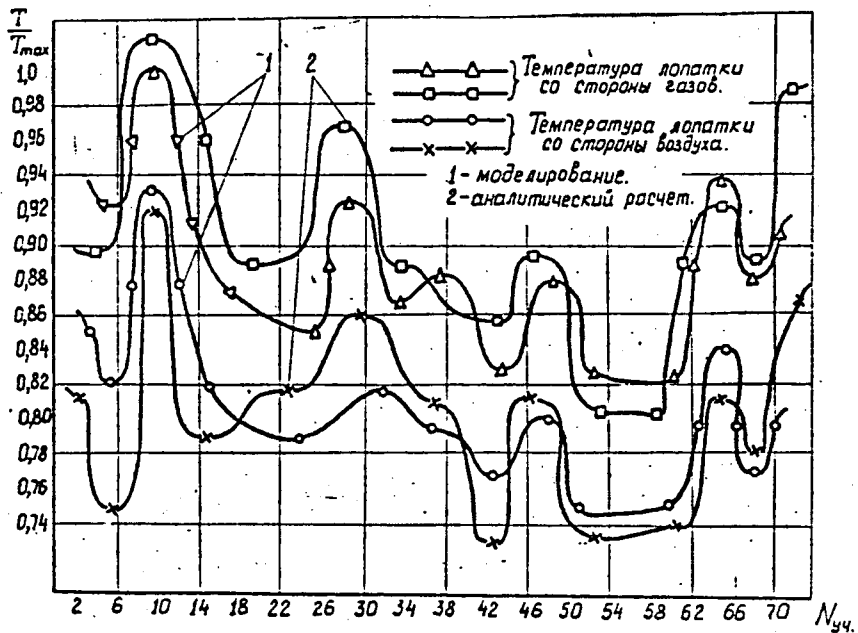


рис.5.21. Температурное поле в сечении лопатки при разбиении его на 69 участков

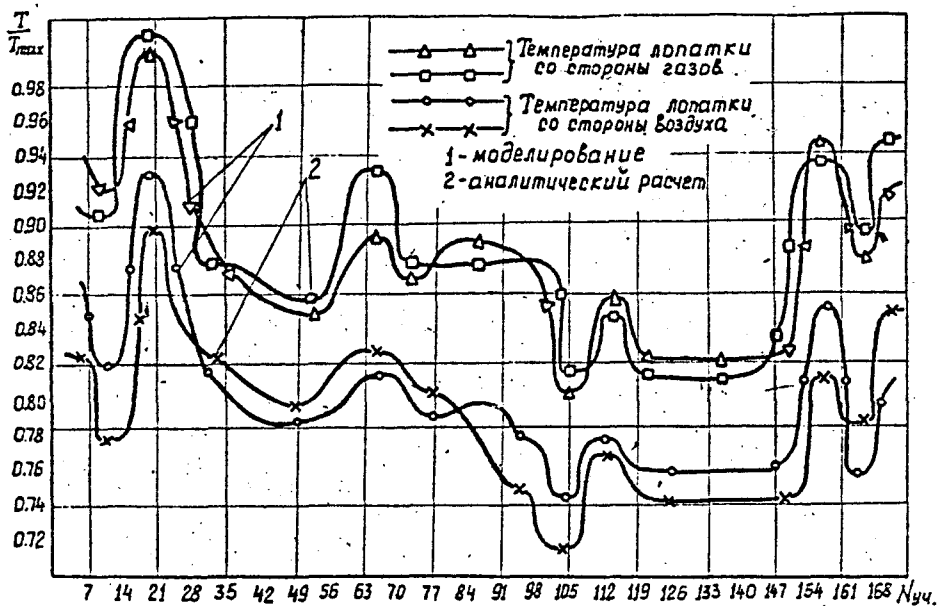


рис. 5.22. Температурное поле в сечении лопатки при разбиении его на 168 участков

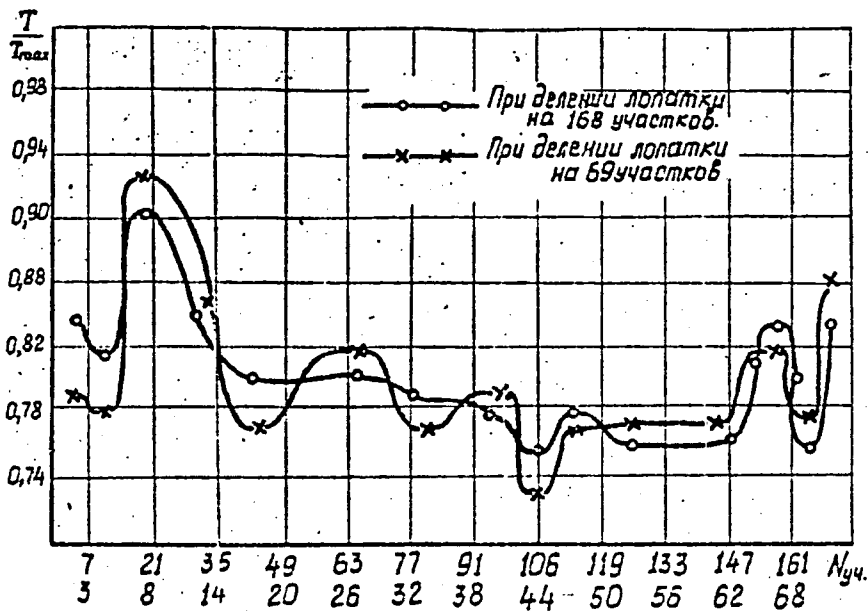


рис.5.23. Сравнение результатов при различных разбиениях сечения на участки

$$\frac{\partial y}{\partial n} = \cos(\hat{n}, y) = \ell; \quad \frac{\partial x}{\partial n} = \cos(\hat{n}, x) = m. \quad (5.69)$$

Тогда

$$\frac{\partial t}{\partial n} = \frac{\partial t}{\partial y} \ell + \frac{\partial t}{\partial x} m \quad (5.69)$$

$$\text{и} \quad \frac{dt}{\lambda} = \frac{\partial t}{\partial y} \ell + \frac{\partial t}{\partial x} m + \frac{dt_{cr}}{\lambda}. \quad (5.70)$$

Найдем семейство решений уравнения (5.63). Из теории функции комплексной переменной известно, что действительная и мнимая части любой аналитической функции являются каждая в отдельности решением уравнения Лапласа (5.63). Поэтому будем искать решение в виде функции

$$Z^n = (x + iy)^n, \quad (5.71)$$

где  $n=0$  или является целым положительным числом, а в качестве  $g$  берется последовательно действительная и мнимая части функции. Приведем некоторые значения функции  $g_n$  (при  $n=0, 1, 2, 3, \dots$ ):

$$g_1 = x; \quad g_2 = y; \quad g_3 = x^2 - y^2; \quad g_4 = 2xy. \quad (5.72)$$

Решение уравнения Лапласа, выраженное через функции  $g_n$ , можно записать как

$$t(x, y) = \sum_{n=1}^N C_n g_n(x, y). \quad (5.73)$$

Константы  $C$  определяем, используя граничное условие

$$(5.70) \quad \frac{dt}{\lambda} = \sum_{n=1}^N C_n \left[ \left( \frac{\partial g_n}{\partial y} \ell + \frac{\partial g_n}{\partial x} m \right) + \frac{dt_{cr}}{\lambda} \right], \quad (5.74)$$

обозначим

$$F_i = \left( \frac{dt}{\lambda} \right)_i; \quad (5.75)$$

$$A_{ni} = \left( \frac{\partial g_n}{\partial y} \ell + \frac{\partial g_n}{\partial x} m \right)_i + \frac{dt_{cr}}{\lambda} g_{ni}, \quad (5.76)$$

где  $i=1, 2, 3, \dots, M$ .

Тогда

$$F_i = \sum_{n=1}^N C_n A_{ni}. \quad (5.77)$$

Выбрав по внешнему и внутреннему контурам сечения лопатки  $M$  точек, получим  $M$  значений  $F$ . Если  $M > N$ , то система (5.77) будет переопределенной. Решая систему методом наименьших квадратов, находим неизвестные коэффициенты  $c$ , а затем и температурное поле лопатки.

Настоящая методика расчета для тел произвольной формы разработана Спэрроу и Хаджи-Шейхом [14, 15, 153, 198, 200].

В данной работе для определения неизвестных коэффициентов был принят метод наименьших квадратов с использованием декартовой системы координат. Его преимущества состоят в следующем:

1. Нет надобности в усложненных кодах для ЭВМ, что позволяет решать задачу на малых ЭВМ.
2. Число членов ряда (5.73) не зависит от количества используемых граничных точек в противоположность методу точечного согласования.
3. Для получения точного решения требуется меньшее число членов ряда (5.73), чем в случае метода точечного согласования.

В работе исследовалось несколько вариантов решения. Всякий раз проводилось сравнение с результатами электро-моделирования.

1 вариант - сечение лопатки разбивалось на 69 участков, в результате получалось 140 точек на внешнем и внутреннем контурах вместе. Это означает, что граничные условия теплообмена задавались в 140 точках. Решение проводилось при числе членов ряда (5.73) равным 5. Результаты исследования представлены на рис. 5.21. Аналитическое решение отличается от результатов моделирования на 10% от  $T_{max}$ .

2 вариант - сечение разбивалось на 168 участков. В этом случае по всей длине контура получалось 338 точек. Это примерно одна точка через каждые 0.5 мм натуральной длины контура. Результаты этого варианта представлены на рис. 5.22. Аналитическое решение отличается от результатов моделирования на 5-6% от  $T_{max}$ .

На рис. 5.23 представлены графики сравнения первого варианта аналитического решения со вторым.

3 вариант - исследование проводилось при числе членов ряда (5.73) равным 5 и 10. Для простоты решения проводилось для небольшой части лопатки, а именно с 47 по 57 участки сечения.



## 6. ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО СОСТОЯНИЯ ДИСКА ПЕРВОЙ СТУПЕНИ ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ

В разделе 2 описана схема охлаждения диска. Добавим к этому еще и то, что исследуемый диск газовой турбины представляет собой цилиндрическое тело с отверстием в центре радиусом  $R$ , т.е. многосвязную область. Поместим диск объемом  $\Omega$  в цилиндрической системе координат (см. раздел 3.2.1.) так, чтобы ось  $Z$  проходила через центр диска (рис.6.1). Толщина диска, граничные условия охлаждения не зависят от координаты  $\xi$ , а изменяются в основном вдоль координат  $z$  и  $r$  [125, 135, 148, 191, 193].

Ввиду симметричности геометрии и граничных условий формируем задачу нестационарной теплопроводности и для плоского радиального сечения  $S(r, z)$  половины колеса. Диск вращается с угловой скоростью  $\omega$  около оси  $Z$ . Число оборотов по времени переменное и меняется в диапазоне  $\Delta n$  за время  $\Delta t$ .

Теплофизические коэффициенты в задаче принимаются независящими от температуры и времени. Берутся их средние значения в заданном интервале температур.

Представим диск в подвижной системе координат, когда диск вращается вместе с осями  $r$  и  $z$ , тогда диск как-бы остановится, а охлаждающая среда вдоль левой и правой поверхности диска будет двигаться по отношению к ней с какой-то относительной скоростью  $\mathcal{V}$ . Составляющие этой скорости будут  $\mathcal{V}_\xi$ ,  $\mathcal{V}_z$  и  $\mathcal{V}_r$ . Уравнение теплопроводности (3.46) для диска примет вид:

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} ; r, z, \in \Omega ; \quad (6.1)$$

$$R_1 \leq r \leq R_2, \quad b_2 \leq z \leq -b_1, \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

На участках поверхности диска  $z=b_2$ ,  $R_1 < r < R_2$ ,  $z=-b_1$ ,  $R_1 < r < R_2$  - теплообмен определяется гидродинамикой воздуха, вращающегося от соприкосновения с диском, составляющая  $\mathcal{V}_\xi$ , и перемешающимся под действием центробежных сил, составляющая  $\mathcal{V}_r$ . Температура ее зависит от начальной температуры в данной точке поверхности и температуры от тепла, выделяющегося от центробежного поджатия газа.

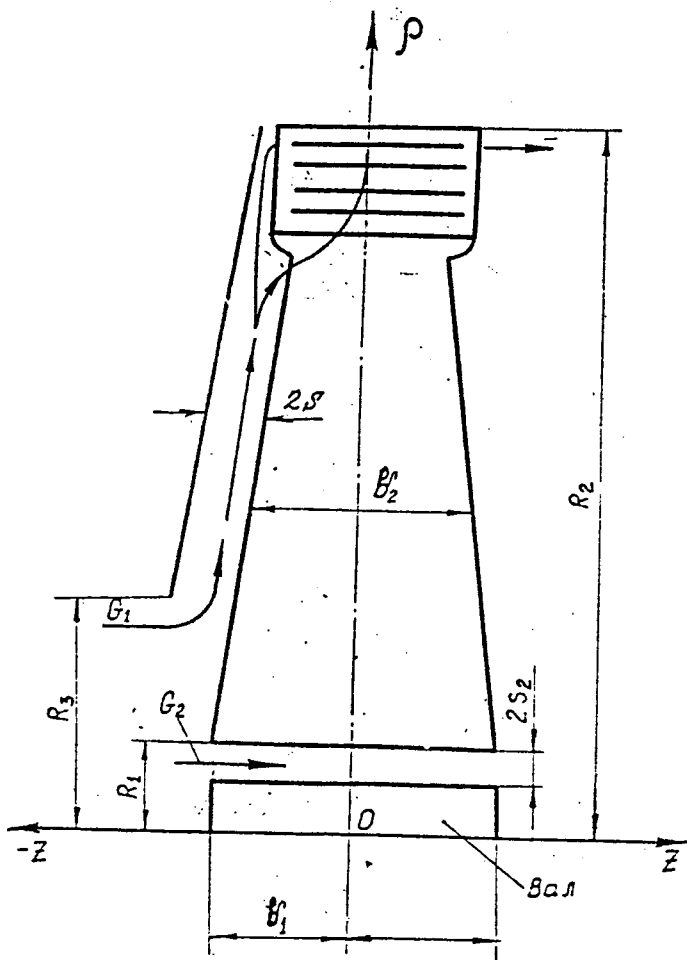


рис.6.1. К осесимметричной задаче теплопроводности для вращающегося диска в цилиндрических координатах

$$\omega_{\text{погж.}} = \frac{\pi d n}{60} ; \Delta T_{\text{п.в.}} = \frac{\omega_{\text{погж.}}^2}{2100}.$$

Коэффициенты теплоотдачи в граничных условиях третьего рода (см. 3.13, 3.14) определяются по зависимостям, приведенным в [40, 59], для случая вращающегося диска в неподвижной жидкости.

На участке поверхности  $z=-b$ ,  $R_3 < r < R_2$  осевая составляющая скорости  $v_r$  увеличивается на величину скорости от напора воздуха расходом  $G$ , движущегося в канале, образованном вращающимся диском и экраном. Гидродинамическая задача для движущегося потока в канале симметричная. Тепловая симметрия не имеет места, т.к. тепловые потоки различны на поверхности диска и экрана.

Конвективный теплообмен удобно рассчитывать с помощью граничных условий третьего рода. Коэффициенты теплоотдачи для рассматриваемого случая приведены в [50, 59, 124, 189].

На участке  $r=R_1$ ,  $-b_2 < z < b_2$  также наблюдается конвективный теплообмен в кольцевом канале шириной  $2b_2$ , который образован поверхностями втулки диска и вала. В этом канале на воздух, движущийся параллельно оси  $z$  ( $v_z$ ), накладывается поле центробежных сил. Коэффициенты теплоотдачи для такого случая теплообмена определялись по формулам, приведенным в [50, 53, 54, 59, 124, 189].

На участке  $r=R_2$ ,  $-b_2 < z < b_2$  воздух продувается через щели между хвостовиком лопатки и ободом диска. Теплообмен идет конвективный, а также контактный в зоне соприкосновения ножи лопатки и диска. Здесь также можно использовать при решении задачи теплопроводности граничные условия третьего рода. Коэффициент теплоотдачи заменяется условным коэффициентом теплоотдачи, который включает в себя дополнительно термическое сопротивление зоны контакта. Методика расчета таких условных коэффициентов теплоотдачи описана в [189].

### 6.1. Исследование стационарного температурного состояния диска рабочего колеса газовой турбины методом электромоделирования

Рассмотрим теперь теплообмен между воздухом и стенками канала охлаждения при одномерной схеме теплообмена. Для элемента жидкости в канале имеем:

$$\rho v f = G_B = \text{const}; \quad (6.2)$$

$$C_p \frac{dT_r}{dr} + v \frac{dv}{dr} = \frac{\alpha U}{G_B} (T_f - T_r) + \omega^2 r \cos \gamma. \quad (6.3)$$

Для элемента диска в цилиндрической системе координат

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = 0. \quad (6.4)$$

На поверхности диска теплообмен задан в виде граничных условий третьего рода:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha U (T_f - T_r). \quad (6.5)$$

В этих формулах  $G_B$  - расход жидкости, кг/с;  $v$  - среднemasсовая скорость течения воздуха в канале, м/с;  $U$  - периметр канала, м;  $\omega$  - угловая скорость вращения диска, 1/с;  $T_r$  - температура среды, К;  $T_f$  - температура стенки канала, К;  $\alpha$  - коэффициент теплоотдачи от стенки к воздуху, Вт/м<sup>2</sup>·К;  $r$  - радиус текущего сечения канала, м;  $\gamma$  - угол между радиусом оси канала.

В уравнении (6.3) в левой части находится изменение "полной" энергии потока (энтальпии торможения), а в правой части первый член представляет собой удельное подведенное тепло за счет теплоотдачи, а второй - удельную работу центробежных сил инерции.

При известной скорости течения воздуха в каналах требуется решать систему уравнений (6.2 - 6.5) соответствующими условиями однозначности для каждого участка канала АБ, БВ, ГД.

Среднерасходная температура воздуха в каналах АБ, ГД определялась непосредственно на модели методом последовательных приближений из решения уравнений (6.5), (6.3), (6.4) квазианалоговым способом моделирования [44].

Для решения задачи был создан специализированный квазианалоговый R-сеточный электроинтегратор, приспособленный для решения подобных задач теплообмена в системах охлаждения ГТУ.

Методика квазианалогового моделирования температурных полей при одномерной схеме списания теплообмена в охладителе изложена в разделе 4.1. Она успешно применена к расчету температурного состояния охлаждаемых лопаток ГТУ.

В данной главе показано обобщение этой методики квазианалогового моделирования на случаи задачи теплопроводности дисков ГТУ.

Для обработки методики электромоделирования третья краевая задача стационарной теплопроводности для тела сложной конфигурации, каким является диск турбомшины, решалась с различной дискретизацией моделируемой области. На одном из режимов работы двигателя исследовалось влияние дискретизации задания граничных условий теплообмена на изменение температурного поля обода диска, где имеет место интенсивный отвод тепла. Из графиков рис. 6.2 видно, что это влияние проявляется наиболее существенно в верхней части обода, быстро выравниваясь уже внутри замкового соединения.

Результаты электромоделирования стационарных температурных полей диска сравнивались с данными эксперимента и численным решением той же задачи методом элементарных балансов (для режима III так газ) и данными эксперимента (для режима IV номинального). Данные сравнения приведены в табл. 6.1. Из табл. 6.1 видно, что достигнуто хорошее совпадение результатов численных расчетов с экспериментальными данными. Несовпадение данных моделирования составляет 1.83% для режима III и 4.4% для режима IV. Результаты численного решения отличаются от данных моделирования на 1.89%.

Наибольшее расхождение результатов моделирования и расчета не превышало 8% от масштабной разности температур в задаче (рис. 6.3).

На рис. 6.4 представлено безразмерное температурное поле диска на одном из режимов работы ГТУ. Исследования показали, что перепад температур по радиусу между центром и ободом диска на всех стационарных режимах работы не превышает  $300^{\circ}$ .

## 6.2. Методика определения стационарных температурных полей в диске методом Сперроу-Хаджи-Шейха

### 6.2.1. Постановка контактной задачи теплопроводности вал-диска рабочего колеса турбины

Влияние дискретизации задания граничных условий теплообмена

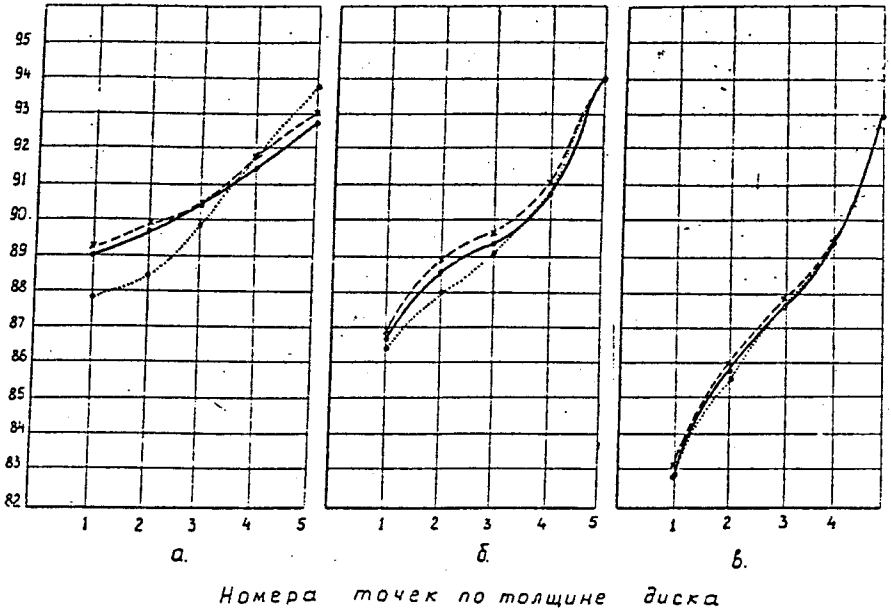


рис.6.2. Влияние дискретизации задания граничных условий теплообмена

а - вращающаяся часть диска       $\delta$  - средняя часть диска  
 б - обод диска

--- метод конечных разностей  
 — подделение  
 ..... дискретизация триангуляцией

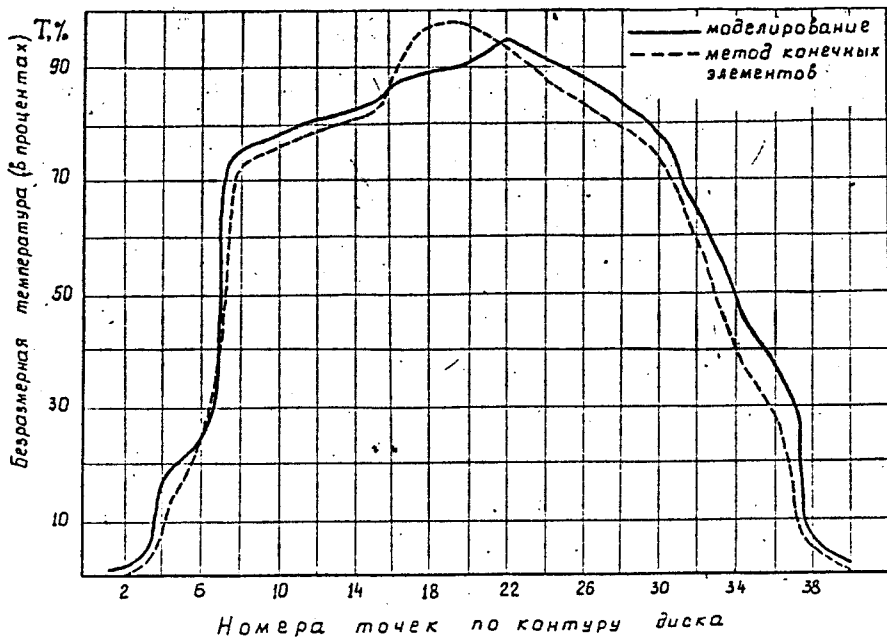


рис. 6.3. Сравнение результатов моделирования и расчета для диска

Сравнение стационарных температур диска, полученных  
электро моделированием, методом элементарных балансов и  
экспериментом

Таблица 6.1

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17		
Модел.	755	758	764	736	761	761	761	760	750	740	712	630	603	582	556	543	515	ре жи м	
м.э.б.	835	792	774	769	766	758	755	751	745	734	699	635	603	571	537	524	514		
Δ %	9.6	4.3	1.3	.78	.65	0.4	.79	1.2	.67	.81	1.9	.79	0	1.6	3.5	3.6	.19		
экспер.	788	786	781	780	777	771	762	755	757	755	721	654	638	599	558	540	519	III	
Δ %	4.2	3.6	2.1	2.1	2.1	1.3	0.1	0.6	0.9	0.1	1.2	3.6	5	2.8	.35	.56	.58		
Модел.	638	629	619	616	608	601	598	591	585	580	567	543	533	524	514	506	493	ре ж.	
экспер.			620	614	608	578	570	550	540	530	514	508	506	502	499	498	495		
Δ %			.16	.33	0	3.9	4.9	7.5	8.3	9.4	10	6.9	5.3	4.4	3	1.6	0.4		IV



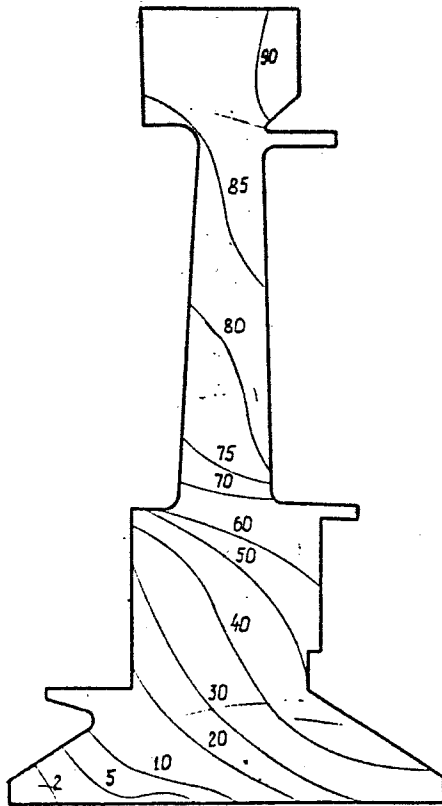


рис.6.4. Безразмерное поле на стационарном режиме

Тепловые потоки на границе области обозначим

$$q_r = q \cos(n, r) = q l ;$$

$$q_\theta = q \cos(n, \theta) = q m.$$

Градиент по нормалик поверхности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial n} &= \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial t}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial t}{r \partial \theta} \frac{r \partial \theta}{\partial n} = \\ &= \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial t}{\partial r} \cos(n, r) + \frac{\partial t}{\partial z} \cos(n, z) = \\ &= \frac{\partial t}{\partial r} \cos(n, r) + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} \cos(n, \theta). \end{aligned}$$

При наличии симметрии относительно оси X дифференциальное уравнение стационарной теплопроводности в сферической системе координат будет:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (6.6)$$

Этому уравнению удовлетворяют функции: см. раздел 4.2.

$$U_n^1(r, \theta) = r^n P_n(\cos \theta); \quad (6.7)$$

$$U_n^2(r, \theta) = r^n \theta_n(\cos \theta); \quad (6.8)$$

$$U_n^3(r, \theta) = r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta); \quad (6.9)$$

$$U_n^4(r, \theta) = r^{-(n+1)} Q(\cos \theta), \quad (6.10)$$

где  $P_n(\cos \theta)$  - полином Лежандра первого рода,

$Q_n(\cos \theta)$  - функция Лежандра второго рода.

Математическая постановка задачи будет иметь вид: рис. 6.5.

Для области I

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial t_1}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) \right) = 0. \quad (6.11)$$

При  $\theta=0$  на  $S_0$

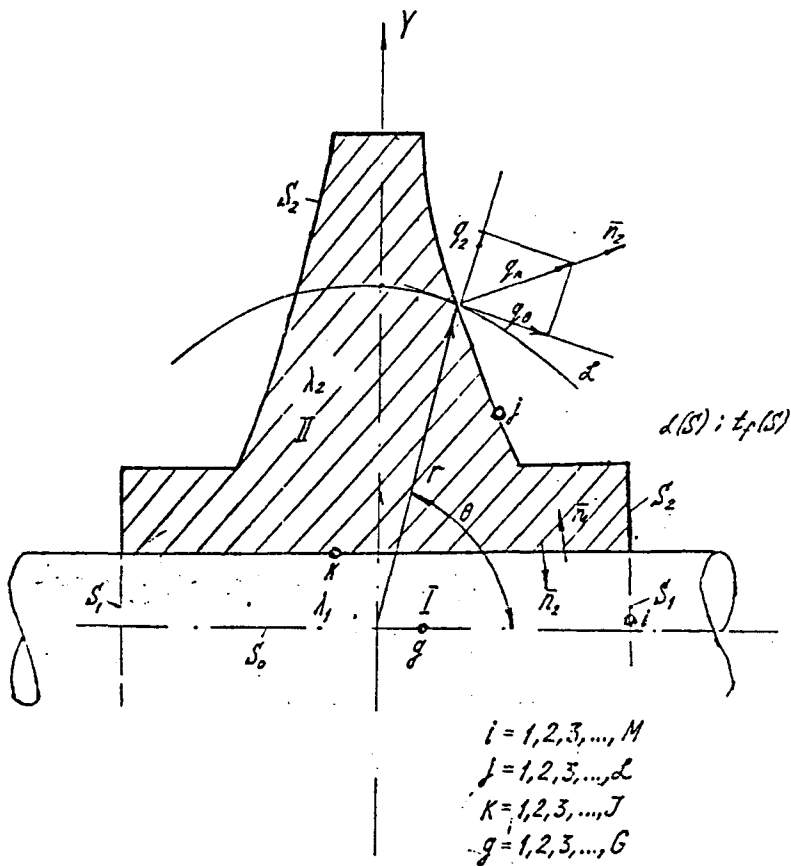


рис. 6.5. К постановке контактной задачи

$$\frac{\partial t}{\partial n} = 0; \quad q_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} = \frac{\partial t}{\partial n} = 0; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} = 0; \quad (6.12)$$

$$q_z = \frac{\partial t}{\partial r} \cos(n, s) = \frac{\partial t}{\partial n} - q_\theta \cos(n, z) = 0.$$

Граничное условие III рода может быть записано в виде:

$$F(s) = -\frac{\lambda(s) t_f(s)}{\lambda_1} = \left( \frac{\partial t}{\partial r} \ell + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} m \right) - \frac{\lambda(s)}{\lambda} t(s) \quad (6.13)$$

$$\text{или при } \lambda(s) \rightarrow \infty; \quad t = t(s). \quad (6.14)$$

$$\text{Поэтому на } S_1 \text{ имеем } t_1 = t_1(S_1). \quad (6.15)$$

Для области II

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial t_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial t_2}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (6.16)$$

При граничных условиях III рода  $S_2$

$$F_2(S_2) = \frac{\lambda(S_2) t_f(S_2)}{\lambda_2} = \left( \frac{\partial t_2}{\partial r} \ell_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial t_2}{\partial \theta} m_2 \right) + \frac{\lambda(S)}{\lambda_2} t_2(S_2). \quad (6.17)$$

Условия сопряжения на поверхности K:

$$t_1(K) = t_2(K);$$

$$-\lambda_1 \left( \frac{\partial t_1}{\partial n} \right)_K = \lambda_2 \left( \frac{\partial t_2}{\partial n_2} \right)_K. \quad (6.18)$$

Или

$$\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}; \quad (6.19)$$

$$\left( \frac{\partial t_1}{\partial r} \ell_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial t_1}{\partial \theta} m_1 \right)_K + \lambda \left( \frac{\partial t_2}{\partial r} \ell_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial t_2}{\partial \theta} m_2 \right)_K = 0. \quad (6.20)$$

Решение задачи будем искать в виде

$$t_1 = \sum_{n=1}^N [a_n U_n^1(r, \theta) + b_n U_n^2(r, \theta)]; \quad (6.21)$$

$$t_2 = \sum_{n=1}^N [c_n U_n^1(r, \theta) + d_n U_n^2(r, \theta) + e_n U_n^3(r, \theta) + f_n U_n^4(r, \theta)]. \quad (6.22)$$

Из условия (6.12) будем иметь

$$\sum_{n=1}^N \left[ a_n \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U_n^1}{\partial \theta} \right)_{S_0} + b_n \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U_n^2}{\partial \theta} \right)_{S_0} \right] = 0. \quad (6.23)$$

Из (6.15) и (6.21) получим

$$t_1(s_1) = \sum_{n=1}^N [a_n (U_n^1)_{s_1} + b_n (U_n^2)_{s_1}] ; \quad (6.24)$$

Из (6.17) и (6.22) будем иметь

$$\begin{aligned} F_2(s_2) = & \sum_{n=1}^N \left\{ c_n \left[ \left( \frac{\partial U_n^1}{\partial r} \ell_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial U_n^1}{\partial \theta} m_2 \right)_{s_2} + \frac{\alpha(s_2)}{\lambda_2} U_n^1(s_2) \right] + \right. \\ & + d_n \left[ \left( \frac{\partial U_n^2}{\partial r} \ell_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial U_n^2}{\partial \theta} m_2 \right)_{s_2} + \frac{\alpha(s_2)}{\lambda_2} U_n^2(s_2) \right] + \\ & + e_n \left[ \left( \frac{\partial U_n^3}{\partial r} \ell_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial U_n^3}{\partial \theta} m_2 \right)_{s_2} + \frac{\alpha(s_2)}{\lambda_2} U_n^3(s_2) \right] + \\ & \left. + f_n \left[ \left( \frac{\partial U_n^4}{\partial r} \ell_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial U_n^4}{\partial \theta} m_2 \right)_{s_2} + \frac{\alpha(s_2)}{\lambda_2} U_n^4(s_2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Из (6.18), (6.21) и (6.22) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N [a_n U_n^1(r, \theta) + b_n U_n^2(r, \theta) - c_n U_n^1(r, \theta) - \\ - d_n U_n^2(r, \theta) - e_n U_n^3(r, \theta) - f_n U_n^4(r, \theta)] = 0, \end{aligned} \quad (6.26)$$

а из (6.19), (6.21) и (6.22) получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N [a_n \left( \frac{\partial U_n^1}{\partial r} \ell_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial U_n^1}{\partial \theta} m_1 \right) + b_n \left( \frac{\partial U_n^2}{\partial r} \ell_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial U_n^2}{\partial \theta} m_1 \right) + \\ + c_n \Lambda \left( \frac{\partial U_n^1}{\partial r} \ell_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial U_n^1}{\partial \theta} m_2 \right) + d_n \Lambda \left( \frac{\partial U_n^2}{\partial r} \ell_2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial U_n^2}{\partial \theta} m_2 \right) + e_n \Lambda \left( \frac{\partial U_n^3}{\partial r} \ell_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial U_n^3}{\partial \theta} m_2 \right) + \\ \left. + f_n \Lambda \left( \frac{\partial U_n^4}{\partial r} \ell_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial U_n^4}{\partial \theta} m_2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Записывая (6.23) для  $G$  точек  $g$ , получим

$$\sum_{n=1}^N (a_n A_{ng} + b_n B_{ng}), \quad g = 1, 2, \dots, G. \quad (6.28)$$

Записывая (6.24) для  $M$  точек  $i$ , получим

$$t_{1i}(s_1) = \sum_{n=1}^N (c_n G_{ni} + d_n D_{ni}); \quad i=1,2,\dots,M. \quad (6.29)$$

Записывая (6.25) для  $Z$  точек  $j$ , будем иметь

$$F_{2j}(s_2) = \sum_{n=1}^N (e_n E_{nj} + f_n F_{nj} + g_n G_{nj} + h_n H_{nj}); \quad (6.30)$$

$$j=1,2,\dots,Z.$$

Наконец, записывая (6.26) и (6.27) для  $J$  точек  $k$ , получим:

$$\sum_{n=1}^N (a_n U_{nk}^1 + b_n U_{nk}^2 - c_n U_{nk}^1 - d_n U_{nk}^2 -$$

$$- e_n U_{nk}^3 - f_n U_{nk}^4) = 0; \quad (6.31)$$

$$k=1,2,\dots,J.$$

или

$$\sum_{n=1}^N (a_n I_{nk} + b_n J_{nk} + c_n K_{nk} + d_n Z_{nk} +$$

$$+ e_n M_{nk} + f_n N_{nk}) = 0; \quad k=1,2,\dots,J. \quad (6.32)$$

В итоге получаем систему  $6+M+Z+2J$  уравнений с  $6N$  неизвестными  $(a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n)$ .

При  $6+M+Z+2J > 6N$  эта система будет переопределенной и может быть решена методом наименьших квадратов.

### 6.3. Определение нестационарных температур за эксплуатационный цикл работы двигателя

Для моделирования нестационарных температурных полей была разработана схема электроинтегратора, в соответствии с которой диск был разбит на 17 участков по радиусу. Каждый из этих участков в свою очередь был разбит на 5 точек по толщине диска. Т.о. температурное поле снималось в 85 точках. Всего было снято 114 полей, каждое из которых соответствует определенной секунде эксплуатационного цикла (рис.2.1). Эти поля отражают полный заданный цикл работы ГТУ от запуска до останова, включая режимы "приемистости", "полетный", "максимального газа" [5,68,84,107,195].

На рис.6.6 графически представлены изотермы температурных полей в сечении диска на 95-ой секунде работы двигателя. На 110, 290, 305, 365, 390, 430, 445, 460, 470, 650, 665, 965, 980, 1040, 1055, 1280, 2125 секундах эксплуатационного цикла ГТУ, а также для высоты полета  $H = 11, 16, 18$  км, где практически поля стационарны и для режима спуска на высотах  $H = 15, 12, 9, 6, 3, 0$  км [188].

На рис.6.7 показан нестационарный температурный перепад между ободом и центром диска за эксплуатационный цикл.

Анализ полученных температурных полей показал, что максимальный температурный перепад между центром и ободом диска наблюдается при  $\bar{T} = 0.05$ , т.е. на первой секунде режима приемистости и составляет в относительных температурах величину 53.2%. Выход на стационарный режим наблюдается при  $\bar{T} = 0.347$  (см.рис.6.7).  $T_0$  - температура обода диска,  $T_B$  - температура втулки диска.

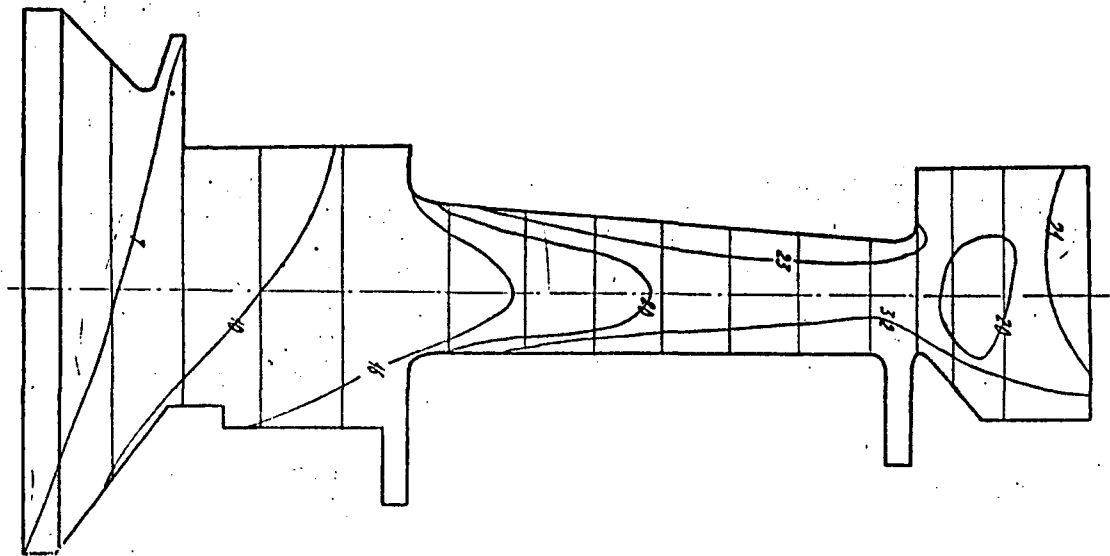


рис.6.6. Изотермы в сечении диска на 110 секунде



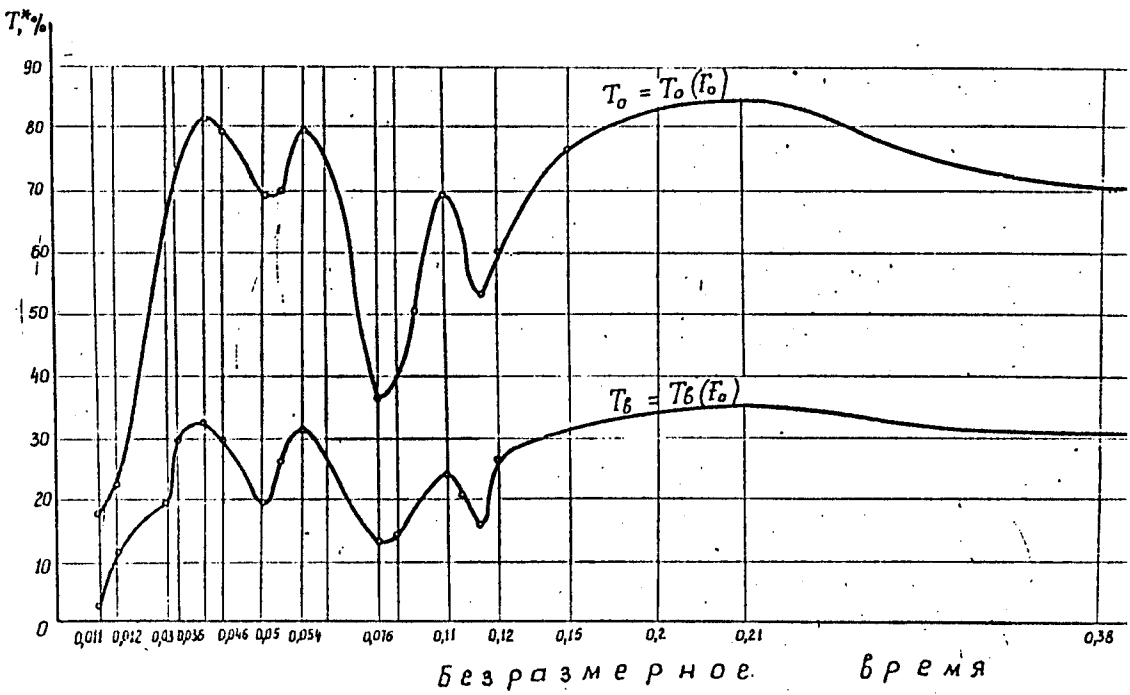


рис. 6.7. Температурный перепад во времени между втулкой и ободом диска

## 7. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ НА РЕСУРС ДВИГАТЕЛЯ

При работе лопаток газовых турбин на режимах интенсивного теплового и механического нагружения в них возникают, как правило, термопластические напряжения, а также имеют место явления плавучести. В результате чего изделия разрушаются. Особенно подвержены разрушению лопатки первых ступеней турбин, работающих в условиях высоких температур и динамических нагрузок. Поэтому в какой-то мере о ресурсе двигателя можно судить по ресурсу наиболее нагруженной лопатки.

### 7.1. Исследование температурных напряжений

В разделе 5. решались тепловые задачи по определению температурного состояния рабочих лопаток турбины.

Поскольку лопатка Г.Т. является телом сложной конфигурации, а соотношение геометрических размеров таково, что ее можно считать балкой, то математическая модель, описывающая ее термонапряженное состояние построена с помощью методов сопромата. Так как задача определения трехмерного напряженного состояния лопатки очень сложна даже в упругой постановке, поэтому на практике чаще всего заменяют трехмерную систему уравнений более простой моделью, поддающейся математическому исследованию, оценивая с помощью физических соображений допущенную таким образом ошибку. Для оценки термонапряженного состояния лопатки берут не трехмерное поле температур, а заменяют его двумерным [71, 171]. По этим полям, найденным по длине лопатки в каждом из профильных сечений, определяются затем термоупругие напряжения. Для балки плоское профильное сечение выбирается из условий прочности [7, 43, 47] и в нем определяются термические напряжения  $\sigma_z$ , по формулам, полученным с помощью теории сопротивления материалов [2, 7, 12, 27, 65, 74, 115, 118-120, 172, 173, 177, 182]:

$$\sigma_z = E \left\{ \frac{\int_s \alpha T ds}{\int_s ds} + \eta \frac{\int_s \alpha \eta T ds}{\int_s \eta^2 ds} + \xi \frac{\int_s \xi \alpha T ds}{\int_s \xi^2 ds} - \Delta T \right\}, \quad (7.1)$$

где  $\Delta$  - коэффициент температурного расширения.

Эта зависимость имеет то преимущество, что она очень

легко вычисляется с помощью ЭВМ. Поэтому, во-первых, используя метод смены термоупругих напряжений можно относительно быстро получать решения задач ползучести и термопластичности, во-вторых, составляющая  $\sigma_z$  от центробежных сил по своей величине намного больше, чем газовая, и в силу этого учет ее может оказаться более предпочтительным, что можно сделать, складывая, в условиях квазистатического нагружения  $\sigma_z$  и  $\sigma_z'$ . В данной работе на основе этих предположений определялись температурные напряжения в неравномерно нагретых цельных и полых рабочих и сопловых лопатках. Расчет велся на ЭВМ "Наири-К" в следующей последовательности: предварительно, для каждого момента времени, для которого рассчитываются напряжения, готовились исходные данные, определялись координаты центров тяжести участков, на которые разбита лопатка, площади, температуры металла в них. Программа расчета напряжений составлена на языке "ал". В алгоритме программы предусмотрена аппроксимация характеристик жаропрочного сплава ЖС6-К-  $E=E(T)$ ,  $\alpha=\alpha(T)$  полиномами. Программа может быть применена для расчета напряжений в лопатках, разбитых на любое число элементарных участков. В данном участке лопатки разбивались для исследований на режиме приемистости на 30, а на режимах запуска и останова - на 60 участков. Распределение температурных напряжений по сечению профиля лопатки для 7-ой, 9-ой, 11-ой, 13-ой, 15-ой секунд двигателя, работающего в режиме приемистости представлено на рис. 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5. Наибольшей величины достигают напряжения в хвосте лопатки на одиннадцатой секунде от начала режима. Их величина не превышает предела упругости данного материала. Наибольшее различие в виде скачка напряжений имеет место в зоне резкого изменения коэффициента теплоотдачи в районе входной кромки. Это различие достигает 50% от максимального напряжения на профиле. Кривая, полученная по стержневому полю, огибает кривую, полученную по двумерному полю, и, при определенном навыке исследователя, по имеющемуся стержневому полю напряжений можно получить поле, определенное из решения двумерной задачи. Таким образом, стержневая схема решения может служить для проведения оценочных расчетов температурных напряжений в лопатке ГТ, работающей на переходном режиме. Результаты расчета температурных напряжений в рабочей лопатке первой ступени двигателя, работающего на режимах запуска и оста-

$\sigma \cdot 10^{-7} \text{Па}$

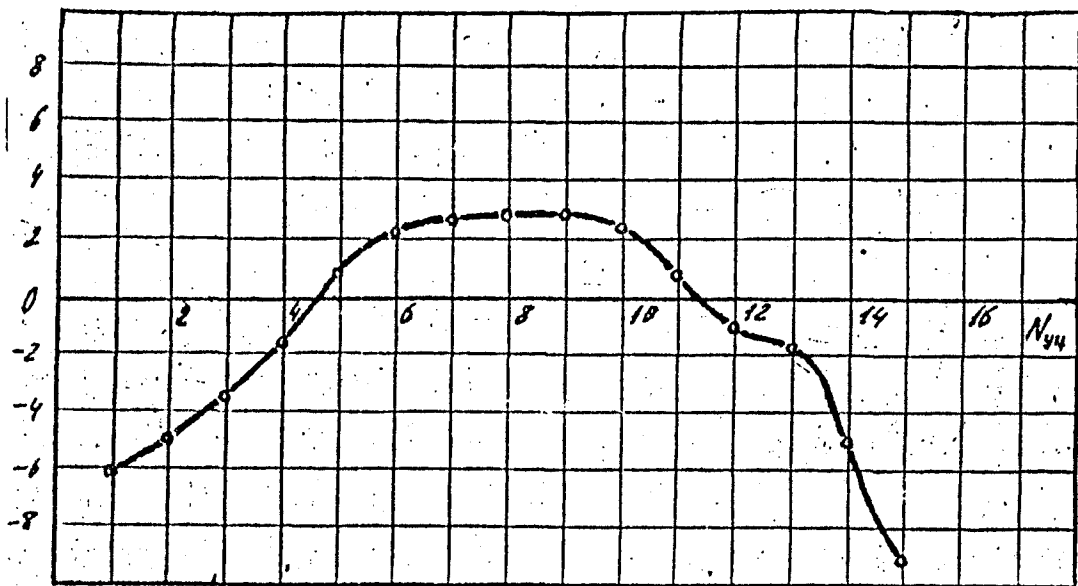


рис.7.1. Напряжения рабочей лопатки. Режим приемистости 7 сек.

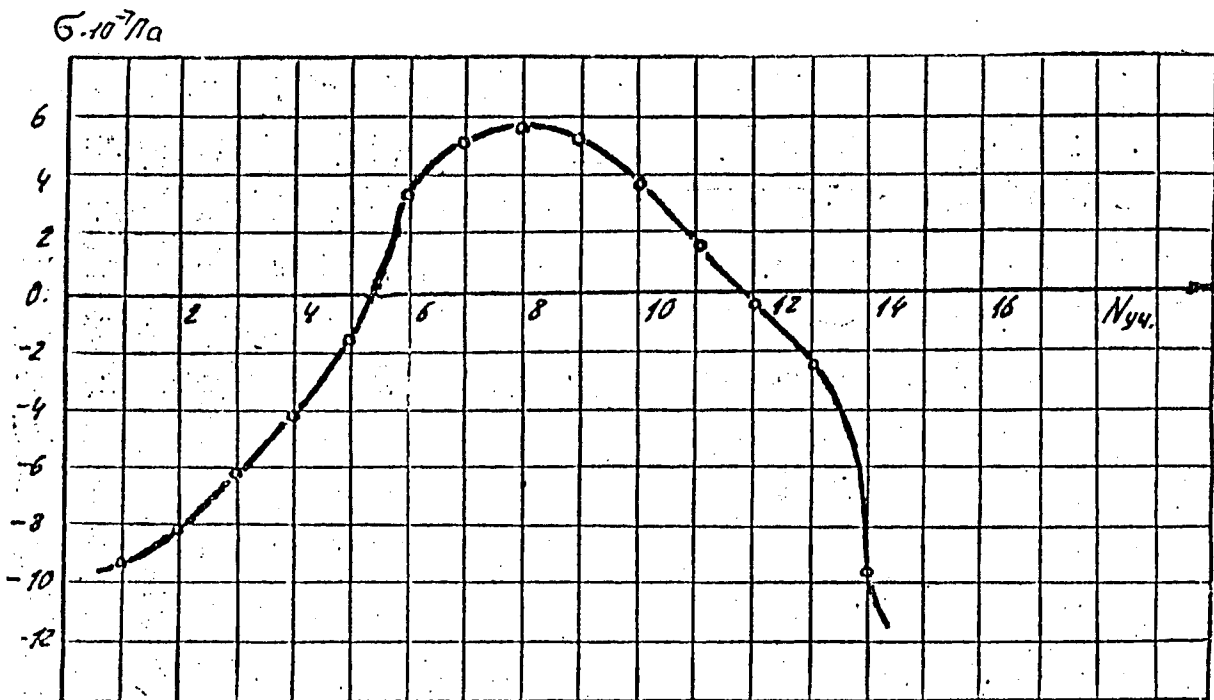


рис.7.2. Напряжение рабочей лопатки. Режим приемистости  
9 сек.

$\sigma \cdot 10^{-7} \text{Па}$

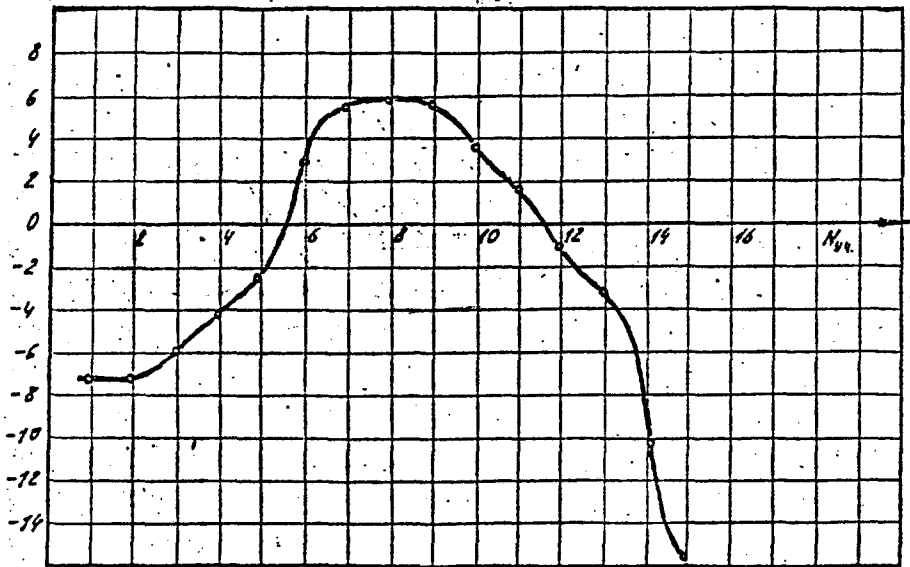


рис.7.3. Напряжение рабочей лопатки. Режим приемистости 11 сек.

$\sigma \cdot 10^{-7} \text{Па}$

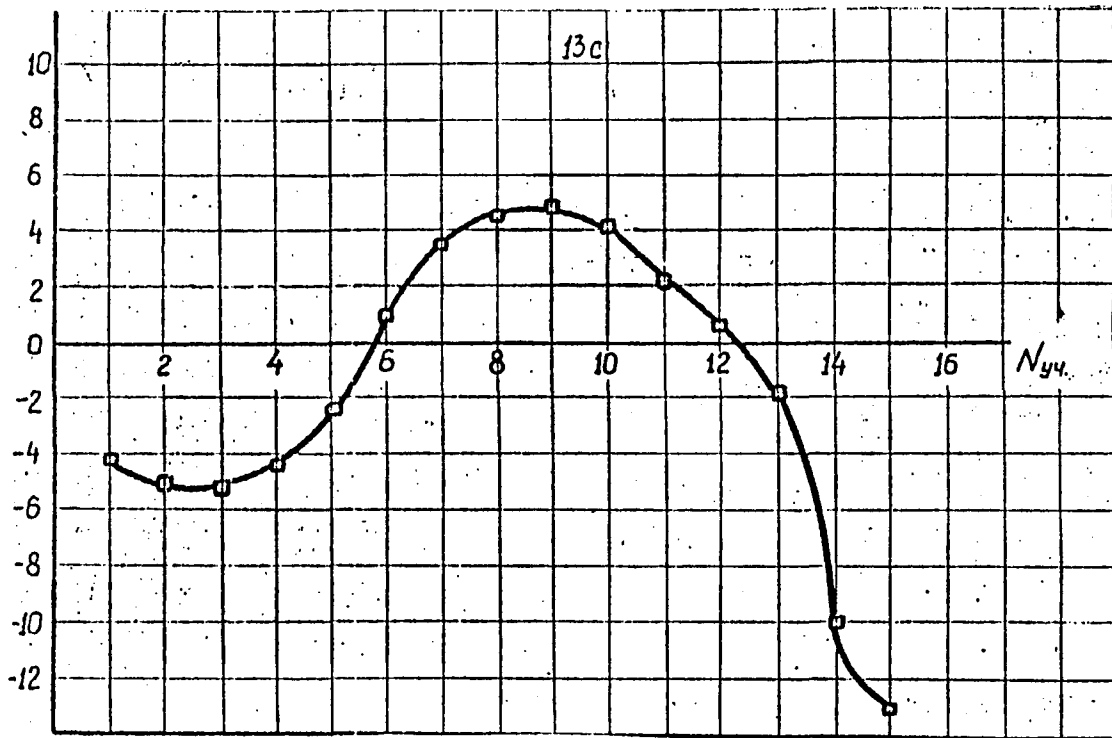
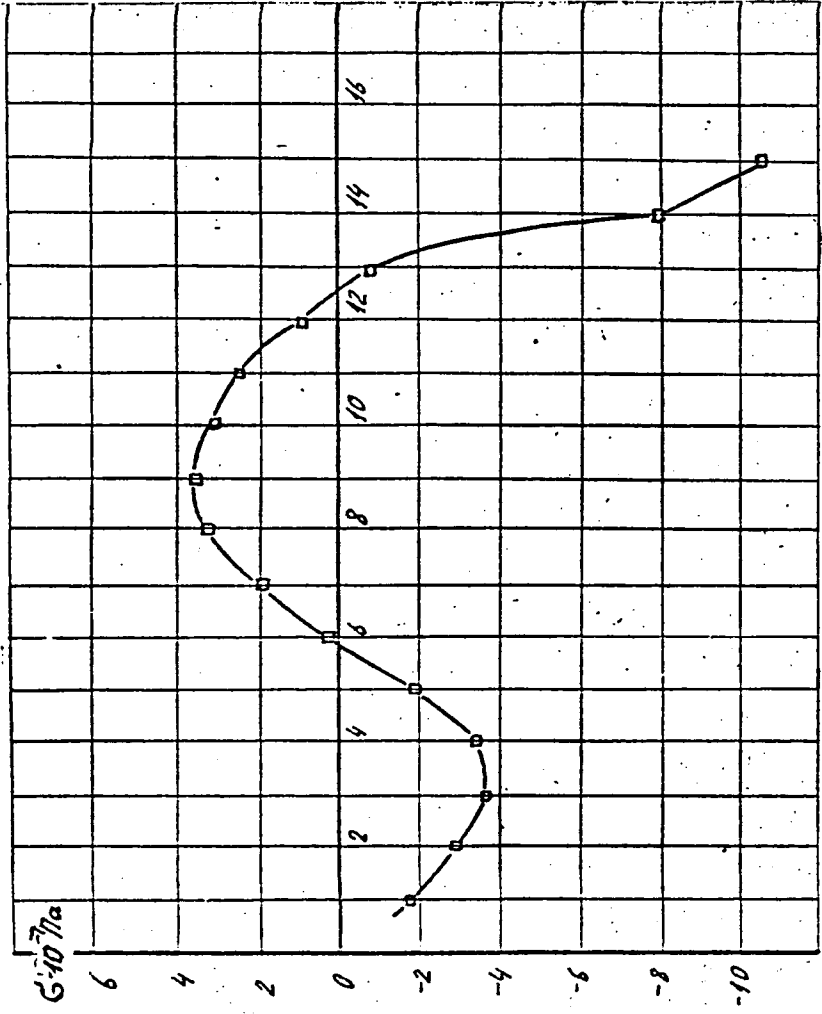


рис.7.4. Напряжение рабочей лопатки. Режим приемистости  
13 сек.



Номер участка

рис.7.5. Напряжение рабочей лопатки. Режим применимости 15 сек.



нова, приведены на рис. 7.6 и 7.7 [91, 156].

Графики на рисунках 7.6 и 7.7 наглядно показывают изменение напряжений нескольких характерных участков профиля лопатки в зависимости от текущего времени с момента пуска и останова двигателя. При запуске наибольшую величину имеют растягивающие напряжения на 58 секунде на 8-ом и 54-ом участках профиля лопатки и составляют величину 30 и 29 кг/мм<sup>2</sup>. В этот же момент в районах входной и выходной кромок сжимающие напряжения составляют 11 и 16 кг/мм<sup>2</sup> соответственно. В остальные моменты времени запуска характер распределения напряжений подобен описанному, но их величины меньше, чем на 58 сек., что вполне соответствует неравномерностям температурных полей в эти моменты времени. На останове двигателя наблюдается обратная картина. Напряжения меняют знаки в соответствующих точках профиля (рис. 7.7). На первой секунде останова они имеют наибольшие значения, равные -29 кг/мм<sup>2</sup> на восьмом и 54-ом участках, 7 кг/мм<sup>2</sup> и 15 кг/мм<sup>2</sup> на входной и выходной кромках.

Результаты расчета температурных напряжений в сечении сопловой лопатки на режимах запуска представлены на рис. 7.8, 7.9. Анализ расчетных данных показывает, что как на приемистости, так и на сбросе в сопловой лопатке существует значительная температурная неравномерность, изменяющаяся во времени. Возникающие вследствие этого температурные напряжения имеют различные величины и знаки на разных участках лопатки в зависимости от режима и момента времени.

При приемистости двигателя за 10 сек. (1-й режим) максимальную величину имеют растягивающиеся напряжения. Максимумы они достигают на 10-й секунде приемистости на 3-м участке лопатки и составляют величину 37.6 кг/мм<sup>2</sup>. Минимальные напряжения сжатия достигаются на 11-й секунде работы двигателя, т.е. когда температурное поле в лопатке уже практически стабилизировалось, на 23 участке лопатки и составляют -30.6 кг/мм<sup>2</sup>.

Наибольшего разброса температурные напряжения в сечении лопатки достигают на 10-ой секунде приемистости и составляют  $\Delta \sigma = 64.1$  кг/мм<sup>2</sup>.

При приемистости двигателя за 7 сек. (2-ой режим) максимальные растягивающие напряжения достигаются на 7-ой секунде на 3-м участке лопатки и составляют 30 кг/мм<sup>2</sup>. Минимальные напряжения сжатия достигаются на 8-ой секунде

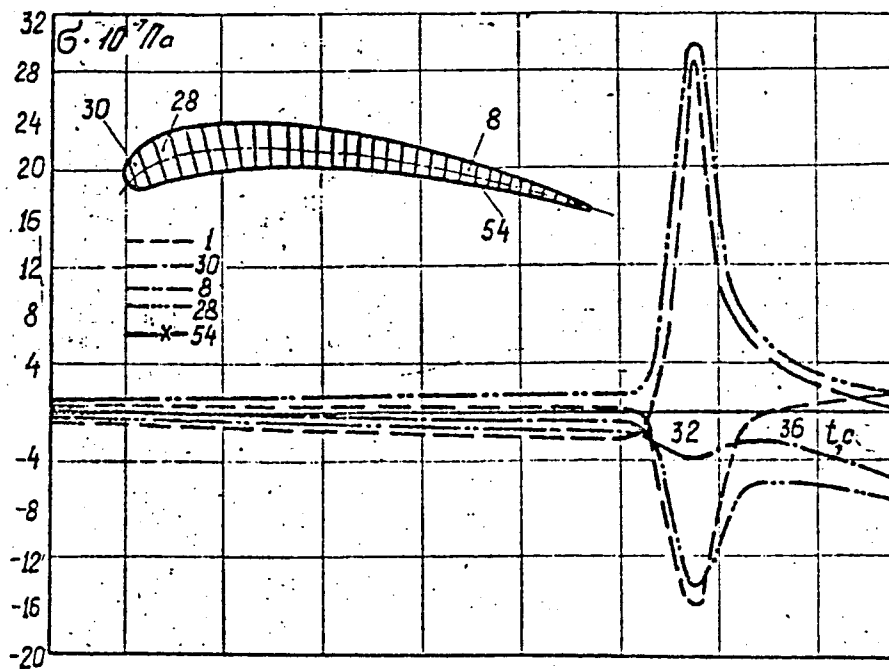


рис.7.6. Напряжение в рабочей лопатке на режиме запуска

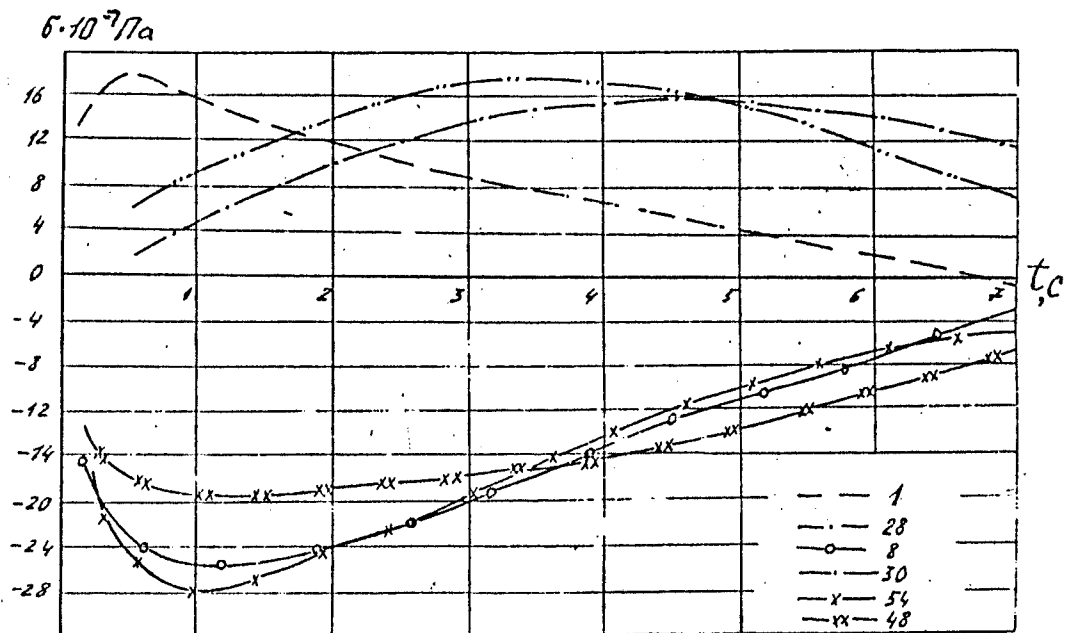


рис.7.7. Напряжения в рабочей лопатке на режиме останова

работы двигателя (максимальный режим) на 23-м участке лопатки и составляют  $-30.6 \text{ кг/мм}^2$ . Наибольшего разброса температурные напряжения в сечении лопатки при приемистости за 7 секунд достигают на 7-ой секунде и составляют  $\Delta \sigma = 57 \text{ кг/мм}^2$ .

При сбросе режима с максимального до малого газа за 3 сек. максимальные растягивающие напряжения действуют на 0 секунде сброса на 36-м участке, т.е. на максимальном стационарном режиме и на 2-й секунде на 0-м участке и составляют  $16,8 \text{ кг/мм}^2$ . Минимальные сжимающие напряжения действуют на максимальном режиме на 23-м участке лопатки и составляют  $30.6 \text{ кг/мм}^2$ . Наибольший разброс температурных напряжений в сечении лопатки действует при сбросе на максимальном режиме и составляет  $\Delta \sigma_{\Sigma} = 47.4 \text{ кг/мм}^2$ .

#### 7.1.1. Оценка влияния нестационарных режимов приемистости и сброса на долговечность силовых лопаток

Анализ литературных данных по исследованиям малоцикловой термической усталости лопаток газовых турбин показывает, что к настоящему времени не разработаны надежные методы прогнозирования долговечности лопаток газовых турбин, работающих в сложных условиях термомеханического нагружения. Среди многих методов наибольшая достоверность результатов достигается при исследовании по методу [172], который заключается в сопоставлении полной деформации образцов и лопаток за цикл. При использовании этого метода определяются температурные поля в лопатке за цикл [106]. По полученным температурным полям рассчитываются температурные напряжения в лопатке за время цикла. Наибольшие значения деформации в лопатке за цикл рассчитываются по формуле

$$\Delta \xi = \frac{\sigma_{\text{охл.}}}{E_2} + \left| \frac{\sigma_{\text{нагр.}}}{E_1} \right|, \quad (7.2)$$

где  $\sigma_{\text{нагр.}}$  и  $\sigma_{\text{охл.}}$  - наибольшие напряжения в лопатке при нагреве и охлаждении;

$E_1, E_2$  - статические модули упругости при соответствующих температурах при нагреве и охлаждении (при наибольших  $\sigma_{\text{нагр.}}$  и  $\sigma_{\text{охл.}}$ ).

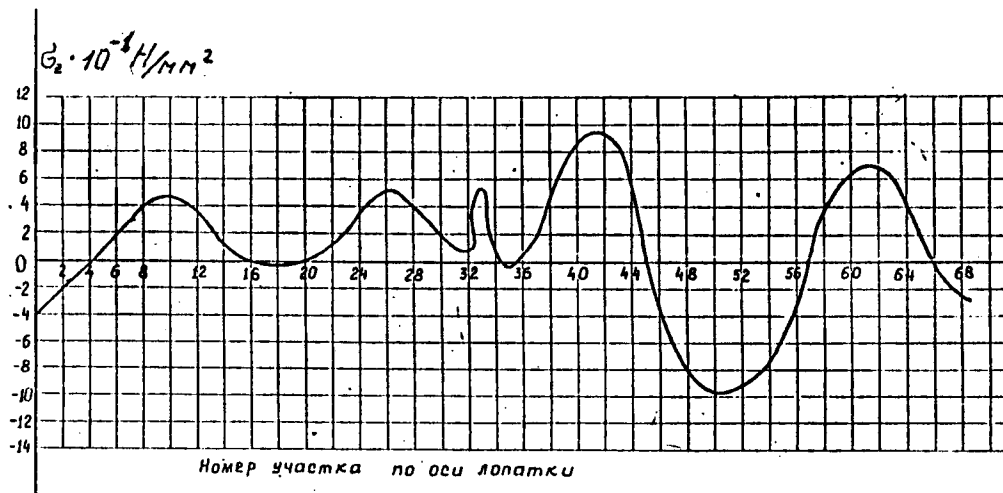


рис.7.8. Напряжение в сопловой лопатке на режиме запуска.  
Нулевая секунда

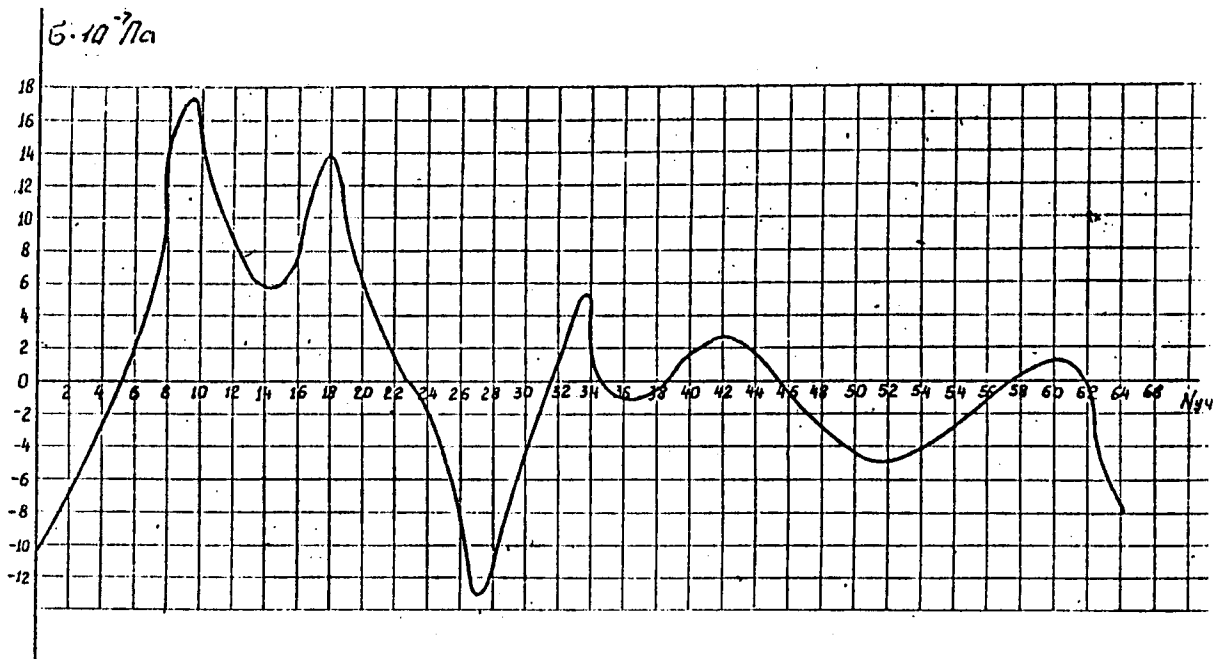


рис.7.9. Напряжение в сопловой лопатке на режиме запуска.  
Вторая секунда

Затем определяются характеристики сопротивления термической усталости на образцах при двух значениях периода цикла, соответствующих максимальной температуре лопатки. Строится зависимость  $\lg N_p - \lg T_y$  для разных значений диапазона деформаций за цикл и  $\lg \Delta \sigma - \lg N_p$  для времени цикла, соответствующего длительности термического цикла лопаток. Определяется число циклов до образования трещин в лопатке и запас прочности по разрушающему числу циклов:

$$K = \frac{N_p}{N_{\text{эксил.}}},$$

где  $N_{\text{эксил.}}$  - максимально возможное число циклов при эксплуатации турбины.

Между расчетными и экспериментальными значениями долговечности  $N_p$  наблюдается удовлетворительное совпадение. Этот метод не учитывает выдержек на температурных пределах циклов среднего постоянного напряжения (асимметрия цикла), формы цикла.

Метод предусматривает сочетание расчета температурных напряжений и деформаций в лопатках, работающих в условиях теплосмен с экспериментальным исследованием образцов при температурах и длительностях циклов, соответствующих условиям работы лопаток в турбине. Постановка такого эксперимента требует специального стенда, аппаратуры и длительности времени.

Значительно проще и удобнее на практике оценивать опасность разрушения лопаток от малоциклового усталости по методу, описанному в книге Биргера И.А. [172]. В соответствии с этим методом опасность разрушения лопаток газовой турбины от малоциклового усталости можно оценить, определив наибольшие размахи напряжений действующие при каждом цикле запуск-работа-останов с учетом нестационарных режимов, на которых часто достигаются наибольшие температурные напряжения.

Под размахом напряжений понимается сумма напряжений в наиболее нагруженной точке профиля лопатки при режимах прогресса (приемистость, запуск) и охлаждения (сброс, остансы) двигателя:

$$\Delta \sigma = \sigma_{\text{нагр.}} + |\sigma_{\text{охл.}}| \quad (7.3)$$

Сравнивая полученные значения размахов напряжений  $\Delta \sigma$  с данными характеристик малоциклового усталости материала,

Затем определяются характеристики сопротивления термической усталости на образцах при двух значениях периода цикла, соответствующих максимальной температуре лопатки. Строится зависимость  $\lg N_p - \lg \tau_y$  для разных значений диапазона деформаций за цикл и  $\lg \Delta \xi - \lg N_p$  для времени цикла, соответствующего длительности термического цикла лопаток. Определяется число циклов до образования трещин в лопатке и запас прочности по разрушающему числу циклов:

$$K = \frac{N_p}{N_{\text{экспл.}}},$$

где  $N_{\text{экспл.}}$  — максимально возможное число циклов при эксплуатации турбины.

Между расчетными и экспериментальными значениями долговечности  $N_p$  наблюдается удовлетворительное совпадение. Этот метод не учитывает выдержек на температурных пределах циклов среднего постоянного напряжения (асимметрия цикла), формы цикла.

Метод предусматривает сочетание расчета температурных напряжений и деформаций в лопатках, работающих в условиях теплосмен с экспериментальным исследованием образцов при температурах и длительностях циклов, соответствующих условиям работы лопаток в турбине. Постановка такого эксперимента требует специального стенда, аппаратуры и длительность времени.

Значительно проще и удобнее на практике оценивать опасность разрушения лопаток от малоциклового усталости по методу, описанному в книге Биргера И.А. [172]. В соответствии с этим методом опасность разрушения лопаток газовой турбины от малоциклового усталости можно оценить, определив наибольшие размахи напряжений действующие при каждом цикле запуск-работа-останов с учетом нестационарных режимов, на которых часто достигаются наибольшие температурные напряжения.

Под размахом напряжений понимается сумма напряжений в наиболее нагруженной точке профиля лопатки при режимах прогрева (приемистость, запуск) и охлаждения (сброс, остансы) двигателя:

$$\Delta \sigma = \sigma_{\text{нагр.}} + |\sigma_{\text{охл.}}| \quad (7.3)$$

Сравнивая полученные значения размахов напряжений  $\Delta \sigma$  с данными характеристик малоциклового усталости материала,



можно найти число циклов до разрушения.

Анализ температурных напряжений в сопловой лопатке при приемистости с малого газа до максимального режима и сбросе до малого газа показывает, что при 1-ом режиме (время приемистости 10 сек.) наибольший размах напряжений за цикл приемистость-режим-сброс достигается на 23-ем участке лопатки и составляет

$$\Delta \sigma = 2 + 1 - 30.6 / = 32.6 \text{ кг/мм}^2.$$

При такой величине размаха напряжений число разрушающих температурных циклов для лопатки из сплава ЖС6К (рис. 7.10) составит примерно  $N_p \approx 6 \times 10^3$  циклов.

Наибольший размах напряжений в цикле приемистость-режим-сброс, когда время приемистости составляет 7 сек. достигается на 23-м участке и составляет

$$\Delta \sigma = 3.26 + 1 - 6 / = 38.6 \text{ кг/мм}^2.$$

При такой величине размаха напряжений число циклов до разрушений составит  $N_p = 4 \times 10^3$ .

Таким образом, сокращение времени приемистости в цикле приемистость-режим-сброс с 10-й сек. до 7-ми сек. снижает число циклов разрушения для сопловой лопатки с  $6 \times 10^3$  до  $4 \times 10^3$ .

## 7.2. Исследование напряженного состояния диска

Вращающиеся диски являются важнейшим элементом многих машин. Прочность и долговечность дисков определяют возможность высоких параметров работы машин, обеспечивают необходимый срок их службы [130, 179].

Неравномерный нагрев приводит к возникновению температурных напряжений, которые могут оказаться существенными, особенно при нестационарных режимах работы машин. Для дисков сложной формы важен учет всех факторов, влияющих на его напряженное состояние: температур, изгиба, центробежных сил, концентраторов напряжений. В данной работе как раз исследуется диск, неравномерно нагретый по толщине, несимметрично относительно плоской срединной поверхности. Подробное описание методов расчета дисков с про-граммами изложено в работах [95, 87, 172, 192].

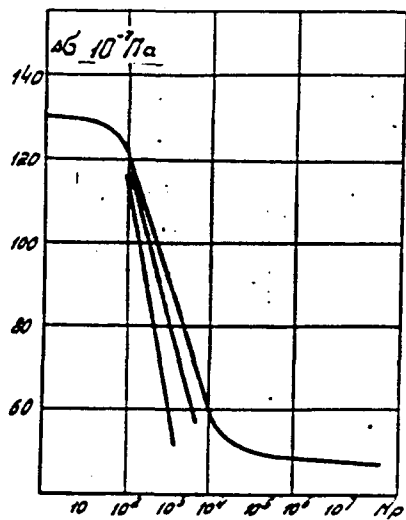


рис.7.10. Зависимость размаха напряжений от числа циклов до разрушения для сплава ЖС6К

В зависимости от конструктивного исполнения диска отличается методика расчета его напряженного состояния. В том случае, если диск сделан в виде барабана, и толщина барабана невелика по сравнению с его диаметром, его рассчитывают как свободно вращающееся кольцо малой толщины. При этом необходимо учесть добавочное напряжение, вызываемое центробежной силой лопаток на барабанах. Барабаны со значительной толщиной стенки должны рассчитываться по формулам для дисков постоянной толщины. Часто диски выполняются конического профиля, при котором напряжения в диске будут меньше, чем в диске постоянной толщины (при одинаковых окружных скоростях и внешних нагрузках).

Распространены диски равного сопротивления. В таких дисках на любом радиусе тангенциальные и радиальные напряжения равны. Отличительной особенностью дисков равного сопротивления является то обстоятельство, что они не могут быть выполнены с отверстиями для вала, так как на поверхности отверстия радиальное напряжение должно равняться нулю или быть отрицательным вследствие посадки на вал с натягом, а тангенциальное напряжение, как и в диске постоянной толщины, достигает максимума.

Существует обобщенная методика расчета диска постоянной толщины, конического и равного сопротивления с ободом и втулкой, которую называют расчетом диска произвольного профиля. При расчете неравномерно нагретых дисков следует принимать во внимание следующие два обстоятельства. Во первых, в таких дисках возникает температурные напряжения от неравномерного нагрева как по радиусу диска, так и по его толщине. Во вторых, в неравномерно нагретом диске величина модуля упругости и коэффициента линейного расширения, зависят от температуры, и переменны по радиусу. Это сказывается на напряженном состоянии дисков и должно учитываться при расчете не только температурных но и динамических напряжений.

### 7.2.1. Метод расчета термонапряженного состояния диска

Применяемая в работе методика расчета температурных напряжений в дисках подробно изложена в литературе [46, 47, 172].

Рассмотрим метод расчета напряжений неравномерно нагретого вращающегося диска произвольной толщины с центральным отверстием, который позволяет учитывать действие динамических сил, возникающих от вращения диска.

Выделим бесконечно малый элемент толщиной  $y$ , ограниченный радиусами  $x$  и  $x+dx$  и плоскостями, проходящими через ось вала и составляющими между собой угол  $d\varphi$  рис.7.11.

Масса этого элемента

$$dm = \rho x y d\varphi dx.$$

К центру тяжести элемента приложена центробежная сила

$$dC = dm x \omega^2 = \rho x^2 \omega^2 y d\varphi dx.$$

Силой  $dC$  вызываются следующие усилия, приложенные к поверхностям элемента:

1. радиальная сила  $dR$ , приложенная к внутренней поверхности элемента;
2. радиальная сила  $dR'$ , приложенная к наружной поверхности элемента;
3. тангенциальные силы  $dT$ , приложенные к боковым поверхностям элемента.

Обозначая радиальное напряжение через  $\sigma_r$ , тангенциальное через  $\sigma_t$  и, считая их равномерно распределенными по толщине элемента, находим величины указанных выше сил:

$$dR = y x d\varphi \sigma_r;$$

$$dR' = (y + dy)(x + dx) d\varphi (\sigma_r + d\sigma_r);$$

$$dT = y dx \sigma_t.$$

Сумма проекций всех сил, приложенных к элементу, на радиальное направление должна равняться нулю.

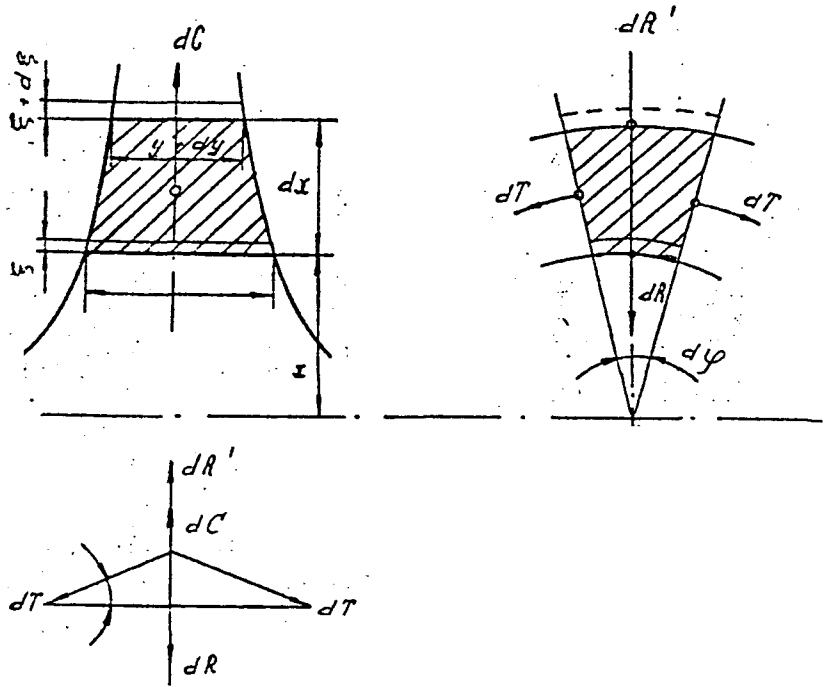


рис.7.11. К выводу дифференциальных уравнений, описывающих термонапряженное состояние диска

Проделив некоторые алгебраические преобразования, получим тогда уравнения равновесия:

$$\frac{d(x, y, \sigma_r)}{dx} - y \sigma_t + \rho x^2 \omega^2 y = 0. \quad (7.4)$$

Второе уравнение, необходимое для определения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$ , получим, связав эти напряжения с величинами деформаций. Для этого на основании закона Гука, учитывая температурные деформации, запишем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_t) + \alpha t; \\ \epsilon_t &= \frac{1}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_r) + \alpha t, \end{aligned} \quad (7.5)$$

где  $\mu$  — коэффициент Пуассона;

$\alpha$  — коэффициент линейного расширения металла;

$t=t(x)$  — температура диска на радиусе  $x$  в  $^{\circ}\text{C}$ .

Запишем уравнение совместности деформаций

$$x \frac{d\epsilon_t}{dx} + \epsilon_t - \epsilon_r = 0. \quad (7.6)$$

Заменив  $\epsilon_r$  и  $\epsilon_t$  их выражениями и считая при дифференцировании величины  $E$ ,  $\alpha$  и  $\mu$  не зависящими от радиуса, уравнение (7.6) можно записать в виде:

$$\frac{d\sigma_t}{dx} + (1 + \mu) \frac{\sigma_t}{x} = \mu \frac{d\sigma_r}{dx} + (1 + \mu) \frac{\sigma_r}{x} - E \alpha \frac{dT}{dx}. \quad (7.7)$$

Из (7.7) следует, что напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  связаны друг с другом и не могут быть выбраны произвольно.

Система двух дифференциальных уравнений (7.4) и (7.7) позволяет определить искомые напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  в зависимости от радиуса.

Порядок расчета диска следующий. Диск разбивается на ряд участков постоянной толщины (не менее 7–10) рис. 7.12. Нумерация участков идет от центра к периферии. В неравномерно нагретом диске величины  $E$ ,  $\alpha$ ,  $\mu$  зависят от температуры и, следовательно, изменяются по радиусу. Допустим, что в пределах каждого участка величины  $E$  и  $\alpha$  постоянны и равны их значениям при температуре на внешнем радиусе участка. Это допущение идет в запас прочности. Так как изменение коэффициента Пуассона практически не влияет на напряжение, то его можно принять постоянным и

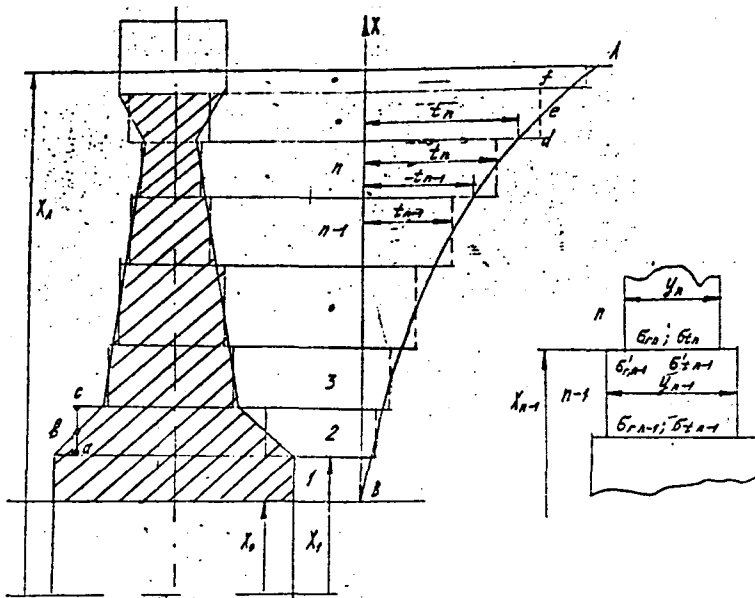


рис.7.12. К расчету напряжений в диске переменного профиля

равным 0.3 [46, 47].

Для связи напряжений в пределах каждого участка воспользуемся формулами

$$\sigma_r = \alpha_r \sigma_{ri} + \alpha_t \sigma_{ti} - \alpha_c C - \alpha_\theta T; \quad (7.8)$$

$$\sigma_t = \beta_r \sigma_{ri} + \beta_t \sigma_{ti} - \beta_c C - \beta_\theta T, \quad (7.9)$$

где  $\alpha_r = \beta_t = \frac{1+m^2}{2}$  ;  $m = \frac{\chi_i}{\chi}$  ; (7.10)

$$\alpha_t = \beta_r = \frac{1+m^2}{2} ; \quad (7.11)$$

$$\alpha_c = \frac{3+\mu - 2(1+\mu)m^2 - (1-\mu)m^4}{8} ; \quad (7.12)$$

$$\beta_c = 1 + 3\mu - 2(1+\mu)m^2 - (1-\mu)m^4; \quad (7.13)$$

$$\alpha_\theta = \frac{(1-m^2)^2}{4} = \alpha_t^2 ; \quad (7.14)$$

$$\beta_\theta = \frac{3-2m^2-m^4}{4} = 1 - \alpha_t^2 ; \quad (7.15)$$

$$C = \rho \omega^2 x^2 ; \quad (7.16)$$

$$T = E \Delta t \frac{\chi^2}{\chi^2 a} . \quad (7.17)$$

Тогда для нашего случая получим:

$$\sigma_{2n} = \sigma_{2n-1}^1 \frac{y_{n-1}}{y_n} ; \quad (7.18)$$



$$\begin{aligned} \sigma_{tn} = \frac{E_n}{E_{n-1}} \sigma_{tn-1}^1 + \mu \left( \frac{y_{n-1}}{y_n} - \frac{E_n}{E_{n-1}} \right) \sigma_{rn-1}^1 - \\ - (\alpha_n - \alpha_{n-1}) E_n t_{n-1}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

где  $t_{n-1}$  - температура на внешнем радиусе  $(n-1)$ -го участка.

Обозначим неизвестное пока тангенциальное напряжение на внутреннем радиусе первого участка через  $\sigma_{t1}$ .

Для диска с центральным отверстием радиальные напряжения на внутреннем радиусе участка равны нулю.

Так как напряжение на внутреннем радиусе  $\chi_0$  первого участка известно, то по формулам (7.8) и (7.9) определяем напряжения  $\sigma_{r1}^1$  и  $\sigma_{t1}^1$  на внешнем радиусе  $x$  этого участка.

Переходя таким образом от участка к участку, можно показать, что на любом радиусе

$$\sigma_{2n} = A_n^1 \sigma_{t1}^1 - B_n^1 ;$$

$$\sigma_{tn} = M_n \sigma_{t1}^1 - N_n ; \quad (7.20)$$

$$\sigma_{rn}^1 = A_n^1 \sigma_{t1}^1 - B_n^1 ;$$

$$\sigma_{tn}^1 = M_n^1 \sigma_{t1}^1 - N_n^1. \quad (7.21)$$

Рекуррентные формулы для коэффициентов  $A_n \div N_n$  имеют следующий вид:

$$A_n = \frac{y_{n-1}}{y_n} A_{n-1}^1 ; \quad B_n = \frac{y_{n-1}}{y_n} B_{n-1}^1 ;$$

$$M_n = \frac{E_n}{E_{n-1}} M_{n-1}^1 + \mu \left( \frac{y_{n-1}}{y_n} - \frac{E_n}{E_{n-1}} \right) A_{n-1}^1 ;$$

$$\begin{aligned} N_n = \frac{E_n}{E_{n-1}} N_{n-1}^1 + \mu \left( \frac{y_{n-1}}{y_n} - \frac{E_n}{E_{n-1}} \right) B_{n-1}^1 + \\ + (\alpha_n - \alpha_{n-1}) E_n t_{n-1} ; \end{aligned}$$

$$A_n^1 = \alpha_{rn} A_n + \alpha_{tn} M_n ;$$

$$B_n^1 = \alpha_{zn} B_n + \alpha_{tn} N_n + \alpha_{cn} C_n + \alpha_{\theta n} T_n ; \quad (7.22)$$

$$M_n^1 = \beta_{rn} A_n + \beta_{tn} M_n ;$$

$$N_n^1 = \beta_{zn} B_n + \beta_{tn} N_n + \beta_{cn} + \beta_{\theta n} T_n .$$

Для диска со свободным отверстием  $A_1=0$ ;  $B_1=0$ ;  $M=1$ ;  $N_1=0$ .

На внешнем радиусе диска  $x_a$  согласно первому уравнению (7.21)

$$\sigma_{ra} = A_a^1 \sigma_{t1} - B_a^1 ,$$

откуда

$$\sigma_{t1} = \frac{\sigma_{ra} + B_a^1}{A_a^1} . \quad (7.23)$$

Здесь  $\sigma_{ra}$  - напряжение, действующее на внешней цилиндрической поверхности диска,

$$\sigma_{ra} = \sigma_{ra}^I + \sigma_{ra}^{II} = \frac{z_{cp}}{2 x_a y_a} + \rho \omega^2 r_0 \frac{\rho y_{cp}}{y_a} ,$$

где  $\sigma_{ra}^I$  - напряжение от центробежных сил профильных частей лопатки;

$\sigma_{ra}^{II}$  - напряжение от замковых частей лопаток и диска,

$$C_n = \rho \omega^2 r F dr .$$

Подставляя полученное значение  $\sigma_t$  в уравнение (7.21), находим значения напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  на внутреннем и внешнем радиусах каждого участка. Затем определяем среднее значение напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  для каждого участка постоянной толщины:

$$\sigma_{rn}^{cp} = \frac{\sigma_{rn} + \sigma_{rn}'}{2} ; \quad \sigma_{tn}^{cp} = \frac{\sigma_{tn} + \sigma_{tn}'}{2} , \quad (7.24)$$

### 7.2.2. Исследование напряжений в диске турбин. Программная реализация метода

Как было показано в разделе 6, на всем режиме эксплуатации ГТУ перепад температур между центром и ободом диска не превышал  $300^\circ$ . И лишь на режиме "приемистости" этот перепад приближался к указанному опасному, с точки зрения возникновения термических деформаций, пределу. На этом же режиме максимальных значений достигает число оборотов диска. Следовательно, режим "приемистости" опасен и с точки зрения возникновения термических деформаций, и деформаций динамического характера.

Поэтому, напряжения, возникающие в диске, определялись именно на режиме "приемистости" с 425 по 450 сек. эксплуатационного цикла.

Для этого, согласно методике расчета термонапряженного состояния диска, изложенной в разделе 7.2.1. был разработан алгоритм расчета, реализованный на ЭВМ "Наири-К". Программа позволяет варьировать число участков, на которые разбивается диск ГТУ, перепад температур между центром и ободом диска, теплофизические характеристики материала (рис.7.13) диска, такие как плотность, коэффициент температурного расширения, модуль упругости и т.д. (рис. 7.14, 7.15), а также изменять размеры диска и скорость его вращения.

Идентификаторы для блок-схемы расчета  
термонапряженного состояния диска

Таблица 7.1.

Величина	x	y	d	E	t	A	B	M	N
Ед. измерения	см	см	1/с	кг/см <sup>2</sup> Па	с	-	-	-	-
Идентификатор	x	y	a	e	t	o	b	m	ch

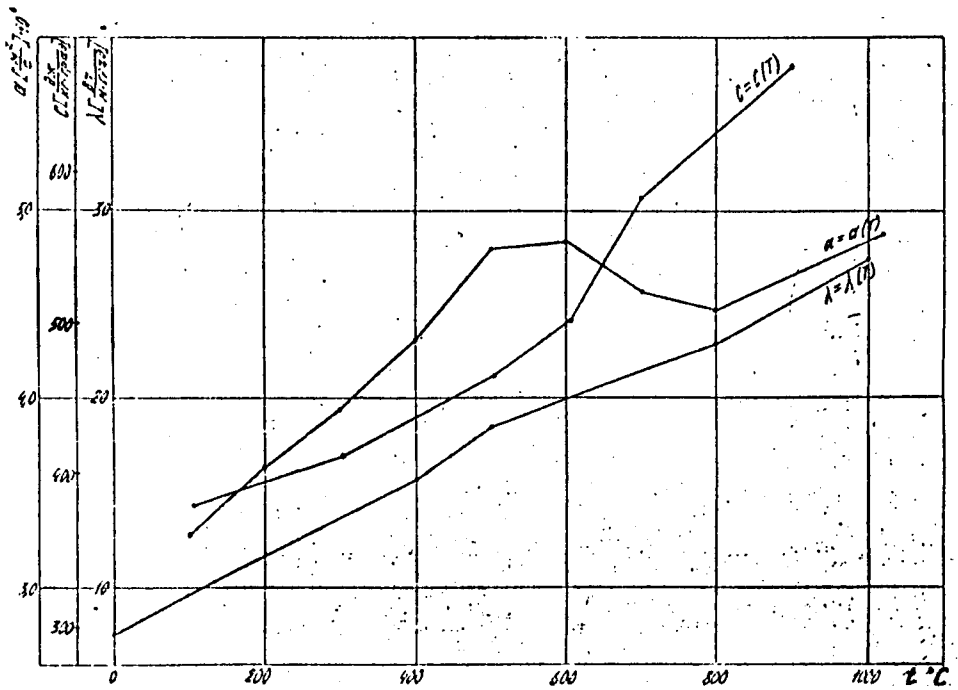


рис.7.13. Теплофизические характеристики стали ЖС6К

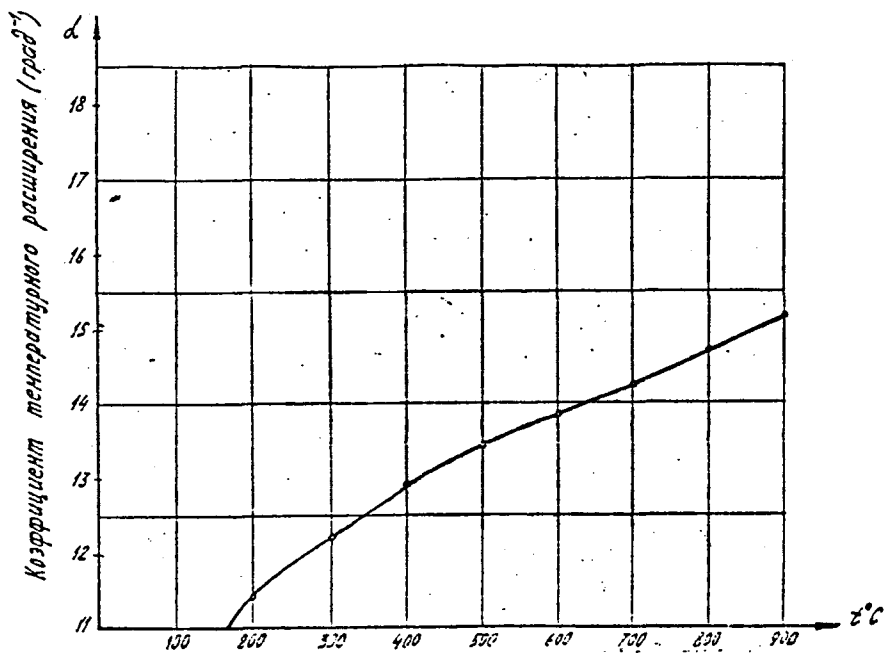


рис.7.14. Зависимость коэффициента температурного расширения от температуры

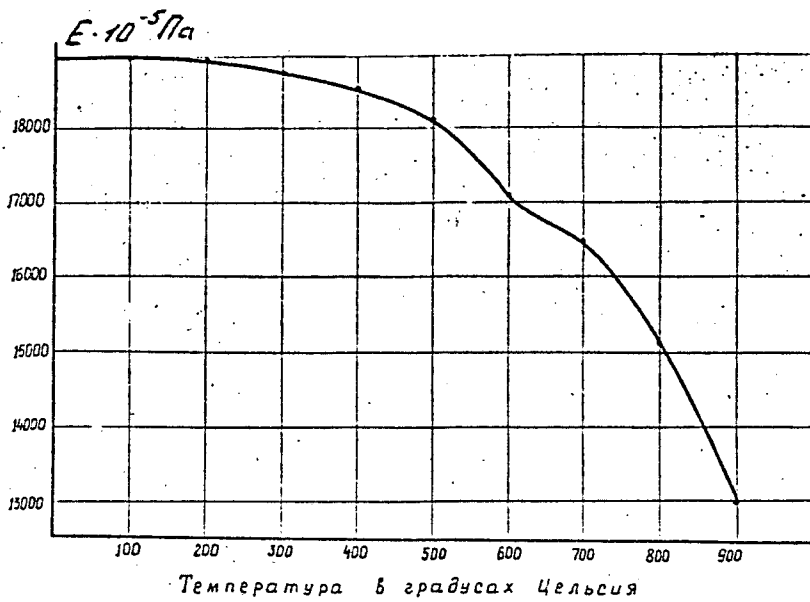


рис.7.15. Изменение модуля упругости от температуры

1	A'	B'	M'	N'	n	$\sigma_{ra}$	$\rho$	$\mu$	$\Delta t_{max}$	$R_{max}$
2	-	-	-	-	об/сек	кг/см <sup>2</sup>	кг/см <sup>3</sup>	-	°C	см
3	ч	г	ы	р	н	н	н	н	л	л

1	$d_2 = \beta_2$	$d_4 = \beta_2$	$d_c$	$\beta_c$	$L_0$	T	C
2	-	-	-	-	-	-	-
3	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$b_0$	$\beta_1$	$\lambda_1^2$		с

Проверка правильности действия рабочей программы по определению термонапряженного состояния диска ГТУ производилась путем решения методической задачи и сравнения результатов с результатами решения той же задачи, приведенными в [47]. Сравнительные данные сведены в таблицу 7.2. Из таблицы видно, что отличие расчетных величин на ЭВМ и ручном счете в среднем составляет 3.2%, что позволяет применять разработанную программу для оценочных расчетов. Из таблицы видно, что при расчете на ЭВМ получаются несколько завышенными значения напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$ .

Сравнительные данные

Таблица 7.2.

Участок	1	2	3	4	5	6	7
$\sigma_r^{cp}$ ЭВМ	3851.3	4141.3	3739.6	3263	3299.9	2536.8	1610.7
[47]	3793	4066	3657	3174	3216	2480	1591
Погр. %	+ 1.5	+1.85	2.25	2.8	2.6	2.3	1.24
$\sigma_t^{cp}$ ЭВМ	3689.2	2677.1	662.6	-917.7	-1553	-2348	-3386
[47]	3630	2612	606	-985	-1630	-2419	-3448
Погр. %	+ 1.6	+ 2.5	+ 9.33	7.3	4.9	3	1.8

Также значения напряжений дадут завышенный запас

прочности изделия.

Полученные численно на указанных выше режимах напряжения  $\sigma_r^{cp}$  и  $\sigma_t^{cp}$  сведены в табл. 7.3., 7.4. и графически представлены на рис. 7.16. На рис. 7.17, 7.18, 7.19 показано распределение  $\sigma_r^{cp}$  и  $\sigma_t^{cp}$  по радиусу диска.

В процессе исследования изучались в моменты времени  $F_0=5,9; 6,03; 6,06$  зависимость величины напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  от различных факторов.

1. Исследование изменения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  диска при постоянном числе оборотов.

Рассматривалось два случая.

В 1-ом случае температуры центра диска соответствовали действительным температурам, полученным в результате электромоделирования температурных полей.

Во 2-ом случае брались более высокие температуры диска. Соответственно менялись  $\alpha$  и  $E$ . Данные исследования сведены в таблицу 7.3.

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод: для нижнего (первого) участка увеличение температуры в 2.5 раза (на 150%) приводит к незначительному увеличению  $\sigma_r$  (на 4.5%) и  $\sigma_t$  (на 4%). Для последнего (верхнего) участка диска увеличение температуры в 1.7 раза (на 66.5%) практически не изменяет  $\sigma_{ra}$  (0.01%) и незначительно уменьшает  $\sigma_{ta}$  (в среднем на 5%).

Это можно объяснить тем, что увеличение температуры почти не приводит к заметному изменению  $\alpha$  и  $E$ .

Так, например, на верхнем участке  $\alpha$  увеличивается на 10.0%, а  $E$  уменьшается на 11% при увеличении температуры на 66%. На нижнем же участке  $\alpha$  изменяется в среднем на 18%,  $E$  - на 2.25%, а температура в то же время увеличивается на 150%.

Кроме того, напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  стали меняться, т.к. они в большей степени зависят от перепада температур по радиусу диска  $\Delta t_{max} = t_a - t_i$ . В данном же случае перепад температур остается постоянным. Температуры же эти, как было указано, берутся из результатов моделирования по центральной оси диска.

2. Рассмотрим теперь результаты, занесенные в табл.7.4.

Здесь сравниваются уже два режима эксплуатации диска ГТУ, меняется число оборотов, значительно изменяются граничные условия теплообмена. Но, вследствие инерционности материала диска, низкой его теплопроводности, центр



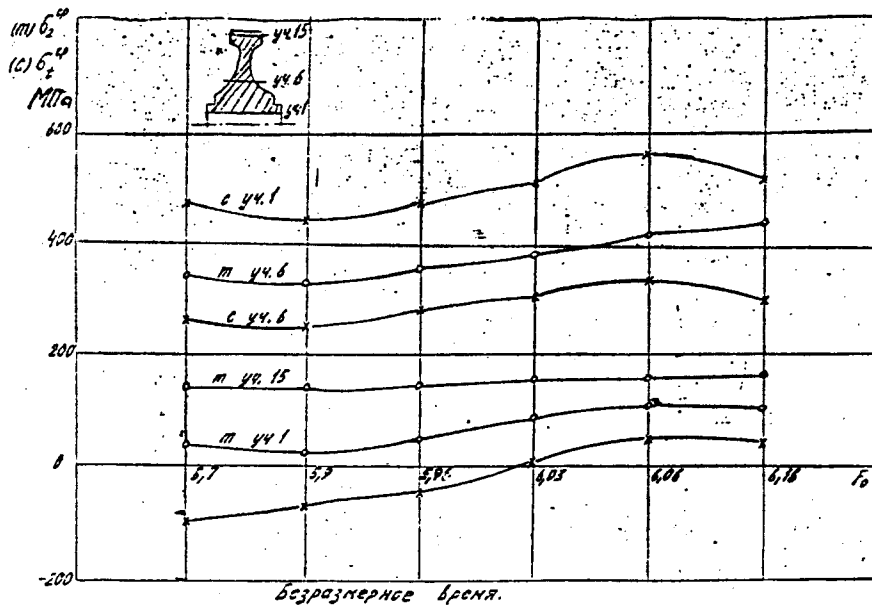


рис.7.16. Изменение напряжений за время режима приемистости

Напряжения в диске рабочего колеса при забросах температуры

Таблица 7.3

	n	T <sub>i</sub>	Δ × 10 <sup>6</sup>	E 10 <sup>3</sup>	σ <sub>ri</sub>	σ <sub>ti</sub>	T <sub>a</sub>	Δ × 10 <sup>6</sup>	E × 10 <sup>-3</sup>	σ <sub>ra</sub>	σ <sub>ta</sub>
	об/с	°C	1/°C	МН/м <sup>2</sup>	МН/м <sup>2</sup>	МН/м <sup>2</sup>	°C	1/°C	МН/м <sup>2</sup>	МН/м <sup>2</sup>	МН/м <sup>2</sup>
1	80	162	11	189.5	37.67	456.2	412	12.95	184.5	150.61	-65.4
2	80	435	13.2	186.0	39.55	478.3	685	14.25	165.5	150.78	-72.9 реж.1
%	0	↑168	↑20	↓2	↑5	↑5	↑66	↑10	↓11	0	↓11.5 Δt=253.6
1	127	207	11.5	188.5	46.96	587.46	405	12.9	185.0	156.4	67.02
2	127	408	13.3	184.0	48.63	607.08	678	14.15	166.0	156.48	67.45 реж.3
%	0	130	16	2.5	4	3	67	10	11.5	0	0.3 Δt=202 C

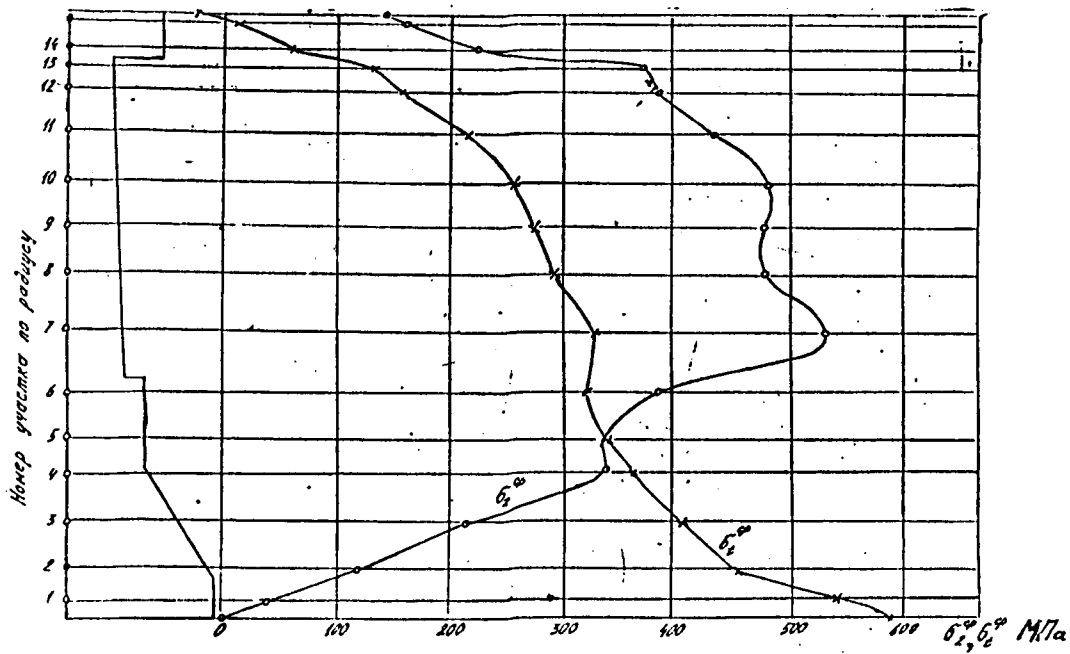


рис.7.17. Напряжение по радиусу диска при  $F_0 = 5,9$  в  $\text{MN}/\text{м}^2$

Напряжение в диске рабочего колеса при забросах температуры  
и числа оборотов

Таблица 7.4

	$n$	$T_i$	$\Delta \times 10^6$	$E \times 10^3$	$\sigma_{ri}$	$\sigma_{ti}$	$T_a$	$\Delta \times 10^6$	$E \times 10^3$	$\sigma_{ra}$	$\sigma_{ta}$
	об/с	°C	1/°C	МН/м <sup>2</sup>	МН/м <sup>2</sup>	МН/м <sup>2</sup>	°C	1/°C	МН/м <sup>2</sup>	МН/м <sup>2</sup>	МН/м <sup>2</sup>
1	80	435	13.2	186.0	39.55	478.26	685	14.25	165.5	150.78	-72.91 реж.1 $\Delta t=253.6^\circ\text{C}$
2	127	480	13.3	184.0	48.63	607.08	678	14.15	166.0	156.48	67.45 реж.2 $\Delta t=202^\circ\text{C}$
3	58	10	0.8	1	23	27	1	0.7	0.3	3.8	108% $\Delta = 25\%$

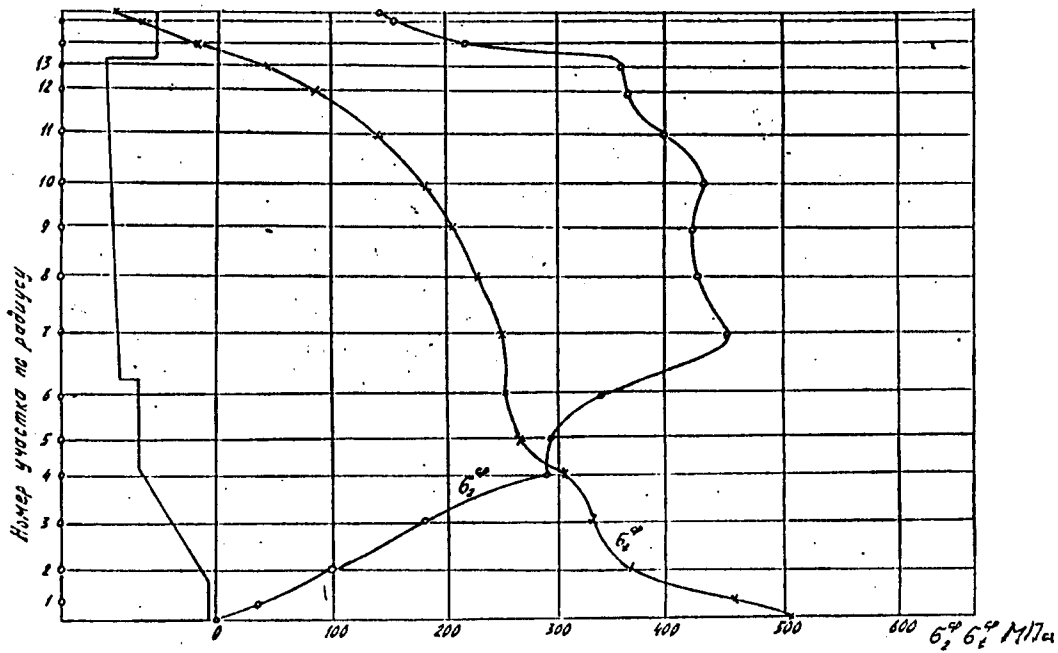


рис.7.18. Напряжение по радиусу диска при  $F_0 = 6,03$  в  $\text{MN}/\text{m}^2$

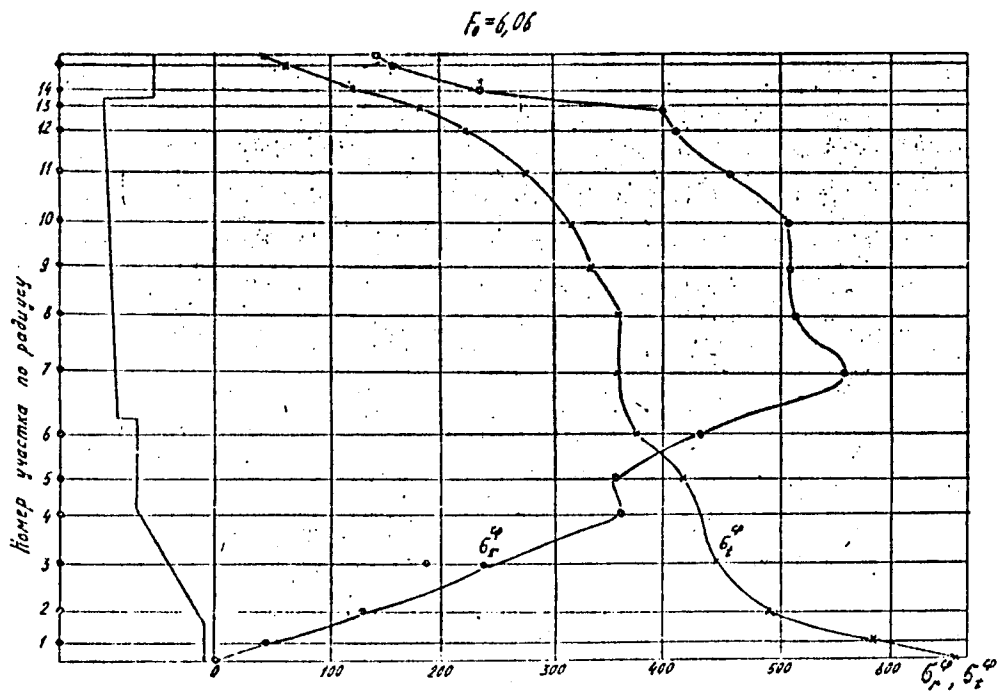


рис.7.19. Напряжение по радиусу диска при  $F_0 = 6,06$  в  $\text{MN/m}^2$ .  
(мегапьютонах)

его за короткое время переходного режима не "успевает" за изменением граничных условий, т.е. температура центральной оси диска меняется мало. Поэтому, перепад температур между ободом и центром диска остается также практически малоизменяемой величиной ( $\Delta t = 253.6^\circ\text{C}$  для режима I,  $\Delta t = 202^\circ\text{C}$ , для режима III).

Но все же подобное изменение  $\Delta t$  (на 25%) и увеличение к III-му режиму числа оборотов на 58% по отношению к I-му режиму приводит к достаточно заметному изменению напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$ . Т.н.  $\sigma_{ri}$  увеличивается на 23%,  $\sigma_{ti}$  увеличивается на 27%,  $\sigma_{ra}$  увеличивается лишь на 3.8%, а  $\sigma_{ta}$  меняет знак, т.е. из сжимающегося становится растягивающим.

Отметим, что в данном случае сильно изменилось число оборотов диска (на 58%), что естественно увеличивало динамические напряжения.

Максимальное значение напряжений в режиме приемистости равно  $\sigma_{tc} = 6070.8 \text{ кг/см}^2$  при  $T = 480 \text{ K}$ .

Как следует из литературы [46] стр.22, табл.2 для стали ЖС6-К при температуре  $800^\circ\text{C}$  предел текучести  $\sigma_{0.2} = 8400 \text{ кг/см}^2$ . Так как предел текучести  $\sigma_{0.2} \gg \sigma_{ti \max}$ , то можно сказать, что диск "работает" лишь в упругой области.

## Литература

1. Аваров Г.Н., Богатыренко К.И., Поветкин Н.А., Прокофьев В.Е. Дискретно-аналоговые сеточные процессоры и их применение для решения задач теории поля. Сб. Применение машинных методов для решения задач теории поля, Киев, "Наукова думка", 1976.
2. Александр Л.М. Новый метод решения плоской задачи теории упругости для балки прямоугольного сечения с прямой осью. Изв. ВУЗов. "Машиностроение", 1962, N7.
3. Аркадьев Б.А. и др. Решение нелинейной задачи нестационарной теплопроводности в твердых телах произвольной формы. - "Теплоэнергетика", 1968, N12, С. 25-30.
4. Бабенкова Л.И., Темников А.В. Исследование температурных полей в электронагревателях при турбулентном течении газа. В сб. "Моделирование задач теплофизики", ин-т ма-ки АН УССР, Киев, 1973.
5. Беляев И.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М., "Высшая школа", 1978, 328 с.
6. Биргер И.А., Джамай В.В., Селифанова Л.П. Напряжение в охлаждаемых лопатках турбин. - "Проблемы прочности", N6, 1971, - С. 3-6.
7. Биргер И.А. Руководство для конструкторов для расчета на прочность газотурбинного двигателя. Вып. 2. М., Оборонгиз, 1956.
8. Богатыренко К.И., Ильченко О.Т., Прокофьев В.Е. К решению задачи нестационарного теплообмена тела и обтекающего его потока жидкости. ИФЖ, 1972, 23, 4, с. 727.
9. Богатыренко К.И., Ильченко О.Т., Прокофьев В.Е. К решению сопряженных задач теплопереноса методами моделирования. Сб-к "Тепло- и массоперенос", т.8, Минск, ИТМО АН БССР, 1972, - С. 325-331.
10. Бодрцова Л.Б. Решение одной задачи диффузии в условиях переменной температуры. Математический сборник, 1964, 64, N2.
11. Бодунов М.Н. Расчет распределения температуры по профилю турбинных лопаток при внутреннем воздушном охлаждении. Изв. ВУЗов. "Авиационная техника", N3, 1964.
12. Соли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений.



- М.; "Мир", 1964.
13. Борозна Д.И., Дитман А.О., Темников А.В., Игонин В.И. Способ электромагнитного моделирования бигармонических полей в задачах теории упругости и пластичности. Материалы XXIX научно-технической конференции. ЛИВТ, Л., 1975, С. 117-119.
  14. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. "Наука", М., 1972.
  15. Ваничев А.П. Журнал технической физики, 1938.
  16. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Киев, "Наукова думка", 1978.
  17. Власова Т.Е., Темников А.В., Игонин В.И. Электрическое моделирование процесса теплообмена в потоках жидкости при двухстороннем обтекании пластины. М.с.б. Расчет и моделирование тепловых процессов, вып. II, Куйбышев, 1976.
  18. Волюнский Б.А., Бухман В.Е. Модели для решения краевых задач. М., Физматгиз, 1960, 451 с.
  19. Гейтвуд Б.Е. Температурные напряжения. М., изд-во иностранной литературы, 1959.
  20. Герштейн Г.М. Моделирование полей методом электростатической индукции. М., "Наука", 1970, 316 с.
  21. Глушенко В.Г. Теплообмен в охлаждаемых воздухом тонкостенных дефлекторных лопатках газовых турбин. Канд. диссерт., Киев, 1972.
  22. Голубева С.К. К определению температурного поля лопаток газовой турбины. Оборонгиз, 1947.
  23. Гордов А.Н. Температура неограниченного цилиндра в потоке с пульсирующей скоростью и температурой. ПММ, 1955, т. XIX.
  24. Гордов А.Н. Теоретическое и экспериментальное исследование методов измерения нестационарных температур газовых потоков в условиях переменной теплоотдачи. Д.д. Л., 1964.
  25. Гордов А.Н. Труды ВНИИ метрологии, 1958, вып. 35/95.
  26. Горелкин Н.М., Богов И.А. К определению температурных напряжений в пере рабочей лопатки газовой турбины при двумерном температурном поле. Энергомашиностроение, С. 38-40. 1968, № 3.
  27. Гоуда и др. Зависимость эффективного коэффициента концентрации напряжений от пластичности и периода

- роста трещины. Перевод ВЦП N Ц-43234, 1975.
28. Гревцева В.Н., Игонин В.И. Задачи нестационарного теплообмена для плоской стенки. Дифференциальные уравнения и их приложения. М., Сб. по физико-математическим наукам в. 2. Куйбышев, 1975.
  29. Гревцева В.Н. Исследование температурных полей в твердых телах при зависимости коэффициента теплоотдачи и температуры среды от времени. К.Д. Куйбышев, 1974.
  30. Гревцева В.Н., Киршбаум В.И. Температура полуограниченного стержня с коэффициентами теплообмена экспоненциально зависящими от времени. Сборник "Механика", вып. 2, Куйбышев, 1969.
  31. Гревцева В.Н., Киршбаум В.И. Теплопроводность твердых тел с теплообменом, линейно зависящим от времени. Сборник научных трудов по физико-математическим наукам. Куйбышев, 1969.
  32. Гревцева В.Н. Краевая задача теплопроводности для полуограниченного стержня с переменными граничными условиями III рода. Дифф. уравнения и их приложения. Межауз. сб. тр. по физико-математическим наукам, вып. 2. Куйбышев, 1975.
  33. Гревцева В.Н. Некоторые задачи теплопроводности твердых тел с переменным коэффициентом теплообмена. Труды III Всесоюзного совещания по тепло- и массообмену, т.8, Минск, 1968.
  34. Григорук П.Д. Исследование температурных полей и температурных напряжений в лопатках газовых турбин при импульсной тепловой нагрузке. Автореферат канд. диссерт., М., 1973.
  35. Девяткин А.Б. Исследование температурных полей и оценка термических напряжений в процессах непрерывного литья в алюминиевых слитках. К.Д. Куйбышев, 1975.
  36. Денисов Е.Е., Петровский В.С. Численное решение задачи нестационарной теплопроводности для ротора газовой турбины с бандажированными лопатками на ножке. Сб. Вопросы теплопередачи в газовых турбинах, МАТИ, вып. 1972.
  37. Демидович И.А., Марон и др. Численные методы анализа. М., "Наука", 1967.
  38. Дилигенский Н.В., Бабенкова Л.И. Об одном приближен-

- ном методе расчета теплообмена в газовых электронагревателях. Инженерно-физический журнал, т. XXVI, N5, 1974.
39. Дитман А.О. Электромагнитная модель бигармонического поля и решение на ней плоской задачи упругости. - Экономия и организация перевозок, судостроение и судоремонт. (Труды Ленинградского института водного транспорта). Л., 1966, С. 11-23.
  40. Дорфман А.Ш. Теплообмен между двумя жидкостями при двухстороннем обтекании пластины. "Теплофизика высоких температур", т. VIII, 1970, N3, С. 550-556.
  41. Дыбан Е.П., Эпик Э.Я., Мазур А.И. Теплообмен в охлаждаемых воздухом дефлекторных лопатках. "Теплоэнергетика", 1971, N7.
  42. Жаров Г.Г., Венцюлис Л.С., Гусейнов Э.С. Расчет и исследование температурных напряжений канальных охлаждаемых лопаток газовых турбин. "Энергомашиностроение", N9, 1975.
  43. Жаров Г.Г., Венцюлис Л.С., Петухов В.Г. Расчет температурных полей и напряжений в охлаждаемой лопатке методом конечных разностей на ЭЦЭМ. "Энергомашиностроение", N4, 1971.
  44. Жаров Г.Г., Венцюлис Л.С. Судовые высокотемпературные установки. "Судостроение", Л., 1973.
  45. Жеребятьев И.Ф., Лукьянов А.Т. Математическое моделирование уравнений типа теплопроводности с разрывными коэффициентами. М., "Энергия", 1968 - 56 с.
  46. Жирицкий Г.С., Локай В.И. и др. Газовые турбины двигателей летательных аппаратов. "Машиностроение", М., 1971.
  47. Жирицкий Г.С., Стрункин В.А. Конструкция и расчет на прочность деталей паровых и газовых турбин. "Машиностроение", М., 1968.
  48. Зенкевич О. Метод конечных элементов. М., "Мир", 1975.
  49. Зыкина-Молохен Л.М., Поляк М.П. Расчет полей температур в лопатке высокотемпературной газовой турбины при внутреннем охлаждении. Труды ЦКТИ, 1965, вып. 54.
  50. Игонин Э.И., Вытчиков Ю.С., Власова Т.Е. Исследование вопросов теплопереноса для участка канала охлаждаемой дефлекторной лопатки. М.С.б. Теплофизика и оптимизация тепловых процессов. Вып. III. Куйбышев,

- 1977, С. 123-129.
51. Игонин В.И. Исследование нестационарной сопряженной задачи теплообмена применительно к охлаждаемой лопатке газовой турбины. Труды областной научно-технической конференции "Молодые ученые Куйбышевской области - производству". Куйбышев, 1977.
  52. Игонин В.И. Исследование задач нестационарной теплопроводности с переменными коэффициентами теплоотдачи и оценка термических напряжений в отдельных элементах теплотермических установок. Диссертация. Казань, 1978. - 300 с.
  53. Игонин В.И., Темников А.В., Хорольский В.М. Задачи теплопроводности для специфической оболочки и пластины с переменными коэффициентами и их приложение к расчету тепловых полей лопаток газовых турбин. Труды IV Всесоюзной конференции "Теплофизика технологических процессов", Тольятти, 1976, С. 10.
  54. Игонин В.И., Хорольский В.М. Задачи теплопроводности для стержня с коэффициентами теплообмена, зависящими от времени и их приложение. ИФК, июнь, том XXXII, №6, Минск, 1977.
  55. Игонин В.И., Хорольский В.М. Задачи теплопроводности с переменными коэффициентами теплообмена на торцах и боковых поверхностях стержня. Сб. научн. трудов КПТИ. Расчет и моделирование тепловых процессов. Вып. 9. Куйбышев, 1976.
  56. Израилев Ю.Л., Лубин-Герцик А.Л. Метод и алгоритм решения трехмерной задачи нестационарной теплопроводности в телах произвольной формы. Изв. АН СССР "Энергетика и транспорт", №5, 1976.
  57. Ильченко О.Т. Исследование теплового состояния паровых турбин в пусковом и других переходных режимах. Автореферат на соискание ученой степени докт. техн. наук, Харьков, 1973.
  58. Каганов М.А., Розеншток Ю.Л. О температуре тел в среде с пульсирующей теплоотдачей и температурой. ПМТФ, №3, 1962.
  59. Капинос В.М. Исследование процессов теплообмена в паровых и газовых турбинах. Автореф. докт. дисс. Харьков, 1966, 56 с.
  60. Карпин Е.Б., Костюк А.Г. и др. Расчет нестационарных температурных полей в пластинах и оболочках с приме-

- нением вычислительной машины. "Теплоэнергетика", 1966, N3.
61. Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. М., ИЛ, 1962, 487 с.
  62. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М. "Наука", 1974, 487 с.
  63. Карташов Э.М. Метод интегральных преобразований в аналитической теории теплопроводности. Изв. АН СССР. "Энергетика и транспорт", N5, 1976.
  64. Карташов Э.М., Мосьяков В.Е. Об одном классе задач теплопроводности с переменными во времени коэффициентами теплообмена. Изв. ВУЗов. "Авиационная техника", N1, 1973.
  65. Квитка А.А. и др. К расчету лопаток ГТД методом конечных элементов. "Проблемы прочности", 1976, N6.
  66. Квитка А.А. и др. Определение нестационарных температур полей методом конечных элементов. "Проблемы прочности", 1975, N10.
  67. Киселев К.А., Лазарев А.И. Температурное поле неограниченной пластины при переменном значении коэффициента теплоотдачи и переменной температуре внешней среды. В.Т.Ф., 30, вып.6, 1960.
  68. Князев Л.В. Особенности решения задач нестационарного тепло- и массопереноса на комбинированных моделях. Сб. Расчет физических полей методами моделирования. М., 1968.
  69. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М., "Наука", 1975, 227 с.
  70. Коздоба Л.А. Применение и развитие электромоделей-аналогов для решения задач тепло- и массопереноса. Сб. Применение машинных методов для решения инженерных задач теории поля, Киев, "Наукова думка", 1976.
  71. Коздоба Л.А. Электрическое моделирование явлений тепло- и массопереноса. "Энергия", М., 1972.
  72. Козлов В.Н. Решение задач теплопроводности при переменном коэффициенте теплообмена. ИФЖ, N1, т.18, 1970.
  73. Коляно Ю.М. Определение температурных полей в тонких анизотропных пластинках с переменными коэффициентами теплоотдачи. - ДАН БССР, 1970, 14, 11, 1000-1002.
  74. Коноплев И.Д. Гибридные вычислительные комплексы

- ориентированные на исследование теплового и напряженно деформированного состояния элементов конструкций. Автореферат Д.Д. Киев, 1977.
75. Коноплев И.Д. Исследование температурных напряжений элементов турбин при переходных режимах методом электро моделирования. Канд. диссерт. ОНИМФ, Одесса, 1967.
  76. Коноплев И.Д., Кобяков С.В., Мошнянский А.Ф., Челабчи В.Н. Математическое моделирование процессов тепло- и массопереноса в теплотехнических объектах. Применение машинных методов для решения задач теории поля. Киев, "Наукова думка", 1976.
  77. Коноплев И.Д., Челабчи В.Н. Метод согласования теплового и гидравлического расчетов при моделировании температурных полей роторов турбин. В сб. "Судовые машины и механизмы", вып. II. Одесса, ОНИМФ, 1968.
  78. Копелев, Гуров. Решение обратной задачи. Сборник "Теплообмен в энергетических установках", Киев, "Наукова думка", 1967.
  79. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. "Наука", М., 1973.
  80. Короленко Ю.А., Черняев Э.Ф. Метод конечных разностей к расчету и моделированию рекуперативных теплообменников. - "Известия ВУЗов СССР. Энергетика", 1967, №3.
  81. Короленко Ю.А., Черняев Э.Ф. Применение метода электротепловой аналогии к исследованию теплового состояния элементов газовых турбин. Сб. Челябинского политехнического института.
  82. Кошкин В.К., Калинин Э.К. и др. Нестационарный теплообмен. М., "Машиностроение", 1973.
  83. Кошкин В.К., Калинин Э.К. Теплообменные аппараты и теплоносители. "Машиностроение", 1971.
  84. Краснов М.А. Интегральные уравнения. Физматгиз, 1975.
  85. Кудинов В.А., Ильин В.М., Игонин В.И. Исследование температурных полей и напряжений в лопатках газовых турбин. Тезисы докладов областной научно-технической конференции "Молодые ученые Куйбышевской области - производству". Куйбышев, 1977.
  86. Кудрявцев Е.В., Чекалов К.Н. Нестационарный теплообмен. М., изв. АН СССР, 1961.
  87. Куриат Н.Н., Третьяченко Г.И., Кравчук Л.В. О темпе-

- ратурных напряжениях в сопловых лопатках газовых турбин. В И.Н. Термопрочность материалов конструктивных элементов, вып. IV, Киев, 1967.
88. Курош Е.П., Дыбан Е.П., Шлет Н.Г. Влияние интенсивности теплообмена со стороны газа на температурное состояние охлаждаемых воздухом направляющих лопаток первой ступени турбины ГТ-750 ТНЭ. НИИИИ ФОРТЯЖМАШ, №8, 1969.
89. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М., "Наука", 1970.
90. Кутателадзе С.С. Пристенная турбулентность. Новосибирск, изд-во АН СССР, 1968.
91. Лебедев И.Н. Температурные напряжения в теории упругости. М.-Л., ОНТИ, 1937.
92. Лойцянский Л.Г. Механика жидкостей и газов. М., "Наука", 1969.
93. Локай В.И. Расчет температурного поля охлаждаемой турбинной лопатки при переменных граничных условиях и зависимости теплофизических свойств материала от температуры. "Авиационная техника", 1969.
94. Локай В.И., Шаратов. Труды КАИ, вып. 110, 1969.
95. Лыков А.В., Алексашенко А.А. Сопряженные задачи конвективного теплообмена. Изд-во ИТМО, Минск, №9, 1971.
96. Лыков А.В., Перельман Т.Л. Вопросы нестационарного теплообмена между телом и обтекающим его потоком жидкости. - В кн.: Тепло- и массоперенос, т.6, "Наука и техника", Минск, 1966.
97. Лыков А.В. Теория теплопроводности. "Высшая школа", М., 1967.
98. Лыков А.В. Тепломассообмен. "Энергия", М., 1972.
99. Лонджер, Хардинг. Требования к материалам для сосудов, работающих длительное время под давлением. Труды Сер. А, 1964, №4.
100. Любов Б.Я., Яловой Н.И. Внутренний теплообмен в пластине при нелинейных граничных условиях. ИФЖ, т.22, №6, 1972.
101. Любов Б.Я., Яловой Н.И., Манусов И.Н. Теплопроводность при произвольном периодическом изменении коэффициента теплообмена и температуры окружающей среды. ИФЖ, 17, №4, 1969.
102. Любов Б.Я., Яловой Н.И. Теплопроводность тела при

- переменном коэффициенте теплообмена. ИФЖ, 1969, т.17, N4.
103. Мазур А.И. Течение воздуха и теплообмен в охлаждающем тракте дефлекторных лопаток газовых турбин. Канд. диссерт., Киев, 1971.
  104. Маркелов Д.Л., Игонин В.И. Электромагнитное моделирование задачи термоупругости. Материалы межотраслевой конференции. Математическое моделирование и гибридная вычислительная техника. Куйбышев, 1977, - С. 174-175.
  105. Мацевитый Ю.М. Электрическое моделирование нелинейных задач технической теплофизики. Киев, "Наукова думка", 1977.
  106. Мацевитый Ю.М. Эффективность методов и средств решения ряда важных промышленных тепловых задач. Сб. Применение машинных методов для решения инженерных задач теории поля. Киев, "Наукова думка", 1976.
  107. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые нестационарными температурными полями. Физматгиз, 1958.
  108. Метод расчета локальных коэффициентов теплоотдачи в охлаждающем канале кромки лопатки при струйном выдуве охладителя. Арсеньев Л.В., Митряев И.Б. "Изв. ВУЗов СССР. Энергетика", 1978, N1, - С.72.
  109. Михлин С.Г. Интегральные уравнения. ГИТЛ, Л., 1949.
  110. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., "Наука", 1965.
  111. Молчанов Е.Д., Плоткин Е.Р. Распределение температуры в лопатке ГТУ (ГТ-25-700, ГТ-50-800). Теплоперенос, т.6.
  112. Молчанов Е.Д. Расчет температурных полей и напряжений в рабочей лопатке газовой турбины. "Энергомашиностроение", N10, 1960.
  113. Молчанов Е.Д. Решение сложных задач теплопроводности методом гидроанalogии. Сб. под ред. А.А. Люстерника. Расчет физических полей методами моделирования. М., 1968.
  114. Мошненский А.Ф. Исследование режимов работы систем и вспомогательных комплексов СЗУ, обеспечивающие подогрев вязких грузов на танкерах. К.Д. ИИМФ, Одесса, 1974.



115. Мэнсон С. Температурные напряжения и малоцикловая усталость. "Машиностроение", 1974.
116. Мюнтц Г.И. Интегральные уравнения. МГТТИ, 1934.
117. Н.В.Дилигенский, Ю.П.Камаев, А.В.Темников, Б.З.Чертков. Об одном методе электро моделирования плоской задачи термоупругости в напряжениях. Математика и механика. Тезисы докладов четвертой казахстанской межвузовской научно-технической конференции (17-21 сентября 1971 г.). Алма-Ата, 1971.
118. Огородов Л.И., Осипов Ю.Р., Елсуфьев С.А. Потеря устойчивости деформирования при двухосном растяжении // Всесоюз. симпозиум "Устойчивость в механике деформируемого твердого тела": Тез. докл. - Калинин, 1986. - С.108-110.
119. Осипов Ю.Р., Огородов Л.И. Оценка некоторых параметров работоспособности гуммированных тонкостенных элементов конструкций // Композиционные материалы. Технология, 1994. - №2 - С.25-35.
120. Осипов Ю.Р. Расчет стержней и пластин из эластомерных материалов с учетом степени вулканизации и диффузии агрессивной среды // Длительное сопротивление конструкционных материалов и вопросы расчета элементов конструкций: Межвузовский сб. - Л.: СЭПИ, 1991. - С.64-67.
121. Осипов Ю.Р. Термообработка и работоспособность покрытий гуммированных объектов. - М.: Машиностроение, 1992. - 232 с.
122. Пантелеев А.А., Трушин В.А. К расчету нестационарных температурных полей охлаждаемых лопаток турбины. - "Теплоэнергетика", №8, 1974.
123. Перельман Г.Л. В кн.: "Тепло- и массоперенос", т.5, Минск, изд-во "Наука и техника", 1963.
124. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. - М.: Энергия, 1967.
125. Плеханов В.А., Ошеров Ю.С. Расчетное исследование температурного поля лопатки при импульсном изменении температуры газа. НИИИИ Форктяжмаш, №8, 1969.
126. Плоткин Е.Р., Молчанов Е.И. Температурное поле лопаток газовых турбин при нестационарном режиме. /"Теплоэнергетика", №6, 1964.
127. Плоткин Е.Р., Молчанов Е.И. Температурные напряжения в турбинной лопатке при колебаниях температуры газа.

- М.; Доклады совещания Института механики АН УССР, 1963.
128. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. "Наукова думка", 1977.
  129. Похориллер В.А. О расчете динамики прогрета элементов термического оборудования. "Теплоэнергетика", №8, 1974.
  130. Применение машинных методов для решения инженерных задач теории поля. Материалы Всесоюзной научно-технической конференции, Харьков, апрель, 1976, изд-во "Наукова думка", Киев, 1976.
  131. Приходько И.М. Нелинейная теплопроводность при нестационарных граничных условиях. ИФЖ, т.19, №5, 1970.
  132. Приходько И.М. Температурное поле неограниченного цилиндра и шара при изменяющихся во времени коэффициенте теплоотдачи и температуре окружающей среды. Строительная физика, изд-во "Энергия", М.-Л., 1966.
  133. Приходько И.М. Температурное поле пластины при произвольно изменяющихся во времени коэффициенте теплоотдачи и температуре окружающей среды. Изв. ВУЗов. "Авиационная техника", №3, 1963.
  134. Пухов Г.Е., Васильев В.В., Степанов А.Е., Токарева О.Н. Электрическое моделирование задач строительной механики. Киев, 1963.
  135. Расчетные и экспериментальные методы определения теплового состояния основных узлов газовых турбин с воздушным охлаждением. ЦКТИ им. И.И.Ползунова, Л., 1970, т. II.
  136. Резников А.Н., Темников А.В., Дилигенский Н.В., Гаврилов Б.М. Применение квазианалогового электро моделирования для решения теплофизических задач теории резания и износа. - В кн.: Математическое моделирование и теория электрических цепей. Киев, "Наукова думка", 1967.
  137. Розеншток Ю.Л. О температурном поле тел в условиях изменения температуры внешней среды и коэффициентов теплоотдачи со временем. Тепло- и массоперенос, т.6, Минск, 1966.
  138. Розеншток Ю.М. Решение задач теплопроводности при коэффициенте теплоотдачи, зависящем от времени. ПМТФ, №1, 1963.

139. Розеншток Ю.М. Температурное поле неограниченной пластины в условиях зависимости температуры внешней среды и коэффициентов теплообмена от времени. ИФЖ, т.6, N3, 1963.
140. Рутнер Я.Ф., Гревцева В.Н., Игонин В.И. Оценка температурных полей в неохлаждаемой полый лопатке при произвольных законах изменения температуры среды и коэффициентов теплоотдачи. Теплофизика и оптимизация тепловых процессов. Сб. научн. трудов КПТИ, Куйбышев, 1975.
141. Рязанов Г.А. Электрическое моделирование с применением вихревых полей. Изд-во "Наука", Физмат Лит. М., 1969.
142. Саломатов В.В., Гончаров Э.И. К расчету температурных полей. Изв. ВУЗов. "Авиационная техника", N2, 1970.
143. Саломатов В.В., Гончаров Э.И. Нелинейная теплопроводность в твердых телах при переменном коэффициенте теплообмена. Научные труды Омского политехнического института инженеров ж/д транспорта, т.86, 1968.
144. Саломатов В.В., Гончаров Э.И. Температурное поле неограниченной пластины при переменных значениях коэффициента теплообмена и температуры внешней среды. ИФЖ, т.14, N4, 1968.
145. Саломатов В.В. Исследование высокотемпературного переноса тепла при переменных условиях теплообмена. Физика и химия обработки материалов, N6, 1970.
146. Саломатов В.В., Макеев А.А. К расчету температурных напряжений при нелинейных явлениях теплового переноса. Изв. АН СССР "Энергетика и транспорт", N2, 1975.
147. Саломатов В.В. О приближенном методе решения нелинейных задач теплопроводности. Изв. ВУЗов. АН СССР "Энергетика и транспорт", N1, 1971.
148. Сафонов Л.П. Разработка методов расчета, анализ теплового состояния и повышения маневренности паровых турбин большой мощности. Автореферат д.д., Л., 1973.
149. Сидляр М.М. Нестационарное температурное поле бесконечно длинного цилиндра при переменном коэффициенте теплоотдачи. Прикладная механика, т.1, вып.7, 1965.
150. Сидляр М.М. Сб интегрировании уравнений теплопро-

- водности в случае изменения во времени коэффициента теплоотдачи. Тепловые напряжения в элементах конструкций, вып.3, 1963.
151. Сидляр М.М. Об одном способе определения нестационарного температурного поля. Доклады АН УССР, N2, 1963.
  152. Симбирский Д.Ф. Идентифицируемость теплоизмерительных систем. Труды Харьковского авиационного института, вып.2, 1975.
  153. Сперроу Е.М., Хаджи-Шейх А. Исследование нестационарного и стационарного процессов теплопроводности в телах произвольной формы с произвольно заданными граничными и начальными условиями. Теплопередача. N1. Труды американского общества инженеров механиков, "Мир", 1968, С.109.
  154. Темкин А.Г. Обратные методы теплопроводности. "Энергия", 1973.
  155. Темников А.В., Бабенкова Л.И. Электрическое моделирование процессов теплообмена при турбулентном течении газа в круглой трубе. В сб. "Математическое моделирование на сплошных и дискретных средах", Киев, АН УССР, ин-т математики, 1973.
  156. Темников А.В., Игонин В.И., Кудиков В.А. Приближенные методы решения задач теплопроводности.: Учебное пособие. Куйбышев, КПТИ, 1982, С.90.
  157. Темников А.В., Гаврилов Б.М., Басов В.В. Квазианалоговый метод электро моделирования. Изв. ВУЗов. "Приборостроение", N5, 1966.
  158. Темников А.В., Гаврилов Б.М., Дилигенский М.В. Квазианалоговые методы электро моделирования краевых задач теплообмена при относительном перемещении тел, находящихся в тепловом контакте. - В кн.: Расчеты физических полей методами моделирования. М., "Машиностроение", 1968.
  159. Темников А.В., Девяткин А.Б., Михеенков Е.А., Игонин В.И. Электро моделирование температурных полей в лопатках газовых турбин на переходных режимах работы. Издание института математики АН УССР, Киев, 1975.
  160. Темников А.В., Дитман А.О., Игонин В.И., Маркелов Д.Л. Электро моделирование плоской задачи термоупругости. Труды IV Всесоюзной конференции "Теплофизика технологических процессов", г.Тольятти, 1976, С.10.

161. Темников А.В., Дитман А.О., Игонин В.И. Электромагнитная аналогия для плоской задачи термоупругости в напряжениях. МВС. Теплофизика и оптимизация тепловых процессов. КПИ, Куйбышев, 1975, с.126-128.
162. Темников А.В., Игонин В.И., Вытчиков Ю.С., Кудинов В.А. Исследование сопряженной задачи теплообмена в охлаждаемых дефлекторных лопатках ГТД. Труды Всесоюзной научной конференции "Методы и средства машинной диагностики состояния газотурбинных двигателей и их элементов. Харьков, 1977, с.88-89.
163. Темников А.В., Вытчиков Ю.С., Игонин В.И. Решение сопряженной задачи стационарного теплообмена применительно к охлаждаемым лопаткам газовых турбин с помощью комплекса квазианалоговых АВМ-ЭЦВМ. АН УССР. Институт математики.
164. Темников А.В., Игонин В.И., Михеевков Е.Л., Чепаскина С.М. Применение квазианалогового метода моделирования к определению нестационарных температурных полей в охлаждаемых лопатках газовых турбин, работающих на переходных режимах. М. Сб. Расчет и моделирование тепловых процессов, вып. П, Куйбышев, 1967.
165. Темников А.В., Игонин В.И., Хорольский В.М. Задачи теплопроводности с переменными коэффициентами теплообмена на торцах и боковых поверхностях круглой пластины. М. Сб. Контактные и циклические задачи теплопроводности. Вопросы прочности и работоспособности инструментальных материалов. Вып.2., Куйбышев, 1977. - С.19-22.
166. Темников А.В., Игонин В.И., Хорольский В.М., Ильин В.М. Решение задач нестационарной теплопроводности аналитическим методом применительно к лопаткам ГТД. Труды Всесоюзной научной конференции "Методы и средства машинной диагностики состояния газотурбинных двигателей и их элементов.", Харьков, 1977.
167. Темников А.В., Игонин В.И., Хорольский В.М. Нестационарные задачи теплопроводности для полупространства с переменными коэффициентами теплоотдачи. М., Сб. Теплофизика и оптимизация тепловых процессов. Вып. III., Куйбышев, 1977. - С.39-42.
168. Темников А.В., Игонин В.И., Хорольский В.М. Применение электрического моделирования для обоснования и сравнения некоторых аналитических методов определе-

- ния тепловых полей в лопатках газовых турбин. АН УССР, ин-т математики, Киев, 1977.
169. Темников А.В. Исследование нелинейных задач нестационарной теплопроводности методом электрического моделирования. Автореф. канд. дисс., Минск, 1961, 23 с.
  170. Темников А.В. Электрическое моделирование теплообмена при взаимодействии тел в процессах обработки металлов. Автореф. д.д., Минск, 1971, 43 с.
  171. Тепловой расчет газотурбинных установок. Учебное пособие. Шелудько Л.П., Игонин В.И. Куйбышев, КПТИ, 1977, 48 с.
  172. Термопрочность деталей машин. Под общей ред. И.А. Биргера, Б.Ф. Шорра. Машиностроение, 1975.
  173. Тимо. Учет малоциклового усталости при конструировании деталей паровых турбин. Экспресс-информация. Серия "Теплоэнергетика", 1970, вып.26.
  174. Тихонов А.И. Бюл. МГУ секц. А, мат. и мех., т.1; 1938.
  175. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. М., "Наука", 1972.
  176. Токупов А.М., Радионов Н.Г. Определение теплового состояния оболочки охлаждаемой турбинной лопатки с приближенным учетом трехмерности температурного поля. Тезисы докладов Всесоюзной межвузовской конференции. ВТУ им. Н.Э. Баумана, М., 1974.
  177. Топпер и Гоуда. Применение метода локальных напряжений и деформаций при проектировании и расчетах на усталость. Перевод ВЦП М Ц-43275, 1975.
  178. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. ИИЛ, 1960.
  179. Труды Всесоюзной научно-технической конференции "Применение машинных методов для решения краевых задач", М., 1976.
  180. Трухний А.Д. О влиянии погрешностей граничных условий теплообмена на температурные напряжения в турбинных лопатках ГТУ при быстрых пусках. Труды Московского энергетического ин-та, вып.99, 1972.
  181. Трухний А.Д. Расчет температур в лопатках турбин при импульсных режимах изменения температуры газа. "Теплоэнергетика", N11, 1972.
  182. Угодчиков А.Г. и др. Решение краевых задач плоской теории термоупругости на цифровых и аналоговых машинах. М., 1970.

183. Федоров В.И., Марценюк В.А. Метод элементарных балансов для расчета нестационарных процессов поверхностных теплообменных аппаратов., Киев, "Наукова думка", 1977, 143 с.
184. Федоткин И.Н., Айзен А.М., Голошук И.А. Применение интегральных уравнений к задачам теплопроводности при переменном коэффициенте теплообмена. ИФЖ, 28, N3, 1974.
185. Хорольский В.М. Исследование контактного теплообмена и термических напряжений в процессах механической обработки материалов. к.д., Куйбышев, 1973.
186. Цой П.В. О решении задач теплопроводности при переменных коэффициентах теплообмена. Изв. АН СССР., "Энергетика и транспорт", N4, 1976.
187. Чернин В.М. К расчету нестационарного температурного поля тонкостенной лопатки турбины с дефлекторным охлаждением. Изв. ВУЗов, "Машиностроение", N6, 1969.
188. Шелудько Л.П. и др. Оптимизация начальной температуры газа пиковой ГТУ. "Энергомашиностроение", N1, 1977.
189. Шерстюк А.Н. Турбулентный пограничный слой. М., "Энергия", 1974.
190. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Пер. с англ. М., "Наука", 1969.
191. Шубенко-Шубин А.А., Палагин А.А. Цепи и основные принципы автоматизации проектирования турбин. Харьков, ИПМ АН УССР, 1975, 38 с.
192. Шубенко-Шубин А.А., Переверзев Д.А. Задачи теплового состояния элементов в системе проектирования мощных паротурбинных агрегатов. - "Известия АН СССР. Энергетика и транспорт", N4, 1976. - С. 85-91.
193. Шубенко-Шубин А.А., Переверзев Д.А. Задачи управления тепловым состоянием деталей и узлов турбомашин. "Энергомашиностроение", N12, 1977. - С. 11-13.
194. Юдин В.М. Метод решения задач теплопроводности при переменном коэффициенте теплоотдачи. Тепловые напряжения в элементах конструкций. вып.5, 1965.
195. Karplus W.J. Analog simulation solution of field problems. N. -Y, Mc.Graw - Hill Book Company, 1958. 434 p.
196. Kirchhoff G. Annalen der Physik und Chemil, 1845, LXIV, 4, P. 497-514.

197. Liebmann G. A new Electrical Analog Method for the Solution of Transien Heat-Conduction Problems. - Trans. ASME, 1956, Vol.78. N3, P. 655-665.
198. Liebmann G. Solution of Transien Heat-Transfer Problem by the Rsistans-notwork Analog Method. - Trans. ASME, 1956, Vol. 78. N6, P. 1267-1272.
199. Maxwell J.C. Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford, 1873.
200. Sparrow E.M., Hadji-Shehh A.A., Lundgren T.S. The Jnverse Problem in Transient Heat Conductions. - Trans. ASME, Ser. E, 1964, 86, P. 369-375.



## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	... 3
1. Аналитический обзор	... 5
2. Конструктивные схемы охлаждения элементов газотурбинного агрегата	... 8
3. Общие математические формулировки задачи теплопроводности в твердом теле при теплообмене его с потоком жидкости или газа	... 14
3.1 Формулировка сопряженной задачи "тело-жидкость" в общем виде	... 14
3.2 Дифференциальные операторы поля в ортогональных системах координат	... 19
3.2.1 Криволинейные координаты	... 19
3.2.2 Основные операции векторного анализа в ортогональных координатах	... 26
3.3 Система уравнений сопряженного теплообмена "твердое тело-жидкость" в различных системах координат	... 28
3.3.1 Уравнение движения и уравнение энергии в случае турбулентного течения	... 33
4. Методические основы исследования температурных полей в элементах конструкций турбоагрегата	... 36
4.1 Квазианалоговое электро моделирование задач конвективного теплообмена	... 36
4.2 Метод квазианалогового моделирования для определения нестационарных температурных полей в охлаждаемых лопатках газовых турбин	... 40
5. Исследование температурного состояния лопаток газовых турбин, работающих на переходных режимах	... 43
5.1 Решение сопряженной задачи теплообмена для охлаждаемой лопатки	... 43
5.1.1 Гидродинамика и теплообмен между дефлектором и стенками лопатки	... 43
5.1.2 Формулировка сопряженной задачи теплообмена для участка канала лопатки	... 45
5.1.3 Алгоритм расчета гидродинамики, коэффициентов турбулентного теплопереноса и сетки резисторов квазианалогового процессора на ЭВМ	... 51
5.1.4 Исследование сопряженных нелинейных задач турбулентного теплообмена между воз-	