УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

В. Н. Козлов

# МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Допущено Минобразованием России в качестве учебного пособия для студентов гуманитарных и социально-экономических специальностей

ПИТЕР®


Москва · Санкт-Петербург · Нижний Новгород · Воронеж
Ростов-на-Дону · Екатеринбург · Самара · Новосибирск
Киев · Харьков · Минск
2004

# СОДЕРЖАНИЕ

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Математика и информатика являются достаточно мощными пластами современной культуры, определяющими развитие общества на основе формирования интеллектуального потенциала человека. Нетрадиционное содержание образования в настоящее время привело к необходимости взаимного проникновения наук, имеющих сильно отличительные технологии. При этом весьма важно решение проблемы выделения наиболее значимых компонентов знаний из огромного арсенала упомянутых наук. Нестандартное взаимное проникновение дисциплин определяет фактор нового совершенствования мышления для гуманитариев, нашедшего свое отражение в государственных образовательных стандартах (ГОС).

Данное пособие соответствует одному из вариантов одноименной федеральной дисциплины «Математика и информатика» первого поколения ГОС. Предлагаемая читателю книга представляет также интерес для широких слоев читателей. С одной стороны, это учебное пособие для гуманитариев, а с другой — для лиц, обучающихся по техническим направлениям и специальностям. Последнее связано с содержанием, значительно выходящим за рамки традиционных втузовских курсов по математике. В этом смысле книга методологична, хотя сложность затронутых проблем не всегда раскрывается на концептуальном уровне.

Книга пронизана стремлением автора в наиболее доступной форме донести основные идеи рассматриваемых научных областей знаний, не скатываясь на позиции поверхностного популизма. Все это потребует от читателя определенных интеллектуальных усилий, технологиям применения которых в книге отведено достаточное место. Другими словами, книга построена по принципам «идентификации» и «передачи технологий».

Автор книги, действительный член Международной академии наук высшей школы, доктор технических наук, вице-президент СПбПТУ Владимир Николаевич Козлов, последние годы работает над проблемой образовательных стандартов. Он — признанный лидер разработки ГОС высшего образования, лауреат премии Президента Российской Федерации в области образования за 1998 год. Его труд направлен на развитие гуманитарной ветви образования в университетах.

Академик РАН *Ю. С. Васильев*

## ОТ АВТОРА

Написание книги «Математика и информатика» для обучающихся по гуманитарным и социально-экономическим направлениям и специальностям высшего профессионального образования является новой задачей в сфере реформирования образования Российской Федерации. Отсутствие опыта породило ряд трудностей отбора материала для данной книги даже при разработанных к настоящему времени государственных образовательных стандартах высшего профессионального образования. Основной целью автор считает не только изложение «фактологии» таких важных областей знания, как «Математика» и «Информатика», но и раскрытия исторического опыта и основных концептуальных идей этих наук. Вместе с тем, невольно возникает вопрос о смысле и полезности изучения идей и методов упомянутых наук в условиях, когда имеется опасение, что они будут использованы и восприняты весьма ограничено.

Для того чтобы приобщить учащихся к основным идеям излагаемых дисциплин, автор использовал формальные и неформальные стилизы. Во-первых, книга соответствует государственным требованиям к минимальному уровню подготовки бакалавров по направлениям: «Культурология», «Теология», «Филология», «Философия», «Лингвистика», «Журналистика», «Книговедение», «История», «Политология», «Психология», «Социальная работа», «Социология», «Регионоведение», «Юриспруденция», «Менеджмент», «Экономика», «Искусство», «Коммерция», «Агроэкономика», «Статистика», «Информационные системы в экономике», «Религиоведение».

Во-вторых, книга снабжена историческим введением и историческими комментариями, которые интересны сами по себе как образцы интеллектуализации деятельности человечества в области науки, образования и культуры на примере математики и информатики. Математическая наука является исключительно красивым предметом искусства, которое, к сожалению, часто недоступно многим людям. Хотя автор не разделяет распространенное мнение о том, что изучить математику могут только избранные люди. Исходя из того, что развитие математики иллюстрирует восхождение от конкретного к абстрактному, автор излагает материал на основе большого числа примеров. Примеры часто не играют иллюстрирующую роль, а предвосхищают или разъясняют абстрактные построения, порой возвращают читателя к простым и гармоничным идеям изучаемой науки.

Кроме того, в книге описаны подходы к созданию интеллектуальных технологий образования и науки на основе анализа и обобщения опыта российских философских и технических научных школ. В основе изложения технологий лежат концепции дуальности «информированности личности» и «интеллектуальности личности», базирующиеся на разделении этих понятий (информационно-интеллектуального дуализма).

От читателя требуется определенная психологическая подготовка, поскольку материал книги выходит за рамки традиционных математических дисциплин для технических направлений и специальностей и вводит читателя в современные понятия математики и информатики. Однако концептуально-понятийный стиль изложения идей направлен на возможность заимствования технологий математики и информатики учащимися гуманитарных и социально-экономических направлений и специальностей. Иллюстрируемая динамика становления понятий, методов и теорий воспроизведена для создания у читателей личностной интеллектуальной технологии как средства эффективного овладения знаниями и умениями в основной сфере деятельности с помощью методов математики и информатики. Этому способствует рассмотрение методов принятия решений, введение в структуры информационно-вычислительных систем локального и глобального уровня (типа сети Интернет). В книге последовательно проводится идея системности и вариативности представления материала, которая позволяет задать «поле выбора» направлений развития отдельных вопросов математики и информатики.

Таким образом, предпринята попытка наряду с изложением основных идей, методов математики и информатики определить направление применения указанных областей знания для создания проблемных экспертных систем, систем-советчиков, систем поддержки принятия решений, информационных систем гуманитарных знаний в Интернете. Глава 12 написана совместно с канд. техн. наук доцентом Ю. В. Сотсковым. Автор приносит глубокую благодарность канд. физ.-мат. наук доценту А. Ф. Устинову, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд полезных замечаний, а также профессору Н. В. Алешину, активно поддержавшему идею написания книги и познакомившего автора с рядом интересных первоисточников.

В какой мере автору удалось задуманное, предстоит ответить читателю. Поскольку книга носит экспериментальный характер, то автор с благодарностью примет все пожелания, которые могут быть учтены в дальнейшей работе.

# 1. ВВЕДЕНИЕ

В первой части книги дается историческая и общая характеристика математики и информатики. При ограниченном применении математической символики описываются главные концептуальные идеи. Рассматриваются интеллектуализующие установки по изучению математики и информатики, приводятся данные об элементах математического творчества.

*Глава 1*

## ПЕРВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ. УЧЕНИЕ ЕВКЛИДА

В данной главе описываются причины появления первых математических знаний, которые на начальных стадиях имели естественную геометрическую иллюстрацию. Последующее обобщение первичных математических знаний привело к созданию теории евклидовых пространств, исторические корни которой излагаются в качестве примера первоначальных идей, положивших основу современным фундаментальным результатам. Краткое знакомство с историей математики позволит мысленно проследить мотивы ее появления, подвести читателя к осознанию широких возможностей данной науки при решении проблем в гуманитарных и смежных областях знания.

## 1.1. ИСТОРИЯ НАЧАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

Можно назвать несколько мотивов возникновения первичных математических понятий:

- необходимость отражения свойств и отношений реальных предметов объективно существующего мира. Для определения количества предметов были введены натуральные числа. Вещественные числа появились из потребности человека анализировать ситуации при выходе за рамки целочисленных представлений. Примером необходимых дальнейших обобщений является сведение содержательных существенно различных проблем к решению уравнений, неравенств различного типа;
- чувственное восприятие человеком адекватности количества предметов числам, отражающим это количество;
- необходимость сравнения количеств между собой и с наглядными эталонами (пальцами рук и т. п.);
- потребность в символической характеристике чисел (количества), что привело к появлению различных систем счисления как совокупности символов и правил для записи чисел.

Важное историческое значение имели следующие системы счисления:

- система узловых (базовых) чисел. Остальные числа строились путем приписывания слева и справа к узловым числам других узловых чисел. Здесь мы имеем дело с элементарной формой агрегирования простейших математических категорий (чисел);
- иероглифические непозиционные системы счисления. Было введено понятие алфавитной системы счисления, в которой буквы алфавита, взятые по девять, используются соответственно для обозначения единиц, десятков, сотен и т. д., а также десятых, сотых, тысячных и т. д. долей единицы;
- позиционные системы счисления, в которых вес каждого числа определяется его позицией. Например, число 529 в десятичной системе счисления записывается как

$$529 = 5 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 9 \times 10^0,$$

где первое слагаемое означает пять сотен, второе — два десятка, третье — девять единиц.

Следует заметить, что все-таки исторически первыми понятиями математики были «числа и фигуры». И если на начальном этапе появления математических знаний пути их формирования были в большей части интуитивными, то на последующих этапах развития отчетливо обозначилась необходимость логической (или концептульной) математики. В этом смысле процесс формирования математических понятий и методов можно рассматривать как единство исторического и логического. При этом историческое развитие часто вызывается практической необходимостью, а логическое — необходимостью выявления закономерностей в описаниях математических понятий и методов. Формы логического подхода могут быть различными. Далее будем стремиться логически установить категории и связи между ними, что позволит выделить базисные понятия математики как науки.

При этом под базисными категориями и методами будем понимать минимальные количества понятий и методов, лежащих в основе научной области знаний или учебной дисциплины. Успешному восприятию этого подхода будет способствовать более детальный анализ развития математики в странах древних цивилизаций.

Математические понятия и методы стран древних цивилизаций формировались в период с 2000 до 150 гг. до нашей эры на территории Древнего Египта, Древнего Вавилона, Древнего Китая. За указанный период математическая наука прошла благоприятный путь развития от введения понятия числа до формулировки специальных методов решения линейных алгебраических систем уравнений. Характерно, что упомянутые методы носили вычислительно-алгоритмический характер, однако это было определенным этапом движения к аксиоматическим построениям математических теорий.

***История математики Древнего Египта***

Сведения об уровне развития математики в Древнем Египте доносят до нас два папируса, один из которых носит имя его владельца египтолога Г. Ринда, приобретшего его в 1858 г. Второй папирус был приобретен русским востоковедом В. С. Голенищевым (1856–1947). Сведения по математике относятся к 2000 г. до н. э. Информация, хранящаяся на папирусе, имеет следующие свойства:

• собраны 84 задачи прикладного характера, для решения которых производились действия с дробями, вычислялись площади прямоугольников, трапеций и круга, а также объемы геометрических фигур. Отыскивались суммы геометрических прогрессий, что свидетельствует о постановке элементарных математических проблем;

• использовалась десятично-иероглифическая система счисления, в рамках которой для узловых чисел (см. определение ранее) устанавливались индивидуальные иероглифы, а для алгоритмических чисел — использовались комбинации узловых чисел. Сформировались частные типы дробей вида 1/n (так называемые аликвотные), для которых были составлены таблицы. Характерно, что для указанного представления чисел техника вычислений имела «аддитивную направленность», когда все вычислительные операции по возможности сводились к сложению или удвоению сомножителей. Использовалось также последовательное деление пополам с постепенным подбором частного. Интересно заметить, что здесь также имело место введение основных понятий и действий над ними.

### *История математики Древнего Вавилона*

Данный этап развития математики относится к периоду от 2000 до 200 гг. до н. э. Информация о соответствующем периоде получена на основе изучения от 50 до 200 больших плоских табличек из обожженной глины. Для математики Древнего Вавилона характерно:

• использование позиционной 60-ричной системы счисления чисел, не имеющей нуля. При этом регулярно применялись правила арифметических действий как с целыми числами, так и с дробями. Были составлены таблицы квадратов, кубов чисел, а также таблицы обращений для чисел;

• рассмотрение разнообразных задач, использующих понятия процентов за долги, а также задач, требующих решения алгебраических уравнений до третьей степени. Последнее свидетельствует о необходимости решения классических алгебраических задач;

• применение элементов суммирования арифметических прогрессий и рядов, наборов пифагоровых чисел x, y, и z, удовлетворяющих равенству

$$x^2 + y^2 = z^2. \qquad (1.1.1)$$

Подбор этих чисел привел к необходимости применения формул вида

$$x^2 = p^2 - q^2, \quad y = 2pq, \quad z = p^2 - q^2, \qquad (1.1.2)$$

которые в теории чисел называют диофантовыми. Для математики Древнего Вавилона характерен более высокий, чем у египтян уровень геометрических познаний, связанный с вычислением площадей и объемов простейших фигур и тел.

***История математики Древнего Китая***

Математические познания китайцев развивались с 14 в. до н. э. Китайская математическая наука имела общие и отличные черты в сравнении с математикой Египта и Вавилона. В частности, использовалась иероглифическая десятичная система счисления, для которой были развиты основные операции, в том числе с помощью счетных устройств (узелков, счетных досок). Основные результаты этого периода сформулированы в труде «Математика в 9 книгах», который неоднократно перерабатывался и дополнялся на протяжении периода 2—1 вв. до н. э. Упомянутый труд представлял собой математическую энциклопедию того времени. В книге 1 рассматривалась теория измерения полей, где устанавливались соотношения для фигур, а книга 2 была посвящена практике взимания налогов зерном, измеряемым в объемных мерах. В книге 3 рассматривалось «деление по ступеням», в которое вкладывался ряд операций: пропорциональное деление, деление пропорционально обратным значениям чисел и т. п. Геометрические задачи, рассмотренные в книге, были посвящены определению сторон прямоугольников по заданным площадям, правилам извлечения корня, отысканию радиуса круга и т. д. Расчеты, связанные со строительством крепостных стен, приведены в книге 5, причем использовались методы вычисления объемов тел, транспортных систем. Книга 6, близкая по тематике к книге 3, содержала задачи о справедливом (пропорциональном) распределении налогов, доходов и т. п.

Важный качественный скачок в развитии математической теории в Китае отражен в книгах 7 и 8. где рассмотрены линейные уравнения и их системы. Введение систем уравнений отражает усложнение класса формальных моделей за счет учета ряда требований практики. Рассмотрение систем уравнений встречается в историческом анализе впервые. При этом даны простейшие методы решения уравнений и систем, которые, хотя и не были четко сформулированы для систем, все же явились качественным продвижением. Для систем уравнений алгоритм вычисления решений состоит в следующем. Дана система второго порядка

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2, \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

изучаемая в средней школе, где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ — коэффициенты системы.

Рассмотрим пример удобной записи линейных алебраических систем, введенной английским математиком О.А. Кэли (1821–1895). Если задана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} ax + by &= e, \\ cx + dy &= f, \end{aligned}$$

то можно отделить коэффициенты при неизвестных, записав их в виде таблицы

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Такая таблица называется матрицей линейной алгебраической системы. Далее можно ввести вектор-столбцы переменных и правых частей исходной системы:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

Если ввести правила умножения матрицы на вектор в соответствии с формулой

$$AX = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix},$$

и положить, что два вектора AX и B равны при условии равенства их компонентов ($ax + by = e$, $cx + dy = f$), то мы получили новую форму записи, которая будет использована на протяжении всей книги:

$$AX = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = B.$$

Система n линейных уравнений общего вида

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{array} \qquad (1.1.4а)$$

анализируемая в курсах высшей алгебры, может быть записана весьма компактным способом с помощью матриц. В результате такой записи система (1.1.4а) принимает вид

$$AX = B,$$

где A — квадратная матрица (таблица), имеющая n строк и n столбцов; X — вектор неизвестных величин; B — вектор частей: частей таких, что

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}. \qquad (1.1.4б)$$

В уравнении (1.1.4.б) использована операция умножения матрицы A на вектор X, причем каждая i-я компонента вектора AX вычисляется по формуле

$$[AX]_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k,$$

где k — индекс суммирования.

Очевидно, что записи уравнений (1.1.4а) и (1.1.4б) эквивалентны, однако последняя векторно-матричная форма весьма компактна, и в дальнейшем мы будем пользоваться ею.

Продолжая рассмотрение решений в соответствии с китайским способом письма (справа налево по строкам, сверху вниз по столбцам), составляют расширенные матрицы (таблицы) двух систем. Для системы (1.1.3) указанная матрица примет вид

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{11} \\ a_{22} & a_{12} \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix}, \qquad (1.1.5)$$

а для второй системы (1.1.4а) — вид

$$\begin{bmatrix} a_{n1} & \dots & a_{21} & a_{11} \\ a_{n2} & \dots & a_{22} & a_{12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nn} & \dots & a_{2n} & a_{1n} \\ b_n & \dots & b_2 & b_1 \end{bmatrix}. \qquad (1.1.6)$$

Затем последние матрицы преобразуют так, чтобы все числа левее и правее главной диагонали стали равными нулю. Тогда для матрицы (1.1.5) получим в результате таблицу

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{11} \\ a''_{22} & a_{12} \\ b''_2 & b''_1 \end{bmatrix}, \qquad (1.1.7)$$

а для матрицы (1.1.6) — таблицу

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{11} \\ 0 & \dots & a''_{22} & a''_{12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a''_{nn} & \dots & a''_{2n} & a''_{1n} \\ b''_n & \dots & b''_2 & b''_1 \end{bmatrix}. \qquad (1.1.8)$$

Заметим, что качественным свойством последней матрицы является наличие нулевой верхней левой треугольной части, что упрощает процедуру решения. Преобразование таблиц осуществляется выполнением операций над строками, а точнее, умножением строк на подходящие числа и сложением с другими строками. Штрихами обозначены элементы матриц, полученные в результате выполнения операций над строками. На последней стадии решения делается обратный переход — от матрицы, которая имеет «ступенчатый вид», к системе уравнений. В результате для системы (1.1.5) будем иметь равенства

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a''_{11}x_1 &= b''_2. \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

Преобразованная к ступенчатому виду система (1.1.9) примет вид

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_1, \\ a''_{22}x_2 + \ldots + a''_{2n}x_n &= b''_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a''_{nn}x_n &= b''. \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

Описанный метод носит в современной математической литературе имя немецкого математика К. Ф. Гаусса (1777–1855). Для систем (1.1.9) и (1.1.10) решения находят, последовательно идя снизу вверх и выполняя обратный ход схемы Гаусса. Интересно заметить, что все вычисления выполнялись на счетной доске, где отрицательные и положительные числа обозначались счетными палочками различного цвета. Завершающий том 9 содержал задачи по определению недоступных расстояний и высот с помощью теоремы Пифагора и свойств подобных треугольников.

Характерной чертой китайской математики являлась ее вычислительно-алгоритмическая направленность, связанная с решением алгебраических уравнений (Ван Сяо Чун, 7 в.; Цинь Цзю Шао, Чжу Ши Цзе, 13–14 вв. и др.).

История математики Древней Индии. Характерной особенностью математики Древней Индии является развитие алгоритмико-вычислительных методов в период 8–7 вв. до н. э. При этом использовалась десятичная система счисления, и операции производились над большими числами. Математика в Индии считалась элементом культуры. В период 5–12 вв. можно отметить бурное развитие астрономии, правил арифметики, геометрии, тригонометрии, комбинаторики и других разделов математики. В этот период разрабатываются методы решения задач неопределенного или диофантова анализа, что является одним из высших достижений индийской математики. Были сформулированы методы отыскания целочисленных решений уравнений первого и второго порядка.

## 1.2. КОНЦЕПЦИЯ И СТРУКТУРА ГЕОМЕТРИИ И УЧЕНИЯ ЕВКЛИДА

Под евклидовой геометрией понимается геометрия евклидова пространства. С евклидовой геометрией мы знакомимся еще в школе. Название евклидовой геометрии связано с именем древнегреческого математика Евклида, жившего в 3 в. до н. э., который получил первые систематические результаты, изложенные в книге «Начала». В течение многих лет (до 19 в.) евклидова геометрия считалась единственной геометрией, описывающей свойства реального физического пространства. В 19 в. появились новые геометрии, среди которых геометрия Лобачевского, обладающая свойством непротиворечивости. Затем возникли другие новые геометрии, и был сформулирован принцип их создания. Геометрия Евклида будет рассматриваться как источник появления первой геометрической теории.

Большая часть школьной геометрии заимствована из первых шести книг «Начал». Традиция Евклида сегодня оказывает влияние на обучение элементарной геометрии. Изложение Евклида построено в виде строго логических выводов теорем из системы определений, постулатов, аксиом. В первых четырёх книгах рассматривается геометрия на плоскости. Исходя из свойств линий и углов, доказаны условия равенства треугольников, площадей, теорема Пифагора. Изучена задача построения квадрата, равновеликого заданному прямоугольнику, определены понятия круга и правильного многоугольника. В пятой книге изложена евдоксова теория несоизмеримых в геометрической форме. Шестая книга рассматривает подобие треугольников. В десятой книге дана классификация квадратичных иррациональностей и квадратных корней из них. Другими словами, рассмотрена теория чисел, которые представимы в виде

$$\begin{gathered} 1/2\ \ 1/2\ \ 1/2 \\ \{a + b\}. \end{gathered}$$

В этих книгах изложена геометрия в пространстве, причем здесь введены понятия телесных углов, объемов параллелепипедов, шаров, а также другие понятия.

Седьмая и восьмая книги посвящены теории чисел, в частности, рассмотрены вопросы делимости целых чисел, суммирование геометрических прогрессий, некоторые свойства простых чисел. В этих же книгах изложен классический «алгоритм Евклида» для нахождения наибольшего общего делителя заданной системы чисел. Сущность его состоит в следующем. Пусть имеется два положительных целых числа $a > b$ и требуется найти наибольший общий делитель. Деление с остатком числа $a$ на число $b$ всегда приводит к результату

$$a = nb + b_1,$$

где частное $n$ — целое положительное число, а остаток $b_1$ либо равен нулю, либо положительное целое число, меньшее $b$: $0 < b_1 < b$. Далее в соответствии с алгоритмом Евклида производится последовательное деление:

$$\begin{aligned} a &= nb + b_1, \\ b &= n_1 b_1 + b_2, \\ b_1 &= n_2 b_2 + b_3, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

где все $n_i$ — положительные целые числа и $0 < b_i < b_{i+1}$.

Деление выполняется до тех пор, пока не получится остаток, равный нулю. Ряд приведенных выше равенств закончится так:

$$\begin{aligned} b_{k-2} &= n_{k-1} b_{k-1} + b_k, \\ b_{k-1} &= n_k b_k. \end{aligned}$$

Последний положительный остаток $b_k$ в этом процессе и является наибольшим общим делителем. Иллюстрация этого факта может быть дана при рассмотрении двух первых равенств. Кроме того, в «Началах» доказана теорема Евклида о том, что простых чисел

$$a = nb + b_1 = n(n_1 b_1) + b_1 = (nn_1 + 1)b_1$$

*бесконечно много, а также впервые выведены аналоги теорем* об условной оптимизации, когда строго доказано, что максимум площади прямоугольника при ограничении периметра имеет место для квадрата.

В целом система аксиом Евклида имеет следующий список.

1. Через любые две точки можно провести прямую.
2. Любые две прямые имеют не более одной общей точки.
3. Любой конечный отрезок можно неограничено продолжать.
4. Вокруг любой точки можно описать окружность произвольного радиуса.
5. Все прямые углы равны между собой.

К числу аксиом Евклида относится знаменитая «аксиома о параллельности», которая содержится в первой книге «Начал». В соответствии с этой аксиомой через точку вне заданной прямой можно провести одну и только одну прямую, ей параллельную. Данная аксиома была сформулирована математически точно, и все позднейшие попытки доказать ее как теорему были напрасными. Более того, в связи с этой аксиомой были открыты другие — неевклидовы геометрии.

Для Евклида характерно получение алгебраических выводов в геометрической форме. Выражение корня из числа A им введено как сторона квадрата с площадью A. Произведение чисел a и b интерпретировалось как площадь прямоугольника со сторонами a и b.

Завершая характеристику работ Евклида, можно отметить, что ему удалось изложить в одном труде теорию отношений Евклида, теорию иррациональности и теорию пяти правильных тел. Труды Евклида получили дальнейшее развитие. В част-ности, евклидова геометрия в многомерных пространствах описывается совокупностью объектов трех родов: точками, прямыми, плоскостями, а также отношениями между ними: принадлежности, порядка («лежать между»), конгруэнтности, непрерывности.

Понятие конгруэнтности достаточно наглядно: два треугольника конгруэнтны, если они имеют одинаковую форму и одинаковые размеры. Эти треугольники широко использовались при доказательстве теорем.

Существуют модификации систем аксиом. Например, в векторно-точечной аксиоматике за одно из основных принято понятие вектора. Последнее весьма важно для развития современной теории конечномерных евклидовых пространств векторов и функций. В основу аксиоматики евклидовых пространств может быть также положено отношение симметрии, что позволяет построить варианты теории евклидовых пространств. Весьма важны обобщения результатов Евклида в теории колец — одного из типов алгебраических структур, рассматриваемых в разделе 4 настоящей книги.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Болгарский Б. В.* Очерки по истории математики / Под ред. В. Д. Чистякова. Минск: Вышэйшая школа, 1974.

*Рид К. Гильберт* / Под ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: Наука, 1977.

*Рыбников К. А.* История математики. М.: Наука. Ч. 1, 1960; Ч. 2, 1963.

*Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. Наука, 1978.

## *Глава 2*

## КОНЦЕПЦИИ И СТРУКТУРА МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

В данной главе даются первые представления о математике как о целостной системе знаний. Разъясняется сущность понятий, операций и методов, составляющих основу математических теорий. Приводятся основные понятия информатики и общие сведения об информационных системах. Рассматриваются подходы к изучению математики на основе современных технологий. Это создает возможность более направленно изучать математику и информатику как систему знаний о моделях окружающих нас явлений и широко использовать эти области знаний в гуманитарной и других сферах человеческой деятельности.

## 2.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ, ОПЕРАЦИИ И МЕТОДЫ

Рассмотрим основные общие элементы любой математической науки: математические понятия, математические операции (действия), математические методы. Под математикой часто понимают науку о математических моделях, которые могут описывать объекты разнообразной природы. Модели строятся на основе математических понятий. В процессе математического исследования над исходными понятиями осуществляются разнообразные операции (действия). Совокупность операций часто составляет основу математических методов, из которых формируются теории. Взаимосвязь между математическими понятиями, операциями (действиями) и математическими методами иллюстрируется на рис. 2.1.

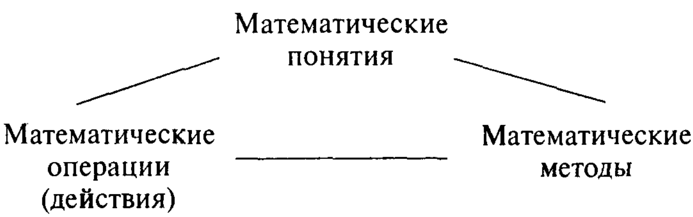



Рис. 2.1

Примерами простейших математических понятий являются числа, постоянные и переменные величины, функции, фигуры и др. Однако прежде чем пользоваться математическими понятиями, необходимо их определить. Математические понятия (или объекты) *определяются предложениями*, раскрывающими их содержание (смысл). Для обозначения понятий, операций, результатов операций используются математические знаки.

Как правило, математические науки связаны с числами. Существующая совокупность чисел и соответствующие математические знаки для их обозначения (буквы латинского алфавита) представляются следующим списком: N — множество натуральных чисел, Z — множество целых чисел, Q — множество рациональных чисел, которое образовано отношениями целых чисел, R — множество вещественных чисел, включающее в себя множество рациональных и иррациональных чисел, C — множество комплексных чисел (имеющих вещественную и мнимую части). Число было введено в связи с требованием соизмерения различных (но однородных) физических, геометрических или других реальных объектов. Такое соизмерение (сравнение) естественно привело к математической конструкции сопоставления каждому элементу рассматриваемого множества числа, характеризующего этот элемент с количественной точки зрения.

Следующим важным понятием математики является величина. При измерении величин некоторый элемент принимается за единичный, а остальные элементы сравниваются с ним. Существует аксиоматика понятий системы положительных скалярных величин. Понятие величины подвергалось многократным обобщениям. Например, изучение сил, скоростей, привели к появлению понятий векторов и тензоров.

Переменная величина обозначает функцию (числовую, векторную, тензорную), значения которой меняются с изменением независимой величины, которая называется аргументом (строгое определение функции будет дано далее).

Более сложные (чем числа и величины) математические понятия могут быть определены различными способами. На ранней стадии изучения математики математические понятия иногда вводят без строгих определений. При этом используются описания понятий (нестрогие определения) или указания на модели. Примерами нестрогих определений могут быть:

- понятие шара иллюстрируется мячом;
- с понятием куба связано его представление в виде игральной кости;
- понятие окружности представляется ее моделью в виде обруча.

Строгие определения понятий могут быть даны следующими способами:

- сведением некоторого нового математического понятия к уже известным математическим понятиям;
- применением генетического, или конструктивного, определения, когда указан способ образования (конструирования) математического понятия (объекта);

• аксиоматическим введением понятия; например, понятие натурального числа дается аксиоматически, т. е. через набор аксиом, а понятие расстояния — через метрику (обобщение понятия расстояния), понятия нормы — обобщения расстояния.

Изложенное позволяет дать системную характеристику способов введения определений математических понятий с помощью нестрогих и строгих определений в табл. 2.1.

Как следует из табл. 2.1, строгие определения математических понятий строятся на основе математических конструкций.

Таблица 2.1

| Объекты | Нестрогое определение | Строгое определение |
|---|---|---|
| Шар | Подобен мячу | Множество точек, удовлетворяющих алгебраическому соотношению типа неравенств |
| Куб | Подобен игральной кости | Множество точек, удовлетворяющих системе алгебраических неравенств |

Отметим, что математика немыслима без определения операций (действий) над математическими объектами. Необходимость действий диктуется самой жизнью.

Примерами простейших операций являются сложение, вычитание, умножение или деление чисел, которые могут быть целыми, вещественными и т. д. Операция растяжения (или сжатия) может быть примером действия над отрезком вещественных чисел, расположенных в интервале от $-1$ до $+1$. К математическим операциям относятся также дифференцирование, интегрирование функций, которые будут введены далее на основе операции предельного перехода.

Введение математических объектов и действий над ними позволяет определить понятие метода. Слово «метод» происходит от греческого слова «methodos», что в переводе означает — путь исследования, теория, учение. В общем смысле метод — это способ достижения какой-либо цели, решения какой-либо задачи, совокупность приемов или операций, практического или теоретического освоения или познания действительности. В философском смысле под методом понимают способ построения и обоснования системы философских знаний, когда под системой понимается целое, состоящее из частей.

Под математическим методом мы будем понимать совокупность действий, направленных на определение математических понятий, задание совокупности математических операций, направленных на решение какого-либо класса математических задач.

Примерами математических методов могут быть методы решения алгебраических уравнений и их систем, методы вычисления производных функций и т. д., которые будут рассмотрены далее.

## 2.2. ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИКИ

Математика — это наука о количественных отношениях и пространственных формах окружающего мира. С этой точки зрения математические модели весьма разнообразны. Это привело к образованию многочисленных разделов математики, к основным из которых относятся: теория чисел, аналитическая геометрия, алгебра, математический анализ, геометрия, дискретная математика, теория графов, топология, теория вероятностей, математическая статистика, математическая логика. Дадим краткую характеристику перечисленных разделов математики, которая будет необходима для общей ориентации в изучаемых далее материалах.

*Теория чисел* занимается проблемами исследования целых чисел и включает в себя на современном уровне аналитическую теорию чисел. Проблемы аналитической теории чисел связаны с задачами распределения простых чисел (чисел, которые делятся на единицу и на самих себя). Исторически первым результатом в теории чисел был результат Евклида, который гласил: простых чисел бесконечно много. Следующий важный шаг был сделан П. Л. Чебышевым в 1850 г., когда была получена возможность оценить сверху и снизу количество простых чисел на интервале, причем было использовано понятие предела. Проблему существования этого предела решили в 1986 г. Ж. Адамар и Ш. Ж. Валле Пуссен. Это позволило представить искомый предел с помощью специального интеграла. В дальнейшем потребовалось привлечение функций комплексного переменного. Аналитическая теория чисел далее развивалась по пути, связанному с уравнениями в целых числах, построением теоретико-числовых функций, теорией алгебраических и трансцендентных чисел. Более подробно некоторые методы теории чисел будут рассмотрены в последующих главах, в частности алгоритм Евклида и др. Значительные результаты в теорию чисел внес русский ученый академик И. М. Виноградов.

*Аналитическая геометрия* исследует геометрические образы средствами алгебры на основе метода координат. Элементы идеи координат встречались у древних математиков. Египтяне пользовались такими понятиями, как параллельные отрезки (координаты). Греческие астрономы (Гиппарх, 2 в. до н. э. и Птолемей 2 в. н. э.) употребляли сферические координаты (широту и долготу). Существенное развитие аналитическая геометрия получила с появлением буквенной символики, созданной французским ученым Ф. Виетом (1540—1603). Далее это позволило французским ученым П. Ферма и Р. Декарту независимо разработать в 17 в. аналитическую геометрию на плоскости. Впервые в это время были решены задачи определения уравнений прямых на плоскости, анализа свойств линий на плоскости по их уравнениям. Термин «аналитическая геометрия» было бы правильно заменить на термин «координатная геометрия», однако создатель аналитической геометрии Декарт не смог выполнить «арифметизацию» геометрии в полной мере, поскольку не смог распространить метод координат на пространства размерности более двух (т. е. плоскости). В конце 17 и в течение 18 в. метод координат был обобщен (перенесен) на пространство в работах известных математиков А. К. Клеро и Л. Эйлера. Во второй половине 19 в. в связи с развитием физики в геометрии вводятся понятия вектора, тензора и т. д. В математике, теории относительности, квантовой механике состояние системы определяется в четырехмерном, многомерном или бесконечномерном пространстве. Таким образом, появившись на основе естественных геометрических представлений, аналитическая геометрия сегодня является развитым разделом современной математики, используемым при решении широкого класса задач математики, естественных наук, проблем гуманитарной сферы.

*Алгебра* — изучает алгебраические операции над элементами множеств произвольной природы. Простейшие алгебраические операции — арифметические действия над натуральными числами. Сильное влияние на развитие алгебры оказала «Арифметика» Диофанта (III в.). Термин «алгебра» произошел от названия работы Мухаммеда бен Мусы аль-Хорезми «Аль-джебр» (IX в.), посвященной решению алгебраических уравнений первой и второй степени. В конце XV в. словесное описание алгебраических действий заменено современными символами операций сложения, вычитания, а затем знаками корней, степеней и т. д. Далее в XVII–XVIII вв. алгебра занималась тождественными преобразованиями буквенных формул, решениями алгебраических уравнений.

Если первоначально алгебра занималась решением уравнений, то в настоящее время под алгеброй понимается раздел математики, изучающий операции и отношения (предикаты) на множестве произвольной природы, обобщающие обычные операции сложения и умножения чисел и отношение неравенств чисел. Современная алгебра это математическая наука, объектом исследования которой являются алгебраические системы, например группы (множества с одной операцией), кольца (множества с двумя операциями), поля (множества с двумя операциями, для элементов которых существуют обратные элементы, например множества вещественных чисел), а также другие категории объектов.

*Геометрия*, одна из древнейших частей математики, изучает пространственные отношения и формы тел. Предмет и методы геометрии изменялись на протяжении многих веков. Первые успехи геометрии связаны с задачами землемерия, вычисления объемов тел и площадей. Геометрия с момента появления изучала некоторые геометрические свойства реального мира. С V в. до н. э. начинается новый этап в развитии геометрии в связи с попытками ее аксиоматического построения («Начала» Евклида, около III в. до н. э.). В это время геометрия впервые описана с помощью аксиом истин, не требующих доказательства. Основу учения составлял материал, изучаемый в современном курсе, дополненный сведениями из теории конических сечений. Развитие геометрии до XVII в. происходило не столь интенсивно, однако с появлением теории перспективы, занимающейся изображением тел на плоскости, возникла начертательная геометрия, а затем — проективная геометрия, изучающая свойства фигур, инвариантные (неизменные) относительно проективных преобразований. Значительные успехи в геометрии связаны с именем Р. Декарта, предложившего координатный метод, аналитическую геометрию (исследующую кривые и поверхности методами алгебры) и дифференциальную геометрию (соединяющие методы анализа с проблемами геометрии). В результате взаимодействия геометрии, алгебры и анализа образовались новые исчисления: векторное исчисление, тензорное исчисление, метод дифференциальных форм. Последняя группа методов получила название синтетической геометрии.

Математический формализм, относящийся к формам тел пространства, определяемого аксиомами евклидова пространства, привел к созданию евклидовой геометрии, отождествляемой с физическим пространством. В 1826 г. Н. И. Лобачевский построил геометрию, в основу которой была положена система аксиом, отличающаяся от аксиом Евклида только аксиомой о параллельности прямых. Стало ясно, что в математике могут быть построены разнообразные пространства с содержательной геометрией. Другим примером неевклидовой геометрии служит риманова геометрия. Очень важно, что в эти годы сложилась идея многомерного пространства. Далее в 1854 г. Б. Риман ввел разнообразные пространства с различными типами (метриками-обобщениями) понятия расстояний между элементами. Важно иметь в виду, что развитие геометрии было определено установлением ее связи с теорией групп (Ф. Клейн). После этого геометрия интерпретировалась следующим образом: дано многообразие и в нем группа (множество с одной операцией над элементами, обладающее определенными свойствами). Необходимо развить теорию инвариантов этой группы. Примером развития является евклидова геометрия, которая изучает теорию инвариантов ортогональной группы. Другим примером подобного типа являются аффинная геометрия (изучающая свойства фигур, инвариантные относительно аффинных преобразований), конформная геометрия (изучающая свойства фигур, инвариантных относительно конформных преобразований), а также проективная геометрия.

В настоящее время развитие геометрии идет по пути использования ее общности с теорией групп, а тенденция алгебраизации геометрии привела к созданию алгебраической геометрии, изучающей алгебраические многообразия и связанные с ними алгебраические и арифметические проблемы. Бесконечномерные пространства исследуются в функциональном анализе. Однако во всех областях математики геометрия является полезным способом мышления, оперирующим непосредственно наглядными образами.

*Математический анализ* объединяет целый ряд разделов математики, основанных на понятиях функции и предельного перехода. Обычно к математическому анализу относят дифференциальное и интегральное исчисление (методы исследования функций с помощью производной и интеграла), теорию рядов, теорию дифференциальных уравнений, теорию аналитических функций, теорию интегральных уравнений, вариационное исчисление, операционное исчисление (преобразование Лапласа), к которому примыкает теория преобразования Фурье. Математический анализ является классической основой математики и порождает ряд новых современных математических теорий, например, за счет распространения идей анализа функций непрерывного аргумента на случай функций дискретного аргумента, что весьма важно для современной вычислительной математики.

*Дискретная математика* изучает свойства конечных (финитных) множеств: конечных графов, конечных групп, конечных автоматов, комбинаторику, кодирование и др. Методы дискретной математики находят широкое применение в приложениях.

*Теория графов* — область дискретной математики, использующая геометрический подход к изучению объектов. Графом называется множество вершин и набор дуг, соединяющих упорядоченные или неупорядоченные пары вершин. Далее вводится характеристика связности графов — матрица (таблица) инциденций (связей) между парами вершин. В рамках такой модели формализуется широкий класс поначалу занимательных задач (задача о кенигсбергских мостах, задача четырех красок и др.), а затем и ряд серьезных теоретических и прикладных задач электротехники, физики, химии, топологии и др.). В настоящее время созданы различные теории исчисления на графах, носящие комбинаторный, вероятностный характер, а также другие задачи (потоки в сетях, задачи о разрезе, о максимальном потоке и др.).

*Топология* изучает свойства топологических пространств (метрических пространств — множеств элементов, характеризуемых отношением бесконечной близости), не изменяющихся при гомеоморфизме (взаимно-однозначных и взаимно непрерывных отображениях двух топологических пространств). Поскольку поверхности в геометрии и решения (траектории) в теории дифференциальных уравнений можно рассматривать как топологические пространства, то топология включает в себя исследования достаточно общих свойств этих объектов.

*Теория вероятностей* изучает закономерности случайных явлений: событий, величин, функций. Математическое понятие вероятности отражает объективность свойства статистической устойчивости (неизменчивости) случайного события, случайной величины или случайной функции, о которых заранее нельзя иметь достоверную информацию. Различают частотную и аксиоматическую теории вероятностей. В частотной теории вероятности, основываясь на большом количестве наблюдений, делается вывод о близости вероятности и частоты появления случайных событий, величины или функции. Вероятность рассматривается как предел частоты (Р. Мизес). Далее вводится исчисление вероятностей, характеризуемое законами распределения, моментами (усредненными характеристиками). В аксиоматической теории вероятностей используется современная теория множеств, причем вероятность вводится как мера — неотрицательная функция множеств.

*Математическая статистика* изучает математические методы систематизации, обработки и исследования статистических данных. Основным понятием является «статистика» — как функция выборки (набора данных), в качестве которой могут выступать выборочные распределения или моменты. В некотором смысле математическая статистика служит для проверки результатов теории вероятностей. Теоретической основой математической статистики является теория вероятностей, причем связь между ними определяется законом больших чисел.

*Математическая логика* изучает правила вывода с помощью специального аппарата символов и исчислений (формализованных языков). Развитие методов математической логики привело к созданию теории множеств, теории алгоритмов, доказательству неразрешимости ряда алгоритмических проблем.

*Вычислительная математика* применяется в информатике в связи с использованием численных методов для решения широкого класса прикладных задач. Вычислительная математика базируется на аппроксимационном подходе к задачам классической математики. Используются различные формы аппроксимации решений: итерационные последовательности, сходящиеся к точному решению, представление решений по конечной системе базисных функций и др. Вычислительные методы и алгоритмы часто определяют структуру вычислительных средств информатики.

*Функциональный анализ* изучает алгебраические структуры и операторы, сохраняющие эти структуры.

### 2.3. ИНФОРМАТИКА КАК НАУКА

Современная информатика как область научного знания находит широкое применение в различных сферах человеческой деятельности. Весьма важна роль информатики в гуманитарных областях. Рассмотрим основные определения информатики, методы и современные средства при решении широкого спектра задач (например, задач информационного обмена в области гуманитарных знаний, использование методов принятия решений для получения совещательных экспертных заключений, опирающихся на нетрадиционные схемы анализа аргументов и фактов). Основным понятием информатики является информация. Информация в общем смысле слова — это сведения, обмен сведениями, передача сведений, которые мы черпаем из сообщений радио, телевидения и т. д.

Информация с точки зрения кибернетики (науки, занимающейся управлением — целенаправленным воздействием) интуитивно также определяется как некоторые данные, которые непрерывно уточняются. Информация может носить качественный характер (например, большие или маленькие объекты и т. п.), однако во многих случаях можно пренебречь качественными особенностями информации и выразить ее числом. Этим числом определяются возможности передачи информации по каналам связи и ее хранение в памяти. Информация может иметь весьма разнообразные формы, иллюстрируемые примерами.

Пример 1. Равенство $a = b$ дает информацию относительно $a$ и $b$. Второе равенство $a^2 = b^2$ дает меньшую информацию, так как эти равенства не равносильны, поскольку последнее равенство верно также в том случае, когда $a = -b$. Однако равенство $a^3 = b^3$ равносильно первому, поскольку это различные формы задания одной и той же информации.

Пример 2. Пусть проводится социологическое обследование населения. Тогда результаты произведенных с ошибками измерений некоторой величины (дохода, возраста и т. п.) и вычисленное на их основе среднее арифметическое дает точную информацию о среднем значении (математическом ожидании), если закон распределения измеряемых величин нормальный с известной дисперсией. Последнее условие следует из законов математической статистики.

В настоящее время под информатикой понимают науку об общих методах и средствах получения, хранения, поиска, передачи и обработки информации об объектах, явлениях и процессах окружающего мира, в гуманитарных, социально-экономических, хозяйственных и других сферах жизни и деятельности общества. Среди современных методов и средств поиска и передачи информации можно назвать глобальные компьютерные сети типа Интернет и другие локальные информационно-вычислительные, информационно-управляющие сети.

Информатика как наука базируется на целом ряде гуманитарных, математических, естественнонаучных и инженерных областей знания. Широкий спектр фундаментальных основ информатики определяется многогранностью ее применения, а также использованием развитого арсенала информационных средств. Изложим вкратце ее научные основы и технические средства.

*Теория информации* берет свое начало в работах К. Шеннона (1948 г.), который предложил способ измерения числом количества информации, содержащейся в одном случайном объекте (событии, величине, функции и т. п.). В качестве минимального количества информации используется «бит» — двоичная единица измерения количества информации. Для хранения в ЭВМ одного бита используется один разряд двоичной системы счисления. Набор из 8 битов составляет байт (количество информации в трех двоичных разрядах). Производные единицы: килобайт (сокращенно Кбайт, 1 Кбайт = 1024 байт) и мегабайт (1 Мбайт = 1024 Кбайт). Отдельное направление этой теории, например алгоритмическая теория информации, представляет собой раздел математической логики, уточняющий и изучающий понятие информации на основе понятия алгоритма и вычислимой функции (алгоритм — точное предписание для решения поставленной задачи).

*Математика* как фундамент информатики используется во всех своих возможностях в зависимости от типов решаемых задач и используемых математических моделей.

*Принятие решений* является относительно новым разделом математики, посвященным изучению процедур поиска решений в условиях полной или частичной неопределенности. В этой ситуации всегда имеется риск принятия неправильного решения. Используются методы системных матриц, теории риска, комбинаторной аппроксимации, нечетких множеств и чисел, статистического или логического вывода и др.

*Теория алгоритмов* изучает общие свойства алгоритмов, базирующиеся на понятии вычислимой функции. Развитию теории алгоритмов способствовало уточнение понятия алгоритма применительно к идеализированным вычислительным машинам. Для записи алгоритмов существуют различные алгоритмические языки, представляющие собой совокупность необходимых символов и правил.

*Базы данных и знаний* являются совокупностью данных или знаний, организованных по правилам, предусматривающим общие принципы описания, хранения и манипулирования данными или знаниями. Базы данных и базы знаний — это информационные модели предметной области. Существуют различные базы данных и знаний, рассматриваемые далее.

Вычислительные средства информатики реализуют методы информатики. К средствам информатики относятся вычислительные системы и комплексы, локальные и глобальные компьютерные сети. Анализ истории развития вычислительных средств информатики приводит к выводу о логических принципах построения средств. Особенно важную роль играет принцип аналогий.

## 2.4. ОСНОВНЫЕ ЧЕРТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

Осознанное усвоение математики и информатики возможно на основе современных технологий обучения. Среди многих технологий выделим высокие интеллектуальные (точнее — информационно-интеллектуальные) технологии и рассмотрим элементы создания высоких интеллектуальных технологий (ВИТ) различных научных областей.

### 2.4.1. Интеллектуальные технологии

Проблема разработки интеллектуальных технологий многогранна. Важную роль в решении этой проблемы играет ее философский аспект, ориентирующий разработчиков технологий на применение исторического опыта.

Очевидно, что интеллектуальные технологии должны формировать интеллект личности. Под интеллектом личности будем понимать способность к мышлению, рациональному познанию. Тогда для создания интеллектуальной технологии полезно обратиться к определению понятия «технология» в соединении с качественными свойствами личности. Имеется достаточно много различных определений термина «технология». Наиболее распространено определение технологии как совокупности правил, приемов, методов, способов решения задачи или проблемы.

В философском аспекте под технологией понимается форма движения материи — прогрессирующей и управляемой человеком природно-социальной совокупности процессов целенаправленного изменения различных форм вещества, энергии, информации.

Как сформулировал американский экономист и публицист Д. Гелбрейт — технология — это систематизированное применение научного (организованного) знания для решения практических задач.

Современные российские ученые дают разные определения технологии.

Технология по С. С. Гусеву — это некоторый способ человеческого отношения к окружающей действительности, порожденный практической ориентированностью познания.

Технология по В. П. Каширину определяется как прогрессирующая и управляемая человеком природно-социальная совокупность процессов целенаправленного изменения различных форм вещества, энергии и информации, протекающая в различных системах в соответствии с их специфическими законами строения и функционирования.

По А. И. Ракитову технология охватывает: инструментальную систему; совокупность операционных процедур; систему деятельности, детерминированную инструментальной системой и влияющую на нее; систему управления соответствующей деятельностью; совокупность последствий (социальных и экономических); информационную среду, в которой эта деятельность осуществляется.

Современный ученый склонен и в уникальном событии искать повторяющиеся черты, а потому «стандарт технологии» становится сегодня фактором, порождающим новое знание. Важно отметить, что современная наука заинтересована в создании системы правил человеческой деятельности по производству таких результатов, которые сами по себе, в рамках действия стихийных природных процессов, появиться не могут.

Из сказанного выше следует, что сферы действия категории «технология» весьма разнообразны. Это наука, производство, социальная сфера, искусство и др. Философское содержание понятия технология включает такие понятия, как профессиональные и ситуационные технологии. Профессиональные технологии аналогичны биологическим организмам, когда имеется центральная нервная система. Во втором случае такой системы нет. В различных ситуациях человек использовал «мозаичную» технологию. Такие технологии называются ситуационными. Отсюда следует, что в первом случае можно говорить об устойчивых технологиях. Устойчивыми являются навыки (например, у египтян), где технологии оставались неизменными. Профессионализация и профессиональный навык обычно сопровождаются большими трудностями при переходе к универсализму, к научному способу жизни, по нормам которого сейчас живет треть населения Земли.

Важное значение в процессе создания технологий имеет понятие идеи — залога направленного формообразования (по М. К. Петрову). В ней изначально запрограммировано то, что появится как результат процесса трансформаций в конце. В процессе становления идеи выявится концепция развития как преемственного самодвижения. Развитие связано со становлением ритуала, что ведет к самосознанию. На первых порах бытия человек широко использовал ритуальные правила. Любой повтор формировал элементы навыка, и сам навык уводил в область подсознательного. Становление самосознания — важная задача в развитии и научном качестве. В противном случае английский философ Б. Рассел так определяет ситуацию: «Наука и техника движутся сейчас вперед, словно танковая армада, потерявшая своих водителей, движутся слепо и безрассудно».

По ходу научно-технической революции все чаще возникает проблема выбора рационального в научном подходе. В процессе разработки проблем научного творчества и технологии важна рациональная схема рассуждений в форме «если — то». Имеет место кумуляция разномыслия (создание неповторимых результатов, образов), использующая также и преемственность. Важно создание технологий как организационных схем для бесконечного повтора близнецов-продуктов.

Важной функцией науки может видеться порождение возможных технологий. Все технологии — продукты науки. Для них характерна повторяемость результатов. Любой исследователь может повторить эксперимент и прийти к тем же (известным) результатам. Для себя наука видит в этом залог истинности научного знания.

### 2.4.2. Интеллектуально-информационный дуализм

К настоящему времени в России существует большое количество научных школ, обладающих устойчивыми образовательными и научными технологиями. Перспективное направление работ связано с интеллектуально-информационными технологиями, основой которых является интеллектуализирующий аспект обучения. Для качественного анализа соотношения между интеллектуализацией и информационным воздействием полезно рассмотреть ряд определений.

Под интеллектом, как уже отмечалось, понимается способность к мышлению и рациональность познания. Определим интеллектуальный потенциал личности как уровень интеллекта. В процессе обучения на первых этапах формируется преимущественно информационный потенциал как набор сведений в рамках совокупности учебных дисциплин. Очевидно, что эти два понятия связаны друг с другом: информационный потенциал естественным образом формирует интеллектуальный потенциал и наоборот. Поэтому можно констатировать наличие в образовательной и научной сфере ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНО-ИНФОРМАЦИОННОГО ДУАЛИЗМА. По сути, существует эффект взаимовлияния, когда части целого (информационные и интеллектуальные потенциалы образования и науки) находятся во взаимодействии (рис. 2.2).

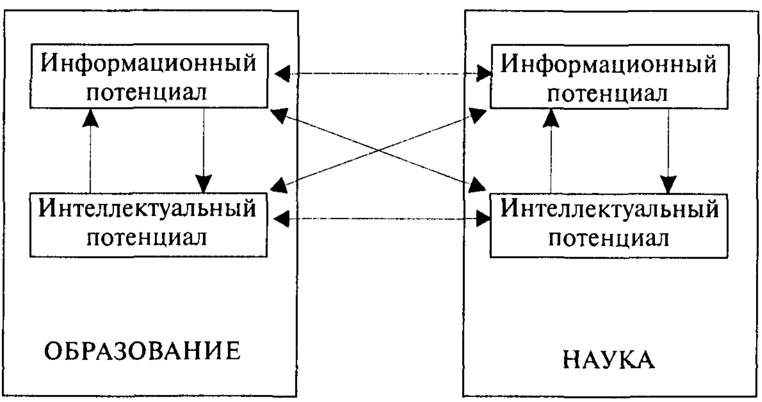



Рис. 2.2

Однако только констатация взаимовлияния не в полной мере способствует формированию эффективных интеллектуальных технологий обучения. При обучении можно рационально использовать ряд принципов, характерных для научной деятельности. Технология научной деятельности часто не в полной мере доведена до конструктивных методик. Последнее затрудняет четкое определение технологий научного созидания. Конструктивность методик очень актуальна при создании эффективных методик обучения на основе технологий научной работы. При этом под эффективными методиками будем понимать такие, которые способствуют естественному, ненасильственному обучению личности на этапе образовательного процесса. В этом случае учащийся испытывает интеллектуальный комфорт в процессе получения знаний за счет уверенности в своих интеллектуальных способностях, возможности вести самостоятельные исследования. В основу создания высоких интеллектуальных технологий обучения могут быть положены технологии научной области знаний, соответствующей изучаемой дисциплине, поскольку технологии научной деятельности — это технологии создания научного продукта.

Один из возможных вариантов подхода к созданию высоких интеллектуальных технологий обучения состоит в выделении для каждой дисциплины трех основных составляющих — моделей объектов предметной области, методов анализа объектов и методов синтеза новых объектов, на что и должны быть направлены технологии (рис. 2.3).

В каждой из указанных на рис. 2.3 частей дисциплины необходимо выделить следующие важные компоненты:

- базисные понятия как минимальную систему образующих исходных понятий;
- базисные операции (действия) как минимальную систему необходимых действий над понятиями;

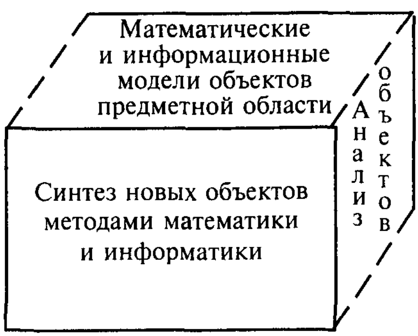



Рис. 2.3

• базисные методы как направленную совокупность базисных операций над исходными и промежуточными математическими объектами.

Введенные базисные понятия и базисные действия соответствуют определению «номинаторов» и «операторов» по терминологии русского математика академика С. Н. Бернштейна.

### 2.4.3. Интеллектуализация обучения математике и информатике

Математика и информатика являются фундаментом современного образования для различных сфер деятельности человека. Общеизвестны проблемы изучения этих дисциплин. Рассмотрим подход, интеллектуализующий проблему обучения на основе идей, изложенных выше. С этой целью введем следующие базисные понятия, базисные операции (действия) и базисные методы.

*Базисные понятия*:

• числа и независимые числовые переменные;

• числовые функции (операторы, отображений), отображающие числовые множества друг на друга;

• уравнения, неравенства, включения, сравнения (синтетические конструкции), задающие отношения равенства, неравенства, включенности, сравниваемости между числовыми переменными (среди которых могут быть неизвестные);

• абстрактные конструкции современной алгебры и функционального анализа, аксиоматические построения, где понятийная роль базисных категорий наиболее высока.

*Базисные операции (действия)*:

• алгебраические операции над числами, функциями, в том числе функциональные преобразования;

• операции предельного перехода, которые являются основой для введения важных операций дифференцирования и интегрирования числовых функций;

• разложение функций по базисным элементам — представление функций в виде линейной комбинации базисных элементов.

Обратимся к примерам базисных операций, используя системное представление результатов, что поможет нам далее установить структурные интеллектуализующие закономерности.

**Пример.** Рассмотрим системное представление в виде таблицы результатов $R = a * b$ алгебраических операций $*$ над натуральными числами a и b, где операция $*$ может быть сложением, вычитанием, умножением или делением (соответственно символы: $+$, $-$, $\times$, $/$). Каждая «большая» клетка таблицы делится на четыре части так, что содержит результаты четырех операций над каждой парой чисел, приведенных по вертикали и горизонтали.

| | |
|---|---|
| $a + b$ | $a - b$ |
| $a \times b$ | $a / b$ |

В результате (вместо привычной таблицы умножения) получим табл. 2.2 (другими словами — системную матрицу), иллюстрирующую результаты выполнения четырех алгебраических операций над парами натуральных чисел.

Таблица 2.2

| a \ b | 0 | 1 | 2 | ... |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0, 0<br>0, ∞ | 1, −1<br>0, 0 | | ... |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | 5, 1<br>6, 3/2 | |
| ... | | | | $a + b$, $a - b$<br>$a \times b$, $a/b$ |

Заменив в матрице (табл. 2.2) числа другими понятиями, можно получить интересные обобщения.

Пример (системного представления результатов операций над более сложными математическими объектами). Будем использовать базисные операции (действия) и базисные модели, которые определены системной матрицей — табл. 2.3.

Таблица 2.3

| | Базисные операции | Базисная модель | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | |
| | | Алгебраическое уравнение или система | Дифференциальное уравнение или система | Интегральное уравнение или система | |
| 1 | Функциональное преобразование | $R_{11}$ | $R_{12}$ | $R_{13}$ | ... |
| 2 | Предельный переход | $R_{21}$ | $R_{22}$ | $R_{23}$ | ... |
| 3 | Дифференцирование | $R_{31}$ | $R_{32}$ | $R_{33}$ | ... |
| 4 | Интегрирование | $R_{41}$ | $R_{42}$ | $R_{43}$ | ... |
| | ... | ... | ... | ... | ... |

Элементы таблицы $R_{ij}$, где i — номер строки, j — номер столбца, содержат результаты применения операции с номером i к модели с номером j. Другими словами, элементы таблицы содержат результаты действий базисных математических операций над базисными математическими моделями. По сути, результаты $R_{ij}$ — это некоторые утверждения, справедливость которых может быть доказана установлением этого факта так же, как и введением указанных моделей и операторов, мы займемся в дальнейшем. Здесь нам важно выявить общую структуру базы знаний, включающую минимальный набор моделей, операций над ними и результатов, которые также могут быть базисными математическими моделями.

*Базисные математические методы* могут быть сформулированы на основе введенных базисных математических операций над объектами. В результате разработка математического метода может сводиться к выбору направленной последовательности операций, доставляющих определенный результат. При иллюстрации математического метода как последовательности применения базисных действий к базисным моделям обратимся к данным табл. 2.3. Тогда математический метод схематически может быть представлен последовательностью базисных действий. Как правило, отдельные действия определены поставленной задачей.

Например, решение дифференциального уравнения может строиться на основе:

- представления решения в виде ряда Тейлора (линейной комбинацией базисных функций степенного аргумента), что, вообще говоря, может не иметь никакого отношения к решению дифференциального уравнения;
- вычисления коэффициентов ряда Тейлора в силу решаемого дифференциального уравнения.

Технология математического творчества требует надстройки над информационной базой знаний, представленной схемой «модели—анализ—синтез» (см. рис. 2.3). Отметим такие важные характеристики творчества как статический и динамический «интеллектный» гомеостаз — понятия, отражающие два типа устойчивости в творческом развитии личности. Статический гомеостаз формируется, если человек все больше и больше привыкает действовать по стереотипам. В этом состоянии он испытывает интеллектуальный комфорт, что ведет к статическому равновесию. Интеллектуальный базис личности при этом не расширяется. Динамический гомеостаз формируется при наличии у человека культуры рефлексии, т. е. культуры самопознания, самосовершенствования, самообучения, самокритичности. В таком состоянии человек постоянно совершенствуется, осуществляет ротацию деятельности. Другими словами, постоянно меняется технология творчества.

Не претендуя на полноту, укажем лишь некоторые элементы подхода к математическому творчеству, которые для большей строгости будем раскрывать в виде принципов (рис. 2.4).

*Принцип категоризации* предполагает акцентированное выделение и постоянное утверждение в сознании исследователя основных понятий математики, выступающих в качестве моделей явлений, процессов окружающего мира или искусственно создаваемых систем — продуктов деятельности в гуманитарной, инженерной или другой области деятельности. Такими объектами математики и математических дисциплин являются числа, функции, линейные и нелинейные алгебраические уравнения, дифференциальные, разностные или интегральные уравнения и т. д. Постоянный акцент при изучении математики и информатики на класс моделей способствует подготовке исследователя к мысли о многообразных формах описания объектов реального мира, иллюстрирует мощность математического аппарата, его универсальность при качественном анализе процессов и явлений.

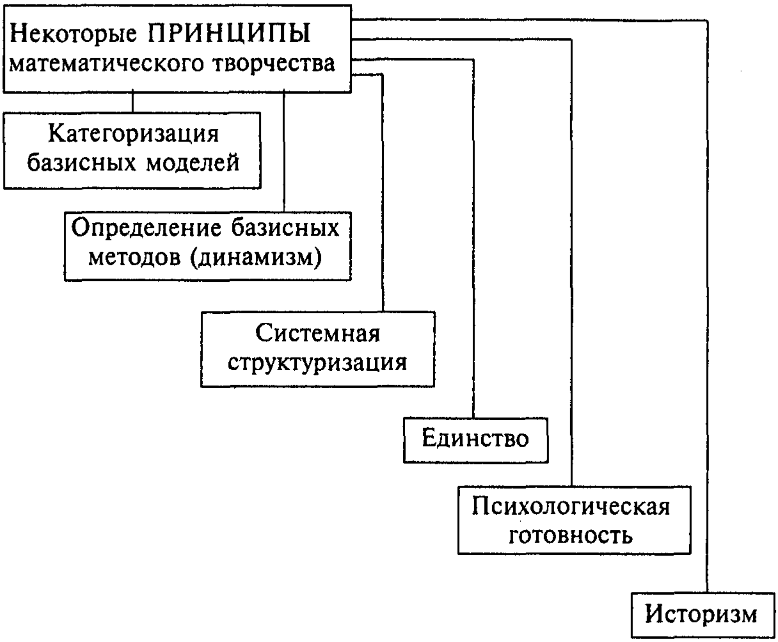



Рис. 2.4

*Принцип динамизма* моделей, базисных действий и базисных методов отражает естественное многообразие развития моделей, действий и методов. Ориентация исследователя на ограниченный набор действий с моделями не дает в необходимой мере использовать методы математики и информатики, в частности, для решения задач в гуманитарной сфере деятельности человека. Кроме того, отсутствует готовность воспринимать весь необходимый набор операций над моделями. Простейшей иллюстрацией динамичного восприятия моделей является обобщение скалярных функций на векторный случай введением векторов как агрегатов, элементами которых являются скалярные функции. В более общем случае решение задач выполняется с применением широкого класса операций над объектами. Принцип динамизма открывает естественную потребность к выполнению операций над широкими классами математических объектов. Под этим будем понимать акцентированное обучение необходимости и готовности выполнения различных операций алгебры и анализа над математическими объектами (дифференцирование, интегрирование, разложение в ряды и по базисным элементам и др.). При этом характер и последовательность операций над объектами определяются методами решения той или иной задачи на основе расширения классов самих операций. Последнее часто определяет направленность применения операций.

*Принцип системной структуризации* предполагает введение основных объектов математики и операций, что приводит к целесообразности структуризации знаний об изучаемых объектах. Структуризация предполагает, например, формирование таблиц объектов, основных операций над ними (дифференцирования, интегрирования, разложения по базисным системам) и определение результатов этих операций в необходимом многообразии. Используя принцип системной структуризации совместно с принципом дуализма, можно получить системное представление в виде матрицы «объекты—действия—результат (образ)». После определения данной системы характеризации методы решения задач математики (например, доказательства теорем) формулируются в виде последовательности операций. Такая алгоритмизованная процедура исследования и обучения (когда постулируются основные объекты и операции над ними) может быть выражена в виде схем, позволяющих синтезировать некоторые таблицы, представленные в рассмотренных ранее примерах.

*Принцип единства* позволяет выделить общие закономерности в определении понятий, действий и результатов. По мере накопления знаний, многообразия приемов, методов, теорий расширяются представления исследователя и рождается желание выявить закономерности, общие для различных методов. Направленная реализация такого желания, естественно, приводит к выделению некоторой общности (единства) в изучаемых методах и теориях. Выявление единых подходов позволяет использовать способность личности к восприятию материала на основе выработанной *психологической готовности*. Для такой ситуации целесообразно выделение единых элементов и подходов. Примером целесообразности выделения единых подходов может служить структурированное изложение исчисления конечных и разделенных разностей в вычислительной математике на основе методологического единства (обычно не отмечаемого) этого исчисления с дифференциальным исчислением. Кроме того, при сравнении способов задания функций (на дискретных множествах и вещественной прямой) становится понятной важность ограничительных утверждений теорем. Структура классического дифференциального исчисления определяет направленность разработки и изучения исчисления функции, заданных на дискретных множествах, а установление связей делает наглядным и естественным все многообразие теорем, возможность «достраивания» теорий при решении прикладных задач, а также направленность поиска уже разработанных теорий для применения в приложениях.

Применим принципы единства и системности в элементарной математике, обратившись к примеру единообразного введения тригонометрических функций как функций кривых второго порядка. С этой целью целесообразно ввести синус как отношение координаты на плоскости, принадлежащей соответствующей кривой второго порядка (окружности, эллипсу, гиперболе), и длины соответствующего вектора. Тем самым, единым способом (системно) вводится три определения: классического (кругового) синуса, гиперболического и эллиптического синусов.

Перечисленные принципы не являются исчерпывающими. Однако, если пользоваться ими, то появляется возможность реализации меткого высказывания Ж. Д. Даламбера о том, что «каждое открытие прекрасно само по себе, но еще более прекрасен метод, которым оно получено». Предлагаемые подходы могут позволить отойти от внешне гладкой схемы обучения, когда в процессе изложения материала рисуется «красивая экстремаль знаний», и трудно очертить стороны сложного и противоречивого процесса получения нового результата.

В заключение отметим, что математика и информатика тесно связаны с другими науками, в частности с физикой. Современная физика характеризует общую картину мира на уровне схемы «явления (процессы) — модели». Модели чаще всего являются математическими или информационными. В то же время в технике физические явления используются как средства преобразования предметов окружающего мира, причем преобразование является направленным и определяет технологию. Явления и процессы, сопровождающие эти преобразования, воспроизводятся искусственно. В то же время в физике в основном изучаются явления и процессы, развивающиеся в природе естественно. Таким образом, создание и развитие новых образцов техники и технологии направлены на искусственное воспроизведение процессов, которые изучаются в физике. В этих условиях методы математики и информатики играют важную роль на этапе разработки новых технологий.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Вейль Г.* Математическое мышление. М.: Наука, 1989.

Высокие интеллектуальные технологии образования и науки / Под ред. Ю. С. Васильева, В. Н. Козлова. СПб.: СПбГТУ, 1994—2004.

*Гусев С. С., Гусева Е. А.* Взаимодействие образовательных процессов в научном и техническом творчестве. Л.: Наука, 1989.

*Каширин В. П.* Философские вопросы технологии. Томск: ТГУ, 1988.

*Мантуров О. В., Солнцев Ю. К., Сорокин Ю. И., Федин Н. Г.* Математика в определениях, понятиях, терминах / Под ред. Л. В. Сабинина. М.: Просвещение. Ч. 1, 1978; Ч. 2, 1982.

Математическая энциклопедия / Под ред. И. М. Виноградова. М.: Наука. Ч. 1, 2, 1977.

Многоуровневая система высшего образования Российской Федерации. СПб.: СПбГТУ, 1993.

*Моисеев Н. Н.* Современный рационализм. М.: МГВП КОКС, 1995.

*Петров М. К.* Самосознание и научное творчество. Ростов-на-Дону: РГУ, 1992.

*Ракитов А. И.* Цивилизация, культура, технологии и рынок / Вопросы философии, 1992. № 5. С. 3—15.

*Субетто А. И.* Творчество, жизнь, здоровье и гармония. Этюды креативной онтологии. М.: Логос, 1992.

Техническое творчество: теория, методология, практика / Под ред. А. И. Половинкина, В. В. Попова. М.: НПО «Информсистема», 1995.

# 2. ИДЕИ И МЕТОДЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

Во второй части книги вводятся базовые понятия современной математики, к которым относятся множества, функции, отображения, основные типы уравнений. В определенном смысле используются описанные в гл. 2 элементы интеллектуальной технологии изучения математики. Представлены основные алгебраические структуры на множествах. При описании структур рассматриваются также и элементы нечисловой математики. Излагается аксиоматический метод на примере широко применяемых линейных алгебраических систем. Приводятся понятия современных геометрических теорий, следующие из определенной аксиоматики. Дается введение в дифференциальное и интегральное исчисления, теорию дифференциальных уравнений, теорию вероятностей и математическую статистику.

*Глава 3*

## МНОЖЕСТВА, ОТНОШЕНИЯ И ОТОБРАЖЕНИЯ

Основателями теории множеств в 19 в. явились чешский математик Б. Больцано и немецкие математики Г. Кантор и Р. Дедекинд. Теоретико-множественный подход породил многочисленные обобщения математических моделей на основе идей абстрагирования и обобщения. Рассмотрим основные понятия теоретико-множественного подхода, отправляясь от понятия числа как наиболее привычного понятия. Далее введем множества функций и элементов другой (не обязательно числовой) природы. Применительно к множествам определим основные математические операции, которые в дальнейшем становятся составляющими математических методов. Теория множеств имеет многочисленные приложения. Она произвела революцию в математике после строгого обоснования Р. Дедекиндом учения о числе. Теоретико-множественная аксиоматика является фундаментом современной теории вероятностей и ряда других разделов математики.

### 3.1. ЧИСЛА

Первые представления о числах мы получаем в средней школе. Расширим исходные представления и приведем существующую совокупность чисел и знаков для их обозначения (буквы латинского алфавита):

- множество натуральных чисел N;
- множество целых чисел Z, включающее положительные и отрицательные целые числа;
- множество рациональных чисел Q, элементы которого определены как отношения целых чисел;
- множество вещественных чисел R, включающее в себя множество рациональных и иррациональных чисел, причем последние числа представляют собой бесконечные непериодические дроби;
- множество комплексных чисел C (имеющих вещественную и мнимую части), для которых справедливы алгебраические операции сложения, вычитания, умножения и деления;
- множество гиперкомплексных чисел, являющихся обобщением комплексных чисел, имеющих несколько компонент (существуют варианты исчисления этих чисел).

Между объектами математики существуют различные отношения. Отношения типа включения между различными числами иллюстрируются на рис. 3.1. Из анализа приведенных отношений и исторического обзора (см. парагр. 2.2) следует, что по мере развития математики происходило расширение набора чисел — от натуральных до комплексных и гиперкомплексных чисел.

Известно, что операции над целыми, рациональными, вещественными числами выполняются в соответствии с правилами, изученными в средней школе.

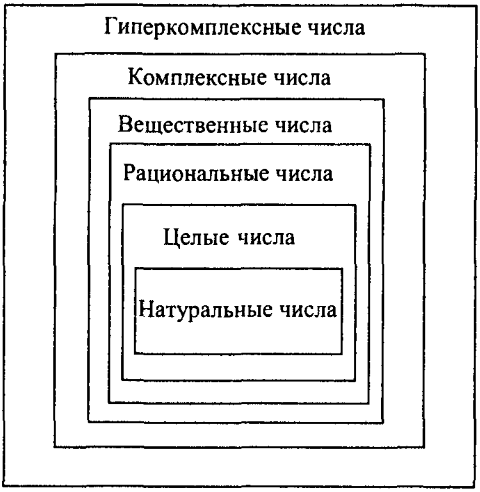



Рис. 3.1

Однако практика потребовала расширения класса операций над числами при отыскании квадратных корней из отрицательных чисел. В этих целях было введено число, получившее название мнимой единицы,

$$i = (-1)^{1/2}, \tag{3.1}$$

где степень 1/2 означает извлечение квадратного корня. Нетрудно установить следующую таблицу действий над мнимой единицей:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = 1, \tag{3.2}$$

которая очевидно следует из определения (3.1).

Для комплексных чисел существует несколько форм представления: алгебраическая, тригонометрическая и показательная. Алгебраическая форма комплексного числа z имеет вид

$$z = a + bi,$$

где a — вещественная, bi — мнимая части комплексного числа z, причем a, b — вещественные числа.

Как отмечено выше, для комплексных чисел введены алгебраические операции. Эти операции являются корректно определенными, если при их выполнении сохраняется структура комплексных чисел.

Сложение и вычитание выполняются покомпонентно:

$$z_1+z_2=(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i. \quad (3.3)$$

Умножение проводится в соответствии с правилами умножения отдельных компонентов друг на друга и с использованием соотношений (3.2):

$$\begin{aligned} z_1\ z_2 &= (a_1+b_1i)\ (a_2+b_2i) = \\ &= a_1\ a_2 + b_1a_2i + a_1b_2i + b_1b_2i^2 = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (b_1a_2 + a_1b_2)i = a + bi, \end{aligned} \quad (3.4)$$

причем при выполнении приведенных операций использованы свойства ассоциативности, коммутативности умножения.

Заметим, что умножение, как и сложение комплексных чисел, коммутативно.

Результат деления комплексных чисел определяется из условия: если

$$\frac{a+bi}{c+di} = x + y\ i = z,$$

то компоненты x и y комплексного числа z определяются из равенства

$$(c+di)(x+yi) = a + bi. \quad (3.5)$$

Таким образом, мы ввели понятие комплексных чисел и алгебраические операции над ними. Далее будет показано, что множество комплексных чисел образует алгебраическую структуру поля. Как уже отмечалось, кроме рассмотренного представления комплексных чисел существуют тригонометрическая и показательная их формы, которые основываются на геометрических интерпретациях. Между этими формами существуют взаимно однозначные связи. Комплексные числа часто встречаются в качестве корней полиномов. Мы ограничимся рассмотрением комплексных чисел, поскольку гиперкомплексные числа в значительно меньшей степени применяются в прикладных задачах.

### 3.2. МНОЖЕСТВА И ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВАХ

Множества являются одними из важнейших понятий математики. Понятие множества вводится аксиоматически (без доказательств) и не может быть представлено через какие-либо элементарные понятия. Множество определяет совокупность, объединение (набор) объектов произвольной природы, которые называются элементами множества (рис. 3.2).

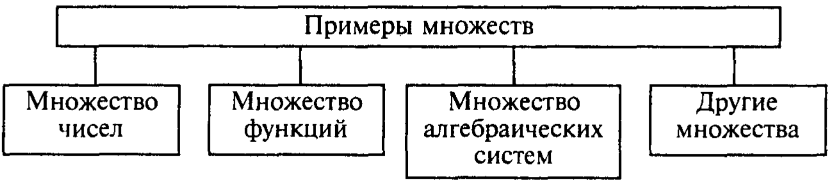



Рис. 3.2

Рассмотрим примеры различных множеств, акцентируя внимание на их элементах. Это нам понадобится при описании отношений на множествах.

Примерами простейших множеств являются:

- множество целых чисел;
- множество комплексных чисел (см. п. 3.1);
- множество звезд во вселенной;
- множество данных социологического эксперимента;
- множество оценок психологического состояния личности;
- множество показателей свидетелей относительно фактов в процессе расследования происшествия.

Множества функций, рассматриваемых в математическом анализе, могут быть следующих типов (рис. 3.3), (глава 6):

- множество функций — (C);
- множество непрерывных функций — ($C^0$);
- множество дифференцируемых функций — $C^1$ ;
- множество функций, дифференцируемых n раз, — $C^n$;
- множество функций, дифференцируемых бесконечное количество раз — $C^\infty$ , где $\infty$ — символ бесконечности.

Множествами являются и наиболее распространенные типы уравнений, которые уже встречались в главе 2 и будут рассматриваться далее:

- алгебраические уравнения и системы (AG);
- кусочно-линейные алгебраические уравнения и системы ($AG^k$);
- линейные алгебраические уравнения и системы (AGL).

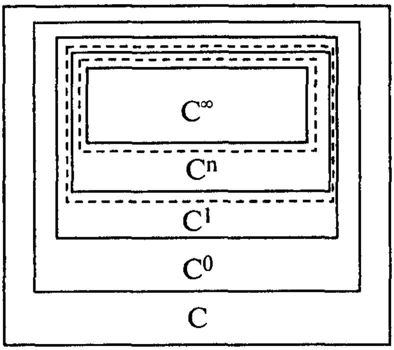



Рис. 3.3

Рассмотрим примеры множеств математических действий, необходимых для решения задач:

- дифференцирование функций в обычном смысле (D), по Фреше — $D^F$, по Гато — $D^G$;
- интегрирование функций по Риману ($I^R$), по Лебегу ($I^L$), по Стильтьесу — $I^S$.

В завершение приведем множества дифференциальных уравнений, связывающих функции и их производные (рис. 3.4):

- дифференциальные уравнения (DG);
- кусочно-линейные дифференциальные уравнения (DGK);
- линейные диффренциальные уравнения (DGL).

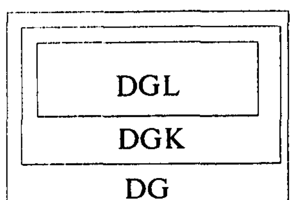



Рис. 3.4

Перечисленные типы уравнений еще не нашли широкого применения в гуманитарной сфере деятельности, хотя многие проблемы могли бы быть успешно решены на основе имеющегося арсенала методов математики и информатики. К этому мы будем постепенно приближаться по мере изучения соответствующих классов математических моделей, действий и методов.

Приведенные примеры позволяют перейти к рассмотрению элементов исчисления множеств. Простейшими в этом смысле являются отношения, среди которых выделим отношения включения, бинарные отношения (соответствия между множествами), отношения эквивалентности, упорядочения (рис. 3.5). Отношения включения введем следующим образом.

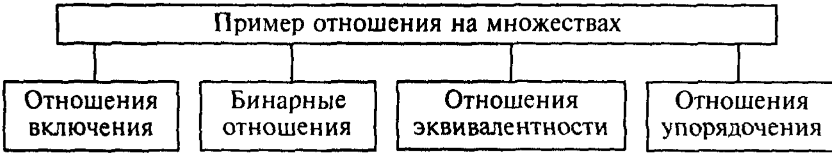



Рис. 3.5

***Определение.*** Если два множества A и B таковы, что из $x \in A$ следует $x \in B$, то говорят о включении множества A в множество B и записывают $A \in B$ или $B \ni A$, где символы $\in$ и $\ni$ обозначают соответственно принадлежность элемента множеству и множества множеству.

Для лучшего уяснения понятия включения обратимся к рис. 3.1, на котором иллюстрируются включения для числовых множеств.

В соответствии с определением можно указать цепочки соотношений включения для числовых, а также для некоторых других множеств (табл. 3.1).

Таблица 3.1

| Тип множества | Характер включения |
|---|---|
| Множество чисел | $N \in Z \in Q \in R \in C$ |
| Множество функций | $F \ni C \ni C^1 \ni C^n \ni C^\infty$ |
| Множество алгебраических уравнений и систем | $A \ni A^k \ni A^1$ |
| Множество дифференциальных уравнений и систем | $DG \ni DG^k \ni DG^1$ |

Первая цепочка соотношений табл. 3.1 очевидна. Соотношения включения для множества функций справедливы, поскольку множества функций (без ограничения на класс) содержат в том числе непрерывные функции, непрерывные функции содержат дифференцируемые функции и т. д. Третья группа включений таблицы также имеет место, поскольку алгебраические уравнения включают в себя множество кусочно-линейных уравнений, а последние — множество линейных уравнений. Аналогичными рассуждениями устанавливается последняя цепочка включений. В заключение заметим, что часть множества называется подмножеством.

Для определения более сложных отношений на множествах понадобится понятие декартова произведения двух множеств.

***Определение.*** Декартовым произведением двух множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар (x, y):

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, \quad y \in Y\}. \tag{3.6}$$

Например, декартовым произведением является плоскость с двумя координатными осями X и Y, поскольку она определяет множество пар вещественных чисел, принадлежащих плоскости.

Аналогично вводится декартово произведение нескольких множеств.

***Определение.*** Для любых двух множеств X и Y всякое подмножество $O \in X \times Y$ называется бинарным отношением между множествами X и Y. Если X = Y, то говорят о бинарном отношении на X.

**Пример.** Рассмотрим плоскость с координатными осями X и Y. Для упорядоченной пары $(x, y) \in O$ используем обозначение x O y и будем говорить, что x находится в отношении O к y. Рассмотрим упорядочение $x < ay$ на множестве вещественных чисел R, состоящем из всех точек плоскости, которое является бинарным отношением на R, состоящим из всех точек, которые лежат выше прямой $x - ay = 0$.

Фактически в данном примере бинарное отношение выделяет подмножество декартова произведения, т. к. бинарное отношение здесь получается в результате действия (выделения подмножества) на декартовом произведении.

Отношение эквивалентности является одним из вариантов бинарного отношения.

***Определение***. Бинарное отношение ~ на множестве X называется отношением эквивалентности, если для всех элементов a, b, c из X выполнены условия:

a ~ a (рефлексивность);

$a \sim b \to b \sim a$ (симметричность);

$a \sim b$, $b \sim c \to a \sim c$ (транзитивность).

Подмножество элементов x множества X называется классом эквивалентности.

Рассмотрим пример отношения эквивалентности на основе понятия параллельности прямых на плоскости или параллельности плоскостей в трехмерном пространстве.

**Пример.** Пусть имеются параллельные прямые a, b, c, принадлежащие плоскости. Тогда:

- прямая a параллельна самой себе (аксиома рефлексивности;
- если прямая a параллельна прямой b, то прямая b параллельна прямой a (свойство симметричности отношений параллельных прямых);
- если прямая a параллельна прямой b, а прямая b параллельна прямой c, то прямая a параллельна прямой c (свойство транзитивности отношения параллельности).

### 3.3. КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика, или комбинаторный анализ, занимается задачами размещения объектов в соответствии со специальными правилами и нахождения числа способов, которыми это размещение может быть сделано. Если способы размещения достаточно простые, то комбинаторика дает ответ на вопрос о количестве возможных размещений. В более сложных задачах ставится вопрос о существовании заданного размещения. Мы будем изучать основные понятия комбинаторики, к которым относятся перестановки, размещения и сочетания.

***Определение.*** Упорядоченную выборку элементов из некоторого множества будем называть перестановкой.

***Определение.*** Всякое линейно упорядоченное множество, состоящее из k элементов множества из n элементов, называется размещением по k элементов из n исходных элементов. Два размещения считаются различными, если различаются либо составом элементов, либо порядком элементов.

Число различных размещений из n исходных элементов по k элементов определяется равенством

$$A_n^k = n!/(n-k)! \tag{3.7}$$

**Пример.** Пусть имеется набор нечетных чисел 1,3,5,7,9. Найти количество трехзначных чисел, записываемых этими нечетными числами, в которых участвуют различные неповторяющиеся цифры.

Очевидно, что для решения задачи необходимо найти число

$$A_5^3 = 5!/(5-3)! = 1\times2\times3\times4\times5/2! = 60.$$

Следует иметь в виду, что содержательный смысл элементов множества может быть разнообразным. В частности, это могут быть факты, определяющие направления следствия, которые задают число версий в описании расследуемых событий; аргументы и их комбинации, определяющие социальные или экологические последствия тех или иных явлений.

Расширение возможностей комбинаторного анализа достигается введением еще одного понятия.

***Определение.*** Всякое подмножество из k элементов исходного множества из n элементов называется сочетанием из n исходных элементов по k. Два сочетания различны, если они отличаются хотя бы одним элементом.

Количество различных сочетаний из n элементов по k элементов определяется формулой

$$C_h^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{3.8}$$

Содержательный смысл элементов множества, как и в приведенном выше примере, может быть достаточно разнообразен. Это могут быть возможные наборы из n книг по k книг ($n > k$), отличающиеся хотя бы одной книгой, различные наборы по k предположений из n исходных предположений, которые могут образовывать различные логические функции описания ситуации.

В заключение рассмотрим еще одно понятие комбинаторики.

*Определение.* Будем называть перестановкой упорядоченную выборку элементов из некоторого множества.

### 3.4. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Определение основных типов множеств и отношений между ними позволяет ввести основные операции над множествами, а также важнейшее понятие современной математики — отображение.

Исчисление множеств определяет правила выполнения операций над множествами, в результате которых также получаются множества. В определенном смысле исчисление множеств (когда результатами операций являются множества) аналогично «исчислению» чисел. Основные операции над множествами иллюстрируются на рис. 3.6.

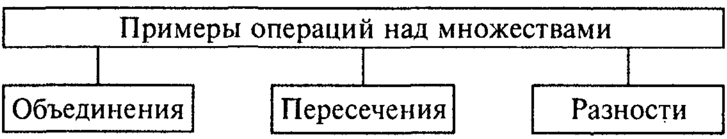



Рис. 3.6

Введем понятие пустого множества, под которым будем понимать множество, не содержащее элементов. Пустое множество необходимо для обозначения результата вычисления разности множеств. Дадим определения основных операций над множествами.

*Определение.* Пересечением двух множеств X и Y будем называть множество

$$X \cap Y = \{a \mid a \in X \text{ и } a \in Y\}. \qquad (3.9)$$

*Определение.* Объединением двух множеств X и Y будем называть

$$X \cap Y = \{a \mid a \in X \text{ или } a \in Y\}. \qquad (3.10)$$

*Определение.* Разностью множеств X и Y, обозначаемой X \Y, называется совокупность элементов X, не принадлежащая множеству Y.

Если X — подмножество в Y, то символ X\Y обозначает дополнение к X в Y.

### 3.5. ОТОБРАЖЕНИЯ

Введение операций над множествами не является исчерпывающим, поскольку далее в соответствии с приложениями требуется определить «внешние» операции, результатами которых могут быть не только новые множества, но и новые математические объекты. Примерами этого могут быть: определение площадей на множестве плоских фигур, объемов на множестве трехмерных тел. Аналогичная ситуация возникает при нахождении меры (обобщения понятия объема) на множестве геометрических объектов пространства с размерностью более трех. В этом случае говорят о мере множеств как неотрицательной счетно-аддитивной функции множеств.

***Определение.*** Будем называть о т о б р а ж е н и е м F одного множества — X на другое множество — Y, если указано соответствие между элементами этих множеств, которое записывается в виде:

$$x \in X,\ y \in Y,\ y = F(x) \tag{3.11}$$

или символически в виде

$$(r, t) \xrightarrow{F} t.$$

В более общем смысле используется термин «оператор», являющийся синонимом терминов «отображение» или «функция», задающий правило сопоставления элементам одного множества элементов другого множества. Приведем некоторые элементарные примеры отображений.

Рассмотрим простой случай, когда отображается множество с конечным числом элементов на множество с конечным числом элементов. Пусть задано множество X = { a, b, c}, состоящее из трех элементов и множество Y ={ r, s, t}, также состоящее из трех элементов. Эти два множества можно объединить в пары так, что каждому элементу первого множества будет поставлен в соответствие элемент другого множества (стрелкой указано выбранное соответствие):

$$\begin{array}{ccc} \{a & b & c\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \{r & s & t\} \end{array}$$

Введем всевозможные отображения на множествах чисел, описанных в п. 3.1. Системная характеристика таких отображений дана в табл. 3.2.

Таблица 3.2

| | Натуральные числа N | Целые числа Z | Рациональные числа Q | Вещественные числа R |
|---|---|---|---|---|
| Натуральные числа N | $N \to N$ | $N \to Z$ | $N \to Q$ | $N \to R$ |
| Целые числа Z | $Z \to N$ | $Z \to Z$ | $Z \to Q$ | $Z \to R$ |
| Рациональные числа Q | $Q \to N$ | $Q \to Z$ | $Q \to Q$ | $Q \to R$ |
| Вещественные числа R | $R \to N$ | $R \to Z$ | $R \to Q$ | $R \to R$ |

По-видимому, некоторые отображения таблицы будут иметь ограничения на область своего определения.

Заметим, что более общие операторы будут рассмотрены в последующих главах книги, в частности на алгебраических структурах в главе 4.

При заданных множествах X и Y отображение F имеет область определения отображения X и область значений Y. При этом, если множество X отображается в X, то говорят об отображении множества в себя.

***Определение.*** Будем называть образом Im(F) отображения F множество всех элементов вида F(x):

$$\mathrm{Im}(F) = \{F(x) \mid x \in X\} = \{F(X) \in Y\}. \qquad (3.12)$$

***Определение.*** Множество вида

$$F^{-1}(y) = \{x \in X \mid F(x) = y\} \qquad (3.13)$$

называется прообразом элемента $y \in Y$.

***Определение.*** Отображение F: $X \to Y$ называется сюрьективным, или отображением «на», когда $\mathrm{Im}F = Y$.

***Определение.*** Если из $x \neq x*$ следует $F(x) \neq F(x*)$, то отображение называется инъективным.

***Определение.*** Отображение F называется биективным (или взаимно однозначным), если оно одновременно сюрьективно и инъективно.

***Определение.*** Два отображения F и G называются равными, если совпадают их области определения и для любых элементов $x \in X$ имеет место равенство $F(x) = G(x)$.

По аналогии с алгебраическими структурами необходимо ввести понятие единичного (или тождественного) отображения, которое переводит каждый элемент в себя.

Теперь можно рассмотреть правила действия с двумя или несколькими отображениями.

***Определение.*** Произведением (суперпозицией, или композицией) отображения G (такого, что $G: U \to V$) и отображения F (такого, что $F: V \to W$) называется отображение $F \circ G$ (такое, что $U \to W$), которое определяется условием

$$(F \circ G)(u) = F(G(u)) \text{ для любого элемента } u \in U.$$

Символ «$\circ$» обозначает произведение, или суперпозицию, отображений.

К числу важных свойств отображений относится свойство ассоциативности: $F(GH) = (FG)H$, которое определяет возможность изменения порядка применения отображений. Вместе с тем, в общем случае композиция отображений не является коммутативной: $FG \neq GF$.

Завершим первоначальное рассмотрение отображений понятием обратимости отображений.

***Определение.*** Предположим, что отображения F и G определены так, что имеют место две композиции: FG и GF. Если:

1. $FG = e_y$, то F называется левым обратным к отображению G, а отображение G — правым обратным к отображению F. Если произведения отображений в любом порядке являются единичными отображениями

$$FG = e_y, \quad GF = e_x,$$

то G называется двусторонним обратным отображением для F (отображение F — обратным отображением к G). Обратные отображения обозначаются символом: $F^{-1}$.

**Пример.** Пусть имеется линейное отображение $\dot{y} = Ax$, где y и x — элементы линейного пространства, A — неособая матрица, т. е. матрица с ненулевым определителем (см. п. 1.1). Тогда обратный оператор задается обратной матрицей $A^{-1}$, которая удовлетворяет равенству:

$$AA^{-1} = A^{-1}A.$$

Правила вычисления обратных матриц будут рассмотрены в главе 4.

В следующем разделе мы рассмотрим применение теории отображений для случая обобщенных представлений о множествах и совокупности операций на них.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Гроссман И. Б., Магнус В.* Группы и их графы. М.: Мир, 1971.

*Кострикин А. М.* Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994.

*Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

*Глава 4*

# АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА МНОЖЕСТВАХ

Рассмотрим классические операции, отношения и понятия современной алгебры — законы композиции, гомоморфизмы, изоморфизмы, группы, кольца, поля и др. Отметим, что перечисленные структуры охватывают в том числе так называемые неколичественные объекты математики, для которых характерен повышенный уровень абстракции и общности.

## 4.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРУПП

Теория групп является ярким примером применения аксиоматического метода в математической науке. Однако современная (аксиоматическая) форма теории групп образовалась не сразу. Формальные аксиомы теории групп были получены в явном виде по прошествии 100 лет после первых содержательных построений. Первая важная теорема была сформулирована и доказана Ж. Л. Лагранжем в 1771 г. С 1815 г. развитие теории групп связано с именем О. Коши, который рассматривал только группы подстановок. Термин «группа» был введен в 1832 г. Э. Галуа, который доказал, что группу можно рассматривать не только на множестве подстановок. Наконец, в 1854 г. А. Кэли показал, что группу можно определять на множестве, не используя конкретный тип множества, и что структура множества определяется типом бинарной операции (операции на парах элементов). Определим ряд понятий, на которых базируется теория групп.

### 4.1.1. Бинарные алгебраические операции и структуры

Введение основных понятий начнем с определений и примеров.

***Определение.*** Пусть X — произвольное множество. Будем называть бинарной алгебраической операцией (или законом композиции) на множестве X произвольное (но фиксированное) отображение T, отображающее декартово произведение $X \times X$ в X. Как и ранее, данное отображение часто записывается в виде: $X \times X \to X$.

Пусть в качестве множества X выступает множество всех целых чисел: $X = Z$. Элементы такого множества (целые числа) можно складывать одно с другим. Тем самым мы определили на множестве целых чисел операцию сложения, которая является бинарной операцией T (см. определение). Другими словами операция сложения задана на множестве пар целых чисел так, что декартово произведение $X \times X$ соответствует декартову произведению $Z \times Z$, и результат операции является целым числом: $Z \times Z \to Z$.

**Пример.** Рассмотрим множество всех положительных рациональных чисел, которые можно умножать одно на другое, причем в результате умножения получаются рациональные. В этом случае все рассматриваемые числа можно представить в виде отношения a / b, где a и b — положительные целые числа. Здесь бинарной алгебраической операцией в смысле определения является умножение.

**Контрпример.** Рассмотрим операцию деления на множестве положительных целых чисел. Нетрудно убедиться, что деление в данном случае не является бинарной операцией, поскольку можно найти пары положительных целых чисел, которым не соответствует никакое третье положительное целое число.

Если в контрпримере заменить множество целых положительных чисел на множество положительных рациональных чисел, операция деления будет являться бинарной алгебраической операцией на рассматриваемом множестве.

***Определение.*** Если бинарная алгебраическая операция над элементами исходного множества приводит к тому, что результат также принадлежит этому множеству, то такое множество называется замкнутым относительно данной операции.

Приведенные выше определения и примеры подводят нас к общему определению алгебраической структуры. На множестве X может быть задано несколько бинарных алгебраических операций. Для выделения одной из них обычно пишут: $(X, *)$, где * — символ бинарной операции. Говорят также, что операция * выделяет множество X как алгебраическую структуру, или алгебраическую систему.

Отметим, что наряду с бинарными операциями существуют операции, например, над n аргументами, которые принято называть n-арными.

Для введения понятия группы нам понадобятся определения ряда свойств бинарных алгебраических операций.

***Определение.*** Бинарная операция * на множестве X называется ассоциативной, если выполнено соотношение:

$(a*b)*c = a*(b*c)$ для всех элементов множества X.

Другими словами, ассоциативность позволяет выполнять бинарные операции в произвольном порядке.

***Определение.*** Бинарная операция называется коммутативной, если выполнено равенство: $a*b = b*a$. Другими словами, коммутативность не изменяет результат при перемене местами аргументов.

### 4.1.2. Полугруппы и группы

Понятия группы, полугруппы, подгруппы, поля и ряда других были введены французским математиком Э. Галуа в 1832 г. Необходимость введения указанных понятий связана с исследованием общей проблемы разрешимости в радикалах уравнений с одним неизвестным. В настоящее время имеется огромное количество теоретических и прикладных исследований в этой области.

***Определение.*** Множество X с заданной на нем ассоциативной бинарной операцией называется полугруппой.

***Определение.*** Если полугруппа имеет нейтральный элемент e такой, что $x*e = e*x = x$ (в частности, нулевой или единичный в случае полугруппы с операциями сложения или умножения соответственно), то такая полугруппа называется моноидом, или полугруппой с единицей.

Для определения понятия группы введем определение обратимости элементов. Заметим, что обратным по сложению элементом для числа a является противоположное ему по знаку число – a, а обратным элементом по умножению для числа a является число b, такое, что ab = 1.

***Определение.*** Моноид, все элементы которого обратимы, называется группой.

Приведенные выше рассуждения позволяют нам подойти к еще одному варианту определения группы, а именно — аксиоматическому на основе следующих аксиом:

- на множестве X введена бинарная операция: $(a, b) \to a*b$;
- операция ассоциативна: (ab)c = a(bc);
- имеется нейтральный элемент e, такой, что (ae) = (ea)=a;
- для каждого элемента a группы существует обратный элемент b, такой, что ab = ba = e.

Перейдем к рассмотрению примеров групп, которое по возможности будем давать системно, чтобы проследить выполнение аксиом на достаточно различных исходных множествах. В табл. 4.1 приведены примеры групп, заданных алгебраическими операциями над вещественными числами.

Для группы матриц с вещественными элементами необходимо определить операции сложения и умножения. На множестве матриц одинакового размера, образующих группу по сложению, операции сложения выполняются поэлементно. Последнее означает, что при сложении матриц A и B, заданных элементами a(i, j) и b(i, j), результат сложения — матрица C = A + B — имеет элементы c(i, j), определяемые равенством

$$c(i, j) = a(i, j) + b(i, j). \tag{4.1}$$

Таблица 4.1

| Образующие группы (тип множества) | Тип групповой операции | Нейтральный элемент | Обратный элемент |
|---|---|---|---|
| Множество вещественных чисел | Сложение<br>Умножение | 0<br>1 | Существует<br>Существует |
| Множество матриц с вещественными элементами | Сложение матриц | Нулевая матрица | Матрица с противоположными элементами |
| Множество матриц с вещественными элементами и ненулевым определителем | Обращение матриц | Единичная матрица | Обратная матрица |
| Множество вершин правильных n-угольников | Вращение вокруг центра симметрии на угол 360i/n градусов, где i — число сдвигов | Задается суперпозицией вращений | Задается суперпозицией вращений |

Для группы обратимых матриц с вещественными элементами характерно выполнение требования ненулевого значения определителя, что необходимо для существования обратной матрицы. Для полного описания группы обратимых матриц определим правило вычисления произведения матриц, учитывая, что умножение матриц в общем случае некоммутативно. Кроме того, умножение матриц определено корректно, если число строк первой матрицы равно числу столбцов второй матрицы. Если матрица A задана своими строками $a(i, j)$ $j = 1,2,...,n$, а матрица B — своими столбцами $b(i, j)$, $i, j = 1,2,...,n$, то результат умножения — матрица C с элементами $c(i, j)$ определится с помощью правила

$$c(i,j) = \sum_{k=1}^{n} a(i,k)\, b(k,j). \tag{4.2}$$

Умножение матриц можно определить также по правилу «строка на столбец». Действительно, если матрицу A представить строками A(i), а матрицу B — столбцами B(j), то произведение — матрица C — может быть определена равенством

$$AB = \begin{bmatrix} A(1) \\ \dots \\ A(i) \\ \dots \\ A(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(1) & \dots & B(i) & \dots & B(n) \end{bmatrix} = \qquad (4.3)$$

$$= C = \{C(i,j)\} = (A(i), B(j)),$$

где круглыми скобками обозначено скалярное произведение вектора-строки A(i) на вектор-столбец B(j), причем элементы c(i, j) определяются формулой (4.2). Другими словами элементы матрицы произведения равны скалярным произведениям *вектора-строк первой матрицы-сомножителя на вектор-столбец* второй матрицы-сомножителя. Тогда группой обратимых матриц будем называть такие множества матриц A, для которых существуют обратные матрицы B, удовлетворяющих условию

$$AB = BA = E, \quad B = A^{-1}, \qquad (4.4)$$

где E — единичная матрица, у которой диагональные элементы равны единице, а остальные элементы равны нулю.

Матрица B, удовлетворяющая условию (4.4), называется обратной матрицей для матрицы A. Для вычисления обратной матрицы существует определенный класс алгоритмов. Наиболее простой алгоритм обращения матриц, известный как метод Гаусса, позволяет получить обратную матрицу путем выполнения операций над строками матриц. Алгоритм может быть представлен следующими шагами.

<u>Шаг 1.</u> Построить расширенную блочную матрицу $[A \mid E]$, состоящую из блоков A (где A — обращаемая матрица) и блока E — единичной матрицы.

<u>Шаг 2.</u> Элементарными операциями над строками (сложением строк, умноженных на скаляр) исходная блочная матрица приводится к виду $[E \mid B]$, в котором матрица B — обратная матрице A.

Схематически это можно показать следующим образом:

$$[A \mid E] \to [E \mid A^{-1}]. \qquad (4.5)$$

Обратная матрица позволяет представить решение линейной алгебраической системы $Ax = B$ в виде

$$x = A^{-1}\ B. \qquad (4.6)$$

**Пример.** Пусть требуется обратить матрицу A. Тогда обращаемая матрица A и матрица, введенная в (4.5), а также элементарные операции над строками, необходимые для отыскания обратной матрицы определятся следующей цепочкой соотношений

$$[A \mid E] =$$

$$= \left|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \xrightarrow{F_{1,2}} \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \xrightarrow{F_{3,1}^{(-2)}}$$

$$\longrightarrow \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right| \xrightarrow{F_2^{(1/2)}} \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right| \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \ldots \longrightarrow \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -2 & 1 \end{array}\right| = \left[E \middle| A^{-1}\right].$$

Продолжая рассмотрение примеров групп, приведенных в табл. 4.1, остановимся на анализе группы вращений треугольника. Геометрически возможные вращения треугольника представлены на рис. 4.1, где I — исходное состояние тре-

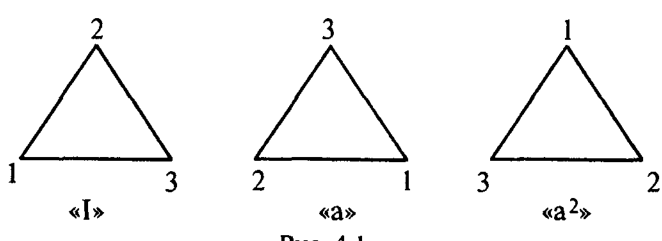



Рис. 4.1

гольника, а и $a^2$ — состояния, соответствующие одному и двум вращениям треугольника относительно состояния I (вращения производятся против часовой стрелки относительно центра треугольника).

Приведенный пример является одним из многих примеров так называемой «неколичественной» математики. Для рассматриваемой группы вращений треугольника «таблица умножения» имеет вид табл. 4.2.

Таблица 4.2

| | I | a | $a^2$ |
|---|---|---|---|
| I | I | a | $a^2$ |
| a | a | $a^2$ | I |
| $a^2$ | $a^2$ | I | a |

Из табл. 4.2 следует, что некоторые элементы совпадают. Это происходит в том случае, если каждому вращению треугольника сопоставить умножение состояний I, а и $a^2$ на символ а. Группу вращений треугольника принято называть циклической. Эта группа имеет нейтральный элемент I, соответствующий нулевому числу вращений. Все элементы группы могут быть получены как степени одного элемента (например, I), называемого образующим группы.

***Определение.*** Если любой элемент группы выражается в виде степени единственного образующего, то группа называется циклической.

Свойство цикличности группы можно проиллюстрировать, если при рассмотрении группы вращений треугольника выписать степени ее образующего элемента (например, а). При этом следует учесть, что $a^3 = I$, $a^{2n+1} = I$, n — натуральное (рис. 4.2).

$$\begin{array}{ccccccc} a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^7 & \dots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \backslash\underline{a} & \underline{a^2} & \underline{I}/ & \backslash\underline{a} & \underline{a^2} & \underline{I}/ & \dots \end{array}$$

Рис. 4.2

Как видно из рис. 4.2, полученная последовательность представляет собой циклическое повторение основной серии а, $a^2$, I, что и является признаком циклической группы порядка 3.

### 4.2. ПОДГРУППЫ, КОЛЬЦА, ПОЛЯ

Обратимся к внутренней структуре группы, введя понятие подгруппы, группы внутри группы. Более точное определение можно дать следующим образом.

***Определение.*** Множество H является подгруппой группы G, если:

1) каждый элемент множества H является элементом группы G;

2) H есть группа относительно бинарной операции, определенной в группе G.

Поясним определение подгруппы на примерах.

**Пример 1.** Известно, что все комплексные числа $a + ib$, где $a$ и $b$ — целые числа, образуют группу относительно операции сложения. Тогда множество комплексных чисел $r + is$, где $r$ и $s$ — четные числа, образуют подгруппу данной группы.

**Пример 2.** Рассмотрим циклическую группу порядка 4 — $C_4$: I, a, $a^2$, $a^3$ и найдем ее подгруппы порядка 2. Так как подгруппа является группой, то она должна содержать элемент I. Все ее подгруппы порядка 2 данной группы должны находиться среди множеств

$$R = (I,\ a), \quad S = (I,\ a^2), \quad T = (I,\ a^3).$$

Нетрудно проверить, что условие 1) последнего определения выполняется, так как все элементы рассмотренных множеств принадлежат $C_4$.

По поводу условия 2) упомянутого определения можно заметить, что множество R из двух элементов было бы циклической группой порядка 2, если бы выполнялось соотношение $a^2 = I$. Однако это условие для группы $C_4$ (см. табл. 4.2) не выполняется. Поэтому R не является подгруппой рассматриваемой группы. Аналогичными рассуждениями можно показать, что единственной подгруппой порядка 2 группы $C_4$ является множество S.

Для выявления подгрупп нам будет необходимо утверждение.

**Утверждение.** Подмножество H группы G является подгруппой группы G, если выполнены два условия:

1) элемент $h_1 * h_2$ принадлежит множеству H, если $h_1$ и $h_2$ — элементы множества H (свойство замкнутости);

2) элемент $h^{-1}$ принадлежит множеству H, если h принадлежит H (свойство обратимости).

Последнее утверждение можно рассматривать в качестве критерия подгруппы. Рассмотрим применение критерия подгруппы, используя группу вращений треугольника.

**Пример** (подгруппы группы треугольника). Проверку множеств на выполнение критерия подгруппы выполним, используя табл. 4.2. Тогда для множеств R, S, T из примера 2 получим:

Множество R

| a | I | a |
|---|---|---|
| I | I | a |
| a | a | $a^2$ |

Множество S

| | I | $a^2$ |
|---|---|---|
| I | I | $a^2$ |
| $a^2$ | $a^2$ | I |

Множество T

| | I | $a^3$ |
|---|---|---|
| I | I | $a^3$ |
| $a^3$ | $a^3$ | $a^6=a^2$ |

Рис. 4.3

Таким образом, множество S является единственным, для которого его таблица умножения замкнута относительно групповой бинарной операции (которой является вращение). Из таблицы также видно, что обратными для элементов I и $a^2$ являются элементы I и $a^2$ соответственно. Поэтому набор обратных элементов также принадлежит множеству S. (Обратные элементы могут быть получены вращением фигуры по часовой стрелке). Следовательно, S — подгруппа группы $C_4$.

Аналогично проверяется наличие подгрупп порядка 3.

Установим «предельные» свойства групп и подгрупп.

1. Группа является подгруппой самой себя.
2. Каждая группа содержит подгруппу, состоящую из единственного элемента I.

Перейдем к рассмотрению более общих алгебраических структур. Будем исходить из того, что задание только одной операции над множеством является в некоторой степени ограничительным. Расширение количества операций приводит к понятиям кольца и поля. Для начала обратимся к примеру.

**Пример.** Рассмотрим алгебраические структуры на множестве целых чисел, соответственно, с операциями сложения и умножения: (Z, +) и (Z, ×). Нетрудно видеть, что эти указанные структуры — полугруппы. Если сделать попытку объединить эти две структуры введением на множестве целых чисел Z двух операций — сложения и умножения, то мы очевидно не выйдем за класс целых чисел. В результате получим алгебраическую структуру кольца. Строгое определение кольца введем с помощью понятия коммутативной (абелевой) группы.

***Определение.*** Группа называется коммутативной, если все ее элементы коммутируют между собой.

***Определение.*** Пусть задано непустое множество K, на котором заданы две бинарные алгебраические операции: сложение и умножение, удовлетворяющие условиям:

(K, +) — коммутативная (абелева) группа;

(K, ×) — полугруппа;

операции сложения и умножения связаны дистрибутивными законами (умножения дистрибутивно по сложению):

$$(а + в)с = ас + вс, \qquad с(а + в) = са + св$$

для всех а, в, с из K.

Тогда (K, + , ×) называется кольцом.

Рассмотрим системное введение колец над множествами более общего вида, чем числовые множества, приведенные ниже в табл. 4.3.

Таблица 4.3

| Тип множества, тип кольца | Первая операция и нейтральный элемент | Вторая операция и нейтральный элемент |
|---|---|---|
| Множество квадратных матриц $M_n(R)$, кольцо квадратных матриц порядка n (некоммутативное) | Сложение, нейтральный элемент — нулевая матрица | Умножение, нейтральный элемент — единичная матрица |
| Множество вещественных функций, кольцо функций | Поточечное сложение, нейтральный элемент — нулевая функция | Поточечное умножение, нейтральный элемент — единичная функция |

Структура (K, +) называется аддитивной группой кольца, а (K, ×) — мультипликативной полугруппой. Если (K, ×) — моноид, то структура (K, +, ×) — кольцо с единицей. Операции, введенные на множестве K, можно определить на его подмножестве.

***Определение.*** Подмножество L кольца K называется подкольцом, если для x, y из L следует x – y из L и xy из L. Подкольцо должно содержать нейтральный элемент.

Естественно, что в кольце можно ввести семейство подколец. Тогда пересечение любого количества подколец в кольце K является подкольцом. Таким образом, можно говорить о множестве подколец, образованных различными пересечениями.

Другие свойства колец определены отдельными операциями. В частности, кольцо называется *коммутативным*, если $xy = yx$.

Мы уже познакомились с кольцом целых чисел $(Z, +, \times)$ с операциями сложения и умножения. Аналогично вводятся кольца на более широких множествах — на множествах рациональных Q и вещественных R чисел. При этом имеют место включения: $Z \subset Q \subset R$, которые определяют соответствующие цепочки подколец.

Перейдем к определению важного понятия *поля*, начав рассмотрение с коммутативного кольца с единицей. Известно, что в числовых кольцах Z, Q и R из $ab = 0$ следует, что либо a либо b равны нулю. Однако кольцо квадратных матриц этим свойством уже не обладает. Действительно, можно найти две ненулевые матрицы, произведение которых равно нулевой матрице. Это наводит на подтверждаемую примерами мысль о том, что существуют некоторые ненулевые элементы множеств, произведение которых дает нулевые элементы. Проиллюстрируем это обстоятельство на примерах.

**Пример 1.** Рассмотрим числовые пары (a, b), когда a, b принадлежат множествами Z, Q или R, и для которых определены операции сложения и умножения по правилам

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2),$$
$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1a_2,\ b_1b_2).$$

Такие пары образуют коммутативное кольцо с единицей $(1,1)$, в котором отмечается факт равенства нулю произведения ненулевых элементов. В частности, $(1, 0) * (0, 1) = 0$.

**Пример 2.** Если в кольце вещественных функций $f(x) = x + |x|$, $g(x) = |x| - x$ определить поточечное произведение, то это произведение будет равно нулю, хотя каждый из сомножителей не будет являться нулевой функцией. Проверка последнего утверждения может быть выполнена, например, построением графиков указанных функций.

Таким образом, для матриц, числовых пар и функций могут существовать нулевые произведения сомножителей, каждое из которых нулевым не является. Это дает возможность ввести понятия делителя нуля.

***Определение.*** Если $ab = 0$ при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ в кольце K, то a называют левым, а b — правым делителями нуля. В случае коммутативного кольца говорят о делителях нуля.

Нулевой элемент в кольце $K \neq 0$ называется тривиальным (простейшим) делителем нуля, и если отсутствуют другие делители нуля, то такое кольцо называется кольцом без делителей нуля.

***Определение.*** Коммутативное кольцо с единицей, отличной от нуля называется целостным кольцом (кольцом целостности или областью целостности). (Под нулем и единицей здесь понимаются нейтральные элементы для соответствующих групповых операций, см. табл. 4.3).

В кольце с единицей можно рассматривать множество обратимых элементов.

***Определение.*** Элемент a называется обратимым (или делителем единицы), если существует элемент

$a^{-1}$ такой, что $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

С учетом введенных понятий определим понятие поля.

***Определение.*** Будем называть полем коммутативное кольцо с единицей, не равной нулю, в котором каждый элемент, не равный нулю, обратим.

Примерами полей являются поле рациональных, вещественных и комплексных чисел; поле матриц с отличным от нуля определителем.

Таким образом, поле является обобщением понятия кольца, когда все элементы последнего обратимы. Весьма важна обратимость матриц для решения линейных алгебраических систем.

## 4.3. ИЗОМОРФНЫЕ И ГОМОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. АВТОМОРФИЗМЫ

Рассмотрим операции преобразования множеств и введенных ранее алгебраических структур.

Определение изоморфизма дадим на примере групп.

***Определение.*** Две группы G и G″ с операциями $*$ и $+$ называются **изоморфными**, если существует отображение $F: G \to G''$, такое, что:

1) $F(a * b) = F(a) + F(b)$ для всех $a, b<G$;

2) F — биективно.

Изоморфные отображения обладают следующими свойствами:

1) единица переходит в единицу;

2) обратное отображение тоже является изоморфизмом;

3) все циклические группы (см. п. 4.1, 4.2) одного и того же порядка изоморфны.

***Определение.*** Если в предыдущем определении положить $G = G''$, то изоморфное отображение группы G на себя называется **автоморфизмом**.

Тогда в силу свойства 3) отображение, обратное к автоморфизму, также является автоморфизмом. Кроме того, справедливо также следующее свойство. Если F и G — автоморфизмы группы H, то

$$(F \circ G)(ab) = F(G(ab)) = F(G(a) \circ G(b)) = \\ = (F \circ G)(a)(F \circ G)(b)$$

для любых $a, b \in H$. Следовательно, множество Aut(H) всех автоморфизмов группы H образует группу — подгруппу группы S(H) всех биективных отображений $H \to H$.

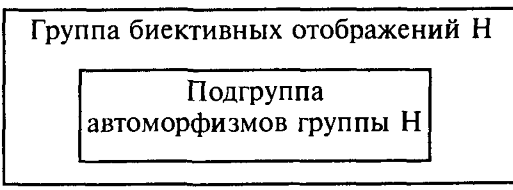



Рис. 4.2

Последнее можно изобразить графически на рис. 4.2.

Рассмотрим некоторые понятия из табл. 4.4.

Таблица 4.4

| Тип отображения | Тип множества, структуры | |
|---|---|---|
| | Группа | Кольцо |
| Гомоморфизм | Гомоморфизм групп | Гомоморфизм колец |
| Автоморфизм | Автоморфизм групп | Автоморфизм колец |
| Изоморфизм | Изоморфизм групп | Изоморфизм колец |

Начнем с изучения гомоморфизмов групп, определения и примеры которых даны в п. 4.1. Заметим, что в группе автоморфизмов Aut (H) группы H содержится одна особая подгруппа Inn (H), которая называется группой внутренних автоморфизмов.

***Определение.*** Отображение $F: G \to G''$ группы $(G, *)$ в $(G'', \circ)$ называется гомоморфизмом групп, если для любых a, b<G: F(a ∗ b) = F(a) ∘ F(b)>. Другими словами: отображение является гомоморфизмом, если образ композита является композитом образов. Об этом ясно свидетельствует последнее определение, где образ отображения F композита «a∗b» равен композиту с операцией ∘ для образов элементов a и b.

**Пример.** Полная линейная группа $GL_\infty(R)$ числовых матриц Ф (с коэффициентами из R) с не равным нулю определителем det A гомоморфно отображается на мультипликативную группу R* отличных от нуля вещественных чисел, если положить F = det A. Условие гомоморфизма F(AB) = F(A) F(B) является другой формулировкой теоремы о вычислении определителя произведения матриц.

Под ядром гомоморфизма группы будем понимать множество вида

$$\text{Ker } F = \{g < G \mid F(g) = e'' \text{ — единица группы } G''\}.$$

Гомоморфное отображение группы в себя называется ее эндоморфизмом.

Главное отличие гомоморфизма F от изоморфизма заключается в наличии нетривиального ядра Ker F, являющегося мерой неинъективности F.

***Определение.*** Пусть имеются два кольца:

$$(K, +, \times) \text{ и } (K'', *, \wedge).$$

Отображение F такое, что $K \to K''$ называется гомоморфизмом, если оно сохраняет все операции, т. е. если кольца

$$F(a + b) = F(a)*F(b),$$
$$F(a \times b) = F(a)\wedge F(b).$$

При этом предполагается, что F(0) = 0, F(na) = n F(a).

По аналогии, ядром гомоморфизма колец называется множество

$$\text{Ker } F = \{a < K \mid F(a) = K''\}.$$

Как и для групп, гомоморфизм F такой, что $K \to K''$ называется мономорфизмом, если Ker F = 0; эпиморфизмом, если образ совпадает с $K''$ так, что

$$\text{Im}F = F(K) = \{a'' < k'' \mid \text{существует } a\text{: } a'' = F(a)\} = K''\};$$

изоморфизмом, если отображение F мономорфно и эпиморфно.

Очевидно, что рассмотрение отображений на алгебраических структурах существенно расширяет возможности применения математических моделей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Гроссман И., Магнус В.* Группы и их графы. М.: Мир, 1971.

*Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994.

*Кострикин А. И.* Введение в алгебру. М.: Физматлит, 1977.

*Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М.* Современная математика. М.: Мир, 1966.

Сборник задач по алгебре // Под ред. Кострикина А. И. 1995.

*Стюард Я.* Концепции современной математики. Минск.: Вышэйшая школа, 1980.

*Глава 5*

# АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Аксиоматический метод является наиболее распространенным методом научного познания, когда красивое «здание» математической теории как бы интуитивно предсказывается. Мы рассмотрим истоки возникновения аксиоматического метода как обобщения вполне естественных исходных рассуждений (правдоподобных и поначалу элементарных). Обычно они наведены (индуцированы) построениями, очевидными на первом этапе. Основными вариантами построения аксиоматического метода являются метод алгебраических аналогий, метод геометрических аналогий и др.

## 5.1. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД НА ОСНОВЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ АНАЛОГИЙ

В ряде случаев простейшие алгебраические конструкции могут служить основой для естественного обобщения. Возникает вопрос: каким образом из отдельных математических объектов и действий могут быть построены математические методы и теории на основе аксиоматического метода. Проиллюстрируем аксиоматический метод на примере теории определителей. С помощью определителей и известных в алгебре формул Крамера изложим теорию решений линейных алгебраических систем. Установлению связи между теорией определителей и теорией линейных алгебраических систем может способствовать технология получения решений, представленная в виде схемы на рис. 5.1.

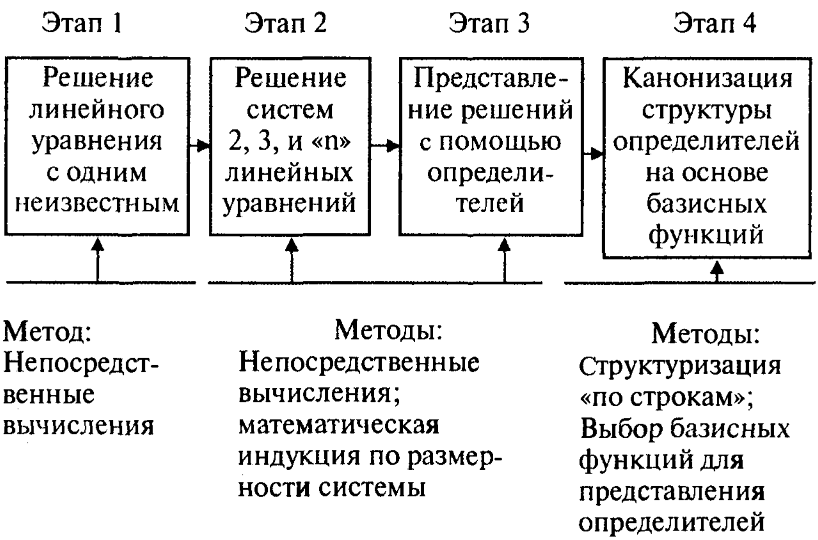



Рис. 5.1

На рис. 5.1 указаны методы, которыми надо воспользоваться на каждом этапе, чтобы получить необходимый результат. Хотелось бы обратить внимание на методы непосредственных вычислений, которые в сочетании с точной идентификацией и осознанием получающихся на каждом этапе результатов позволяют выделить конструктивное начало в создаваемой теории. Следуя приведенной схеме (этап 1) решения линейного алгебраического уравнения с одним неизвестным

$$a_{11}\, x = b,\ a_{11} \neq 0, \tag{5.1а}$$

получим в виде $x = b/a_{11}$.

Этот очевидный результат обладает большой общностью, поскольку (как мы увидим далее) отражает общий вид решения в случае конечной размерности системы. Весьма важным является вопрос о получении условий существования или отсутствия решения. В данном случае решения отсутствуют, если $a_{11} \neq 0$, $b=0$. Выяснение условий существования или отсутствия решений характерно для математики, поскольку при отсутствии решений проблема их отыскания становится бессодержательной. В этом смысле математика является примером высшей формы организованности научных исследований.

Структура решения сохраняется и в случае системы двух уравнений с двумя неизвестными (см. рис. 5.1, этап 2). Действительно, можно показать, что для линейной алгебраической системы второго порядка, определение которой дано в п. 1.1 соотношениями (1.3)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{5.1б}$$

решение можно получить, обобщая результат для уравнения (5.1а).

Заметим, что для решения системы можно использовать описанный в п. 2.1 «китайский алгоритм», по идее близкий к известному методу Гаусса, сущность которого состоит в приведении матрицы системы к треугольному виду. Однако здесь выведем формулу для решения системы (5.1б) с помощью метода исключения, известного из школьного курса математики. Напомним, что алгоритм метода состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Нахождение одного неизвестного (скажем, $x_1$) из первого уравнения:

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2)/a_{11}.$$

Шаг 2. Подстановка значения $x_2$ во второе уравнение системы:

$$a_{12}\,(b_1 - a_{12}x_2)/a_{11} + a_{22}\,x_2 = b_2.$$

Это соотношение является уравнением относительно неизвестного $x_2$.

Шаг 3. Решение последнего алгебраического уравнения относительно $x_2$ приводит к формуле:

$$x_2 = (b_2 - a_{21}\,b_1/a_{11})/(a_{22} - a_{12}/a_{11}). \qquad (5.2)$$

Шаг 4. Подстановка найденного значения $x_2$ в выражение для $x_1$. В результате получается окончательное решение системы. Заметим, что иногда удачная форма представления результата играет решающую роль. Это оправдывает распространенное мнение о том, что «новая форма рождает новый результат». Например, формулы Крамера, которые известны из курса школьной математики, обладают структурным единством представления решений системы (5.1б) таким, что

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \qquad (5.3)$$

Вертикальными чертами обозначены определители второго порядка, которые в данном простейшем случае вычисляются по формулам

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \qquad (5.4)$$

Как следует из равенств (5.3), определители являются внешними конструкциями по отношению к матрицам, поскольку матрицы — это таблицы, а их определители — числа. Аналогичное по форме решение может быть получено для систем третьего порядка.

Представим линейную алгебраическую систему (1.1.4б), используя столбцы матрицы Ф:

$$A_1x_1 + \ \dots\ A_ix_i + \ \dots\ + A_nx_n = B, \qquad (5.5)$$

где $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ — i-й столбец матрицы A, $i = 1, 2, \dots, n$; $B = (b_1, \dots, b_n)$ — столбец правых частей.

Решение линейных алгебраических систем n-го порядка по формулам Крамера доставляется формулой

$$x_i = \frac{\det\left(A(i)\right)}{\det A} = \left|\frac{A_1 \;\ldots\; \overset{\text{i-й столбец}}{\overset{\downarrow}{B}} \;\ldots\; A_n}{A_1 \;\ldots\; A_i \;\ldots\; A_n}\right|. \tag{5.6}$$

Из (5.6) следует, что для существования решения определитель матрицы A должен быть отличным от нуля.

Структурная общность в записи решений имеется как для уравнения первого и второго порядков (5.1а), (5.1б), так и для системы (5.5). Характеристикой общности здесь является задание решений в виде отношения двух чисел: в случае одного уравнения — это отношение параметров уравнения, а для систем второго и высших порядков — отношение двух определителей (соответственно второго и n-го порядков, которые определяются размером квадратной матрицы A). Данная ситуация соответствует этапу 3 общей процедуры, иллюстрируемой на рис. 5.1.

Теперь сформулируем общее правило вычисления определителей (тем самым мы переходим к этапу 4, рис. 5.1) на основе комбинаторно-аналитического метода.

Для создания аксиоматической теории определителей воспользуемся комбинаторно-аналитическим методом. Тем самым определим структуры определителей первого, второго и конечного порядка. Здесь мы можем говорить, что на основании решения уравнения (5.1а) вида

$$x_1 = \frac{b}{a_{11}},$$

значения определителей будут равны числам $b$ и $a_{11}$.

Для системы двух уравнений с двумя неизвестными (5.1б) решения определяются отношениями (5.3). Однако в данном случае числитель и знаменатель отношения представляются качественно новыми математическими «агрегатами» — определителями второго порядка соответствующих матриц. Поскольку для математической теории важна конструктивность, то она может быть достигнута за счет общих формул для вычисления определителей высоких порядков. Анализ формул для вычисления определителей матриц размерности (2 × 2) показывает, что определитель является функцией элементов матрицы, поскольку вычисляется с помощью операций умножения и сложения над ними.

Структурированное представление определителя любого конечного порядка дается формулой «полного развертывания» определителя n-го порядка

$$\det A = \sum (-1)^r a_{1,k1} a_{2,k2} \dots a_{n,kn}, \qquad (5.7)$$

причем каждое из слагаемых в (5.7) соответствует одному из n! различных упорядоченных множеств k1, k2,..., kn, полученных r попарными перестановками элементов из множества 1,2,...,n, где n — порядок определителя. По сути, определитель матрицы A — это алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца. Фактическое вычисление определителя по его элементам упрощается, если воспользоваться приводимыми далее понятиями и правилами.

***Определение.*** Будем называть минором $D_{ik}$ элемента $a_{ik}$ в определителе n-го порядка определитель (n – 1) порядка, если из исходного определителя вычеркнуть i-ю строку и k-й столбец.

***Определение.*** Будем называть алгебраическим дополнением $A_{ik}$ элемента коэффициент при $a_{ik}$ в разложении определителя:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}. \qquad (5.8)$$

Введенные понятия позволяют представить определитель через элементы его произвольной строки или столбца:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \qquad j = 1, 2, \dots, n, \qquad (5.9)$$

где алгебраические дополнения вычисляются с помощью (5.8).

**Пример.** Вычислим определитель третьего порядка, пользуясь формулой (5.9). Получим

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} 187.$$

При этом для вычисления этого определителя использовано правило разложения определителя по элементам первой строки, а для вычисления алгебраических дополнений — соотношения (5.8) и (5.4).

Качественная структура определителя как функция строк или столбцов позволяет перейти к его аксиоматическому определению. Начнем с изучения его свойств. К числу важных свойств определителя относятся полилинейность по аргументам и кососимметричность.

***Определение.*** Функция называется полилинейной, если она является линейной по каждому аргументу при условии, что все остальные аргументы являются постоянными числами.

Воспользуемся структурами (5.7) или (5.9), в которых суммируются слагаемые, представляющие собой функции строк матрицы А. Можно показать, что определитель является кососимметрической функцией строк, поскольку при перестановке местами двух строк он меняет знак на противоположный.

Таким образом, предложена методика представления определителей, которая может служить исходной для формулировки его аксиоматики. Тогда определителем матрицы А будем называть любую функцию det A такую, что

1) $\det A\colon R^{n\times n} \to R^{1}$, т. е. определитель есть отображение из пространства матриц на числовую ось (определитель — это число);

2) определитель — это кососимметрическая функция строк матрицы А такая, что при перестановке местами двух строк определитель меняет знак на противоположный;

3) определитель — это полилинейная функция строк матрицы А;

4) определитель единичной матрицы равен единице.

Заметим, что существуют другие аксиоматические задания определителей, изучаемые в специальной литературе.

## 5.2. ОБЩАЯ СХЕМА АКСИОМАТИЧЕСКОГО МЕТОДА

Рассмотрим основные положения аксиоматического метода, обобщая примеры предыдущего параграфа, в предыдущем разделе.

Аксиоматический метод может быть основан на сочетании идей математики и философии (табл. 5.1).

Таблица 5.1

| Математика / Философия | Индуктивный метод | Дедуктивный метод |
|---|---|---|
| Метод принципа | * | * |
| Метод гипотезы | * | * |

При индуктивном подходе теории создаются на основе «наведения» общих результатов путем обобщения частных построений. При дедуктивном подходе теории создаются на основе некоторых фундаментальных положений, которые можно принять за базисные, рассматриваемые как совокупность образующих идей, формирующих понятий, преобразующих действий. «По вертикали» приведены более конкретные методы, которые определяют тип технологии построения элементов теории. Скажем, метод гипотезы часто определяет схему корректного предсказания результата, истинность которого проверяется непосредственно. Далее мы вернемся к этому важному компоненту научного исследования. Метод принципа основан на регулярности движения к получению результата, установления его корректности. При этом обычно вводятся соответствующие ограничения на применение.

Описание основных положений аксиоматического метода целесообразно начать с ряда определений и понятий. Прежде всего рассмотрим такие понятия, как аксиома, аксиоматика, а уже затем перейдем к понятию аксиоматического метода.

***Определение.*** Будем понимать под аксиомой высказывание некоторой теории, принимаемое при ее дедуктивном построении без доказательства, т. е. принимаемое как исходное, отправное для доказательства других положений этой теории. Простым и естественным примером аксиомы является аксиома прямой: через две любые точки можно провести одну и только одну прямую. Интуитивно справедливость данной аксиомы следует из геометрических представлений. Необходимо заметить, что при создании строгой математической теории евклидовых пространств данная аксиома является справедливой. Особенности возникают в геометрии Лобачевского (на них мы остановимся далее). Дополняя сказанное, можно отметить, что уже в «Началах» Евклида данная аксиома выступает как инструмент дедуктивного построения.

Следует иметь в виду возможную неоднозначность введения аксиом, что позволяет построить несколько аксиоматических теорий. При введении аксиом нет полной свободы. В частности, когда вводится не одна аксиома, а несколько, необходимо выполнить ряд условий. Это позволяет путем количественного увеличения аксиом перейти к аксиоматике.

***Определение.*** Будем понимать под аксиоматикой систему аксиом вместе с основными объектами и основными отношениями между ними.

Данное определение требует некоторого комментария. Во первых, система — это целое, состоящее из частей. В данном случае в качестве частей выступают основные объекты. Во вторых, в систему входят также и основные отношения. Под ними можно понимать отношения равенства–неравенства, а также отношения, определенные действиями (операторами). По сути, понимание важности введения действий над исходными категориями дает основу для отыскания необходимых действий, выполняемых в процессе математического исследования объектов различной природы, включая объекты гуманитарной сферы деятельности.

Как уже упоминалось, введение аксиоматики требует выполнения определенных требований. Такими требованиями являются:

- непротиворечивость,
- независимость,
- полнота.

Система аксиом непротиворечива, если из нее нельзя логически вывести два взаимно исключающих друг друга предложения. Если система аксиом не обладает этим свойством, то она называется противоречивой. Противоречивая система аксиом не может использоваться для построения научной теории.

Непротиворечивость системы аксиом также называется совместностью системы аксиом. Понятие совместности является весьма важным в науке.

Необходимо иметь в виду, что критерии (средства проверки) совместности часто сами по себе позволяют получать богатые содержательные результаты, носящие качественный характер.

Независимость системы аксиом является одним из свойств непротиворечивой системы аксиом. Непротиворечивая система аксиом является независимой, если никакая отдельная аксиома системы не является следствием других аксиом этой же системы.

Полнота системы аксиом предполагает возможность построения на ее основе той или иной теории.

Введенные понятия позволяют перейти к определению аксиоматического метода.

*Определение.* Способ построения научной теории, при котором в ее основу положены аксиомы, из которых все остальные утверждения теории (теоремы) выводятся путем доказательств, т. е. путем формально-логических выводов, называется аксиоматическим методом.

В результате применения аксиоматического метода большей частью создаются обобщенные теории, когда в основу аксиоматики положены опытные или интуитивно предсказанные результаты. Часто наведение общих аксиоматических построений происходит на основе предсказания достаточно частных результатов. Примеры такого построения аксиоматики мы будем рассматривать далее.

*Определение.* Положения теории, справедливость которых устанавливается путем некоторых рассуждений (действий над первичными понятиями или категориями), называются теоремами.

*Определение.* Совокупность исходных математических понятий или объектов, действий, теорем (утверждений), полученных в результате операций над исходными понятиями или объектами, будем называть математической теорией.

Приведенные ранее определения и примеры позволяют составить общие представления о подходах к построению аксиоматического метода. Множество других примеров будет приведено далее в процессе рассмотрения разделов математики. Это прежде всего относится к теории вероятностей, имеющей «частотное» и аксиоматическое построения, которые дополняют друг друга.

С позиций современной философии теория определяется как система понятий, принципов, законов. При этом понятие определяется как фиксация общего, характерного для многих явлений. Последнее достаточно полно реализуется в математических теориях, использующих абстрактные понятия, наведенные реальными объектами или явлениями окружающего мира.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Физматгиз, 1968.

*Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994.

*Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Физматгиз, 1975.

*Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1975.

Энциклопедия математики / Под. ред. И. М. Виноградова. М.: Наука, 1977.

# *Глава 6*
# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Математический анализ объединяет ряд разделов математики, базирующихся на понятии предела. На основе этого понятия вводятся определения производной и интеграла. Основными предметами изучения в данной главе являются пределы числовых последовательностей, порождаемые элементарными функциями, а также производные и интегралы от элементарных функций. Математический анализ дает основу для изучения важного класса математических моделей в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматриваемые математические модели и методы анализа в основном были разработаны в период создания математики переменных величин, начиная с 17 в. и связаны с именами крупнейших ученых-мыслителей И. Ньютона и Г. Лейбница. Ньютон и Лейбниц каждый шли по своему пути при разработке дифференциального и интегрального исчисления. Однако Ньютон исходил из потребностей механики, а Лейбниц подходил к проблеме как философ и геометр. Излагаемые далее методы численного анализа иллюстрируют идеи построения аналогов дифференциального исчисления для функций дискретного аргумента (сеточных функций). Методы численного интегрирования позволяют расширить класс интегрируемых функций и применять для вычислений информационно-вычислительные системы.

## 6.1. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

Функции являются одним из важнейших понятий математического анализа. Допустим, что имеется множество X и множество Y. Соответствие f, принадлежащее декартову произведению X × Y, которое каждому элементу x из множества X сопоставляет единственный элемент y из множества Y, называется функцией, или функциональным соответствием. Функция называется числовой, если множества X и Y являются числовыми. Рассматриваемые числовые функции будут описываться с помощью системы координат, которая дает возможность выражать геометрические образы в аналитической форме. Этот метод был предложен Рене Декартом (1596–1650) и в последующем развит Пьером Ферма (1601–1665). Декарт внес движение в математику. Вместе с трудами Декарта в математику вошли переменные величины. Говорят, что вместе с трудами Декарта в математику и в естествознание вошла диалектика.

Основные классы элементарных числовых функций изучаются в средней школе. Функции можно задавать несколькими способами: аналитическим, табличным, графическим. В ряде случаев применяется алгоритмическое задание функций. Наиболее часто используются аналитическое и табличное задание функций. Аналитические и табличные представления наиболее распространенных функций приведены в табл. 6.1.

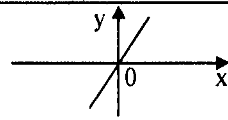
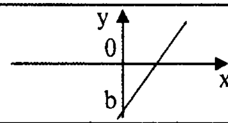
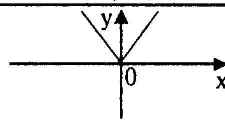
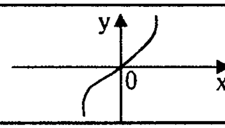
Простейшими из класса рассматриваемых функций являются *линейные функции* $y = f_1(x)$.

Функция называется линейной, если она удовлетворяет условиям аддитивности и однородности

$$y = f_1(ax + bz) = af_1(x) + bf_1(z), \qquad (6.1)$$

которые проверяются непосредственно.

Таблица 6.1

<table>
<tr><th>Функция и ее аналитическое задание</th><th>Графическое задание функции</th></tr>
<tr><td>Линейная функция<br>$y = f_1(x) = ax$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Аффинная функция<br>$y = f_2(x) = ax+b$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Функция модуля<br>$y = f_3(x) = |x|$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Полином<br>$y = f_4(x) = P_3(x) = x^3$</td><td>
</td></tr>
</table>

Следующие по сложности — это аффинные функции, которые представляют собой сумму линейной функции и постоянной величины

$$y = f_2(x) = f_1(x) + b. \qquad (6.2)$$

По сути добавление константы в аффинной функции соответствует сдвигу значений линейной функции на эту константу.

В математическом анализе широко используется функция модуля, которая определяется как само число, если оно положительное, и как противоположное по знаку число, если оно — отрицательное. Аналитически эта функция записывается следующим образом:

$$y = f_3(x) = |x| = \begin{cases} x, \text{ если } x > 0, \\ -x, \text{ если } x < 0, \\ 0, \text{ если } x = 0. \end{cases} \qquad (6.3)$$

В математическом анализе широко распространены полиномиальные функции, называемые также алгебраическими многочленами. Эти функции можно определить с помощью базисных функций вида

$$\{1, x, x^2, x^3, ..., x^n\}.$$

При этом полиномиальные функции $P_n(x)$ являются линейной комбинацией базисных функций

$$y = f_4(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ ... + \ a_nx^n. \quad (6.4)$$

С помощью полиномов (6.4) можно определить левую часть алгебраических уравнений и сами уравнения.

$$P_n(x) = 0.$$

Для случая $n = 1$ эти уравнения решались еще в древней Индии. Индийские ученые использовали так называемый метод инверсии. Сущность его состоит в том, что задача решалась с конца. Сначала задавалось некоторое число, а затем над этим числом осуществлялись операции, обратные тем, которые были выполнены по условию задачи.

Методы решения уравнений установлены в основных работах среднеазиатского математика аль-Хорезми (787—ок. 850). Квадратные уравнения (для $n = 2$) аль-Хорезми решает аналитически и геометрически путем построения соответствующих квадратов и прямоугольников.

Замечательны в отношении решений алгебраических уравнений результаты Омара Хайяма (1048—ок. 1131). Для решения уравнений третьей степени он использовал геометрический метод, рассматривая пересечение двух кривых: двух парабол, параболы и окружности и т. д.

Дальнейшее развитие методов решения уравнений приходится на эпоху Возрождения и в этой связи необходимо отметить гениального итальянского живописца, скульптора, архитектора, механика и математика Леонардо да Винчи (1452—1519). В математике Леонардо интересовался в основном теми вопросами, которые имели приложение к искусству. Он же дал численные методы решения уравнений.

Несколько позже Никколо Тарталья (ок. 1499—1557), итальянский математик, философ и врач, а также Джероланo Кардано (1501—1576) предложили общее решение неполного уравнения третьей степени

$$x^3 + px^2 = q, \quad x^3 = px + q.$$

Затем французский математик Франсуа Виет (1540–1603) разработал известные формулы для решения квадратных уравнений.

Норвежский математик Нильс Хенрик Абель (1802–1829) показал, что не существует общего решения в радикалах для уравнений выше четвертой степени. В настоящее время для решений алгебраических уравнений используются методы вычислительной математики.

Расширение классов элементарных функций происходит по мере введения функции гиперболы. Такие функции определены так, что их абсолютные значения тем больше, чем меньше абсолютное значение аргумента. Другими словами, логика функции гиперболы определяется словами «чем меньше модуль аргумента, тем больше модуль функции». Аналитическое представление функции имеет вид

$$y = f_5(x) = \frac{1}{x}. \tag{6.5}$$

Многие явления описываются показательной функцией

$$y = f_6(x) = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1. \tag{6.6}$$

Из школьного курса математики известна логарифмическая функция

$$y = f_7(x) = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1. \tag{6.7}$$

Под логарифмом положительного числа $x$ по основанию $a \neq 1$ понимают показатель степени $y$, в которую надо возвести основание $a$, чтобы получить число $x$.

Открытие логарифмов относится к эпохе Возрождения и 17 в. Работы, приведшие к открытию логарифмов, развивались с целью сокращения вычислений. Изобрели логарифмы и дали им теоретическое обоснование швейцарский математик, астроном и механик Бюрги (1552–1632) и шотландец Джон Непер (1550–1617). В книге «Устройство удивительной таблицы логарифмов» Непер дает разъяснение метода вычисления логарифмов. Интересно отметить, что далее история развития логарифмов связана с сопоставлением значений логарифмов (6.7) и площади, заключенной между равносторонней гиперболой (6.5) и ее асимптотой.

Важный класс составляют периодические функции, которые удовлетворяют соотношению

$$y = f_8(x) = f_8(x + c), \qquad (6.8)$$

где c — период. Как следует из (6.8), добавление к аргументу периода не изменяет значения функции.

Большое значение в анализе имеют функции синуса $y = \sin x$, косинуса $y = \cos x$, тангенса $y = \operatorname{tg} x$, котангенса $y = \operatorname{ctg} x$, которые описывают широкие классы периодических процессов. Эти функции часто удобно рассматривать как функции окружности на плоскости, задаваемые соответствующими соотношениями. Для их вычисления можно пользоваться соответствующими таблицами. Имеются также программы для вычислений значений этих числовых функций на ЭВМ.

Как мы увидим далее, многие результаты в анализе связаны с экспоненциальной функцией, которая будет изучена далее.

Для всех рассмотренных функций характерно свойство непрерывности. Л. Эйлер пытался представить непрерывную функцию как «кривую, которая рисуется свободным движением руки», что не является точным определением непрерывности. О. Коши сначала задавал непрерывность как «функцию, для которой бесконечно малое приращение аргумента приводит к бесконечно малому изменению значения». Это правильно, если известно определение бесконечно малой величины. Понятие непрерывности, которым пользуются сейчас, опирается на «отсутствие скачков». Стандартное определение непрерывности на множестве действительных чисел формулируется следующим образом. Функция f называется непрерывной в точке x, если путем выбора $p_1$ и $p_2$, близких к x можно добиться того, чтобы $f(p_1)$ и $f(p_2)$ были сколь угодно близкими друг к другу.

Рассмотренные выше элементарные функции порождают в математике более широкие классы функций. Последнее возможно, если над исходными функциями выполнить операции сдвига по аргументу, суперпозиции, алгебраические операции, такие, как умножение, деление и другие.

### 6.2. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Будем рассматривать упорядоченные переменные величины, изменяющиеся специальным образом, который определим понятием «стремление величины к пределу». При этом целесообразно выделить пределы числовых последовательностей аргументов и пределы числовых последовательностей функций.

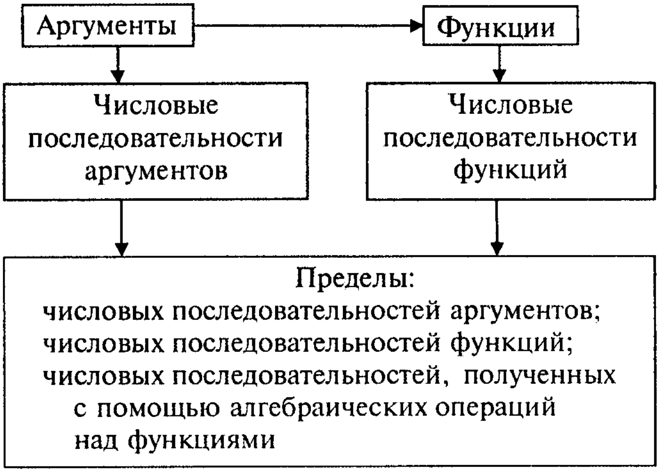



Рис. 6.1

Выделенные на рис. 6.1 главные понятия (аргументы, функции, числовые последовательности аргументов и функций) определяют содержание теории пределов как раздела математического анализа.

### 6.2.1. Пределы аргументов и функций

Говоря *о предельных величинах*, естественно предположить существование связанных с ними понятий — *допредельных величин*. С целью иллюстрации этих понятий рассмотрим пример построения числовых последовательностей, которые могут использоваться как последовательности аргументов.

Пусть переменная величина последовательно (т. е. при возрастании натурального числа от единицы до n) образует числовые последовательности

$$x_1 = 1 + 1 \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{3}, \ldots, x_n = 1 + \frac{1}{n}, \ldots \qquad (6.9)$$

Когда число n конечно, то такие числовые последовательности удобно называть допредельными. Тогда предельными величинами числовых последовательностей (или их пределами) будем называть значения последовательностей при n, стремящемся к бесконечности. Не исключено, в частности, совпадение допредельных и предельных величин при некотором конечном значении n. Однако если целое число n стремится к бесконечности, то данная числовая последовательность $\{x_n\}$ неограниченно близко стремится к единице. В этом случае говорят, что единица является пределом этой числовой последовательности. Перейдем к точному определению предела.

***Определение.*** Постоянное число а называется пределом переменной величины $x_n$ (последовательности), если для каждого произвольно малого наперед заданного положительного числа b можно указать такое значение переменной $x_n$, что с ростом n все последующие значения переменной будут отличаться от а сколь угодно малого по модулю, т. е. удовлетворять неравенству

$$|x_n - a| < b. \tag{6.10}$$

Применительно к последовательности (6.9) неравенство (6.10) принимает вид

$$|x_n - 1| = \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right| = \frac{1}{n}.$$

Очевидно, что отношение 1/n может стать сколь угодно малым при бесконечном увеличении числа n. Введенное определение предела может характеризовать предел аргумента функции.

Дадим определение предела функции.

***Определение.*** Пусть функция y = f(x) определена в некоторой окрестности точки а или в некоторых точках этой окрестности. Функция y = f(x) стремится к пределу b (обозначается: $y \to b$) при x, стремящемся к а (обозначается $x \to a$), если для каждого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно указать такое положительное число δ, что для всех x, отличных от а и удовлетворяющих неравенству

$$|x - a| < \varepsilon, \tag{6.11}$$

имеет место неравенство

$$|f(x) - b| < \delta. \tag{6.12}$$

Тогда говорят, что число b есть предел функции f(x) и записывают этот факт следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \text{ или } f(x) \to b \text{ при } x \to a. \tag{6.13}$$

Рассматривая числовые последовательности аргументов и числовые последовательности, получаем согласованные последовательности

$$x_n \to a, \quad f_n = f(x_n) \to b.$$

При изучении понятий пределов мы столкнулись с величинами, которые могут принимать сколь угодно малые значения. Поскольку такие величины играют в анализе весьма важную роль, необходимо продолжить их рассмотрение, распространив понятие бесконечно малой величины на функции.

### 6.2.2. Бесконечно малые функции и их свойства

Функции, стремящиеся к нулю при стремлении аргумента к некоторому значению, называются бесконечно малыми. Рассмотрим вариант теории бесконечно малых функций, иллюстрируемый на рис. 6.2.


Рис. 6.2

***Определение.*** Функция $m(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ или $x \to \infty$, если

$$\lim_{x \to a} m(x) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x \to \infty} m(x) = 0. \tag{6.14}$$

В (6.14) символ $\infty$ обозначает бесконечно большое число, т.е. такое число, которое может быть сделано больше сколь угодно большого наперед заданного числа. Определение (6.14) построено с помощью определений (6.11)–(6.13). Рассмотрим примеры бесконечно малых функций.

7 – 984

**П р и м е р .** Функция $m(x) = (x-1)^2$ есть бесконечно малая при $x \to 1$, так как $\lim\limits_{x \to 1}(x-1)^2 = 0$.

На языке числовых последовательностей для функций рассматриваемый предел равен

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = \lim_{n \to \infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Сформулируем основные теоремы о функциях бесконечно малых функций, когда определены основные алгебраические операции.

**Теорема 1.** Если функция представляется в виде суммы постоянного числа $b$ и бесконечно малой функции $m(x)$ так, что $y = b + m(x)$, то предел вычисляется с помощью соотношения:

$$\lim y = b \ \text{(при} \ x \to a \ \text{или} \ x \to \infty). \qquad (6.15)$$

Содержательный смысл теоремы состоит в том, что добавление постоянного числа $b$ (сдвиг на $b$) к бесконечно малой величине и выполнение операции предельного перехода порождают функцию, равную значению сдвига.

**Теорема 2.** Если $m = m(x)$ — бесконечно малая функция и не обращается в нуль, то функция $y = 1/m(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$, т. е. явдяется бесконечно большой.

В этой теореме иллюстрируется свойство гиперболической функции от бесконечно малой величины.

**П р и м е р.** Пусть бесконечно малая функция имеет допредельное значение, равное $m(x) = 1/(n^2)$. Тогда функция

$$y = 1/m(x) = n^2 \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

**Теорема 3.** Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

**П р и м е р .** Рассмотрим сумму двух бесконечно малых функций, представленных допредельными значениями

$$m_1(x) + m_2(x) = 1/n + n^{-2}.$$

Тогда $\lim(1/n + n^{-2}) = 0$ при $n \to \infty$.

**Теорема 4.** Произведение бесконечно малой функции $m(x)$ и ограниченной функции $z(x)$ при $x \to a$ (или $x \to \infty$) есть бесконечно малая функция.

В практике возникают проблемы отыскания пределов алгебраической суммы, произведения и отношения функций. В этой связи справедлив ряд следующих теорем.

**Теорема 5.** Предел алгебраической суммы конечного числа переменных функций (последовательностей) равен алгебраической сумме пределов этих функций (последовательностей).

Иллюстрацией этого факта может служить последний из примеров. Доказательство теоремы проводится на основе процедуры, иллюстрируемой для двух слагаемых.

*Доказательство:* Пусть $\lim v_1(x) = a_1$, $\lim v_2(x) = a_2$. На основе теоремы 1 представим переменные функции в виде суммы постоянных чисел и бесконечно малых функций:

$$v_1 = v_1(x) = a_1 + m_1(x),\ v_2 = v_2(x) = a_2 + m_2(x), \tag{6.16}$$

где $m_1(x) = m_1$, $m_2(x) = m_2$ — бесконечно малые функции. Поэтому

$$v_1 + v_2 = (a_1 + a_2) + (m_1 + m_2),$$

где по теореме 3 последнее слагаемое в скобках есть бесконечно малая функция. В результате предел суммы двух рассматриваемых переменных функций равен $a_1 + a_2$, что и требовалось доказать.

**Теорема 6.** Предел произведения конечного числа переменных функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim(v_1 v_2 \ldots v_n) = \lim v_1 \lim v_2 \ldots \lim v_n. \tag{6.17}$$

Другими словами, предел произведения равен произведению пределов. Для доказательства воспользуемся представлением переменных функций (6.16) и рассмотрим их произведение. В случае двух функций будем иметь:

$$\lim v_1 v_2 = \lim(a_1 + m_1)(a_2 + m_2) =$$
$$= \lim(a_1 a_2 + m_1 a_2 + a_1 m_2 + m_1 m_2) = a_1 a_2.$$

Последняя цепочка равенств получена в силу теорем 1, 3, 4.

**Теорема 7.** Предел отношения двух функций равен отношению пределов этих переменных, если предел знаменателя не равен нулю.

Доказательство теоремы проводится путем выделения слагаемого $a_1/a_2$ в отношении двух переменных функций, представленных соотношениями (6.10).

**Теорема 8.** Если между соответствующими значениями трех функций $u = u(x)$, $z = z(x)$, $v = v(x)$ выполняется неравенство

$$u < z < v \tag{6.18}$$

и при этом функции $u$ и $v$ при $x \to a$ стремятся к одному и тому же пределу $b$, то функция $z$ при $x \to a$ стремится к тому же пределу.

Последняя теорема определяет свойство «наследования предела» при выполнении неравенства (6.2.9).

Мы рассмотрели основные операции, необходимые при вычислении пределов. Возникающие в ряде случаев неопределенности требуют применения особых приемов, изучению которых посвящена специальная литература. В заключение дадим вспомогательные утверждения, которые носят иногда название замечательных пределов. Такое название они получили в связи с их широким применением при вычислении пределов более сложных конструкций.

**Теорема 8.** При стремлении аргумента x синусоидальной функции к нулю справедливо следующее равенство:

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ при } x \to 0. \tag{6.19}$$

Это позволяет говорить об эквивалентности двух бесконечно малых величин: $\sin x$ и $x$. Здесь мы имеем дело с математическим понятием эквивалентности, используемым в теории пределов, т. е. на языке предельных переходов.

**Теорема 9.** Переменная величина $(1 + 1/n)^n$ при стремлении числа $n$ к бесконечности имеет предел, равный числу e, которое равно 2.718281828... Аналитически это записывается в виде

$$\lim(1 + 1/n)^n = e \text{ при } n \to \infty. \tag{6.20}$$

В выражении (6.20) число e является основанием неперовых алгоритмов.

## 6.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Основы дифференциального и интегрального исчисления были разработаны Исааком Ньютоном (1643—1727) и Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646—1716). Основные понятия математического анализа у Ньютона отражали понятия механики. Ньютон представлял себе взаимообратимость двух операций: «нахождения флюксий по данной флюэнте и флюенты — по данной флюксии». Тем самым он установил связь между дифференцированием и интегрированием, которая была ранее отмечена английским математиком Исааком Барроу (1630–1677). В своей работе «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления» Лейбниц изложил основные принципы дифференциального исчисления. Он исходил из определения бесконечно малого приращения функции при бесконечно малом приращении аргумента. Приращение функции Лейбниц называл дифференциалом. Им введено современное обозначение дифференциала, а также многие современные математические символы. Последующие работы Лейбница были посвящены понятию интеграла. Вариант взаимных связей между понятиями теории дифференциального исчисления показан на рис 6.3.

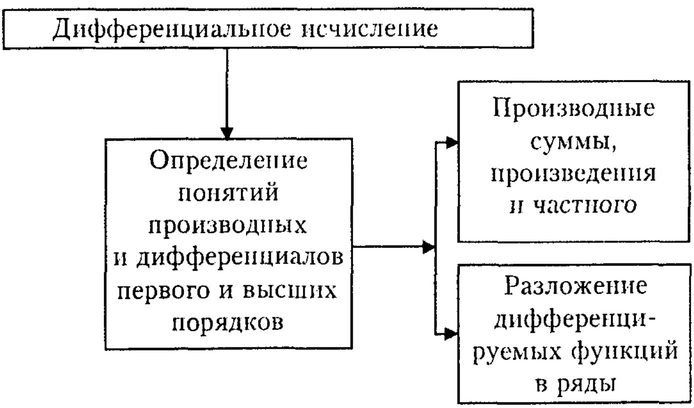



Рис. 6.3

Рассмотрим функцию

$$y = f(x), \tag{6.21}$$

определенную на некотором промежутке числовой оси. Пусть аргумент получает положительное или отрицательное приращение $\delta x$ (читается «дельта икс»). Тогда функция $y$ получает соответствующее приращение $\delta y$. Для введения понятия производной нам понадобятся следующие вспомогательные величины:

- исходное значение аргумента x и значение функции $y = f(x)$;
- новое значение аргумента $(x + \delta x)$ и новое значение функции

$$y + \delta y = f(x + \delta x),$$

где $\delta x$ — бесконечно малое приращение аргумента,

- отношение приращения функции — $\delta y$ к приращению аргумента $\delta x$ (допредельный вариант):

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}. \tag{6.22}$$

Далее вычислим предел отношения (6.22), и если этот предел существует (предельный вариант), то его будем называть производной функции f(x) в точке x и обозначать

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\delta x \to \infty} \frac{\delta y}{\delta x}. \tag{6.23}$$

Дадим определение производной в другой форме.

***Определение.*** Предел отношения приращения функции к бесконечно малому приращению аргумента, когда последнее произвольным образом стремится к нулю, называется производной функции в точке.

Заметим, что производная есть локальное свойство функции, т. е. свойство функции в точке, причем при переходе от точки к точке производная может меняться количественно, хотя аналитическое выражение для производной может иметь одну и ту же форму.

Для иллюстрации понятия производной рассмотрим примеры.

**Пример.** Пусть функция $y = f(x) = x^2$. Вычислим ее производную в точке $x = 1$. В силу определений (6.22), (6.23) будем иметь

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{(x + \delta x)^2 - x^2}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\delta x + (\delta x)^2 - x^2}{\delta x} =$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} (2x + \delta x) = 2x.$$

В точке $x = 1$ производная равна двум, в точке $x = 2$ — четырем, поскольку аналитическое выражение для производной равно $2x$.

***Определение.*** Операция вычисления производной функции в точке называется дифференцированием функции.

Основные формулы дифференцирования приведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

| Функция | Производная |
|---|---|
| $y = \text{const}$ | $y' = 0$ |
| $y = x^n$ | $y' = nx^{n-1}$ |
| $y = x^{1/2}$ | $y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ |
| $y = \frac{1}{x} = (x)^{-1}$ | $y' = (-1)x^{-2}$ |
| $y = \sin x$ | $y' = \cos x$ |
| $y = \cos x$ | $y' = -\sin x$ |
| $y = \operatorname{tg} x$ | $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $y = \operatorname{ctg} x$ | $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $y = a^x$ | $y' = a^x \ln a$ |
| $y = e^x$ | $y' = e^x$ |
| $y = \log_a x$ | $y' = \frac{1}{x}\log_a e$ |
| $y = \ln x$ | $y' = 1/x$ |

Докажем некоторые из этих формул, пользуясь определением производной (6.22), (6.23).

Вычислим производную функции $y = x^n$. Для этого рассмотрим приращение функции $\delta y$ в (6.22), пользуясь формулой бинома Ньютона. Тогда

$$\delta y = (x+\delta x)^n - x^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}\delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\delta x^2 + \ldots + \delta x^n - x^n.$$

Следуя (6.22) и (6.23), определяем отношение dy/dx и предел этого отношения

$$\lim \delta y/\delta x = nx^{n-1} \text{ при } \delta x \to 0.$$

Продолжим иллюстрацию понятия производной на примере формулы дифференцирования синусоидальной функции. Пусть f(x) = sin x. Тогда соотношения (6.22), (6.23) при условии представления бесконечно малых приращений величиной $1/n$ при $n \to \infty$ примут вид

$$\frac{df}{dx} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x + 1/n) - \sin x}{1/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x[\cos 1/n] + \cos x[\sin 1/n] - \sin x}{1/n} =$$

$$= \cos x \lim_{n\to\infty} \frac{\sin 1/n}{1/n} = \cos x.$$

Предел в последней строке формулы равен единице в силу замечательного предела (6.19). Как видно из приведенных вычислений, мы воспользовались известной формулой для синуса суммы двух аргументов, а также теоремой о пределе суммы, равной сумме пределов, и непосредственными вычислениями.

Для вывода основных формул дифференцирования необходимо:

- воспользоваться определением производной, например, в форме соотношений (6.22), (6.23);
- выполнить элементарные преобразования функций в соответствии с правилами элементарной математики;
- использовать необходимые замечательные пределы.

Попробуем вычислить производные более сложных функций, полученных путем алгебраических операций над исходными функциями. Задачу вычисления производных от таких функций рассмотрим в следующей постановке. Пусть заданы функции

$$s(x) = u(x) + v(x), \quad f(x) = u(x)v(x), \quad g(x) = \frac{u(x)}{v(x)},$$

где u(x), v(x) дифференцируемы. Найти представления производных указанных функций с помощью функций u(x), v(x) и их производных.

Пользуясь теоремой 5 п. 6.2, нетрудно показать, что для функции s(x) производная равна сумме двух функций, образующих ее. Для второй функции в соответствии с изложенной ранее методикой напишем определение производной и добавим и вычтем в числителе слагаемое, необходимое для представления производной с использованием производных функций u(x) и v(x). Далее с помощью теорем 5, 6, 7 теории пределов (см. п. 6.2) получаем очевидную цепочку соотношений (6.22), (6.23):

$$\frac{df}{dx} = \lim_{a\to 0} \frac{u(x+a)v(x+a) - u(x)v(x) \pm u(x+a)v(x)}{a} =$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{u(x+a)v(x+a) - u(x+a)v(x)}{a} + \lim_{a\to 0} \frac{u(x+a)v(x) - u(x)v(x)}{a} =$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{u(x+a)\left[v(x+a) - v(x)\right]}{a} + \lim_{a\to 0} \frac{\left[u(x+a) - u(x)\right]v(x)}{a} =$$

$$= u(x)dv/dx + v(x)du/dx.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\dfrac{du}{dx}v - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Как следует из примеров табл. 6.2, производные рассматриваемых функций также являются функциями. Для этих новых функций (соответствующих производным) можно ввести понятия производных высших порядков. Тогда производная второго порядка будет иметь вид

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right).$$

Аналогично определится производная третьего и n-го порядков:

$$\frac{d^3f}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right),\quad \frac{d^nf}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right).$$

Производные высших порядков (как и производные первого порядка) являются характеристиками функций в точке, т.е. дифференцируемость является локальным свойством и зависит от точки, в которой вычисляется производная.

Перейдем к важному понятию дифференциала функции. Если воспользоваться формулой конечных приращений, связывающей отношение конечных приращений функции с производной, то можно записать, что

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{dy}{dx}+a(x),$$

где $a(x)\to 0$ при $\delta x\to 0$. Умножив последнее равенство на $\delta x$, получим

$$\delta y=\frac{dy}{dx}\delta x+a(x)\delta x.$$

Поскольку в общем случае производная в последнем равенстве не равна нулю, то при постоянном значении x и переменной $\delta x\to 0$ первое слагаемое в этом равенстве есть бесконечно малая величина первого порядка относительно $\delta x$. Поэтому приращение функции состоит из двух слагаемых: главной части приращения, линейной относительно $\delta x$, называемой дифференциалом функции, обозначаемой dy или df(x), и функции $a(x)\delta x$. Таким образом, можно дать следующее определение дифференциала.

***Определение.*** Если f(x) дифференцируема в точке x, то произведение производной df(x)/dx на приращение $\delta x$ аргумента называется дифференциалом функции и обозначается

$$dy=\frac{df}{dx}\delta x. \tag{6.24}$$

В заключение рассмотрим разложение функций в степенные ряды. Общий метод разложения функций в степенные ряды был открыт Лейбницем, хотя до настоящего времени этот результат в математике носит имя Тейлора (1685–1731). Построение степенного ряда возможно в следующей постановке. Пусть имеется $(n + 1)$ раз диференцируемая функция $y = f(x)$ на промежутке, содержащем точку а. Требуется найти полином $P_n(x)$ типа (6.4) степени не выше n, значения которого в точке $x = a$ равны значениям этой функции, и кроме того его производные совпадают со значениями функции в точке а до n-го порядка. Будем искать полином в виде разложения по степеням $(x - a)$ с неизвестными коэффициентами $c_i$. Тогда

$$P_n(x) = c_0 = c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n, \quad (6.25)$$

причем для отыскания коэффициентов $c_i$ воспользуемся условиями, вытекающими из постановки задачи:

$$P(a) = f(a), \quad \frac{d^i P_n(a)}{dx^i} = \frac{d^i f(a)}{dx^i}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Данное разложение широко используется для представления функций в математическом анализе и теории дифференциальных уравнений.

### 6.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Операция интегрирования является обратной для операции дифференцирования, и в этом смысле можно рассматривать эти операции как парные. Различают два основных типа интегралов: неопределенный и определенный интегралы.

Под неопределенным интегралом от функции понимается совокупность первообразных, а определенный интеграл представляет собой предел сумм Дарбу. В дальнейшем мы установим взаимосвязь между определенным и неопределенным интегралами. Вариант взаимных связей между понятиями теории интеграла схематически отражен на рис. 6.4.

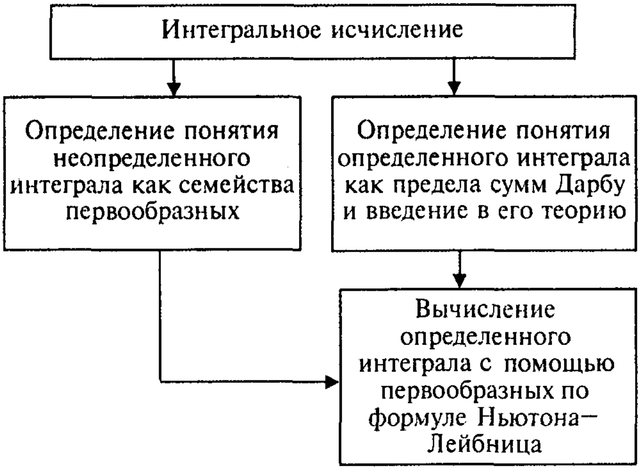



Рис. 6.4

Из приведенной схемы видно, что между элементами теории интеграла существует связь с помощью формулы Ньютона—Лейбница.

### 6.4.1. Неопределенный интеграл

Рассмотрим обратную задачу для задачи дифференцирования, а именно: будем искать первообразные функции (или просто — первообразные), т. е. такие функции, которые при дифференцировании дают заданные функции. Другими словами: пусть дана функция f(x) и требуется найти функцию F(x), такую, что

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x). \tag{6.26}$$

***Определение.*** Функция F(x) называется п е р в о о б р а з н о й от функции f(x) на отрезке [a,b], если во всех точках этого отрезка выполнено условие (6.26).

**П р и м е р.** Найдем первообразную от функции $x^3$. Очевидно, что эта функция степенная, общий вид которой $f(x) = x^n$, а производная ее равна: $nx^{n-1}$. Сравнивая последнюю функцию с функцией $x^3$, получаем: $n - 1 = 3$. Следовательно, $n = 4$, а поэтому первообразная равна: $F(x) = x^4/4$. Мы получили результат, правильность которого легко устанавливается непосредственной проверкой либо с помощью данных табл. 6.2.

Нетрудно заметить, что в последнем примере наряду с найденной первообразной можно указать целое их семейство, если добавить к функции F(x) постоянное слагаемое. В результате мы пришли к следующему определению.

***Определение.*** Если функция F(x) является первообразной для функции f(x), то функция f(x) + C называется неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначается символом

$$If(x)dx = F(x) + C, \qquad (6.27)$$

где C — постоянное число, если $dF(x)/dx = f(x)$.

При этом функция f(x) называется подынтегральной функцией, ее произведение на дифференциал dx называется подынтегральным выражением, а символ I — знаком интеграла. Таким образом, неопределенный интеграл представляет собой семейство функций, определенных правой частью равенства (6.27).

Интегралы от некоторых элементарных функций сведены в табл. 6.3.

Проверка данных табл.6.3 может быть выполнена непосредственно путем дифференцирования первообразных в соответствии с определением (6.22), (6.23) и данными табл. 6.2.

Таблица 6.3

| Интеграл | Первообразная |
|---|---|
| $\int x^a dx$ | $\frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$ |
| $\int \frac{dx}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert + C$ |
| $\int \sin x dx$ | $-\cos x + C$ |
| $\int \cos x dx$ | $\sin x + C$ |
| $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ | $\mathrm{tg} x + C$ |
| $\int e^x dx$ | $e^x + C$ |

### 6.4.2. Определенный интеграл

Необходимость введения определенного интеграла продиктована первыми попытками нахождения площадей, ограниченных кривыми, длин дуг, объемов, работы, скоростей, пути и др. Введение определенного интеграла рассмотрим на примере вычисления площади между кривой, заданной на интервале [a, b] функцией f(x), горизонтальной осью Ox, параллельными прямыми вида: x = a и x = b. Вариант описанной фигуры представлен на рис. 6.5 и использует кусочно-линейную и кусочно-постоянную аппроксимацию исходной функции f(x).

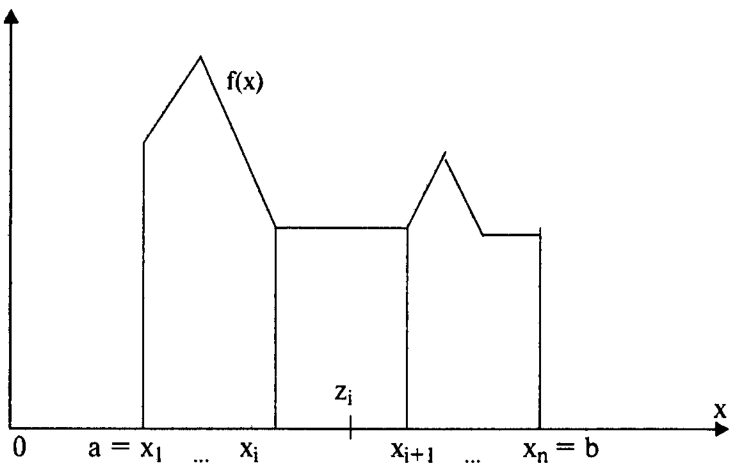



Рис. 6.5

Для вычисления площади разделим интервал [a, b] на части (подынтервалы) и в каждой из частей выберем точки $z_i$, принадлежащие подынтервалам i). Вычислим значения функции в этих точках, равные $f(z_i)$, и приближенное значение площади в виде сумм Дарбу (как допредельное значение интеграла):

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i+1}). \tag{6.28}$$

По сути равенство (6.28) определяет сумму площадей трапеций, построенных на основе фигуры, площадь которой необходимо вычислить. Очевидно, что с уменьшением расстояний между точками x и увеличением числа слагаемых путем устремления числа n к бесконечности можно получить более точное значение площади. Если найти предел суммы (6.28) при стремлении $n \to \infty$, то получим определенный интеграл от функции f(x) на интервале [a, b].

***Определение.*** Если при любом разбиении интервала [a, b] на такие отрезки, что

$$\delta = \max_i \left[x_i - x_{i+1}\right] \to 0,$$

сумма (6.28) стремится к одному и тому же пределу, то функция f(x) является интегрируемой по Риману на интервале [a, b]:

$$\lim_{\delta \to 0} S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (6.29)$$

Интеграл (6.29) называется интегралом Римана, если интервал [a,b] конечен, f(x) ограничена на нем. Число точек разрыва функции конечно.

Можно также указать основные этапы введения определенного интеграла на основе аппроксимации интеграла ступенчатыми функциями. Представим эти этапы в алгоритмической форме:

Шаг 1. Разбиение интервала интегрирования на n равных подынтервалов длиной $\delta x_i$ и выбор совокупности значений аргумента $x_i$ внутри подынтервалов.

Шаг 2. Вычисление значений функции $f(x_i)$ и составление сумм, аппроксимирующих интеграл площадью ступенчатых функций

$$I \approx S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\delta x_i. \qquad (6.30)$$

Шаг 3. Вычисление интеграла как предельного значения суммы (6.30):

$$I = \lim_{\delta x_i \to 0} S. \qquad (6.31)$$

Рассмотрим пример вычислений в соответствии с приведенным алгоритмом.

**Пример.** Вычислить определенный интеграл, пользуясь приведенным выше определением

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

Шаг 1. Разделим интервал интегрирования [0,1] на n равных частей длиной 1/n и выберем значение аргумента на интервале, равное i/n.

Шаг 2. Вычислим значения интегрируемой функции $y = x^2$ в точках i/n и составим суммы типа (6.4.5)

$$I \approx S = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

В последнем равенстве сумма квадратов числа i представляется явным выражением, что позволяет вычислить допредельное значение интеграла.

Шаг 3. Вычислим предельное значение суммы, равное интегралу

$$I = \lim_{n \to \infty} S = 1/3.$$

Для вычисления определенного интеграла нет необходимости использовать его определение. Поэтому рассмотрим теорему, позволяющую вычислять определенный интеграл с применением неопределенного интеграла.

**Теорема.** Если F(x) — какая-либо первообразная от непрерывной функции f(x), то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b), \tag{6.32}$$

которая называется формулой Ньютона—Лейбница.

Проиллюстрируем вычисление интеграла, рассмотренного в предыдущем примере, по формуле Ньютона—Лейбница:

$$I = \int_a^b x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{1}{3}.$$

Как нетрудно заметить, вычисление определенного интеграла с помощью формулы (6.32) существенно упрощается. Именно поэтому формула Ньютона—Лейбница часто используется при вычислении определенных интегралов.

### 6.5. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СЕТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ И ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Классические методы дифференцирования и интегрирования могут применяться для аналитически заданных функций, удовлетворяющих условиям непрерывности или гладкости. На практике часто возникают проблемы построения аналогов дифференциального и интегрального исчисления для функций дискретного аргумента (сеточных функций). Такие проблемы возникали при обработке астрономической информации, связанной с измерением положений и скоростей планет. В настоящее время сеточные функции широко применяются при обработке информации в технике. Эти методы могут быть использованы в сфере гуманитарной и социально-экономической деятельности.

Пусть имеется семейство равноотстоящих узлов (точек на вещественной прямой):

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\quad x_k = x_0 + kh,\ h = (x_n - x_0)/n.$$

Сеточные функции на данном семействе узлов приведены в табл. 6.4.

Таблица 6.4

| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_k$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_0) = y_0$ | $f(x_1) = y_1$ | $f(x_2) = y_2$ | ... | $f(x_k) = y_k$ | ... | $f(x_n) = y_n$ |

Сеточные функции позволяют построить исчисление конечных и разделенных разностей, которые можно интерпретировать как аналог дифференциального исчисления. Конечные разности вводятся для равноотстоящих значений аргумента, а разделенные разности — для неравномерно расположенных аргументов. Можно иногда интерпретировать конечные и разделенные разности как допредельные соотношения для производных. Полезно иметь ввиду, что некоторые теоремы дифференциального исчисления имеют аналоги в теории конечных и разделенных разностей.

*Определение.* Конечной разностью первого порядка в точке $x_k$ называется разность

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k, \qquad (6.33а)$$

где $\Delta y_k$ — оператор вычисления конечных разностей.

По аналогии с высшими производными можно ввести понятия конечных разностей высших порядков.

*Определение.* Будем называть конечными разностями второго, третьего и S-го порядка следующие сеточные функции:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_k &= \Delta y_{k+1} - \Delta y_k, \\ \Delta^3 y_k &= \Delta^2 y_{k+1} - \Delta^2 y_k, \qquad (6.33б) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^s y_k &= \Delta^{s-1} y_{k+1} - \Delta^{s-1} y_k. \end{aligned}$$

Из соотношений (6.33б) следует, что конечные разности высшего порядка вводятся с помощью конечных разностей более низкого порядка. Вычисление конечных разностей удобно представлять в форме таблицы.

**Пример.** Для функции $y = 2x^3 - x + 3x - 1$ построить таблицу конечных разностей. Сначала построим таблицу сеточных функций, аналогичную табл. 6.4. Таблица конечных разностей, вычисленных по (6.33б) примет вид

| k | $x_k$ | $y_k$ | $\Delta y_k$ | $\Delta^2 y_k$ | $\Delta^3 y_k$ | $\Delta^4 y_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | –1 | 4 | 10 | 12 | 0 |
| 1 | 1 | 3 | 14 | 22 | 12 | |
| 2 | 2 | 17 | 36 | 34 | | |
| 3 | 3 | 53 | 70 | | | |
| 4 | 4 | 123 | | | | |

Взаимосвязи между конечными разностями и сеточными функциями можно установить, пользуясь приведенными выше определениями. Запишем очевидные соотношения в силу (6.33а), (6.33б):

$$\begin{gathered}\Delta y_0 = y_1 - y_0,\\ \Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = \Delta(y_1 - y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = \\ = y_2 - y_1 - y_1 + y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,\\ \Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0,\end{gathered} \tag{6.34}$$

которые можно рассматривать в качестве базы математической индукции. В итоге можно сформулировать следующий результат.

Утверждение. Пусть $n_y$ и $y$ — соответственно конечные разности n-го порядка и сеточные функции f(x) на равномерной сетке. Тогда имеет место равенство

$$\Delta^n y_0 = y_n - \frac{n}{1!} y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} y_{n-2} - \ldots + (-1)^n y_0. \tag{6.35}$$

Доказательство соотношения (6.35) можно получить по индукции.

Установим «обратные связи» — связи между сеточными функциями и конечными разностями, для чего рассмотрим очевидные соотношения, вытекающие из определения (6.33а):

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0,$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta (y_1 + \Delta y_0) = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0.$$

Продолжая рассмотрение $y_3, \ldots, y_n$, можно прийти к следующему утверждению.

Утверждение. Пусть $y_k$ и $\Delta^s y_0$ — соответственно сеточные функции на равномерной сетке и конечные разности порядка s в точке $x_0$. Тогда

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^n y_0. \tag{6.36}$$

Доказательство утверждения также проводится математической индукцией по параметру S.

Перейдем к определению разделенных разностей, исходя из того, что их можно рассматривать как аналоги производных для неравномерной сетки дискретных аргументов $x_k$.

***Определение.*** Пусть заданы неравномерно отстоящие узлы $\{x_k\}$ и соответствующие сеточные функции $\{f(x_k)\}$. Тогда разделенными разностями первого, второго и n-го порядка будем называть

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}, \qquad (6.37)$$

.....................................................................

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_1, \ldots x_n) - f(x_0, \ldots x_{n-1})}{x_n - x_0}.$$

Примеры вычисления разделенных разностей для равномерной и неравномерной сеток приведены в следующей таблице.

| k | $x_k$ | $f(x_k)$ | $f(x_0, x_1)$ | $f(x_0, x_1, \ldots, x_2)$ | $f(x_0, \ldots, x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0<br>1<br>2<br>3<br>4 | 0<br>1<br>2<br>3<br>4 | −1<br>3<br>17<br>53<br>123 | 4<br>14<br>36<br>70 | 5<br>11<br>17 | 2<br>2 |
| 0<br>1<br>2 | −1<br>1<br>2<br>4 | −7<br>3<br>17<br>123 | 5<br>14<br>53 | 3<br>13 | 2 |

Рассмотренные понятия можно использовать для приближенной оценки скоростей изменения процессов, имеющих различный содержательный смысл.

Вычисление интегралов методами математического анализа не всегда возможно в связи с отсутствием в ряде случаев первообразных. Кроме того, интегрируемая функция бывает достаточно сложна, и для сокращения объемов вычислений при интегрировании необходимо ее аппроксимировать другой функцией. Задача численного интегрирования обычно решается в следующей постановке. Пусть задан конечный или бесконечный отрезок числовой оси и необходимо вычислить интеграл от некоторой функции F(X), используя заданную аппроксимацию интегрируемой функции. Будем вычислять интеграл, аппроксимируя функцию F(X) интерполяционным полиномом. Последнее связано с тем, что при численном интегрировании функция заменяется другой, близкой к исходной в некотором смысле. В данном случае близость определяется совпадением интегрируемой функции и интерполяционного полинома в заданном числе узлов интерполирования. Правила численного интегрирования используют также тот факт, что аппроксимирующая функция легко вычисляется и, кроме того, интеграл от нее вычисляется точно. Применив описанную идею вычисления интеграла, можно получить его приближенное значение путем вычисления значений функции в n точках интервала [a, b]. Если функция F(x) имеет особенности, то обычно они выделяются при помощи ее разложения на два сомножителя:

$$F(x) = p(x)f(x).$$

Обычно p(x) такого же класса, что и F(x), а f(x) достаточно гладкая.

В результате задача численного интегрирования формулируется следующим образом. Пусть задан интеграл

$$\int_b^a F(x)\,dx = \int_a^b p(x)f(x)\,dx, \qquad (6.38)$$

где F(x) = p(x)f(x) представлена описанным выше разложением, причем p(x) — весовая функция. Функция f(x) заменяется интерполяционным полиномом n-й степени

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{w(x)}{(x - x_k)\,w'(x_k)} f(x_k), \qquad (6.39)$$

который совпадает с функцией f(x) в узлах $x_k$:

$$P_n(x_k) = f(x_k).$$

В формуле (6.39) w(x) — полином степени n, определяемый равенством

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_k)\ldots(x - x_n),$$

а $w'(x) = dw/dx$ — первая производная этого полинома.

Требуется построить квадратурную формулу на основе (6.38) и (6.39) так, чтобы

$$\int_a^b F(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k), \qquad (6.40)$$

где квадратурные коэффициенты

$$A_k = \int_a^b p(x)\frac{w(x)}{(x - x_k)w'(x_k)}dx.$$

Доказательство формулы (6.40) проводится подстановкой интерполяционного полинома (6.39) в (6.38), переменой местами операций интегрирования и суммирования. В результате после выполнения указанных преобразований можно прийти к квадратурной формуле (6.40). Из приведенной постановки задачи и ее решения следует, что на основе интерполяционных полиномов задача численного интегрирования сводится к вычислению квадратурной суммы. Квадратурные коэффициенты содержат операции собственно интегрирования, вычисляемые предварительно. Таким образом, при построении квадратурных формул необходимо определить $(2n + 1)$ параметров: количество узлов, узлы квадратурной формулы и квадратурные коэффициенты. Естественно, что, выбирая эти параметры определенным образом, можно менять точность численного интегрирования. Необходимо заметить, что квадратурная формула (6.40) с n узлами имеет степень точности $(n - 1)$, т. е. она точна для всех алгебраических полиномов степени $(n - 1)$ и найдется хотя бы один алгебраический полином степени n, для которого эта формула будет неточна.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Болгарский Б. В.* Очерки по истории математики. Минск.: «Вышэйшая школа», 1974.

*Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. М.: Наука, 1979.

*Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление, т.1. М.: Наука, 1964.

Справочное пособие по математическому анализу / Под ред. И. И. Ляшко. Киев: Наукова думка. Ч. 1, 1978; Ч. 2, 1979.

*Глава 7*

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальные и разностные уравнения предназначены для описания эволюционирующих (развивающихся во времени или в пространстве) процессов. Эта группа математических моделей позволяет количественно и качественно анализировать процессы в различных областях экономики, менеджмента, гуманитарной деятельности, в частности анализировать устойчивость (неизменчивость) ситуаций, которые могут иметь место в реальных моделях.

## 7.1. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Линейные дифференциальные и разностные уравнения, позволяют дать качественную картину динамичного развития многих сторон общества, когда скорости процессов являются линейными функциями координат и внешних воздействий. Основные концептуальные идеи теории и их взаимосвязь иллюстрируются на рис. 7.1.

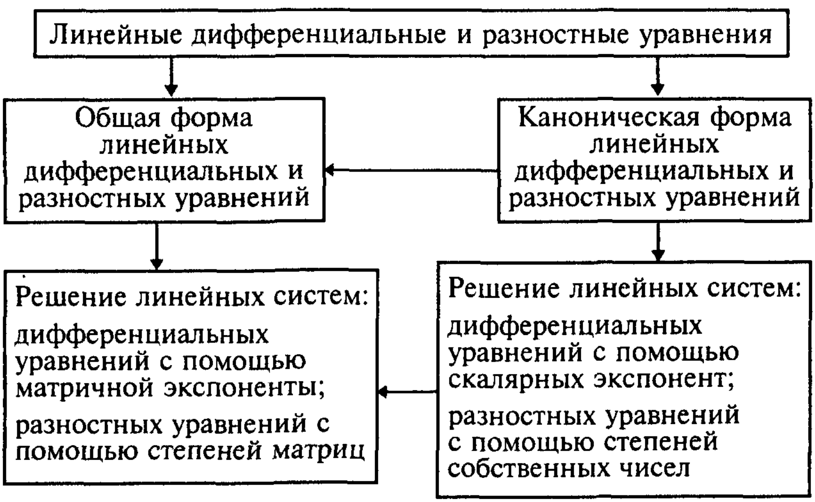



Рис. 7.1

Как следует из рис. 7.1, существуют две взаимосвязанные формы линейных дифференциальных и разностных уравнений: общая и каноническая. Канонические формы позволяют при решении уравнений заменить вычисление матричных экспонент вычислением совокупности скалярных экспонент, что создает основу для качественного анализа и сокращает объем вычислений. Изучение разностных уравнений на основе их канонических форм позволяет упростить процедуру решения за счет перехода от вычислений степеней матриц к вычислению степеней собственных чисел.

### 7.1.1. Решение линейных дифференциальных уравнений

Определить дифференциальное уравнение можно естественным образом. Предположим, что скорость v(t) движения некоторого объекта пропорциональна его положению x(t). Отразим аналитически (в виде формулы) этот факт. Тогда в точном соответствии со сказанным мы должны записать равенство

$$v(t) = ax(t),$$

где a — коэффициент пропорциональности.

Как известно из физики и математического анализа, скорость — это первая производная положения x(t) (или другими словами — пути), что фиксируется соотношением

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

Объединяя два последних равенства, мы получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t),$$

описывающее изменение пути во времени (т. е. скорость) как функцию положения (или пути). Таким образом, дифференциальные уравнения связывают производные некоторых переменных и сами переменные.

Приведенный простейший пример дифференциального уравнения имеет многочисленные обобщения. Одним из таких обобщений является учет большого количества взаимосвязей между несколькими переменными. Мы уже рассматривали подобные взаимосвязи, определенные системами алгебраических уравнений. Дифференциальные уравнения позволяют обобщить характер взаимосвязей за счет описания эволюции (динамики) системы. Как и ранее, для компактного изложения основных идей будем использовать элементы теории матриц, а точнее, их жордановы нормальные формы. Это позволит свести вычисление матричной экспоненты к вычислению совокупности скалярных экспонент с помощью ЭВМ. Вычислительная техника дает возможность выполнить вычисления без особых интеллектуальных затрат и сосредоточить усилия специалистов на проблемах динамики в конкретной предметной области.

Пусть исследуемые объекты анализа описываются линейными системами дифференциальных уравнений в общей форме

$$\frac{dx}{dt} = A\,x + B\,u,\; x(0) = x^0, \tag{7.1}$$

где $x = x(t)$ — скалярная или векторная функция аргумента $t$, характеризующая исследуемые и развивающиеся во времени явления; $dx/dt$ — производная $x = x(t)$ по времени $t$, такая, что

$$dx/dt = (dx_1/dt, \ldots, dx_n\,/dt)^T; \tag{7.2}$$

$x^0 = x(0)$ — вектор начальных условий, т. е. условий, которым должно удовлетворять решение в начальный момент времени $t = 0$; $A$ и $B$ — матрицы размерностей, позволяющих корректно выполнить умножение матрицы на векторы в (7.1).

Для системы (7.1) характерно, что производная вектора $x$ по времени является линейной функцией вектора $x$ и дополнительной функции $u = u(t)$, которая может иметь смысл управления (направленного воздействия) или возмущения (мешающего фактора). Очевидно, что таких факторов может быть достаточно много, и их количество должен определить исследователь. В этом, собственно, и заключается проблема построения адекватной модели конкретного явления или процесса. По сути, соотношения (7.1) определяют задачу Коши.

***Определение.*** Будем называть задачей Коши для системы линейных дифференциальных уравнений (7.1) отыскание такого набора скалярных функций $x_i(t)$ аргумента $t$, которые образуют вектор $x(t)$ вида (7.2), удовлетворяют системе и начальным условиям.

Известно, что решение системы (7.1) определяется формулой Коши

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-r)} B\,u(r)dr, \tag{7.3}$$

где матричная экспонента

$$e^{At} = E + At + A^2 t^2/2! + A^3t^3/3! + \ldots + A^k t^k/k! + \ldots \tag{7.4}$$

представлена матричным рядом, который построен по аналогии с рядом для скалярной экспоненты.

Как следует из формулы Коши (7.3), решение линейной системы строится в виде суммы двух слагаемых, причем первое слагаемое определяет решение задачи Коши для однородной системы, соответствующей (7.1):

$$\frac{dx}{dt} = Ax\,,\ x(0) = x^0. \tag{7.5а}$$

Решение задачи Коши для однородной системы может быть получено методом гипотезы и методом принципа.

Метод гипотезы предполагает, что решение строится на основе матричной экспоненты и имеет вид, совпадающий с первым слагаемым формулы Коши (7.3):

$$x_0(t) = e^{At}\,x^0. \tag{7.5б}$$

Проверка решения осуществляется его подстановкой в уравнение (7.5а):

$$\underbrace{dx_0(t)/dt = \frac{d}{dt}\left(e^{At}\ x^0\right)}_{\text{Правая часть}} = \underbrace{Ae^{At}x^0}_{\text{Левая часть}}.$$

Метод принципа позволяет отыскивать решение с помощью следующего алгоритма:

Шаг 1. Представление решения в виде ряда Тейлора (см. формулу (6.25))

$$x(t) = x(0) + \frac{dx(0)}{dt}t + \frac{d^2x(0)}{dt^2}\frac{t}{2!} + \ldots$$

Шаг 2. Вычисление производных в ряду Тейлора «в силу исходной дифференциальной системы» (7.5а) при $t = 0$:

$$dx(0)/dt = Ax(0), \quad d^2x(0)/dt^2 = A^2x(0), \ldots$$

Шаг 3. Подстановка последних равенств для производных в формулу, полученную на шаге 1, приводящая к соотношению для матричной экспоненты вида (7.4).

Второе слагаемое в (7.3) характеризует влияние на процесс управляющих или возмущающих факторов, определенных вектором u(t). Заметим, что поскольку управление — это целенаправленное воздействие на явление или исследуемый процесс, то, выбирая его в соответствии с поставленными целями, можно активно влиять на протекание процесса. Проблемы выбора соответствующих управлений исследуются в теории управления. В данной книге мы сформулируем проблему анализа процессов при заданных векторах u(t).

Для изучения концептуальных вопросов следует сформулировать метод решения системы (7.1), основанный на сведении решения рассматриваемой системы к решению совокупности скалярных линейных уравнений. С этой целью на первом этапе с помощью линейного преобразования координат $x = Sz$ перейдем к новому базису пространства состояний (в котором матрица системы — жорданова). В новых координатах система (7.1) примет каноническую форму

$$\frac{dz}{dt} = Jz + S^{-1}Bu, \ \det S \neq 0, \tag{7.6}$$

$$z(0) = S^{-1}x(0),$$

где $J = S^{-1}AS$ — жорданова форма матрицы A.

Преобразующая матрица S определяется из матричного уравнения

$$SJ = AS \tag{7.7}$$

с помощью вычислительного алгоритма для ЭВМ. Очевидно, что в матричном уравнении (7.7) неизвестными являются матрицы S и J. Для вычисления матрицы J существуют регулярные алгоритмы, использующие понятия собственного вектора и собственного числа.

Поясним эти понятия. Известно, что при умножении матрицы на вектор получается новый вектор, который отличается от исходного поворотом и длиной. Однако существуют такие векторы c, которые при умножении на матрицу A не изменяют своего положения в пространстве (с точностью до направления), а изменяют лишь длину. Для отыскания таких векторов воспользуемся эквивалентными условиями

$$Ac = kc, \quad (A - kE)\,c = 0,$$

которые естественно следуют из сказанного выше (k — коэффициент пропорциональности, E — единичная матрица).

Из алгебры известно, что условие существования ненулевых решений последней однородной системы сводится к равенству нулю ее определителя

$$\det(A - kE) = 0.$$

Равенство нулю определителя задает алгебраическое уравнение относительно $k_i$, которые называются собственными числами. В развернутом виде последнее уравнение соответствует алгебраическому уравнению типа (6.4), которое в общем случае решается численными методами.

Векторы $c_i$, определяемые из условий

$$(A - k_i E)\,c_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

называются собственными векторами матрицы A.

Для случая некратных собственных чисел матрицы A и ей подобной матрицы J (собственные числа подобных матриц совпадают) рассмотрим алгоритм приведения матрицы к жордановой форме и решения линейных дифференциальных систем.

Шаг 1. Вычисление собственных чисел матрицы A, которые являются корнями характеристического уравнения этой матрицы:

$$W(x) = \det(A - xE) =$$

$$= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0. \qquad (7.8)$$

Формирование характеристического полинома W(x) выполняется либо по правилам, изученным ранее, либо с помощью вычислительных алгоритмов.

Шаг 2. Пусть $J_1, J_2, \ldots, J_n$ — некратные (различные) собственные числа подобных матриц A и J, вычисленные на шаге 1. Тогда формируется жорданова матрица J, имеющая диагональный вид

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & & & \\ & J_2 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & J_n \end{bmatrix}.$$

Шаг 3. Вычисление преобразующей матрицы S: решение уравнения (7.7), в котором матрица A определена в исходном уравнении (7.1), а матрица J задана равенством (7.9).

Шаг 4. Решение системы (7.1) по формуле

$$x(t) = Se^{Jt}\ S^{-1}x(0) + \int_0^t Se^{J(t-r)}S^{-1}Bu(r)dr, \qquad (7.9а)$$

где «диагональная» матричная экспонента является решением однородной системы, соответствующей (7.6)

$$e^{Jt} = \mathrm{diag}\left\{e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \ldots, e^{J_n t}\right\}. \qquad (7.9б)$$

Эта матричная экспонента получена путем вычисления экспонент от скалярного аргумента. Это иллюстрирует факт сведения решения линейной дифференциальной системы к решению совокупности скалярных уравнений, а тем самым — достоинства применения жордановых форм матриц.

Шаг 5. Качественный или количественный анализ исследуемых процессов с целью рассмотрения, например, динамики социальных групп, экономической динамики и других явлений.

Таким образом, для решения исходной системы необходимо перейти к системе с жордановой формой, для которой вычисление матричной экспоненты сводится к вычислению совокупности экспонент скалярного аргумента. После этого формируется решение исходной системы с учетом взаимнооднозначных связей между координатами обоих систем. Это обстоятельство иллюстрирует полезность и эффективность подобных преобразований.

### 7.1.2. Решение линейных разностных уравнений

Линейные разностные уравнения являются аналогами линейных дифференциальных уравнений, описывающими эволюцию систем в дискретном времени. Важность получения дискретных аналогов для дифференциальных уравнений объясняется тем, что многие процессы характеризуются дискретным характером их протекания во времени. Однако целесообразно отметить, что теория линейных разностных уравнений достаточно близка к теории линейных дифференциальных уравнений. В этом смысле мы имеем пример реализации принципа единства теории различных математических моделей.

***Определение.*** Будем называть разностными такие уравнения, которые связывают значения функций дискретного аргумента, определенные для моментов времени t и t + i, i — целое.

Необходимо пояснить термин «разностные». Действительно, разностные уравнения являются дискретным аналогом дифференциальных уравнений. Однако аналог производной — первая разность $\sigma x_t$ (функции аргумента $x_t$) определяется соотношением

$$\sigma x_t = x_{t+1} - x_t, \tag{7.10}$$

которое устанавливает однозначную связь между первой разностью и значениями функции дискретного аргумента t. Поэтому разностные уравнения связывают значения векторных сеточных функций $x_t$, которые обобщают скалярные сеточные функции, введенные в п. 6.5.

По аналогии с линейными дифференциальными уравнениями определим линейные разностные уравнения как уравнения вида

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \quad x_0 = x^0, \tag{7.11}$$

где $x_{t+1}$ и $x_t$ — значения функций дискретного аргумента, а определения остальных параметров совпадают с их определением в системе (7.1).

Решение линейных разностных уравнений (7.11) может быть получено с помощью дискретного аналога формулы Коши:

$$x_t = A^t x^0 + \sum_{h=0}^{t-1} A^{t-h+1} Bu_h. \tag{7.12}$$

Продолжая использовать общность методики решения дифференциальных и разностных уравнений (7.1) и (7.11), введем новые координаты

$$x_t = Sz_t,$$

в которых уравнение (7.11) будет иметь вид

$$z_{t+1} = Jz_t + S^{-1}Bu_t. \qquad (7.13)$$

Далее метод решения системы (7.13) полностью определяется алгоритмом, приведенным в п. 7.1, с учетом того, что необходимо использовать формулу Коши для разностных уравнений вида (7.12).

Установление качественного единства методов решения линейных дифференциальных и разностных уравнений является иллюстрацией общности при описании процессов, имеющих линейную зависимость скорости или будущего от текущих значений координат. Линейные разностные уравнения широко используются при описании эволюции различных классов процессов.

## 7.2. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Более широкие классы явлений описываются нелинейными математическими моделями эволюционизирующих во времени систем. Нелинейные модели могут представляться кусочно-линейными дифференциальными уравнениями. Этот класс уравнений строится с помощью кусочно-линейных функций.

Кусочно-линейные системы характеризуются тем, что на определенных интервалах изменения переменных эти системы адекватны семейству линейных систем, что позволяет получать решения кусочно-линейных систем сопряжением решений семейства линейных систем.

Кусочно-линейные функции представляются канонической формой

$$\Phi(x) = a + \alpha_0 x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left| x - x_i \right|, \qquad (7.14)$$

которая позволяет определить кусочно-линейные дифференциальные и разностные уравнения. В ней $a, \alpha_0, \alpha_i, x_i$ — параметры.

*Кусочно-линейные дифференциальные уравнения имеют вид*

$$\frac{dx}{dt} = A\Phi(x) + Bu, \quad x(0) = x^0, \tag{7.15}$$

где $x = x(t)$ и $u = u(t)$ — векторы, а A и B — матрицы соответствующих размерностей. В системе (7.15) вектор-функция

$$\Phi(x) = [\Phi(x_1), ..., \Phi(x_j), ..., \Phi(x_n)]^T$$

имеет скалярные координатные функции, определенные равенством (7.14). В уравнениях (7.15) вектор производной процесса является кусочно-линейной функцией вектора $x(t)$. Кусочно-линейные дифференциальные системы могут быть определены различным образом. Для решения (7.15) можно использовать сопряжения решений линейных систем, локально адекватных (7.15) (см. п. 7.1).

Аналогично формулируются канонические формы кусочно-линейных разностных уравнений. Данный класс систем описывает процессы или явления в дискретном времени и связывает будущие значения переменных с предшествующими значениями переменных в виде рекуррентных соотношений вида

$$x_{t+1} = A\Phi(x_t) + Bu_t, \; x_0 = x^0, \tag{7.16}$$

где векторы $x_{t+1}$ и $x_t$ — «новое» (в дискретный момент времени $t + 1$) и предшествующее (в момент времени $t$) значения процесса или явления. Матрицы A и B, как и в системе уравнений (7.11), имеют соответствующие размерности. Вектор $u_t$ — управляющее или возмущающее воздействие на процесс.

### 7.3. УСТОЙЧИВОСТЬ И СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЙ

*Устойчивость* — одно из важных качественных свойств явлений и процессов. С философской точки зрения парной категорией для устойчивости является изменчивость.

Существует большое количество определений устойчивости для дифференциальных систем. Мы будем изучать классическое понятие устойчивости по А. М. Ляпунову, которое характеризует степень «изменчивости» решений дифференциального уравнения, определяемую степенью «изменчивости» начальных условий. Данное определение характерно для явлений, происходящих в физике, технике и других естественно существующих и искусственно созданных системах.

***Определение.*** Решение $\bar{x}(t, \bar{x}_{01})$ систем (7.1) устойчиво по Ляпунову, если для любого $r > 0$ существует $\sigma > 0$ такое, что

$$\left\|\bar{x}(t, \bar{x}_{01}) - x(t, \bar{x}_{02})\right\| < \sigma \quad \text{для всех } t > t^*,$$

$$\text{при } \left\|\bar{x}_{01} - \bar{x}_{02}\right\| < r.$$

Символ $\|z\|$ обозначает норму (длину) вектора, определенную, например, в пространстве Евклида

$$\|z\|^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2.$$

По сути, мы рассмотрели степень «неизменчивости» решений на величину $\sigma$ на конечном интервале времени при изменении начальных данных на величину не более $r$. Однако А. М. Ляпуновым также изучалось свойство устойчивости при рассмотрении процессов на бесконечном интервале времени. Так появилось понятие асимптотической устойчивости.

***Определение.*** Решение $x(t)$ системы асимптотически устойчиво, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того,

$$\left\|\bar{x}(t, \bar{x}_{01}) - \bar{x}(t, \bar{x}_{02})\right\| \to 0, \quad t \to \infty.$$

Для разностных систем аналогом понятия устойчивости является понятие сходимости. Определение сходимости дается аналогично определению устойчивости с заменой функций непрерывного аргумента на функции дискретного аргумента.

Для исследования устойчивости решений А. М. Ляпунов определил уравнения невозмущенного движения, которым удовлетворяет решение $x(t,x(0))$, и уравнения возмущенного движения, которые описывают поведение отклонений вида

$$x(t) = \bar{x}(t, \bar{x}(0)) - x(t, x(0)) = \bar{x} - x.$$

Выполнив переход к уравнениям возмущенного движения, получим:

для дифференциальных уравнений

$$x = \bar{x} - x = A(\bar{x} - x) = Ax$$

для разностных уравнений

$$x_{t+1} = \bar{x}_{t+1} - x_{t+1} =$$

$$= A(\bar{x}_t - x_t) = Ax_t.$$

Из последних уравнений видно, что управления возмущенного движения для линейных систем — однородные. Именно для уравнений данного класса формулируются условия устойчивости.

В качестве одного из примеров рассмотрим корневые критерии, позволяющие исследовать устойчивость, не решая самих уравнений. Корневые критерии определяют условия устойчивости линейных систем с помощью корней характеристических уравнений. Пусть дифференциальные и разностные уравнения имеют вид соответственно

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \Big\| \quad x_{t+1} = Ax_t + Bu_t. \tag{7.17}$$

Как и в п. 7.1, введем новые координаты

$$x = Sz, \qquad x_t = Sz_t,$$

позволяющие перейти к жордановой форме непрерывных и разностных систем:

$$\dot{z} = Jz + S^{-1}Bu \quad \Big\| \quad z_{t+1} = Jz_t + S^{-1}Bu_t. \tag{7.18}$$

Общее решение систем (7.18) для непрерывных и дискретных систем задается формулами Коши (7.9,а,б) и (7.12) соответственно. Как показано выше, уравнения возмущенного движения линейных систем — однородные. Поэтому для анализа асимптотической устойчивости необходимо изучить условия стремления к нулю следующих функций

| для дифференциальных систем | для разностных систем |
|---|---|
| $e^{J_1 t}, \ldots, e^{J_i t}, \ldots, e^{J_n t}$ | $J_1^t, \ldots, J_i^t, \ldots, J_n^t$ . |

Очевидно, что условия стремления этих функций к нулевым принимает вид:

| для дифференциальных систем | для разностных систем |
|---|---|
| $\operatorname{Re} J_i < 0,$ | $\lvert J_i \rvert < 1$ |

$$i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.19}$$

На основе изложенного можно сформулировать критерии устойчивости для дифференциальных уравнений и критерий сходимости (устойчивости) для разностных уравнений.

Утверждение (корневой критерий устойчивости и сходимости). Для того чтобы системы (7.17) были асимптотически устойчивы, необходимо и достаточно выполнение корневых условий (7.19).

Рассмотрим технологический аспект доказательств сходимости, акцентировав внимание на системность подхода к построению доказательств. Пусть имеется совокупность итерационных (или рекуррентных) процессов, соответствующих:

- процедурам, описывающим эволюцию процесса в дискретном времени;
- детерминированным процедурам численной оптимизации;
- стохастическим процедурам оптимизации;
- стохастическим процедурам адаптивного управления (метод стохастической аппроксимации).

Требуется сформулировать новые условия доказательства сходимости перечисленных выше итерационных процессов, используя комбинацию известных методов решения этой задачи.

На первом этапе построим системную матрицу возможных вариантов исследования сходимости в пространстве «задачи — методы анализа сходимости» (табл. 7.1). В таблице указаны тип задачи по анализу устойчивости и методы исследования.

Таблица 7.1

| Метод исследования / Тип задачи | Метод функций Ляпунова | Метод стационарности производной | Метод рядов | Метод вспомогательных рекуррентных неравенств |
|---|---|---|---|---|
| Анализ устойчивости эволюционных и разностных схем и уравнений | Достаточные условия | | | |
| Устойчивость детерминированных процедур | Достаточные условия | Ограничения на параметры | | |
| Устойчивость стохастических процедур | | | Ограничения на параметры | |
| Устойчивость стохастических процедур | | | | Ограничения на параметры |

В таблице указаны тип устойчивости или характер результата.

Для задачи 1 формулируются основные этапы получения результата: формирование уравнения стационарных состояний, введение функции Ляпунова типа нормы или квадратичной формы, вычисление первой разности функции Ляпунова, преобразование, приводящее к результату.

Задача 2, разрешаемая на основе квазистационарности (близости к нулю) первой разности, требует построения первой разности, представления ее оценки через производные, применения условий типа непрерывности, приводящих к доказательству условия существования минимума.

Задача 3, состоящая в формулировке условий сходимости случайных величин, включает: формирование уравнения отклонения текущей переменной от истинного значения, вычисление второго момента, суммирование семейства разностей последующих и предыдущих значений случайных вспомогательных величин, применение условий сходимости полученного ряда, из которых следуют ограничения на параметры процедуры уточнения оценок.

Задача 4, определяемая процедурой оценки параметров системы методом стохастической аппроксимации, разрешается определением уравнений отклонений параметров от истинных значений, формированием стохастической функции Ляпунова, преобразованием функции Ляпунова в силу уравнений подстройки и эволюционных уравнений объекта. Формулируются специальные условия сходимости в виде рекуррентных неравенств.

Приведенное описание известных методов позволяет выделить в них существенные элементы доказательств сходимости, которые могут комбинироваться на втором этапе с целью получения новых условий сходимости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Вазан М.* Стохастическая аппроксимация. М.: Мир, 1972.

*Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.

*Козлов В. Н.* Метод нелинейных операторов в автоматизированном проектировании динамических систем. Л.: ЛГУ им. А. А. Жданова, 1986.

*Козлов В. Н., Куприянов В. Е., Заборовский В. С.* Вычислительные методы синтеза САУ. Л.: ЛГУ им. А. А. Жданова, 1989.

*Козлов В. Н., Куприянов В. Е., Шашихин В. Н.* Вычислительная математика и теория управления. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1996.

# *Глава 8*
# СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Значение геометрии для математики и ее приложений трудно переоценить. Геометрия является еще одним примером построения теории на основе аксиоматического метода. Впервые понятие о многомерном евклидовом пространстве введено немецким математиком Германом Грассманом (1809—1877), который исследовал такие понятия, как точка, прямая, плоскость, расстояние между этими объектами. Грассман распространил эти понятия на многомерное пространство. Далее Грассмана продвинулся английский математик Уильям Роуан Гамильтон (1805—1865) — создатель теории векторов и векторного исчисления. Термин «вектор» также впервые введен Гамильтоном. В данной главе мы рассымотрим геометрию евклидовых пространств и геометрий неевклидовых пространств — Римана и Лобачевского.

## 8.1. ГЕОМЕТРИЯ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Обычное пространство, представление о котором является для нас естественным и привычным, называют пространством Евклида. Основные аксиомы евклидова пространства были сформулированы еще в древности. Развитие геометрических идей получило широкое распространение в 17 в., когда Р. Декарт ввел в математику переменные величины и стал оперировать с геометрическими величинами как с числами. Термин «аксиомы Евклида» требует постоянного уточнения. Система аксиом, на базе которой Евклид построил геометрию (изучаемую в наше время в средней школе), как установлено в прошлом веке, является неполной. К настоящему времени эта система аксиом существенно доработана, и имеется несколько систем аксиом евклидовой геометрии: аксиомы Д. Гильберта, Г. Вейля, А. Н. Колмогорова, И. фон Неймана и др. Мы будем следовать аксиоматике И. фон Неймана как наиболее близкой к известной нам из средней школы геометрической интерпретации фактов.

### 8.1.1. Линейные, аффинные и евклидовы пространства

Применение вещественных чисел в геометрии основано на взаимно однозначном соответствии между вещественными числами и точками прямой линии.

*Линейные пространства.* Для установления соответствия между векторами и числами следует задать на прямой начальную точку O и положительную ориентацию. Тогда каждой точке M на прямой ставится в соответствие вещественное число, обозначаемое $\overline{OM}$ . Абсолютная величина числа называется длиной отрезка OM. Знак числа положителен, если направление вектора совпадает с положительной ориентацией, в противном случае — знак отрицателен. Ориентированные отрезки можно рассматривать не только на прямой, но и на плоскости и в пространстве. Эти новые величины, характеризуемые значением и направлением, называются векторами.

Понятие вектора, введенное выше, может быть определено аксиоматически для векторов пространства любого числа измерений.

***Определение.*** Будем называть линейным пространством множество элементов произвольной природы, называемых векторами, в котором определены две операции — сложение и умножение на вещественное число, удовлетворяющие трем группам аксиом: аксиомам сложения, аксиомам умножения на число и аксиоме размерности.

*Аксиомы сложения.*

1. Каждым двум векторам a и b поставлен в соответствие вектор c = a + b, называемый суммой векторов a и b.
2. Сложение векторов коммутативно: a + b = b + a.
3. Сложение векторов ассоциативно:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

4. Существует нулевой вектор 0, такой, что для всякого вектора a справедливо a + 0 = a.

5. Для всякого вектора a имеется противоположный вектор −a такой, что: a + (−a) = 0.

Нетрудно видеть, что аксиомы 1—5 определяют на множестве векторов коммутативную группу (см. гл. 4).

*Аксиомы умножения на число.*

6. Каждому вектору a и каждому вещественному числу k поставлен в соответствие вектор b = ka, называемый произведением вектора на число.

7. Умножение вектора на 1 не изменяет вектора: 1a = a.

8. Умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения чисел: (k + l)a = ka + la.

9. Умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения векторов: k (a + b) = ka + kb.

10. Умножение вектора на число ассоциативно: k(la) = (kl)a.

*Аксиома размерности.* Рассмотрение начнем с определения.

***Определение.*** Векторы a, b, ..., c называются линейно зависимыми, если существует их линейная комбинация

$$r = ka + lb + \ldots + mc, \qquad (8.1)$$

равная нулю, причем не все числовые коэффициенты k, l, ..., m равны нулю.

Другими словами, в случае линейной зависимости векторов любой из них может быть представлен в виде линейной комбинации других векторов. Приведем пример линейно независимой системы векторов как наборов из n чисел:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, \ldots, 1). \end{aligned} \qquad (8.2)$$

Очевидно, что никакой из векторов в (8.2) не может быть представлен как линейная комбинация других, поскольку вектор $e_i$ имеет только i-ю ненулевую компоненту. Вместе с тем любой вектор пространства можно представить линейной комбинацией векторов $e_i$. Далее такие наборы мы будем называть базисом.

С помощью понятия (8.1) сформулируем аксиомы размерности.

11. Существует n линейно независимых векторов.

12. Всякая совокупность n + 1 векторов линейно зависима.

***Определение.*** Система векторов, удовлетворяющая аксиомам 1–12, называется n-мерным линейным пространством.

Рассмотрим примеры выполнения операций сложения над элементами введенного аксиоматически векторного пространства. При этом аксиомам векторного пространства удовлетворяют системы n вещественных чисел и их умножение на числа.

**Пример.** Пусть имеются два вектора x и y, заданные системами из n чисел:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y = (y_1, y_2, ..., y_n).$$

Над введенными векторами как элементами линейного пространства векторов можно выполнить операции сложения и умножения на число k:

$$z = x + y = (x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n),$$
$$kx = (kx_1, kx_2, ..., kx_n).$$

Если векторы $e_1, e_2,..., e_n$ линейно независимы, то всякий вектор пространства векторов с базисом $e_i$ можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n. \tag{8.3}$$

В (8.3) числа $x_1, ..., x_n$ называются координатами вектора x по отношению к векторам $e_1, e_2, ..., e_n$, называемым базисными векторами. В дальнейшем базисные системы, состоящие из векторов $e_i$, для краткости будем иногда обозначать $\{e_i\}$.

Весьма уместно заметить, что модель векторного пространства охватывает более широкий класс математических объектов, чем сами векторы. В частности, если за базис выбрать многочлены вида

$$e_1 = 1,\ \ e_2 = t,\ \ e_3 = t^2, ..., e_n = t_{n-1},$$

то элементами пространства будут многочлены степени не выше n – 1. В этом смысле векторное пространство является достаточно универсальной моделью, поскольку кроме рассмотренных базисов можно ввести другие и расширить спектр изучаемых математических моделей. В дальнейшем в этом параграфе для сокращения записей будем использовать в некоторых случаях обозначения А. Эйнштейна при суммировании: во всех выражениях, в которых индексы будут совпадать, предполагается суммирование по всей области изменения индексов.

Если в линейном пространстве использовать различные системы базисных векторов

$$\{e_i\} \text{ и } \{\bar{e}_i\}, \quad \bar{e}_i = \bar{k}_{ij} e_j, \quad \bar{k}_{ij} e_j \overset{\Delta}{=} \sum_{j=1}^{n} \bar{k}_{ij} e_j, \tag{8.4}$$

где применено правило суммирования по Эйнштейну, то $\bar{k}_{ij}$ — координаты векторов $\bar{e}_i$ по отношению к векторам $e_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

В этом случае для представления вектора x по двум базисным системам в силу (8.4) получим равенства

$$x = \bar{x}_i \bar{e}_i = \bar{x}_i \quad \bar{k}_{ij} e_j = x_i e_j, \tag{8.5}$$

где $x_i = \bar{x}_i \bar{k}_{ij}$ — координаты вектора x по базису $\{e_i\}$.

Числа $\bar{k}_{ij}$ и $k_{ij}$ образуют матрицы соответственно

$$K = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nn} \end{vmatrix}, \quad \bar{K} = \begin{vmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \ldots & \bar{k}_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{k}_{n1} & \bar{k}_{n2} & \ldots & \bar{k}_{nn} \end{vmatrix}, \tag{8.6}$$

связывающие между собой две системы базисных векторов:

$$E = [e_1\ e_2 \ldots e_n] = K[\bar{e}_1\ \bar{e}_2 \ldots \bar{e}_n] = K\bar{E}, \tag{8.7}$$

$$\bar{E} = [\bar{e}_1\ \bar{e}_2 \ldots \bar{e}_n] = \bar{K}[e_1\ e_2 \ldots e_n] = \bar{K}E.$$

Из равенств (8.7) следует, что

$$E = K\bar{E} = K\bar{K}E,$$

поэтому произведение $K\bar{K} = E$ есть единичная матрица. Следовательно, матрицы коэффициентов обратны друг другу.

Линейные подпространства. Если рассмотреть m линейно независимых векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и построить всевозможные линейные комбинации этих векторов

$$x = t_i a_i, \quad t_i \in R^1, \quad i = \overline{1, m}, \tag{8.8}$$

то такие векторы будут образовывать линейное m-пространство, которое будем называть подпространством.

Простейшими подпространствами являются пространства размерности 1 : $x = ta$, $t \in R$, $a \in R^n$.

*Аффинные пространства.* Введем аффинное пространство на основе понятия линейного пространства.

***Определение.*** Будем называть аффинным пространством множество элементов любой природы, которые удовлетворяют аксиомам линейного пространства и аксиомам приведенным ниже:

1. Каждым двум точкам A и B в порядке поставлен в соответствие определенный вектор a, обозначаемый

$$a = \overline{AB}.$$

2. Каждой точке A и каждому вектору a поставлена в соответствие определенная точка B, для которой AB = a.
3. Для любых трех точек A, B, C справедливо равенство

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

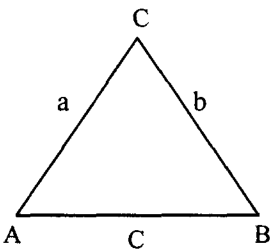


Рис. 8.1

Геометрическая иллюстрация к аксиомам аффинного пространства дана на рис. 8.1.

*Евклидово пространство.* Изучение начнем с определения.

***Определение.*** Будем называть евклидовым пространством множество элементов любой природы, удовлетворяющих аксиомам аффинного пространства и, кроме того, метрическим аксиомам:

1. Каждой паре векторов a и b поставлено в соответствие определенное число, обозначаемое

$$s = (a,b) = a_i \; b_i \tag{8.9}$$

и называемое скалярным произведением векторов.

2. Скалярное произведение векторов коммутативно: ab = ba.

3. Вещественный множитель k можно вынести за знак скалярного произведения, т. е. (ka)b = kab.

4. Скалярный квадрат вектора неотрицателен: $a^2 > 0$. Если скалярное произведение равно нулю, то вектор a — нулевой.

Как следует из приведенных выше рассуждений, модели евклидова пространства имеют различные реализации. В частности, можно использовать модели:

- евклидова пространства векторов, в котором скалярное произведение определено как сумма произведений соответветствующих координат (8.9); евклидова пространства функций, в котором скалярное произведение задается с помощью интеграла от произведения функций;
- евклидова пространства функций f(x) и g(x), заданных на множестве дискретных значений аргументов $x_i$, причем скалярное произведение задается соотношениями типа (8.9), когда $a_i = f(x_i)$, $b_i = g(x_i)$.

С помощью скалярного произведения можно определить понятие длины (модуля) элементов. Определим модуль вектора как неотрицательный корень из его скалярного квадрата:

$$|a| = +(a, a)^{1/2}, \tag{8.10}$$

где символ $|a|$ обозначает норму вектора.

В современной математике часто вместо термина «длина» элемента используют понятие нормы элемента, которое является обобщением понятия длины и вводится различным образом в зависимости от типа пространства.

***Определение.*** Пространства с нормой называются нормированными.

Понятие нормы вводится аксиоматически. Имеют место следующие аксиомы нормы.

1. Аксиома неотрицательности: $|a| > 0$, $|a| = 0 \leftrightarrow a = 0$.

2. Аксиома однородности: $|k\,a| = |k||a|$, k — число.

3. Аксиома треугольника: $|a + b| \leq |a| + |b|$.

С помощью понятия нормы можно ввести понятие расстояния между точками A и B, которое равно модулю вектора $\overline{AB}$:

$$AB^2 = |x - y|^2. \tag{8.11}$$

***Определение.*** Пространства, в котором введено понятие метрики называются метрическими.

Заметим, что метрика является в общем случае обобщением понятия расстояния и может вводиться аксиоматически. Имеют место следующие аксиомы метрики:

1. Аксиома неотрицательности: $|x - y| > 0$;
2. Аксиома симметрии: $|x - y| = |y - x|$.
3. Аксиома треугольника: $|x - y| \le |x - z| + |z - y|$.

### 8.1.2. Геометрия прямых и плоскостей

Введенные понятия евклидова пространства позволяют сформулировать геометрические типовые задачи в евклидовых пространствах:

- геометрия прямых линий,
- геометрия плоскостей,
- геометрия многогранников,
- геометрия сфер,
- геометрия квадрик.

*Геометрия прямых линий* существенно опирается на различные математические модели прямых линий, характеристика которых дана в табл. 8.1.

Таблица 8.1

| Тип уравнения прямой линии | Математическая модель прямой линии |
|---|---|
| 1. Векторное | $x = z + at$,<br>z — начало прямой,<br>a — направляющий вектор прямой,<br>t — число |
| 2. Координатное | $\frac{x_1 - z_1}{a_1} = \frac{x_2 - z_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n - z_n}{a_n}$<br>$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — начало прямой,<br>$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — направляющий вектор прямой |
| 3. Уравнение по двум точкам: z и y | $x = z + (z - y)\,t$,<br>t — число,<br>x — точка прямой |

Рассматриваемые три математические модели прямой в пространстве Евклида могут использоваться при решении практических задач. В частности, первая модель прямой позволяет легко определить условия параллельности прямых. Для этого требуется равенство направляющих векторов прямых a. Вторая модель прямой непосредственно следует из координатной записи для первой модели, если затем полученные равенства разрешить относительно параметра t. Третья модель прямой использует для задания две точки x и y, через которые проходит прямая.

Введенные модели прямой позволяют решить ряд геометрических задач, некоторые из которых сведены в табл. 8.2.

Таблица 8.1

| Тип задачи | Решение задачи |
|---|---|
| 1. Вычисление угла между двумя прямыми с направляющими a и b | $\cos\phi = \dfrac{(a, b)}{\lvert a\rvert\,\lvert b\rvert}$, причем угол между a и b меньше или равен 180° |
| 2. Расстояние от точки x до прямой $z + at$ | $r = \dfrac{\lvert[(x-z)\,a]\rvert}{\lvert a\rvert}$ |

Решение первой задачи следует из обобщения представления скалярного произведения в виде: $(a, b) = \lvert a\rvert\lvert b\rvert\cos\phi$, где $\phi$ — угол между векторами a и b.

Вторую задачу решим следующим образом. Рассмотрим расстояние между вектором x и прямой:

$$r^2 = (x - z - at,\ x - z - at).$$

Затем определим значение скалярного параметра t из условия минимума квадрата расстояния. Подставив минимизирующее значение t в последнее равенство, найдем минимальное расстояние. Аналогично можно решить другие задачи — определить кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми, отражение от прямой.

*Геометрия плоскостей* занимается изучением математических моделей плоскостей и решением на их основе геометрических задач евклидова пространства.

***Определение.*** Будем называть m-мерной плоскостью аффинного или евклидова пространства (m-плоскостью) множество всех точек этого пространства, получаемых из одной его точки всеми переносами, векторы которых компланарны и принадлежат одному линейному m-пространству.

Данное определение соответствует первой математической модели, приведенной в табл. 8.3.

Таблица 8.3

| Тип уравнения плоскости | Математическая модель плоскости |
|---|---|
| 1. Векторное | $x = z + a_i t_i$ , $a_i$ — направляющие векторы плоскости, $t_i$ — вещественные числа |
| 2. Координатное | $x_k = z_k + a_{ik} t_i$ |
| 3. Уравнение по точке и нормальному вектору | $(n, x - z) = 0$ |

Вторая математическая модель плоскости является координатной формой для первой модели. Третья модель представляет собой условие ортогональности всех векторов $x - z$ и вектора направляющей нормали плоскости. Существуют также и другие уравнения плоскостей.

Рассмотрим некоторые математические задачи, связанные с геометрией плоскостей в евклидовых пространствах, данные в табл. 8.4.

Первая задача, приведенная в табл. 8.4, имеет решение, которое определяется из условия того, что разности между вектором z и другими векторами линейно зависимы. Это математически записано в виде стандартного требования равенства нулю определителя, составленного из этих векторов. В данном случае векторы разностей составляют столбцы векторов, представленных своими координатами.

Вторая задача имеет решение, аналогичное полученному для случая отыскания углов между прямыми.

Для решения третьей задачи необходимо определить направление по нормали для движения из точки z в направлении к плоскости. Такой вектор имеет вид $x = z + Ut$, где параметр t находится из условия минимума расстояния.

Аналогичными методами решаются геометрические задачи для многогранников, сфер и квадрик.

Таблица 8.4

| Типовые задачи геометрии плоскостей | Математический метод решения |
|---|---|
| 1. Найти условия принадлежности n+1 точки: $M(z)$, $M(x_1)$, ..., $M(x_n)$ одной плоскости | Необходимым и достаточным условием того, что точки лежат на одной плоскости, является линейная зависимость векторов $x_i - z$. Это условие выполнено, если равен нулю определитель $\begin{vmatrix} x_{11}-z_1 & x_{21}-z_1 & \dots & x_{n1}-z_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}-z_n & x_{2n}-z_n & \dots & x_{nn}-z_n \end{vmatrix} = 0$ |
| 2. Найти угол $\phi$ между двумя плоскостями, заданными в нормальной форме: $(u, x - z) = 0$, $(v, x - z) = 0$ | $\cos\phi = \dfrac{\lvert(u, v)\rvert}{\lvert u\rvert\lvert v\rvert}$, причем угол $\phi$ — угол между нормалями плоскостей, который меньше 90° |
| 3. Найти расстояние $r$ от точки $z$ до плоскости $(U, x) + v = 0$ | $r = \dfrac{\lvert(U, z) + v\rvert}{\lvert U\rvert}$ |

## 8.2. ГЕОМЕТРИЯ РИМАНА

Дальнейшим развитием геометрии явилось создание геометрии Б. Римана. Риманова геометрия или, другими словами, эллиптическая геометрия — это двумерная геометрия сферы в трехмерном евклидовом пространстве с отождествленными диаметрально противоположными точками (такая геометрия топологически эквивалентна проективной плоскости). Многомерная (n-мерная) риманова геометрия моделируется на сфере в (n +1)-мерном евклидовом пространстве. В геометрии Римана прямыми являются большие круги сфер (с указанным отождествлением).

Метрика, связанная с измерением длин, углов и т. д., индуцируется метрикой сферы. В римановой геометрии существуют движения, сохраняющие метрику и переводящие любую точку пространства в любую другую. Последнее свойство носит название однородности. Пространство, в котором действует риманова геометрия (эллиптическое пространство), имеет положительную постоянную риманову кривизну.

Римановы пространства описываются с позиций метрических тензоров. Геометрия римановых пространств в окрестности некоторой точки совпадает с геометрией Евклида. Для измерений участков земной поверхности с большой точностью применяется евклидова геометрия, в которой расстояния измеряются по прямой. В римановой геометрии определяется векторный аналог прямой линии евклидовой геометрии — геодезическая линия. Эта линия реализует минимум расстояния в достаточно малой окрестности риманова пространства. Важнейшим понятием римановой геометрии является кривизна пространства. Развитие римановой геометрии шло одновременно с развитием тензорного исчисления. Римановы пространства представляют собой гладкое многообразие, в каждой точке которого задан специальный тензор как непрерывно дифференцируемая функция точки. При помощи этого тензора определяется длина любой кривой. Риманова геометрия — это условная геометрия.

Идеи Римана имеют большое значение, поскольку они составили математическую основу теории относительности А. Эйнштейна. Развитие геометрии Римана привело к созданию тензорного анализа — современного метода исследования многомерных римановых пространств.

### 8.2.1. Общая схема введения тензора

Свойства римановых пространств могут быть выражены в терминах метрического тензора. Опишем процедуру введения понятие тензора с помощью полилинейной функции нескольких переменных, в качестве которых будут выступать исходные переменные и новые переменные, полученные в результате преобразования. Схема введения понятия тензора дана на рис. 8.2.

Введем криволинейную систему координат евклидова пространства трех измерений с помощью радиус-вектора

$$r = r\ (a_1, a_2, a_3), \tag{8.12}$$

с отличным от нуля якобианом преобразования

$$|\,dr/da_1,\ dr/da_2,\ dr/da_3\,|.$$

Такое пространство, как мы уже знаем из п. 8.1, является аффинным, а после введения соответствующей метрики

$$g_{ij} = (e_i,\ e_j),\ e_i = dr/da_i \tag{8.13}$$

оно становится евклидовым. В каждой точке пространства вектор $a_i$ раскладываем по векторам базиса $e_i$ и взаимного базиса $e_{i*}$ :

$$a = a_i e_i = a_{i*} e_{i*}, \tag{8.14}$$

причем напомним, что в последнем равенстве осуществляется суммирование по одинаковыми индексам.


Рис. 8.2

Таким образом, формулой (8.12) вводится криволинейная система координат, которая определяет закон перехода от декартовой системы координат.

***Определение.*** Назовем элементарным многообразием n измерений некоторого класса гладкости некоторое множество U, для которого задано взаимно однозначное отображение n переменных $a_1, a_2, \dots, a_n$ на связную область изменения этих переменных:

$$a_{i*} = a_{i*}(a_1, a_2, \dots, a_n), \tag{8.15}$$

$$a_i = a_i(a_{i*}, a_{2*}, \dots, a_{2n}). \tag{8.16}$$

Отображения (8.15), (8.16) являются взаимно обратными. Для каждого из этих отображений можно построить в каждой точке «локальный» базис в виде системы векторов.

***Определение.*** Отображения вида (8.15), (8.16) называются точками M элементарного многообразия, а отображения

$$M \leftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) \tag{8.17}$$

координатными системами многообразия, где значения отображения $a_1, a_2, \dots, a_n$ — координаты точки M в соответствующей координатной системе.

По аналогии с пространством Евклида введем понятия линии и поверхности.

***Определение.*** Будем говорить, что в многообразии задана кривая, если задано множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$a_i = f_i(t), \tag{8.18}$$

где t — некоторый параметр, $f_i$ — совокупность n функций.

Нетрудно видеть, что определение (8.18) обобщает понятие прямой в евклидовом пространстве, поскольку задает более общее множество точек. Поясним особенности параметрического задания кривой в пространстве трех измерений примером. Задание кривой с помощью параметра t может иметь вид

$$a_1 = a\cos t,\ a_2 = a\sin t,\ a_3 = bt. \tag{8.19}$$

К этому примеру мы еще вернемся далее при рассмотрении расстояния в римановом пространстве, которое будет определяться «вдоль кривой», а не вдоль прямой, как в евклидовом пространстве.

Зададим теперь множество точек, удовлетворяющих уравнениям

$$a_i = f_i(u_1, u_2, ..., u_m),$$

где $u_i$ — параметры, а число $m < n$.

Совокупность этих точек назовем подмножеством $V_m$ множества $V_n$. При $m = n - 1$ это подмножество может быть названо поверхностью в $V_n$, поскольку обладает свойством поверхности делить все пространство $V_n$ на две части.

### 8.2.2. Пространство Римана и тензоры

Введем понятие расстояния между двумя точками многообразия.

***Определение.*** Пространство V является пространством Римана, если в нем задана фундаментальная (метрическая) форма

$$\Phi = g_{ij} da_i da_j, \ i, j = 1, 2, ..., n, \tag{8.20}$$

т. е. некая скалярная функция точки М пространства $V_n$.

Говорят, что этим задан симметричный метрический тензор второго порядка. Определение тензора требует детального изучения, однако сначала рассмотрим контрвариантные векторы, для чего введем ряд понятий.

Скалярная функция векторного аргумента f(x), определенная на всем линейном пространстве, называется линейной, если для любых векторов x и y и любого числа k выполнены соотношения:

$$f(x+y) = f(x)+f(y), \ f(kx) = kf(x). \tag{8.21}$$

Очевидно, что операции суммирования и вычисления линейной комбинации линейных функций дают в результате также линейную функцию. Если рассмотреть базис $\{e_i\}$ из единичных векторов и обозначить $f(e_i) = u_i$, то при $x = x_i e_i$ получим соотношение

$$f(x) = f(x_i \ e_i) = x_i \ f(e_i) = u_i \ x_i. \tag{8.22}$$

Формула (8.22) показывает, что линейная функция представима в виде линейной комбинации билинейных функций (линейных по каждому аргументу при условии, что остальные аргументы считаются постоянными). Поскольку n таких функций линейно независимы, то их можно рассматривать как базис системы линейных функций.

Числа $u_i$ можно рассматривать как координаты линейной функции по отношению к базису, определяемому векторами $e_i$ в основном n-мерном пространстве.

Весьма важно определить линейную функцию в случае перехода к новому базису векторов $e_{i*}$, который вводится с помощью соотношения

$$e_i = \bar{A}e_{i*}, \qquad (8.23)$$

где $\bar{A}$ — неособая матрица перехода от базиса $e_{i*}$ к базису $e_i$. Тогда для вектора x имеем два представления — по двум введенным базисам:

$$x = x_i e_i = x_i \bar{A}\, e_{i*} = x_{i*} e_{i*}. \qquad (8.24)$$

Из (8.23) и (8.24) следует, что коэффициенты разложения вектора x по базису $e_{i*}$ однозначно определятся из равенства

$$x_{i*} = Ax_i\bar{A}\bar{x}_i \qquad (8.25)$$

можно показать, что

$$x_i = Ax_{i*}, \qquad (8.26)$$

где A — некоторая матрица перехода в (8.26).

Аналогично представятся коэффициенты разложения линейной функции по двум базисам

$$u_{i*} = Au_i,\ u_i = A\bar{u}_{i*}. \qquad (8.27)$$

Из (8.25) и (8.27), следует что переход от одного базиса к другому для линейной функции по сравнению с переходом для векторов осуществляется с помощью различных матриц: переход от $u_i$ к $u_{i*}$ происходит при помощи матрицы A, тогда как переход от $x_i$ к $x_{i*}$ — при помощи матрицы A.

Поскольку закон преобразования базисных векторов $e_i$ совпадает с законом преобразования $u_i$ и противоположен закону преобразования $x_i$, то векторы

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (8.28)$$

называются к о н т р а в а р и а н т н ы м и («противопреобразующими») векторами, а линейные функции f(x) с координатами $u_i$ — ковариантными («сопреобразующими») векторами

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n). \qquad (8.29)$$

Контравариантные и ковариантные векторы (8.28) и (8.29) являются частным случаем более общего понятия — т е н з о -

ров. Для определения тензора надо исходить из полилинейной скалярной функции нескольких векторных аргументов, часть из которых являются контравариантными, а часть ковариантными. Заметим, что полилинейной функцией называют такую функцию, которая линейна по каждому из аргументов. Другими словами, полилинейная функция является линейной, если предположить, что все аргументы кроме одного есть постоянные. Из симметричности формулы (8.22) относительно каждого из ее аргументов следует, что линейная функция ковариантного вектора определяет контравариантный вектор. Применяя тот же прием, которым получена формула (8.22), можно найти представление полилинейной функции контравариантных векторов X, Y, ..., Z и ковариантных векторов U, V, ..., W:

$$f(x, y, \dots, z, u, v, \dots, w) = \tag{8.30}$$

$$= \underbrace{T^{j_1 j_2 \dots j_s}_{i_1 i_2 \dots i_r}}_{\substack{\text{Координаты тензора} \\ \text{r-й ковариантной} \\ \text{валентности и s-й} \\ \text{контравариантной} \\ \text{валентности}}} \quad \underbrace{X^{i_1} Y^{i_2} \dots Z^{i_r}}_{\substack{\text{Контравариантные} \\ \text{векторы}}} \quad \underbrace{U_{j_1} V_{j_2} \dots V_{j_s}}_{\substack{\text{Ковариантные} \\ \text{векторы}}}$$

Для удобства различения контравариантных и ковариантных векторов в последней формуле введена верхняя и нижняя индексация. Для тензора (8.30) можно построить правила преобразования при замене базиса.

Теперь, следуя общей теории пространства, необходимо ввести понятие расстояния для римановых пространств.

Можно определить расстояние между двумя бесконечно близкими точками пространства Vn равенством

$$\Phi = ds^2. \tag{8.31}$$

В евклидовом пространстве форма (8.31) является положительно определенной (см. п. 8.1), поскольку расстояние положительно для всех ненулевых векторов и равно нулю в случае совпадения векторов. При определении риманова пространства мы не будем требовать положительной определенности формы типа (8.31). Например, может случиться так, что

$$\Phi = (da_1)^2 - (da_2)^2, \tag{8.32}$$

т. е. метрическая форма обращается в нуль при

$$da_1 = da_2. \tag{8.33}$$

Другими словами, для некоторых направлений форма Φ является положительной, а для других — отрицательной. При этом выделяются направления типа (8.33), на которых метрическая форма равна нулю, — они называются изотропными. Для каждого неизотропного направления существует знаковое число sign, равное либо +1, либо −1, такое, что форма (sign) Φ является положительной. Введение знакового числа направлено на устранение трудностей определения расстояния между двумя точками с помощью неопределенной формы.

***Определение.*** Будем называть расстоянием между двумя бесконечно близкими точками в направлении $da_i$ величину

$$ds^2 = (\mathrm{sign})\Phi = (\mathrm{sign})g_{ij}\, da_i\, da_j. \tag{8.34}$$

Как уже говорилось, расстояние между двумя бесконечно близкими точками в изотропном направлении равно нулю, т. е. в римановом пространстве расстояние между двумя точками может быть равно нулю также и в том случае, когда эти точки не совпадают.

Необходимо заметить, что риманова геометрия строится с помощью понятия расстояния между двумя бесконечно близкими точками, тогда как евклидова геометрия рассматривает расстояния между точками, удаленными на конечное расстояние.

Установим связь между римановой и евклидовой геометриями. В каждой точке риманова пространства существует фундаментальная матрица $g_{ij}$, с помощью которой можно в каждой точке построить касательное евклидово пространство с базисом, для которого справедливы все утверждения п. 8.1.

Продолжая изучать риманово пространство, рассмотрим в нем кривую (8.18). Определим

$$r_i = \frac{df_i(t)}{dt}. \tag{8.35}$$

При этом бесконечно малое смещение вдоль кривой (8.18) примет вид

$$da_i = T_i(t)dt,$$

а длина смещения будет равна

$$ds = \sqrt{(\mathrm{sign})g_{ij}T_iT_j}dt\,. \tag{8.36}$$

Тогда длина кривой (8.26) от точки $t = t_1$ до точки $t = t_2$ находится с помощью интеграла

$$s = \int_{t_2}^{t_1} ds, \tag{8.37}$$

где величина ds определена равенством (8.36). Поэтому для определения длины кривой в римановом пространстве необходимо знать, как построено это пространство, а строение пространства определяется его метрическим тензором. Рассмотрим пример вычисления расстояния в римановом пространстве.

**Пример.** Пусть кривая определена в трехмерном пространстве (8.19), а метрическая форма имеет вид

$$ds^2 = (da_1)^2 + (da_2)^2 + (da_3)^2.$$

Тогда в соответствии с (8.37) длина s кривой от точки $t = 0$ до точки $t = 2П$ будет равна

$$s - \int_0^{2\pi} (a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2t^2)dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Пространство Римана имеет многочисленные приложения, в частности, при решении задачи о распространении тепла в анизотропной среде в механике. Одним из важных приложений является теория относительности А. Эйнштейна, который показал, что пространственно-временное многообразие можно рассматривать как псевдориманово пространство четырех измерений. Однако необходимо отметить взаимное влияние — потребности теории относительности стимулировали развитие теории римановых пространств.

### 8.3. О ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Появление геометрии Н. И. Лобачевского (1792–1856) явилось революционным моментом в развитии неевклидовой геометрии. Если в системе аксиом Евклида аксиому параллельных заменить ей противоположной, то получаемая при этом геометрия будет непротиворечивой. При этом теоремы новой геометрии не соответствуют обычным наглядным представлениям. Этот факт имел большое значение, поскольку в значительной степени изменил представления человечества о свойствах объектов реального мира. По своей сущности геометрия Лобачевского — это геометрическая теория, в основе которой лежат те же аксиомы, что и в евклидовой геометрии, за исключением аксиомы о параллельности. Рассмотрим различие двух рассматриваемых геометрий в части аксиомы о параллельности.

*Геометрия Евклида.* Как уже упоминалось, аксиома о параллельности прямых евклидовой геометрии формулируется следующим образом: через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, не лежащей с данной в одной плоскости и не пересекающей ее.

*Геометрия Лобачевского.* Вместо евклидовой аксиомы о параллельности используется аксиома Лобачевского: через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие ее.

Следствия (теоремы), вытекающие из аксиом геометрии Лобачевского, на первый взгляд носят парадоксальный характер и кажутся противоречащим обычным представлениям. Например, в геометрии Лобачевского сумма углов треугольника непостоянна и всегда менее 180°. Кроме того, вокруг не всякого треугольника можно описать окружность. Не существует подобных и конгруэнтных (неравных) треугольников. Геометрия Лобачевского — условная гиперболическая неевклидовая геометрия как дополнение эллиптической геометрии Римана.

Поясним смысл параллельных прямых в геометрии Лобачевского. Рассмотрим в плоскости прямую $a = (x_1x_2)$ и точку A вне ее, приведенные на рис. 8.3.

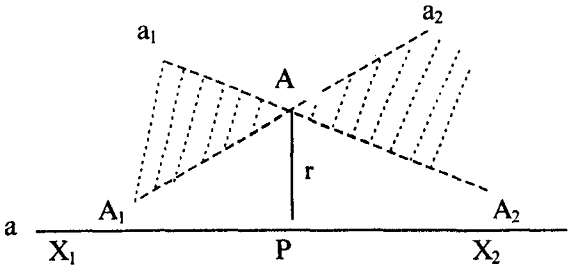



Рис. 8.3

В плоскости через точку А можно провести более одной прямой, не пересекающих прямую а, что соответствует аксиоме Лобачевского. Из аксиомы Лобачевского следует, что прямых, проходящих через точку А и не пересекающих прямую а, в плоскости, определяемой этой прямой и точкой, существует бесконечно много. Такими прямыми будут прямые, проходящие через точку А и внутренние точки соответствующих вертикальных углов (на рисунке заштрихованы). Плоскость, в которой выполняются аксиомы Лобачевского, называется плоскостью Лобачевского. Через точку А можно провести серию (пучок) прямых, принадлежащих заштрихованной части плоскости. При этом можно выделить две граничные прямые:

- прямую $a_1$, которая параллельна прямой а в направлении $X_1X_2$;
- прямую $a_2$, которая параллельна прямой а в направлении $X_2X_1$.

Лобачевским доказано, что углы $PAA_1$ и $PAA_2$ острые, т. е. меньше 90°. Прямые $a_1$ и $a_2$ называются параллельными прямой а. Пусть r — длина перпендикуляра АР, которая является функцией угла параллельности $PAA_2$. Тогда длина перпендикуляра r монотонно убывает с ростом угла параллельности. В этом смысле гипербола $AA_2$ приближается по своим свойствам к прямой, что соответствует геометрии Евклида, так как когда этот угол равен 90°, то практически есть две параллельные прямые. Рассматривая свойства двух геометрий, можно говорить о совпадении расстояний, углов и других геометрических фигур.

Доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского дал Ф. Клейн. Модель Клейна отображает объекты плоскости

Лобачевского в объекты евклидовой плоскости по следующему закону:

- точкам плоскости Лобачевского соответствуют точки с координатами (x,y) открытого круга $S(x^2 + y^2 < 1)$ евклидовой плоскости;
- прямым плоскости Лобачевского соответствуют хорды окружности $x^2 + y^2$;
- движениям в плоскости Лобачевского соответствуют преобразования круга S в себя, такие, которые переводят круг в себя (движением называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между двумя точками);
- расстояние между любыми точками A и B в плоскости Лобачевского равняется логарифму сложного отношения четырех точек на прямой: ($a_1$, a, b, $b_1$), где a, b — точки внутри круга, а $a_1$, $b_1$ — концы хорды, содержащей точки a, b (см. рис. 8.4). Сложные отношения определяются как отношения длин двух отрезков:

$$\frac{a_1b}{ba} : \frac{a_1b_1}{b_1a}$$

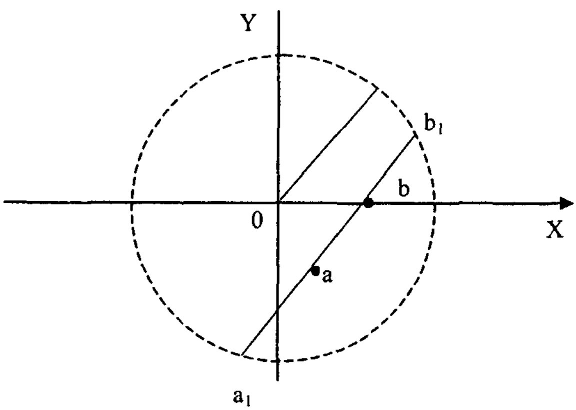



Рис. 8.4

Модель Клейна позволяет легко показать, что через данную точку проходит бесконечное множество прямых плоскости, не пересекающих заданную прямую. Последнее очевидно, поскольку в модели Клейна (плоскости Лобачевского) прямые являются хордами единичной окружности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Мантуров О. В., Солнцев Ю. К., Соркин Ю.И., Федин И. Г.* Математика в понятиях, определениях и терминах. М.: Просвещение. Ч. 1, 1978; Ч. 2, 1982.

*Нейман И.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.

*Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: МГУ, 1986.

*Райков Д. А.* Векторные пространства. М.: ГИФМЛ, 1962.

*Розенфельд Б. А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.

*Шикин Е. В.* Линейные пространства и отображения. М.: МГУ, 1987.

*Глава 9*

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Многие явления окружающего мира не всегда находят объяснения в рамках детерминированных законов, поскольку носят случайный (заранее непредсказуемый) характер. В данной главе рассматриваются математические модели случайных событий и случайных величин. Для такого вида «случайностей» отсутствует детерминированная регулярность, однако имеет место статистическая регулярность, проявляющаяся при рассмотрении массовых явлений. Далее приводятся основные характеристики случайностей в виде законов распределений, моментов, ковариаций. В определенном смысле иллюстрируется совокупность законов случайностей как устойчивых форм связи между случайными величинами.

Возникновение теории вероятностей связано с именами Блеза Паскаля (1623–1662), Пьера Ферма (1601–1665) и Хейгенса Гюйгенса (1629–1695). Первоначально в классической теории вероятностей рассматривались задачи подсчета шансов в азартных играх. В 1713 г. Я. Бернулли опубликовал труд «Искусство предположения», в котором была доказана предельная теорема. Впоследствии теорию вероятностей развивали П. С. Лаплас (1749–1827), С. Д. Пуассон (1781–1840) и К. Ф. Гаусс (1777–1855). Гауссу принадлежит заслуга создания теории ошибок. Большой вклад в теории вероятностей внесли П. Л. Чебышев (1821–1894), А. А. Марков (1856–1922), А. М. Ляпунов (1857–1918). В 1933 г. вышла книга А.Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей», в которой была изложена аксиоматическая теория вероятностей.

Рассматриваемые вопросы математической статистики касаются получения оценок математического ожидания и распределения на основе наблюдений. Введенное понятие статистики как функции выборки (наблюдений) позволяет получить оценки выборочных математического ожидания и распределений, обладающие некоторыми качественными свойствами.

## 9.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Для характеристики случайных явлений используют два определения вероятностей — классическое (или «частотное») и аксиоматическое. Основные понятия классической теории вероятностей приведены в виде схемы на рис. 9.1. Там же показано, что элементарным и составным случайным событиям теории вероятностей соответствуют меры возможности их осуществления, которые и называются вероятностями. В свою очередь, теория вероятностей изучает правила вычисления вероятностей различных типов указанных событий.

Начнем с примеров равновозможных случайных событий. Пусть подбрасывается симметричная монета (этим обеспечивается факт равновозможности исходов) и определяется количество выпадений «герба» (Г) или «решетки» (Р). Результаты отдельных испытаний носят весьма нерегулярный характер. Однако с увеличением числа экспериментов устанавливается закономерность:

количество выпадений «герба» и «решетки» примерно одинаково и равно 0,5. При однократном бросании шестигранной игральной кости равновозможно выпадение любой из шести граней с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6.

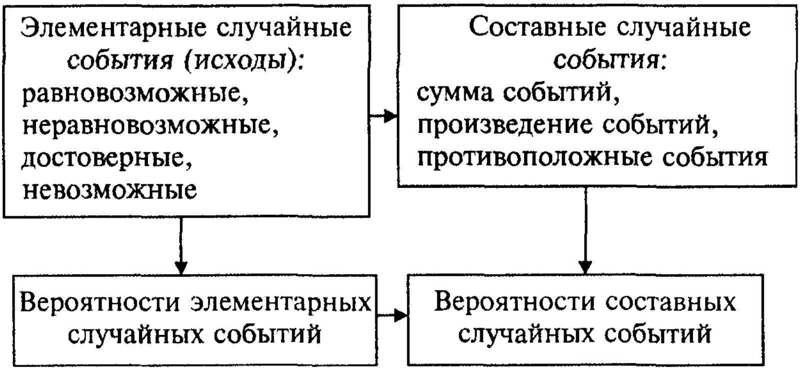



Рис. 9.1

Нетрудно привести примеры неравновозможных случайных событий. В частности, если подбрасывать несимметричные монеты или несимметричные игральные кости, то вероятности различных исходов будут отличаться друг от друга. Примеры достоверных событий многообразны. Так, при бросании симметричной игральной кости всегда будет иметь место либо «герб» либо «решетка». Невозможным считается событие, которое в рамках исследуемой вероятностной схемы произойти не может.

Рассматриваемые элементарные события иллюстрируют важный факт существования закономерностей при массовых испытаниях. В этом случае говорят о «статистической устойчивости» (неизменчивости), что позволяет иметь количественную оценку случайности. Теория вероятностей дает количественную оценку события (меру возможности его наступления), называемую вероятностью события А и обозначаемую Р(А).

***Определение.*** Пусть имеется n равновозможных элементарных событий (исходов)

$$i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_n. \qquad (9.1а)$$

Будем называть вероятностью элементарного события $i_k$ отношение числа исходов, благоприятствующих данному событию, к общему числу исходов:

$$P(i_k) = \frac{\text{Число исходов, благоприятствующих появлению элементарного события}}{\text{общее число исходов}}. \qquad (9.1б)$$

**Пример.** В приведенном выше примере подбрасывания симметричной монеты с двумя исходами $\{i_1 = \text{герб},\ i_2 = \text{решетка}\}$ вероятности исходов примерно одинаковы и равны $P(i_1) = P(i_2) = 0{,}5$. Аналогично можно сказать и об испытаниях с игральной костью: вероятности исходов $\{i_k = \text{выпадение } k \text{ очков},\ k = 1, 2, ..., 6\}$ будут одинаковыми и равными

$$P(i_k) = 1/6\ .$$

Прежде чем перейти к вычислению вероятности составных событий, необходимо дать их определение.

***Определение.*** Будем называть случайное событие составным, если оно зависит от элементарных случайных событий (исходов).

Например, составным событием является событие, заключающееся в появлении не одного, а двух (нескольких) элементарных событий — выпадения единицы или двойки (нескольких цифр в группе испытаний) в эксперименте с игральной костью. Тогда можно дать следующее определение вероятности составного события.

***Определение.*** Пусть имеется n равновозможных элементарных событий (исходов)

$$i_1, ..., i_k, ..., i_n. \qquad (9.2а)$$

Будем называть вероятностью составного события A отношение числа исходов, благоприятствующих данному событию, к общему числу исходов:

$$P(A) = \frac{\text{Число исходов, благоприятствующих появлению события A}}{\text{общее число исходов}}. \qquad (9.2б)$$

**Пример.** Если вернуться к примеру с игральной костью, то вероятность составного события, состоящего в выпадении нечетного числа очков в одном испытании (этому составному событию соответствует выпадение 1, или 3, или 5), равна $3/6 = 1/2$.

Для характеристики составных событий необходимо ввести их более точные определения с помощью суммы событий, произведения события, противоположных событий. Однако сначала приведем вспомогательные понятия. Классическое определение *вероятности позволяет рассмотреть предельные случаи*, в частности: вероятность достоверного события, которое включает все n элементарных событий, равна единице. Другим предельным случаем является невозможное событие, которое при заданном комплексе условий никогда не произойдет. В классической теории вероятностей два события называются несовместными, если наступление одного из них исключает наступление другого. Другими словами, события являются несовместными, если они не могут произойти одновременно.

Введем ряд определений, которые можно применить к элементарным и составным событиям.

***Определение.*** Будем называть суммой (или объединением) двух событий A и B событие $C = A + B$, которое происходит, когда наступает либо событие A, либо событие B, либо оба события одновременно.

***Определение.*** Будем называть произведением (или пересечением) событий A и B событие $C = AB$, которое наступает тогда, когда происходят и событие A, и событие B.

***Определение.*** Событие A является противоположным событию A, если оно несовместно с событием A и вместе с ним образует достоверное событие.

Примерами суммы (объединения) элементарных событий в эксперименте с игральной костью являются: 1) выпадение или 1, или 2; 2) выпадение любых трех цифр.

Приведем некоторые утверждения относительно вероятностей составных событий.

Теорема о сложении вероятностей. Если два составных события

$$A = \{a_1, ..., a_m\} \text{ и } B = \{b_1, ..., b_n\}$$

являются несовместными, то вероятность их объединенного события $C = A + B$ равна сумме вероятностей этих двух событий. Здесь $a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_n$ могут представлять собой наборы равновозможных элементарных событий.

Если вероятности событий A и B равны соответственно

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad P(B) = \frac{k}{n},$$

где n — общее число испытаний, m и k — число исходов, благоприятствующих событиям A и B соответственно, то вероятность события C, вычисленная по (9.2б)

$$P(C) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B).$$

Аналогичные теоремы можно получить для вероятностей других составных событий, образованных с помощью пересечения и объединения событий.

В теории вероятностей рассматриваются вероятности событий для неравновозможных элементарных событий (исходов).

## 9.2. АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

Попытаемся канонизировать наши рассуждения, пользуясь уже известными примерами создания аксиоматических теорий и общими положениями аксиоматического метода (см. главу 5), а также и классической теорией вероятностей. Основные понятия аксиоматической теории вероятностей будут введены в последовательности, иллюстрируемой на рис. 9.2.

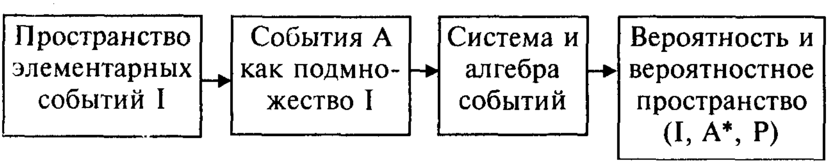



Рис. 9.2

При усложнении испытаний, приводящих к увеличению числа исходов, говорят об эксперименте с конечным числом n элементарных событий (исходов), которые обозначим

$$i_1, \ i_2, \ \ldots, \ i_n. \qquad (9.3)$$

Их смысл совпадает с (9.1а).

Совокупность (набор) элементарных событий

$$I = \{i_1, i_2, ..., i_n\} \tag{9.4}$$

называется пространством элементарных событий.

При одноразовом подбрасывании симметричной монеты пространство элементарных событий имеет вид

$$I = \{i_1 = \text{герб},\ i_2 = \text{решетка}\}.$$

Пространство элементарных событий может иметь более сложную структуру. При n-кратном конечном числе подбрасываний монеты пространство элементарных событий определится соотношением

$$I = \{i : i = (i_1, i_2, ..., i_k, ..., i_n),\ i = \text{герб или решетка}\}.$$

Итак, допустим, что имеется пространство элементарных событий любой природы. Рассмотрим в качестве событий подмножества A, B, C этого пространства. Тогда действия над событиями становятся действиями над подмножествами. Введение понятия события объясняется тем, что обычно интересуются не тем, какой конкретный элементарный исход имеет место, а тем, принадлежит ли исход тому или иному подмножеству исходов.

***Определение.*** Подмножества A, принадлежащие I, для которых по условиям эксперимента возможен ответ одного из двух типов: тип 1) исход i принадлежит A, тип 2) исход i не принадлежит A, называются событиями.

Приведем пример пространства всех исходов и событий.

Пусть осуществляется трехкратное подбрасывание монеты. В этом случае пространство всех исходов I будет состоять из восьми точек (элементов):

$$I = \{\text{ГГГ, ГГР, ГРГ, РГГ, РГР, РРГ, ГРР, РРР}\}.$$

Фактически при определении полученного пространства элементарных событий мы использовали введенное в п. 9.1 понятие пересечения событий. Тогда событием «двухкратное появление герба» может быть множество

$$A = \{\text{ГГГ, ГГР, ГРГ, РГГ}\},$$

которое очевидно принадлежит пространству всех исходов I. Если мы выбираем из I только один элемент, то рассматриваемое множество A нельзя назвать событием, поскольку нельзя получить ни утвердительный, ни отрицательный ответ на вопрос о полном описании множества А.

Как уже отмечалось, события могут принимать сложную структуру. Варианты структур событий целесообразно характеризовать высказываниями типа «или», «и», «не». В этой связи, как и в классической теории вероятностей, можно говорить об объединении, пересечении или разности событий, т. е. пользоваться понятиями теории множеств. Тогда если рассматривать некоторую систему множеств А, принадлежащих множеству элементарных исходов I, то с помощью операций объединения (суммирования), пересечения, вычитания можно построить новую систему множеств $A_0$, которая также будет состоять из событий.

Определение последних операций (кроме суммы) дано в п. 9.1, а суммой множеств будем называть их объединение в том случае, когда они не пересекаются (будем обозначать сумму знаком «+»).

Присоединим к этой новой системе множеств невозможное событие и достоверное событие, которое определяется множеством I.

***Определение.*** Система множеств А* называется алгеброй, т. е. такой системой множеств I, что : 1) I принадлежит А*, 2) если А принадлежит А*, В принадлежат объединение, пересечение и разность множеств А и В также принадлежат А*.

Из изложенного следует, что в качестве систем событий целесообразно рассматривать такие системы множеств, которые являются алгебрами. Можно привести следующие примеры алгебр событий: 1) А* = {I, пустое множество} — тривиальная алгебра; 2) А = {А*, А, I, пустое множество} — алгебра, порожденная событием; 3) А* = {А : А (–I} — совокупность всех (включая пустое множество) подмножеств I.

Рассмотрим принцип получения всех алгебр событий. Будем говорить, что система множеств

$$D = \{D_1, D_2, ..., D_n\} \qquad (9.5)$$

образует разбиение множества I, а $D_i$ являются атомами этого разбиения, если множества D не пусты, попарно не пересекаются и их сумма равна I:

$$D_1 + D_2 + ... + D_n = I.$$

**Пример.** Пусть множество I состоит из трех точек: I = {1, 2, 3}. Можно выделить пять различных разбиений:

$R_1 = \{D_1\}$, где $D_1 = \{1, 2, 3\}$;

$R_2 = \{D_1, D_2\}$, где $D_1 = \{1, 2\}$, $D_2 = \{3\}$;

$R_3 = \{D_1, D_2\}$, где $D_1 = \{1, 3\}$, $D_2 = \{2\}$;

$R_4 = \{D_1, D_2\}$, где $D_1 = \{2, 3\}$, $D_2 = \{1\}$;

$R_5 = \{D_1, D_2, D_3\}$, где $D_1 = \{1\}$, $D_2 = \{2\}$, $D_3 = \{3\}$.

В данном примере возможные исходы обозначены цифрами 1, 2, 3. Однако это могут быть и содержательные события, например исходы:

1) участие в работе конкурса,

2) успешное участие в работе конкурса,

3) получение первой награды в конкурсе.

Тогда совокупность разбиений определяет группу событий, которые могут охватывать содержательные задачи различных сфер гуманитарной деятельности.

Если рассматривать всевозможные объединения множеств из D в (9.5), то вместе с пустым множеством полученная система множеств будет алгеброй, порожденной разбиением D.

Итак, если подвести первые итоги, то нами сделано два шага:

1) выделено пространство элементарных событий и определены понятия событий;

2) введена система событий как подмножеств пространства элементарных событий, образующая алгебру.

Перейдем к заключительному шагу — введению вероятностной модели эксперимента с конечным числом исходов на основе выделения пространства элементарных событий и некоторой системы A* его подмножеств, называемой алгеброй. Далее припишем каждому элементарному событию $i_k$ пространства I некоторый «вес», обозначаемый $P(i_k)$ и называемый **вероятностью** исхода $i_k$, который будем считать удовлетворяющим следующим аксиомам.

Аксиома 1: $0 \le P(i_k) \le 1$ — неотрицательности,

Аксиома 2: $P(i_1) + \ldots + P(i_k) + \ldots P(i_n) = 1$ — нормированности.

Аксиома 3: Вероятность P(A) любого события, состоящего из объединения несовместных событий, равна сумме вероятности и вычисляется по формуле

$$P(A) = \sum_k P(i_k), \tag{9.6}$$

причем суммирование производится по индексам k, определяющим событие A.

В результате, заметим, что тройка

$$(I,\ A^*,\ P), \tag{9.7}$$

где $I = \{I_1, \ldots, I_n\}$, $A^*$ — некоторая алгебра подмножеств I, $P = \{P(A^*)\}$ определяет вероятностную модель или вероятностное пространство эксперимента с конечным числом элементарных событий I и алгеброй событий $A^*$.

Вероятностные модели имеют различные направления обобщений за счет понятий условной и полной вероятностей, что позволяет применять их для исследования широкого класса практических ситуаций.

## 9.3. УСЛОВНЫЕ И ПОЛНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Рассмотрим классическую схему введения условной вероятности применительно к вычислению вероятности неблагоприятного события.

Пусть в серии из M испытаний произошло $M_1$ благоприятных исходов и $M_2$ неблагоприятных исходов. Каковы вероятности того, что при проведении очередного испытания мы будем иметь благоприятный и неблагоприятный исходы.

Понятие условной вероятности позволяет ответить на вопрос: какова вероятность того, что, например, второе испытание будет иметь благоприятный исход (событие B) при условии, что в первом испытании имело место также благоприятное событие (событие A)? Рассуждения удобно строить в рамках известной в теории вероятностей «урновой» схемы без возвращения. Если первое испытание имеет благоприятный исход, то перед вторым испытанием мы имеем $M - 1$ вариантов исходов, из которых $M_1 - 1$ благоприятных исходов, а $M_2$ — неблагоприятных. Поэтому представляется целесообразным считать, что интересующая нас (условная) вероятность равна $(M_1 - 1)/(M - 1)$.

Перейдем к строгому определению условной вероятности, согласующемуся с интуитивными представлениями о ней, полученными в примере. Для этого введем конечное вероятностное пространство (I, A, P), где I — множество элементарных событий, A — алгебра события, т. е. совокупность сочетаний событий, P — вероятность.

***Определение.*** Будем называть условной вероятностью события B при условии осуществления события K с вероятностью P(K)>0 (обозначается P(B|K)) величину

$$P(B \mid K) = P(BK)/P(K), \tag{9.8а}$$

где P(BK) — вероятность пересечения событий B и K.

Геометрический смысл условной вероятности иллюстрируется на рис. 9.3.

Заметим, что (9.8а) обратима, так что имеет место аналогичная формула

$$P(K \mid B) = P(KB)/P(B). \tag{9.8б}$$

Рассмотрим вероятностную модель для вычисления вероятностей неблагоприятных событий, основанную на формуле полной вероятности. Для этого предположим, что имеется некоторое разбиение $D = \{K_1, \ldots, K_n\}$ множества событий с вероятностями $P(K_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ясно, что событие

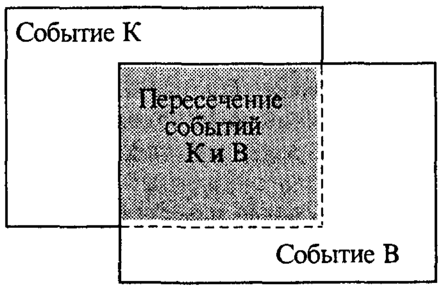


Рис. 9.3

$$B = BK_1 + \ \ldots + Bк_n, \tag{9.9}$$

где + — символ объединения событий. Геометрически объединение событий иллюстрируется на рис. 9.4 и представляет собой событие, включающее как $BK_1$, так и точки $BK_n$.

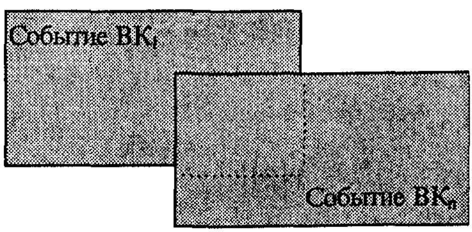


Рис. 9.4

В соответствии с теоремой о сложении вероятностей несовместных событий (см. п. 9.1) вероятность события B типа (9.9)

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(BK_i). \tag{9.10}$$

Однако в силу (9.8а)

$$P(BK_i) = P(B \mid K_i)P(K_i).$$

Поэтому имеет место формула полной вероятности

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B|K_i)P(K_i), \tag{9.11}$$

где $0 < P(K_i) < 1$.

В частности, если имеются два события K и $\overline{K}$, ($\overline{K}$ — событие, противоположное событию K), то из (9.11) следует

$$P(B) = P(B \mid K)P(K) + P(B \mid \overline{K})P(\overline{K}). \tag{9.12}$$

Вероятностные модели (9.8а,б), (9.12) могут применяться для вычисления вероятности неблагоприятного события B, когда заданы условные вероятности $P(B \mid K_i)$. Данная модель позволяет вычислить вероятность неблагоприятных событий, рассматриваемую в следующем примере.

**Пример.** Пусть имеется ситуация выбора стратегии, в которой возможно M исходов, среди которых m неблагоприятных. Какова вероятность того, что на втором испытании будет иметь место неблагоприятный исход (предполагается, что исход первого испытания известен, рассматриваются две попытки выбора (объем выборки $n = 2$), и все исходы равновозможны).

Для решения задачи будем использовать «урновую» схему. Пусть K — событие «первое испытание неблагоприятное», B — «второе испытание неблагоприятное». Тогда:

$$P(B|K)=\frac{P(BK)}{P(K)}=\frac{\dfrac{m(m-1)}{M(M-1)}}{m/M}=\frac{m-1}{M-1};$$

$$P(B|\overline{K})=\frac{P(B\overline{K})}{P(\overline{K})}=\frac{\dfrac{m}{M}\dfrac{(M-m)}{M-1}}{\dfrac{M-m}{M}}=\frac{m}{M-1}.$$

В соответствии с (9.12) имеем

$$P(B) = P(B \mid K)P(K) + P(B \mid \overline{K})P(\overline{K}) = \frac{m}{M}.$$

## 9.4. ФОРМУЛА И ТЕОРЕМА БАЙЕСА

Перейдем к рассмотрению очередной вероятностной модели. Из определения условной вероятности (9.8а,б) следует

$$P(KB) = P(B \mid K)P(K). \qquad (9.13)$$

Эта формула, носящая название формулы умножения вероятности, обобщается (по индукции) следующим образом: если события $K_1, ..., K_{n-1}$ таковы, что $P(K_1, ... K_{n-1}) > 0$, то

$$P(K_1 \ldots K_{n-1}) = P(K_1)P(K_2 \mid K_1) \ldots P(K_n \mid K_1 \ldots K_{n-1}) \qquad (9.14)$$

(здесь $K_1 ... K_n = K_1 \cap ... \cap K_n$) — пересечения событий $K_i$.

Использование для определения вероятности неблагоприятных исходов классической формулы Байеса, существенно расширяет возможность вероятностного описания ситуаций. Предположим, что события K и B таковы, что $P(K) > 0$ и $P(B) > 0$. Поскольку справедлива «обращенная» формула типа (9.8б), (9.2б)

$$P(KB) = P(K \mid B)P(B), \qquad (9.15)$$

то из (9.15) и (9.8а) получаем формулу Байеса

$$P(K \mid B) = \frac{P(K)P(B \mid K)}{P(B)}, \qquad (9.16)$$

которая определяет апостериорную вероятность события K, после того как наступило событие B.

Формула Байеса может быть обобщена на случай многих событий. Если события $K_1, ..., K_n$ образуют разбиение I, то из (9.16), где K заменено на $K_i$ и (9.11) следует теорема Байеса:

$$P(B \mid K_i) = \frac{P(K_i)P(B \mid K_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(K_i)P(B \mid K_i)}. \qquad (9.17)$$

В статистических приложениях события

$$K_1 \ldots K_n \quad (K_1 + \ldots + K_n = I)$$

называются гипотезами, а $P(K_i)$ — их априорными вероятностями.

Проиллюстрируем их содержание.

**Пример.** Пусть ситуация для принятия решения характеризуется наличием двух систем, таких, что $K_1$ — неблагоприятное состояние первой системы с вероятностью 1/2 и $K_2$ — неблагоприятное состояние второй системы с вероятностью 1/3. Производится исследование на удачу одной из систем. Если предположить, что в результате исследования установлено, что система находится в неблагоприятном состоянии, то требуется найти вероятность того, что выбрана первая система.

Для решения задачи построим соответствующую вероятностную модель. В качестве пространства элементарных событий естественно взять множество

$$I = \{K_1H,\ K_1Б,\ K_2H,\ K_2Б\},$$

описывающее все исходы выбора системы и проверки ($K_1H$ означает, что выбрана первая система и в результате проверки установлено, что она находится в неблагоприятном состоянии и т. д.). Вероятности рассматриваемых исходов по условию задачи равны

$$P(K_1) = P(K_2) = 1/2, \quad P(H \mid K_1) = 1/2, \quad P(H \mid K_2) = 1/3.$$

Тогда вероятности других исходов определяются однозначно:

$$P(K_1H) = 1/4, \quad P(K_1Б) = 1/4, \quad P(K_2H) = 1/6, \ P(K_2Б) = 1/3.$$

Согласно формуле Байеса, интересующая нас вероятность определится равенством

$$P(K_1 \mid H) = \frac{P(K_1)P(H \mid K_1)}{P(K_1)P(H \mid K_1) + P(K_2)P(H \mid K_2)}. \qquad (9.18)$$

## 9.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И МОМЕНТЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

При проведении экспериментальных исследований важную роль играют числовые характеристики явлений, зависящие от случайных событий. Введем понятие случайной величины, которая обычно измеряется в случайных экспериментах. В вероятностных исследованиях основной интерес представляют случайные величины, зависящие от элементарных случайных событий.

***Определение.*** Всякая числовая функция $x = x(i_k)$, определенная на (конечном) пространстве элементарных событий $I = \{i_1, i_2, ..., i_n\}$, будет называться (простой) случайной величиной.

**Пример.** Рассмотрим вероятностную модель подбрасывания монеты с пространством исходов I = {ГГ, ГР, РГ, РР} и определим случайную величину x как число гербов, отвечающих исходу $i_k$.

Тогда случайная величина s определится таблицей:

| $i_k$ | ГГ | ГР | РГ | РР |
|---|---|---|---|---|
| $x(i_k)$ | 2 | 1 | 1 | 0 |

В рассматриваемом далее случае множество I состоит из конечного числа точек. Тогда множество X значений случайной величины x также будет конечно. Соответствие между множествами I и X определится равенствами

$$I = \{i_1, i_2, ..., i_n\},$$

$$X = \{x(i_1), x(i_2), ..., x(i_n)\},$$

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

На множестве значений случайной величины X вероятность, индуцируемая (наводимая) случайной величиной x, находится по формуле

$$P_x(x_i) = P\{x : x(i_k) = x_k\}. \qquad (9.19)$$

Для (9.19) получим набор чисел

$$\{P_x(x_1), ..., P_x(x_i), ..., P_x(x_m)\}, \qquad (9.20)$$

который называется **распределением вероятностей** случайной величины x. На основании распределения вероятностей можно ввести понятие функции распределения.

***Определение.*** Пусть выполнены условия (9.19). Тогда функция

$$F_x(x) = P\ \{x : x(i_k)<x\} \qquad (9.21)$$

называется функцией распределения. Содержательно функция распределения характеризует вероятность того, что значения случайной величины $x(i_k)$ не превышают значения x. Функцию распределения (9.11) можно определить с помощью распределения вероятностей (9.20) по формуле

$$F_x(x) = \sum P_x(x_k), \tag{9.22}$$

где суммирование ведется по индексам k, для которых выполнено условие $x_k<x$.

Укажем некоторые свойства функций распределения:

• значение функции распределения для $x = -\infty$ равно нулю, а $x = +\infty$ — единице;

• функция распределения является неубывающей функцией своего аргумента x.

Введенные выше понятия позволяют перейти к определению моментов случайных величин. Мы рассмотрим моменты первого и второго порядка. Содержательно момент первого порядка — это среднее значение случайной величины, которое называется математическим ожиданием. Математическое ожидание M(x) случайной величины x с конечным набором значений (9.18) вычисляется по формуле

$$M(x) = \sum_{k=1}^{m} x_k P_x(x_k). \tag{9.23}$$

Как уже упоминалось, мы рассматриваем числовые характеристики, которые определяют закономерности в массовых явлениях. Понятие массовости явлений связано с проведением большого числа экспериментов. Здесь предполагается, что предельные свойства случайных явлений (свойства при большом количестве испытаний) характеризуются вероятностями, использованными в (9.23).

Математическое ожидание обладает рядом свойств.

1. Если случайная величина положительная, то ее математическое ожидание также положительно, что очевидно в силу определения математического ожидания.

2. Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин равно линейной комбинации математических ожиданий этих случайных величин.

3. Если одна случайная величина больше другой случайной величины, то это свойство сохраняется (наследуется) математическими ожиданиями этих случайных величин.

Перейдем к определению второго центрального момента, или дисперсии случайной величины.

Дисперсией случайной величины x называется величина

$$Dx = M(x - Mx)^2. \qquad (9.24)$$

Смысл дисперсии состоит в том, что она характеризует среднее отклонение случайной величины от ее математического ожидания. Чем меньше дисперсия, тем меньше отклонение случайной величины от среднего значения, и наоборот.

Свойства дисперсии определяются свойствами математического ожидания и формулируются следующими положениями:

1. Дисперсия случайной величины всегда неотрицательна, что следует из ее определения.

2. Дисперсия аффинной функции $y = a + bx$ равна

$$D(a + bx) = b^2D(x), \quad a, b \text{ — постоянные.}$$

3. Дисперсия суммы случайных величин x и r вычисляется с помощью соотношений

$$D(x + r) = M[x + r - M(x + r)]^2 = M[(x - Mx) + (r - Mr)]^2 =$$

$$= Dx + Dr + 2M(x - Mx)(r - Mr).$$

Если определить последнее слагаемое в полученном выражении как ковариацию

$$\mathrm{cov}(x,r) = M(x - Mx)(r - Mr),$$

то дисперсия суммы будет равна

$$D(x + r) = Dx + Dr + 2\mathrm{cov}(x,r).$$

Введенные характеристики случайных величин могут быть использованы при проведении статистического анализа в различных областях знания и в приложениях.

## 9.6. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ СТАТИСТИКУ

Математическая статистика изучает массовые явления и процессы на основании данных о наблюдениях, которые далее будем называть выборками. При этом *статистика* рассматривается как *функция выборки*.

Будем рассматривать параметрические задачи математической статистики, которые состоят в определении параметров распределений или моментов. Наряду с параметрическими задачами существуют и непараметрические, в которых нет представления даже о виде плотности распределения. На рис. 9.5 приведены два типа параметрических задач статистики. Для них вид законов распределения предполагается известным, хотя в ряде случаев можно вычислить математические ожидания и дисперсии соответствующих формул для дискретных случайных величин.

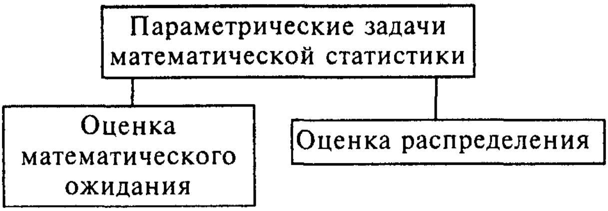



Рис. 9.5

Математическая статистика опирается на теорию вероятностей и имеет своей целью определение характеристик генеральной совокупности по выборочным данным. Под генеральной совокупностью мы понимаем вероятностное пространство, введенное в п. 9.2, состоящее из пространства элементарных событий с заданными на нем алгеброй событий и вероятностями. Единицей генеральной совокупности является элементарное событие и отвечающая ему случайная величина X.

***Определение.*** Случайной выборкой или просто выборкой объема n будем называть последовательность

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n, \tag{9.25}$$

состоящую из n независимых одинаково распределенных случайных величин, распределение каждой из которых совпадает с распределением исследуемой случайной величины X.

Таким образом, выборка представляет собой совокупность значений наблюдаемой случайной величины. Как правило, объем выборки ограничен, и по ограниченному набору наблюдений (по ограниченной выборке) необходимо получить информацию о вероятностно-статистических свойствах случайной величины. К таким свойствам будем относить введенные в п. 9.5 законы распределения, моменты (математическое ожидание, дисперсию, ковариационную функцию и др.). Вероятностные характеристики, полученные на основе выборочных наблюдений, будем называть выборочными.

Важным и основным понятием математической статистики является понятие статистики.

***Определение.*** Будем понимать под статистикой некоторую функцию выборки или, другими словами, функцию выборочных наблюдений.

Примерами статистики могут служить выборочные распределения и выборочные моменты случайной величины.

Конкретный набор выборочных значений $x_1, x_2, ..., x_n$ следует рассматривать как реализацию (одну из многих) многомерной случайной величины $X_1, X_2, ..., X_n$, компоненты которой независимы и имеют одну и ту же функцию распределения F(x), соответствующую генеральной совокупности. Поэтому многомерная случайная величина $X_1, X_2, ..., X_n$, характеризующая выборку, имеет следующее распределение

$$F(z_1, z_2, ..., z_n) = P(X_1 < z_1, X_2 < z_2, ..., X_n < z_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i < z_i) = \prod_{i=1}^{n} F(z_i). \tag{9.26}$$

Из соотношений (9.26) следует, что распределение многомерной случайной величины (9.25) может быть представлено произведением распределений отдельных ее компонентов. Такие случайные величины называются независимыми. (Эти случайные величины будут использоваться далее.) Как уже отмечалось ранее, в параметрических задачах математической статистики отдельные распределения в равенствах (9.26) могут зависеть от параметров. Тогда

$$F(z_i) = F(z_i, t), \tag{9.27}$$

где t — вектор параметров распределения. В частности, для некоторых распределений случайных величин вектор t имеет смысл, определенный в табл. 9.1.

В табл.9.1 приведены плотности распределения (другими и дифференциальные законы распределения) и распределения (называемые также интегральными законами распределения) непрерывных и дискретных случайных величин. Указаны параметры, которые могут быть определены на основе методов математической статистики. Однако нам необходимо ввести общие свойства оценок параметров распределений.

Таблица 9.1

| Наименование распределения | Плотности, распределения | Параметры метода t |
|---|---|---|
| **Непрерывные случайные величины** | | |
| Равномерное распределение X на интервале [a,b] | $p(x)=\begin{cases} 0, & x\notin[a,b] \\ 1/(b-a), & x\in[a,b] \end{cases}$<br>$P(x<X<x+\sigma)=$<br>$=\int\limits_{x}^{x+\sigma}\frac{1}{(b-a)}dx=\frac{\sigma}{b-a}$ | a, b<br>a, b |
| Экспоненциальное (показательное) распределение | $p(x)=le^{-lx}$<br>$P(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(x)dx=$<br>$=\begin{cases} 0,\text{ при } x\le 0 \\ 1-e^{-lx},\text{ при } x>0 \end{cases}$ | l<br>l |
| Нормальное распределение | $p(x)=(2\pi)^{-1/2}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}$<br>$P(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(x)dx$ | a, σ |
| **Дискретные случайные величины** | | |
| Биномиальное | $P(X=m)=$<br>$=P(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$ | p, q, n |
| Пуассона (экспоненциальное) | $P_n^{(m)}=C_n^m p^m q^{n-m}\to$<br>$\to p_m=\frac{l^m}{m!}e^{-l}$ | l |

***Определение.*** Будем называть оценкой числового параметра t функцию выборочных значений

$$t(X_1, X_2, ..., X_T) = \bar{t}, \qquad (9.28)$$

которая в определенном статистическом смысле близка к истинному значению параметра. Другими словами, оценка параметров является функцией выборки.

Главными статистическими свойствами оценок, которые с разных сторон характеризуют их близость к истинным значениям параметров, являются свойства несмещенности, состоятельности, эффективности.

***Определение.*** Оценка является несмещенной, если ее математическое ожидание как случайной величины равно истинному значению числовой характеристики:

$$M\bar{t} = t. \qquad (9.29)$$

***Определение.*** Оценка называется состоятельной, если она сходится по вероятности к истинному значению параметра, т. е. для любых $\sigma > 0$ имеет место соотношение

$$P\left\{\left|\bar{t}_n - t\right| \le \sigma\right\} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \qquad (9.30)$$

Другими словами, оценка состоятельна, если с единичной вероятностью (т. е. достоверно) различие оценки и истинного значения может быть сделано сколь угодно малым при неограниченном увеличении количества наблюдений (при увеличении объема выборки).

***Определение.*** Оценка называется эффективной, если она имеет минимальную дисперсию в определенном классе оценок.

Определение качественных свойств оценок позволяет перейти к непосредственному их вычислению статистическими методами.

*Оценки математического ожидания.* При определении математического ожидания можно исходить из двух подходов.

1. Конкретные выборки понимаются как реализации многомерной случайной величины (9.25) с распределениями (9.26). Тогда определение моментов требует знания самих распределений. В результате строгое решение задачи связано с разработкой соответствующих подходов.

2. Конкретные выборки можно рассматривать как генеральную совокупность (9.25) в предположении о равновероятности исходов, т. е. о том, что наблюдаемым значениям соответствуют вероятности

$$P\left(\tilde{X} = x_i\right) = 1/n\,, \tag{9.31}$$

где $\tilde{X}$ — выборочная случайная величина. Тогда математическое ожидание (числовая характеристика как функция выборки) представляется через выборочные значения следующим соотношением:

$$M\tilde{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i P\left(\tilde{X} = x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = a\,. \tag{9.32}$$

Аналогично (9.24) и при условии равномерного распределения определится оценка дисперсии

$$D\tilde{X} = M\left(\tilde{X} - M\tilde{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x\right)^2 P\left(X = x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x - x_i\right)^2. \tag{9.33}$$

Таким образом, оценки математического ожидания (9.32) и дисперсии (9.33) являются функциями выборки. Если использовать в качестве оценки математического ожидания случайной величины X среднее арифметическое ее выборочных значений, то можно показать, что такая оценка не смещена в смысле приведенного выше определения (9.29). Действительно, поскольку

$$\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\,, \tag{9.34}$$

то проверка несмещенности сводится к рассмотрению соотношения

$$Ma = M\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = a\right\}. \tag{9.35}$$

Можно также показать состоятельность и эффективность оценки.

*Оценка функции распределения.* Задача оценки функции распределения будет решаться в следующей постановке. Пусть имеется выборка из генеральной совокупности, представленной случайной величиной X. Требуется оценить распределение F(x) этой случайной величины, о которой известно, что она непрерывна. Алгоритм построения распределения имеет следующий вид:

Шаг 1. Расположим наблюдения $x_i$ в порядке их возрастания. Последовательность неубывающих величин

$$X_1^* \le X_2^* \le \ldots \le X_n^*,$$

полученных после упорядочения, назовем вариационным рядом.

Шаг 2. По вариационному ряду, в котором нет совпадающих точек, построим неубывающую функцию

$$\overline{F}_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le X_1^*, \\ k - 1/n \text{ при } X_{k-1}^* < x \le X_k^*, \\ 1 \text{ при } x > X_n^*, \end{cases}$$

которая является неубывающей ступенчатой функцией со скачками, равными по величине 1/n. Если l точек вариационного ряда совпадают и равны $X_i^*$, то сыкачок в точке $X_i^*$ равен l/n. Функция, построенная по данным наблюдениям, называется эмпирической функцией распределения. Ее график изображен на рис. 9.6.

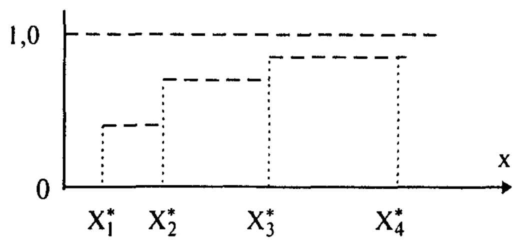



Рис. 9.6

Построение графика эмпирической функции распределения можно выполнить по формуле

$$F_n(x) = v(x)/n,$$

где v(x) — число точек $X_k^*$, меньших или равных x.

Методы математической статистики для оценки характеристик случайных величин имеют широкое применение в задачах гуманитарной сферы деятельности человека.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.

*Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я.* Элементарное введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1970.

*Колемаев В. А., Староверов О. В., Турундаевский В. Б.* Теория вероятностей и математическая статистика / Под ред. В. А. Колемаева. М.: Высшая школа, 1991.

*Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.

# 3. ИНФОРМАТИКА

В третьей части книги определяются важные понятия и описываются методы и средства информатики. Основу изложения составляют методы принятия решений, структура информационно-вычислительных систем и глобальных компьютерных систем типа Интернет, а также алгоритмический язык ПАСКАЛЬ. Рассмотрены вопросы применения методов математики и информатики в исследовании некоторых проблем гуманитарной сферы деятельности.

*Глава 10*

## 10. МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В различных областях науки и человеческой деятельности встречаются ситуации, когда необходимо принимать решения в обстановке неполного учета определяющих их условий, т. е. в условиях неопределенности. В связи с этим, а также в связи с весомостью последствий от принятия неправильных решений необходима определенная технология принятия решений. Рассмотрим методы получения системных оценок для количественных характеристик явлений и ситуаций в пространстве «варианты—условия». Такие методы позволяют принимать решения на основе установок лица, принимающего решения. Кроме того, опишем модели принятия решений на основе теории риска, использующей вероятностно-статистический фундамент, методы комбинаторной аппроксимации для графов и матриц предпочтения, а также принятие решений на основе нечетких множеств и чисел.

### 10.1. ПРИНЦИПЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Для повышения надежности принятия правильного решения сформулируем ряд принципов, которыми целесообразно пользоваться.

*Принцип формализации* предполагает строгую формулировку целей, моделей, вариантов и ограничений при принятии решений, соответствующую уровню исходной неопределенности задачи. Адекватная формализация играет определяющую роль при оптимизации или рационализации и может оказать существенную помощь на первом этапе принятия решений.

*Принцип руководящих критериев* позволяет осознанно подойти к решению проблемы принятия решений. Практически данный принцип не исключает принятие решений на основе интуиции индивидуума. Однако руководящие критерии выбора позволяют дать качественную характеристику стратегии лица, принимающего решения. В этом смысле руководящие критерии смыкаются с логикой принятия решения, определяя логику качественно. Тем самым достигается обобщение логических заключений о критериях выбора решения на основе формализованной постановки задачи выбора в условиях объективно существующей неопределенности.

*Принцип объективизированной неопределенности* предполагает адекватное определение неизвестных факторов, другими словами — класса неопределенности. Задание класса неопределенности весьма важно в сложных задачах, когда лицо, принимающее решения, объективно использует информацию о неопределенности либо формализует степень неопределенности.

*Принцип системности* предполагает некоторую организационную схему представления исходного ограниченного набора данных при принятии решений, что позволяет применить далее регулярные процедуры принятия решений на основе качественных стратегий.

*Принцип минимизации риска* предполагает минимизацию опасности, угрозы, связанных с принятием неверных решений. Первоначально термин «риск» применялся в коммерции, экономике, и с ним связывалась неудача в каком-либо предприятии, размер потерь (или выигрыша). Постепенно, по мере психологической готовности, понятие риска стало привычным, получило объективные количественные характеристики, дифференцированные для каждой задачи. Минимизация риска стала своего рода элементом интеллектуализаций технологии принятия *решений.*

Руководствуясь перечисленными выше принципами, можно в первом приближении осознанно подойти к постановке задачи принятия решений.

## 10.2. МЕТОД СИСТЕМНЫХ МАТРИЦ

Метод системных (решающих) матриц широко распространен при принятии решений, поскольку в структурированной форме представляет *наборы вариантов и условий*, характеризующих ситуацию принятия решений. В основу обработки матриц системных оценок положены классические алгоритмы минимаксного типа, методы Байеса—Лапласа, опирающиеся на вероятностные модели, а также критерии логического типа.

### 10.2.1. Принятие решений на основе линейного упорядочения

После рассмотрения основных принципов можно дать ряд определений, способствующих адекватной формализации задачи принятия решений.

***Определение.*** Будем понимать под принятием решений выбор одного варианта E(i) из некоторого множества (набора) вариантов E = {E(*i*)}, *где i — номер варианта.*

Предположим, что имеется конечное число вариантов:

$$E(1),\ E(2),\ \ldots,\ E(i),\ \ldots,\ E(m). \qquad (10.1)$$

Обычно интуитивно ясно, что такое вариант. Однако дадим строгое определение, без которого формализация выбора варианта не может быть выполнена корректно.

***Определение.*** Будем называть вариантом E(i) один из способов построения системы или выбора стратегии, допускающих коллективное определение результата e(i). Другими словами, с вариантом E(i) связана соответствующая оценка e(i) (как и ранее, номер варианта обозначен буквой i).

Пусть оценки e(i) характеризуют такие величины, как выигрыш, полезность или надежность. Чтобы найти вариант e(i0) с наибольшим значением результата ($i_0$ — номер лучшего варианта), воспользуемся правилом выбора

$$e(i_0) = \max_i e(i) \qquad (10.2а)$$

при целевом условии типа «максимум» или правилом выбора

$$e(i_0) = \min_i e(i) \qquad (10.2б)$$

для целевого условия типа «минимум».

Выбор оптимального правила выбора для целевого условия типа (10.2а) производится с помощью критерия

$$E(0) = \{E(i_0) \mid (E(i_0) \in E) \wedge e(i_0) = \max_i e(i)\}, \qquad (10.3)$$

который определяет процедуру принятия решений на основе <u>линейного упорядочения оценок</u>, предполагающего расположение оценок по мере их возрастания или убывания. Соответствующим образом записывается правило выбора для целевого условия типа (10.2б).

Правило выбора (10.3) читается следующим образом: множество E(0) оптимальных вариантов состоит из тех вариантов $E(i_0)$, которые принадлежат множеству вариантов E и имеют оценки $e(i_0)$, максимальные среди всех оценок e(i). Логический знак $\wedge$ читается как «И». Здесь учитывается факт наличия нескольких вариантов. По сути процедура принятия решения на основе (10.3) является простой в связи с наличием линейного упорядочения оценок в виде ряда оценок, расположенных по возрастанию или убыванию.

Приведенное правило легко согласуется с интуитивным принятием решений. Необходимо иметь в виду, что многие задачи принятия решений в более сложных ситуациях сводятся к схеме линейного упорядочения. Мы рассмотрели пока вариант линейного упорядочения числовых оценок. Однако возможна также обработка качественных оценок, которые могут использоваться при принятии решений в отсутствие количественных оценок. Эти методы будут рассмотрены далее.

В теории управления изучаются системы управления с различными регуляторами, например, модального, локально-оптимального и оптимального типов. Синтезируя эти регуляторы по известным методикам, можно получать уравнения замкнутых систем: $dx/dt = Ax + Bu$; $u = c(1)x$ для модального регулятора, $u = c(2)x$ для локально-оптимального регулятора и $u = c(3)x$ для оптимального регулятора.

Мы имеем три типа систем управления, которые нетрудно сравнить, вычисляя единый интегральный квадратичный критерий качества $J(i)$, где $i$ — номер типа регулятора для замкнутых систем: $dx/dt = [A + B\,c(i)]\,x$, $i = 1, 2, 3$. Естественно, что выбор лучшего варианта регулятора может быть сведен к применению правила (10.3) с заменой операции максимизации на операцию минимизации.

### 10.2.2. Классические критерии принятия решений

Достаточно часто принятие решений происходит в условиях выбора из многих вариантов $E(i)$ для различных внешних условий (состояний) $F(j)$. В этом случае совокупность соответствующих оценок образует матрицу (таблицу) системных оценок. Термин «системные оценки» употребляется для того, чтобы отразить факт рассмотрения всей совокупности вариантов и условий, в которых происходит процесс принятия решений. Для иллюстрации конкретной ситуации обратимся к примеру.

Необходимо выпустить изделие из некоторого материала, долговечность которого при допустимых затратах невозможно определить. Нагрузки считаются известными. Требуется решить, какие размеры должны иметь изделия из данного материала. Рассмотрим варианты решений: $E(1)$ — выбор размеров в предположении максимальной долговечности; $E(m)$ — выбор размеров в предположении минимальной долговечности; $E(i)$ — промежуточные решения по долговечности. Условия, требующие рассмотрения, таковы: $F(1)$ — условия, обеспечивающие максимальную долговечность; $F(n)$ — условия, обеспечивающие минимальную долговечность; $F(j)$ — промежуточные условия.

Под решением будем понимать оценку, соответствующую некоторому варианту E(i) и некоторому условию F(j), причем оценка e(i, j) может характеризовать экономический эффект (прибыль), полезность, рациональность или надежность. Обычно далее будем называть полезностями решений числа e(i, j), которые составляют матрицу решений (матрицу системных оценок) для различных i-х вариантов при j-х условиях. Естественно, что описанная ситуация может быть представлена матрицей, и выбор варианта состоит уже в выборе из множества пар.

Для формулировки правила принятия решений введем ряд новых понятий.

***Определение.*** Будем называть матрицей системных оценок (матрицей решений) матрицу вида табл. 10.1.

Таблица 10.1

| | Условия | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | F(1) | ... | F(j) | ... | F(n) |
| варианты | E(1) | | ... | e(1, j) | ... | e(1, n) |
| | ... | | | | | |
| | E(i) | e(i, 1) | ... | e(i, j) | ... | e(i, n) |
| | ... | | | | | |
| | E(m) | e(m, 1) | ... | | ... | e(m, n) |

Принятие решений должно обеспечить выбор пары

$$E(i_0),\ F(j_0), \tag{10.4}$$

которая является предпочтительной с точки зрения некоторого критерия «оптимальности», «рациональности» или «полезности». Заметим, что обработка матрицы системных оценок потребует двойного применения рассмотренных выше процедур линейного упорядочения.

Перейдем к рассмотрению технологии процесса принятия решений на основе обработки оценок e(i, j). Для этого введем дополнительное понятие оценочной функции и далее на основании этого понятия сформируем правила принятия решений, их классификацию, обобщения.

***Определение.*** Пусть различные варианты E(i) и различные условия F(j) порождают матрицу оценок e(i, j) (см. табл. 10.1). Будем называть оценочной функцией варианта $e(i_r)$ функцию, соответствующую каждому варианту E(i) и характеризующую все последствия выбора этого варианта (решения).

Другими словами, оценочная функция варианта должна характеризовать правило «свертки» по условиям F(j), т. е. выбора решения при фиксации варианта. После введения оценочной функции $e(i_r)$ варианта E(i) процедура выбора сводится к применению правила (10.3). Важное значение приобретает смысл величины $e(i_r)$, который определяется стратегией принятия решения. Поэтому далее рассмотрим ряд оценочных функций для вариантов.

Допустим, что последствия каждого из альтернативных решений характеризуются суммой его наибольшей и наименьшей оценок. При такой логике принятия решений оценочная функция примет вид

$$e(i_r) = \min_j e(i, j) + \max_j e(i, j)\,. \qquad (10.5)$$

Объединение критерия линейного упорядочения (10.3) и правила свертывания по условиям (10.5) дает наилучший в этом смысле результат

$$e(i_0, j_0) = \max_i e(i_r)\,. \qquad (10.6)$$

Таким образом, алгоритм принятия решений методом системных матриц имеет следующие шаги.

Шаг 1. Свертывание по условиям.

Шаг 2. Линейное упорядочение, позволяющее выбрать вариант.

Шаг 3. Выбор условия по принципу наименьшего отклонения от результата свертывания по условиям.

Очевидно, что двухэтапному принятию решений соответствует значительно большее число вариантов, которые могут иметь различный содержательный смысл. Остановимся на этом весьма важном вопросе. Лицо, принимающее решение, исходит из выбора между оптимистическим и пессимистическим подходами, компромиссом или нейтралитетом. В этом случае выбор определяется соответствиями, имеющими психологическую окраску действий лица, принимающего решение:

$$e(i_r) = \min_j e(i,j) \to \underline{\text{пессимизм}};$$

$$e(i_r) = \max_j e(i,j) \to \underline{\text{оптимизм}};$$

$$e(i_r) = \min_j e(i,j) + \max_j e(i,j) \to \underline{\text{компромисс}};$$

$$e(i_r) = \frac{1}{m}\sum_j e(i,j) \to \underline{\text{нейтралитет}}. \qquad (10.7)$$

Для упорядоченного описания возможных вариантов принятия решений представим процедуры принятия решений на этапах свертывания по условиям и свертывания по вариантам в виде системной матрицы (табл. 10.2). Диагональные элементы таблицы соответствуют одинаковой стратегии на двух этапах. Недиагональные элементы — различным стратегиям на отдельных этапах.

Таблица 10.2

| Стратегия свертывания по вариантам | Стратегия свертывания по условиям | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Пессимизм | Оптимизм | Компромисс | Нейтралитет |
| Пессимизм | Пессимизм | | | |
| Оптимизм | | Оптимизм | | |
| Компромисс | | | Компромисс | |
| Нейтралитет | | | | Нейтралитет |

Отметим некоторые варианты двухэтапных стратегий. Например, применение последовательно оптимистической позиции как на этапе свертывания оценок варианта по условиям F(j), так и при выборе варианта приводит к правилу:

$$e = \max_i e(i_r) = \max_i \left[\max_j e(i,j)\right] \qquad (10.8)$$

В этом случае из матрицы системных оценок (табл. 10.2) выбирается максимальный элемент. Стратегия выбора (10.8) отождествляется со стратегией азартного игрока.

*Пессимистическая позиция* лица, принимающего решение, характеризуется очевидным критерием

$$e = \max_i e(i_r) = \max_i \left[ \min_j e(i, j) \right]. \tag{10.9}$$

*Позиции нейтралитета* соответствует формула вычисления оценок вида

$$e = \max_i e(i_r) = \max_i \left[ \frac{1}{n} \sum_j e(i, j) \right]. \tag{10.10}$$

Последняя позиция имеет обоснование: все встречающиеся отклонения от среднего допустимы, и выбор параметров осуществляется оптимально с этой точки зрения.

Можно дополнить схемы принятия решений еще одной промежуточной позицией лица, принимающего решение, — позицией относительного пессимизма, которой соответствует критерий:

$$e = \min_i e(i_r) = \min_i \max_j \left[ \max_j e(i, j) - e(i, j) \right]. \tag{10.11}$$

В этом случае лицо, принимающее решение, оценивает потери в результате по сравнению с найденным по каждому варианту наилучшим результатом, а затем из совокупности наихудших результатов выбирает наилучший согласно представленной оценочной функции варианта.

Приведенные выше простейшие критерии выбора имеют ясное логическое объяснение мотивов, которыми руководствуются лица, принимающие решения. Теперь можно перейти к рассмотрению классических обобщенных критериев принятия решений: минимаксному критерию, критерию Байеса—Лапласа, критерию Сэвиджа, а также к их обобщениям.

### 10.2.3. Минимаксный критерий

Минимаксный критерий использует оценочную функцию, соответствующую пессимистической позиции:

$$Z_{MM} = \max_i e(i_r),\ e(i_r) = \min_j e(i, j). \tag{10.12}$$

Правило выбора решения в соответствии с минимаксным критерием интерпретируется следующим образом. Матрица решений $e(i, j)$ дополняется еще одним столбцом из наименьших результатов $e(i_r)$ каждой строки. При принятии решения следует выбрать варианты $E(i_0)$, в строках которых стоят наибольшие значения $e(i_r)$ этого столбца. Выбранные таким образом варианты полностью исключают риск, поскольку лицо, принимающее решение, ориентируется на пессимистическую позицию, что не позволяет столкнуться с худшим результатом. Вне зависимости от условий F(j) результат выбора не может оказаться ниже $Z_{MM}$. Это качество относит минимаксный критерий к числу фундаментальных.

Применение минимаксного критерия оправдано в следующих ситуациях:

- нет сведений о возможности появления внешних состояний (условий) (например, неизвестны вероятности появления F(j));
- приходится считаться с появлением различных внешних состояний F(j);
- решение реализуется только один раз;
- необходимо исключить всякий риск (недопустимо получение результата ниже значения $Z_{MM}$).

### 10.2.4. Критерий Байеса—Лапласа

Для построения оценочной функции в данном критерии используется априорная информация о вероятностях q(j) появления внешних условий F(j). Тем самым в рамках простейшей вероятностной модели учитывается каждое из возможных последствий появления различных условий. Тогда для критерия Байеса—Лапласа справедливо следующее правило вычисления оценки:

$$Z_{BL} = \max_i e(i_r),\ e(i_r) = \sum_j e(i,j)q(j). \qquad (10.13)$$

Фактически в данном критерии в качестве оценочной функции выбирается математическое ожидание (среднее значение) оценки, соответствующей i-му варианту (усреднение происходит по множеству условий F(j). Соответствующее правило принятия решений (10.13) имеет вероятностную интерпретацию. При этом ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- вероятности появления состояний (условий) F(j) известны и не зависят от времени;
- решение реализуется (теоретически) бесконечно много раз;

• для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск.

Позиция лица, принимающего решение на основе критерия Байеса—Лапласа, более оптимистическая, чем позиция лица, принимающего решение по минимаксному критерию.

## 10.3. МЕТОДЫ МИНИМИЗАЦИИ РИСКА

Рассмотренные ранее методы принятия решений использовали критерии обработки элементов матрицы системных оценок. При этом отмечалось, что имеется некоторый риск принять неправильное или неэффективное решение. Здесь мы опишем методы принятия решений на основе явного определения риска и его минимизации. Характеристики риска даются в рамках вероятностно-статистических моделей, классификация которых дана на рис. 10.1.


Рис. 10.1

### 10.3.1. Минимизация риска на основе вероятностных моделей событий

В понятие риска вкладывается различный смысл. Однако общим является то обстоятельство, что риск связан с неуверенностью, произойдет или не произойдет нежелательное событие. Мы подойдем к понятию риска с учетом содержания задачи принятия решений. При этом можно исходить из качественной характеристики ущербов от риска, приведенной на рис. 10.2. Количественные характеристики риска, приведенные на рис. 10.2, могут быть использованы для формирования матрицы системных оценок и применения соответствующих стратегий принятия решений. Однако здесь мы будем рассматривать методы принятия решений путем непосредственной минимизации риска. Модели риска могут строиться с помощью моделей теории случайных событий и теории случайных функций, описанных в глава 9.


Рис. 10.2

Учитывая необходимость количественных оценок, можно использовать следующую формулировку: значение риска определяется как произведение значения случайной величины и вероятности ее реализации — меры.

Последствие нежелательного события может описываться и оцениваться специфическими параметрами: от экономических до этических ценностей. Мерой возможности наступления события служит вероятность q его наступления. Из сказанного следует, что риск, представленный математическим ожиданием, определяется как

$$R = Aq, \tag{10.14}$$

где A — ущерб; q — его вероятность.

Если риск определяется несколькими параметрами ущерба A(i), которые могут наступить с вероятностями q(i), то (10.14) целесообразно обобщить в виде математического ожидания:

$$R = \sum_{i} A(i)q(i). \tag{10.15}$$

Количественно описание риска (10.15) выражается с помощью теоретико-вероятностного подхода. Применим методы теории вероятностей, изложенные в глава 9, для получения моделей риска. Приводимые далее рассуждения иллюстрируются схемой, приведенной на рис. 10.3.

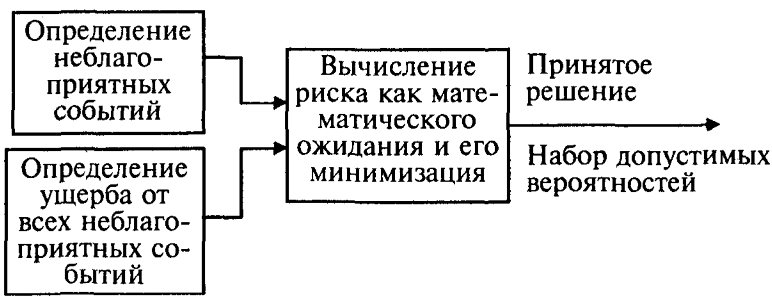



Рис. 10.3

*Для* характеристики риска можно использовать алгебру событий, построенную на множестве S всех возможных неблагоприятных элементарных событий.

***Определение.*** События {S(1), S(2), ..., S(i), ..., S(n)} образуют множество S и называются *элементарными событиями,* если они отражают весь комплекс исходных неблагоприятных событий, определяющих риск.

***Определение.*** Будем называть составным событием, или событием K, ***сочетания элементарных событий*** (сочетания отличаются хотя бы одним событием).

Целесообразно включить в K множество S и пустое множество 0 (пустое множество соответствует отсутствию неблагоприятных событий). Некоторое сочетание K является подмножеством неблагоприятных событий множества S:

$$K = \{S(k_1), S(k_2), ..., S(k_j), ..., S(k_m), 0\}, \qquad (10.16)$$

где события $S(k_j)$ образуют систему событий.

В множестве всех событий выполняются обычные операции алгебры множеств. Если K(1) и K(2) — два сочетания неблагоприятных событий, то можно определить их следующие свойства, изученные нами ранее.

*Объединение* K(1) и K(2) образует сочетание, включающее все элементарные события, принадлежащие K(1) *или* K(2).

*Пересечение* K(1) и K(2) образует сочетание, включающее все элементарные события, одновременно принадлежащие K(1) и K(2).

*Разность* K(1)/K(2) образует сочетание, включающее все элементарные события, принадлежащие K(1), но не принадлежащие K(2).

*Дополнение* S\K образует сочетание, включающее все элементарные события, не принадлежащие K.

Пусть с некоторым вариантом риска E связаны элементарные сочетания неблагоприятных событий $K(i_1)$, $K(i_2)$, ..., $K(i_j)$, ..., $K(i_m)$. Формула «элементарные сочетания неблагоприятных событий» означает, что никакое собственное подмножество сочетаний $K(i_j)$ не может встречаться как сочетание неблагоприятных событий. Если обозначить через N событие, соответствующее гарантированному отсутствию неблагоприятных свойств для рискованного варианта решения E(i), то множество

$$K(i) = \{K(i_1), K(i_2), ..., K(i_j), ..., K(i_k), N\} \qquad (10.17)$$

образует полную систему событий, связанную с решением E(i).

На множестве введенных событий, как и обычно, введем меру в виде вероятности. Положим, что каждому сочетанию неблагоприятных событий $K(i_j)$, которое может реализоваться в результате принятия решения E(i), а также событию N можно приписать вероятности $P[K(i_j)]$ и $P[N(i)]$:

$$0 \le P\left[K\left(i_j\right)\right] \le 1,\ \sum_j P\left[K\left(i_j\right)\right] + P[N] = 1. \qquad (10.18)$$

Если далее каждому сочетанию $K(i_j)$ может быть поставлено в соответствие количественно описываемое последствие — ущерб $A(i_j)$, то значение риска R(i) при выборе решения E(i) определяется формулой

$$R(i) = \sum_j A\left(i_j\right) P\left[K\left(i_j\right)\right]. \qquad (10.19)$$

Нетрудно видеть, что риск определяется величинами $A(i_j)$ и $P[K(i_j)]$. Потому для выбора значений этих величин либо набора вероятностей, либо допустимых значений ущербов, либо одновременно тех и других величин можно сформулировать задачу минимизации риска (10.19) при ограничениях на параметры (10.18). Соответствующая экстремальная задача примет вид:

найти argmin {R(i) при ограничениях (10.18)}, (10.20)

где символом «argmin» обозначен аргумент, минимизирующий риск. Выражение (10.20) — задача на условный экстремум, решение которой можно получить аналитическими или численными методами условной минимизации в конечномерных пространствах. Полезно иметь в виду, что величина R(i) представляет собой средний ущерб при принятии варианта решения E(i) (математическое ожидание ущерба).

### 10.3.2. О минимизации риска на основе обобщенных вероятностных моделей

Для описания неблагоприятных событий $K(i_j)$ в случае сложной вероятностной схемы требуются специальные методы. Ранее было дано определение риска на основе известных вероятностей неблагоприятных событий. Практические задачи по вычислению риска могут опираться на более сложные вероятностные модели, к которым относятся модели, использующие условные вероятности, обобщенные модели умножения вероятностей и формулы Байеса. Мы уже рассмотрели идеи построения подобных моделей в п. 9.3. На основе этих моделей определяются вероятностные характеристики, соответствующие изучаемому событию, затем формируется модель риска в виде математического ожидания ущерба. После этого задача принятия решений сводится к решению некоторой экстремальной задачи. Совокупность операций по принятию решения определена схемой, приведенной на рис. 10.4.

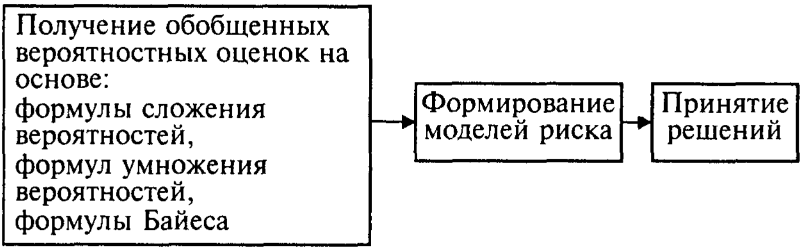



Рис. 10.4

Обобщенные вероятностные оценки будут строиться на основе того, что неблагоприятные события зависят от других событий, вероятности которых заданы. При этом необходимо использовать понятие условных вероятностей, введенное в п. 9.3.

## 10.4. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ КОМБИНАТОРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Перейдем к изучению методов принятия решений на основе преобразований формальных моделей предпочтения в виде графов или матриц, определяющих связи между вариантами. При этом осуществляется последовательный переход от некоторого исходного графа предпочтений или матрицы предпочтений для вариантов в конечный граф или матрицу через промежуточные опорные ситуации. Выделим типовые задачи и исследуем процесс принятия решения как последовательное преобразование исходной структуры в финальную структуру, оптимальным образом аппроксимирующую исходную.

### 10.4.1. Общая схема метода комбинаторной аппроксимации

Методы принятия решений на основе комбинаторной оптимизации весьма разнообразны. Классификация методов решения данного класса задач дана на рис. 10.5.

На классическом алгоритмическом уровне на множестве объектов с заданной структурой предпочтений могут рассматриваться задачи дискретной оптимизации — о рюкзаке, о назначениях, об оптимальной упаковке и др.

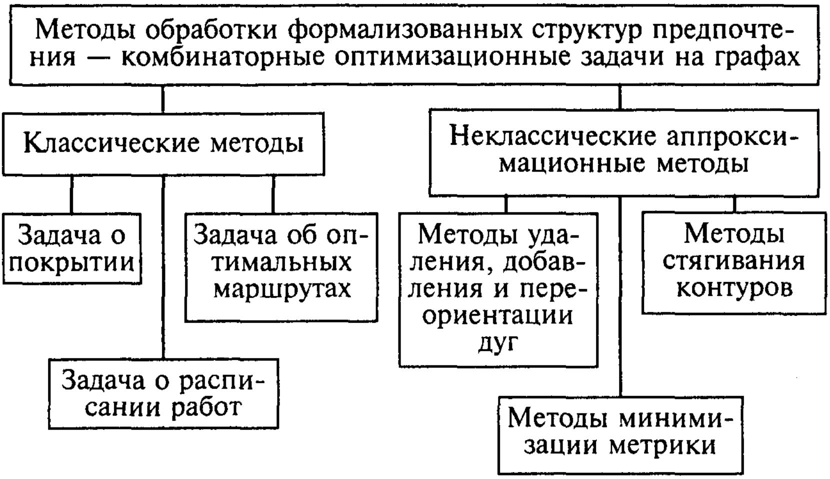



Рис. 10.5

Формализованные модели могут также допускать принятие решений на основе известных оптимизационных методов (метод ветвей и границ, динамическое программирование и др.).

Важное значение имеет решение задачи аппроксимации структур с учетом разрешимости оптимизационных проблем в условиях ограничений. Решение задачи этого уровня должно обеспечиваться адекватным программным обеспечением.

Остановимся подробнее на методах комбинаторной аппроксимации.

Обычно задачи принятия решений характеризуются слабой структурированностью. Исходная информация часто неполна или противоречива, поскольку для ее получения используются не только строгие объективные измерения или формальные методы, но и экспертные оценки. Корректное принятие решений в этом случае требует дополнительной структуризации проблемы, пополнения имеющейся информации и устранения (хотя бы частично) противоречий. Тогда исходная проблема может быть аппроксимирована некоторой хорошо структурированной проблемой, близкой к исходной в некотором смысле. Мы изучим классификацию таких аппроксимаций, которые базируются на теоретико-графовых моделях, определяющих предпочтения между вариантами решений.

Перейдем к математическому моделированию процесса принятия решений. В рамках задач принятия решений под моделью часто понимаются комбинаторные задачи дискретной оптимизации и методы их решений. Сущность рассматриваемого подхода к принятию решений состоит в аппроксимации структур оптимальным образом на основе некоторого принципа и метода. Выбор метода упрощается, если класс аппроксимирующей структуры задан. Напомним, что под аппроксимацией будем понимать замену исходного объекта (в данном случае графа или матрицы предпочтений) другим объектом, близким к исходному в некотором смысле. Тогда решение задачи аппроксимации может быть получено с помощью следующего алгоритма.

Шаг 1. Формирование графов и матриц предпочтений.

Шаг 2. Выбор метрики (определяющей смысл близости) и аппроксимирующих матриц или графов (аппроксимант).

Шаг 3. Выбор метода минимизации метрики при ограничениях.

Модели принятия решений в рамках описанного выше подхода должны удовлетворять условиям корректности, адекватности, полноты и универсальности. Под корректностью здесь понимается математическая и формально-логическая непротиворечивость. Адекватность, как и традиционно, определяет соответствие оригиналу. Полнота должна характеризовать широкий спектр перебираемых вариантов.

### 10.4.2. Графы и матрицы предпочтений

Формирование графов и связанных с ними матриц предпочтений является (как следует из приведенного в п. 10.4.1 алгоритма) первым шагом на пути создания алгоритма принятия решений с помощью комбинаторных методов, широко использующих модели на основе теории графов.

***Определение.*** Будем называть неориентированным г р а ф о м совокупность узлов {U} и соединяющих их дуг (D) (рис.10.6). Совокупность узлов U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}; совокупность дуг D = {1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, 7′, 8′}.

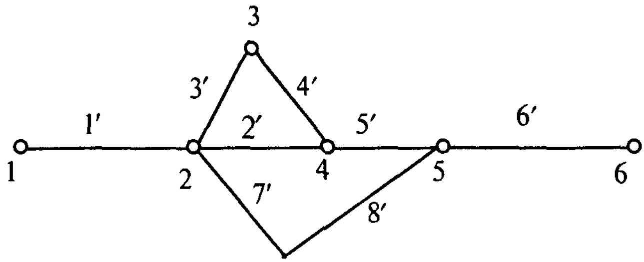



Рис. 10.6

***Определение.*** Граф, на дугах которого стрелками определены возможные направления движения, будем называть ориентированным графом (или орграфом).

Для описания степени превосходства одной альтернативы над другой и возникающей структуры предпочтений можно пользоваться аппаратом теории ориентированных графов. Тогда задача аппроксимации может ставиться как задача аппроксимации исходной структуры путем подбора в некотором смысле наилучшего графа из некоторого заданного класса. Для этого класса характерно линейное упорядочение.

Поясним сказанное следующими рассуждениями. Как было показано в п. 10.2, совокупность оценок (отвечающая условиям-вариантам) обрабатывается с помощью специальных алгоритмов. В результате обработки принимается решение, приемлемое в том или ином смысле. В рассматриваемой ситуации на основании анализа оценок строится ориентированный граф предпочтений на основе парных сравнений. Если в процессе парного сравнения выявляется факт превосходства «i-го» объекта над «j-м» объектом, то в графе проводится дуга из узла «i» в узел «j» (превосходство понимается в смысле соотношения оценок). Аналогичная операция осуществляется в матрице, когда ее элементы формируются как оценки результата сравнения. На основе совокупности парных оценок строится граф или матрица. На дугах графа можно отразить не только факт, но и степень предпочтения (превосходства) весом a(i, j).

Если парное сравнение выявляет лишь факт превосходства одного объекта над другим (или их равноценности), то множество пар с введенным на нем отношением можно однозначно сопоставить с графом, в частности графом простой структуры предпочтений.

***Определение.*** Будем называть ориентированный граф (орграф) графом простой структуры, если множеству X соответствует орграф G = (V, U), причем:

1) множество вершин V соответствует объектам множества X = [x(1), ..., x(i), ..., x(j), ..., x(k)];

2) дуга из вершины i в вершину j проводится, если объект x(i) превосходит объект x(j) (т. е. x(i) > x(j)).

Если же результат сравнения отражает также степень (силу, интенсивность и т. п.) превосходства, то во вводимом орграфе G некоторая дуга оказывается взвешена элементом a(i, j). Такой граф будет по сути графом предпочтения.

Как отмечалось ранее, для принятия решений могут использоваться матрицы предпочтений.

***Определение.*** Будем называть матрицей парных сравнений матрицу A = [a(i, j)], содержащую в качестве элементов a(i, j) результаты сравнений элементов с номерами i и j множества

$$X = [x(1), ..., x(i), ..., x(j), ..., x(n)],$$

причем здесь отражается возникающее бинарное отношение предпочтения (безразличия на множестве).

Далее нам понадобятся симметричные матрицы, обладающие свойством a(i, j) = a(j, i).

Симметричные элементы матрицы A = [a(i, j)] размера $n \times n$ парных сравнений a(i, j) и a(j, i) должны быть равными, если соответствующие объекты (x(i) и x(j)) равноценны т. е. x(i) ~ x(j)). Если же x(i) > x(j), то должно быть a(i, j) > a(j, i) и наоборот.

Кроме того, на элементы матрицы a(i, j) накладываются дополнительные калибровочные ограничения (или калибровки), однозначно связывающие попарно симметричные элементы a(i, j) и a(j, i). Калибровки позволяют придать оценкам различный смысл, а также расширять относительные характеристики элементов множества. Наиболее распространенные калибровочные соотношения приведены в табл. 10.3.

Таблица 10.3

| Наименование калибровки | Соотношения между элементами матрицы предпочтений |
|---|---|
| Простая | Для i, не равных j: $a(i,j)=\begin{cases}1, \text{если } x(i)>x(j),\\ 0, \text{если } x(i)<x(j),\\ 0{,}5, \text{если } x(i)\sim x(j).\end{cases}$ ~ — символ эквивалентности |
| Турнирная | Для всех i и j, для которых a(i, j) > 0 a(i, j) + a(j, i) = c, c — постоянная |
| Степенная | Для всех i и j, для которых a(i, j)>0: a(i, j) a(j, i) = 1 |
| Кососимметричная | Для всех i и j: a(i, j) + a(j, i) = 0 |
| Вероятностная | Для всех i и j: 0 ≤ a(i, j) ≤1, a(i, j) + a(j, i) = 1 |

Рассмотрим конкретное содержание отдельных вариантов калибровок. Для простой калибровки интерпретация соответствует простому превосходству. Для турнирной калибровки: a(i, j) — число очков, набранных игроком x(i) во встречах с игроком x(j), c = const — количество встреч. Для степенной калибровки имеем ситуацию, когда объект x(i) превосходит в парном сравнении объект x(j) в a(i, j) раз. Для кососимметричной калибровки характерно, что объект x(i) превосходит в парном сравнении объект x(j) на a(i, j). Наконец, вероятностная калибровка — a(i, j) характеризует вероятность превосходства x(i) над x(j). При фиксации калибровочных соотношений (табл. 10.3) переход от матрицы парных сравнений A = [a(i, j)] к орграфу G = (V, U) становится взаимно-однозначным.

### 10.4.3. Метрики, аппроксиманты и минимизация

В силу выбранного аппроксимационного подхода к принятию решений (см. алгоритм в 10.4.1) необходимо ввести стандартные понятия и определения. Введем одно из первых понятий — метрику, которая, как уже упоминалось, является обобщением понятия расстояния (аксиомы метрики см. в гл. 4). Тогда на множестве структур введем метрику $\rho(x, y)$ и рассмотрим задачу поиска наилучшей аппроксиманты, обеспечивающей минимум метрики:

$$\rho(x, y) \to \min, \tag{10.21}$$

где x — аппроксимируемая структура, определенная матрицей предпочтений A (см. табл.10.3) , а $Y \in y$ — множество аппроксимирующих структур (аппроксимант), заданных матрицами типа B.

Весьма важно понять, что минимизация в (10.21) осуществляется путем выбора конкретной структуры y из множества структур Y. Чаще всего в подобных задачах используется метрика хемингового типа:

$$r(x, y) = k\sum_{i \neq j}\left|a(i, j) - b(i, j)\right|, \tag{10.22}$$

где k — параметр; a(i, j), b(i, j) — элементы матрицы, исходной и аппроксимирующей структуры соответственно.

Рассмотрим конкретные процедуры аппроксимации.

1. *Аппроксимация с максимальным сохранением исходной структуры за счет сохранения дуг.* Пусть исходная структура предпочтений задана взвешенным орграфом G = (V, U) и соответствующей матрицей парных сравнений A = [a(i, j)]. Назовем произвольную структуру L = (V, U(L)) согласованной и частично совпадающей с G, если веса дуг e(i, j) структуры L выбраны так, что:

- для номеров i и j, определяющих общие дуги структур G и L, имеет место равенство

$$e(i, j) = a(i, j);$$

- для номеров i и j, принадлежащих разности множеств U и U(L), имеет место

$$e(i, j) = 0.$$

В этом случае согласованная структура L может быть получена из исходной удалением произвольных дуг и добавлением дуг нулевого веса. При этом справедливо, что

$$\rho(G,L)=\sum_{i\neq j}a(i,j), \tag{10.23}$$

причем суммирование ведется по индексам i и j, принадлежащим разности множеств U и U(L), а метрика понимается в смысле (10.22).

2. *Аппроксимация с минимальным рассогласованием в смысле некоторого веса.* В этом случае для отыскания аппроксимирующей структуры требуется решить задачу

$$\sum_{M}a(i,j)+\sum_{N}a(i,j)\rightarrow \min, \tag{10.24}$$

где M — множество пар (i, j), принадлежащих разности множеств U и U(L), а N — множество пар (i, j), принадлежащих разности множеств U(L) и U.

### 10.4.4. Модели «спортивного» типа

Данная группа методов принятия решений используется при определении победителей в соревнованиях с n игроками. В качестве ранжирующего фактора используется набранная i-м игроком сумма очков S(i):

$$S(i)=\sum_{j\neq i}a(i,j),\ i=1,2,...,n, \tag{10.25}$$

где элементы a(i, j) матрицы A могут быть определены из табл.10.3.

Фактически в (10.24) выполняется суммирование строк матрицы A. В наиболее часто встречающейся схеме объекты упорядочиваются по убыванию S(i). В подобных задачах распространена калибровка турнирного типа или типа простой структуры (см. табл. 10.3).

Одной из альтернатив для турнирной модели является, например, модель последовательного вычленения лидера (по Льюсу). Сначала определяется лидер в соответствии с моделью турнирного типа. Лидер помещается на первое место в строящемся упорядочении, а далее соответствующие столбец и строка из матрицы А вычеркиваются. Затем к полученной матрице снова применяется модель турнирного типа и т. д.

### 10.4.5. Модель упорядочения

Данная модель, близкая к спортивной, была предложена В. Е. Жуковиным для кососимметричных матриц предпочтений. Для произвольной пары объектов введем понятие интегральной степени превосходства

$$\Phi(x(i), x(j)) = \sum_{t=1}^{n} K(t)[a(i,t) - a(j,t)],$$

оценивающей превосходство x(i) над x(j). Функцию Ф(x(i), x(j)) можно представить в виде

$$\Phi(x(i), x(j)) = f(x(i)) - f(x(j));$$

при этом для любых i

$$f(x(i)) = \sum_{j=1}^{n} K(j)\Phi(x(i), x(j)).$$

Функция f в данной модели имеет смысл функции полезности на X, и объекты предполагается упорядочивать по убыванию ее значений. Коэффициенты K(j) — весовые, и если их заранее определить невозможно, то предлагается выбрать K(j) = 1/n. Тогда для всех i и j

$$\Phi(x(i), x(j)) = \sum_{t=1}^{n} [a(i,t) - a(j,t)] / n = [s(i) - s(j)]/n.$$

В силу (10.24), если f(x(i)) = s(i)/n, то данная модель полностью сводится к турнирной.

## 10.5. О ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Нечеткие множества и нечеткие числа — это модели, которые в специальной форме задают неопределенности. В этом смысле они являются альтернативой вероятностных моделей.

Рассмотрим процедуры принятия решений в условиях, когда при оценке и выборе альтернатив возможно, а часто необходимо, применять и обрабатывать качественно нечеткие оценки, что связано с наличием нечеткой исходной информации. Задание неопределенности в виде нечетких множеств чисел требует определения функций принадлежности нечетких множеств чисел. Выполним построение функций принадлежности с помощью метода парных сравнений, который уже был использован ранее. В данной ситуации вариант этого метода принимает следующую форму.

***Определение.*** Пусть $X = \{x(i)\}$ — множество из n элементов. Будем называть подмножество S множества X нечетким, если на основе множества X определена совокупность пар

$$S = \{M_s(x)/(x)\}, \tag{10.26}$$

где x принадлежит множеству X. Равенство (10.26) означает, что множеству чисел X ставится в соответствие множество пар:

- конкретное число x из множества X;
- функция принадлежности $M_s(x)$, зависящая от числа x, которая определяет степень неопределенности числа x так, что задает в определенном смысле степень нечеткости числа x.

Поясним сказанное примером. Пусть имеется нечеткое число, которое обозначим символом a. Вид функции принадлежности нечеткого числа a представлен на рис.10.7.

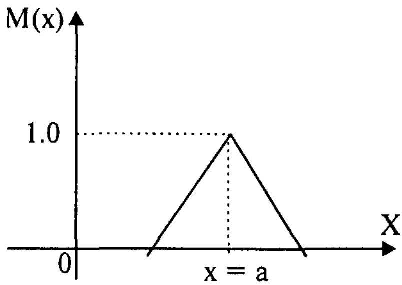


Рис. 10.7

Для нечетких чисел можно развить соответствующее исчисление и определить правила выполнения арифметических операций над нечеткими числами. Отметим, что при выполнении арифметических операций необходимо оперировать как над числами, так и над их функциями принадлежности. В этом смысле можно говорить о прямом построении функций принадлежности.

Рассмотрим косвенные методы построения функций принадлежности на основе матрицы парных сравнений (см. табл. 10.3).

Начнем с построения парных оценок. Оценку элемента x(i) по сравнению с элементом x(j) с точки зрения свойства S (10.26) обозначим a(i, j). Для обеспечения согласованности симметричные относительно диагонали элементы положим равными: a(i, j) = 1/a(i, j), что соответствует одному из вариантов калибровки (см. табл. 10.3). Оценки a(i, j) позволяют составить матрицу парных сравнений A = [a(i, j)]. Далее найдем W — собственный вектор матрицы A, решив уравнение AW = rW, где r — собственное число матрицы A. Очевидно, что собственные числа матрицы A являются корнями характеристического уравнения $(A - rE)W = 0$, где E — единичная матрица (см. гл. 7).

Вычисленные компоненты w(i) вектора

$$W = (w(1), ..., w(i), ..., w(n))^T$$

принимаются в качестве степени принадлежности элементов множеству S:

$$M_S(x(i)) = w(i), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Характерно, что если элементы x сравниваются только сами с собой, то матрица A — диагональная и ей соответствуют числа, равные единице, которые приводят к тому, что элементы функции принадлежности также равны единице, деленной на n, что соответствует тому, что множество S обычное. В общем случае матрицы A собственные числа определяют значение растяжения (сжатия) векторов при действии на них оператора, заданного матрицей A. Так как всегда выполняется равенство AW = rW, то найденные значения тем точнее, чем ближе максимальное значение r к n.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Белкин А. Р., Левин М. Ш.* Принятие решений: комбинаторные модели аппроксимации информации. М.: Наука, 1990.

*Вилкас Э. Й.* Оптимальность в играх и решениях. М.: Наука, 1990.

*Заде Л.* Метод лингвистической переменной и его применения. М.: Наука, 1973.

*Мушик Э., Мюллер П.* Методы принятия технических решений. М.: Мир, 1992.

*Перегудов Ф. И., Тарасенко Ф. П.* Введение в системный анализ. М.: Высшая школа, 1989.

*Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993.

Системный анализ и принятие решений / Под ред. В. Н. Козлова. СПб.: СПбГТУ, 1996.

*Черноруцкий И. Г.* Методы принятия решений. Л.: ЛПИ, 1989.

*Глава 11*

# ИНФОРМАЦИОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

В данной главе рассматриваются информационно-вычислительные структуры, реализованные в известных вычислительных системах. Такой анализ позволит получить представление о принципах реализации некоторых важных с практической точки зрения ряда известных ранее изученных в данной книге математических моделей. Представляется, что приводимые далее результаты могут служить иллюстрацией возможностей математики при построении информационных и вычислительных систем. Существующие информационно-вычислительные системы могут иметь различное применение. Отметим некоторые важные области их использования:

- функциональное применение в качестве информационных и организационных систем: как базы данных для хранения юридической, социологической, исторической информации, а также в других сферах организационного управления в качестве систем-советчиков;
- общего назначения, предназначенных для решения широкого класса универсальных вычислительных задач и задач обработки данных;
- специального назначения, ориентированных на узкие классы информационных или вычислительных задач, которые требуют использования соответствующих алгоритмов: например, решения больших и сверхбольших систем линейных алгебраических уравнений.

Для ориентации в принципах построения и функционального назначения рассмотрим некоторые основные характеристики наиболее важных направлений в развитии информационно-вычислительных систем.

## 11.1. МНОГОУРОВНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

Для анализа основных свойств информационно-вычислительных систем многоуровневого типа, необходимо выделить организационно-вычислительные уровни их организации: уровень проблемно-ориентированного языка (уровень транслятора, компилятора), ассемблерный уровень (транслятор, ассемблер), уровень операционной системы (частичная интерпретация), традиционный машинный уровень (интерпретация, микропрограмма), микропрограммный уровень (микропрограмма выполняется непосредственно аппаратными средствами).

Как правило, системы подобного типа являются многопроцессорными, т. е. состоят из большого числа отдельных вычислителей, разрешающих информационно-логические и вычислительные задачи. На уровне создания рассматриваемого класса структур можно выделить ряд основных подсистем, включая сетевые структуры, квантовые и молекулярные вычислители.

Характерным для рассматриваемых мультипроцессорных систем, имеющих несколько процессоров, является наличие подсистемы параллельной обработки. Варианты параллелизма определены следующими характеристиками: однотипностью данных, однотипностью операций, а также их чередованием. Данные структуры называют структурами с матричным процессором, хотя возможности матричных структур реализованы в простейшем варианте. На самом деле (и позднее это было использовано) возможности матричных структур значительно шире. Необходимо также иметь в виду возможность организации параллельной обработки на различных уровнях, в частности на уровне выполнения одинаковых команд однопроцессорных вычислителей.

Следующая важная часть информационно-вычислительных систем — подсистема информационного обмена, может иметь индивидуальные каналы данных (от каждого блока к каждому блоку по мере функциональной необходимости для каждого направления передачи), *общую шину*, когда информация от блока к блоку передается по командам через общий физический носитель. В рамках расширения возможностей информационного обмена и расширения функциональных возможностей используется *сеть* вычислительных машин. Сеть как группа вычислителей, способных обмениваться информацией, предоставляет широкие возможности по повышению быстродействия.

В последнее время информационно-вычислительные системы имеют подсистемы связи с глобальными вычислительными системами типа Интернет, которые позволяют обмениваться информацией на международном уровне. Последнее создает предпосылки для взаимного обмена гуманитарными ценностями, в частности на основе открытых библиотечных систем, систем взаимосвязей между музеями и т. д.

## 11.2. СЕМАНТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Рассмотренные выше информационно-вычислительные системы строились на основе исторически появлявшихся идей, которые имели основанием ряд аналогий с элементарными представлениями о вычислениях и возможностях переработки информации. Большое значение имело естественное совершенствование структур и элементов. Вместе с тем сегодня уже очевидно, что трудоемкость создания современной вычислительной системы определяется в значительной степени затратами на создание программного обеспечения. В этом смысле целесообразно формирование структурного облика (архитектуры) с учетом ориентации на используемые многочисленные языки программирования. Поэтому дадим анализ архитектуры информационно-вычислительных систем, согласованных с языками программирования.

Сегодня существует ряд архитектур такого типа (SWARD, iAPX 432), ориентированных на максимальное согласование с языками программирования (ПАСКАЛЬ, АДА), а также на базы данных (RAP, CASSM), потоков данных (модель Массачусетского технологического института). Критически анализируя известные результаты в этой области, можно отметить, что вычислители данного типа позволяют устранить разрыв между современными семантическими представлениями о смысле применения машин и ранее существовавшими вычислителями типа вычислителя Дж. фон Неймана. Семантика понимается здесь в более широком, чем это принято, смысле, включая перспективу развития языков, операционных систем, вычислительных, интеллектуальных сред, глобальных компьютерных систем. Чтобы подчеркнуть наиболее отличительные качества упомянутых типов вычислителей можно обратиться к рис. 11.1, на котором по осям координат могут представляться системные характеристики каждого из типов машин, а также характеристики их гармоничного сочетания («гибрида»).

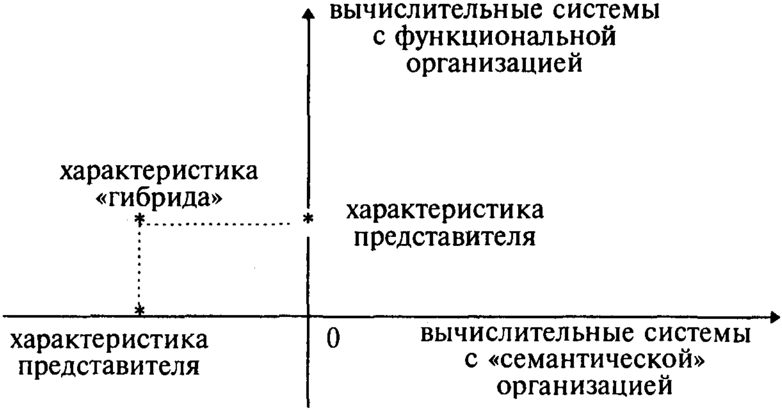



Рис. 11.1

Для отхода от классической модели фон Неймана используется хранение информации в форме *самоопределяющихся данных*. Применительно к памяти, этот принцип получил название принципа *теговой памяти*. При такой организации к ячейкам памяти, данных переменной длины и др., предназначенных для хранения информации, добавляется набор битов, описывающих атрибуты (тип данных) содержимого ячейки (рис. 11.2).

| | |
|---|---|
| тег | содержимое слова памяти |

Рис. 11.2

Обычно теги устанавливаются компиляторами или эквивалентными им программными средствами и используются машиной для определения семантики (смысла, назначения) каждой операции. Существуют различные модификации, характерные для микропроцессоров различных фирм (Intel и др.). В частности, теговая память имеет возможности для обнаружения ошибок в случае некорректного задания исходных данных. Обладая рядом достоинств (повышенной эффективностью выполнения программ, более простые компиляторы и др.), теговая память обладает недостатками (ограничения на скорость выполнения операций, в ряде случаев меньшее быстродействие).

Построение структур на основе семантической организации с теговой памятью и сравнение с классическими архитектурами приводит к вопросу о достоинствах промежуточных структур. Подобные машины используют дескрипторы. Дескриптор — это информация о параметрах (атрибутах) данных, играющая роль косвенного адреса ячейки памяти с данными. Дескрипторы предполагают наличие дополнительного уровня адресации, а следовательно, дополнительное время для предварительной обработки адресов и дополнительного места в памяти. Дескрипторы принято рассматривать как часть программы, а не как часть данных. Дескрипторы можно рассматривать как некоторую маску для анализа содержимого памяти, а теги — содержат описание хранимой в памяти информации.

Дескрипторы можно рассматривать как определенный шаг в развитии архитектуры, использованные в машинах системы 38 фирмы IBM, а также в ЭВМ B7000 фирмы Burroughs.

В дальнейшем целесообразно проанализировать *потенциальную адресацию* для сокращения разрыва между машинным интерфейсом и окружающим его программным обеспечением. В данном случае любые объекты потенциально взаимно адресуемые любыми другими объектами. Здесь под термином «объект» понимается «программа» или «данные». В частности — процедура языка ПЛ/1, пакет программ языка Ада или программный модуль.

## 11.3. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ И КОНВЕЙЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

Дальнейшее повышение эффективности вычислительных систем возможно на основе их специализации применительно к математическим методам, алгоритмам и задачам интеллектуального уровня. В этой ситуации возникает задача эффективного отображения алгоритмов на архитектуру многомодульной вычислительной системы. Новые высокопроизводительные системы — это системы с высоким уровнем параллелизма, реализованного в отличном от рассмотренного в п. 11.2 варианте. Весьма привлекательно построение высокопроизводительных систем на основе ограниченного спектра однородных универсальных модулей, в качестве которых могут использоваться специальные процессоры, в частности RISC-процессоры. Параллелизм может достигаться и на основе реализации каждым вычислителем одного или ряда методов обработки вместо параллельного выполнения отдельных операций.

В настоящее время развитие интегральной технологии позволяет разместить на одном кристалле от нескольких сот тысяч компонентов до нескольких сотен микропроцессоров (фирма INTEL). Это создает широкие возможности проектирования вычислительных структур на основе микропроцессоров, например транспьютеров, обладающих значительным объемом внутри кристалльной памяти и встроенными эффективными шинами сопряжения. Пути объединения транспьютеров в единую вычислительную систему связаны с методами реализации более крупных операций, например векторных операций, а также операций векторно-логического характера.

Классическим методом соединения транспьютеров в единую информационно-вычислительную систему является линейное конвейерное объединение модулей, позволяющее на каждом такте получить существенный результат. Основные направления развития подобных структур связаны:

- с созданием двумерных транспьютерных систем и соответствующих систем программирования;
- с созданием параллельных конвейеров на современной элементной базе;
- с созданием гибридных — параллельно-конвейерных систем.

Основные требования к подобным структурам включают в себя требования «перекрытия» всех базовых операций, достаточный объем базовых операций и наличие средств комплексирования (межмодульных интерфейсов). В этой ситуации возникает важная задача «отображения алгоритма или метода на вычислительную среду». Формализованное решение данной задачи достаточно сложно, поэтому можно наметить лишь общие черты подхода к проблеме. Акцентируя проектирование на создание спецпроцессоров для класса задач, можно говорить о формировании некоторого класса базисных задач, для которых предназначаются отдельные вычислители, эффективно решающие задачи данных классов. В этом случае можно ожидать значительно более простое решение задачи «отображения». В частности, типовыми могут быть следующие задачи:

- цифровой обработки сигналов (вычисление сверток, преобразования Фурье, теоретико-числовых преобразований, быстрое преобразование Фурье («бабочка») и др.);
- быстрые алгоритмы обращения матриц;
- быстрые параллельные алгоритмы решения дифференциальных уравнений.

Для конструктивного решения проблемы требуется разработка систем в конечном базисе задач или в конечном базисе макрозадач, реализуемых отдельными вычислителями сетевого типа. Возникающая далее проблема формирования общей структуры может быть решена на основе системного обобщения направлений развития «параллелизма» при построении информационно-вычислительных систем, иллюстрируемого на рис. 11.3.

Векторный линейный параллелизм → Матричный двумерный параллелизм → Гиперматричный многомерный параллелизм → Общий сетевой параллелизм

Рис. 11.3

Реализация алгоритмов приводит к необходимости создания «программируемой коммутационно-вычислительной сети», работающей синхронно или асинхронно. Исследования зарубежных фирм в области создания современных вычислительных систем изложены в ряде изданий. Рассмотрим некоторые важные направления, отраженные в последних работах. Основные принципы сводятся к следующим:

- динамичная конвейеризация и необходимый параллелизм;
- иерархические системы памяти;

• адекватные задачам мультипроцессоры, в частности, векторные процессоры, а также RISC-процессоры.

В основу систем положены базовые структуры, из которых создается вся система. Вместе с тем, в работах не всегда ясно выделяется методологический аспект создания современных вычислительных систем. Изложены результаты проектирования, из которых можно сделать выводы о концепции построения современных систем, описанных выше.

Для перспективы необходимо выделить важнейшую задачу отображения алгоритмов на информационно-вычислительную среду. Формализованные методы синтеза могли бы позволять синтезировать структуры на основе математически заданных требований. Решение этой проблемы можно ожидать в будущем.

## 11.4. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

На основе проведенного анализа можно дать некоторые прогнозы в развитии структур информационно-вычислительных систем. Основой для этого будут служить различные «срезы» целевых требований, системные и последовательные методики.

### 11.4.1. Системный метод оценки качества

Оценки качества и выбор систем на основе анализа качества является одним из возможных при выборе функциональной структуры. Выбор функциональной схемы и организация систем не являются однозначными. Однако указанные свойства могут формироваться с учетом ряда принципов. Построение вычислительных систем может осуществляться на основе принципов, характеристика которых дается ниже.

1. *Структурный (архитектурный) принцип*, охватывающий варианты структур вычислителей, когда предполагается выбор структуры из заданных классов. Наиболее распространенными типовыми структурами можно считать классические однопроцессорные вычислители, вычислители с одним потоком команд

и многими потоками данных (конвейерные вычислители), вычислители со многими потоками команд и многими потоками данных (многопрограмные многопроцессорные вычислители). Широко используется параллелизм вычислений, который может быть организован с учетом или без учета реализуемого алгоритма. Весьма важен процесс формирования параллелизма на основе не только структурных эвристик, но и на основе алгоритмических методов решения специальных задач. Весьма важное место занимают сетевые вычислительные структуры, для которых характерно наличие разнотипных сетевых протоколов.

2. *Физический принцип*, позволяющий реализовать функциональные задачи систем на основе создания соответствующих физических средств или вычислительных сред, порождающих решение необходимых задач в процессе функционирования последних. Формы реализации этого принципа могут быть различны:

- на квантовом уровне;
- на уровне «решателей» задач, одним из примеров которых являются работы Б.С. Разумихина;
- на уровне прямых физических аналогов проблемы.

3. *Функциональный принцип*, позволяющий в целом или по частям решать необходимые задачи. Другими словами, можно дифференцированно формировать или интегративно решать поставленные задачи. По сути, этот принцип является основным, поскольку исторически использовался на уровне здравого смысла, начиная с первых вычислителей и заканчивая самыми современными вычислительными системами.

4. *Алгоритмический принцип*, реализуемый дифференцированно или интегративно, позволяет создавать структуры систем на основе их подобия вычислительным алгоритмам или алгоритмам обработки данных. Хотя не все вычислительные алгоритмы естественно отражаются на информационно-вычислительные среды, вместе с тем многие алгоритмы могут служить основой для создания структур вычислителей. Примеров тому весьма много, и достаточно упомянуть систолические структуры, в которых за базовые операции принимается скалярное произведение векторов.

5. *Аналитический принцип*, позволяющий создавать отдельные вычислители или системы в целом на основе аналитических решений вычислительных или логических задач. В этом смысле существует богатый арсенал аналитических методов. Вместе с тем регулярная теория аналитических вычислителей, конструктивная с точки зрения «отображения» на вычислительную среду, требует соответствующего развития, хотя можно использовать некоторые результаты в этой части.

6. *Принцип параллелизма*, предполагающий построение архитектуры систем на основе параллельных алгоритмов и методов решения задач обработки, управления, моделирования. Сегодня нет недостатка в вариантах построения параллельных вычислительных систем. В этой части требуется регулярная работа конструктивного характера, позволяющая в полной мере (для достаточно представительного класса задач) создать соответствующие методы.

7. *Принцип гибридизации*, использующий идеи сочетания различных принципов при определении структуры системы и класса вычислителя. Иллюстрация данного подхода достаточно полно охарактеризована в п. 11.2, где указаны варианты построения вычислительных систем на основе соединения параллелизма и конвейеризации.

8. *Принцип аналогий*, позволяющий формировать вычислители или их отдельные блоки на основе подобных категорий, реализуемых математическими, физическими, химическими и другими операциями типового (в частности, элементарного) или интегративного классов. Здесь не исключаются «экзотические» базисы вычислений, например, биологические среды.

9. *Принцип ориентации на систему программирования* (или алгоритмирования) позволяющий инверсно (относительно заданной структуры) подойти к формированию структуры вычислительной системы на основе синтезированной на первом этапе системы программирования (или алгоритмирования). Данный принцип является весьма важным, поскольку определяет альтернативу формирования структуры вычислителя по отношению ко многим упомянутым принципам, приведенным ранее.

В этом его важность и достоинства, которые позволяют характеризовать его как «прямой принцип» относительно упомянутых выше.

10. *Принцип информационной безопасности*, обеспечивающий построение информационно безопасных вычислителей для заданного класса алгоритмических или программных ошибок, разрушений.

11. *Другие принципы*, к числу которых можно отнести вычислители на молекулярной и химической основе.

Перечисленные выше принципы позволяют сформировать большое количество вариантов построения вычислителей. По сути выбор структуры вычислителя может быть представлен как выбор в многомерном пространстве, подпространство которого иллюстрируется на рис. 11.4.

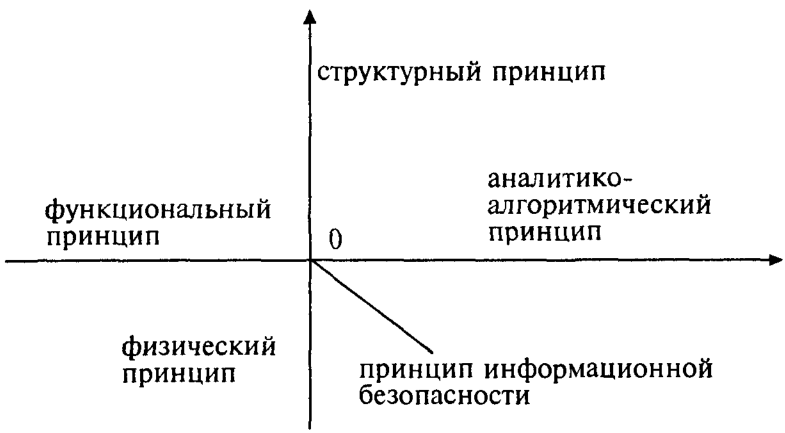



Рис. 11.4

Фактически в многомерном пространстве вариантов необходимо далее ввести соответствующие оценки качественных свойств систем, на основе которых можно произвести выбор ее структуры. Однако размерность пространства принципов достаточно велика, что приводит к необходимости введения регулярных стратегий выбора на основе дополнительной упорядочивающей информации. Естественно, что подпространства могут быть выбраны различным образом, исходя из главных целей и задач, возлагаемых на информационно-вычислительные системы и их элементы.

Для упорядочения всего множества вариантов, которые составляют некоторое поле вариантов, необходимо ввести определенную иерархию. Верхний уровень иерархии может строиться на функциональном принципе, который диктуется функциональным разделением задач для вычислителей. Функциональное формирование структуры систем должно обладать определенной универсальностью для реализации перспективных алгоритмов обработки информации. Возникает проблема дальнейшего формирования структуры систем при функциональной декомпозиции проблемы в целом. На этом этапе набор вариантов является также достаточно широким. Остается нерешенной альтернатива универсализации или специализации структуры и возможностей отдельных элементов (вычислителей). Решение данной задачи может осуществляться на основе различных типов архитектур. В рамках перечисленных выше принципов можно указать несколько примеров архитектур:

- *магистрально-модульная архитектура*, определяющая общий характер возможных соединений частей в целое;
- *матрично-модульная архитектура* с более сложным вариантом соединения отдельных вычислителей (модулей);
- *сетевая модульно-аналитическая архитектура*, предполагающая формирование модулей на основе аналитических результатов (методов) с последующим формированием сетевых взаимодействий на основе решающих правил и протоколов обмена (в ряде случаев этот вариант можно отождествлять с вариантом аналитического программирования);
- *модульно-алгоритмическая архитектура*, когда модули формируются на основе алгоритмов, реализующих функциональные задачи;
- другие типы архитектур.

Приведенные результаты позволяют дать системную характеристику возможных вариантов формирования структуры. С этой целью можно построить системную матрицу вариантов структур, которая имеет следующий вид.

Таблица 11.1.

| Тип \ Тип | Функци-ональ-ный | Струк-турный | Аналити-ческий | Алго-ритми-ческий | Паралле-лизма | Гибри-дизации |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Функци-ональ-ный | оценка качества | | | | | |
| Структур-ный | | | Оценка качества | | | |
| Аналити-ческий | | | | | | |
| Алго-ритми-ческий | | | | | | |
| Паралле-лизма | | | | | | |
| Гибрид-ный | | | | | | |

Приведенная таблица может содержать количественные или качественные характеристики алгоритмов. Диагональная часть таблицы может интерпретироваться как вариант построения вычислительной системы на основе только данного принципа. Например, на основе параллелизма или аналитических соотношений, если данный вариант допускает разрешимость рассматриваемого класса задач.

Анализ таблицы показывает, что для формирования структуры можно выбирать различные сочетания структурных, функциональных, аналитических, алгоритмических принципов. Например, возможны различные пути формирования структур. Рассмотрим некоторые примеры.

**Пример 1** (классический). Дадим анализ классических вычислителей типа структур Дж. фон Неймана. Нетрудно установить, что при построении данной классической структуры использованы принципы: функциональный, алгоритмический и аналогий.

*Функциональный принцип* использован при выборе основных блоков в связи с функциональной необходимостью иметь арифметическое устройство, память, устройства ввода и вывода.

*Алгоритмический принцип* положен в основу построения арифметико-логического устройства, поскольку в основу создания полной системы арифметических и логических операций положены математические аналоги (модели) выполнения арифметических и логических операций.

*Принцип аналогий* отражен в техническом варианте представления операндов с помощью регистров.

**Пример 2.** Пусть в основу создания вычислителя последовательно кладется следующая концепция вычислителя:

структура ⟶ функции ⟶ алгоритм.

Данная цепочка предполагает выбор определенной структуры, в рамках которой формируются функциональные модули, причем в последних формируются на основе алгоритма необходимые требования к системе.

**Пример 3.** Пусть при создании вычислителя используется схема другого типа:

функции ⟶ структура ⟶ алгоритм,

что предполагает функциональный принцип построения вычислителя на основе различных структур отдельных модулей при различных алгоритмах реализации функций.

Формирование варианта структур вычислителей на основе комплекса оценок матрицы осуществляется путем обработки матрицы с помощью классических методов принятия решений. В этой части могут быть использованы стратегии, рассмотренные в разделе:

- минимаксного типа, гарантирующие достижение соответствующих характеристик вычислителей;
- нейтрального типа, приводящие к оценкам «среднего» типа;
- оптимистического типа, ориентирующие на получение структур исходя из оптимистических ожиданий.

В целом предлагаемая методика формирует «поле» вариантов и критерии обработки вариантов, что позволяет в конечном счете получить варианты структур вычислителей с конкретными количественными характеристиками.

### 11.4.2. Метод последовательного проектирования

Предлагаемый в п.11.3.1 метод формирования архитектур вычислительных систем основан на использовании числовых характеристик определенных структур. В данном разделе рассматривается метод последовательного проектирования, предложенный Институтом кибернетики Украины. В соответствии с излагаемым методом предлагается разделить синтез вычислительных систем на отдельные этапы.

1. Анализ проблемы, для которой создается вычислительная система, проблемно-ориентированные уровни, языки и требования к качеству решения задач.
2. Планирование решения: системный уровень, семейство языков представления данных, процедур, координация.
3. Проектирование/компиляция, уровень иерархии блоков, организационных решений, базовые языки компонент (ассемблеры).
4. Формирование образов движения динамики и уровень организации памяти.
5. Формирование образов движения потоков данных: уровень распределенного управления, ассоциация операционных систем, систем управляющих программ.
6. Частичная интерпретация: коммуникационный уровень — механизмы, протоколы взаимодействий.
7. Формирование образов оперативной обработки данных, компиляция, процессорный уровень.
8. Интерпретация, микропрограммный уровень.
9. Прямое аппаратное исполнение: уровень логико-цифровой обработки.

Описанные этапы позволяют получить структуру и все необходимые атрибуты вычислительных систем на основе поэтапного принятия решений в процессе проектирования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Таненбаум Э.* Многоуровневая организация ЭВМ. М.: Мир, 1979.

*Майерс Г.* Архитектура современных ЭВМ. М.: Мир, 1986. Специализированные процессоры для высокопроизводительной обработки данных // Под ред. В. Е. Котова, Н. Н. Миренкова, Новосибирск, СО Наука, 1988.

*David A. Patterson, John L. Hennessy.* Computer Architecture A Quantitative Approach. Morgan Kaufman Publischers. INC. SAN FRANCISCO, CALIFORNIA.

*Hwang K.* [1979].Computer Aritmetik: Principles, Architekture, and Design, Wiley, New Jork.

*Hwang K.* Advances Computer Architecture and Parallel Programming, McGraw-Hill, New Jork, 1993.

The IBM RISC System/6000 processor, collection of papers, IBM J& RESEARCH and Development 34 : 1 (Januar) 1990.

*Напрасник М. В.* Микропроцессоры и микроЭВМ. М.: Высшая школа, 1989.

*Васильев Г. П.* и др. Программное обеспечение неоднородных распределенных систем: анализ и реализация. М.: Финансы и статистика, 1988.

*Флинт Д.* Локальные сети ЭВМ. Архытектура, принципы построения, реализация. М.: Финансы и статистика, 1986.

*Фет Я. И.* Параллельные процессоры для управляющих систем. М.: Энергоиздат, 1981.

*Ларионов А. М., Майоров С. Ф., Новиков Г. И.* Вычислительные комплексы, системы и сети. Л.: Энергоатомиздат, 1987.

*Кухарев Г. А.* и др. Систолические процессоры для обработки сигналов. Минск.: Беларусь, 1988.

Европейские академические сети на пути интеграции в единое информационное пространство // Под ред. В.В. Кораблева.: СПб., СПбГТУ, 1993.

*Капитонова Ю. В.* Фундаментальные идеи эволюции вычислительных систем // Кибернетика и системный анализ, 1995, № 2.

*Козлов В. Н., Куприянов В. Е., Заборовский В. С.* Вычислительные методы синтеза систем автоматического управления. Л.: ЛГУ им. А.А. Жданова, 1989.

*Козлов В. Н.* Метод нелинейных операторов в автоматизированном проектировании динамических систем. Л.: ЛГУ им. А. А. Жданова, 1986.

*Козлов В. Н.* К аналитическому решению систем линейных алгебраических неравенств // Автоматика и телемеханика, 1989, № 4.

Информационно-безопасные системы / Под ред. В. Н. Козлова. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1996.

*Городецкий А. Я., Заборовский В. С.* Информатика. Фрактальные процессы в компьютерных сетях. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2000.

*Козлов В. Н., Морозов Б. И., Кисоржевский В.Ф.* Теория информационных систем. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2004.

*Глава 12*

# АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ ЯЗЫК ПАСКАЛЬ

Язык программирования Паскаль разработан в 1970 г. профессором Швейцарской высшей политехнической школы (г. Цюрих) Никлаусом Виртом. Язык назван в честь выдающегося французского ученого Блеза Паскаля, построившего в 17 в. механическую вычислительную машину. Окончательный вариант языка существует с 1979 г. Наряду со стандартной версией языка в настоящее время разработан ряд версий системы программирования Турбо Паскаль (ТП) для персональных компьютеров. Представляется, что овладение языком потребует готовности воспринимать его именно как язык со специфическими правилами записи алгоритмов. Отыскание аналогов с человеческими языками позволит сократить время на осознание основных конструкций и достичь лучшего понимания сути и эффективно применять на практике. Некоторые приводимые программы иллюстрируют алгоритмическую реализацию рассмотренных математических понятий и функций.

## 12.1. ОСНОВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ ЯЗЫКА ПАСКАЛЬ

Будем называть алгоримическим языком совокупность символов и правил для записи алгоритмов. Поскольку под алгоритмом понимается точное предписание преобразования *исходных данных* в конечный результат, то естественно, что алгоритмические языки имеют все необходимые для этого конструкции. Для программирования на алгоритмических языках необходимо на первом этапе составить алгорим решения задачи. По сути, в такой постановке программирование иногда сходно с кодированием. Алгоритмический язык Паскаль имеет свои синтаксис и семантику, а программу на языке можно представлять себе в виде предложений. Эти предложения достаточно специфичны и определяются конструкциями языка. При разработке Паскаля Н. Вирт ставил целью создать язык, соответствующий требованиям структурного программирования. Поэтому язык отличает четкая структура записи программ, развитая система типов данных, простые и гибкие структуры управления. Все это обеспечивает простоту изучения языка и повышает надежность разрабатываемых программ.

### 12.1.1. Алфавит и простейшие конструкции

Основу Паскаля, как и любого языка, составляет алфавит, причем алфавит стандартного Паскаля включает следующие буквы, цифры, символы:

- 26 заглавных и 26 строчных букв латинского алфавита;
- 10 арабских цифр;
- специальные символы + — * / > = < ( ) [ ] { } . : ; , ␣ ↑
- составные символы, воспринимаемые как единый: <= >= := (* *) (. .) ..
- символы с кодами ASCII от 128 до 255, куда включаются и буквы русского алфавита, не входят в алфавит Паскаля, поэтому эти символы могут использоваться в тексте программ только в виде значений констант (символов или строк) и в текстах комментариев.

Язык Паскаль в своей структуре использует различные имена. Для этого он имеет идентификаторы, которые конструируются из букв латинского алфавита, цифр и знака _ (в ТП). Идентификаторы используются для формирования имен программ, переменных, констант, типов, процедур, функций, модулей, меток. Идентификатор должен начинаться с буквы и может состоять из любого числа символов. В стандартном Паскале имена распознаются по первым восьми, а в ТП — по первым 63 символам. Прописные и строчные буквы не различаются. Например, имена NAME, name, NAme воспринимаются одинаково. Ключевые слова языка не могут использоваться как идентификаторы.

Поскольку язык Паскаль предназначен для программирования широкого круга задач, то в нем предусмотрены знаки различных операций:

- знаки арифметических операций: + — сложения, - — вычитания, * — умножения, / — деления, DIV — деления нацело с отбрасыванием остатка, MOD — нахождения остатка от деления нацело;
- операции отношения: > — больше, < — меньше, >= больше или равно, <= — меньше или равно, = — равно, <> — не равно;

• логические операции: NOT — отрицания, OR — логического сложения, AND — логического умножения;

• операции над множествами: * — пересечения множеств, + — объединения множеств, - — разности множеств, IN принадлежности множеству.

Язык содержит стандартные функции, в которых указываются имя и аргумент: ABS(x) — абсолютное значение, SQR(x) — квадрат числа, SIN(x) — синус, COS(x) — косинус, EXP(x) — экспонента, LN(x) — логарифм, SQRT(x) — квадратный корень, ARCTAN(x) — арктангенс, TRUNC(x) — выделение целой части, ROUND(x) — округление, PRED(x) — нахождение предыдущего элемента, SUCC(X) — нахождение последующего элемента, ORD(x) — определение порядкового номера символа, CHR (N) — определение символа по его порядковому номеру, ODD(x) — определение нечетности числа. Тригонометрические функции задаются в радианах.

**Пример.** Стандартные функции с соответствующими именем и конкретным значением аргумента, указанным в скобках: TRUNC (7.9) = 7, ROUND(7.9) = 8, PRED(9) = 8, SUCC(8) = 9, PRED(M) = L, SUCC(M)=N, ORD('F') = 70, CHR(70) = F. Если x = 3, то ODD(x) = TRUE, а если x = 2, то ODD(x) = FALSE.

Следующей конструкцией языка является выражение. Выражения составляются из констант, переменных, функций, разделенных скобками и знаками операций. Имеются приоритеты выполнения операций, определенные последовательностью:

1) выражения в скобках;
2) функции;
3) отрицание NOT;
4) операции — умножение, деление, DIV, MOD, AND;
5) сложение, вычитание, OR;
6) отношения.

Операции одного приоритета выполняются последовательно слева направо.

### 12.1.2. Структура программ на языке Паскаль

Структура записи программы на языке Паскаль достаточно жесткая. Она состоит из заголовка (в ТП можно опускать), блока описаний и основного блока программы.

Заголовок пишется в первой строке и имеет вид:

PROGRAM имя программы (имена файлов, доступных программе);

**Пример.** Стандатные файлы ввода и вывода имеют имена INPUT и OUTPUT, поэтому заголовок программы с именем POLINOM будет выглядеть так:

PROGRAM POLINOM (INPUT, OUTPUT);

Блок описаний состоит из шести разделов:

- указания библиотек (только в ТП);
- описания меток;
- определения констант;
- определения типов;
- описания переменных;
- описания процедур и функций.

Каждое описание и определение завершается символом «точка с запятой». Перестановка разделов блока описаний в ТП возможна, но следует учитывать работу компилятора. Программа компилируется последовательно, и все объявления должны предшествовать использованию.

Основной блок программы представляет собой собственно текст программы, т. е. последовательность операторов, заключенную между словами BEGIN и END. Операторы могут располагаться произвольно и отделяются друг от друга символом «точка с запятой» (перед словом END точка с запятой могут опускаться). Текст программы завершается точкой.

Рассмотрим подробнее разделы блока описаний.

*Раздел указания библиотек* (вводится в ТП). Директива USES подключает библиотечные модули из стандартного набора ТП или написанные пользователем. USES появляется в программе один раз, а если библиотеки не используются, то вообще не указывается. В Паскале имеются следующие стандартные библиотеки ТП:

- CRT — модуль, содержащий функции и процедуры для работы с клавиатурой и монитором;
- DOS — модуль, содержащий функции и процедуры, ориентированные на работу со средой MS-DOS;
- Сraph — библиотека подпрограмм для управления графическими режимами мониторов;

• System — библиотека стандартных процедур языка Паскаль;

• Printer — модуль связи с принтером;

• Overlay — модуль расширения оперативной памяти за счет разбиения программы на основной файл с расширением .EXE и файл с расширением .OVR.

**Пример.** USES CRT, Craph;

*Раздел описания меток* содержит перечисление меток переходов, устанавливаемых в основном блоке программы. Синтаксическая диаграмма, поясняющая структуру раздела, показана на рис. 12.1.


Рис. 12.1

Метки — это целые числа от 0 до 9999. В ТП допускаются в качестве меток символьные конструкции длиной до 63 символов. При отсутствии меток в программе раздел отсутствует.

**Пример:** LABEL 1, 1997,
m1, m2, stop;

*Раздел определения констант.* Приводится перечень имен и значений констант, используемых в программе (в соответствии с диаграммой, приведенной на рис. 12.2).

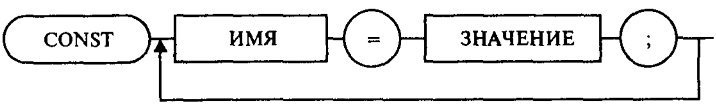



Рис. 12.2

**Пример.**

```
CONST A = -7.2;
      NMIN = 1; NMAX = 100;
      PI = 3.1416; zv = '*' ;
```

*Раздел определения типов* содержит определения используемых в программе типов данных. Система типов данных в ТП сложная. Она состоит из трех групп типов:

- простые (стандартные) типы;
- сложные типы, являющиеся структурами, сформированными из простых типов;
- новые типы, т. е. типы, вводимые программистом.

Синтаксическая диаграмма приведена на рис. 12.3.

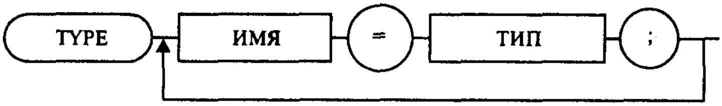



Рис. 12.3

В разделе определения типов указываются обычно новые типы.

**Пример:** TYPE Personages = (Nif Nif, Nuf Nuf, Naf Naf);
DAY = (MO, TU, WE, TH, FR, SA, SU);

Подробнее система типов языка Паскаль рассматривается ниже.

*Раздел описания переменных* содержит список глобальных переменных программы и их типы, т. е. задает связь между идентификатором и определенным типом данных. Синтаксическая диаграмма приведена на рис. 12.4.

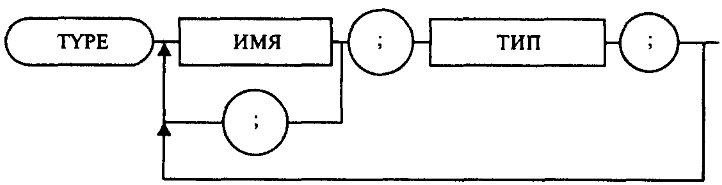



Рис. 12.4

**Пример.**

```
VAR I, J, KEY: INTEGER;
    A, SIGMA: REAL;
    Word1: CHAR;
    F1, F2: BOOLEAN;
    MAS: ARRAY [1...10] OF REAL;
    PIG: PERSONAGES;
```

*Раздел описания процедур и функций* располагается непосредственно перед основным блоком программы. Описание состоит из заголовка и тела процедуры (функции), но тело может быть и внутри программы. Структура данного описания представлена на рис. 12.5.

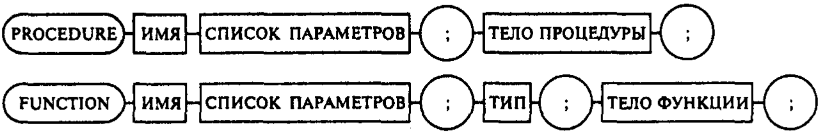



Рис. 12.5

Библиотечные процедуры и функции не описываются, т. к. уже указаны в разделе USES.

**Пример.** Вычислить сумму 1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/N, используя процедуру.

```
PROCEDURE EGSUM (VAR SUM: REAL, N: INTEGER);
  VAR I: INTEGER; S: REAL;
  BEGIN
    S := 0;
    FOR I := 1 TO N DO
         S := S+1/I;
         SUM := S
  END;
```

**Пример.** Вычислить к! используя функцию.

```
FUNCTION FACT (K: INTEGER): INTEGER;
  VAR P,I: INTEGER;
  BEGIN
    P := 1;
    FOR I := TO K DO
      P := P*I;
    FACT := P
  END;
```

Важно отметить, что результат вычисления в процедуре передается через ее параметр, а результат вычисления в функции — через ее имя.

*Основной блок программы* (рис. 12.6). Это собственно текст программы. Блок открывается ключевым словом BEGIN, содержит перечень операторов и закрывается ключевым словом END с точкой. Ограничения компилятора на текст программы:

- длина строки <= 126 символов;
- объем файла программы (текста) <= 64K (64 килобайта).

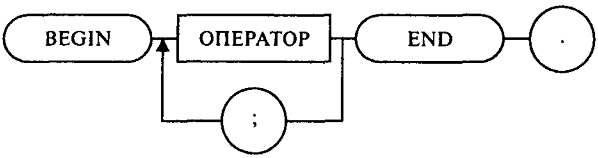



Рис. 12.6

**12.1.3. Система типов языка Паскаль**

Система типов языка Паскаль представлена на рис. 12.7. Типы, указанные звездочкой, определены только в ТП.

***Простые типы.***

*Целые типы:*

Короткое целое без знака: Byte. Имеет значения от 0 до 255. Представляется в памяти одним байтом.

Короткое целое со знаком: ShortInt. Имеет значения от –128 до +127. Представляется в памяти одним байтом.

Целое без знака: Word. Имет значения от 0 до 65 535. Представляется в памяти двумя байтами.

Целое со знаком: Integer. Имеет значения от –32 768 до 32 767. Представлятся в памяти двумя байтами.

Длинное целое со знаком: LongInt. Имеет значения от –2 147 483 648 до 2 147 483 648. Представляется в памяти четырьмя байтами.

*Вещественный тип:* Real. Представляется 11–12 знаками мантиссы и занимает в памяти четыре байта. Значения переменных вещественного типа представляются в двух формах:

- без экспоненты, например 350, –10.5, 0.17;
- с экспонентой, например 3.5E+2, –0.105E+2, 1.7E-1.

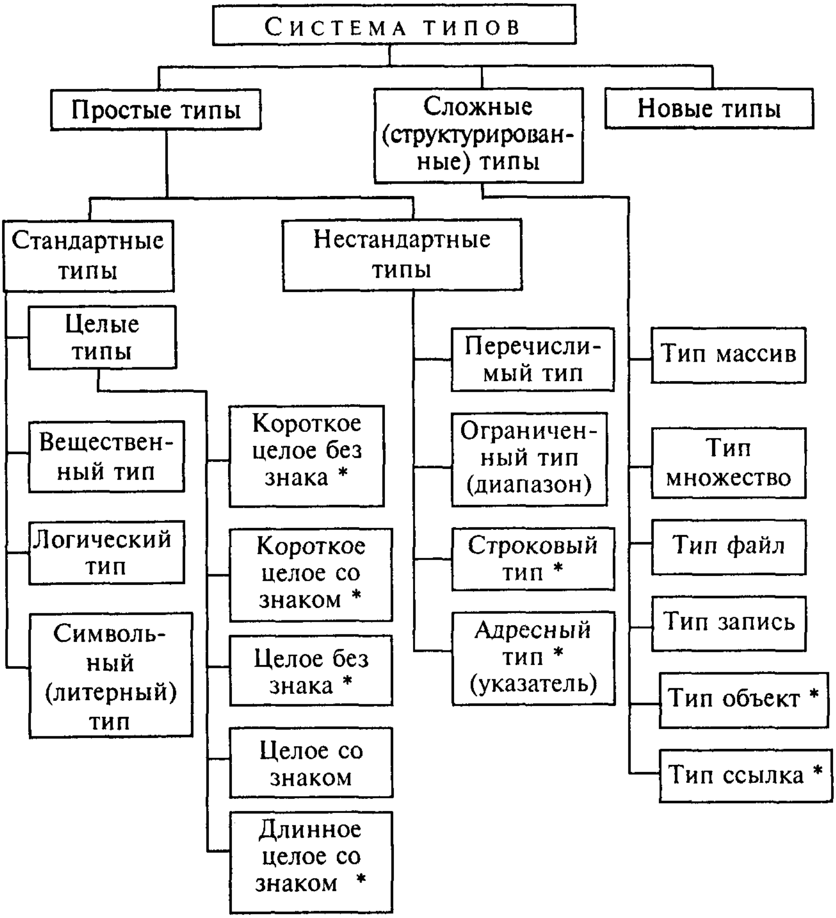



Рис. 12.7

*Логический тип:* Boolean. Представляется двумя значениями: FALSE — ложь и TRUE — истина. Логические переменные могут принимать только эти значения.

*Символьный (литерный) тип:* Char. Значениями данного типа являются символы (литеры), заключаемые в одинарные кавычки, например, 'A', 'a', '.', ' ' и т. п. Переменная символьного типа может принимать значение любого символа из набора ASCII.

*Перечислимый тип:* упорядоченное множество значений, образуемое перечислением имен, обозначающих эти значения. Множество значений перечислимо, т. е. конечно. Оно указывается в скобках. Формально перечислимыми типами являются все целые типы, а также типы Char, Boolean, например:

Byte=(0, 1, 2, ..., 254, 255); Boolean = (False, True);

Можно вводить новые перечислимые типы, например:

TYPE Personages=(NifNif, NufNuf, NafNaf);

Family = (Father, Mother, Son, Daughter);

Значения перечислимого типа не могут вводиться с клавиатуры и выводиться на экран или принтер. В этом типе задается внутренняя нумерация, начиная с 0. Поэтому к значениям данного типа применимы функции Ord, Pred, Succ и операции сравнения, например:

Ord (NufNuf)=1; Pred(NufNuf)=NifNif;
Succ(NufNuf)=NafNaf; NufNuf < NafNaf.

Очевидно, что выражения Succ (NafNaf) или Pred(Father) запрещены.

*Ограниченный тип (диапазон):* поддиапазон некоторого базового типа (целого, символьного, перечислимого). Описывается в разделе TYPE и задается границами диапазона, разделенными двумя точками, например:

TYPE PartFam = Mother .. Daughter;

Порядковый номер значения левой границы диапазона обязан быть меньше порядкового номера значения правой границы. Выводить значения диапазона перечислимого типа на экран или принтер также нельзя. Ограниченный тип эффективно используется для контроля над данными при выполнении программы.

*Строковый тип:* String. Это тип динамических строк, т. е. строк переменной длины. Указание String [n], где n — число, говорит, что переменные такого типа могут иметь значения строк длиной до n символов, причем строка символов заключается в кавычки, например: 'задача', ' ' (пустая строка). В ТП есть средства работы со строками — специальная библиотека.

*Адресный тип* (указатель): Pointer. Значениями этого типа являются адреса ячеек памяти. Тип Pointer является внутренним типом языка, т. е. его значения не выводятся на печать и не присваиваются переменной. Для этого используются специальные функции.

***Сложные (структурированные) типы***

*Тип «массив».* Это упорядоченная последовательность элементов одного типа. Элемент массива — переменная, определяемая именем массива и порядковым номером (индексом). Массивы предназначены для представления в языке матриц и векторов. Синтаксическая диаграмма данного типа представлена на рис. 12.8.

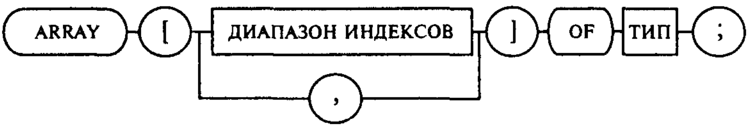



Рис. 12.8

Количество измерений массива не ограничено, но размер массива меньше 64К. Диапазон индексов может быть любого из целых типов (кроме LongInt), символьного типа и перечислимого типа, введенного ранее пользователем. Целые индексы могут быть и отрицательными и нулевыми.

Рассмотрим два способа описания массивов на примере двух вещественных векторов V1(5), V2(5) и вещественной матрицы $\|M_{5\times3}\|$.

<u>Способ 1:</u> задание типа в разделе определения типов.

```
TYPE Vector = ARRAY [1..5] OF Real;
     Matrix = ARRAY [1..5, 1..3] OF Real;
     VAR V1, V2: Vector;
         M : Matrix;
```

<u>Способ 2:</u> без задания типа в разделе определения типов.

```
VAR V1, V2: ARRAY [1..5] OF Real;
    M : ARRAY [1..5, 1..3] OF Real;
```

Массивы одного типа с равным числом элементов можно присваивать друг другу, например V1 := V2. Другие операции над массивами нужно программировать или выполнять с использованием библиотечных подпрограмм.

*Тип «множество».* Это неупорядоченный набор различных элементов одного перечислимого типа (Byte, Char или введенного программистом). Количество элементов множества заранее не указывается, так как множество может расширяться или сужаться по ходу выполнения программы. Соответствующая синтаксическая диаграмма приведена на рис. 12.9.


Рис.12.9

**Пример.**

TYPE S1=Set of Char; — множество символов;
S2=Set of Byte; — множество чисел от 0 до 255;
S3=Set of 0..9; — множество чисел от 0 до 9;
S4=Set of ('А','Е','И','О','У','Ы','Э','Ю','Я'); — множество гласных букв.

Можно не описывать множество в разделе TYPE, а задавать его сразу в разделе описания переменных, например: VAR S : Set of Word. Размер множества в ТП <= 256 элементов, причем каждый элемент множества имеет номер. Множества имеют очень компактное представление в памяти компьютера, но их невозможно выводить на экран монитора. Элементы множества заключаются в квадратные скобки.

К элементам множества применимы операции:

| | |
|---|---|
| = — равенство, | + — объединение, |
| < > — неравенство, | * — пересечение, |
| <= — подмножество, | - — вычитание, |
| >= — надмножество, | IN — вхождение в множество. |

Рассмотрим фрагмент программы, иллюстрирующий работу с множествами.

**Пример.**
```
      TYPE BASEColor = (RED, YELLOW, BLUE);
           COLOR = SET OF BASEColor;
      VAR  COLOR1, COLOR2, COLOR3:COLOR;
           B1, B2 : BOOLEAN;
      BEGIN
           COLOR1 : = [RED];
           COLOR2 : = [BLUE];
```

```
COLOR3 : = COLOR1 + [YELLOW];
B1 := COLOR1 <= COLOR3;
B2 := [BLUE] IN COLOR3;
```

В результате логические переменные получат значения B1 — True, B2 — False.

*Тип «файл»*. Это упорядоченный набор произвольного числа однотипных элементов (компонентов) с последовательным методом доступа. Синтаксическая диаграмма имеет вид (рис.12.10).

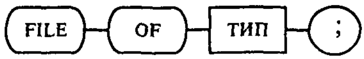



Рис. 12.10

В языке существует два основных вида работы с файлами: просмотр файла и создание файла. Каждому файлу F соответствует автоматически вводимая дополнительная переменная, называемая буферной переменной файла. Она используется для записи нового компонента в файл или для выборки компонента при просмотре файла.

При работе с файлами используются следующие стандартные функции и процедуры:

- EOF (имя файла) — функция конца файла, имеющая значения типа BOOLEAN;
- PUT (имя файла) — процедура записи значения буферной переменной в файл;
- GET (имя файла) — процедура продвижения по файлу на одну компоненту;
- RESET (имя файла) — процедура поиска начала файла и подготовка его к просмотру;
- REWRITE (имя файла) — процедура, предшествующая созданию файла и формирующая пустой файл с заданным именем.

Все операции над последовательными файлами могут выполняться с помощью перечисленных функций и процедур, что иллюстрируется примером.

**Пример.** Вычислить среднее арифметическое N чисел, представленных в виде файла F вещественного типа. Соответствующая программа имеет вид:

```
PROGRAM SA (OUTPUT, F);
VAR F : FILE OF REAL;
    M : REAL; N:INTEGER;
```

```
BEGIN
      N : = 0; M: = 0;
      RESET (F);
      REPEAT
         N := N + 1;
         M := M + F@;
         GET (F);
      UNTIL EOF(F);
      M := M/N;
      WRITE (M)
END.
```

В этом примере структура REPEAT...UNTIL представляет собой цикл, а WRITE — оператор вывода результата в стандартный файл OUTPUT.

*Тип «запись».* Это объединение фиксированного числа логически связанных компонентов (полей). Компоненты записи (поля) могут быть разных типов и различаться именами. Доступ к компоненту осуществляется по имени, а не по индексу, как в массиве. Синтаксическая диаграмма типа «запись» дана на рис. 12.11.


Рис. 12.11

Синтаксическая диаграмма списка полей показана на рис. 12.12.

Компонент переменной типа «запись» указывается именем переменной и именем компоненты, разделенными точкой.

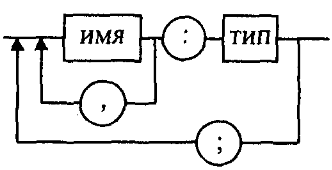



Рис. 12.12

**Пример.**

```
TYPE
      DATE = RECORD
         MONTH : 1..12;
         DAY :1 .. 31;
         YEAR : INTEGER
            END;
```

```
VAR
    D : DATE;
```

Переменная D является переменной типа DATE и является записью, состоящей из трех компонентов: D.MONTH, D.DAY, D.YEAR. Следовательно, чтобы заслать в D дату 04.10.1996, надо выполнить присваивания:

```
D.MONTH := 10;   D.DAY:=4;   D.YEAR: = 1996;
```

*Тип «обьект»:* Object. Этот тип вводится в ТП начиная с версии 5.5. Это новый подход к программированию. Объект — это замкнутый мир данных и средств их обработки. В программе объекты описываются почти так же, как записи.

**Пример:**

```
TYPE
    DataWithMethods = OBJECT
        Поле данных 1: его тип;
        Поле данных 2: его тип;
        ......................................
        Метод 1;
        Метод 2;
        Метод 3;
        ..............
                END;
```

Основная идея объектно-ориентированного программирования в том, что программа представляется как совокупность взаимодействующих объектов. В программе объявляется ряд объектов, каждому из которых присущи свои методы, реализуемые как процедуры и функции. Существует аппарат наследования признаков объектов более простых более сложными. Подробнее изучить данный тип можно в соответствующей литературе.

*Тип «ссылка»*. Значения этого типа указывают адрес какой-либо структуры данных. Ранее был рассмотрен простой тип данных — Pointer (адресный тип). Отличие ссылочного типа от адресного в том, что через ссылку на конкретную структуру (базовую) он может указывать размер и структуру фрагмента памяти, так как структуры данных, занимающие более одной ячейки памяти, располагаются в последовательных ячейках памяти. Ссылочный тип описывается через имя базового типа с указанием перед ним знака ↑ (или ∧).

**Пример.**

TYPE

MAS = Array [1..10] of Integer;

MASX = ↑MAS;

Ссылочный тип в ТП дает возможность размещать структуру данных там, где мы хотим, а не там, где предписывает компилятор.

## 12.2. ОСНОВНОЙ БЛОК ПРОГРАММЫ И ОПЕРАТОРЫ ЯЗЫКА ПАСКАЛЬ

Основной блок программы строится из последовательности операторов, составляющих тело программы. Операторы разделяются точкой с запятой. Операторы бывают простыми или составными. Составной оператор имеет структуру, определенную на рис.12.13.

Составные операторы могут включаться друг в друга, образуя вложенные структуры.

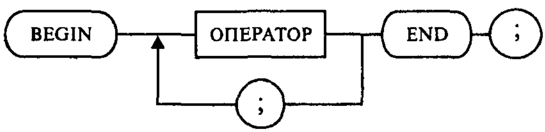



Рис. 12.13

*Оператор присваивания.* Синтаксическая диаграмма этого оператора показана на рис.12.14.

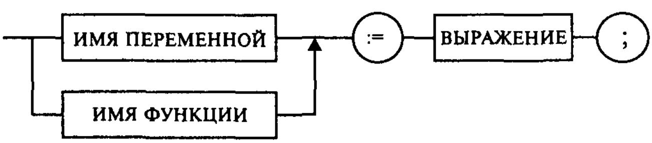



Рис. 12.14

В схеме алгоритма этому оператору соответствует блок «процесс» (рис. 12.15), а соответствующий фрагмент программы имеет вид a := b, где a — имя переменной или функции, b — выражение.

Значения слева и справа в операторе должны соответствовать по типу.

*Оператор перехода* имеет структуру, иллюстрируемую на рис. 12.16.

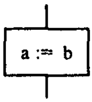



Рис. 12.15


Рис. 12.16

Фрагмент программы с оператором данного типа имеет вид:

GO TO п; , где n — метка, описанная в разделе LABEL.

Этот оператор опасен, так как может привести к зацикливанию программы. Поэтому следует, либо избегать его в программе, либо использовать только для перехода вниз по программе.

*Условный оператор* имеет структуру, данную на рис. 12.17.


Рис. 12.17

Оператор используется в формах

IF в THEN a;

где в — логическое выражение, a, a1, a2 — операторы (простые или составные). В схеме алгоритма этим формам оператора соответствуют фрагменты, представленные на рис. 12.18.

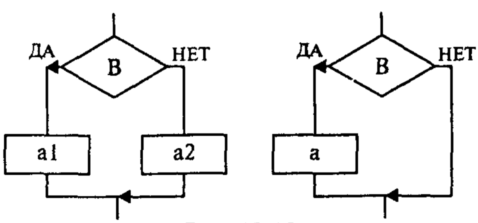



Рис. 12.18

- полная форма: IF b THEN a1 ELSE a2;
- сокращенная форма.

**Пример.**
```
IF I > 5 THEN GOTO 10;
IF x < 0 THEN
        begin
            A:=x+1;
            B:=x*x
        end
     ELSE
        Q:=SQRT(x);
```

Условные операторы могут быть вложены друг в друга. Чтобы не запутаться, следует использовать ступенчатую форму записи текста программы.

*Оператор выбора* расширяет возможности языка Паскаль и имеет следующую синтаксическую диаграмму (рис.12.19).

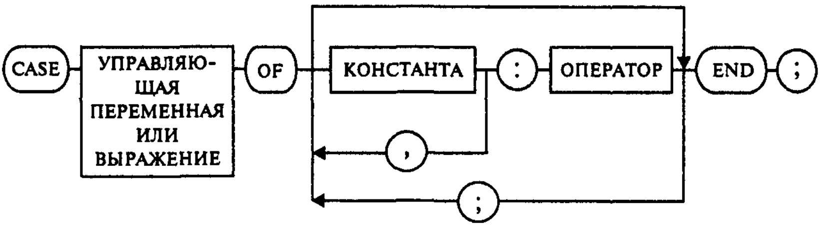



Рис. 12.19

Если нужно выполнить ветвление программы в двух направлениях, то лучше использовать условный оператор, а если в нескольких направлениях — оператор выбора.

```
CASE X OF
    Набор значений 1:S1;
    Набор значений 2:S2;
    ..............................
    Набор значений N: SN
        ELSE
             SS
END;
```

В схеме алгоритма этому оператору соответствует фрагмент, представленный на рис.12.20.

Здесь S1 — SN — операторы; SS — альтернативный оператор. Операторы могут быть простыми или составными. X — управляющая переменная или выражение, принимающее конкретное значение, входящее в один из наборов, или не входящее ни в один набор. В первом случае работает оператор в той строке, в набор которой попало значение X, а во втором случае — альтернативный оператор. Тип X только перечислимый, т. е. — Byte, ShortInt, Integer, Word, Char, Boolean, диапазон. Значения в наборе перечисляются через запятую или представляются диапазоном. Значения в наборах не должны повторяться, а наборы не должны пересекаться.

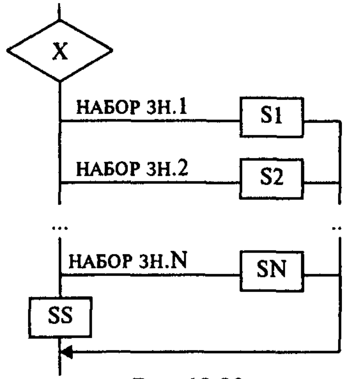



Рис. 12.20

**Пример.**

```
VAR S : CHAR;
.............
CASE S OF
    '+' : C : = A+B;
    '–' : C : = A–B;
    '*' : C : = A*B;
    '/' : C : = A/B
    ELSE
       WRITE ('операция не определена')
END;
```

*Операторы цикла* являются одними из основных операторов и позволяют, например, организовать вычисления с массивами. Разновидности операторов цикла приведены на (рис. 12.21).

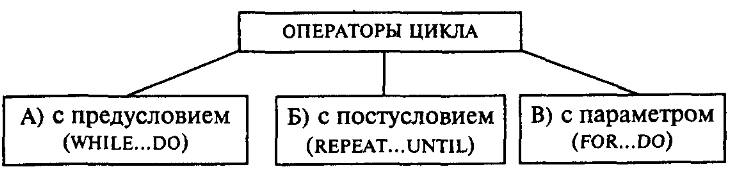



Рис. 12.21

А) Оператор цикла с предусловием имеет синтаксическую диаграмму, показанную на рис. 12.22.


Рис. 12.22

Оператор, стоящий после слова DO, может быть простым или составным. Он представляет собой тело цикла. Пока логическое выражение истинно, оператор выполняется циклически. Если условие сразу ложно, то тело цикла игнорируется. Важно, чтобы содержимое тела цикла влияло на условие, иначе может произойти зацикливание. В теле цикла могут быть и другие циклы, т. е. можно организовать вложенные циклы.

В схеме алгоритма этому оператору соответствует фрагмент, показанный на рис. 12.23.

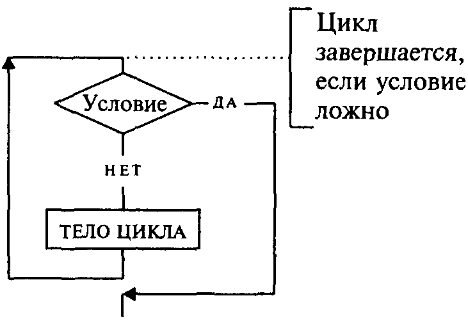



Рис. 12.23

**Пример.** Вычислить F = 10! Соответствующая программа имеет вид:

```
PROGRAM FACT (OUTPUT);
VAR
   F, N : INTEGER;
BEGIN
      F := 1; N := 2;
      WHILE N <= 10 DO
```

```
        begin
            F : =F*N;
            N : =N+1
        end;
    WRITE (F)
END.
```

Б) Оператор цикла с постусловием имеет синтаксическую диаграмму, данную на рис. 12.24.

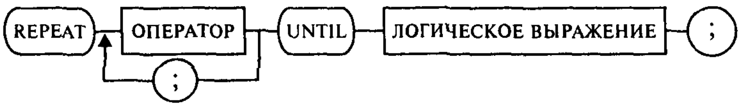



Рис. 12.24

Этот оператор выполняется циклически до тех пор, пока логическое выражение не станет истинным. Эта структура обязательно выполняет тело цикла один раз. Тело может содержать любое количество операторов. Содержимое тела цикла также должно влиять на условие, иначе происходит зацикливание.

В схеме алгоритма этому оператору соответствует фрагмент на рис. 12.25.

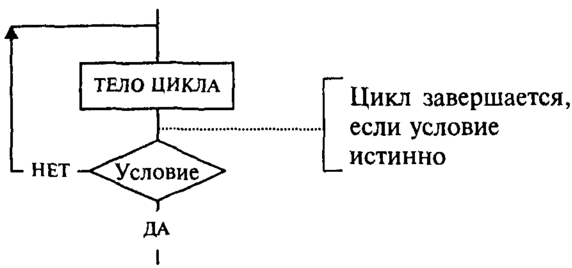



Рис. 12.25

**Пример.** Вычислить F = 10! с помощью оператора цикла с постусловием. Соответствующая программа имеет вид:

```
PROGRAM FACT (OUTPUT);
VAR
   F, N : INTEGER;
BEGIN
   F :=1; N :=2;
   REPEAT
      F : = F*N;
      N : = N+1
   UNTIL N > 10;
   WRITE (F)
END.
```

В) Оператор цикла с параметром имеет синтаксическую диаграмму, иллюстрируемую на рис. 12.26.

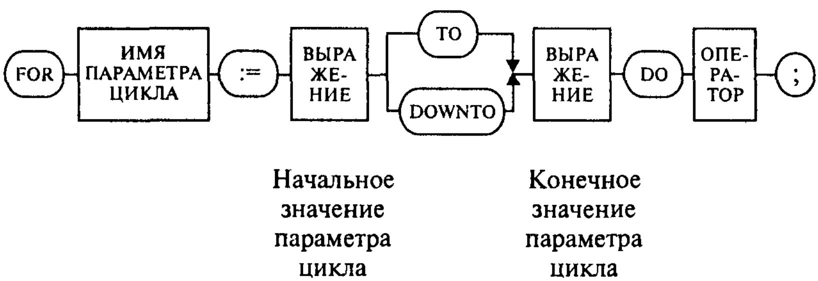



Рис. 12.26

Параметр цикла и его значения (начальное и конечное) должны быть только целочисленного или перечислимого типа. Если используется слово ТО, то параметр возрастает от начального значения к конечному, а при DOWNTO — убывает. Шаг приращения параметра цикла всегла постоянен и равен «интервалу» между двумя ближайшими значениями типа параметра цикла. Внутри тела цикла параметр цикла изменять запрещено. После завершения цикла значение его параметра не определено. Недостаток этого оператора — невозможность прямой работы с вещественным параметром.

В схеме алгоритма этому оператору соответствует фрагмент, приведенный на рис. 12.27.

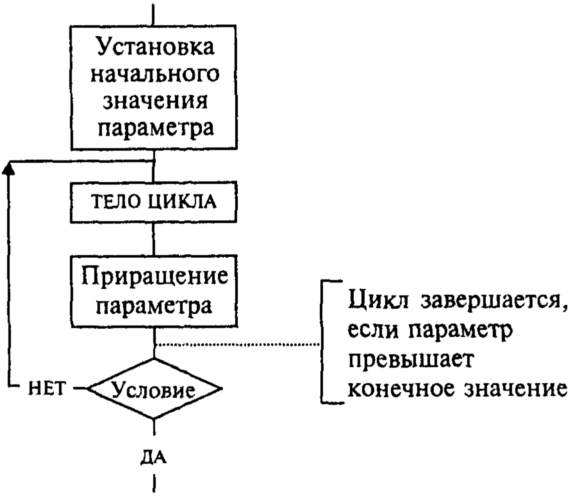



Рис. 12.27

**Пример.** *Вычислить 10! с помощью оператора цикла с параметром.* Соответствующая программа имет вид:

```
PROGRAM FACT (OUTPUT);
   VAR
      F, N : INTEGER;
   BEGIN
      F : =1;
      FOR N : =2 TO 10 DO F : =F*N;
      WRITE (F)
   END.
```

**Пример.** Распечатать первые пять букв латинского алфавита. Соответствующая программа имет вид:

```
PROGRAM LAT (OUTPUT);
VAR
   C : CHAR ;
BEGIN
   FOR C:='A' то 'F' DO WRITE (C)
END.
```

*Операторы завершения программной единицы (ПЕ):* Exit и Halt(n). Оператор Exit в процедуре завершит ее выполнение и вернет ее к следующему за вызовом процедуры оператору. При этом процедура вернет все, что на момент Exit было вычислено. Exit в основной программе завершит ее выполнение. Этот оператор позволяет исключить лишние метки и улучшить читаемость программы. Оператор Halt(n), независимо от места расположения, завершает работу программы с кодом завершения n. Halt без параметра эквивалентно Halt(0). Включение в программу нескольких операторов Halt с разными кодами завершения помогает анализировать ход выпыолнения программы при ее отладке.

*Операторы ввода и вывода данных.* Для ввода данных используются операторы:

READ (a1, a2, ..., an);
READLN (a1, a2, ..., an);
READLN;

Рис. 12.28

где a1, a2, ..., an — имена переменных, подлежащих вводу (целого, вещественного, символьного типов). В схеме алгоритма этим операторам соответствует блок, приведенный на рис. 12.28.

Оператор READ (a1, a2, ..., an) обеспечивает ввод данных из стандартного входного файла INPUT.

Оператор READLN (a1, a2, ...,an) вводит данные и переходит на следующую строку данных файла INPUT.

Оператор READLN пропускает одну строку в файле INPUT.

Для вывода информации используются операторы:

WRITE (b1, b2, ..., bm);
WRITELN (b1, b2, ..., bm);
WRITELN;

где b1, b2, ..., bm — имена выводимых переменных.

Рис. 12.29

В схеме алгоритма этим операторам соответствует блок, иллюстрируемый на рис. 12.29.

Оператор WRITE (b1, b2, ..., bm) выводит значения в стандартный файл OUTPUT. Значения размещаются в одной строке.

Оператор WRITELN (b1, b2, ..., bm) выводит значения и переходит к новой строке файла OUTPUT.

Оператор WRITELN обеспечивает переход к новой строке файла OUTPUT.

При выводе можно указывать ширину поля, отводимого под значение. При этом для переменной целого типа следует указать ширину поля вывода, которая задается числом через двоеточие после имени переменной. Например:

WRITE (b1:m);

где b1 — имя переменной целого типа, m — ширина поля.

Для переменной вещественного типа необходимо указать общую ширину поля и ширину поля под дробную часть. Обе ширины задаются числами через двоеточие. Например:

WRITE (b2 : m : n);

где b2 — имя переменной вещественного типа, m — ширина поля под все число, n — ширина поля под дробную часть числа.

Значение переменной символьного типа при выводе указывается в кавычках и может сопровождаться также полем вывода, ширина которого ставится через двоеточие. При этом выводимый символ будет повторяться в пределах заданного поля.

**Пример.** Пусть переменные A, B и C имеют следующие значения: A = –100, B = '*', C = 5.75. Тогда оператор

WRITE (A:6,' ':3, B:5, C:7:3);

обеспечит вывод данных в следующей форме:

__-1 0 0___ * * * * * __5.750

Первая позиция при выводе управляет печатью. Если в этой позиции: + — нет пропуска строки; _ — пропуск одной строки; 0 — пропуск двух строк; 1 — переход к новой странице перед выводом.

ЛИТЕРАТУРА

*Вирт Н.* Структурное программирование. М., 1994.

*Глава 13*

## МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ И ГУМАНИТАРНЫХ НАУКАХ

В данной главе рассматриваются некоторые применения математики и информатики при решении проблем экономики, гуманитарных и социальных наук. Приведен ряд примеров, иллюстрирующих особенности постановки содержательных задач в рамках моделей, описанных в предыдущих главах книги.

### 13.1. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИКИ В ЭКОНОМИКЕ

Под экономикой понимают совокупность производственных отношений определенной общественно-экономической формации. Экономика изучает экономический базис общества, а также национальное хозяйство страны или его часть, включающую некоторые отрасли и виды производства. Экономическая наука как орудие ориентации в экономике существенно использует математические модели для анализа ситуаций и принятия решений о стратегиях развития экономических систем различного уровня. Далее мы познакомимся с краткой историей применения математики в экономических исследованиях и некоторыми типами экономико-математических моделей.

Управление экономикой осуществляется на основе экономической информации, в состав которой входит информация о процессах производства, обмена и потребления материальных благ. По назначению экономическую информацию разделяют на управляющую (командную) и осведомляющую (например, учетно-статистическую).

*Историческая справка.* Широкое применение нашла математическая наука в экономике Англии и США. Более двух веков назад шотландский экономист и философ, один из крупнейших представителей классической политической экономики, Адам Смит (1723—1790) заложил основы выбора цен, преследуя свои цели и не зная при этом общего состояния экономики, в частности, не зная выбора других потребителей и материального баланса. Эти идеи были опубликованы в книге «Богатство народов» (1776 г.). Прошло сто лет, и швейцарский экономист Леон Вальрас выдвинул предположение о том, что влиять на цену можно посредством функций спроса. При этом участники экономического процесса получают достаточно информации для того, чтобы гарантировать согласованность их действий по соблюдению материального баланса. Вальрас ввел математическую строгость в область знаний, которая не использовала известных в то время (1859 г.) математических методов.

В 1874 г. в книге «Элементы чистой политической экономии» Леон Вальрас предложил свою концепцию экономического равновесия как решения системы нелинейных алгебраических уравнений. Строгое обоснование существования решений нелинейных уравнений была доказана в 1910 г. в теореме голландского математика Л.Э. Брауэра. Однако экономические идеи и применение математики для их обоснования потребовали развития соответствующих методов в работах А. Вальда (1902–1905) и Дж. фон Неймана (1903–1957), Эрроу и Дебре (1954 г.), Гейла, Никайдо и др.

*Первые экономико-математические модели.* Дж. фон Нейман в 1935 г. предложил общую модель экономического равновесия. Это была одна из моделей, в рамках которой можно было доказать теорему существования равновесия. Модель фон Неймана предназначалась для производственных процессов. Предполагалось, что имеется m благ, которые нужно производить и потреблять. Кроме этого имеется n производственных процессов, которые эти блага потребляют в качестве входов и производят в качестве выходов. Каждый производственный процесс используется с некоторым уровнем интенсивности. Состояние экономики описывается вектором $x_i$ размерности n, а каждая его компонента x означает уровень интенсивности использования i-го производственного процесса. Уровни интенсивности неотрицательны и удовлетворяют условию нормализации:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geq 0.$$

Предполагается, что экономика обладает постоянной продуктивностью, поэтому входы и выходы линейно зависят от уровней интенсивности. В результате экономика описывается двумя матрицами F и G размера (m × n). Коэффициенты $f_{ij}$ матрицы F представляют собой количество блага i, потребляемое производственным процессом j при работе на единичном уровне, а коэффициент $g_{ij}$ матрицы G — количество производимого блага с номером i. Полное потребление блага i

$$(Fx)_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} x_j,$$

а его полное производство

$$(Gx)_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_j .$$

Пусть производственный процесс функционирует в течение некоторого периода времени. Для этого необходимо, чтобы потребление блага i к концу периода было не больше производства этого блага в начале периода, т. е.

$$Fx^1 \le Gx^0 .$$

Будем говорить, что имеет место сбалансированный рост, если уровни интенсивности возрастают на один и тот же процент, т. е. если существует число a, такое, что

$$x^1 = (1 + a)\ x^0.$$

Величина a, если она существует, называется темпом сбалансированного роста. Тогда из приведенных выше соотношений следует, что

$$(1 + a)Fx^0 \le Gx^0. \qquad (13.1)$$

Введем понятие цен $p_i$, предположив, что эти цены неотрицательны и нормированы так, что

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad p_i \ge 0 .$$

Векторы $F^T p$ и $G^T p$ определяют суммарную стоимость потребления (входов) и производства (выходов). Задача состоит в том, чтобы найти такие цены, чтобы стоимость выходов в начале периода не превышала стоимости входов в конце периода. Последнее условие формализуется в виде алгебраического неравенства

$$F^T p^1 \ge G^T p^0. \qquad (13.2)$$

Предположим, что цена $p^1$ связана с ценой $p^0$ соотношением

$$p^0 = \frac{1}{1+b} p^1, \qquad (13.3)$$

где b определяется как ссудный процент. Условия (13.2), (13.3) влекут за собой неравенство относительно $p^0$, такое, что

$$(1 + b)\ F^T p^0 \ge G^T p^0. \qquad (13.4)$$

Если решить неравенства (13.1) и (13.4), то можно показать, что ссудный процент и темп сбалансированного роста совпадают. Последние условия сформулированы в теореме Дж. фон - Неймана. В более общей формулировке условия существования могут быть сформулированы с помощью результата, полученного Фань Цзы.

*Дифференциальные уравнения макроэкономики.* В математической экономике используется «макроэкономическая модель роста». Выпуск Y интерпретируется как валовый национальный продукт, часть его bI — как фонд накопления, C — как фонд потребления и т. п. Сформулируем оптимальную программу роста в виде задачи оптимального распределения ресурсов

$$pI + C \to max$$

при условиях

$$\tilde{M} f(x) = bI + C, \quad z = R / \tilde{M}, \quad R \le R, \quad 0 < tT,$$

где $\tilde{M}$ — значение мощности на оптимальной траектории, p — цена, определяемая непрерывным решением дифференциального уравнения

$$dp/dt = (Lp + m)p - [(p/b)u + (1 - u)]\, dY/dM.$$

Управление u должно выбираться так, чтобы на траекториях системы выполнялось условие максимума специальной функции *Гамильтона, зависящей от функции* $p = p(t)$ и дополнительной функции, удовлетворяющей своему дифференциальному уравнению. Дополнительная единица мощности дает дополнительный продукт в количестве dY/dM в единицу времени. Модели такого типа позволяют анализировать динамику развития экономических систем при различных стратегиях управления ими.

*Методы математического программирования.* Математическим программированием называется раздел математики, изучающий решение конечномерных экстремальных задач. Другими словами, при решении таких задач отыскивается минимум или максимум (экстремум) линейной или нелинейной целевой функции (функционала). Модели математического программирования широко использовались в экономике начиная с 1939 г., когда ленинградские математики Л. В Канторович и М. К. Гавурин сформулировали первую задачу линейного программирования. Линейное программирование было переоткрыто за рубежом в послевоенные годы Дж. Данцигом, который сформулировал регулярный метод решения задачи линейного программирования. Методы линейного программирования — отыскания минимума линейной функции нескольких переменных при линейных алгебраических ограничениях типа равенств и неравенств — нашли широкое применение, начиная с пятидесятых годов прошлого века. В рамках этого метода были математически сформулированы и решены с помощью конечносходящихся алгоритмов многочисленные экономические задачи. Наряду с этим развивались методы математического программирования, представляющие собой совокупность методов решения конечномерных задач оптимизации. В рамках постановок математического программирования были сформулированы процедуры управления на основе самоокупаемости и хозрасчета. По сути, эти методы позволили решить широкий класс задач анализа и синтеза с помощью перечисленных выше моделей. Анализируемые методы дали возможность формализовать задачи принятия решений в условиях преимущественно полной информации о ситуации.

*Игровые модели внешней торговли.* Описанные ранее методы математики могут иметь широкую область применения благодаря теории дифференциальных игр. Эта теория позволяет расширить возможности описания моделей экономики с несколькими участниками, каждый из которых имеет противоположные интересы. Рассмотрим математическую модель игрового типа на примере описания торговли шерстью и вином между Англией и Португалией. Англия производит и вывозит шерсть, а Португалия — вино. Продолжительность торговли фиксирована временем T. Пусть

- $x_1(t)$ — количество шерсти, имеющейся в Англии в моменты времени t, лежащего в интервале от нуля до T;
- $x_2(t)$ — соответствующий запас шерсти у Португалии;
- $y_1(t)$ — количество вина, которым располагает Англия;
- $y_2(t)$ — количество вина у Португалии.

Потоки товаров описываются системой четырех линейных дифференциальных уравнений (см. главу 7) относительно перечисленных выше функций

$$
\begin{aligned}
&dx_1/dt = a - kx_1 - v_1, \quad dx_2/dt = v_1 - kx_2, \\
&dy_1/dt = u_1 - u_2, \quad dy_2/dt = b - u_1 - v_2.
\end{aligned} \tag{13.5}
$$

Здесь $a$ — скорость производства шерсти Англией; $b$ — вина Португалией; $u_2$ и $v_2$ — скорости потребления вина Англией и Португалией соответственно, $v_1$ — скорость импорта шерсти Португалией, $u_1$ — скорость импорта вина Англией.

Скорость изменения валютного запаса $s(t)$ Англии определяется уравнением

$$ds/dt = u_3 v_1 - v_3 u_1,$$

где $u_3$ и $v_3$ — цена шерсти и вина соответственно.

Предполагается, что введенные переменные, связанные с потреблением вина и шерсти, ограничены. Уравнения (13.5) разделяют модель процесса взаимодействия стран по указанным товарам. Теперь можно перейти к формулировке целей каждой из стран.

Англии требуется выбрать такие функции $u = (u_1, u_2, u_3)$, которые увеличивают значение ее функции выигрыша

$$J_1(u,v) - m\Phi[s(T)] + \int_0^T (x_1 v_2) dt. \tag{13.6}$$

Португалия подходящим выбором вектора $v = (v_1, v_2, v_3)$ стремится увеличить свою целевую функцию

$$J_2(u,v) = -m\Phi[s(T)] + \int_0^T (x_2 v_2) dt. \tag{13.7}$$

Функции выигрыша (13.6), (13.7) определяют стремление Англии и Португалии (выступающих в роли игроков) к росту финансового запаса и наибольшему удовлетворению запросов как в шерсти, так и в вине. Нетрудно видеть, что формулировка задачи потребовала использования моделей в виде дифференциальных уравнений (см. главу 7) и определенных интегралов (см. главу 6). Решение задачи требует применения условий оптимальности, которые формулируются на основе теории игр.

*О моделях рыночной экономики.* С развитием рыночных отношений и появлением различных видов ценных бумаг — облигаций, сертификатов, акций, векселей, закладных, а также производных от них — варрантов, опционов, фьючерсов, потребовалось использование других типов моделей и систем принятия решений. В ситуациях, характерных для рыночных отношений, более сложные математические модели. Например, в работах по экономике, которые удостаивались Нобелевских премий начиная с 1969 г., активно использовались модели нетривиального типа. В частности, это модель меджирования (деятельности на бирже, связанная со страхованием риска при фьючерсных операциях), построенная в середине 1960-х г. П. Самуэльсоном. Она использовала теорию мартингалов, представляющих собой последовательность случайных величин, удовлетворяющих ряду свойств и вводимых с помощью понятия условного математического ожидания. Широко применяются модели на основе теории вероятностей и математической статистики для ситуаций с малыми выборками.

Весьма интересен анализ статистическими методами финансовой деятельности. В России применения финансовой математики выполнены А. Н. Ширяевым. По сути, в России был выполнен комплекс работ по статистическому финансовому анализу.

Методы математики и информатики могут успешно использоваться при анализе динамики надежности коммерческих банков и других финансовых институтов. Последнее осуществляется при разработке систем раннего предупреждения. Можно строить различные по структуре системы предупреждения. В основу одних можно положить процедуры принятия решений, описанные в гл. 10. Кроме того, существуют системы, описывающие характеристики надежности банков некоторым вектором. Далее характеристики надежности определенным образом ранжируют, т. е. подвергают рейтингованию по степени надежности. Наконец, по рейтингу банков судят об их надежности.

Как мы смогли убедиться, экономика в ее теоретической основе использует математические модели. По определению К. Э. Шеннона «модель — это представление объекта, системы или идеи в некоторой форме, отличной от самой целостности». Современная научная работа в области экономики невозможна без применения математического аппарата как средства моделирования и средства качественного исследования процессов. Экономика исходит из тесного и точного взаимодействия математического аппарата с содержанием исследуемой задачи. Экономика основывается на объективной действительности. На первом этапе применения математики весьма полезно пользоваться некоторыми каноническими схемами исследования. Ключевыми элементами в них являются моделирование, анализ моделей, синтез экономических стратегий. Перечисленные этапы организуют деятельность исследователя в области экономики и позволяют направленно отыскивать необходимые методы математического исследования. На этапе выбора математических моделей можно пользоваться различными технологиями. В частности, на первом этапе необходимо четко определить характер модели: детерминированная модель, вероятностная модель, модель в виде функции, модель в виде уравнений или неравенств, модель установившихся состояний (алгебраические уравнения), модель переходных состояний (дифференциальные или разностные уравнения).

## 13.2. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ В СОЦИОЛОГИИ, ПЕДАГОГИКЕ, ЛИНГВИСТИКЕ, ЮРИСПРУДЕНЦИИ

Сформулируем математические и информационные модели социологии, педагогики лингвистики и юриспруденции с использованием описанных ранее результатов. Модели будут иллюстрироваться на ряде примеров.

*Математико-социологические модели.* Социология представляет собой науку об обществе как целостной системе и об отдельных социальных институтах, процессах, общественных группах. Социология изучает закономерности и динамику развития общественной жизни. Объяснить общественную жизнь пытались еще в античности (Платон, Аристотель и др.). Попытка создания «позитивной науки» об обществе была предпринята в XIX в. О. Контом. Рассмотрим лишь несколько иллюстрирующих применения изученных нами методов математики и информатики.

* Написано сщвместно с Т. Г. Комаровой

Модель конфликтной ситуации двух лиц. Рассмотрим математические модели в виде дифференциальных уравнений, позволяющих описать конфликтные ситуации с применением теории устойчивости (см. главу 7). Для описания конфликтной ситуации введем понятие «напряженности» $U_1$ и $U_2$ для двух участвующих в конфликте сторон. Будем предполагать, что на изменение значений напряженности во времени аддитивно и линейно влияют накопленные напряженности индивидов, а также возмущающие факторы $F_1$ и $F_2$.

В этом случае скорости изменения напряженностей (они равны производным напряженностей по времени) определяться уравнениями, следующими из сделанных выше предположений:

$$dU_1/dt = a_{11}U_1 + a_{12}\,U_2 + F_1,$$
$$dU_2/dt = a_{21}U_1 + a_{22}\,U_2 + F_2. \qquad (13.8)$$

Система (13.8) может быть записана в матричном виде следующим образом:

$$\begin{bmatrix} dU_1/dt \\ dU_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}. \qquad (13.9)$$

Коэффициенты системы (13.8) и элементы матрицы (13.9) имеют следующий смысл: $a_{ij}$ — быстрота «самовозбуждения» каждой из конфликтующих сторон, определяемая собственными внутренними мотивами; $a_{ik}$ — быстрота внешнего возбуждения стороны i, связанного с действиями другой стороны k. Другими словами, внедиагональные элементы определяют взаимное влияние сторон.

Для анализа степени развития конфликта можно воспользоваться понятием устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений, приведенным в п. 7.3. Для этого можно использовать корневые критерии устойчивости, из которых следует, что при любом неотрицательном значении элементов матрицы последней системы имеет место устойчивость процессов, описывающих конфликтную ситуацию. Естественно, что внешние факторы $F_i$ могут создавать определенную картину развития ситуации, однако можно использовать методы синтеза стратегий ликвидации или развития конфликта в соответствии с принятыми стратегиями управлений. Весьма полезно применять рассматриваемую модель для отыскания «миротворческих» усилий. Если модель конфликта описывается более сложными диференциальными (разностными) уравнениями, то сформулировать устойчивость (сходимость) можно с помощью обширного арсенала методов, краткая характеристика которых дана в главе 7. Необходимо иметь в виду, что данная модель может быть обобщена на случай многих лиц.

*Модель переговоров между рабочими и дирекцией.* Вторым примером модели конфликтной ситуации является модель переговоров во время забастовки между рабочими и дирекцией. Пусть динамика конфликта между упомянутыми двумя сторонами определяется системой дифференциальных уравнений

$$dx/dt = U\,f(y-x), \qquad dy/dt = -V\,g(y-x),$$

где x и y — соответственно предложения дирекции и требования рабочих. В качестве компонентов n-векторов x и y могут быть выбраны размер заработной платы, пособий и т. д. Определены исходные требования в виде неравенства

$$y(0) > x(0).$$

Забастовка заканчивается в момент времени $t > 0$, если

$$y(T) = x(T) + m,$$

где n-вектор m с неотрицательными координатами характеризует возможные уступки рабочих. Функции f и g — невозрастающие, и при этом $f(m) = g(m) = 0$.

Стратегии профсоюзов и дирекции, определенные $(n \times n)$ — матрицами U и V соответственно, в зависимости от требований задачи могут быть функциями либо реализовавшихся к моменту времени t значений x(t) и y(t), либо только времени. Это объясняется тем, что и дирекция и профсоюз стремятся минимизировать время забастовки T и одновременно дирекция стремится уменьшить свои уступки x(T), а профсоюз — увеличить требования рабочих, определенные вектором y(T). Поэтому функции выигрыша дирекции и профсоюза соответственно имеют вид

$$J_1(U,V) = -k_1T - c^Tx(T), \qquad J_2(U,V) = -k_2T + c^Ty(T),$$

где $k_1$, $k_2$ — положительные постоянные числа, $c_1$, $c_2$ — векторы с неотрицательными координатами. Таким образом сформулировали задачу выбора стратегии действия двух сторон в виде дифференциальной игры. Для отыскания стратегий в математике используется принцип максимума Л. С. Понтрягина.

*Социологический анализ научно-педагогических кадров.* Развитие современной социологической науки происходит на основе плюрализма, предполагающего многообразие теоретических парадигм и взглядов на понимание объекта и предмета социологического познания, в частности, научно-педагогических кадров. Квалификация научно-педагогических кадров России сегодня сильно дифференцирована в связи с различными условиями, установками, мотивами получения образования. Проиллюстрируем один из подходов к качественному анализу информационного и интеллектуального потенциалов упомянутой группы общества на основе методов математики, информатики и системного анализа.

Под интеллектуальным потенциалом будем понимать способность:

- в сфере науки: получать новые научные результаты и новые решения прикладных проблем на основе фундаментальных или прикладных областей знаний, адаптировать известные результаты фундаментальных областей знаний для решения прикладных задач и др.;
- в сфере образования: вести существующие дисциплины и разрабатывать новые дисциплины образовательных профессиональных программ, формировать новые дисциплины государственных образовательных стандартов, формировать дисциплины и циклы дисциплин на основе различных типов фундамента, в частности, гуманитарного и социально-экономического, естественнонаучного и математического, а также общепрофессионального или специального.

Информационный потенциал определяется свойствами личности, позволяющими:

- в сфере науки: обладать достаточной информацией о достижениях в соответствующей научной области, а также в смежных областях и применять известные результаты для решения практических задач;
- в сфере образования: быть носителем основных идей одной или нескольких областей научного знания, обладать умением доступно доносить основные идеи и методы соответствующей дисциплины как проекции на учебную сферу соответствующей научной области знаний.

Очевидно, что современный преподаватель, как правило, обладает интеллектуальным и информационным потенциалами. Качественные характеристики интеллектуального и информационного потенциалов в общем случае связаны так, что взаимно дополняют друг друга, образуя некоторое пересечение, отмеченное в гл. 2.

В соответствии с предложенной в гл. 10 характеристикой различных ситуаций построим системную матрицу характеристик личности, иллюстрирующую возможности в области научной и педагогической деятельности (табл. 13.1)

Таблица 13.1

| Тип фундамента / Тип результата | Гуманитарный и социально-экономический | Естественно-научный и математический | Общепрофессиональный | Специальный |
|---|---|---|---|---|
| Научная деятельность | | | | |
| 1. Получение нового научного знания в соответствии с решением теоретической или прикладной задачи | + | + | + | + |
| 2. Адаптация известных результатов фундаментальной области знаний для решения прикладных проблем | + | + | + | + |
| Педагогическая деятельность | | | | |
| 1. Создание новых дисциплин (авторских курсов) по смежной научной области знаний | + | + | + | + |
| 2. Ведение традиционных дисциплин учебного плана | + | + | + | + |

В таблице символом + обозначена возможность получения соответствующего результата при использовании соответствующего типа фундамента. Вопрос «о типе фундамента» является достаточно важным, поскольку позволяет дать конструктивную характеризацию квалификационного потенциала научного работника или преподавателя. Необходимо отметить, что в рамках данной схемы не учтена глубина получаемых научных результатов, что может быть отражено количественными характеристиками рассматриваемой матрицы, а также возможностями решения задач науки и образования на основе концепции «полиобразования» или «поликвалификации». Последнее характерно для высококвалифицированных категорий ученых и преподавателей. Приведенные результаты могут характеризовать самые общие качественные характеристики рассматриваемых групп общества. Для перехода к количественным оценкам необходимо формирование определенной квалиметрии на множестве введенных качественных характеристик, которая может быть создана с помощью методов теории принятия решений, изложенных в главе 10.

*Математические модели в педагогике.* Рассмотрим задачу о применении тестов в дидактическом эксперименте (дидактика — наука об обучении). Свойство тестов измерять те или иные показатели личности исследовал датский математик Г. Раш, который сформулировал и пытался установить однозначную связь между результатом тестового контроля, соответствующим уровнем способностей личности и уровнем сложности последнего из выполненных заданий. Замечено, что все испытуемые могут быть проранжированы по обследованному соответствующим тестом качеству.

Г. Раш предложил оценивать вероятности правильного ответа i-го испытуемого на j-е задание теста по формуле

$$P_{ij} = c_{ij}/(1 + c_{ij}), \quad c_{ij} = \exp(T_i - B_j), \tag{13.10}$$

где $T_i$ — количественная оценка свойства личности, полученная с помощью рассматриваемого теста для i-го тестируемого, $B_j$ — количественная оценка сложности j-го задания теста.

В формуле (13.10) имеется определенная логика. В частности, если $T_i = B_j$, то величина вероятности $P_{ij} = 0{,}5$. Чем выше $T_i$, тем ближе эта вероятность к единице, а чем ниже $T_i$, тем ближе эта вероятность к нулю. Для исследования этих свойств достаточно рассмотреть свойства функции вероятности для указанных значений аргументов.

Введем далее понятие шанса на успех, который определим как отношение вероятности успеха к вероятности неуспеха. Из формулы (13.10) следует, что вероятность неуспешного ответа i-го испытуемого на j-е тестовое задание определяется соотношением

$$q_{ij} = 1 - P_{ij} = 1/(1 + c_{ij}). \qquad (13.11)$$

Соотношение (13.11) получено с применением формул вероятностей исходного и противоположного событий, исследуемых в главе 9. В результате шанс на успешный ответ i-го испытуемого на j-е задание определяется равенством

$$\frac{P_{ij}}{q_{ij}} = \frac{c_{ij}/(1 + c_{ij})}{1/(1 + c_{ij})} = c_{ij}. \qquad (13.12)$$

Из равенства (13.12) определяется смысл величины $c_{ij}$, которая характеризует шанс успешного ответа i-го испытуемого на j-е задание. Полученные соотношения для шансов на успех позволяют сравнить шансы на успешные ответы двух испытуемых, а также нескольких испытуемых. В результате на основе подобной методики появляется возможность анализировать качества в смысле шансов на успех коллективов.

*О математической лингвистике.* Лингвистика означает языкознание. Лингвистические законы (устойчивые формы связей) представляют собой регулярное и последовательное воспроизведение того или иного соотношения единиц данного языка, мыслимое в виде правил или формул закономерных соответствий. Математическая лингвистика — это раздел языкознания, использующий математические методы исследования языка. Кроме того, данная наука изучает абстрактные математические структуры, которые в некоторых отношениях сходны с естественными языками. Данная область математического знания первоначально развивалась как средство формализованного изучения естественных языков и представляла собой алгебраическую лингвистику, связанную с структуралистским подходом. В свое время этот подход в связи с отсутствием конструктивных идей привел в тупик на пути к построению универсальной грамматики. Однако около двадцати лет назад началось возрождение математической лингвистики, вызванное потребностями технических дисциплин. Развитие алгебраической лингвистики связано с разработкой искусственных языков и созданием информационно-поисковых систем.

Семиотика возникла как наука о знаках и знаковых системах. Научные школы в области семиотики успешно пользуются понятиями математической (алгебраической) лингвистики — тезаурусом, грамматикой, семантикой и др. Термин «тезаурус» в общем случае характеризует совокупность научных знаний о явлениях и законах внешнего мира. Этот термин был введен в литературу Кембриджской группой (1956 г.). В математической лингвистике и семиотике он используется для характеристики конкретного языка, его многоуровневой структуры. Под грамматикой (синтаксисом) понимают правила, с помощью которых формируются смысловыражающие элементы языка. Семантика определяет содержание, значение, смысл формируемых или распознаваемых конструкций языка.

При создании и использовании искусственных языков применяют порождающие и распознающие грамматики. Порождающая грамматика содержит правила формирования из первичных элементов (словаря) синтаксически правильных конструкций. Распознающая грамматика определяет правила, обеспечивающие синтаксическую правильность предложений или фраз языка.

На основе лингвистических представлений развиваются теории формальных грамматик или грамматик Н. Хомского, которые считаются основой теории формальных языков.

*О принятии решений в юриспруденции.* Методы принятия решений применяются при анализе ситуаций, которые могут возникать при проведении следствия или выдвижении обвинения. В частности, следователю полезно моделировать возможные варианты ответов заключенных. Для иллюстрации подобной ситуации обратимся к примеру. Пусть арестованы два подозреваемых в совершении серьезного преступления. У прокурора нет полного доказательства их вины, и результаты судебного разбирательства дела полностью зависят от стратегии поведения подозреваемых. У каждого из них есть две альтернативы —

сознаться в совершении преступления или нет. Возможные исходы представлены в табл. 13.2, где символ Н означает непризнание, а П — признание. Цифрами 1 и 2 обозначены номера задержанных.

Таблица 13.2

| 1 \ 2 | Н | П |
|---|---|---|
| Н | (1, 1) | (10, 0) |
| П | (0, 10) | (7, 7) |

Данные табл. 13.2 интерпретируются следующим образом. Если оба арестованных не признаются, то им будет предъявлено обвинение в совершении относительно незначительного преступления (например, связанного с незаконным владением оружия) и оба они получат по одному году лишения свободы. Если первый признается, а второй нет, то первый за выдачу сообщника и помощь в расследовании дела будет полностью освобожден от ответственности, а второй получит полный срок — 10 лет лишения свободы. Если же оба признаются, то оба понесут наказание, но за чистосердечное раскаяние срок заключения будет уменьшен до 7 лет. Возникает вопрос о том, какое решение следует принять каждому из заключенных, чтобы минимизировать наказание.

В данной задаче имеется неопределенность в принятии решения, которая может быть преодолена, если предположить наличие информации о стратегии поведения второго лица, а также об информированности обоих субъектов о намерениях другой стороны. Для решения задачи необходимо использовать один из методов принятия решений из числа описанных в главе 10, в частности метод системных матриц или методы теории риска.

## 13.3. МЕТОД ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

Рассмотрим возможности методов информатики в областях деятельности человека, связанных с получением количественных характеристик качественных явлений с помощью современных информационных систем. Подобные задачи возникают при экспертизе явлений, процессов в гуманитарных и социально-экономических сферах. Особенно это характерно для экспертных систем. При построении экспертных систем и автоматизированных систем управления возникает задача моделирования деятельности человека-оператора. Один из путей ее решения — использование теории нечетких множеств и понятия функции принадлежности, введенных в п. 10.5. Функция принадлежности $m_A(u)$ ставит в соответствие каждому элементу $u \in U$ число из интервала $[0,1]$, характеризующее степень принадлежности. Человек обычно воспринимает информацию, связывая ее с конкретными числами, и переводит их в свои понятия — значения лингвистических переменных, отражающие качественные оттенки.

Предположим, что, наблюдая за объектом в течение некоторого времени, человек n раз фиксирует свое внимание на том, имеет место факт А или нет. Событие, заключающееся в проверках наличия факта А, будем называть оценочным. Пусть в К проверках имеет место факт А. Тогда оператор регистрирует частоту $p = K / n$ появления факта А и оценивает ее с помощью слов типа «часто», «редко» и т. п., которые называются лингвистическими переменными. Оценивая частоту p, человек опирается на свой опыт, который отражает частоту появления факта А в событиях прошлого, представляющихся человеку аналогичным оцениваемому событию. К нему поступает также информация, основанная на наблюдениях других людей, появления факта А. В зависимости от степени доверия к источнику такого рода информации она запоминается с различными весами.

На универсальной шкале $[0,1]$ необходимо разместить значения лингвистической переменной, например: ВЕСЬМА РЕДКО, БОЛЕЕ-МЕНЕЕ РЕДКО, БОЛЕЕ-МЕНЕЕ ЧАСТО, ВЕСЬМА ЧАСТО. Тогда степень принадлежности некоторого значения вычисляется как отношение числа экспериментов, в которых оно встречалось в определенном интервале шкалы, к максимальному для этого значения числу экспериментов по всем интервалам. Метод основан на том, что в каждый интервал шкалы попадает одинаковое число экспериментов, что часто не соблюдается. Тогда в реальных условиях составляется эмпирическая таблица, в которой эксперименты могут быть распределены равномерно по интервалам, а в некоторые интервалы могут вообще не попасть.

Таблица 13.3

| Значение лингвистической переменной | Число встречаемых значений лингвистической переменной в интервале | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| ОЧЕНЬ МАЛО | 3 | 7 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| МАЛО | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 1 | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| СРЕДНЕ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 5 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| МНОГО | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 8 | 0 | 7 | 5 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| ОЧЕНЬ МНОГО | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 5 | 7 | 5 | 2 |

Предположим, что оператору в процессе управления необходимо оценить значения лингвистической переменной «относительная величина» отклонения σB в параметре технологического процесса, где B — максимально возможное отклонение, а ΔB лежит в интервале [0, B]. Значения лингвистической переменной следующие: ОЧЕНЬ МАЛО, МАЛО, СРЕДНЕ, МНОГО, ОЧЕНЬ МНОГО. Возьмем σB/B — оцениваемое отношение. Как интервал [0, B], так и σB/B разделены на 20 отрезков (см. табл. 13.3), по которым собирается статистика, характеризующая, насколько часто человек употреблял данные слова для выражения своего представления.

Используя свойства функции принадлежности, необходимо обработать данные табл. 13.3 так, чтобы уменьшить искажения, вносимые экспериментом. Естественным свойством функции принадлежности является наличие одного максимума и гладкие, затухающие до нуля фронты. Для обработки статистических данных можно воспользоваться матрицей подсказки. Для этого предварительно из табл. 13.3 удаляются явно ошибочные элементы (например, элемент ОЧЕНЬ МАЛО — 17). Критерием удаления служит наличие нескольких нулей в строке вокруг этого элемента.

Элементы матрицы подсказок вычисляются по формуле

$$K_j = \sum_{i=1}^{5} b_{ij},$$

где $b_{ij}$ — элемент табл. 13.3; j=1, 2, ..., 20.

Матрица подсказок представляет собой строку:

$$K = (K_1, \dots, K_{20}) = [3\ 7\ 4\ 0\ 5\ 1\ 6\ 6\ 3\ 5\ 10\ 8\ 0\ 7\ 6\ 4\ 9\ 7\ 5\ 2].$$

Далее выбирается максимальный элемент:

$$K_{max} = \max_j K_j$$

и затем все элементы преобразуются по формуле

$$C_{ij} = \frac{b_{ij} K_{max}}{K_j},\ i = \overline{1,5},\ j = \overline{1,20}.$$

Для столбцов, где $K_j = 0$, применяется линейная аппроксимация

$$C_{ij} = \frac{C_{i,j-1} - C_{i,j+1}}{2},\ i = \overline{1,5},\ j = \overline{1,20}.$$

Для построения функции принадлежности находятся максимальные элементы по строкам табл.13.1

$$C_{ij\,max} = \max_j C_{ij},\ i = \overline{1,5},\ j = \overline{1,20}.$$

Далее функции принадлежности будем вычислять по формуле

$$\mu_{ij} = C_{ij} / C_{i\,max}.$$

Приведенные результаты позволяют количественно описать лингвистические переменные, возникающие в трудно трансформируемых содержательных задачах принятия решения. Необходимо заметить, что имеются также и другие приемы построения функции принадлежности, основанные на применении экспертных оценок, параметризации, интервальных оценок. Мы не конкретизировали содержание исследуемых переменных, что оставляет возможность применения описанного подхода для получения экспертных оценок в гуманитарных и социально-экономических проблемах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Вайсборд Э. М., Жуковский В. И.* Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. М.: Сов. радио, 1980.

*Волкова В. Н., Денисов А. А., Темников Ф. Е.* Методы формализованного представления систем. СПб.: СПбГТУ, 1993.

Высокие интеллектуальные технологии образования и науки. СПб.: СПбГТУ, 1994–2004.

*Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. Пер. с англ. М.: Сов. радио, 1976.

*Козловская Э. А., Кочергин Е. И.* Финансовый рынок ценных бумаг в России. СПб.: СПбГТУ, 1996. Математические методы в социально-экономических исследованиях / Под ред. С. М. Ермакова и В. Б. Меласа. СПб.: Петрополис, 1996.

*Обен Ж.-П.* Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988.

*Петров А. А.* Экономика, модели, вычислительный эксперимент. М., Наука, 1996.

*Потеев М. И.* Основы аналитической дидактики. СПб.: ИТМО, 1992.

Проблемы деятельности ученого и научных коллективов. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1996.

*Севрук В. Т.* Банковские риски. М., 1994.

*Шенн Л. А., Ширяев А. Н.* Новый взгляд на расчеты «русского опциона» // Теория вероятностей и ее применения, 1994. Т. 39, вып. 1.

*Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Факты. Модели. М.: Фазис, 1998.

*Козлов В.Н.* Методы управления энергетическими объединениями. Электромеханические процессы. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2000.

Бортовые системы управления полетом / Под ред. В. Н. Козлова. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999.

*Быстров И. Е., Задонцев А. Ф., Козлов В. Н.* Математические модели в социальных и экономических системах. Определение потребности в специалистах. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004.

*Морозов Б. И., Рыкин О. Р.* Информационные технологии. Исследовательские расчеты в среде Маткад-2001 / Под ред. В. Н. Козлова. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2004.