А. И. АРКУША

руководство к решению задач по теоретической механике

А. И. АРКУША

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Издание 3-е, исправленное

Допущено Министерством высшего
и среднего специального
образования СССР
в качестве учебного пособия
для машиностроительных
специальностей вечерних
и заочных техникумов

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1976

531
А82
УДК 531 (075)

Аркуша А. И.

А82 Руководство к решению задач по теоретической механике. Учебное пособие для техникумов. Изд. 3-е, испр. М., «Высшая школа», 1976.

288 с. с ил.

Пособие содержит систематически подобранные типовые задачи по всему курсу, общие методические указания и советы для решения задач. Решение задач сопровождается подробными пояснениями. Многие задачи решены несколькими способами.

По сравнению со вторым изданием пособие дополнено несколькими задачами для самостоятельного решения.

Предназначается для учащихся очных, заочных и вечерних техникумов.

А $\frac{20302—343}{001(01)—76}$ БЗ—45—13—76 531

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие предназначено для учащихся заочных и вечерних техникумов и имеет цель оказать им помощь при получении первоначальных навыков решения задач по теоретической механике.

Пособие содержит общие методические указания и советы для решения задач. В нем систематически подобраны типовые задачи по всему курсу в соответствии с программой, утвержденной в 1972 г. Решение задач сопровождается подробными пояснениями. Некоторые задачи решены различными способами.

В начале каждого параграфа приведены теоретические сведения, формулы и уравнения, необходимые для решения задач, помещенных в данном параграфе.

Кроме решенных задач, в пособии имеются задачи для самостоятельного решения. Эти задачи отмечены знаком ●.

Следует отметить, что пособие не может заменить учебника, им нужно пользоваться, изучив предварительно соответствующий теоретический материал по учебнику. Чтобы не загружать пособия, в нем даны ссылки только на учебник Е. М. Никитина «Теоретическая механика для техникумов» (Изд. 8-е, изд-во «Наука»). Все вычисления в ходе решения задач выполнены с точностью до трех значащих цифр.

По сравнению со вторым изданием пособие дополнено несколькими задачами для самостоятельного решения. Кроме того, в книге исправлены опечатки и неточности в некоторых ответах.

Автор

ГЛАВА I

ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ

При решении задач по теоретической механике обычно производят различные действия над скалярными величинами (величины без направления—длина, площадь, масса, время и т. п.) и над векторными величинами (величины с направлением—сила, скорость, ускорение и т. п).

Благодаря тому что векторы имеют направление, математические действия над ними существенно отличаются от подобных действий над скалярами.

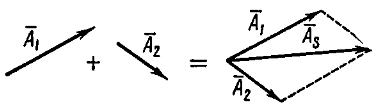


Рис. 1

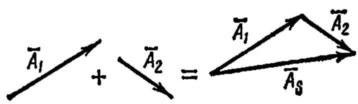


Рис. 2

Для сложения скалярных величин достаточно знать арифметику или алгебру. Например, если требуется сложить два числа, выражающих длины 5 и 8 *м*, то общую длину 13 *м* получим как арифметическую сумму чисел: $5+8=13$.

Если же складывают алгебраические величины -5 и $+8$ или $+5$ и -8, то результат достигается при помощи *алгебраической суммы* $-5+8=+3$ или $+5-8=-3$.

При сложении и вычитании векторов окончательный результат зависит, во-первых, от числового значения (модуля) векторов и, во-вторых, от их направления. Поэтому эти действия над векторами производят при помощи построения геометрических фигур.

Результат сложения векторов называют *геометрической суммой.*

Соответственно результат вычисления двух векторов называют *геометрической разностью.*

Сложение двух векторов производят либо по правилу параллелограмма (рис. 1), которое формулируется так:

геометрическая сумма $\bar{A}_s$ двух векторов $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ по модулю и направлению соответствует диагонали параллелограмма, построенного на слагаемых векторах, как на сторонах;

либо по следующему правилу треугольника (рис. 2):

геометрическая сумма $\bar{A}_s$ двух векторов $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ по модулю и направ-

лению соответствует замыкающей стороне треугольника, две другие стороны которого равны слагаемым векторам.

Каждое из этих правил выражается векторным равенством

$$\overline{A}_s = \overline{A}_1 + \overline{A}_2.$$

Оба приведенных правила можно использовать в следующих случаях: а) для графического решения задачи, при этом для построения параллелограмма или треугольника необходимо выбрать определенный масштаб; б) для аналитического решения с использованием геометрических свойств фигур или тригонометрических зависимостей.

Разность двух векторов находят при помощи построения треугольника, но при этом построении начала данных векторов («уменьшаемого» и «вычитаемого») помещаются в одной и той же точке, а вектор, равный по модулю и направлению их разности, должен быть направлен от вычитаемого вектора к уменьшаемому.

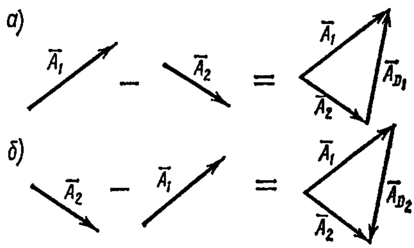


Рис. 3

На рис. 3, *а* показана разность $\overline{A}_1 - \overline{A}_2 = \overline{A}_{D_1}$, а на рис. 3, *б* — разность $\overline{A}_2 - \overline{A}_1 = \overline{A}_{D_2}$.

Сложение большего числа векторов производят по правилу многоугольника, являющемуся логическим развитием правила треугольника (рис. 4):

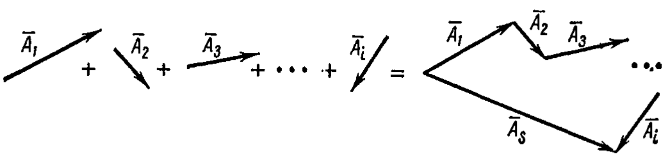


Рис. 4

геометрическая сумма $\overline{A}_s$ векторов $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, ..., $\overline{A}_i$ по модулю и направлению соответствует замыкающей стороне многоугольника, стороны которого равны слагаемым векторам:

$$\overline{A}_s = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 + \ldots + \overline{A}_i.$$

Используя правило многоугольника, задачу сложения векторов можно решать также либо графическим методом, либо аналитическим — методом проекций.

§ 1-1. Сложение векторов. Правила параллелограмма, треугольника и многоугольника

Задача 1-1. Произвести сложение двух векторов, если вектор $\bar{A}_1$ направлен горизонтально вправо, а $\bar{A}_2$ составляет с $\bar{A}_1$ угол 60° * (рис. 5). Модули векторов: $A_1 = 10$, $A_2 = 8$.

Решение 1 — по правилу параллелограмма.

1. Выберем масштаб построения векторов. Выбор масштаба построения производим на основе очевидной зависимости: длина отрезка l, изображающего вектор $\bar{A}$, прямо пропорциональна его модулю A:

$$A = k_{\text{в}} l,$$

где коэффициент пропорциональности $k_{\text{в}}$ — масштаб построения векторов **.

Так, если для изображения вектора $\bar{A}_1$, модуль которого равен десяти единицам, выберем отрезок длиной $ab = 40$ *мм*, то получим значение масштаба построения для данной задачи:

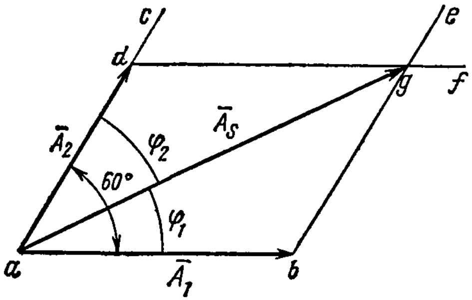


Рис. 5

$$k_{\text{в}} = A_1/ab = 10/40 = 0{,}25 \frac{1}{мм}$$

(0,25 единицы модуля в 1 *мм*).

2. Из произвольной точки a (см. рис. 5) построим вектор $\bar{A}_1$, изобразив его отрезком $ab = 40$ *мм*.

3. При помощи транспортира из точки a — начала построенного вектора — под углом $\alpha = 60°$ к линии ab проведем линию ac — направление вектора $\bar{A}_2$.

4. Определим длину отрезка ad, который изобразит вектор A_2:

$$ad = A_2/k_{\text{в}} = 8/0{,}25 = 32 \text{ мм}.$$

5. Отложим из точки a отрезок $ad = 32$ *мм* и, показав на нем стрелкой направление от a к d, получим вектор $\bar{A}_2$.

6. Построим прямые $be \parallel ad$ и $df \parallel ab$ и, обозначив g точку пересечения этих прямых, получим параллелограмм $abgd$.

7. Соединив точки a и g, получим диагональ ag, которая по

---

* Условимся, как принято в тригонометрии, положительный отсчет углов производить в направлении против хода часовой стрелки.

** Размеры некоторых рисунков, относящихся к графически решаемым задачам, не соответствуют указанным в тексте масштабам из-за большей степени их уменьшения.

модулю и направлению (от a к g) изображает вектор $\bar{A}_s$—искомую сумму векторов $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$.

8. Найдем модуль вектора $\bar{A}_s$:

$$A_s = k_в \cdot ag.$$

Путем непосредственного измерения находим, что $ag \approx 63$ *мм*. Таким образом,

$$A_s = 0{,}25 \cdot 63 = 15{,}8.$$

9. Углы, образуемые направлением $\bar{A}_s$ с направлением построенных векторов, найдем при помощи транспортира:

$$\varphi_1 = \angle(\bar{A}_1,\ \bar{A}_s) = 26°.$$

Следовательно,

$$\varphi_2 = \angle(\bar{A}_2,\ \bar{A}_s) = \alpha - \varphi_1 = 34°.$$

Ответ. Два вектора $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ можно заменить одним вектором $\bar{A}_s$, причем модуль его содержит 15,8 единицы и его направление составляет с направлением первого вектора угол, равный 26°.

Решение 2—по правилу треугольника.

1. Выберем масштаб построения (для разнообразия и проверки решения не будем брать масштаб первого решения, а выберем другой).

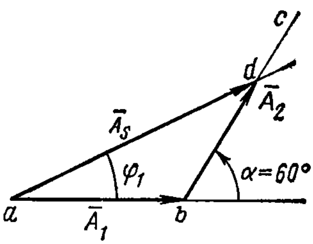


Рис. 6

Для изображения вектора $\bar{A}_1$ ($A_1 = 10$ единиц) (рис. 6) примем длину $ab = 25$ *мм*. Тогда масштаб

$$k_в = A_1/ab = 10/25 = 0{,}4 \ 1/мм$$

(0,4 единицы модуля в 1 *мм*).

Из произвольной точки a построим вектор $\bar{A}_1$, изобразив его отрезком $ab = 25$ *мм*.

2. Из точки b—конца построенного вектора—строим прямую bc под углом 60° к направлению ab.

3. Определим длину отрезка bd, который изобразит вектор $\bar{A}_2$:

$$bd = A_2/k_в = 8/0{,}4 = 20 \ мм.$$

4. На прямой bc отложим отрезок $bd = 20$ *мм*. Показав на нем направление от b к d, получим второй вектор $\bar{A}_2$.

5. Соединив между собой точку a—начало первого вектора и точку d—конец второго вектора, получим отрезок ad, а затем, показав на нем направление от a к d, получим вектор $\bar{A}_s$—искомую сумму двух векторов.

6. Найдем модуль вектора $\bar{A}_s$. Измерим ad: $ad = 39$ *мм* и, следовательно, $A_s = k_в\, ad = 0{,}4 \cdot 39 = 15{,}6$.

7. Угол $\varphi_1 = \angle(\overline{A}_1, \overline{A}_s)$, определяющий направление найденного вектора A_s, построим при помощи транспортира: $\varphi_1 = \angle(\overline{A}_1, \overline{A}_s) \approx 26°$.

Таким образом, получаем тот же ответ, что и в первом решении.

Задача 2-1. Сложить два вектора $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$, если первый из них направлен по горизонтали вправо, а второй образует с первым угол 150°, модули векторов $A_1 = 10$ и $A_2 = 8$ (рис. 7).

Решение — по правилу параллелограмма.

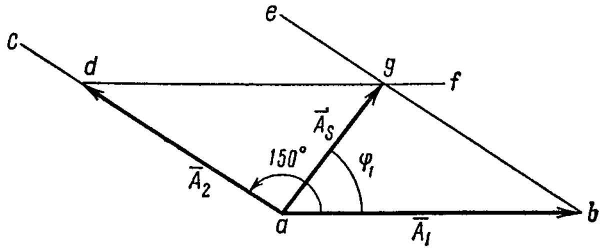


Рис. 7

1. Выберем масштаб построения. Вектор $\overline{A}_1$ изобразим отрезком длиной $ab = 44$ *мм*. Тогда для масштаба построения получим значение

$$k_в = A_1/ab = 10/44 = 0{,}228 \ 1/мм.$$

2. Найдем длину отрезка ad для изображения в принятом масштабе вектора $\overline{A}_2$:

$$ad = A_2/k_в = 8/0{,}228 = 35 \ мм.$$

3. Из точки a под углом 150° к направлению вектора $\overline{A}_1$ проведем линию ac и отложим на ней отрезок $ad = 35$ *мм*, который изобразит вектор $\overline{A}_2$.

4. Построим прямые $be \parallel ad$ и $df \parallel ab$. Обозначив точку их пересечения, получим параллелограмм $abgd$.

5. Проведем диагональ ag, которая изобразит искомую сумму $\overline{A}_s$ построенных векторов.

6. Измерим длину отрезка ag и найдем, что $ag = 24$ *мм*, а модуль вектора $\overline{A}_s$

$$A_s = k_в \cdot ag = 0{,}228 \cdot 24 \approx 5{,}5.$$

7. Угол $\varphi_1 = \angle(\overline{A}_1, \overline{A}_s)$ найдем непосредственным измерением (по транспортиру): $\varphi_1 = \angle(\overline{A}_1, \overline{A}_s) = 53°$.

Ответ. Два вектора $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ можно заменить вектором $\overline{A}_s$. Модуль этого вектора $A_s = 5{,}5$ единицы и направлен он под углом 53° к первому из них.

Решение задачи вторым способом — по правилу треугольника — рекомендуется произвести самостоятельно.

Сравнив решение задач 1-1 и 2-1, следует обратить внимание на важную особенность геометрического сложения: при сложении двух векторов с неизменяющимися модулями в зависимости от их направления можно получить сколько угодно отличающихся друг от друга суммарных векторов (рис. 8, *а*).

Легко заметить, что геометрическая сумма с наибольшим модулем, равным сумме модулей данных векторов, получается при $\alpha = 0°$ (рис. 8, *б*) и геометрическая сумма с наименьшим модулем, равным разности модулей тех же векторов, получается при $\alpha = 180°$ (рис. 8, *в*).

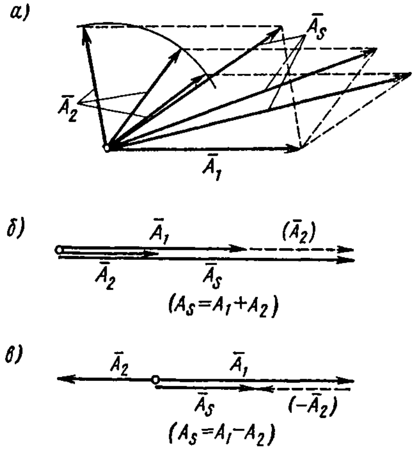


Рис. 8

Задача 3-1. Найти сумму пяти векторов, если их модули $A_1 = 40$; $A_2 = 30$; $A_3 = 50$; $A_4 = 25$ и $A_5 = 32$ (рис. 9, *а*). Первый вектор направлен по горизонтали вправо, а остальные с этим направлением образуют соответственно углы $\alpha = 45°$; $\beta = 90°$; $\gamma = 180°$ и $\delta = 30°$ в сторону против хода часовой стрелки.

Решение — по правилу многоугольника.

1. Выберем масштаб построения. Для изображения вектора $\bar{A}_1$ примем длину $ab = 20$ *мм*. Тогда масштаб построения получит значение

$$k_в = A_1/ab = 40/20 = 2 \ 1/мм.$$

2. Определим длины отрезков для изображения остальных векторов:

$$bc = A_2/k_в = 30/2 = 15 \ мм; \quad cd = A_3/k_в = 50/2 = 25 \ мм;$$
$$de = A_4/k_в = 25/2 = 12{,}5 \ мм; \quad ef = A_5/k_в = 32/2 = 16 \ мм.$$

3. Построим векторный многоугольник. Из произвольно выбранной точки *а* отложим отрезок $ab = 20$ *мм*, изображающий вектор $\bar{A}_1$; из точки *b* — конца вектора $\bar{A}_1$ — проводим прямую под данным углом $\alpha = 45°$ к горизонтали и отложим на ней отрезок $bc = 15$ *мм*. Затем из точки *с* под углом $\beta = 90°$ к горизонтали отложим отрезок $cd = 25$ *мм*, а из точки *d* под углом $\gamma = 180°$ — отрезок $de = 12{,}5$ *мм* и, наконец, из точки *е* под углом $\delta = 30°$ — отрезок $ef = 16$ *мм*. Полученную ломаную линию *abcdef* замыкаем отрезком *af*, направив его от *а* — начала построения многоугольника к *f* — последней точке построения. Этот замыкающий вектор изображает искомую сумму всех векторов, равную $\bar{A}_s$.

4. Определим модуль $\bar{A}_s$. Измерив *af*, найдем $af = 54$ *мм*, следовательно,

$$A_s = k_в af = 2 \cdot 54 \approx 108 \text{ единиц.}$$

5. Направление вектора $\bar{A}_s$ определяется углом $\varphi=\angle(\bar{A}_1, \bar{A}_s)$, значение которого находим путем непосредственного измерения:

$$\varphi=\angle(\bar{A}_1, \bar{A}_s)=54°.$$

Ответ. Сумма построенных векторов равна вектору $\bar{A}_s$, модуль которого содержит 108 единиц, а направление суммарного вектора составляет с вектором $\bar{A}_1$ угол $\varphi=54°$.

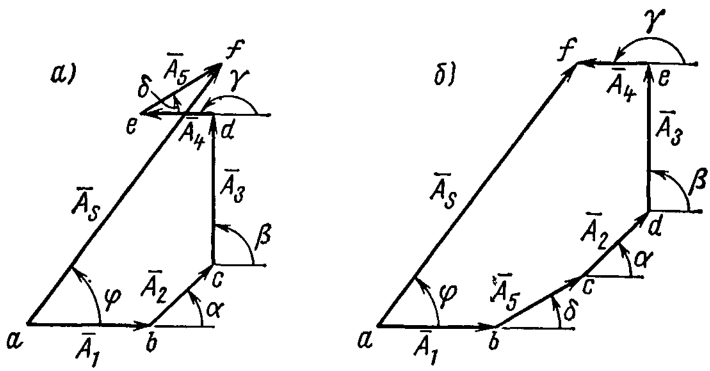


Рис. 9

Можно проверить решение задачи путем повторного построения векторного многоугольника, но при ином порядке чередования его сторон, как, например, это сделано на рис. 9, *б*. Результат получается тот же. Таким образом, от порядка сложения векторов их сумма не изменяется (переместительный закон сложения).

§ 2-1. Разложение вектора на два составляющих. Разность векторов

Ниже при изучении теоретических вопросов и при решении задач очень часто производится разложение вектора на два составляющих (слагаемых). Так как это действие обратно сложению векторов, оно также выполняется при помощи построения параллелограмма или треугольника.

Задачу разложения вектора на два составляющих в зависимости от исходных данных можно разделить на четыре различных типа.

1-й тип. Даны вектор* и направления его составляющих. Требуется найти модули составляющих. Этот тип задач решается обычно при помощи построения параллелограмма (задачи 4-2, 5-2 и 6-2).

2-й тип. Даны вектор и один из его составляющих. Требуется найти второй составляющий вектор, т. е. его модуль и направление. Этот тип задачи иначе называют вычитанием векторов (задачи 7-2 и 8-2).

---

* Задать вектор — это значит задать его модуль и направление.

3-й тип. Даны вектор и модули его составляющих. Требуется найти направления этих составляющих (задача 9-2).

4-й тип. Даны вектор, а также модуль одного и направление другого составляющего. Требуется найти направление первого и модуль второго составляющего векторов (задача 10-2).

Задача 4-2. Вектор $\bar{A}$, модуль которого $A=12$ направлен под углом 35° к горизонтальной прямой; разложить его на два составляющих, направленных вертикально и горизонтально (рис. 10).

Решение.

1. Из точки a проводим горизонтальную прямую ab и под углом 35° к ней строим вектор $\bar{A}$, изобразив его отрезком длиной $ac = 25$ *мм*.

2. Вычислим получившийся благодаря выбору этой длины масштаб построения:

$k_в = A/ac = 12/25 = 0{,}48$ 1/*мм* (0,48 единицы модуля вектора в 1 *мм*).

3. Из точки a (начала вектора) проведем вертикальную линию ad, определяющую направление одного из составляющих. Направление второго со-

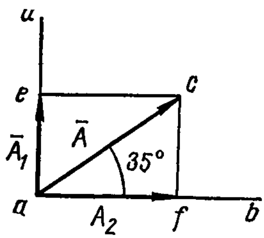


Рис. 10

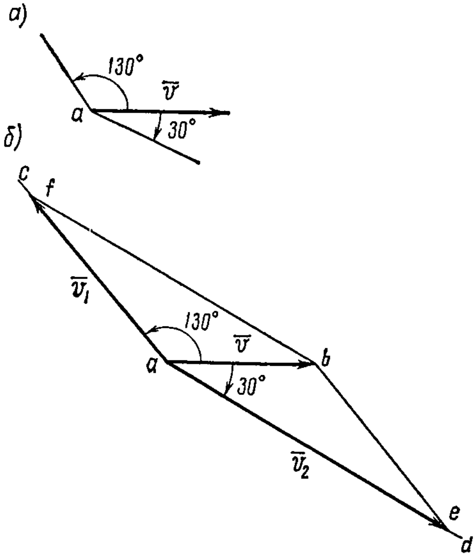


Рис. 11

ставляющего определяется горизонтальной линией ab.

4. Из точки c (конца вектора) проводим линии, параллельные ab и ad, получаем параллелограмм $aecf$, стороны ae и af которого и изображают искомые составляющие $\bar{A}_1$ (направлен от a к e) и $\bar{A}_2$ (направлен от a к f) вектора $\bar{A}$.

5. Измерим длины отрезков ae и af; $ae = 15$ *мм* и $af = 20$ *мм*. Следовательно, модули составляющих векторов

$$A_1 = k_в ae = 0{,}48 \cdot 15 = 7{,}2 \text{ и } A_2 = k_в af = 0{,}48 \cdot 20 = 9{,}6.$$

Ответ. Вертикальный составляющий вектор содержит 7,2 единицы, а горизонтальный — 9,6 единицы.

Задача 5-2. Горизонтально направленный (вправо) вектор $\bar{v}$, модуль которого 40 единиц, разложить на два составляющих, направленных под углами 130° и —30° (рис. 11, a).

Решение.

1. Из точки a строим данный вектор $\bar{v}$, выбрав его длину $ab = 20$ *мм* (рис. 11, *б*).

2. Масштаб построения $k_в = v/ab = 40/20 = 2$ 1/*мм*.

3. Из точки a соответственно под углами 130 и —30°, которые откладываем при помощи транспортира, проводим линии ac и ad — направления составляющих векторов.

4. Из точки b проводим линии $be \parallel ac$ и $bf \parallel ad$. В получившемся параллелограмме $afbe$ стороны af и ae изображают искомые векторы $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$.

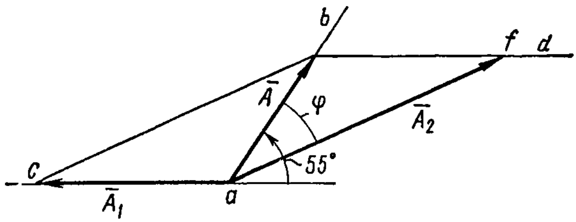


Рис. 12

5. Измерим стороны af и ae: $af = 29$ *мм*, $ae = 44$ *мм*; тогда $v_1 = 2 \cdot 29 = 58$; $v_2 = 2 \cdot 44 = 88$.

Ответ. Составляющие данного вектора имеют модули 58 и 88 единиц.

Как видно, модуль одного или обоих составляющих может быть больше модуля данного вектора.

Легко также убедиться в том, что если составляющие направлены к данному вектору под одинаковыми углами, то при построении образуется ромб (свойство диагонали ромба — она делит пополам угол между сторонами) и, следовательно, модули составляющих векторов равны между собой.

● **Задача 6-2.** Вектор $\bar{A}$ направлен вертикально вниз и имеет модуль 50 единиц. Найти модули составляющих векторов, если они направлены под углами +70 и —70° к данному.

Ответ. $A_1 = A_2 \approx 73$ единицам.

Задача 7-2. Вектор $\bar{A}$ направлен под углом 55° к горизонту (вправо и вверх) и имеет модуль 15 единиц; один из его составляющих $\bar{A}_1$ имеет модуль 20 единиц и направлен по горизонтали влево. Найти второй вектор (определить его модуль и направление относительно данного вектора) (рис. 12).

Решение 1 — по правилу параллелограмма.

1. Через точку a проводим горизонтальную прямую и под углом 55° к ней строим данный вектор $\bar{A}$, изобразив его отрезком $ab = 25$ *мм*.

2. Находим масштаб построения $k_в = A/ab = 15/25 = 0{,}6$ 1/*мм*.

3. Находим длину отрезка ac, изображающего в том же масштабе вектор $\bar{A}_1$: $ac = A_1/k_в = 20/0{,}6 = 33$ *мм*.

4. Из точки a строим вектор $\bar{A}_1$, изобразив его отрезком $ac=33$ *мм* и направив по горизонтали влево.

5. На отрезках ab и ac нужно построить параллелограмм, в котором ab — диагональ и ac — сторона. Поэтому дальнейшее построение ведется в таком порядке: соединяем точки b и c; из точки b проводим линию, параллельную ac ($bd \parallel ac$), и, наконец, из точки a проводим линию, параллельную cb, до пересечения в точке f с bd ($af \parallel cb$). Получается параллелограмм $acbf$, в котором отрезок af (направленный от a к f) изображает искомый второй составляющий вектор $\bar{A}_2$.

6. Модуль вектора $\bar{A}_2$ найдем, измерив его длину: $af=52$ *мм*, $A_2=k_в af=0{,}6\cdot 52=31$ единице, а направление вектора $\bar{A}_2$ определяется углом $\varphi=\angle baf$, который найдем при помощи транспортира: $\varphi=31°$.

Ответ. Второй составляющий вектор численно равен 31, и его направление образует с направлением заданного вектора угол 31°.

Как уже указывалось выше, этот тип задачи носит название вычитания вектора (по заданному вектору и одному из его слагаемых находим второй слагаемый вектор). Задачу вычитания векторов наиболее просто решать по правилу треугольника.

Решение 2 — по правилу треугольника.

1. Из точки a (рис. 13) под углом 55° к горизонтали строим вектор $\bar{A}$ в виде отрезка $ab=20$ *мм* (для разнообразия построение выполняем в масштабе, отличном от принятого в первом решении).

2. Масштаб построения получается равным

$$k_в=15/20=0{,}75 \ 1/мм.$$

3. Находим отрезок ac для изображения известного составляющего вектора $\bar{A}_1$:

$$ac=A_1/k_в=20/0{,}75=27 \ мм.$$

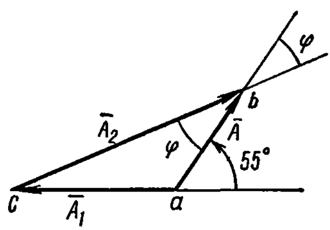


Рис. 13

4. Из точки a по горизонтали влево строим вектор $\bar{A}_1$, изобразив его отрезком $ac=27$ *мм*.

Как видно, сначала выполняются те же операции, что в первом решении, потому что производится построение исходных данных. Затем ход решения изменяется, так как в первом случае строится параллелограмм, а теперь нужно построить треугольник.

5. Соединив точки c и b, получим третью сторону cb треугольника acb, которая и изобразит искомый составляющий вектор, направленный от известного составляющего вектора $\bar{A}_1$ к данному (суммарному) вектору $\bar{A}$.

6. Измерив длину отрезка cb, найдем: $cb=42$ *мм* и, следовательно, $A_2=k_в cb=0{,}75\cdot 42=31{,}5$, а направление вектора $\bar{A}_2$ относительно $\bar{A}$ определяется углом $\varphi\approx 32°$, который найдем при помощи транспортира.

Ответ. Результат тот же, что и в первом решении.

● **Задача 8-2.** Вектор $\overline{B}$ направлен вертикально вверх и численно равен 8. Первый составляющий вектор равен тоже 8 и его направление составляет с направлением $\overline{B}$ угол 70°. Определить второй составляющий вектор.

Ответ. $B_2=9{,}2$ и $\varphi_2=55°$.

● **Задача 9-2.** (3-й тип). Произвольно направленный вектор $\overline{A}$, численно равный 25 единицам, разложить на два вектора, модули которых $A_1=20$ и $A_2=40$.

Ответ. Направление составляющих относительно данного вектора: $\varphi_1=54°$; $\varphi_2=24°$.

При решении задач этого типа необходимо иметь в виду, что они характерны лишь для того случая, если сумма модулей составляющих векторов не меньше модуля раскладываемого вектора (свойство сторон треугольника).

● **Задача 10-2** (4-й тип). Вектор $\overline{B}$ направлен вертикально вниз и имеет модуль $B=30$ единиц. Первый составляющий вектор направлен горизонтально, а второй имеет модуль $B_2=45$ единиц. Определить модуль B_1 первого составляющего вектора и угол φ_2 между вектором $\overline{B}$ и вторым составляющим.

Ответ. $B_1\approx 33{,}5$; $\varphi_2=48°$.

§ 3-1. Сложение и разложение векторов графо-аналитическим способом

Графический способ выполнения действий с векторами не всегда удобен, и даже при самом тщательном построении результат получается не особенно точным.

Поэтому обычно при решении задач рассмотренные в § 1-1 и 2-1 действия над векторами производятся так называемым графо-аналитическим способом.

Решение задачи на сложение векторов по правилу параллелограмма производится в такой последовательности.

1. Как и при графическом решении, в том же порядке, четкими линиями делается рисунок параллелограмма не в масштабе, но с примерным сохранением соотношений между длинами и углами, т. е. больший вектор изображается соответственно более длинным отрезком и т. д. На рисунке обозначаются все данные и искомые величины.

2. Модуль суммарного вектора определяется по формуле

$$A_s=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\alpha}, \qquad (1)$$

где A_1 и A_2—модули данных (слагаемых) векторов и α—угол между их направлениями (см. рис. 5). Формула эта выводится из теоремы косинусов.

3. Направление суммарного вектора $\overline{A}_s$ относительно заданных векторов, т. е. один из углов φ_1 или φ_2 (см. рис. 5) определяется

при помощи теоремы синусов:

$$\frac{A_1}{\sin\varphi_2}=\frac{A_2}{\sin\varphi_1}=\frac{A_s}{\sin\alpha}. \qquad (2)$$

Возможны следующие частные случаи.

Векторы $\bar{A}_1$ *и* $\bar{A}_2$ *взаимно перпендикулярны:* $\alpha=90°$. Параллелограмм превращается в прямоугольник (рис. 14) и тогда

$$A_s=\sqrt{A_1^2+A_2^2}, \qquad (3)$$

$$\sin\varphi_1=\frac{A_2}{A_s} \quad \text{и} \quad \sin\varphi_2=\frac{A_1}{A_s}. \qquad (4)$$

Модули данных векторов равны между собой: $A_1=A_2=A$. Параллелограмм становится ромбом (рис. 15), в этом случае

$$A_s=2A\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad (5)$$

так как $\varphi_1=\varphi_2=\alpha/2$.

В тех случаях когда при решении задачи используется правило треугольника, для определения неизвестных величин применяются либо теорема синусов и теорема косинусов (если получившийся

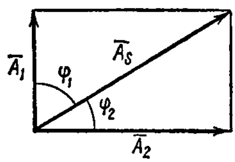


Рис. 14

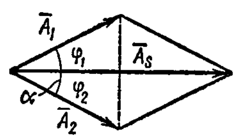


Рис. 15

векторный треугольник—косоугольный), либо тригонометрические функции острого угла (если векторный треугольник получился прямоугольным).

Задача 11-3. Определить модуль и направление суммарного вектора, используя данные из условия задачи 1-1: $A_1=10$; $A_2=8$ и $\alpha=60°$ (см. рис. 5).

Решение.

1. Изобразим заданные векторы отрезками *ab* (вектор $\bar{A}_1$) и *ad* (вектор $\bar{A}_2$) и, нарисовав далее параллелограмм *abgd*, проведем в нем диагональ *ag* (искомый вектор $\bar{A}_s$), которая разделит угол α на два искомых φ_1 и φ_2 (этот рисунок, соответствующий построению, показанному на рис. 5, рекомендуется сделать отдельно на листе бумаги и по нему следить за ходом решения).

2. Модуль вектора $\bar{A}_s$ найдем по формуле (1). После подстановки в нее числовых значений данных величин получим

$$A_s=\sqrt{10^2+8^2+2\cdot10\cdot8\cos60°}=\sqrt{100+64+80},$$

откуда $A_s=15{,}6$ единицы.

3. Направление вектора $\overline{A}_s$ найдем, определив угол φ_1 (или φ_2) из формулы (2):

$$\frac{A_2}{\sin\varphi_1}=\frac{A_s}{\sin\alpha},$$

откуда

$$\sin\varphi_1=\frac{A_2\sin\alpha}{A_s}=\frac{8\sin 60^\circ}{15{,}6}=0{,}445.$$

По таблицам или при помощи счетной линейки находим $\varphi_1=26^\circ 20'$.

Ответ. Суммарный вектор равен 15,6 единицы, и его направление образует с $\overline{A}_1$ угол $26^\circ 20'$.

Если сравнить полученные результаты с графическим решением задачи 1-1, при котором $A_s=15{,}8$ и $\varphi_1=26^\circ$, то увидим некоторое расхождение.

Считая значения, полученные путем вычислений, достоверными и принимая их за 100%, можно определить ошибку, допущенную при графическом решении.

Ошибка при определении A_s составляет:

$$\frac{15{,}8-15{,}6}{15{,}6}\cdot 100\%=1{,}27\%.$$

Ошибка при определении φ_1:

$$\frac{26^\circ 20'-26^\circ}{26^\circ 20'}100\%=\frac{1^\circ/3}{26\,(1^\circ/3)}100\%=1{,}27\%.$$

Задача 12-3. Найти составляющие заданного вектора, используя условие задачи 5-2: $v=40$; $\varphi_1=130^\circ$ и $\varphi_2=30^\circ$ (рис. 16, *а*).

Решение.

1. Разложение вектора на два составляющих графо-аналитическим способом удобнее всего производить, используя правило треугольника. Поэтому из произвольной точки a проведем вектор $\overline{v}$ (отрезок ab произвольной длины). Затем из точек a и b проведем линии, параллельные AA_1 и AA_2—линиям, определяющим заданные направления искомых составляющих. Проведенные линии пересекутся в точке c, и получится треугольник abc, в котором $\overline{ac}=\overline{v}_2$, $\overline{cb}=\overline{v}_1$—искомые составляющие, а третья сторона $\overline{ab}=\overline{v}$ и все углы известны (рис. 16, *б*).

2. Для получившегося треугольника приведем выражение теоремы синусов:

$$\frac{v_1}{\sin\varphi_2}=\frac{v_2}{\sin\varphi_1}=\frac{v}{\sin\alpha},$$

где

$$\alpha=180^\circ-(\varphi_1^\circ+\varphi_2^\circ)=20^\circ,$$

из которого

$$v_1=\frac{v}{\sin\alpha}\sin\varphi_2=\frac{40\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}=58{,}5;$$

$$v_2=\frac{v}{\sin\alpha}\sin\varphi_1=\frac{40\sin 130^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{40\sin 50^\circ}{\sin 20^\circ}=89{,}5.$$

Ответ. Вектор $\bar{v}$ разложен на два составляющих с модулями $v_1 = 58,5$ и $v_2 = 89,5$ единиц (рис. 16, *в*).

Графическое решение задачи дает менее точный результат: $v_1 = 58$ и $v_2 = 88$. По примеру предыдущей задачи можно найти относительные ошибки, допущенные при графическом решении; они составят соответственно 0,85 и 1,78%. Вычисление ошибок рекомендуется произвести самостоятельно.

● **Задача 13-3.** Вектор, направленный вертикально вниз и имеющий модуль 100 единиц, разложить на две составляющих, направленных следующим образом: один — под углом 90° (горизонтально влево), а второй — под углом 40° к данному.

Ответ: $A_1 = 83,8$ и $A_2 = 131,0$.

● **Задача 14-3.** Решить графо-аналитическим способом задачу 7-2; найти относительные ошибки, допущенные при решении задачи 7-2 графическим способом.

Ответ: $A_2 = 31,1$; $\varphi_2 = 31°50'$.

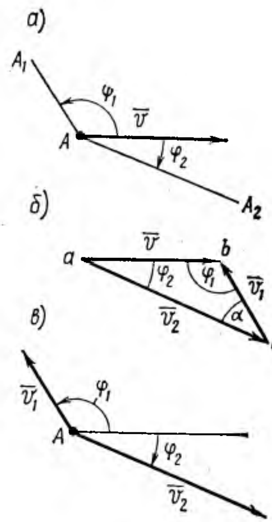


Рис. 16

§ 4-1. Метод проекций. Проекция вектора на ось. Проекции вектора на две взаимно перпендикулярные оси. Определение векторной суммы методом проекций

Графо-аналитический метод решения задач удобен лишь в тех случаях, когда складываются два вектора или когда необходимо вектор разложить на две составляющих, т. е. когда можно воспользоваться правилами параллелограмма или треугольника. Если же по ходу решения задачи применяется правило многоугольника, то целесообразнее использовать метод проекций.

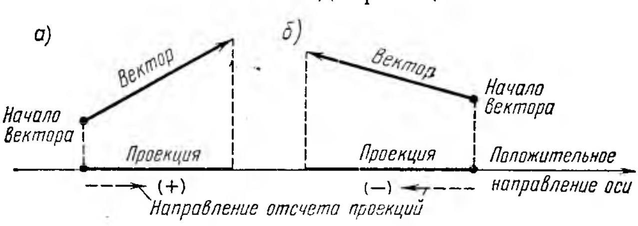


Рис. 17

Для правильного решения задач необходимо знать следующее:

1. Проекция вектора на ось — величина алгебраическая, т. е. она имеет положительный или отрицательный знак (рис. 17).

Если отсчет длины проекции от ее начала к концу совпадает с принятым положительным направлением оси, то проекция положительна (рис. 17, *а*).

Если отсчет длины проекции от начала к концу идет в сторону, противоположную положительному направлению оси, то проекция отрицательна (рис. 17, *б*).

2. Обычно осями проекций служат две взаимно перпендикулярные оси координат. Но иногда условие задачи таково, что достаточно использовать одну ось или выгоднее оси проекций расположить друг к другу не перпендикулярно (см. задачу 41-8, 3-е решение).

3. Если две оси проекций взаимно перпендикулярны, то, как правило, проектируемый вектор $\bar{v}$ и его проекции на обе оси v_x и v_y образуют прямоугольный треугольник (рис. 18)*. Углы, которые образуются направлением заданного вектора с осями проекций, — всегда известны, поэтому очень легко определяются углы α_x и α_y между вектором $\bar{v}$ и его проекциями v_x и v_y.

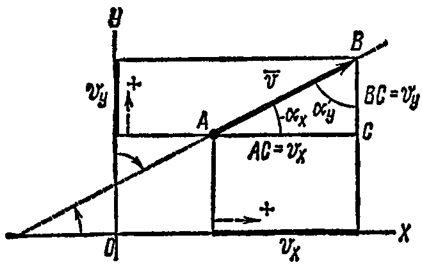


Рис. 18

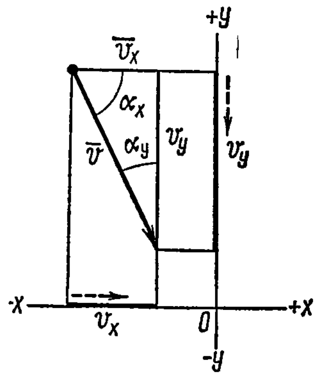


Рис. 19

4. Определив знак проекции и угол, образованный вектором и его проекцией, легко найти числовое значение проекции при помощи тригонометрических функций. Например, проекции $\bar{v}$ на рис. 19 имеют следующие значения:

$$v_x = +v\cos\alpha_x \quad \text{или} \quad v_x = +v\sin\alpha_y;$$
$$v_y = -v\cos\alpha_y \quad \text{или} \quad v_y = -v\sin\alpha_x.$$

5. Зависимость между модулем вектора и его проекциями на две взаимно перпендикулярные оси определяется по теореме Пифагора (см. рис. 18 или 19):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{6}$$

6. По известным проекциям на две взаимно перпендикулярные оси можно найти модуль и направление вектора. Причем для решения такой задачи применяют два пути.

---

* Исключение составляют лишь те векторы, которые оказываются перпендикулярными к одной оси и, следовательно, параллельными другой. Проекция такого вектора на первую ось (перпендикулярную к направлению вектора) равна нулю, а на вторую ось (параллельную вектору) равна модулю вектора, взятому с положительным или отрицательным знаком (см. задачу 15-4).

Можно сначала найти модуль вектора по формуле (6), а затем, используя тригонометрические функции, найти направление вектора (задача 17-4, пункты 7 и 8).

Можно при помощи тригонометрических функций сначала найти направление вектора, а затем его модуль (задача 17-4, пункты 7′ и 8′).

7. Геометрическую сумму $\overline{A}_s$ любого числа векторов $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_i$ можно определить аналитическим путем (рис. 20).

Порядок решения задачи такой:

а) выбираются оси координат (оси проекций);

б) определяются проекции всех заданных векторов на эти оси;

в) складываются проекции всех векторов на ось x и определяется проекция X_s геометрической суммы $\overline{A}_s$:

$$X_s = \sum_{n=1}^{i} X_n;$$

точно так же определяется проекция Y_s геометрической суммы $\overline{A}_s$ на ось y:

$$Y_s = \sum_{n=1}^{i} Y_n.$$

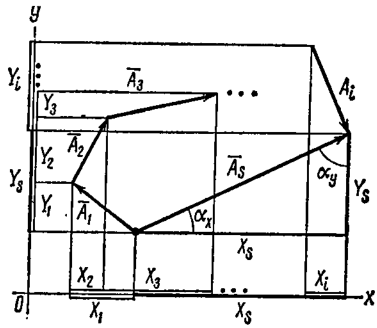


Рис. 20

Решение задачи затем можно проводить двумя путями.

1-й путь.

Находится модуль геометрической суммы $A_s = \sqrt{X_s^2 + Y_s^2}$;

находится направление геометрической суммы при помощи тригонометрических функций, например $\sin \alpha_x = Y_s / A_s$;

2-й путь.

Находится направление геометрической суммы (угол α_x или угол α_y)

$$\operatorname{tg} \alpha_x = Y_s / X_s \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \alpha_y = X_s / Y_s;$$

используя найденный угол, находится модуль геометрической суммы при помощи тригонометрических функций, например

$$A_s = X_s / \sin \alpha_y.$$

Задача 15-4. В точках A, B и C (рис. 21) к прямой, наклоненной к горизонту под углом 40°, приложены шесть векторов, модули которых $v_1 = 40$, $v_2 = 18$, $v_3 = 20$, $v_4 = 30$, $v_5 = 18$, $v_6 = 35$. Первый и третий векторы направлены вертикально, второй и шестой — горизонтально, четвертый и пятый — вдоль прямой AC. Определить проекции векторов на две взаимно перпендикулярные оси.

Решение.

1. Так как из шести заданных векторов два направлены вертикально, а два горизонтально, то расположение осей проекций

целесообразно выбрать соответственно именно этим направлениям. Начало осей поместим в точке A, ось x направим горизонтально вправо и ось y—вертикально вверх.

2. Определяем проекции векторов на ось x:

$X_1 = 0$, вектор $\bar{v}_1$ перпендикулярен к оси и поэтому он проектируется в точку;

$X_2 = v_2 = 18$, проекция положительна (отсчет длины проекции совпадает с положительным направлением оси) и равна модулю вектора, так как вектор параллелен оси;

$X_3 = 0$, вектор $\bar{v}_3$ перпендикулярен к оси;

$X_4 = v_4 \cdot \cos\alpha_4 = 30 \cdot \cos 40° = 23{,}0$, проекция положительна, так как отсчет длины проекции совпадает с положительным направлением оси; угол α_4 между вектором и его проекцией равен 40°, что непосредственно следует из рис. 21;

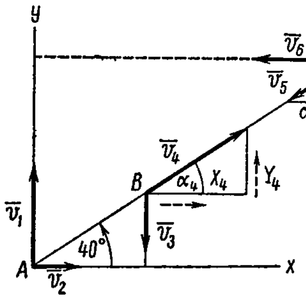


Рис. 21

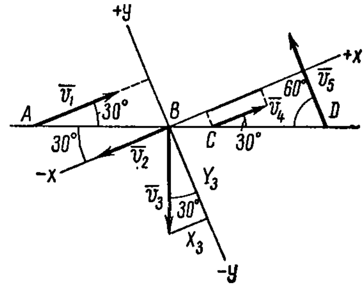


Рис. 22

$X_5 = -v_5 \cos\alpha_5 = -18\cos 40° = -13{,}8$, проекция отрицательна, потому что направление ее отсчета идет влево, т. е. в противоположную сторону относительно положительного направления оси;

$X_6 = -v_6 = -35$, проекция отрицательна, потому что направление ее отсчета идет влево; а так как вектор параллелен оси; то числовое значение проекции равно модулю вектора.

3. Определяем проекции векторов на ось y (пояснения к действиям при определении проекции рекомендуется сделать самостоятельно):

$$Y_1 = v_1 = 40; \quad Y_2 = 0; \quad Y_3 = -v_3 = -20;$$

$$Y_4 = v_4 \sin\alpha_4 = 30 \sin 40° = 19{,}3;$$

$$Y_5 = -v_5 \sin\alpha_5 = -18 \sin 40° = -11{,}6; \quad Y_6 = 0.$$

Ответ:

Векторы	$\bar{v}_1$	$\bar{v}_2$	$\bar{v}_3$	$\bar{v}_4$	$\bar{v}_5$	$\bar{v}_6$
Их проекции на ось x	0	18	0	23,0	—13,8	—35
Их проекции на ось y	40	0	—20	19,3	—11,6	0

Задача 16-4. В точках A, B, C и D на горизонтальной прямой приложены пять векторов, как показано на рис. 22. Их модули соответственно равны: $v_1=12$, $v_2=10$, $v_3=25$, $v_4=15$ и $v_5=20$. Найти проекции векторов на две взаимно перпендикулярные оси.

Решение.

1. В задаче из пяти заданных векторов только один вертикален и нет ни одного горизонтального, но зато три вектора $\bar{v}_1$; $\bar{v}_2$ и $\bar{v}_4$ параллельны друг другу, а $\bar{v}_5$ перпендикулярен к ним. Поэтому при решении задачи целесообразно отказаться от обычного горизонтально-вертикального расположения осей, а расположить их соответственно с направлением первого, второго, четвертого и пятого векторов.

Примем за начало оси точку B и расположим оси, как показано на рис. 22.

2. Находим проекции векторов на ось X:

$$X_1=v_1=12; \quad X_2=-v_2=-10;$$

$$X_3=-v_3 \sin 30^\circ=-25\cdot 0{,}5=-12{,}5; \quad X_4=v_4=15; \quad X_5=0.$$

3. Находим проекции векторов на ось y:

$$Y_1=0; \quad Y_2=0; \quad Y_3=-v_3 \cos 30^\circ=-25 \sin 60^\circ=-21{,}6;$$

$$Y_4=0; \quad Y_5=v_5=20.$$

Ответ:

Векторы	$\bar{v}_1$	$\bar{v}_2$	$\bar{v}_3$	$\bar{v}_4$	$\bar{v}_5$
Их проекции на ось x	12	−10	−12,5	15	0
Их проекции на ось y	0	0	−21,6	0	20

Задача 17-4. Вектор, приложенный в точке A с координатами $x_A=5$ и $y_A=3$ [в точке A (5; 3)] (рис. 23), имеет проекции $X_1=-3$ и $Y_1=8$. Определить вектор (иначе, определить модуль вектора и его направление относительно осей координат).

Решение.

1. Допустим, что оси координат расположены обычно, т. е. ось x—горизонтально, а ось y—вертикально.

2. От начала координат (точка O) отложим заданные координаты в примерном масштабе, так как решение аналитическое (для контроля за решением рекомендуется все построения произвести на бумаге в клетку или на миллиметровке). Абсцисса $x_A=5$ изобразится отрезком Oa и ордината $y_A=3$—отрезком Ob.

3. Восставим из точек a и b перпендикуляры к осям и в месте их пересечения зафиксируем точку A, являющуюся началом искомого вектора. Точки a и b на осях являются началом соответствующих проекций вектора.

4. Из точки a на оси x отложим влево (в сторону, противоположную положительному направлению оси) проекцию $X_1 = ac = -3$ и перенесем ее параллельно оси x в точку A.

5. Из точки b отложим вверх положительную проекцию $Y_1 = bd = 8$ и перенесем ее параллельно оси y — в положение CB.

6. Точку A соединим с точкой B и, придав отрезку AB направление от A (начала) к B, получим вектор $\bar{v}_1$.

7. Находим модуль вектора по формуле (5):

$$v_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73} = 8{,}55.$$

8. Находим угол α_x, образуемый вектором и его проекцией на ось x:

$$\sin \alpha_x = \frac{Y_1}{v_1} = \frac{8}{8{,}55} = 0{,}935.$$

Следовательно, $\alpha_x = 69°30'$.

С положительным направлением оси x направление вектора образует угол $\varphi_x = 180° - \alpha_x^\circ = 180° - 69°30' = 110°30'$.

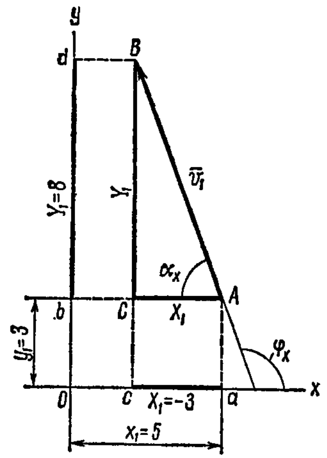


Рис. 23

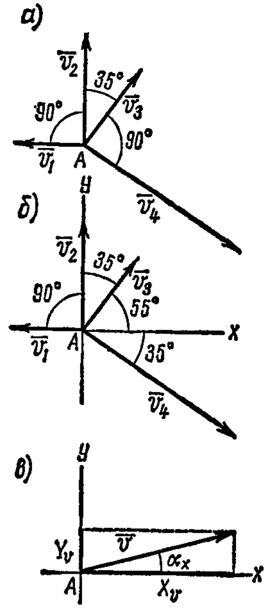


Рис. 24

После того как получен треугольник ACB, в котором катеты — данные проекции, а гипотенуза — искомый вектор, решение можно проводить другим путем:

7'. Находим сначала угол α_x:

$\operatorname{tg} \alpha_x = Y_1/X_1 = 8/3 = 2{,}67$, что соответствует $\alpha_x = 69°30'$.

8′. Находим модуль вектора:

$$v_{\bar{1}}=\frac{Y_1}{\sin\alpha_x}=\frac{8}{\sin 69°30'}=8{,}55.$$

Ответ. Вектор, у которого проекция $X_{\bar{1}}=-3$ и $Y_{\bar{1}}=8$, имеет модуль 8,55 единицы, а направление относительно оси x составляет угол 110°30′.

Задача 18-4. Четыре вектора, модули которых $v_1=16$, $v_2=24$, $v_3=20$ и $v_4=50$ приложены к точке A, как показано на рис. 24, *а*. Определить геометрическую сумму векторов.

Решение.

1. Выберем за начало осей проекций точку A. Ось x совместим с вектором $\bar{v}_{\bar{1}}$, направив ее вправо. Ось y совместим с $\bar{v}_2$, направив ее вверх (рис. 24, *б*). Легко увидеть, что при этом прямой угол, образованный векторами $\bar{v}_3$ и $\bar{v}_4$, осью x разделится на два угла, равные 55 и 35°.

2. Найдем проекции векторов на ось x:

$$X_{\bar{1}}=-v_1=-16;\quad X_2=0;$$
$$X_3=v_3\cos 55°=20\cos 55°=11{,}5;$$
$$X_4=v_4\cos 35°=50\cos 35°=40{,}9.$$

3. Найдем проекции векторов на ось y:

$$Y_{\bar{1}}=0;\quad Y_2=v_2=24;$$
$$Y_3=v_3\sin 55°=20\sin 55°=16{,}4;$$
$$Y_4=-v_4\sin 35°=-50\sin 35°=-28{,}7.$$

4. Сложив проекции векторов на ось x, найдем проекцию на эту ось геометрической суммы векторов: $X_v=-16+11{,}5+40{,}9=36{,}4$.

Проекция искомого вектора получается положительной. Значит от точки A она отложится по оси x вправо (рис. 24, *в*).

5. Сложим проекции векторов на ось y и найдем вторую проекцию геометрической суммы: $Y_v=24+16{,}4-28{,}7=11{,}7$.

Эта проекция также положительна, значит она отложится вверх по оси y от точки A.

Две найденные проекции целиком определят искомый вектор $\bar{v}$ — геометрическую сумму четырех заданных векторов.

6. Находим модуль искомого вектора:

$$v=\sqrt{X_v^2+Y_v^2}=\sqrt{36{,}4^2+11{,}7^2}=38{,}3.$$

7. Находим направление вектора — угол α_x:

$$\sin\alpha_x=Y_v/v=11{,}7/38{,}3=0{,}305;\qquad \alpha_x=17°50'.$$

Ответ. Геометрическая сумма четырех заданных векторов выражается вектором, модуль которого 38,3 единицы; он направлен относительно оси x под углом $17°50'$.

Для проверки рассмотренную задачу рекомендуется решить графически самостоятельно.

● **Задача 19-4.** Пять векторов приложены к точке O. Их модули: $v_1 = 12$, $v_2 = 15$, $v_3 = 18$, $v_4 = 20$ и $v_5 = 25$. Первый вектор направлен вертикально вниз, а каждый из остальных образует с ним, считая против хода часовой стрелки, углы $\alpha_2 = 60°$, $\alpha_3 = 105°$, $\alpha_4 = 160°$ и $\alpha_5 = 225°$. Определить геометрическую сумму заданных векторов.

Ответ. $v = 29{,}2$, $\alpha_x = 47°$.

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

СТАТИКА

В результате изучения раздела «Статика» необходимо уметь складывать силы, определять равнодействующую любого числа данных сил. Нужно уметь также решить и обратную задачу—данную силу разложить на две или три составляющих.

Главное место в статике занимает учение о равновесии систем сил. *Системой* называется совокупность сил, приложенных к телу или к точке.

Для удобства изучения системы сил разделяются на плоские и пространственные. В свою очередь плоские системы сил делятся на три группы: а) системы сил, сходящихся в одной точке; б) системы параллельных сил и в) системы сил, расположенных в плоскости как угодно. На аналогичные три группы делятся и пространственные системы сил.

В соответствии с этим дальнейшее изложение методов и примеров решения задач проведено по этой классификации систем сил.

Для любой плоской, а также и пространственной системы сил показаны способы и методы сложения сил и, в частности, определения их равнодействующей силы. В главе II «Плоская система сходящихся сил» показаны способы разложения силы на две составляющие; в главе IV «Пространственная система сил» показан способ разложения силы на три составляющие вдоль трех взаимно перпендикулярных осей. Наиболее широко рассмотрены задачи на равновесие сил, при решении которых используются условия равновесия всех перечисленных выше систем сил.

При решении задач необходимо иметь в виду, что с 1 января 1963 г. в СССР введена в действие Международная система единиц (ГОСТ 9867—61), или сокращенно СИ (интернациональная система).

В настоящее время осуществляется переход всех измерений и технических расчетов на эту систему.

Международная система (СИ) имеет шесть основных единиц и две дополнительные. Из основных только три непосредственно применяются в теоретической механике:

единица длины—метр (1 *м*),

единица массы—килограмм (1 *кг*),

единица времени—секунда (1 *сек*).

Из дополнительных в механике употребляется лишь единица измерения плоского угла—радиан (1 *рад*)—угол между двумя радиусами круга, вырезающий на окружности дугу, длина которой равна радиусу.

Остальные единицы Международной системы (СИ) — производные и в их числе единица измерения силы ньютон (1 *н*).

Если в известную из физики формулу второго закона Ньютона

$$P = ma$$

вместо массы m и ускорения a подставить единицы их измерения — соответственно 1 *кг* и 1 *м/сек²*, то получим единицу измерения силы равную *н*. Таким образом,

$$1\ н = 1\ кг \cdot 1\ м/сек^2.$$

Иными словами, ньютон — это сила, сообщающая единице массы (1 *кг*) единицу ускорения (1 *м/сек²*).

Если в условии задачи задана масса нагрузки, то необходимо определить ее вес G:

$$G = mg,$$

где $g = 9{,}81$ *м/сек²* — ускорение силы земного притяжения.

В технической системе единиц (в системе МКГСС) сила измеряется в килограммах (1 *кГ* или 1 *кгс*).

Соотношение между 1 *н* и 1 *кГ* таково:

$$1\ н = 0{,}102\ кГ \text{ и } 1\ кГ = 9{,}81\ н.$$

При приближенных расчетах можно пользоваться округленными соотношениями:

$$1\ н \approx 0{,}1\ кГ \text{ и } 1\ кГ \approx 10\ н.$$

Общую формулу перехода от единиц технической системы (T *кГ*) к единицам СИ (S *н*) можно выразить так:

$$T\ кГ \cdot 9{,}81\ н/кГ = S\ н.$$

Соответственно формула перехода от единиц СИ (S *н*) к единицам технической системы (T *кГ*) выразится в виде

$$S\ н \cdot 0{,}102\ кГ/н = T\ кГ.$$

ГЛАВА II

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

§ 5-2. Сложение двух сил

Сложение двух сходящихся сил, т. е. сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, производится по тем же двум правилам — правилу параллелограмма и правилу треугольника, рассмотренным в главе I (§ 1-1), и теми же методами — графическим, графо-аналитическим и аналитическим (методом проекций).

При сложении сил необходимо учитывать следующее обстоятельство.

В теоретической механике — в механике твердого тела сила — скользящий вектор, т. е. при решении задач силу можно переносить вдоль линии ее действия в любую точку. Поэтому, если на тело действуют две силы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$, лежащие в одной плоскости, как, например, показано на рис. 25, *а*, то эти силы можно перенести в точку *C* — точку пересечения линий действия данных сил и считать их приложенными таким образом к одной точке тела (рис. 25, *б*), как это и сделано в задаче 20-5.

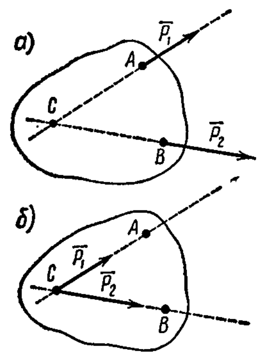


Рис. 25

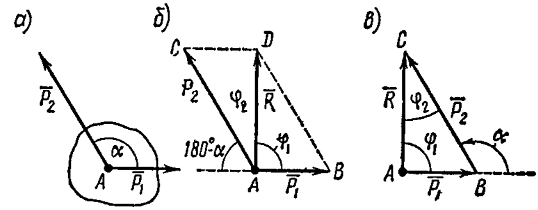


Рис. 26

Задача 20-5. Определить равнодействующую $\overline{R}$* двух сил $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$, модули которых соответственно равны $P_1 = 40$ *н* и $P_2 = 80$ *н*; сила $\overline{P}_1$ направлена горизонтально вправо, а $\overline{P}_2$ образует с $\overline{P}_1$ угол $\alpha = 120°$ (рис. 26, *а*).

Задачу можно решить графическим или графо-аналитическим методом, используя в обоих случаях либо правило параллелограмма, либо правило треугольника (см. задачи 1-1 и 11-3).

Графическим методом рекомендуем решить задачу самостоятельно, а здесь приведем графо-аналитические решения по обоим правилам.

Решение 1 — по правилу параллелограмма:

1. Используя условие задачи и приблизительно соблюдая масштаб, изображаем параллелограмм *ABCD* (рис. 26, *б*). Порядок построения такой: из точки *A* проводим отрезок $\overline{AB} = \overline{P}$, затем из той же точки *A* под углом 120° к отрезку *AB* проводим отрезок $\overline{AC} = \overline{P}_2$, из точек *B* и *C* проводим прямые $BD \parallel AC$ и $CD \parallel AB$ и, наконец, проводим диагональ $\overline{AD} = \overline{R}$.

2. Используя формулу (1), можем найти модуль равнодействующей:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\alpha}, \quad R = \sqrt{40^2 + 80^2 + 2\cdot 40\cdot 80\cos 120°}.$$

---

* Необходимо помнить, что если в задаче требуется найти какой-либо вектор (в данной задаче $\overline{R}$), то это значит, нужно найти модуль вектора и его направление.

Имея в виду, что $\cos 120° = -\sin 30° = -0,5$, получаем

$$R = \sqrt{1600 + 6400 - 3200} = 69,3 \text{ н}.$$

3. Применяя к $\triangle ABD$ (или к $\triangle ACD$) (см. рис. 26, *б*) теорему синусов, получаем

$$\frac{R}{\sin(180°-\alpha°)} = \frac{P_1}{\sin\varphi_2} = \frac{P_2}{\sin\varphi_1},$$

откуда

$$\varphi_1 = \angle(\overline{P}_1;\ \overline{R}) \text{ и } \varphi_2 = \angle(\overline{P}_2;\ \overline{R}),$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{P_2 \sin(180°-\alpha°)}{R} = \frac{80 \sin 60°}{69,3} = 1; \quad \varphi_1 = 90°.$$

Таким образом, вектор равнодействующей $\overline{R}$ перпендикулярен к силе $\overline{P}_1$.

Угол φ_2 можно найти либо как разность

$$\varphi_2 = \alpha - \varphi_1 = 120° - 90° = 30°,$$

либо из теоремы синусов:

$$\sin\varphi_2 = \frac{P_1 \sin(180°-\alpha°)}{R} = \frac{40 \sin 60°}{69,3} = 0,5 \text{ и } \varphi_2 = 30°.$$

Один и тот же результат, полученный различными путями, подтверждает правильность решения задачи.

Ответ. Равнодействующая данных сил равна 69,3 *н*, и линия ее действия образует с направлением силы $\overline{P}_1$ прямой угол.

Решение 2 — по правилу треугольника.

1. Используя условие задачи, строим треугольник сил ABC (рис. 26, *в*). Порядок построения такой: из точки A проведем отрезок $\overline{AB} = \overline{P}_1$. Затем из точки B под углом $\alpha = 120°$ к направлению $\overline{P}_1$ проводим отрезок $\overline{BC} = \overline{P}_2$ и, наконец, «замкнем» треугольник отрезком AC, который изобразит искомую равнодействующую $\overline{R}$.

В получившемся треугольнике $\angle B = 180° - \alpha° = 180° - 120° = 60°$.

2. Применяем к треугольнику ABC известную из тригонометрии теорему косинусов:

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2 \cos B,$$

откуда модуль равнодействующей

$$R = \sqrt{40^2 + 80^2 - 2 \cdot 40 \cdot 80 \cos 60°} = 69,3 \text{ н}.$$

3. Углы φ_1 и φ_2, определяющие направление равнодействующей относительно заданных сил, находим, как и в первом решении, по теореме синусов.

● **Задача 21-5.** Определить равнодействующую $\overline{R}$ двух сил, модули которых соответственно равны $P_1 = 40$ *н* и $P_2 = 80$ *н*, причем сила $\overline{P}_1$ направлена горизонтально вправо, а сила $\overline{P}_2$ образует с $\overline{P}_1$:

а) угол $\alpha_1 = 90°$, б) угол $\alpha_2 = 65°$ и в) угол $\alpha_3 = 32°$.

Ответ: а) $R = 89{,}4$ *н*; $\varphi_1 = \angle(\overline{P}_1;\ \overline{R}) = 63°30'$;

б) $R = 103{,}5$ *н*; $\varphi_2 = \angle(\overline{P}_1;\ \overline{R}) = 48°40'$;

в) $R = 116$ *н*; $\varphi_1 = \angle(\overline{P}_1;\ \overline{R}) = 21°25'$.

Необходимо заметить, что в задаче 20-5 и в трех вариантах задачи 21-5 складываются одинаковые по модулю силы, но угол, образуемый их направлениями, уменьшается, и это приводит к увеличению модуля равнодействующей и к уменьшению угла φ_1.

§ 6-2. Разложение силы на две составляющие

Решение многих практических задач по статике сводится к разложению силы на две составляющие. Подобные задачи, как показано в § 2-1, решаются либо по правилу параллелограмма, либо по правилу треугольника и, в зависимости от исходных данных, приводятся к одному из четырех типов.

Общая методика решения приведенных ниже задач сводится к следующему:

1. Выбираем метод решения — графический или графо-аналитический.

2. Выбираем правило, по которому будем решать задачу, т. е. либо правило параллелограмма, либо правило треугольника.

3. Если выбран графический метод, то далее выбираем масштаб построения, строим параллелограмм или треугольник (в соответствии с выбранным правилом) и, наконец, измеряем стороны получившейся фигуры, находим модули соответствующих сил, а измерив углы, найдем их направления.

4. Если выбран графо-аналитический метод, то в зависимости от избранного правила строим параллелограмм или треугольник, соблюдая приблизительные соотношения размеров длин и углов, а затем, в зависимости от исходных данных, используем геометрические или тригонометрические соотношения.

Задача 22-6. Фонарь весом 80 *н* подвешен на кронштейне ABC, укрепленном на вертикальной стене (рис. 27). Определить усилия, возникшие в горизонтальном стержне CB и наклонной тяге AB после подвески фонаря, если $CB = 1$ *м* и $AB = 1{,}2$ *м*. Соединения в точках A, B и C кронштейна — шарнирные.

Решение 1 — графическим методом по правилу параллелограмма.

1. Если избран графический метод решения, то прежде всего необходимо в масштабе построить кронштейн ABC. Выполнение чертежа кронштейна сводится, как это следует из формы и размеров, заданных в условии задачи, к построению прямоугольного треугольника по двум заданным сторонам.

2. Построим кронштейн в масштабе «1 *м* в 44 *мм*». Обозначив масштаб чертежа μ_l, выразим зависимость между истинной длиной 1 *м* и длиной отрезка на чертеже 44 *мм*: 1 *м* $= \mu_l\, 44$ мм.

Отсюда масштаб построения кронштейна

$$\mu_l = -1/44\ мм = 0{,}0228\ м/мм\ (0{,}0228\ м\ в\ 1\ мм).$$

3. Из произвольной точки C (рис. 28) проводим горизонтальную и вертикальную линии. На горизонтальной линии отложим отрезок $BC = 44$ *мм*, который в выбранном масштабе и изобразит горизон-

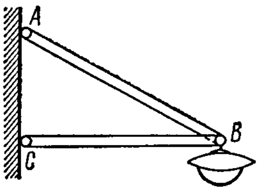


Рис. 27

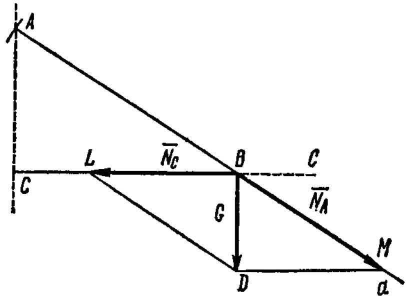


Рис. 28

тальный стержень кронштейна $BC = 1$ *м* ($BC = BC\,\mu_l = 44$ *мм* $\times$ $\times\, 0{,}0228$ *м/мм* $= 1$ *м*).

Длина отрезка AB, который изобразит тягу AB, определяется из равенства

$$AB = \mu_l \cdot AB;\quad AB = AB/\mu_l = 1{,}2\ м/0{,}0228\ м/мм = 53\ мм.$$

Найденную длину $AB = 53$ *мм* отложим при помощи циркуля из точки B так, чтобы получить точку A на вертикали, проведенной ранее из точки C. Построенный треугольник ABC изображает данный в условии задачи кронштейн.

4. Строим параллелограмм сил, действующих на точку B кронштейна.

Вес фонаря $G = 80$ *н*, действующий на кронштейн вертикально вниз, изобразим отрезком $BD = 20$ *мм*. Значит масштаб построения для сил

$$\mu_{сил} = G/BD \doteq 80\ н/20\ мм = 4\ н/мм\ (4\ н\ в\ 1\ мм).$$

Благодаря тому что в точках A, B и C кронштейна соединения шарнирные, стержни, находясь под действием веса фонаря, либо растягиваются, либо сжимаются. Иными словами, искомые усилия действуют вдоль стержней. Значит направления сил известны (1-й тип задачи на разложения силы по правилу параллелограмма).

Изобразим направление действия искомых сил линиями Aa и Cc, пересекающимися в точке B—точке приложения к кронштейну веса фонаря.

Из точки D (конца вектора $\overline{G}$) проводим прямые $DM \parallel Cc$ и $DL \parallel Aa$. В получившемся параллелограмме $BMDL$ стороны BM и BL изображают силы $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_C$, действующие соответственно на тягу AB и стержень BC.

5. При помощи масштабной линейки измерим отрезки BM и BL:

$$BM = 36 \text{ мм и } BL = 30 \text{ мм}.$$

Следовательно,

$$N_A = \mu_{\text{сил}} \cdot BM = 4 \text{ н/мм} \cdot 36 \text{ мм} = 144 \text{ н}$$

и

$$N_C = \mu_{\text{сил}} \cdot BL = 4 \text{ н/мм} \cdot 30 \text{ мм} = 120 \text{ н}.$$

Как видно из получившегося на рис. 28 построения, тяга AB кронштейна растягивается силой, равной 144 *н*, а стержень BC сжимается силой 120 *н*.

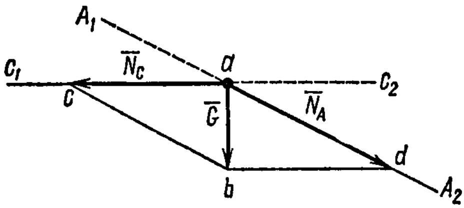


Рис. 29

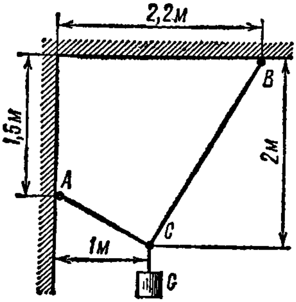


Рис. 30

Решение 2 — графо-аналитическим методом по правилу параллелограмма с использованием геометрических соотношений.

1. Используя рис. 27, на котором изображен кронштейн, строим параллелограмм сил. Через произвольную точку a (рис. 29) проводим прямые A_1A_2 и C_1C_2, параллельные соответственно тяге AB и стержню CB (рис. 27).

Из той же точки a откладываем вертикально вниз отрезок ab, который изображает силу $\overline{G}$. Из точки b проводим прямые $bd \parallel C_1C_2$ и $bc \parallel A_1A_2$. В получившемся параллелограмме $adbc$ стороны ad и ac изображают соответственно искомые усилия $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_C$.

2. Теперь имеются две геометрические фигуры — треугольник ABC (см. рис. 27), изображающий заданный кронштейн, и силовой параллелограмм (см. рис. 29).

Геометрически $\triangle ABC$ (см. рис. 27) и $\triangle adb$, или, что все равно, $\triangle abc$ (см. рис. 29), подобны между собой.

Используя свойство подобных треугольников (замечаем, что $db = ac = N_C$), получаем

$$\frac{N_A}{AB} = \frac{N_C}{BC} = \frac{G}{AC}.$$

3. Решая получившиеся пропорции, находим

$$N_A = \frac{G \cdot AB}{AC} \text{ и } N_C = \frac{G \cdot BC}{AC}.$$

Неизвестную в кронштейне длину AC найдем по теореме Пифагора (из условия задачи ясно, что угол ACB — прямой)

$$AC = \sqrt{BA^2 - BC^2} = \sqrt{1{,}2^2 - 1^2} = 0{,}664 \text{ м}.$$

Подставляя в выражения для N_A и N_C исходные данные, получаем

$$N_A = \frac{G \cdot AB}{AC} = \frac{80 \cdot 1{,}2}{0{,}664} = 145 \text{ н}; \qquad N_C = \frac{G \cdot BC}{AC} = \frac{80 \cdot 1}{0{,}664} = 121 \text{ н}.$$

Таким образом, результат практически тот же, что и при графическом решении. Некоторое расхождение объясняется меньшей точностью графического решения.

Как уже известно, графо-аналитическое решение задачи 22-6 основано на подобии двух треугольников: кронштейна, имеющего вид треугольника, и силового треугольника. Но возможен случай, когда на чертеже нагруженного устройства или конструкции не будет треугольника, подобного силовому. Тогда для решения задачи целесообразно применить графо-аналитический метод с использованием тригонометрических соотношений.

Рассмотрим такую задачу.

Задача 23-6. При помощи двух нерастяжимых нитей AC и BC удерживается груз, вес которого $12\,кГ$. Положение нитей и груза показано на рис. 30. Определить натяжение нитей.

Решение 1 — графо-аналитическим методом по правилу треугольника с использованием тригонометрии.

1. Так же, как и в предыдущей задаче, необходимо силу $G = 12\,кГ$ разложить на две составляющие, линии действия которых совпадают с направлениями линий AC и BC.

2. Изобразим силу $\overline{G}$ отрезком $\overline{CL}$ (рис. 31). Затем проведем из точки C прямую CN, продолжив AC, а из точки L — прямую LM параллельно положению нити BC. Получим силовой треугольник CKL, в котором стороны CK и KL изображают искомые силы натяжения нитей AC и BC.

3. Если в треугольнике CKL известны углы α, β и γ, то задачу легко решить по теореме синусов:

$$\frac{T_A}{\sin\beta} = \frac{T_B}{\sin\alpha} = \frac{G}{\sin\gamma}. \tag{1}$$

4. Из построения силового треугольника следует, что

$$\angle LCK = \alpha = \angle DCA = \angle CAE, \quad \angle CLK = \beta = \angle DCB$$

(для наглядности положение нитей относительно вектора G показано на рис. 31 штриховой линией). А так как треугольники $\triangle ACE$ и $\triangle BCD$ — прямоугольные, то из $\triangle ACE$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{EC}{AE} = \frac{1}{0{,}5} = 2 \text{ и } \alpha = 63°30'.$$

Из $\triangle BCD$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{BD}{DC}=\frac{1,2}{2}=0,6 \text{ и } \beta=31°.$$

Угол γ легко найдем как дополнение к $\angle 180°$:

$$\gamma=180°-(\alpha+\beta)=180°-94°30'=85°30'.$$

5. И теперь, зная углы α, β и γ, из уравнения (1)

$$T_A=\frac{G\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{12\cdot\sin 31°}{\sin 85°30'}=6,25\,\text{кГ}$$

и

$$T_B=\frac{G\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{12\cdot\sin 63°30'}{\sin 85°30'}=10,75\,\text{кГ}.$$

Таким образом, нить CA растягивается усилием, равным 6,25 *кГ*, а нить CB—усилием 10,75 *кГ*.

Если эти усилия выразить в единицах СИ, то

$$T_A=6,25\,\text{кГ}\cdot 9,81\,\text{н/кГ}=61,4\,\text{н}$$

и

$$T_B=10,75\,\text{кГ}\cdot 9,81\,\text{н/кГ}=105,5\,\text{н}.$$

Задачу 23-6 просто решить графическим методом. Для этого нужно начертить в масштабе расположение нитей и, выбрав масштаб для сил (например, 0,2 *кГ/мм*), построить на векторе G силовой треугольник и, измерив его стороны, найти T_A и T_B (графическое решение рекомендуется выполнить самостоятельно).

Графо-аналитический метод с использованием свойств подобных треугольников целесообразно применять к решению таких задач в том случае, если в схеме конструкции или устройства имеется треугольник, подобный силовому.

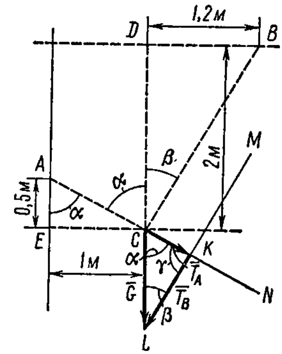


Рис. 31

Если же в схеме конструкции нет треугольника, подобного силовому, то решение графо-аналитическим методом целесообразнее производить с использованием тригонометрических свойств, потому что при наличии линейных размеров необходимые для решения задачи значения углов, как правило, найти очень просто.

Необходимо отметить, что в задачах, подобных 22-6 и 23-6, усилия, вызываемые нагрузкой в стержнях кронштейнов или нитях устройств, удерживающих груз, не зависят от длины этих нитей или стержней.

Допустим, что груз (задача 23-6) удерживается нитями, прикрепленными не к вертикальной стенке и горизонтальному потолку, как на рис. 30, а к двум точкам криволинейной (сводчатой) поверхности (рис. 32). Но если при этом углы α и β, образуемые нитями

CB и CA с вертикалью, остаются такими же, как и на рис. 30, то усилия T_A к T_B не изменяются, хотя сами нити в данном случае становятся короче.

Задача 24-6. Груз весом $G = 12\,кГ$ удерживается при помощи двух нитей, которые образуют с вертикалью (линией действия веса $\overline{G}$) углы $\alpha = 65°$ и $\beta = 90°$. Определить усилия, растягивающие нити.

Решение — графо-аналитическим методом по правилу параллелограмма.

1. Исходя из условия задачи, построим чертеж (рис. 33). Из точки C проводим вертикальный отрезок CL, изображающий вектор $\overline{G}$. Отложив (приблизительно) от вертикали CD влево угол α,

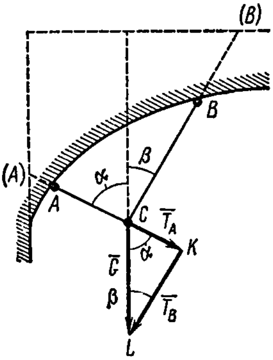


Рис. 32

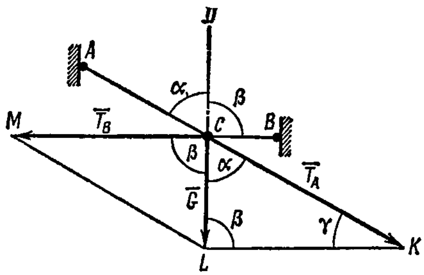


Рис. 33

а вправо — угол β, проведем нити CA и CB (длины нитей не влияют на величину усилий, поэтому точки A и B выбираем произвольно).

2. Вектор $\overline{G}$ по правилу параллелограмма разложим на две составляющие $\overline{T}_A$ и $\overline{T}_B$, направленные вдоль нитей, т. е. построим параллелограмм $CKLM$.

3. На основе построения параллелограмма $CKLM$ очень просто определяются его углы: $\angle KCL = \alpha = 65°$, $\angle MCL = \angle CLK = \beta = 90°$ и, следовательно, $\angle CKL = \gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 155° = 25°$.

4. Так как силовой параллелограмм делится на два прямоугольных треугольника, то легко найти оба усилия:

$$T_A = \frac{G}{\sin\gamma} = \frac{12}{\sin 25°} = 28{,}4\ кГ;$$

$$T_B = \frac{G}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{12}{\operatorname{tg} 25°} = 25{,}7\ кГ.$$

В единицах СИ усилия равны:

$$T_A = 28{,}4\,кГ \cdot 9{,}81\ н/кГ = 279\ н;$$
$$T_B = 25{,}7\,кГ \cdot 9{,}81\ н/кГ = 252\ н.$$

Задачи 22-6, 23-6 и 24-6 относятся к первому типу задач на разложение силы по правилу параллелограмма или треугольника (см. § 2-1).

Рассмотрим теперь по одной задаче второго (задача 25-6), третьего (задача 26-6) и четвертого (задача 27-6) типов.

Задача 25-6. Груз массой 200 *кг* необходимо подвесить на кронштейне, у которого один из стержней горизонтальный и в нем должно возникнуть сжимающее усилие не более 1,5 *кн*. Как нужно расположить второй стержень, чтобы в нем возникло растягивающее усилие? Определить величину этого усилия.

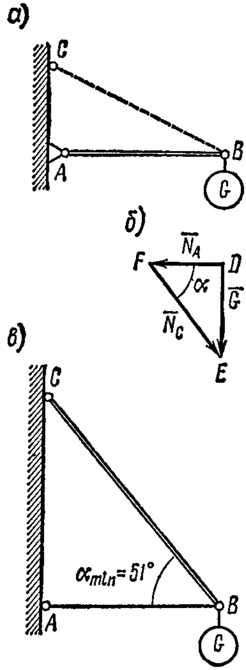


Рис. 34

Эта задача аналогична задаче 8-2, которая решена графическим методом, поэтому графическое решение здесь не приводим.

Решение — графо-аналитическим методом по правилу треугольника.

1. Изобразим (рис. 34, *а*) стержень AB в горизонтальном положении, т. е. в том, какое он должен занимать по условию, и допустим, что к концу B стержня приложена нагрузка $\overline{G}$, равная весу груза, т. е. $G = mg = 200 \cdot 9{,}81 = 1960\ н = 1{,}96\ кн$.

Известно, что этот стержень должен испытывать сжимающее усилие 1,5 *кн*. Поэтому сила, приложенная к стержню в точке B, будет направлена от B к A. Обозначим эту силу $\overline{N}_A$.

Расположение стержня BC кронштейна неизвестно и поэтому он условно показан штриховой линией.

2. Строим силовой треугольник (рис. 34, *б*). Из произвольной точки D отложим вертикальный отрезок DE, изображающий вес груза $\overline{G}$, и горизонтальный отрезок DF, изображающий силу $\overline{N}_A$, сжимающую стержень AB, т. е. известное слагаемое вектора $\overline{G}$.

Для того чтобы найти второе слагаемое вектора $\overline{G}$ — вектор $\overline{N}_C$ (усилие в стержне BC), необходимо из вектора $\overline{G}$ вычесть вектор $\overline{N}_A$. Чтобы выполнить это действие по правилу треугольника, соединим точки F и E. Сторона FE получившегося треугольника изображает искомое усилие $\overline{N}_C$ (правило вычитания векторов показано на рис. 3).

3. Треугольник DEF прямоугольный, поэтому

$$N_C = \sqrt{G^2 + N_A^2} = \sqrt{1{,}96^2 + 1{,}5^2} = 2{,}45\ кн.$$

Если мысленно в точку B кронштейна перенести силу $\overline{N}_C$, то ее направление определит положение стержня BC относительно AB.

Угол ABC (рис. 34, *в*) между стержнями должен быть равен углу между линиями действия сил $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_C$, т. е. углу $DFE=\alpha$:

$$\sin\alpha=\frac{G}{N_C}=\frac{1,96}{2,45}=0,776 \text{ и } \alpha=51°.$$

Таким образом, если в кронштейне стержень BC расположить к горизонтальному стержню BA под углом $\alpha=51°$, то груз весом $G=1,96\,кн$, действующий на точку B кронштейна, вызовет в стержне BA сжимающее усилие $N_A=1,5\,кн$, а в стержне BC — растягивающее усилие $N_C=2,45\,кн$.

Если при изготовлении кронштейна увеличить угол $\alpha\,(\alpha>51°)$, то уменьшится нагрузка на оба стержня, причем при вертикальном положении стержня $BC\,(\alpha=90°)$ усилие N_A в горизонтальном стержне станет равным нулю, а $N_C=G=1,96\,кн$.

Если же при изготовлении кронштейна угол α уменьшить ($\alpha<51°$), то усилия в обоих стержнях увеличатся.

В этом легко можно убедиться, построив на заданном векторе $\overline{G}$ силовые треугольники, углы которых $\alpha>51°$ или $\alpha<51°$.

Задача 26-6. Между высокими стенами необходимо временно подвесить некоторый груз весом $140\,кГ$ на одинаковом расстоянии по $1\,м$ от стен и на высоте $1\,м$ от горизонтального пола. Имеются два куска каната по несколько метров длины каждый. Один из канатов с учетом безопасности подвески можно нагрузить усилием не более $70\,кн$, а второй — усилием не более $100\,кн$.

На какой высоте над полом необходимо укрепить концы канатов, чтобы после подвески к ним груза в заданном положении усилия в канатах не превышали допускаемых 70 и $100\,кн$?

Р е ш е н и е 1 — графическим методом по правилу параллелограмма.

1. Выбираем масштаб построения так, что длина $1\,м$ изображается на чертеже отрезком, равным $12,5\,мм$ ($1\,м$ в $12,5\,мм$):

$$\mu_l=1\,м/12,5\,мм=0,08\,м/мм$$

и строим две вертикальные стены и горизонтальный пол (рис. 35).

В выбранном масштабе расстояние $l=2\,м$ между стенами на чертеже изобразим отрезком, равным

$$\frac{l}{\mu_l}=\frac{2\,м}{0,08\,м/мм}=25\,мм^*.$$

На расстоянии $1\,м$ от пола и по $1\,м$ от стен отмечаем точку A, в которой должен быть подвешен груз.

2. Выбираем масштаб сил $\mu_{сил}=4\,кн/мм$ ($4\,кн$ в $1\,мм$ длины). Значит груз $G=140\,кн$ изобразится отрезком

$$AB=G/\mu_{сил}=140/4=35\,мм.$$

---

* Описываемое в тексте построение рекомендуется воспроизвести на листе бумаги, но в ином масштабе, например $0,04\,м/мм$ или $0,02\,м/мм$.

Отложим этот отрезок из точки A на чертеже.

По условию задачи, усилие в канатах не должно быть больше $N_1 = 70\,кн$ и $N_2 = 100\,кн$. Эти усилия в выбранном масштабе изобразятся отрезками

$$AC = N_1/\mu_{сил} = \frac{70}{4} = 17{,}5\,мм \text{ и}$$

$$AD = N_2/\mu_{сил} = \frac{100}{4} = 25\,мм.$$

Сделав при помощи циркуля засечки радиусами, равными этим длинам, сначала из точки A, а затем из точки B получим параллелограмм $ACBD$.

3. Усилия $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ должны действовать вдоль канатов, поэтому, продлив отрезок CA до пересечения с правой стеной, получим на ней точку E — место закрепления одного каната и, продлив отрезок DA, получим на левой стене точку F — место закрепления второго каната.

4. Измерив на чертеже расстояние от точки E до линии пола, получим 25 *мм*, значит точка закрепления первого каната должна находиться от пола на расстоянии, не меньшем

$$H_1 = 25\,мм \cdot 0{,}08\,м/мм \approx 2\,м.$$

Измерив расстояние от точки F до линии пола, получим 36 *мм*. Значит точка закрепления второго каната должна находиться от пола на расстоянии, не меньшем $H_2 = 36\,мм \times \times 0{,}08\,м/мм \approx 2{,}9\,м$.

Для большей безопасности подвески, если позволяют длины кусков канатов, обе точки их закрепления можно поднять выше. Усилия в канатах при этом уменьшатся.

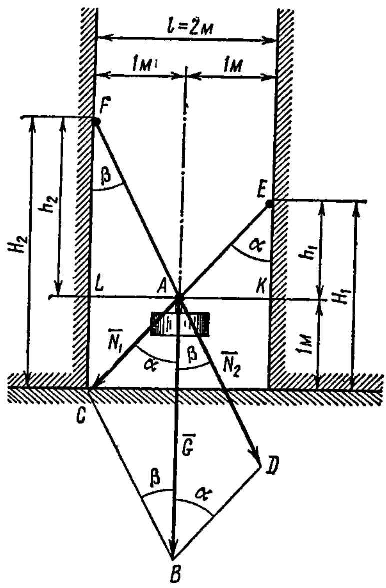


Рис. 35

Решение 2 — графо-аналитическим методом по правилу параллелограмма.

1. Для графо-аналитического решения нужно также выполнить чертеж без соблюдения точного масштаба. Воспользуемся рис. 35, на котором ясно видно, что искомые расстояния можно получить как суммы

$$H_1 = (h_1 + 1)\,м \text{ и } H_2 = (h_2 + 1)\,м.$$

Расстояния $h_1 = EK$ и $h_2 = FL$ можно найти из прямоугольных треугольников AKE и ALF, если предварительно определим в них углы α и β.

Углы, равные α и β, содержатся в параллелограмме $ACBD$:

$$\alpha = \angle AEK = \angle CAB \quad \text{и} \quad \beta = \angle AFL = \angle DAB.$$

2. Из $\triangle BAC$, в котором стороны изображают данные силы $\overline{G}$, $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ (так как $\overline{CB} = \overline{AD}$ и $\overline{AD} = \overline{N}_2$), найдем угол α, применив теорему косинусов:

$$N_2^2 = N_1^2 + G^2 - 2N_1G\cos\alpha.$$

Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{N_1^2 + G^2 - N_2^2}{2N_1G} = \frac{70^2 + 140^2 - 100^2}{2\cdot 70\cdot 140} = 0{,}74$$

и, следовательно, $\alpha = 42°10'$.

Так как $\angle CBA = \angle BAD$, то угол β можно определить из того же $\triangle CAB$, применив к нему теорему синусов:

$$\frac{N_1}{\sin\beta} = \frac{N_2}{\sin\alpha}.$$

Отсюда

$$\sin\beta = \frac{N_1\sin\alpha}{N_2} = \frac{70\sin 42°10'}{100} = 0{,}47 \quad \text{и} \quad \beta = 28°.$$

3. Из $\triangle AKE$ найдем $h_1 = KE$:

$$h_1 = \frac{AK}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}42°10'} = 1{,}105 \approx 1{,}10 \text{ м}.$$

Из $\triangle ALF$ найдем $h_2 = LF$:

$$h_2 = \frac{LA}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{\operatorname{tg}28°} = 1{,}88 \text{ м}.$$

4. Таким образом, искомые расстояния от мест закрепления канатов до пола равны:

$$H_1 = h_1 + 1 = 1{,}10 + 1 = 2{,}1 \text{ м} \quad \text{и}$$
$$H_2 = h_2 + 1 = 1{,}88 + 1 = 2{,}88 \text{ м}.$$

Сравнив результаты, полученные в решении 2, с результатами графического решения, увидим, что практически они совпадают.

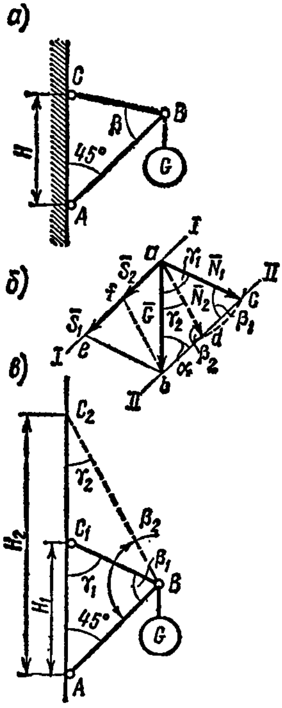


Рис. 36

Задача 27-6. На конце B стержня AB, длина которого $AB = l$, шарнирно прикрепленного в точке A к вертикальной стене, необходимо подвесить груз весом $G = 6$ *кн*, причем стержень AB должен образовывать со стеной угол 45° (рис. 35, *а*). На каком расстоянии H от точки A необходимо прикрепить трос CB, удерживающий стержень в заданном положении, если трос может быть нагружен усилием не более 4,5 *кн*? Определить также усилие, возникшее в стержне AB после подвески к нему груза.

Решение — грaфо-аналитическим методом по правилу параллелограмма (графическим методом рекомендуется решить задачу самостоятельно).

1. Из произвольной точки a в произвольном масштабе проведем отрезок ab, который изобразит вектор $\overline{G}$ — вес груза (рис. 36, *б*).

Так как стержень AB должен занимать положение под углом 45° к вертикальной стенке, то усилие $\overline{S}$ в этом стержне будет направлено под углом 45° к направлению $\overline{G}$. Проведем из точек a и b вектора $\overline{G}$ параллельные прямые под углом $\alpha = 45°$ к линии действия вектора $\overline{G}$ (линии I-I и II-II).

Если теперь из точки a отложить вектор, численно равный усилию $N = 4{,}5$ *кн*, максимально допустимому в тросе BC (см. рис. 36, *а*), то увидим, что этот отрезок пересечет линию II—II в двух точках — в точках c и d. Проделав ту же операцию из точки b, получим два параллелограмма: первый $acbe$ и второй $adbf$.

Это значит, что задача допускает бесчисленное множество решений*. При одном и том же направлении усилия $\overline{S}$ в стержне AB трос может быть направлен к стержню под углом β, но не менее β_1 и не более β_2 $(\beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2)$.

2. Найдем предельные значения углов β_1 и β_2. Из $\triangle acb$ (или $\triangle adb$) по теореме синусов

$$N/\sin\alpha = G/\sin\beta.$$

Отсюда $\sin\beta = \frac{G\sin\alpha}{N} = \frac{6\sin 45°}{4{,}5} = 0{,}943.$

Этому значению соответствуют два значения угла β:

$$\beta_1 \approx 70°30' \text{ и } \beta_2 \approx 109°30'.$$

Следовательно, трос BC можно закрепить в точке C_1, направив его под углом β_1 к стержню AB, или в точке C_2, направив его к стержню под углом β_2 (рис. 36, *в*), а также в любой другой точке между C_1 и C_2.

3. Если принять решение 1, то из $\triangle ABC_1$ (см. рис. 36, *в*)

$$\frac{AC_1}{\sin\beta_1} = \frac{AB}{\sin\gamma_1}.$$

Отсюда, зная, что $AB = l$ и найдя

$$\gamma_1 = 180° - (45° + 70°30') = 64°30',$$

получим

$$AC_1 = H_1 = \frac{AB\sin\beta_1}{\sin\gamma_1} = \frac{l\sin 70°30'}{\sin 64°30'} = 1{,}05\,l.$$

---

* В предельном случае, если уменьшим заданное допускаемое усилие в тросе, задача может иметь одно решение (дуга cd, проведенная из a, касается линии II—II). При дальнейшем уменьшении допускаемого усилия в тросе задача практически неосуществима.

При этом выборе решения усилие S в стержне AB равно ($\triangle abc$; см. рис. 36, *б*)

$$S_1 = \frac{N_1 \sin\gamma_1}{\sin\alpha} = \frac{4{,}5 \sin 64°30'}{\sin 45°} = 5{,}74 \ \textit{кн}.$$

4. Если принять решение 2, то из $\triangle ABC_2$ (см. рис. 36, *в*)

$$\frac{AC_2}{\sin\beta_2} = \frac{AB}{\sin\gamma_2},$$

где

$$\gamma_2 = 180° - (45° + 109°30') = 25°30'.$$

Поэтому

$$AC_2 = H_2 = \frac{AB \sin\beta_2}{\sin\gamma_2} = \frac{l \sin 109°30'}{\sin 25°30'} = \frac{l \sin 70°30'}{\sin 25°30'} = 2{,}2l.$$

При этом решении усилие S в стержне AB равно ($\triangle abf$; см. рис. 36, *б*)

$$S_2 = \frac{N_2 \sin\gamma_2}{\sin\alpha} = \frac{4{,}5 \sin 25°30'}{\sin 45°} = 2{,}74 \ \textit{кн}.$$

● **Задача 28-6.** Электрическая лампа, масса которой вместе с плафоном 0,8 *кг*, подвешена на шнуре AB длиной 2 *м* и отведена в сторону горизонтальной оттяжкой BC длиной 0,8 *м* (рис. 37). Определить усилия, возникшие при этом в шнуре AB и в оттяжке BC, если $AD = 1{,}4$ *м*.

Ответ. $N_C = 2{,}87$ *н* (0,293 *кГ*) и $N_A = 8{,}21$ *н* (0,838 *кГ*).

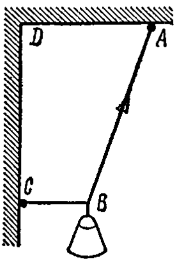


Рис. 37

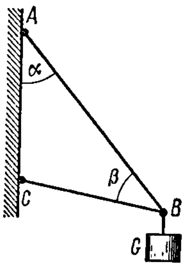


Рис. 38

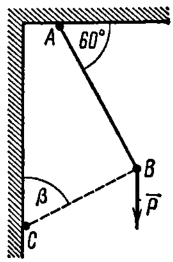


Рис. 39

● **Задача 29-6.** Тело весом $G = 5$ *кн* подвешено к шарнирному болту B кронштейна ABC (рис. 38). Определить усилия, возникшие в стержне AB и CB, если $\alpha = 40°$ и $\beta = 30°$. В точках A и C соединения также шарнирные.

Ответ. $N_A \approx 9{,}4$ *кн* (растяжение) и $N_C \approx 6{,}5$ *кн* (сжатие).

● **Задача 30-6.** Необходимо изготовить кронштейн ABC, стержень AB которого под действием нагрузки $P = 800$ *н* должен испытывать растягивающее усилие $N_A \leqslant 500$ *н*, находясь в том положении, как указано на рис. 39. Определить положение второго сжатого стержня и усилие в нем. Как следовало бы расположить этот стержень, чтобы он также испытывал растяжение?

Ответ. $N_C = 440$ *н* и $\beta = 34°40'$.

● **Задача 31-6.** При помощи двух стержней AC и BC концы A и B которых прикреплены к горизонтальной плоскости на расстоянии $AB = 4$ *м*, необходимо удержать на весу груз весом $G = 40$ *кн* (рис. 40).

Какой длины нужно взять стержни, чтобы в них возникли одинаковые сжимающие усилия по 30 *кн*?

Ответ. 2,74 *м*; стержни будут наклонены к горизонту под углом 42°.

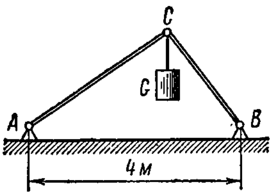


Рис. 40

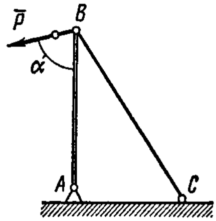


Рис. 41

● **Задача 32-6.** Антенна действует на вершину вертикально поставленной мачты AB (в точке A мачта имеет шарнирное крепление) силой $P = 1$ *кн*, направленной под углом $\alpha = 80°$ к мачте. Под каким углом к мачте нужно расположить оттяжку BC (рис. 41), если допускаемая для троса оттяжки нагрузка составляет 1,5 *кн*?

На каком расстоянии AC следует прикрепить нижний конец оттяжки, если высота мачты AB равна h?

Ответ. $\angle ABC = 41°$; $AC \approx 0{,}87h$.

§ 7-2. Многоугольник сил. Определение равнодействующей сходящихся сил

Для сложения любого числа сходящихся сил применяется правило многоугольника. Используя это правило, задачу можно решить либо графическим методом (задача 3-1), либо методом проекций (задача 18-4).

Задачи, приведенные в этом параграфе, решены методом проекций. Графическим методом рекомендуется решить эти задачи самостоятельно.

Порядок решения задач методом проекций изложен в § 4-1, п. 7.

Задача 33-7. Определить равнодействующую четырех сил: $P_1 = 18$ *кГ*, $P_2 = 10$ *кГ*, $P_3 = 6$ *кГ* и $P_4 = 8$ *кГ*, приложенных к одной точке A и направленных, как показано на рис. 42.

Р е ш е н и е—методом проекций.

1. Изображаем на рисунке четыре данные силы и выбираем расположение осей проекций. В данном случае удобно начало осей поместить в точке A, а оси совместить с силами $\overline{P_1}$ и $\overline{P_3}$ (рис. 42, *a*).

2. Находим проекции данных сил на ось x:

$$X_1 = -P_1 = -18;\ X_2 = -P_2 \cos 60^\circ = -10 \cos 60^\circ = -5;$$
$$X_3 = 0;\ X_4 = P_4 \cos 45^\circ = 8 \cos 45^\circ = 5{,}67.$$

3. Находим проекции данных сил на ось y:

$$Y_1 = 0;\ Y_2 = P_2 \sin 60^\circ = 10 \sin 60^\circ = 8{,}65;$$
$$Y_3 = P_3 = 6;\ Y_4 = P_4 \sin 45^\circ = 8 \sin 45^\circ = 5{,}67.$$

Если трудно определить знак и числовое значение проекции, то необходимо помнить (§ 4-1), что проектируемую силу и две проекции на взаимно перпендикулярные оси всегда можно представить

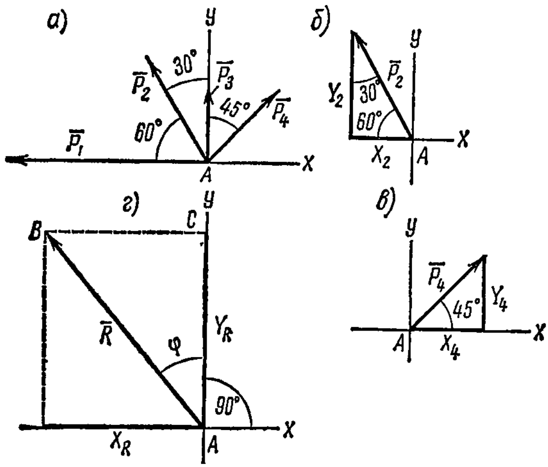


Рис. 42

в виде прямоугольного треугольника. В тех случаях, когда еще нет достаточных навыков, силы и ее проекции можно изобразить отдельно, как показано на рис 42, *б* для силы $\overline{P}_2$ и на рис. 42, *в* для силы $\overline{P}_4$. Эти рисунки облегчают правильное определение проекций.

Для сил $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_3$ такие рисунки не нужны, так как сила $\overline{P}_1$ лежит на оси x и, следовательно, проектируется на эту ось в натуральную величину, но зато на ось y проекция этой силы равна нулю. Сила $\overline{P}_3$ проектируется в натуральную величину на ось y, а ее проекция на ось x равна нулю.

4. Находим проекции искомой равнодействующей $\overline{R}$ на оси x и y:

$$X_R = -18 - 5 + 5{,}67 = -17{,}3;$$
$$Y_R = 8{,}65 + 6 + 5{,}67 = 20{,}3.$$

Проекция на ось x получается отрицательной, а на ось y положительной. Значит вектор $\overline{R}$, заменяющий действие четырех данных сил и приложенный к точке A, должен быть направлен относительно оси y вверх, а относительно оси x—влево. Положение равнодействующей $\overline{R}$ показано отдельно на рис. 42, *г*.

5. Находим модуль равнодействующей (т. е. заканчиваем решение задачи первым путем, см. п. 7 в § 4-1):

$$R=\sqrt{X_R^2+Y_R^2}=\sqrt{17,3^2+20,3^2}=26,7\ кГ.$$

6. Находим угол φ, определяющий направление $\overline{R}$ относительно оси y (см. рис. 42, *а*):

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{|X_R|}{Y_R}=\frac{17,3}{20,3}=0,853$$

и, следовательно, $\varphi\approx 40°30'$.

Для определения угла φ использован $\triangle ABC$ (см. рис. 42, *г*), в котором $\angle BAC=\varphi$. Поэтому X_R не имеет значения и в выражение $\operatorname{tg}\varphi$ подставлена его абсолютная величина.

Угол φ можно найти при помощи синуса:

$$\sin\varphi=\frac{|X_R|}{R}=\frac{17,3}{26,7}=0,647 \text{ и } \varphi\approx 40°30'.$$

Для определения угла φ можно воспользоваться и косинусом, но при работе с логарифмической счетной линейкой эта функция менее удобна.

Таким образом, равнодействующая четырех заданных сил равна 26,7 *кГ*, направлена под углом 40°30′ к положительному направлению оси y и под углом $90°+40°30'=130°30'$ к положительному направлению оси x.

Задача 34-7. К концу B веревки AB прикреплено кольцо, на которое действуют четыре силы: $P_1=40$ *н*, $P_2=25$ *н*, $P_3=25$ *н* и $P_4=20$ *н*, направленные, как показано на рис. 43, *а* (сила P_2 горизонтальна). Определить усилие, возникшее в веревке, и ее направление относительно горизонтали.

Решение—методом проекций.

1. Веревка будет натянута равнодействующей четырех заданных сил. Следовательно, определив модуль равнодействующей, получим усилие, возникшее в веревке, а определив направление равнодействующей, найдем положение натянутой веревки.

2. Изобразим точку B с действующими на нее силами на отдельном рисунке (рис. 43, *б*) и совместим оси проекций с силами $\overline{P}_2$ и $\overline{P}_4$.

3. Найдем проекции заданных сил на ось x:

$$X_1=P_1\cos 55°=40\cos 55°=22,9;\ \ X_2=P_2=25;$$
$$X_3=P_3\cos 30°=25\cos 30°=21,6;\ \ X_4=0.$$

4. Найдем проекции заданных сил на ось y:

$$Y_1=P_1\sin 55°=40\sin 55°=32,8;\ \ Y_2=0,$$
$$Y_3=-P_3\sin 30°=-25\sin 30°=-12,5;\ \ Y_4=-P_4=-20.$$

5. Найдем проекции равнодействующей $\overline{R}$ на оси x и y:

$$X_R = 22{,}9 + 25 + 21{,}6 = 69{,}5;$$
$$Y_R = 32{,}8 - 12{,}5 - 20 = 0{,}3.$$

6. Найдем модуль равнодействующей:

$$R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2} = \sqrt{69{,}5^2 + 0{,}3^2} = 69{,}5 \text{ н.}$$

Как видно, в данном случае проекция равнодействующей на ось y очень мала по сравнению с проекцией на ось x. Поэтому равнодействующая практически численно равна проекции на ось x. Следовательно, можно принять, что вектор равнодействующей направлен вдоль оси x вправо (проекция на ось x положительна), т. е. горизонтально.

Таким образом, четыре заданные силы натягивают веревку равнодействующей силой R, приложенной к точке B (к кольцу на конце веревки) и направленной горизонтально.

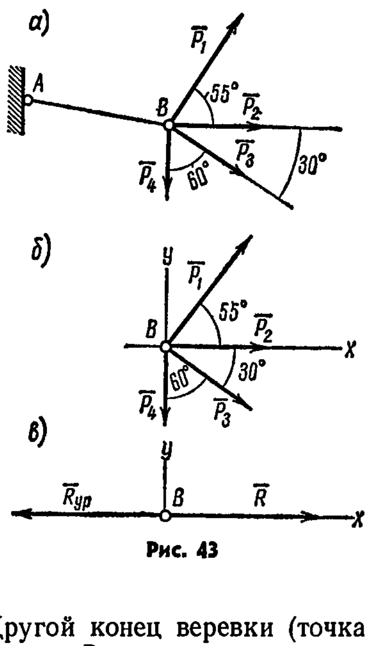


Рис. 43

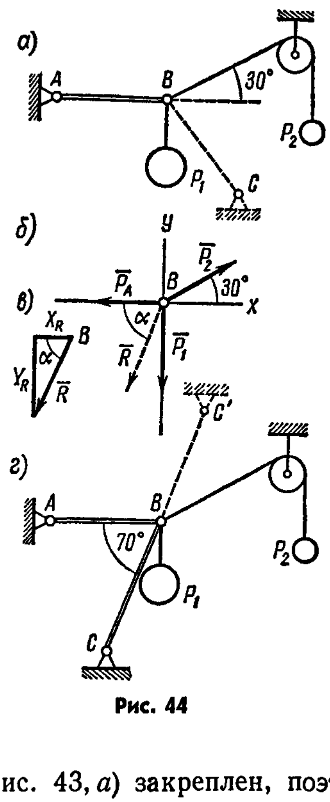


Рис. 44

Другой конец веревки (точка A, рис. 43, a) закреплен, поэтому на кольцо B со стороны веревки действует еще одна сила, численно равная равнодействующей, но направленная в противоположную сторону. Эта сила называется уравновешивающей системы четырех сил.

На рис. 43, *в* показаны равнодействующая $\overline{R}$ и уравновешивающая $\overline{R}_{ур}$.

Задача 35-7. На конце B горизонтального стержня AB необходимо прикрепить две нити с грузами $P_1 = 4$ *кн* и $P_2 = 0{,}8$ *кн*, как показано на рис. 44, *а*. Под каким углом к этому стержню следует присоединить второй стержень BC, чтобы стержень AB растягивался силой $P_A = 2$ *кн*? Какое усилие при этом будет испытывать стержень BC?

Соединения стержней между собой и с опорами шарнирные.

Решение—методом проекций.

1. На точку B действуют три силы: $\overline{P}_1$—вертикально вниз, $\overline{P}_2$—вдоль нити от точки B к блоку (под углом 30° к горизонтали) и противодействие (реакция) стержня $\overline{P}_A$ тому растягивающему действию, которое испытывает стержень. Изобразим эти три силы на рис. 44, *б* и найдем их равнодействующую, вдоль направления действия которой необходимо установить стержень BC.

2. Оси проекций совместим с силами $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_A$ и определим проекции искомой равнодействующей сначала на ось x, а потом на ось y, зная, что каждая из них равна алгебраической сумме проекций данных сил на соответствующую ось:

$$X_R = \sum X_i^* = -P_A + P_2 \cos 30^\circ = -2 + 0{,}8 \cos 30^\circ;$$
$$X_R = -1{,}31;$$
$$Y_R = \sum Y_i^* = -P_1 + P_2 \sin 30^\circ = -4 + 0{,}8 \sin 30^\circ;$$
$$Y_R = -3{,}6.$$

3. Обе проекции получаются отрицательными. Значит равнодействующая расположится так, как показано штриховым $\overline{R}$ на рис. 44, *б*, и положение стержня BC определится углом $\alpha = \angle(\overline{R};\ \overline{P}_A)$.

4. Определим значение угла α из треугольника, образуемого $\overline{R}$ и его проекциями (рис. 44, *в*):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|Y_R|}{|X_R|} = \frac{3{,}6}{1{,}31} = 2{,}75, \quad \alpha = 70^\circ.$$

5. Стержень BC необходимо установить под $\angle ABC = \alpha = 70^\circ$ к стержню AB, и тогда он будет сжиматься силой, равной

$$R = |Y_R|/\sin 70^\circ = 3{,}6/\sin 70^\circ = 3{,}83 \text{ кн}.$$

Описанное положение стержня показано на рис. 44, *г*.

Если же установить стержень, как показано на рисунке штриховой линией BC, то стержень будет испытывать растяжение, равное той же силе $R = 3{,}83$ *кн*.

---

* Здесь $\sum X_i$ обозначена алгебраическая сумма проекций всех сил на ось x, а $\sum Y_i$—алгебраическая сумма проекций тех же сил на ось y.

Задача 36-7. Определить равнодействующую пяти сил: $P_1 = 52$ *н*, $P_2 = 70$ *н*, $P_3 = 69$ *н*, $P_4 = 77$ *н*, $P_5 = 70$ *н*, действующих на точку A, как показано на рис. 45, *а*.

Решение—методом проекций.

1. Так как силы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_5$ направлены друг к другу под прямым углом, то и совместим с этими силами ось проекций. Тогда векторы $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ и $\overline{P}_4$ будут образовывать с осями проекций углы, показанные на рис. 45, *б*.

2. Найдем проекцию равнодействующей на ось x:

$$X_R = P_2 \cos 33° + P_3 \cos 27° - P_4 \cos 49°30' - P_5 =$$
$$= 70 \cos 33° + 69 \cos 27° - 77 \cos 49°30' - 70 = 58{,}6 + 61{,}4 - 50 - 70,$$
$$X_R = 0.$$

3. Найдем проекцию равнодействующей на ось y:

$$Y_R = P_1 + P_2 \sin 33° - P_3 \sin 27° - P_4 \sin 49°30' =$$
$$= 52 + 70 \sin 33° - 69 \sin 27° - 77 \sin 49°30' = 52 + 38 - 31{,}4 - 58{,}6$$
$$Y_R = 0.$$

4. Обе проекции искомой равнодействующей равны нулю, значит и сама равнодействующая также равна нулю.

Таким образом, данная система сил уравновешена. Иными словами, любую из пяти заданных сил можно рассматривать как уравновешивающую четыре остальных.

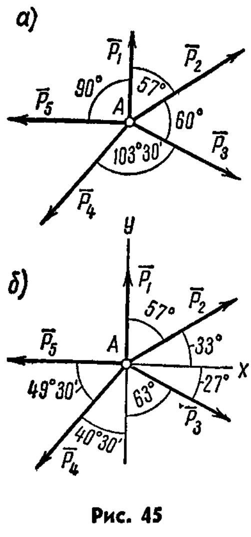


Рис. 45

● **Задача 37-7.** Найти числовое значение равнодействующей и ее направление относительно силы $\overline{P}_1$ плоской системы сходящихся сил $P_1 = 30$ *н*, $P_2 = 75$ *н*, $P_3 = 35$ *н*, и $P_4 = 50$ *н*, если углы, образуемые силами $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ и $\overline{P}_4$ с силой $\overline{P}_1$, направленной вертикально вверх, соответственно равны 45°, 180° и 210°, откладывая их против хода часовой стрелки.

Ответ. $R = 28{,}4$ *кг*; $\angle(\overline{R};\ \overline{P}_1) = 80°$.

● **Задача 38-7.** Определить $\overline{R}$ (числовое значение и направление равнодействующей) системы четырех сил, приложенных к точке A, как показано на рис. 46.

Ответ: а) $R = 65{,}9$ *кн*, $\angle(\overline{R};\ \overline{P}_2) = 41°21'$;
б) $R = 89{,}5$ *кн*, $\angle(\overline{R};\ \overline{P}_3) = 32°$;
в) $R = 55{,}9$ *кн*, $\angle(\overline{R};\ \overline{P}_3) = 14°10'$;
г) $R = 50{,}5$ *кн*, $\angle(\overline{R};\ \overline{P}_1) = 30°50'$.

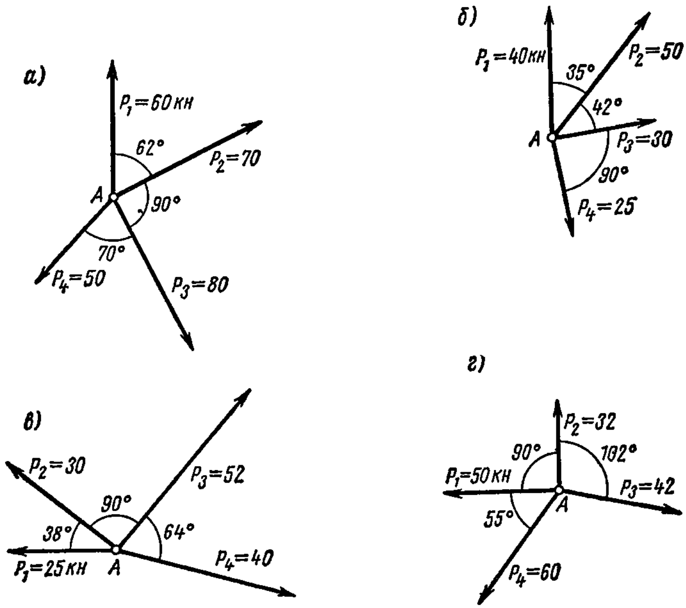


Рис. 46

§ 8-2. Равновесие сходящихся сил

При определении равнодействующей системы пяти сил в задаче 36-7 установлено, что $\overline{R}=0$, и следовательно, система сил уравновешена. Если из сил, данных в задаче 36-7, построить векторный (силовой) многоугольник (рис. 47), то увидим, что он замкнется. В этом и состоит геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил:

$$\overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3+\ldots+\overline{P}_i=0.$$

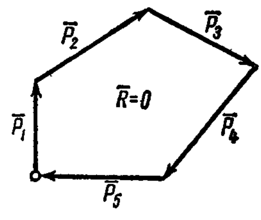


Рис. 47

Из геометрического условия следует аналитическое условие равновесия, выражающееся двумя уравнениями:

$$\sum X_i=0 \text{ и } \sum Y_i=0.$$

Следует заметить, что все задачи, приведенные в § 6-2, можно решить с применением условия равновесия системы сходящихся сил. Причем при решении задач на равновесие системы сходящихся сил можно использовать те же три метода: графический, графо-аналитический и аналитический (метод проекций).

Необходимо учитывать, что если рассматривается равновесие плоской системы сходящихся сил, приложенных к одному телу, число неизвестных величин не должно превышать двух (условие статической определимости задачи с плоской системой сходящихся сил):

а) неизвестна одна сила, т. е. ее модуль и направление;
б) неизвестны направления двух сил данной системы;
в) неизвестны модуль одной из сил и направление второй;
г) неизвестны модули двух сил.

При графическом методе решения во всех четырех случаях можно построить замкнутый силовой многоугольник и найти в нем неизвестные величины.

Графо-аналитический метод целесообразно применять в тех случаях, когда рассматривается равновесие трех сил. При этом по условию задачи в произвольном масштабе строится замкнутый треугольник, который затем решается на основе геометрических либо тригонометрических соотношений.

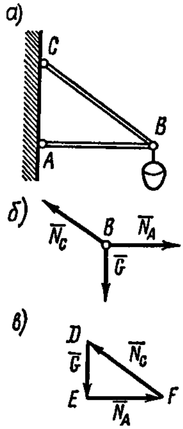


Рис. 48

Метод проекций целесообразно применять для решения задач с числом сил больше трех.

При решении задач на равновесие плоской системы сходящихся сил рекомендуется придерживаться такой общей для всех систем схемы:

а) выделить тело или точку, равновесие которых рассматривается в данной задаче, и изобразить их на рисунке;

б) выяснить, какие нагрузки действуют на тело (точку) и также изобразить их на рисунке;

в) освободить выделенное тело (точку) от связей и заменить их действие реакциями, которые надо изобразить на том же рисунке;

г) на основе полученной схемы сил построить замкнутый силовой треугольник (если рассматривается равновесие трех сил) или составить уравнения равновесия; причем при составлении уравнений проекций оси целесообразно расположить так, чтобы их направления были параллельны или перпендикулярны к искомым силам (оси проекций также показываются на рисунке);

д) после решения уравнений равновесия полученные результаты необходимо проверить либо при помощи неиспользованных уравнений или соотношений, либо путем решения задачи другим способом.

Задача 39-8. Фонарь весом 9 *кГ* подвешен на кронштейне ABC (рис. 48, *а*). Определить реакции горизонтального стержня AB и наклонной тяги BC, если $AB = 1{,}2$ *м* и $BC = 1{,}5$ *м*; крепления в точках A, B и C шарнирные.

Решение — графо-аналитическим методом с применением геометрических соотношений.

1. В данном случае на шарнир B действуют три силы: вес фонаря $\overline{G}$ (рис. 48, *б*) и реакции стержней $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_C$, направленные вдоль стержней. Заметим, что стержень AB сжат, значит реакция $\overline{N}_A$ направлена от стержня к шарниру, а стержень BC растянут, поэтому реакция $\overline{N}_C$ направлена от шарнира к стержню. Шарнир B с действующими на него силами изобразим отдельно.

2. Так как шарнир B под действием этих трех сил находится

в равновесии, силовой треугольник, составленный из них, должен быть замкнутым.

Выберем произвольную точку D (рис. 48, *в*) и отложим от нее отрезок DE, изображающий силу $\overline{G}$. Из точек E и D проведем прямые EF и DF, параллельные соответственно AB и CB. В полученном треугольнике DEF сторона EF изображает реакцию $\overline{N}_A$ (реакцию стержня AB) и сторона FD — реакцию $\overline{N}_C$ (реакцию стержня BC) *.

3. Так как в условии задачи даны линейные размеры кронштейна, величины сил $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_C$ наиболее просто определить исходя из подобия треугольников ABC и EFD:

$$\frac{BC}{N_C}=\frac{BA}{N_A}=\frac{AC}{G}.$$

Отсюда

$$N_C=G\frac{BC}{AC} \quad \text{и} \quad N_A=G\frac{BA}{AC}.$$

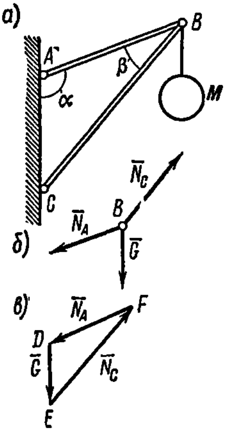


Рис. 49

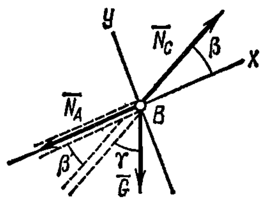


Рис. 50

4. Неизвестную в задаче длину AC определяем по теореме Пифагора:

$$AC=\sqrt{BC^2-BA^2}=\sqrt{1{,}5^2-1{,}2^2}=0{,}9 \text{ м}.$$

5. Окончательно

$$N_C=9\cdot\frac{1{,}5}{0{,}9}=15 \text{ кГ} \quad \text{и} \quad N_A=9\cdot\frac{1{,}2}{0{,}9}=12 \text{ кГ}.$$

Задача 40-8. В точке B кронштейна ABC (рис. 49, *а*) подвешен груз M массой 816 *кг*. Определить реакции стержней кронштейна, если углы кронштейна $\alpha=110°$, $\beta=30°$ и крепления в точках A, B и C шарнирные.

Решение 1 — графо-аналитическим методом с применением тригонометрических соотношений.

1. На точку B кронштейна действуют три силы: вес груза M,

---

* Если все указанные в п. 2 построения выполнить в определенном масштабе, а затем измеренные длины EF и FD умножить на масштаб построения, то получим решение задачи графическим методом.

равный $G=mg=816\cdot 9{,}81=8000$ *н* $=8$ *кн* и реакции стержней $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_C$, действующие вдоль стержней (рис. 49, *б*).

2. Так как эти три силы образуют уравновешенную систему, то составленный из них треугольник должен быть замкнутым (рис. 49, *в* — построение $\triangle DEF$ произведено в том же порядке, как в задаче 39-8).

3. $\triangle ABC \sim \triangle DFE$ потому, что $\angle EDF=\alpha$, $\angle EFD=\beta$ и $\angle DEF=\gamma$. Применив к $\triangle DFE$ теорему синусов, имеем

$$\frac{N_A}{\sin\gamma}=\frac{N_C}{\sin\alpha}=\frac{G}{\sin\beta},$$

откуда

$$N_C=G\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=8\,\frac{\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ}=15\ \textit{кн} \quad \text{и} \quad N_A=G\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=8\,\frac{\sin 40^\circ}{\sin 30^\circ}=10{,}3\ \textit{кн}.$$

Решение 2—методом проекций при помощи уравнений равновесия.

1. Так как три силы $\overline{G}$, $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_C$, действующие на точку B (рис. 50), образуют уравновешенную систему, то алгебраические суммы проекций этих сил на каждую из двух осей координат равны нулю.

2. Выберем оси координат так, чтобы одна из осей совпадала с линией действия одной из неизвестных сил (см. рис. 50), и составим два уравнения проекций:

$$\sum X_i=0;\ N_C\cos\beta-N_A-G\cos(\beta+\gamma)=0; \qquad (1)$$

$$\sum Y_i=0;\ N_C\sin\beta-G\sin(\beta+\gamma)=0. \qquad (2)$$

Из уравнения (2)

$$N_C=G\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta}=8\,\frac{\sin 70^\circ}{\sin 30^\circ}=15\ \textit{кн}.$$

Из уравнения (1)

$$N_A=N_C\cos\beta-G\cos(\beta+\gamma)=15\cos 30^\circ-$$
$$-8\cos 70^\circ=13-2{,}7=10{,}3\ \textit{кн}.$$

Как видно, ответ получается тот же.

После решения задач, аналогичных 39-8 и 40-8, можно сделать ошибочный вывод, что силовой треугольник и треугольник, образованный стержнями кронштейна, должны быть подобными. Но это совсем не обязательно. В этом легко убедиться, рассмотрев следующую задачу.

Задача 41-8. К шарниру B кронштейна ABC прикреплена веревка, перекинутая через блок, к другому концу которой прикреплен груз весом $G=1{,}5$ *кн* (рис. 51, *а*). Определить усилия в стержнях AB и CB кронштейна, если крепления в точках A и C шарнирные, $\alpha=35^\circ$ и $\beta=100^\circ$.

Решение 1—графо-аналитическим методом с применением тригонометрических соотношений.

1. На шарнир B в направлении к блоку действует натяжение веревки, равное весу груза G, и вызывает появление двух усилий,

направленных вдоль стержней. При этом стержень AB растягивается, а стержень CB сжимается.

Так как рассматривается равновесие шарнира B, то отбросим стержни, заменив их реакциями $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_C$, приложенными к шарниру. Изобразим шарнир вместе с тремя силами на рис. 51, *б*.

2. Силы $\overline{G}$, $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_C$ образуют уравновешенную систему, значит построенный из них треугольник является замкнутым (рис. 51, *в*). Как видим, $\triangle DEF$ и $\triangle ABC$ в данной задаче не подобны друг другу; $\triangle ACB$ — прямоугольный, а в $\triangle DEF$ $\angle DEF = \beta = 100°$, $\angle EFD = \alpha = 35°$ и, следовательно, $\angle EDF = \gamma = 180 - (100° + 35°) = 45°$.

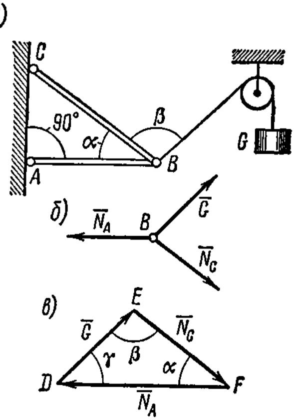


Рис. 51

3. Применив к $\triangle DEF$ теорему синусов, получим

$$\frac{N_A}{\sin\beta} = \frac{N_C}{\sin\gamma} = \frac{G}{\sin\alpha},$$

откуда

$$N_A = \frac{G\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{1{,}5\sin 100°}{\sin 35°} = \frac{1{,}5\sin 80°}{\sin 35°} = 2{,}57 \text{ кн},$$

$$N_C = \frac{G\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{1{,}5\sin 45°}{\sin 35°} = 1{,}85 \text{ кн}.$$

Решение 2 — методом проекций.

1. Изобразив шарнир B вместе с действующими на него силами $\overline{G}$, $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_C$ и расположив оси проекций, как показано на рис. 52, составим уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad G\cos\gamma + N_C\cos\alpha - N_A = 0; \tag{1}$$
$$\sum Y_i = 0; \quad G\sin\gamma - N_C\sin\alpha = 0. \tag{2}$$

2. Из уравнения (2)

$$N_C = \frac{G\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{1{,}5\sin 45°}{\sin 35°} = 1{,}85 \text{ кн},$$

а из уравнения (1)

$$N_A = G\cos\gamma + N_C\cos\alpha = 1{,}5\cos 45° + 1{,}85\cos 35° = 1{,}06 + 1{,}51 = 2{,}57 \text{ кн}.$$

Как и следовало ожидать, оба решения дают одинаковый результат. Реакции стержней (их действия на шарнирный болт B) равны $N_A = 2{,}57$ *кн* и $N_C = 1{,}85$ *кн*. Точно с такими же усилиями действует шарнирный болт на стержни. Стержень AB растянут силой 2,57 *кн*, а стержень CB сжат силой 1,85 *кн*.

В связи с решением подобных задач методом проекций необходимо отметить следующее. Применяя метод проекций к определению равнодействующей любого числа сходящихся сил, наиболее удобно использовать обычную прямоугольную систему координатных осей. При этом найденные проекции равнодействующей и искомая равнодействующая образуют прямоугольный треугольник, решая который легко определить модуль и направление равнодействующей.

Применяя метод проекций к решению задач на равновесие сил, совсем не обязательно использовать взаимно перпендикулярные оси.

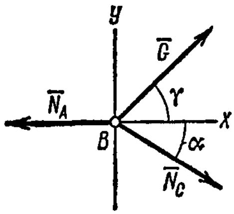


Рис. 52

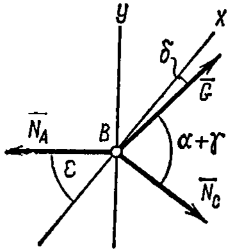


Рис. 53

В тех случаях, когда определяются модули сил, направления которых заданы (как в задачах 40-8 или 41-8), каждую из осей целесообразно расположить перпендикулярно к направлению искомых сил. Тогда в каждое уравнение равновесия войдет только одно неизвестное.

Решим таким образом ту же задачу 41-8:

1. Изобразим шарнирный болт B с действующими на него силами (рис. 53). Расположим ось x перпендикулярно к $\overline{N}_C$ и составим первое уравнение равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad G\cos\delta - N_A\cos\varepsilon = 0. \tag{1}$$

2. Замечая, что $\delta = 90° - (\gamma° + \alpha°) = 90° - 80° = 10°$ и $\varepsilon = 90° - \alpha° = 90° - 35° = 55°$, из уравнения (1)

$$N_A = \frac{G\cos\delta}{\cos\varepsilon} = \frac{1{,}5\cos 10°}{\cos 55°} = 2{,}57\ \textit{кн}.$$

3. Расположим вторую ось (ось y) перпендикулярно к направлению силы $\overline{N}_A$ и составим второе уравнение:

$$\sum Y_i = 0; \quad G\sin\gamma - N_C\sin\alpha = 0. \tag{2}$$

4. Из уравнения (2)

$$N_C = \frac{G\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{1{,}5\sin 45°}{\sin 35°} = 1{,}85\ \textit{кн}.$$

Возможность произвольного расположения осей проекций позволяет производить проверку решения задачи. Чтобы проверить правильность решения задачи, проведенного любым способом, следует выбрать расположение оси таким образом, чтобы на нее спроектировались обе найденные силы. При правильном решении сумма проекций на вновь выбранную ось получится равной нулю. Если же сумма не равна нулю, нужно искать допущенную в решении ошибку.

Задача 42-8. При помощи стержневого устройства ABC (в точках A, B и C соединения шарнирные) удерживаются в равновесии два груза — первый весом $G_1 = 6$ *кн* и второй весом $G_2 = 8$ *кн*. Угол $\alpha = 60°$ (рис. 54). Определить усилия, которые испытывают стержни AB и BC.

В этой задаче на шарнир B действуют уже не три, а четыре силы, поэтому решать задачу графо-аналитическим методом не имеет смысла — решение получится слишком длинным.

Когда на устройство, состоящее из двух стержней, действует одна нагрузка (как в задачах 38-8, 40-8 и 41-8), то можно легко определить, какой из стержней растянут и какой сжат.

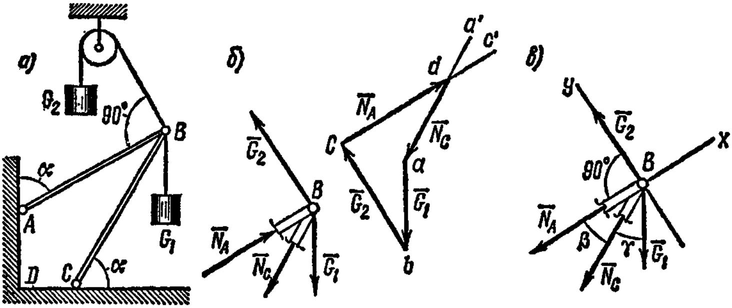


Рис. 54

В данной задаче это сразу определить нельзя, так как груз G_1 сжимает стержень BC и растягивает AB, а груз G_2, наоборот, растягивает стержень BC и сжимает AB.

При решении задачи графическим методом направления усилий в стержнях определяют следующим образом.

Выбрав масштаб сил, из произвольной точки a построим отрезок ab, изображающий вектор $\overline{G}_1$, затем из точки b построим отрезок bc, изображающий вектор $\overline{G}_2$ (построение в масштабе рекомендуется выполнить самостоятельно). Из точек c и a проведем прямые cc' и aa', параллельные стержням AB и CB, которые пересекутся в точке d.

Получается замкнутый силовой четырехугольник $abcd$ (рис. 54, *б*), в котором стороны cd и da изображают соответственно реакции $\overline{N}_A$ (направлена от c к d) и $\overline{N}_C$ (направлена от d и a). Если теперь эти реакции стержней мысленно приложить к шарниру B со стороны стержней (как реакции стержней — см. на рис. 54, *б* слева), то:

1) реакция $\overline{N}_A$ действует на шарнир в направлении от стержня к шарниру — значит стержень AB сжат;

2) реакция $\overline{N}_C$ действует на шарнир в направлении от шарнира к стержню — значит стержень CB растянут.

При решении методом проекций нет необходимости заранее определять, в какую сторону направлены реакции вдоль стержней. Целесообразнее предположить, что **под действием нагрузки все стержни растянуты** (т. е. их реакции направлены от шарнира, равновесие которого рассматриваем, к стержням). Затем выбрать оси проекций, составить уравнения равновесия и решить их. У действительно растянутых стержней модули их реакций получатся положительными (предположительное направление реакций совпадает с действительным), а у сжатых стержней модули и реакций получатся отрицательными (предположительное направление реакций противоположно действительному).

Учитывая изложенное выше, приступим к решению задачи 42-8.

Решение—методом проекций.

1. Изобразим шарнир B с действующими на него нагрузками $\overline{G}_1$ и $\overline{G}_2$ и реакциями стержней $\overline{N}_A$ (реакция стержня AB) и $\overline{N}_C$ (реакция стержня CB), как показано на рис. 54, *в*, т. е. считаем предварительно, что оба стержня растянуты.

2. Совместим оси проекций с силами $\overline{N}_A$ и $\overline{G}_2$ и составим уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad -N_A - N_C \cos\beta - G_1 \cos(\beta+\gamma) = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad G_2 - N_C \sin\beta - G_1 \sin(\beta+\gamma) = 0. \tag{2}$$

3. Прежде чем приступить к решению уравнений, нужно найти углы β и γ.

Угол γ, образуемый вектором $\overline{G}_1$ и стержнем BC, легко найти по рис. 54, *а*. Так как $\alpha = 60°$, а $\overline{G}_1$ направлен по вертикали, то $\gamma = 30°$. Угол $\beta = \angle ABC$ (рис. 54, *а*). Так как в любом четырехугольнике сумма внутренних углов равна 360°, то $\beta = 360° - (2\cdot 120° + 90°) = 30°$. Значит $(\beta+\gamma) = 60°$.

4. Из уравнения (2)

$$N_C = \frac{G_2 - G_1 \sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta} = \frac{8 - 6\sin 60°}{\sin 30°} = 5{,}60 \text{ } кн.$$

Таким образом, стержень BC растянут силой 5,60 *кн*.

Из уравнения (1)

$$N_A = -N_C \cos\beta - G_1 \cos(\beta+\gamma) = -5{,}60 \cos 30° - 6\cos 60° = -4{,}85 - 3 = -7{,}85 \text{ } кн.$$

Следовательно, стержень AB сжат силой 7,85 *кн*.

Задача 43-8. Каждую силу $\overline{P}$ нужно дополнительно приложить к шарниру B стержневого устройства, описанного в задаче 42-8, чтобы оба стержня AB и CB были растянуты усилиями $N_A = N_C = 7{,}85$ *кн*.

Решение—методом проекций.

1. Используя рис. 54, *а* и *в*, изобразим шарнир B с действующими на нем силами $G_1 = 6$ *кн*, $G_2 = 8$ *кн*, $N_A = N_C = 7{,}85$ *кн* и предположим, что искомая сила $\overline{P}$ образует с осью x угол φ (рис. 55).

2. Составим уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0;$$

$$P\cos\varphi - G_1 \cos(\beta+\gamma) - N_C \cos\beta - N_A = 0; \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0;$$

$$P\sin\varphi - G_1 \sin(\beta+\gamma) - N_C \sin\beta + G_2 = 0. \tag{2}$$

3. В каждое из уравнений входят обе неизвестные величины — модуль силы $\overline{P}$ и угол φ, определяющий ее направление. Одно из неизвестных нужно исключить из этих уравнений. В данном случае это можно сделать, если представить уравнения в виде

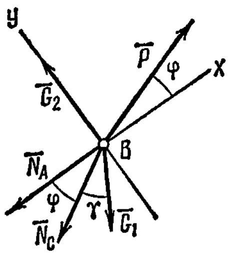


Рис. 55

$$P\cos\varphi = G_1\cos(\beta+\gamma) + N_C\cos\beta + N_A, \qquad (1)$$

$$P\sin\varphi = G_1\sin(\beta+\gamma) + N_C\sin\beta - G_2, \qquad (2)$$

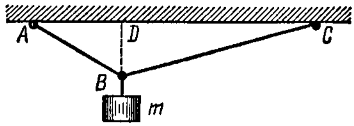


Рис. 56

а потом уравнение (2) разделить на уравнение (1):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{G_1\sin(\beta+\gamma)+N_C\sin\beta-G_2}{G_1\cos(\beta+\gamma)+N_C\cos\beta+N_A}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{6\sin 60^\circ + 7{,}85\sin 30^\circ - 8}{6\cos 60^\circ + 7{,}85\cos 30^\circ + 7{,}85} = \frac{1{,}12}{17{,}65} = 0{,}0635 \text{ и } \varphi = 3^\circ 38'.$$

4. Подставив найденное значение угла φ в любое из уравнений равновесия, найдем значение P.

Из уравнения (2)

$$P = \frac{G_1\sin(\beta+\gamma)+N_C\sin\beta-G_2}{\sin\varphi}.$$

Так как числитель этого выражения определен в п. 3 и равен 1,12, а знаменатель $\sin\varphi = \sin 3^\circ 38' = 0{,}0635$, то $P = 1{,}12/0{,}0635 = 17{,}65$ *кн*.

Таким образом, для того чтобы оба стержня были растянуты с одинаковыми усилиями по 7,85 *кн*, к шарниру B необходимо добавить силу $\overline{P}$, модуль которой $P = 17{,}65$ *кн* и которая направлена под углом $\varphi = 3^\circ 38'$ к положительному направлению оси x или под углом $180^\circ - 3^\circ 38' = 176^\circ 52'$ к стержню BA.

Задачу 43-8 можно было решить по примеру задач, приведенных в § 7-2. Для четырех заданных сил $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$, $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_C$ найти равнодействующую $\overline{R}$, а затем добавить к ним силу $\overline{P} = -\overline{R}$.

● **Задача 44-8.** Нерастяжимая нить закреплена в точках A и C (рис. 56), расположенных на одной горизонтали. В точке B нити к ней прикреплен груз m массой 100 *кг*. Определить натяжение участков AB и BC нити, если

1) $AB = BC = 2$ *м*, $BD = 0{,}5$ *м*;
2) $AB = 1155$ *мм*, $BC = 1414$ *мм* и $BD = 1000$ *мм*;
3) $AB = 250$ *см*, $BC = 750$ *см* и $BD = 75$ *см*.

Ответ: 1) по 1960 *н*; 2) 719 и 508 *н*; 3) 1,14 и 1,18 *кн*.

● **Задача 45-8.** Груз, вес которого $G = 2$ *кн*, подвязан к тросу и удерживается в равновесии при помощи двух стержней, как показано на рис. 57.

Крепления в точках A, B и C шарнирные. Трением на блоке пренебречь. Определить усилия в стержнях AB и AC.

Ответ: а) $N_B = 3{,}09$ и $N_C = 2{,}58$ *кн*; б) $N_B = 1{,}10$ и $N_C = 2{,}52$ *кн*.

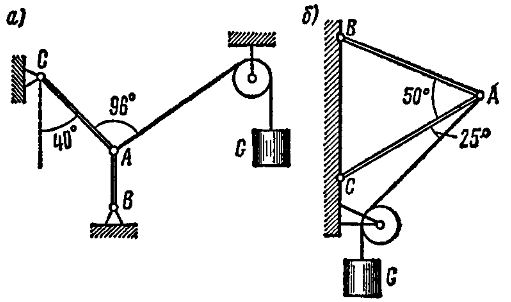


Рис. 57

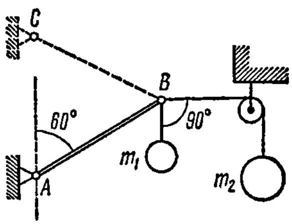


Рис. 59

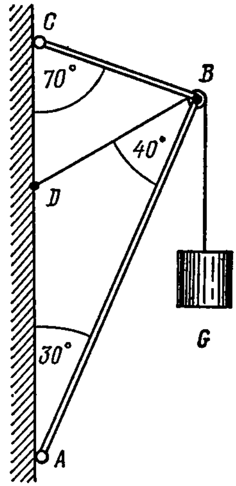


Рис. 58

● **Задача 46-8.** Кронштейн ABC имеет в точке B свободно вращающийся блок (рис. 58). Через блок перекинута нить с грузом $G = 500$ *н*. Другой конец нити закреплен на вертикальной стене в точке D. Определить реакции стержней AB и CB. Крепления в точках A, B и C шарнирные. Трением на блоке пренебречь.

Ответ: $N_A = 805$ *н*, $N_C = 414$ *н* (оба стержня сжаты).

● **Задача 47-8.** Необходимо изготовить плоский двухстержневой кронштейн с шарнирными креплениями для удерживания двух грузов массами $m_1 = 300$ *кг* и $m_2 = 600$ *кг*, причем стержень AB должен занимать положение, указанное на рис. 59, и испытывать растягивающее усилие $N_A = 3$ *кн*.

Определить, как нужно расположить стержень BC и какое усилие в нем при этом возникает.

Ответ: $\angle ABC = 83°30'$; $N_C = 5{,}53$ *кн*.

§ 9-2. Равновесие трех непараллельных сил

При решении задач определенное практическое значение имеет теорема о равновесии трех непараллельных сил: *если три непараллельные силы, лежащие в одной плоскости, образуют уравновешенную систему, то линии их действия пересекаются в одной точке.* *

Эта теорема используется для решения задач в тех случаях, когда на тело действует уравновешенная система трех сил, причем одна сила задана по модулю и направлению, для другой известно лишь направление, а у третьей — неизвестны ни модуль, ни направление.

Приведем решение двух задач этого типа.

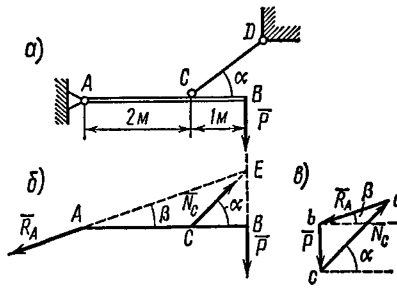


Рис. 60

Задача 48-9. Балка AB поддерживается в горизонтальном положении стержнем CD, наклоненным к балке под углом $\alpha = 40°$; крепления в точках A, C и D шарнирные (рис. 60, *а*). Определить реакцию шарнира A и усилие, растягивающее стержень CD, если на конце B балки действует вертикальная сила, равная 20 *кн*. Весом балки и стержня пренебречь.

Решение — графо-аналитическим методом.

1. На балку действуют три силы (см. рис. 60, *а*): известная нагрузка $\overline{P}$ уравновешивается двумя реакциями: $\overline{N}_C$ — реакцией стержня CD, направленной вдоль стержня, и $\overline{R}_A$ — реакцией шарнира A, направление которой неизвестно.

Построим расчетную схему (рис. 60, *б*). Отрезок AB изображает данную балку. На точку B действует вертикальная нагрузка $\overline{P}$. В точке C под углом $\alpha = 40°$ на балку действует реакция $\overline{N}_C$. Направления действия сил $\overline{P}$ и $\overline{N}_C$ известны, значит можно получить точку E, в которой пересекаются их линии действия.

В соответствии с теоремой о равновесии трех непараллельных сил через точку E пройдет и линия действия реакции $\overline{R}_A$. Значит $\overline{R}_A$ действует вдоль линии EA, направленной под углом β к AB.

2. Силы $\overline{P}$, $\overline{R}_A$ и $\overline{N}_C$ образуют уравновешенную систему. Следовательно, силовой треугольник, построенный из векторов этих сил, должен быть замкнут. Строим треугольник *bac* (рис. 60, *в*), в котором отрезок *bc* изображает силу $\overline{P}$ ($bc \parallel BE$), отрезок *ca* — силу $\overline{N}_C$ ($ca \parallel CE$) и отрезок *ab* — силу $\overline{R}_A$ ($ab \parallel AE$).

---

* См., например, Никитин Е. М. Теоретическая механика. «Наука», М., 1969 (§ 15).

3. Модули сил R_A и N_C можно определить по теореме синусов. но предварительно необходимо определить углы треугольника *abc*:

$\angle c = 90° - \alpha = 90° - 40° = 50°$; $\angle b = 90° + \beta$; но угол $\beta = \angle EAB$.

Из $\triangle BEC$

$$BE = BC \operatorname{tg} \alpha.$$

Теперь из $\triangle ABE$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{BE}{AB} = \frac{BC \operatorname{tg} \alpha}{AB} = \frac{1 \cdot \operatorname{tg} 40°}{3} = 0{,}280, \text{ откуда } \beta \approx 15°40'.$$

Таким образом,

$$\angle b = 90° + 15°40' = 105°40',$$
$$\angle a = 180° - (105°40' + 50°) = 24°20'.$$

4. По теореме синусов

$$\frac{N_C}{\sin b} = \frac{R_A}{\sin c} = \frac{P}{\sin a},$$

отсюда

$$N_C = \frac{P \sin b}{\sin a} = \frac{20 \sin 105°40'}{\sin 24°20'} = 46{,}8 \ \textit{кн},$$
$$R_A = \frac{P \sin c}{\sin a} = \frac{20 \sin 50°}{\sin 24°20'} = 37{,}2 \ \textit{кн}.$$

Таким образом, усилие в стержне CD равно его реакции N_C, т. е. 46,8 *кн*, реакция шарнира A образует с балкой AB угол $(\widehat{\overline{R}, AB}) = 180° - \beta° = 164°20'$, а ее модуль 37,2 *кн*.

Задача 49-9. Горизонтальная балка, имеющая в точке A шарнирно-неподвижную опору, а в точке B — шарнирно-подвижную с опорной плоскостью, наклоненной под углом $\alpha = 30°$ к горизонтали, нагружена в точке C вертикальной силой $P = 50$ *кн* (рис. 61, *а*). Определить реакции опор.

Решение — методом проекции.

1. Кроме нагрузки $\overline{P}$, на балку действуют реакции двух шарнирных опор. Направление реакции шарнирно-подвижной опоры известно — оно образует с опорной плоскостью катка прямой угол. Значит $\overline{R}_B$ — реакция шарнира B, перпендикулярная к опорной плоскости катка, будет образовывать с балкой BA угол, равный $(90° - \alpha)°$.

Покажем силы $\overline{P}$ и $\overline{R}_B$ на расчетной схеме (рис. 61, *б*). Так как направление этих сил известно, то точку пересечения их линий действия легко зафиксировать (точка D). Прямая AD определяет теперь направление реакции $\overline{R}_A$ неподвижного шарнира (теорема о равновесии трех непараллельных сил).

2. Найдем угол β, образуемый $\overline{R}_A$ с балкой AB:

$$\operatorname{tg}\beta = DC/AC,$$

где из $\triangle DCB$

$$DC = BC \operatorname{tg}(90°-\alpha),$$

поэтому $\operatorname{tg}\beta = \frac{BC \operatorname{tg}(90°-\alpha)}{AC} = \frac{5 \operatorname{tg} 60°}{2} = 4{,}33$; $\beta = 77°$.

3. Так как силы $\overline{P}$, $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ образуют уравновешенную систему сходящихся сил, для удобства дальнейшего решения изобразим их отдельно, приложенными к произвольной точке O (рис. 61, *в*), и расположим оси так, чтобы ось x была перпендикулярна к $\overline{R}_B$, а ось y совпадала с этой силой (штриховая горизонтальная линия проведена на рис. 61, *в* для лучшей ориентировки при определении углов, образуемых силами $\overline{R}_A$ и $\overline{P}$ с осями).

4. Составим уравнения равновесия:

$$\Sigma X_i = 0;\quad R_A \cos(\beta-\alpha) - P\cos(90°-\alpha) = 0; \qquad (1)$$

$$\Sigma Y_i = 0;\quad R_B + R_A \sin(\beta-\alpha) - P\sin(90°-\alpha) = 0. \qquad (2)$$

5. Из уравнения (1)

$$R_A = \frac{P\cos(90°-\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)} = \frac{50\cos 60°}{\cos 47°} = 36{,}6 \text{ } кн;$$

из уравнения (2)

$$R_B = P\sin(90°-\alpha) - R_A\sin(\beta-\alpha) = 50\sin 60° - 36{,}6\sin 47° = 16{,}5 \text{ } кн.$$

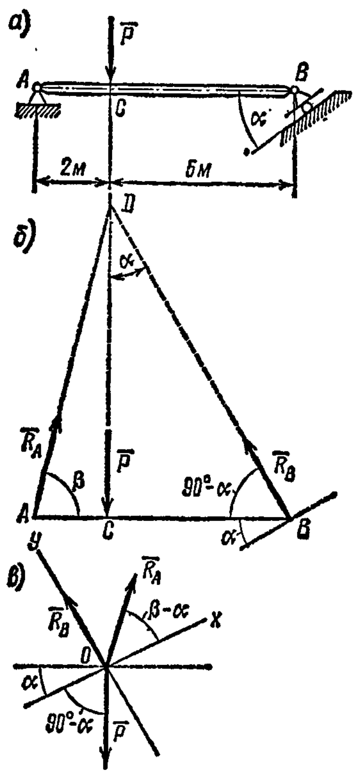


Рис. 61

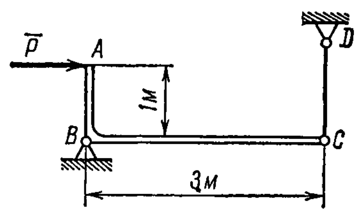


Рис. 62

Реакция подвижного шарнира $R_B = 16{,}5$ *кн*, реакция неподвижного шарнира $R_A = 36{,}6$ *кн*; она наклонена к балке под углом $\beta = 77°$.

Как видно, и при графо-аналитическом методе и при методе проекций применение теоремы о равновесии трех непараллельных сил приводит к довольно длинному решению задачи. Эту теорему для решения задачи выгодно применять, лишь используя графический метод решения.

Если рис. 60, *б* и 61, *б* выполнить в масштабе, то из этого построения определяется направление (угол β) реакции шарнира A. Затем, построив в масштабе силовой треугольник, найдем модули обеих неизвестных реакций.

Обе приведенные выше задачи рекомендуется решить самостоятельно графическим методом, а затем решить следующую задачу.

● **Задача 50-9.** Брус ABC, изогнутый под прямым углом над шарнирно-неподвижной опорой B, в точке C подвешен к цепи CD (рис. 62). На точку A вертикального колена бруса действует горизонтальная сила $P=6$ *кн*. Пренебрегая собственным весом бруса и цепи, определить реакцию шарнира B, ее направление относительно BC и натяжение цепи.

Ответ: $R_B=6{,}35$ *н*; $\angle(\overline{R};\ \overline{BC})=161°35'$, $N_D=2$ *кн*.

ГЛАВА III

ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 10-3. Момент пары сил. Сложение пар сил. Равновесие пар сил

При изучении теоретической механики необходимо совершенно отчетливо уяснить, что в статике рассматриваются два простейших элемента: сила и пара сил. Любые две силы, кроме сил, образующих пару, всегда можно заменить одной—сложить их (найти равнодействующую). Пара сил не поддается дальнейшему упрощению, она не имеет равнодействующей и является простейшим элементом.

Действие пары сил на тело характеризуется ее моментом — произведением одной из сил пары на ее плечо (на кратчайшее расстояние между линиями действия сил, образующих пару).

Единицей момента пары сил в Международной системе служит 1 *н·м* (ньютон-метр = 1 *н*·1 *м*), а в системе МКГСС (технической) — 1 *кГ·м*.

Несколько пар сил, действующих на тело в одной плоскости, можно заменить одной парой сил (равнодействующей парой), момент которой равен алгебраической сумме моментов данных пар:

$$M_{\text{рав}}=\Sigma M_i.$$

При равновесии пар сил $\Sigma M_i=0$.

Если пары сил действуют в одной плоскости, то при решении задач достаточно рассматривать моменты пар как алгебраические величины. Причем знак момента определяется в зависимости от направления вращающего действия пары сил.

Дальнейшее изложение основано на правиле, принятом в учебнике Е. М. Никитина (§ 21), т. е. считается момент положительным, если пара сил действует против хода часовой стрелки, если же пара сил действует на тело по ходу часовой стрелки, то момент считается отрицательным.

В том случае когда пары сил действуют на тело будучи расположенными в различных плоскостях, гораздо удобнее рассматривать пару сил как вектор, направленный перпендикулярно к плоскости действия пары сил (рис. 63). Направление вектора в зависимости от направления вращательного действия пары определяется по направлению движения винта с правой нарезкой.

Задача 51-10. Определить момент пары сил (рис. 64), если $P_1 = P = 20$ *н*, $AB = 0{,}5$ *м* и $\alpha = 30°$.

Решение.

1. При определении момента пары сил нужно прежде всего правильно определить плечо пары. При этом необходимо различать следующие понятия: плечо пары сил и расстояние между точками приложения сил пары.

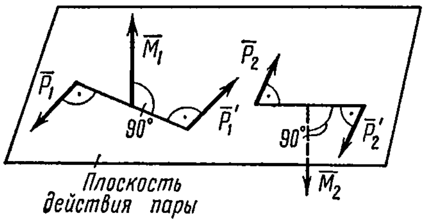


Рис. 63

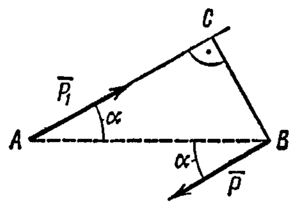


Рис. 64

Так как в механике твердого тела сила—скользящий вектор, то действие силы не изменяется при переносе точки ее приложения вдоль линии ее действия. Значит расстояние между точками приложения сил, образующих пару, можно изменять неограниченно. Но плечо пары при этом переносе остается неизменным.

В частном случае расстояние между точками приложения сил, образующих пару, может быть равно плечу.

Чтобы определить плечо данной пары из точки приложения одной из сил, например из точки B, восставим перпендикуляр BC к линии действия другой силы. Расстояние BC и есть плечо данной пары сил. Расстояние между точками приложения сил, образующих пару, $AB = 0{,}5$ *м*.

Легко видеть, что $BC = AB \sin\alpha = 0{,}5 \sin 30° = 0{,}25$ *м*.

2. Найдем момент пары сил: $M = -P \cdot BC = -20 \cdot 0{,}25 = -5$ *н·м*.

Задача 52-10. Как изменится момент пары сил ($\overline{P}$, $\overline{P}_1$), показанной на рис. 64, *а* ($P = 50$ *н*, $AB = 0{,}4$ *м* и $\alpha = 135°$), если повернуть силы $\overline{P}$ и $\overline{P}_1$ так, чтобы, они стали перпендикулярными AB?

Решение.

1. Найдем момент пары при заданном положении ее сил (рис. 65, *а*).

Из точки B восставим перпендикуляр BC к линиям действия сил $\overline{P}$ и найдем его длину:

$$BC = AB \sin(180° - \alpha) = 0{,}4 \cdot \sin 45° = 0{,}283 \text{ м}.$$

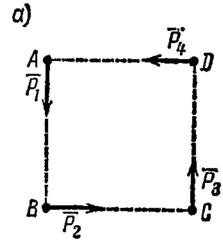
Момент пары при заданном положении сил $M_a = P \cdot BC = 50 \cdot 0{,}283 = 14{,}15$ *н·м*.

2. Повернем силы $\overline{P}$ и $\overline{P_1}$ из заданного положения на угол $\beta° = \alpha° - 90°$ в направлении против хода часовой стрелки (рис. 65, *б*). При таком положении сил относительно AB плечом пары сил является расстояние между точками их приложения, поэтому

$$M_б = P \cdot AB = 50 \cdot 0{,}4 = 20 \text{ н·м}.$$

3. Сравнивая полученные результаты, видим, что после поворота сил момент пары увеличивается на $20 - 14{,}15 = 5{,}85$ *н·м*.

4. Легко заметить, что силы $\overline{P}$ и $\overline{P_1}$ могут достичь перпендикулярного положения к AB после их поворота на угол γ в направлении по ходу часовой стрелки (рис. 65, *в*). В том случае плечом пары является тот же отрезок AB, но момент пары



$$M_в = -P \cdot AB = -50 \cdot 0{,}4 = -20 \text{ н·м}.$$

Момент пары сил изменяет свой знак.

Задача 53-10. К точкам A, C и B, D, образующим вершины квадрата со стороной 0,5 *м*

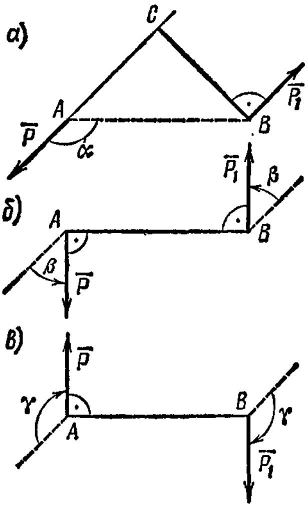


Рис. 65

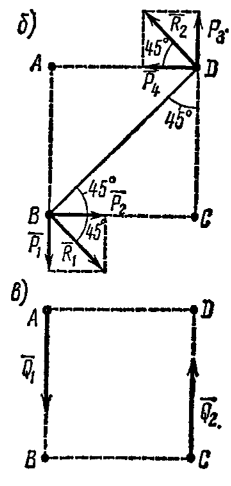


Рис. 66

(рис. 66, *а*), приложены равные по модулю силы ($P = 12$ *н*) таким образом, что они образуют две пары сил ($\overline{P_1}$, $\overline{P_3}$) и ($\overline{P_2}$, $\overline{P_4}$). Определить момент равнодействующей пары сил.

Решение 1.

Плечи у обеих пар сил равны стороне квадрата, поэтому

$$M_{рав} = M_{13} + M_{24} = P_1 \cdot AD + P_2 \cdot AB = 12 \cdot 0{,}5 + 12 \cdot 0{,}5 = 12 \text{ н·м}.$$

Решение 2.

1. Перенесем силы $\overline{P_1}$ и $\overline{P_3}$ из точек A и C соответственно в точки B и D (рис. 66, *б*). В точках B и D получаются системы сходящихся сил $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$; $\overline{P}_3$ и $\overline{P}_4$ с одинаковыми модулями.

2. Сложим попарно эти силы у каждой из точек B и D. В обоих случаях $R_1 = R_2 = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}$ *н*.

3. Силы $\overline{R}$, модули которых теперь известны, направлены перпендикулярно к диагонали BD квадрата. Значит эта диагональ является плечом вновь образовавшейся пары сил $(\overline{R}_1, \overline{R}_2)$, заменяющей собой две данные.

4. Найдем момент пары $(\overline{R}_1, \overline{R}_2)$:

$$M_{\text{рав}} = R_1 \cdot BD = R_1 \cdot AB \cdot \sqrt{2}$$

и, следовательно,

$$M_{\text{рав}} = 12\sqrt{2} \cdot 0{,}5\sqrt{2} = 12 \text{ н} \cdot \text{м}.$$

Эту пару в соответствии со вторым решением можно представить в виде пары $(\overline{R}_1, \overline{R}_2)$ с плечом BD (диагональю данного квадрата).

Но можно равнодействующую пару представить и в любом другом виде, например в виде сил $Q = 24$ *н*, приложенных к двум

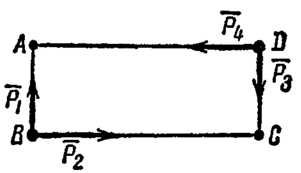


Рис. 67

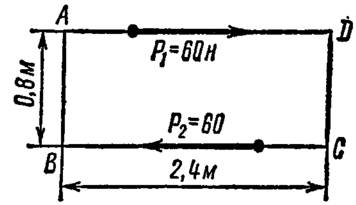


Рис. 68

любым вершинам квадрата $ABCD$ (рис. 66, *в*) (см. об эквивалентности пар сил § 23 в учебнике Е. М. Никитина).

● **Задача 54-10.**

К каждой из вершин B и D прямоугольника $ABCD$ приложены по две силы таким образом, что они образуют две пары сил: $(\overline{P}_1, \overline{P}_3)$ и $(\overline{P}_2, \overline{P}_4)$. Определить момент равнодействующей пары сил, если

$$P_1 = P_3 = 10 \text{ н}, \; P_2 = P_4 = 15 \text{ н}, \; AB = DC = 0{,}2 \text{ м}$$
$$\text{и } AD = BC = 0{,}5 \text{ м (рис. 67)}.$$

Ответ. $M_R = -2$ *н·м*.

Задача 55-10. На прямоугольник $ABCD$ (рис. 68) вдоль его длинных сторон действует пара сил $(\overline{P}_1, \overline{P}_2)$. Какую пару сил нужно приложить к прямоугольнику, направив силы вдоль его коротких сторон, чтобы уравновесить пару $(\overline{P}_1, \overline{P}_2)$?

Решение.

1. Момент данной пары сил $M_{12} = -P_1 \cdot AB$ необходимо уравновесить парой, момент которой обозначим M_{34}.

Тогда, согласно условию равновесия, $M_{12} + M_{34} = 0$.

Откуда $M_{34} = -M_{12} = -(-P_1 \cdot AB) = 60 \cdot 0{,}8 = 48$ *н·м*.

2. Обозначив силы, образующие искомую пару ($\overline{P}_3$, $\overline{P}_4$), замечая, что ее плечо равно BC, получим

$$M_{34} = P_3 \cdot BC = P_4 \cdot BC.$$

Отсюда

$$P_3 = P_4 = \frac{M_{34}}{BC} = \frac{48}{2{,}4} = 20 \text{ н}.$$

Значит к прямоугольнику необходимо приложить пару сил с положительным (направленным против хода часовой стрелки) моментом, равным 48 *н·м*. Силы, образующие эту пару, равняются 20 *н* каждая и одна из них должна действовать вдоль стороны AB от A к B, вторая—вдоль стороны CD от C к D.

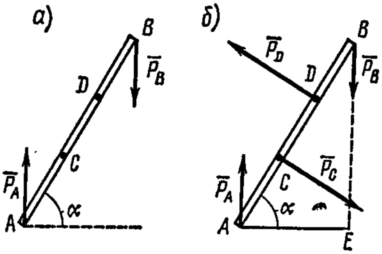


Рис. 69

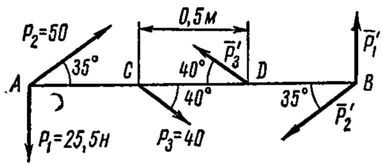


Рис. 70

Задача 56-10. Прямолинейный стержень AB должен находиться в равновесии в положении, показанном на рис. 69, *а* (угол $\alpha = 60°$). При этом в точках A и B на стержень действуют вертикальные силы $\overline{P}_A$ и $\overline{P}_B$, образующие пару ($\overline{P}_A$, $\overline{P}_B$). Какие две равные силы нужно приложить к стержню в точках C и D, направив их перпендикулярно к стержню, чтобы обеспечить равновесие. $AB = 3$ *м*, $CD = 1$ *м*, $P_A = P_B = 100$ *н*.

Решение.

1. Пару сил можно уравновесить только парой сил. Поэтому в точках C и D к стержню необходимо приложить две равные силы так, чтобы они образовали пару сил с моментом, равным моменту пары ($\overline{P}_A$, $\overline{P}_B$), но имеющим противоположный знак.

Так как пара ($\overline{P}_A$, $\overline{P}_B$) поворачивает стержень на ходу часовой стрелки, искомые силы должны поворачивать его против хода часовой стрелки (рис. 69, *б*).

2. Применяем условие равновесия: $M_{AB} + M_{CD} = 0$.

Или, подставив значения моментов,

$$-P_A \cdot AE + P_C \cdot CD = 0, \text{ где } AE = AB \cos\alpha.$$

Отсюда

$$P_C = \frac{P_A \cdot AE}{CD} = \frac{100 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ}{1} = 150 \ н.$$

Следовательно, в точках C и D необходимо приложить силы $\overline{P}_C$ и $\overline{P}_D$ по 150 *н* каждая, как показано на рис. 69, *б*.

● **Задача 57-10.**

На прямолинейный стержень AB действуют шесть сил, которые образуют три пары сил ($\overline{P}_1$, $\overline{P}_1'$), ($\overline{P}_2$, $\overline{P}_2'$) и ($\overline{P}_3$, $\overline{P}_3'$), расположенные, как показано на рис. 70. Определить, какой длины должен быть стержень AB, чтобы эти пары образовали уравновешенную систему.

Ответ. $AB = 4$ *м*.

§ 11-3. Момент силы относительно точки

Момент силы относительно точки (Е. М. Никитин, § 22) при решении задач по статике, а затем и по динамике имеет не менее важное значение, чем проекции сил. Поэтому нужно уметь определять эту величину безошибочно. Обычно его числовое значение находят неправильно из-за ошибок, допускаемых при определении плеча.

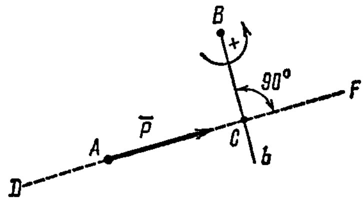


Рис. 71

Чтобы не допускать ошибок при определении моментов сил относительно точки, рекомендуется придерживаться следующего порядка:

1. Прежде всего нужно научиться «видеть» силу, момент которой определяем, и центр моментов—точку, относительно которой определяем момент (рис. 71—сила $\overline{P}$ и центр моментов—точка B).

2. Затем из центра момента проводим прямую Bb перпендикулярно к линии действия силы DF. Длина перпендикуляра BC от центра момента до линии действия силы и есть плечо.

3. Потом находим знак момента. При этом если сила стремится повернуть плечо вокруг центра момента против хода часовой стрелки, то считаем момент положительным; если по ходу часовой стрелки, то отрицательным (то же правило, что и при определении знака момента пары сил).

4. Находим числовое значение момента силы относительно точки, умножив модуль силы на плечо.

По рис. 71 $M_B(\overline{P}) = +P \cdot BC$.

В частном случае момент силы может равняться нулю. Это происходит тогда, когда центр моментов лежит на линии действия силы, при этом плечо равняется нулю. По рис. 70 момент силы $\overline{P}$ относительно точки A (или C) равен нулю.

Задача 58-11. Определить моменты шести заданных сил (рис. 72) относительно точек A, B и C, если $P_1 = 30$ *н*, $P_2 = 50$ *н*, $P_3 = 25$ *н*, $P_4 = 40$ *н*, $P_5 = 35$ *н*, $P_6 = 54$ *н*, $AB = 1{,}2$ *м*, $BC = 0{,}8$ *м*, $\alpha = 55°$ и $\beta = 35°$.

Решение 1 — определение моментов шести заданных сил относительно точки A (рис. 72, *а*).

1. Центр моментов в точке A. Через точку A проходят линии действия трех сил $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и $\overline{P}_5$. Значит для этих сил плечи равны нулю. Следовательно,

$$M_A(\overline{P}_1) = 0; \quad M_A(\overline{P}_2) = 0; \quad M_A(\overline{P}_5) = 0.$$

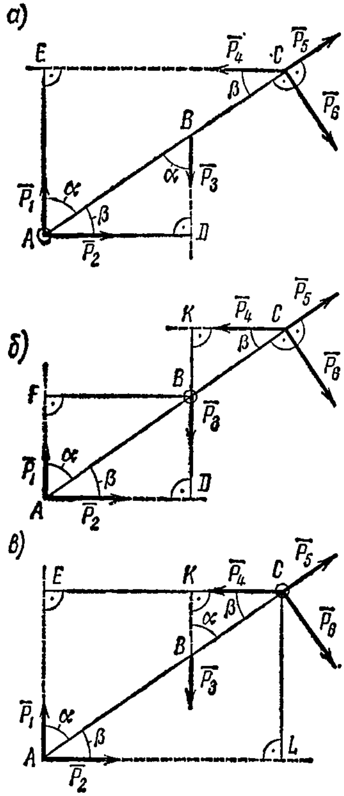


Рис. 72

2. Находим момент силы $\overline{P}_3$. Опустив из точки A на линию действия силы $\overline{P}_3$ перпендикуляр AD, получим плечо силы $\overline{P}_3$. Длину AD легко найти, так как это катет треугольника ABD: $AD = AB \sin\alpha$.

3. Величина момента отрицательная (сила $\overline{P}_3$ поворачивает плечо AD вокруг точки A по ходу часовой стрелки), следовательно,

$$M_A(\overline{P}_3) = -P_3 \cdot AD = -P_3 \cdot AB \sin\alpha = $$
$$= -25 \cdot 1{,}2 \sin 55°,$$
$$M_A(\overline{P}_3) = -24{,}6 \ н \cdot м.$$

4. Находим момент силы $\overline{P}_4$. Плечом силы $\overline{P}_4$ является перпендикуляр AE к CE — линии действия силы $\overline{P}_4$. Из треугольника ACE

$$AE = AC \sin\beta.$$

Величина момента положительная (плечо AE поворачивается около точки A силой $\overline{P}_4$ против хода часовой стрелки). Следовательно,

$$M_A(\overline{P}_4) = +P_4 \cdot AE = P_4 \cdot AC \sin\beta = 40 \cdot 2 \sin 35°,$$
$$M_A(\overline{P}_4) = 45{,}9 \ н \cdot м.$$

5. Находим момент силы $\overline{P}_6$. Плечом силы $\overline{P}_6$ относительно точки A является отрезок AC, так как сила $\overline{P}_6$ направлена к AC перпендикулярно. Величина момента отрицательная:

$$M_A(\overline{P}_6) = -P_6 \cdot AC = -54 \cdot 2 = -108, \quad M_A(\overline{P}_6) = -108 \ н \cdot м.$$

Решение 2—определение моментов сил относительно точки B (рис. 72, *б*).

1. Центр моментов в точке B.

2. Через точку B проходят линии действия двух сил: $\overline{P}_3$ и $\overline{P}_5$. Следовательно,

$$M_B(\overline{P}_3) = 0 \text{ и } M_B(\overline{P}_5) = 0.$$

3. Находим момент силы $\overline{P}_1$. Плечо силы $\overline{P}_1$

$$BF = AB \sin\alpha.$$

Величина момента отрицательная:

$$M_B(\overline{P}_1) = -P_1 \cdot BF = -30 \cdot 1{,}2 \sin 55^\circ,$$
$$M_B(\overline{P}_1) = -29{,}5 \text{ н·м}.$$

4. Находим момент силы $\overline{P}_2$. Плечо силы $\overline{P}_2$

$$BD = AB \cdot \sin\beta.$$

Момент отрицательный:

$$M_B(\overline{P}_2) = P_2 \cdot BD = 50 \cdot 1{,}2 \sin 35^\circ;$$
$$M_B(\overline{P}_2) = 34{,}4 \text{ н·м}.$$

5. Находим момент силы $\overline{P}_4$. Плечо силы $\overline{P}_4$

$$BK = BC \sin\beta.$$

Величина момента положительная:

$$M_B(\overline{P}_4) = P_4 \cdot BK = 40 \cdot 0{,}8 \sin 35^\circ;$$
$$M_B(\overline{P}_4) = 18{,}4 \text{ н·м}.$$

6. Находим момент силы $\overline{P}_6$. Плечом силы $\overline{P}_6$ является отрезок BC. Момент положительный:

$$M_B(\overline{P}_6) = -P_6 \cdot BC = -54 \cdot 0{,}8;$$
$$M_B(\overline{P}_6) = -43{,}2 \text{ н·м}.$$

Решение 3—определение моментов сил относительно точки C (рис. 72, *в*) рекомендуется выполнить самостоятельно.

Ответ. $M_C(\overline{P}_4) = 0$; $M_C(\overline{P}_5) = 0$; $M_C(\overline{P}_6) = 0$; $M_C(\overline{P}_1) = -49{,}1$ н·м; $M_C(\overline{P}_2) = 57{,}3$ н·м; $M_C(\overline{P}_3) = 16{,}4$ н·м.

В задаче 58-11 силы расположены так, что либо их плечи определяются очень просто—как катеты прямоугольных треугольников, в которых даны гипотенузы, либо плечи заданы в условии задачи (BC и AC).

Но иногда некоторые силы заданной системы оказываются расположенными относительно выбранного центра моментов так, что определить длину плеча трудно и требуется, например, предварительно вычислить длины еще одного-двух отрезков. В таких случаях целесообразно силу разложить на две составляющие и применить для определения ее момента теорему Вариньона (§ 29 в учебнике Е. М. Никитина).

Задача 59-11. Определить моменты относительно точки A сил $P_1 = 40$ *н*; $P_2 = 60$ *н*; $P_3 = 30$ *н* и $P_4 = 50$ *н*, приложенных в точках A, B и C, как показано на рис. 73, *а*. Углы $\alpha = 30°$, $\beta = 50°$, $AB = 2{,}5$ *м*; $BC = 1{,}5$ *м*.

Решение.

1. Относительно точки A моменты сил $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и $\overline{P}_3$ определяются аналогично предыдущей задаче (рис. 73, *а*):

$$M_A(\overline{P}_1) = 0; \quad M_A(\overline{P}_2) = -75 \text{ н}\cdot\text{м};$$
$$M_A(\overline{P}_3) = 0.$$

2. Находим момент силы $\overline{P}_4$.

Вариант 1-й (рис. 73, *а*). Плечо AE силы $\overline{P}_4$ в данном случае определяем из $\triangle AEF$, в котором известен только $\angle EAF = \beta$. Значит нужно предварительно определить одну из сторон. Найдем AF:

$$AF = AB - FB.$$

Величину FB находим из $\triangle CBF$, в котором $\angle BCF = \beta$:

$$FB = CB \operatorname{tg} \beta,$$

следовательно,

$$AF = AB - CB \operatorname{tg} \beta.$$

И теперь можем определить плечо AE:

$$AE = AF \cos\beta = (AB - CB \operatorname{tg}\beta)\cos\beta.$$

Раскрываем скобки и заменяем $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$:

$$AE = AB\cos\beta - CB\sin\beta.$$

Момент положительный, следовательно:

$$M_A(\overline{P}_4) = P_4 \cdot AE = P_4(AB\cos\beta - CB\sin\beta);$$
$$M(\overline{P}_4) = 50(2{,}5\cos 50° - 1{,}5\sin 50°) \text{ и } M_A(\overline{P}_4) = 23 \text{ н}\cdot\text{м}.$$

Вариант 2-й. Чтобы избежать определения плеча AE, которое в данном случае находится после предварительного вычисления двух отрезков (FB и AF), необходимо момент силы $\overline{P}_4$ относительно точки A найти по теореме Вариньона: *момент равнодействующей плоской системы сил относительно любой точки, лежащей в той же плоскости, равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.*

Разложим силу $\overline{P}_4$ на две составляющие: одну, направленную вдоль отрезка BC, и другую—перпендикулярно к нему (рис. 73, *б*).

Модуль первой составляющей $P_4 \cos\beta$, а ее плечо—отрезок AB, длина которого задана. Модуль второй составляющей $P_4 \sin\beta$, а ее плечо $AK = BC = 1{,}5$ *м*.

Применяя теорему Вариньона, получаем

$$M_A(\overline{P}_4) = P_4 \cos\beta \cdot AB - P_4 \sin\beta \cdot AK = P_4 (AB \cos\beta - BC \sin\beta).$$

Как видно, получено точно такое же значение момента, что и в первом варианте решения: $M_A(\overline{P}_4) = 23$ *н·м*.

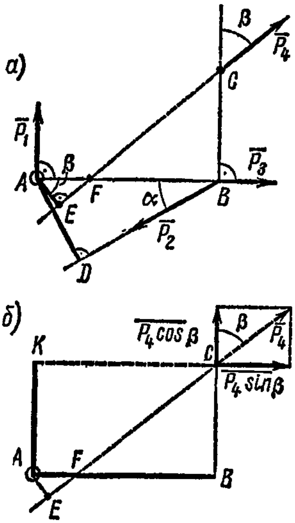


Рис. 73

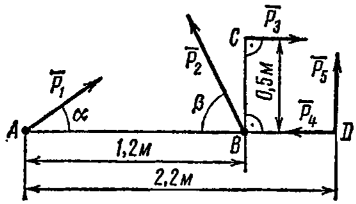


Рис. 74

● **Задача 60-11.** К точкам A, B, C и D тела приложены пять сил (рис. 74). Найти моменты каждой силы относительно точек A, B, C и D, если известно, что $P_1 = 50$ *н*, $P_2 = 80$ *н*, $P_3 = 30$ *н*, $P_4 = 25$ *н*, $P_5 = 40$ *н*, $\alpha = 28°$ и $\beta = 63°$.

Ответ:

Силы (*н*)	Моменты сил (*н·м*) относительно точек			
	A	*B*	*C*	*D*
$\overline{P}_1$	0	−28,2	−6,05	−51,6
$\overline{P}_2$	85,5	0	−18,2	−71,6
$\overline{P}_3$	−15	−15	0	−15
$\overline{P}_4$	0	0	−12,5	0
$\overline{P}_5$	88	40	40	0

§ 12-3. Определение равнодействующей произвольной плоской системы сил

Произвольную плоскую систему сил можно заменить одной силой—*главным вектором*—и одной парой сил, момент которой называется *главным моментом* (Е. М. Никитин, § 26).

Замену любой плоской системы сил главным вектором и главным моментом необходимо рассматривать как предварительную операцию перед определением равнодействующей силы или равнодействующего момента (пары сил), если система не имеет равнодействующей.

Главный вектор по модулю и направлению соответствует геометрической сумме всех данных сил и приложен в произвольно выбранной точке — в центре приведения. Главный момент равен алгебраической сумме моментов всех данных сил относительно точки, в которой приложен главный вектор.

Задачу определения главного вектора и главного момента можно решать как графическим методом, так и аналитическим. Графический метод здесь не рассматривается, а аналитически решение задачи выполняется так:

1) модуль главного вектора $R_{гл}=\sqrt{X_{гл}^2+Y_{гл}^2}$,
где проекция главного вектора на ось x $X_{гл}=\Sigma X_i$
и проекция главного вектора на ось y $Y_{гл}=\Sigma Y_i$;

2) направление главного вектора, т. е. углы φ_x или φ_y, образуемые $\overline{R}_{гл}$ с осями координат, можно определить при помощи тригонометрических соотношений (см. § 4-1, п. 7 настоящего пособия);

3) знак и числовое значение главного момента определяются по формуле

$$M_{гл}=\sum M_0(\overline{P}_i),$$

где $M_0(\overline{P}_i)$ — моменты последовательно всех сил относительно одной и той же точки — точки, выбранной для приложения главного вектора — центра приведения.

В частном случае, как это показано в задачах 61-12 и 62-12, плоскую систему сил можно привести либо только к одной силе — равнодействующей, либо только к одной паре сил — равнодействующему моменту.

Замена главного вектора $\overline{R}_{гл}$ и главного момента $M_{гл}$ равнодействующей $\overline{R}$ (Е. М. Никитин, § 28) представляет операцию, обратную приведению силы к точке. Приводя силу к любой точке, не расположенной по линии ее действия, получаем силу и пару (Е. М. Никитин, § 25). Теперь необходимо от силы и пары перейти к одной эквивалентной им силе.

На рис. 75 условно показана последовательность операции замены главных вектора и момента — равнодействующей:

1) на рис. 75, *а* изображены найденные $\overline{R}_{гл}$ и $M_{гл}$ некоторой плоской системы сил;

2) на рис. 75, *б* главный момент $M_{гл}$ представлен в виде пары $(\overline{R}_1, \overline{R})$ (причем, $R=R_1=R_{гл}$), расположенной так, что одна из сил $\overline{R}_1$ пары уравновешивает главный вектор $\overline{R}_{гл}$;

3) уравновешенную систему сил можно убрать и вместо $\overline{R}_{гл}$ и

$M_{гл}$ останется одна сила $\overline{R}$ — равнодействующая данной системы сил (рис. 75, *в*).

Таким образом, если плоская система сил приводится к главному вектору и главному моменту, то ее равнодействующая $\overline{R}$ численно и по направлению соответствует главному вектору: $\overline{R}=\overline{R}_{гл}$.

Но линия действия равнодействующей BC расположена от центра приведения O на расстоянии

$$l=OA=\frac{M_{гл}}{R}=\frac{\sum M_0(\overline{P}_i)}{R}.$$

Задача 61-12. К точкам A, B, C и D, образующим прямоугольник со сторонами $AB=80$ *см* и $BC=120$ *см*, приложены пять сил, как показано на рис. 76, *а*. Определить главный вектор и глав-

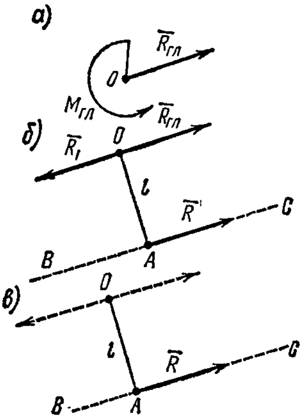


Рис. 75

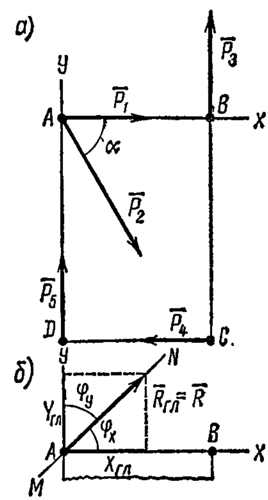


Рис. 76

ный момент этой системы сил, если $P_1=50$ *н*, $P_2=74$ *н*, $P_3=60$ *н*, $P_4=40$ *н*, $P_5=51$ *н* и угол $\alpha=60°$. При определении главного момента центр приведения выбрать наиболее рациональным образом.

Решение.

1. Примем за центр приведения точку A (в этой точке пересекаются линии действия трех сил из пяти) и ее же примем за начало координат, совместив ось x со стороной AB прямоугольника, а ось y — со стороной DA.

2. Найдем проекции всех заданных сил на ось x:

$$X_1=P_1=50;\quad X_2=P_2\cos\alpha=74\cdot\cos 60°=37;$$
$$X_3=0;\quad X_4=-P_4=-40;\quad X_5=0.$$

3. Найдем проекции всех заданных сил на ось y:

$$Y_1 = 0; \quad Y_2 = -P_2 \sin\alpha = -74 \sin 60^\circ = -64;$$
$$Y_3 = P_3 = 60; \quad Y_4 = 0; \quad Y_5 = P_5 = 51.$$

4. Найдем проекции главного вектора на оси x и y:

$$X_{\text{гл}} = \sum X_i = 50 + 37 - 40 = 47;$$
$$Y_{\text{гл}} = \sum Y_i = -64 + 60 + 51 = 47.$$

5. Как видно, проекции получаются положительными и равными между собой. Это значит, что главный вектор направлен под углом 45° к каждой из осей, т. е.

$$\varphi_x = \varphi_y = 45^\circ$$

и модуль главного вектора

$$R_{\text{гл}} = X_{\text{гл}} \sqrt{2} = 47 \sqrt{2} = 66{,}5 \ н.$$

Вектор $\overline{R}_{\text{гл}}$ приложен в точке A, принятой за центр приведения (рис. 76, *б*).

6. Находим главный момент, для этого предварительно определим моменты всех заданных сил относительно центра приведения (точки A);

$$M_A(\overline{P}_1) = 0;$$
$$M_A(\overline{P}_2) = 0;$$
$$M_A(\overline{P}_3) = P_3 \cdot AB = 60 \cdot 0{,}8 = 48 \ н \cdot м;$$
$$M_A(\overline{P}_4) = -P_4 \cdot AD = -40 \cdot 1{,}2 = -48 \ н \cdot м;$$
$$M_A(\overline{P}_5) = 0.$$

Главный момент $M_{\text{гл}} = \sum M_A(\overline{P}_i) = 48 - 48 = 0$.

Таким образом, вследствие удачного выбора центра приведения сразу определяется равнодействующая $\overline{R}$: ее модуль $R = 66{,}5$ *н*, линия ее действия MN проходит через точку A под углом $\varphi_x = 45^\circ$ к стороне AB.

Если за центр приведения выбрать другую точку, то главный момент не получится равным нулю, кроме тех случаев, когда выбранная точка оказывается на линии действия равнодействующей.

Задача 62-12. К вершинам квадрата $ABCD$ приложены шесть сил, как показано на рис. 77 *а*. Сторона квадрата 1 *м*, модули сил $P_1 = P_4 = 100$ *н*, $P_2 = 40$ *н*, $P_3 = P_5 = 113{,}4$ *н* и $P_6 = 120$ *н*.

Определить главный вектор и главный момент данной системы сил относительно точки D.

Решение.

1. Поместим начало осей координат в точке D (см. рис. 77, *а*).

2. Найдем проекции всех сил на ось x:

$$X_1 = 0; \quad X_2 = P_2 = 40;$$
$$X_3 = -P_3 \sin\alpha = -113{,}4 \sin 45^\circ = -80; \quad X_4 = 0;$$
$$X_5 = -P_5 \cos\alpha = -113{,}4 \cos 45^\circ = -80; \quad X_6 = P_6 = 120.$$

3. Найдем проекции всех сил на ось y:

$$Y_1 = -P_1 = -100; \quad Y_2 = 0;$$
$$Y_3 = -P_3 \cos\alpha = -113{,}4 \cos 45° = -80; \quad Y_4 = P_4 = 100;$$
$$Y_5 = P_5 \sin\alpha = 113{,}4 \sin 45° = 80; \quad Y_6 = 0.$$

4. Определим проекции главного вектора:

$$X_{гл} = \sum X_i = 40 - 80 - 80 + 120 = 0$$

и

$$Y_{гл} = \sum Y_i = -100 - 80 + 100 - 80 = 0.$$

Обе проекции главного вектора равны нулю, значит $\overline{R}_{гл} \doteq 0$ и данную систему сил привести к равнодействующей нельзя.

5. Найдем главный момент, определив предварительно моменты всех заданных сил относительно центра приведения D. Так как в точке D пересекаются линии действия сил $\overline{P}_1$, $\overline{P}_3$ и $\overline{P}_6$, то

$$M_D(\overline{P}_1) = 0; \quad M_D(\overline{P}_3) = 0 \quad \text{и} \quad M_D(\overline{P}_6) = 0.$$

Остается найти моменты лишь трех сил:

$$M_D(\overline{P}_2) = -P_2 \cdot DA = -40 \cdot 1 = -40;$$
$$M_D(\overline{P}_4) = P_4 \cdot DC = 100 \cdot 1 = 100;$$
$$M_D(\overline{P}_5) = P_5 \frac{DB}{2} = P_5 \cdot DC \sin\alpha =$$
$$= 113{,}4 \cdot 1 \cdot \sin 45° = 80.$$

И теперь

$$M_{гл} = \sum M_D(\overline{P}_i) = -40 + 100 + 80 = 140 \ н \cdot м.$$

Как видно, система сил приводится к паре сил с моментом (рис. 77, *б*)

$$M = 140 \ н \cdot м.$$

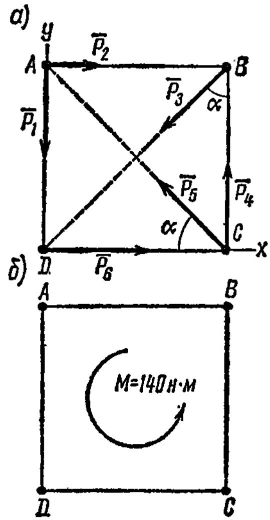


Рис. 77

В случае когда главный вектор системы сил равен нулю, центр приведения (центр моментов) при определении главного момента значения не имеет. Один и тот же результат получим при любом другом центре моментов.

Если в данной задаче при определении главного момента принять за центр моментов, например, точку B, то

$$M_{гл} = \sum M_B(\overline{P}_i) = P_1 \cdot BA - P_5 \frac{BD}{2} + P_6 \cdot BC,$$

после подстановки числовых значений

$$M_{гл} = 100 \cdot 1 - 113{,}4 \cdot 1 \cos 45° + 120 \cdot 1 = 100 - 80 + 120 = 140 \ н \cdot м.$$

В последней задаче рассмотрена система сил, приводящаяся к паре сил. В связи с этим необходимо обратить внимание на два очень важных свойства пары:

а) алгебраическая сумма проекций сил, составляющих пару, на любую ось равна нулю;

б) алгебраическая сумма моментов сил, образующих пару относительно любой точки, лежащей в плоскости действия пары, есть величина постоянная, равная моменту пары (Е. М. Никитин, § 23).

Действительно, допустим, что на рис. 77 имеются только две силы $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_4$ (причем $P_1 = P_4 = 100$ *н*). При любом расположении осей x и y

$$X_1 + X_4 = 0 \text{ и } Y_1 + Y_4 = 0.$$

(Рекомендуется проверить самостоятельно справедливость этих равенств при расположении осей, заданном на рис. 77, а также совместив оси x и y с диагоналями квадрата $ABCD$.) При любом положении центра моментов

$$M(\bar{P}_1) + M(\bar{P}_4) = 100 \text{ н} \cdot \text{м}.$$

(Рекомендуется проверить и это равенство, приняв за центр моментов любую из точек A, B, C, D или точку пересечения диагоналей квадрата, или любую другую.)

Именно поэтому пара сил, действующая на тело, обычно задается в виде момента и изображается круговой стрелкой, показывающей направление действия момента.

Отмеченные здесь свойства пары постоянно используются при составлении уравнений равновесия в задачах, рассмотренных в § 14-3:

а) при составлении уравнений проекций силы, образующие пару, не учитываются (сумма их проекций всегда равна нулю);

б) при составлении уравнений моментов момент пары сил входит в уравнение независимо от того, где выбран центр моментов.

Задача 63-12. К четырем точкам тела, образующим квадрат $ABCD$ со стороной 1,2 *м* приложены силы $P_1 = 5$ *кн*, $P_2 = 2$ *кн*, $P_3 = 3$ *кн* и $P_4 = 4$ *кн*, как показано на рис. 78, *а*. Определить равнодействующую этой системы сил.

Решение.

1. За центр приведения примем точку A. Оси координат совместим со сторонами AB и AD квадрата $ABCD$ (рис. 78, *а*).

2. Найдем проекции сил на ось x:

$$X_1 = P_1 = 5; \quad X_2 = 0; \quad X_3 = -P_3 = -3; \quad X_4 = 0.$$

3. Найдем проекции сил на ось y:

$$Y_1 = 0; \quad Y_2 = P_2 = 2; \quad Y_3 = 0; \quad Y_4 = -P_4 = -4.$$

4. Найдем проекции главного вектора на оси x и y:

$$X_{\text{гл}} = \Sigma X_i = 5 - 3 = 2;$$
$$Y_{\text{гл}} = \Sigma Y_i = 2 - 4 = -2.$$

5. Найдем главный вектор. Обе проекции численно равны друг другу. Значит модуль главного вектора

$$R_{\text{гл}} = \sqrt{X_{\text{гл}}^2 + Y_{\text{гл}}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} = 2{,}83 \text{ кн}.$$

Так как проекция на ось x положительна, а на ось y отрицательна, то главный вектор расположен в четвертом координатном

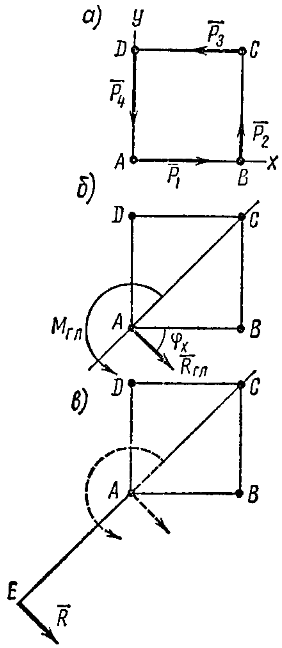


Рис. 78

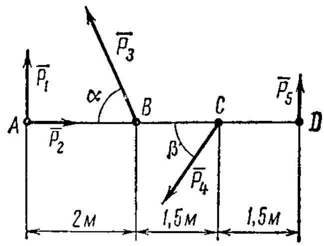


Рис. 79

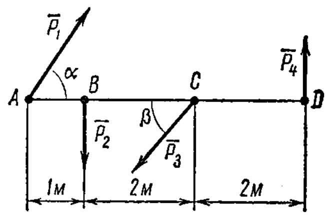


Рис. 80

углу и делит его своей линией действия пополам, т. е. угол, образуемый $\overline{R}_{\text{гл}}$ с положительным направлением оси x, $\varphi_x = -45°$ (рис. 78, *б*).

6. Найдем главный момент. Так как относительно точки A (центра приведения) моменты сил $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_4$ равны нулю, то

$$M_{\text{гл}} = M_A(\overline{P}_2) + M_A(\overline{P}_3) = P_3 \cdot AB + P_3 \cdot AD$$

или

$$M_{\text{гл}} = 2 \cdot 1{,}2 + 3 \cdot 1{,}2 = 6 \text{ кн} \cdot \text{м}.$$

Направление действия главного момента показано на рис. 78, *б* круговой стрелкой.

7. Заменим $\overline{R}_{\text{гл}}$ и $M_{\text{гл}}$ равнодействующей силой $\overline{R}$.

Известно, что $\overline{R} = \overline{R}_{\text{гл}}$, а это значит, что их модули равны $R = R_{\text{гл}} = 2{,}83$ *кн*, линии действия обоих векторов параллельны, а векторы направлены в одну и ту же сторону. Нужно найти лишь расстояние между центром приведения и линией действия равнодействующей.

Это расстояние $AE = M_{гл}/R_{гл} = 6/2{,}83 = 2{,}12$ *м*.

Отрезок AE отложим перпендикулярно к направлению $\bar{R}_{гл}$, причем в такую сторону, чтобы приложенная к точке E равнодействующая сила $\bar{R}$ стремилась повернуть AE в направлении действия главного момента.

Таким образом, равнодействующая данных четырех сил численно равна 2,83 *кн*, направлена перпендикулярно к диагонали AC и линия ее действия находится от вершины A квадрата на расстоянии $AE = 2{,}12$ *м*.

● **Задача 64-12.** Определить равнодействующую пяти сил, приложенных к точкам A, B, C и D тела, как показано на рис. 79: $P_1 = 10$ *кн*, $P_2 = 8$ *кн*, $P_3 = 18$ *кн*, $P_4 = 14$ *кн*, $P_5 = 7$ *кн*, $\alpha = 65°$ и $\beta = 56°$.

Ответ. $R \approx 23$ *кн*, $\varphi_x = \angle(AD;\ \bar{R}) \approx 109°$.

Линия действия равнодействующей пересекает отрезок AD в точке, отстоящей от A на расстоянии 1,24 *м*.

● **Задача 65-12.** Определить равнодействующую четырех сил, приложенных к точкам A, B, C и D тела, как показано на рис. 80, если $P_1 = 606$ *н*, $P_2 = 450$ *н*, $P_3 = 500$ *н*, $P_4 = 320$ *н*, $\alpha = 58°$ и $\beta = 50°$.

Ответ. $\bar{R} = 0$.

§ 13-3. Теорема Вариньона

Из формулы, определяющей расстояние от центра приведения до линии действия равнодействующей,

$$OA = \frac{\Sigma M_0(\bar{P}_i)}{R}$$

(см. § 12-3 и рис. 75) можно вывести уравнение, выражающее теорему Вариньона для произвольной плоской системы сил:

$$R \cdot OA = \Sigma M_0(\bar{P}_i):$$

момент равнодействующей относительно любой точки равен алгебраической сумме моментов заданных сил относительно той же точки.

Теорема Вариньона находит широкое применение при решении задач по статике, в частности во всех тех задачах, где рассматривается равновесие рычага (задачи с 71-13 по 76-13).

При помощи теоремы Вариньона очень просто определяется равнодействующая какого угодно числа параллельных сил $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, ..., $\bar{P}_i$ (рис. 81).

Известно, что модуль равнодействующей любой плоской системы сил равен модулю главного вектора:

$$R = R_{гл} = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2}.$$

Но если в данном случае расположить оси проекций так, как показано на рис. 81, одну ось — перпендикулярно к силам, а другую — параллельно им, то $X_R = \sum X_i = 0$ и $R = |Y_R| = |\sum Y_i|$.

Таким образом, модуль равнодействующей параллельной системы сил равен абсолютному значению алгебраической суммы проекций сил на ось, параллельную этим силам.

Так как $X_R = 0$, то вектор равнодействующей $\overline{R}$ направлен параллельно составляющим силам. Сторона, в какую направлен $\overline{R}$, определяется по знаку $\sum Y_i$. Если у алгебраической суммы проекций получается знак «плюс», то равнодействующая направлена в сторону положительного направления оси; если получается знак «минус», то равнодействующая направлена противоположно положительному направлению оси.

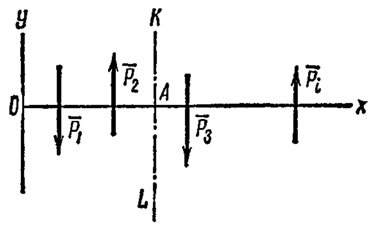


Рис. 81

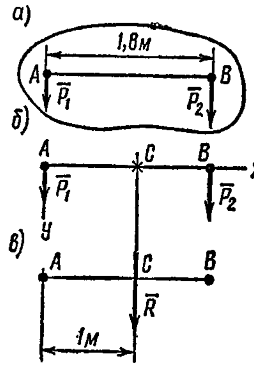


Рис. 82

Определив модуль и направление равнодействующей, по теореме Вариньона находим расстояние OA, на котором расположена KL — линия действия R от произвольно выбранного центра моментов O.

Задача 66-13. Определить равнодействующую двух параллельных сил $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$, направленных в одну сторону (рис. 82, *а*) если $P_1 = 12$ *н* и $P_2 = 15$ *н*.

Решение.

1. Примем за начало осей проекций точку A. Ось x расположим перпендикулярно к данным силам и направим ее вправо, а ось y направим вдоль силы $\overline{P}_1$, вниз (рис. 82, *б*).

2. Найдем модуль равнодействующей:

$$\sum Y_i = P_1 + P_2 = 12 + 15 = 27.$$

Следовательно, $R = 27$ *н*.

Так как сумма проекций положительна, то вектор равнодействующей направлен тоже вниз.

3. Приняв за центр моментов точку A, найдем расстояние AC от точки A до линии действия равнодействующей.

В данном случае $M_A(\overline{R}) = M_A(\overline{P}_1) + M_A(\overline{P}_2)$,

но

$$M_A(\overline{R}) = -R \cdot AC; \ M_A(\overline{P}_1) = 0 \text{ и } M_A(\overline{P}_2) = -P_2 \cdot AB,$$

поэтому $R \cdot AC = P_2 \cdot AB$. Откуда $AC = P_2 \cdot AB/R = 15 \cdot 1{,}8/27 = 1$ *м*.

Таким образом, равнодействующая двух данных сил численно равна 27 *н*, и линия ее действия расположена от точки A на расстоянии $AC = 1$ *м* (рис. 82, *в*).

Задача 67-13. Найти равнодействующую двух параллельных сил $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$, направленных в разные стороны, если $P_1 = 12$ *кн* и $P_2 = 60$ *кн* (рис. 83, *а*).

Решение.

1. Расположим оси Ox и Oy так, как показано на рис. 83, *б*.
2. Найдем модуль равнодействующей:

$$\sum X_i = P_1 - P_2 = 12 - 60 = -48.$$

Следовательно, $R = 48$ *н*.

Сумма проекций заданных сил имеет отрицательное значение. Следовательно, равнодействующая направлена влево (ось Ox направлена вправо).

3. Приняв за центр моментов точку O и предположив, что линия действия $\overline{R}$ пересекает отрезок OB в точке A, составим уравнение Вариньона:

$$R \cdot OA = -P_1 \cdot OB.$$

Отсюда

$$OA = -\frac{P_1 \cdot OB}{R} = -\frac{12 \cdot 1}{48} = -0{,}25 \text{ м}.$$

Числовое значение OA получается отрицательным, значит этот отрезок от точки O необходимо отложить в противоположную сторону от ранее предполагаемого.

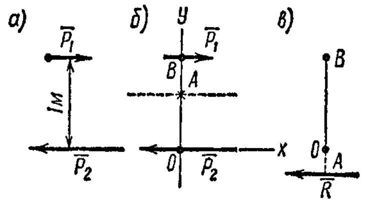


Рис. 83

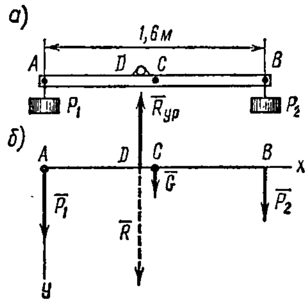


Рис. 84

Равнодействующая заданных сил численно равна 48 *н*, направлена влево, и линия ее действия лежит ниже точки O на 0,25 *м* (рис. 83, *в*).

Задача 68-13. К концам прямолинейной однородной планки длиной 1,6 *м* и весом 5 *н* прикреплены два груза (рис. 84): слева — груз $P_1 = 20$ *н*, справа — $P_2 = 15$ *н*. В каком месте планки нужно приделать петельку, чтобы подвешенная на ней планка с грузами оставалась в горизонтальном положении?

Решение.

1. Изобразим на рис. 84, в горизонтальном положении планку AB с грузами $P_1=20$ *н* и $P_2=15$ *н*. Так как планка однородная, ее вес $G=5$ *н* приложен в середине (в точке C).

Таким образом, к планке приложена система трех параллельных сил, действующих в одну сторону (рис. 84, *б*).

2. Оси проекций расположим, как показано на рис. 84, *б*.

3. Найдем модуль равнодействующей сил $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и $\overline{G}$:

$$\sum Y_i = P_1 + G + P_2 = 20 + 5 + 15 = 40, \quad R = 40 \text{ } н.$$

Равнодействующая направлена вертикально вниз.

4. Определим, на каком расстоянии AD от точки A (левого конца планки) расположена линия действия равнодействующей:

$$-R \cdot AD = -G \cdot AC - P_2 \cdot AB.$$

Отсюда

$$AD = \frac{G \cdot AC + P_2 \cdot AB}{R} = \frac{5 \cdot 0{,}8 + 15 \cdot 1{,}6}{40} = 0{,}7 \text{ } м.$$

Линия равнодействующей проходит через точку D на расстоянии 0,7 *м* от левого конца планки.

В этом месте и необходимо прикрепить к планке петельку. Если теперь за петельку подвесить планку на гвоздь или прикрепить к нити, то планка будет находиться в равновесии, оставаясь горизонтальной, так как равнодействующая $\overline{R}$ уравновесится реакцией $\overline{R}_{ур}$ гвоздя или нити.

Задача 69-13. Балансир AB, на который действуют пять горизонтально направленных параллельных сил (рис. 85), должен находиться в равновесии в вертикальном положении, будучи насаженным на горизонтальную ось.

Определить, где необходимо поместить ось балансира, пренебрегая его весом.

Решение.

1. Расположив оси проекций, как указано на рис. 85, найдем модуль равнодействующей системы параллельных сил:

$$\sum X_i = P_1 - P_2 + P_3 + P_4 - P_5 = 10 - 16 + 15 + 8 - 8 = 9; \quad R = 9 \text{ } кн.$$

Таким образом, равнодействующая направлена вправо.

2. Определим расстояние BO от нижнего конца балансира до линии действия $\overline{R}$ из уравнения Вариньона (центр моментов в точке B):

$$-R \cdot BO = -P_1 \cdot BA + P_2 \cdot BC - P_3 \cdot BD - P_4 \cdot BE.$$

Отсюда

$$BO = \frac{P_1 \cdot BA - P_2 \cdot BC + P_3 \cdot BD + P_4 \cdot BE}{R},$$

$$BO = \frac{10 \cdot 90 - 16 \cdot 70 + 15 \cdot 40 + 8 \cdot 25}{9} = 64{,}5 \text{ } см.$$

Следовательно, линия действия равнодействующей пересекает находящийся в вертикальном положении балансир на расстоянии 64,5 *см* от нижнего конца *B*. Здесь (в точке *O*) и нужно поместить ось балансира.

● **Задача 70-13.** Где необходимо поместить ось балансира, описанного в предыдущей задаче, если силу $P_3 = 15$ *кн* направить в противоположную сторону?

Ответ. $BO = 29{,}5$ *см.*

Задачи, приведенные ниже, решаются при помощи так называемого условия равновесия рычага, непосредственно вытекающего из теоремы Вариньона (Е. М. Никитин, § 29).

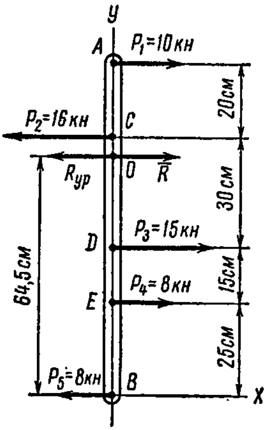


Рис. 85

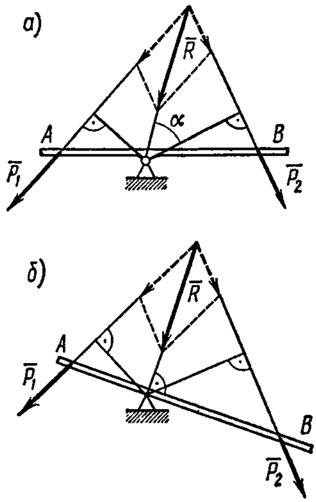


Рис. 86

Рычагом можно назвать любое тело, поворачивающееся либо вокруг закрепленной оси, либо около линии контакта, образующейся при свободном опирании на другое тело.

Находясь под действием сил, рычаг уравновешен лишь в том случае, если линия действия равнодействующей пересекает ось или линию опоры. Причем если опорой рычага *AB* служит закрепленная ось (неподвижный шарнир), то линия действия равнодействующей может быть направлена к рычагу под любым углом α (рис. 86, *а*). Если же рычаг *AB* свободно опирается на идеально гладкую опору (рис. 86, *б*), то линия действия равнодействующей должна быть перпендикулярна к опорной поверхности.

В любом из этих случаев равновесие возникает потому, что система сил, действующих на рычаг, уравновешивается реакцией опоры $\bar{R}_{\text{ур}}$, численно равной равнодействующей. А так как момент равнодействующей относительно опоры равен нулю, то из выражения теоремы Вариньона следует уравнение

$$\sum M_{\text{оп}}(\overline{P}_i)=0,$$

выражающее условие равновесия рычага.

Задача 71-13. Масса неоднородного стержня составляет 4,5 *кг*. Для определения положения центра тяжести стержня его левый конец положен на гладкую опору, а правый зацеплен крюком динамометра (рис. 87, *а*). При горизонтальном положении стержня динамометр показывает усилие 1,8 *кГ*. Расстояние $AB=130$ *см* от левой опоры до динамометра определено путем непосредственного измерения. Определить положение центра тяжести стержня.

Решение.

1. Рассмотрим стержень как рычаг с опорой в точке A. Кроме реакции опоры, на него действуют две нагрузки: сила тяжести

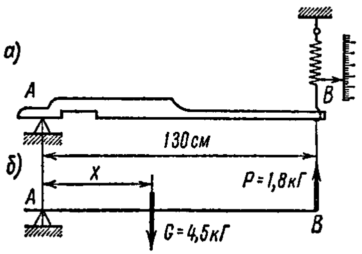


Рис. 87

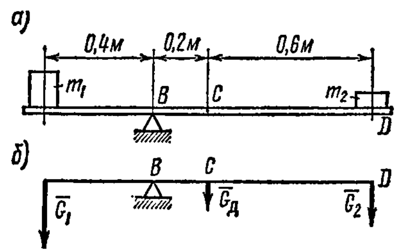


Рис. 88

$G=4{,}5$ *кГ* (1 *кг* массы притягивается к земле силой, равной 1 *кГ*), приложенный в центре тяжести на искомом расстоянии x от опоры A, и усилие пружины динамометра $P=1{,}8$ *кГ* (рис. 87, *б*).

2. Составим уравнение равновесия рычага:

$$\sum M_A(\overline{P}_i)=0.$$

В данном случае относительно точки A моменты создают две силы $\overline{P}$ и $\overline{G}$: $M_A(\overline{P})=+P\cdot AB$ и $M_A(\overline{G})=-Gx$.

Следовательио, $P\cdot AB-Gx=0$.

Решаем полученное уравнение:

$$x=\frac{P\cdot AB}{G}=\frac{1{,}8\cdot 130}{4{,}5}=52 \text{ см}.$$

Центр тяжести стержня расположен на расстоянии 52 *см* от левой опоры.

Задача 72-13. Какова должна быть масса однородной доски (рис. 88, *а*), чтобы, опираясь в точке B на гладкую опору, она с положенными на нее грузами $m_1=100$ *кг* и $m_2=48$ *кг* находилась в равновесии? Центр тяжести доски расположен в точке C.

Решение.

1. Рассматривая доску как рычаг, видим, что на нее действуют три нагрузки: вес левого груза $G_1=m_1g$, вес правого груза $G_2=m_2g$ и собственный вес доски $G_{\text{д}}=m_{\text{д}}g$ (рис. 88, *б*).

2. Для равновесия доски необходимо, чтобы алгебраическая сумма моментов этих сил относительно опоры B равнялась нулю. Следовательно,

$$G_1 \cdot BA - G_д \cdot BG - G_2 \cdot BD = 0.$$

3. Подставив вместо весов их выражения через массы и разделив обе части равенства на постоянную величину g (ускорение свободного падения 9,81 *м/сек*^{2}), получим

$$m_1 \cdot BA - m_д \cdot BC - m_2 \cdot BD = 0.$$

4. Отсюда находим массу доски:

$$m_д = \frac{m_1 \cdot BA - m_2 \cdot BD}{BC} = \frac{100 \cdot 0{,}4 - 48 \cdot 0{,}8}{0{,}2} = 8 \text{ кг}.$$

Задача 73-13. Предохранительная заслонка открывается в тот момент, когда давление в резервуаре превышает внешнее атмосферное на $p = 150$ *кн/м*^{2}. Заслонка прижимается к отверстию в резервуаре коленчатым рычагом ABC (рис. 89). На каком расстоянии x от опоры рычага необходимо поместить груз весом $G = 120$ *н*, чтобы заслонка открылась при заданном давлении, если площадь отверстия в резервуаре $F = 20$ *см*^{2}, $a = 12$ *см*. Весом рычага пренебречь.

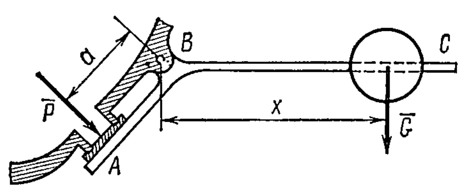


Рис. 89

Решение.

1. На рычаг ABC предохранительного устройства действуют две нагрузки: вес груза $G = 120$ *н* и сила P, открывающая заслонку:

$$P = pF = 150 \text{ кн/м}^2 \cdot \frac{20}{10^4} \text{ м}^2 = 0{,}3 \text{ кн} = 300 \text{ н}.$$

2. Условие равновесия рычага выразится уравнением

$$Pa - Gx = 0.$$

3. Решая это уравнение, находим

$$x = Pa/G = 300 \cdot 12/120 = 30 \text{ см}.$$

Груз необходимо поместить на расстоянии 30 *см* от опоры B.

Задача 74-13. На рис. 90, *а* изображен коленчатый рычаг ABC, к короткому колену которого при помощи нити прикреплен груз массой $m_1 = 50$ *кг*, а к длинному — груз массой $m_2 = 10$ *кг*.

Под каким углом α к длинному колену необходимо расположить вторую нить, чтобы нить, удерживающая первый груз, образовала с AB угол 30°? Расстояния $AB = 0{,}4$ *м* и $BC = 1$ *м*.

Считать, что при этом положении рычага линия действия собственного веса рычага $\overline{G}_р$ проходит через ось B опорного шарнира рычага.

Решение.

1. На рис. 90, *б* изобразим расчетную схему рычага; к точке A отвесно приложен вес первого груза $G_1 = m_1 g$; к точке C под искомым углом α к CB приложен вес второго груза $G_2 = m_2 g$. Вес рычага приложен в точке B.

2. Замечая, что $M_B(\overline{G}_p) = 0$ (так как плечо силы $\overline{G}_p$ равно нулю), составим уравнение равновесия рычага: $G_1 \cdot BD - G_2 \cdot BE = 0$.

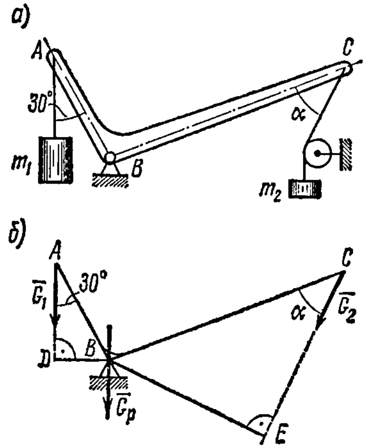


Рис. 90

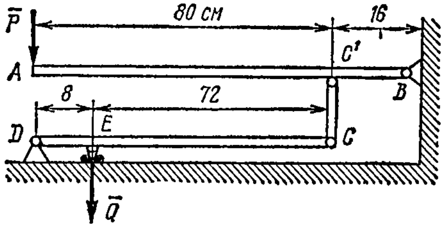


Рис. 91

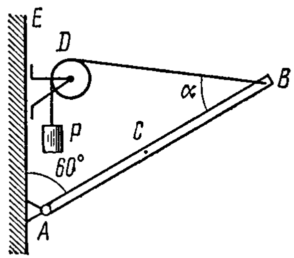


Рис. 92

3. Выразив плечи BD и BE через длины колен рычага, а веса G_1 и G_2 — через массы, получим уравнение

$$m_1 g \cdot BA \cdot \sin 30° - m_2 g \cdot BC \cdot \sin \alpha = 0,$$

из которого

$$\sin \alpha = \frac{m_1 BA \sin 30°}{m_2 BC} = \frac{50 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5}{10 \cdot 1} = 1.$$

Этому значению $\sin \alpha$ соответствует прямой угол. Следовательно,

$$\alpha = \pi/2 \ \textit{рад} = 90°.$$

Поэтому нить, удерживающую второй груз, нужно расположить перпендикулярно к длинному колену рычага.

● **Задача 75-13.** С помощью двух рычагов AB и CD (рис. 91), соединенных тяжем $C'C$, необходимо создать силу нажатия $Q = 5{,}4$ *кн* (550 *кГ*). Какую силу P следует приложить к концу A верхнего рычага?

Ответ: 90 *н* (9,2 *кГ*).

● **Задача 76-13.** Однородный стержень AB длиной 2 *м* и весом 100 *н* прикреплен шарниром A к вертикальной стене AE (рис. 92).

Под каким углом α к стержню должна быть направлена веревка с грузом $P = 50$ *н* на конце, перекинутая через блок D, чтобы стержень находился в равновесии, образуя со стеной угол 60°. Трением на блоке пренебречь.

Ответ. $\alpha = 60$ или 120°.

§ 14-3. Равновесие произвольной плоской системы сил

Задача на равновесие произвольной плоской системы сил решается по той же общей схеме, которая приведена в § 8-2. Придерживаясь этой схемы, необходимо учитывать следующее.

Как известно, любую плоскую систему сил можно привести к главному вектору $\bar{R}_{гл}$ и главному моменту $M_{гл}$ (Е. М. Никитин, § 26).

Если же система сил уравновешена (тело, находящееся под действием такой системы сил, либо неподвижно, либо равномерно вращается около неподвижной оси, либо находится в равномерном и прямолинейном поступательном движении), то $\bar{R}_{гл} = 0$ и $M_{гл} = 0$ (Е. М. Никитин, § 30). Эти равенства выражают два необходимых и достаточных условия равновесия любой системы сил.

Для произвольной плоской системы сил из этих двух условий непосредственно получаем три уравнения равновесия:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0; \\ &\sum Y_i = 0; \\ &\sum M_0(\bar{P}_i) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Первое и второе выражения — уравнения проекций — образуются из условия $\bar{R}_{гл} = 0$; третье выражение — уравнение моментов — из условия $M_{гл} = 0$.

Если на тело действует система параллельных сил, то уравнений равновесия получится только два: уравнение проекций на ось, параллельную силам, и уравнение моментов

$$\left.\begin{aligned} &\sum Y_i = 0; \\ &\sum M_0(\bar{P}_i) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

При решении некоторых задач одно или оба уравнения проекций целесообразно заменить уравнениями моментов относительно каких-либо точек, т. е. систему уравнений равновесия можно представить в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0; \\ &\sum M_A(\bar{P}_i) = 0; \\ &\sum M_B(\bar{P}_i) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

или

$$\left.\begin{aligned}\sum M_A(\overline{P}_i)=0;\\ \sum M_B(\overline{P}_i)=0;\\ \sum M_C(\overline{P}_i)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

В первом случае линия, проходящая через точки A и B, не перпендикулярна к оси x. Во втором случае центры моментов A, B и C не лежат на одной прямой линии.

Для системы параллельных сил соответственно получаем два уравнения моментов:

$$\left.\begin{aligned}\sum M_A(\overline{P}_i)=0;\\ \sum M_B(\overline{P}_i)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

В этом случае точки A и B не лежат на прямой, параллельной силам.

В задачах, решаемых при помощи уравнений равновесия, обычно рассматриваются тела, находящиеся в состоянии покоя, тогда система сил, действующих на это тело, уравновешена.

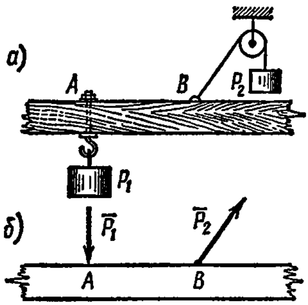


Рис. 93

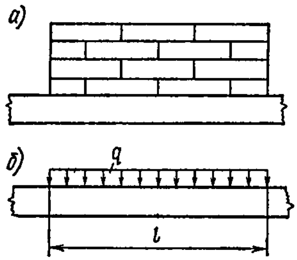


Рис. 94

Силы, действующие на тело, делятся на две группы. Одна группа сил называется нагрузками (активные силы), вторая группа сил называется реакциями связей (пассивные силы).

Нагрузки, как правило, бывают заданы. Они имеют числовое значение, точку приложения к телу и направление их действия.

В рассматриваемых ниже задачах используются лишь три разновидности нагрузок: сосредоточенные силы, равномерно распределенные силы* и пары сил (статические моменты)**.

Сосредоточенными называются силы, приложенные к точке тела. Если, например, на тело действуют нагрузки P_1 или P_2, как показано на рис. 93, *а*, действия этих нагрузок можно считать прило-

---

* К распределенным нагрузкам относятся также неравномерно распределенные нагрузки, но в настоящем пособии они не рассматриваются.

** Здесь не рассматриваются случаи, когда пары сил действуют на некотором расстоянии непрерывной цепочкой моментов (распределенные моменты).

женными соответственно к точкам A или B тела и на расчетных схемах изобразить так, как это выполнено на рис. 93, *б*.

Равномерно распределенные нагрузки, например кирпичная кладка (рис. 94, *а*), или собственный вес однородного тела (бруса, балки) постоянного поперечного сечения по всей его длине задается при помощи двух параметров — интенсивности q и длины l, на протяжении которой они действуют. На расчетных схемах эти нагрузки изображаются так, как показано на рис. 94, *б*.

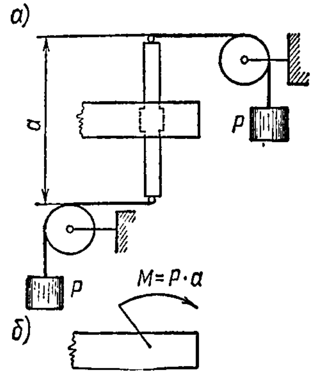


Рис. 95

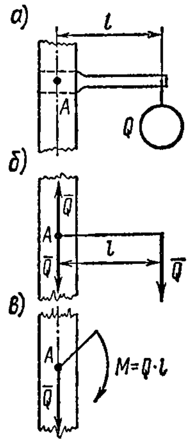


Рис. 96

Пара сил (сосредоточенный момент), например, может быть образована двумя одинаковыми грузами P, действующими на тело так, как показано на рис. 95, *а*. Условное изображение пары сил, действующей на тело, показано на рис. 95, *б*.

Очень часто в каком-либо месте тела возникает совместное действие сосредоточенной силы и момента. Пусть, например, груз Q подвешен на конце бруса, жестко заделанного другим концом в каком-либо теле (рис. 96, *а*). Если перенести действие силы в точку A тела (рис. 96, *б*), то получим в ней совместное действие сосредоточенной силы и момента.

Как правило, в задачах по статике реакции связей — искомые величины. Для каждой искомой реакции связи обычно необходимо знать ее направление и числовое значение (модуль).

Направления реакций идеальных связей — связей без трения — определяют в зависимости от вида связи по следующим правилам.

1. При свободном опирании тела на связь реакция связи направлена от связи к телу перпендикулярно либо к поверхности тела ($\overline{R}_A$, $\overline{R}_D$; рис. 97), либо к поверхности связи ($\overline{R}_B$, $\overline{R}_C$; рис. 97), либо к общей касательной обеих поверхностей ($\overline{R}_E$; рис. 97).

Во всех этих случаях связь препятствует движению тела в одном направлении — перпендикулярном к опорной поверхности.

2. Если связями являются нити, цепи, тросы (гибкая связь), то они препятствуют движению тела только будучи натянутыми. Поэтому реакции нитей, цепей, тросов всегда направлены вдоль их самих в сторону от тела к связи ($\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ и $\overline{T}_3$; рис. 98).

3. Если связь тела с какой-либо опорной поверхностью осуществляется при помощи подвижного шарнира (рис. 99), то его реакция направлена перпендикулярно к опорной поверхности. Таким образом, подвижный шарнир (т. е. шарнир, ось которого может передвигаться вдоль опорной поверхности) представляет собой конструктивный вариант свободного опирания.

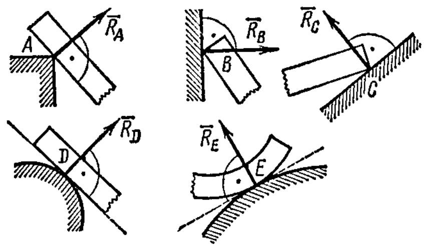


Рис. 97

4. Если соединение тела со связью осуществляется при помощи неподвижного шарнира (рис. 100), то определить непосредственно направление реакции нельзя, за исключением тех частных случаев, которые описаны ниже.

Шарнирное соединение препятствует поступательному перемещению тела во всех направлениях в плоскости, перпендикулярной к оси шарнира. Направление реакции неподвижного шарнира может быть любым в зависимости от направления действия остальных сил. Потому сначала определяют две взаимно перпендикулярные составляющие $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$ (или $\overline{X}_B$ и $\overline{Y}_B$) реакции шарнира, а затем, если нужно, по правилу параллелограмма или треугольника можно определить как модуль, так и направление полной реакции $\overline{R}_A$ (или $\overline{R}_B$).

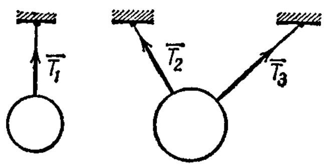


Рис. 98

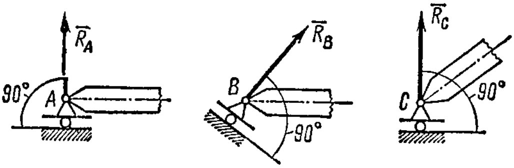


Рис. 99

Направление реакции неподвижного шарнира непосредственно определяют в двух следующих случаях:

а) если, кроме реакции шарнира, все остальные силы (нагрузки и реакция другой связи) образуют систему параллельных сил, то реакция неподвижного шарнира также параллельна всем силам;

б) если, кроме реакции шарнира, на тело действуют еще только две непараллельные силы, то линия действия реакции неподвижного шарнира проходит через ось шарнира и точку пересечения двух других сил (задачи 48-9 и 49-9).

5. Движение тела может быть ограничено жесткой заделкой в какой-либо опоре (рис. 101). В этом случае даже одна жесткая заделка обеспечивает равновесие тела при любых нагрузках.

Так же как и неподвижный шарнир, жесткая заделка препятствует поступательному перемещению тела. Поэтому направление ее реакции заранее определить нельзя и сначала определяют составляющие $\overline{X}_з$ и $\overline{Y}_з$. Кроме того, жесткая заделка препятствует повороту тела в плоскости действия сил, поэтому, кроме силы реакции, на тело действует еще момент заделки $M_з$, уравновешивающий стремление нагрузок повернуть тело (вывернуть тело из заделки).

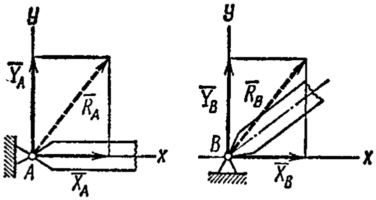


Рис. 100

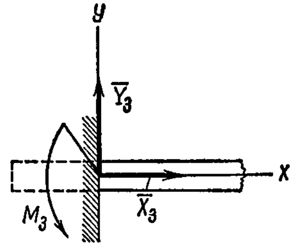


Рис. 101

Таким образом, если опорой тела является жесткая заделка, то со стороны последней на тело действуют реакция заделки, которую можно заменить двумя взаимно перпендикулярными составляющими, и момент заделки.

6. Иногда тело удерживается в равновесии при помощи жестких стержней, шарнирно соединенных с телом и с опорами (рис. 102). В отличие от гибкой связи (см. п. 2) такие стержни могут испытывать не только растяжение, но и сжатие.

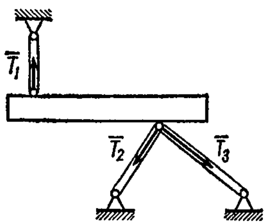


Рис. 102

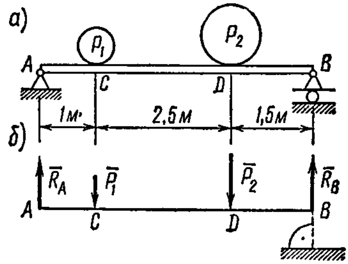


Рис. 103

Возможны и такие случаи, когда нельзя заранее установить, какие стержни растянуты, а какие сжаты. Поэтому при составлении уравнений равновесия исходят из того, что все стержни растянуты. Если же некоторые стержни окажутся в действительности сжатыми, то в результате решения числовые значения реакций таких стержней получатся отрицательными.

Задача 77-14. На горизонтальную балку AB, левый конец которой имеет шарнирно-неподвижную опору, а правый — шарнирно-подвижную, в точках C и D поставлены два груза: $P_1 = 10$ *кн* и $P_2 = 20$ *кн* (рис. 103, *а*). Определить реакции опор балки.

Решение.

1. Рассмотрим равновесие балки AB, на которую в точках C и D действуют две вертикальные нагрузки $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ (рис. 103, *б*).

2. Освободив правый конец балки от связи и заменив ее действие реакцией $\overline{R}_B$, направленной перпендикулярно к опорной поверхности, увидим, что на балку действует система параллельных сил. Поэтому, если освободить и левый конец балки от шарнирно неподвижной опоры — ее реакция будет также направлена вертикально (рис. 103, *в*).

3. Составим систему уравнений равновесия вида (5), приняв для одного уравнения за центр моментов точку A, а для другого — точку B;

$$\sum M_A(\overline{P}_i)=0; \quad -P_1\cdot AC-P_2\cdot AD+R_B\cdot AB=0, \qquad (1)$$

$$\sum M_B(\overline{P}_i)=0; \quad +P_2\cdot DB+P_1\cdot CB-R_A\cdot AB=0. \qquad (2)$$

4. Решая уравнения, из (1) находим

$$R_B=\frac{P_1\cdot AC+P_2\cdot AD}{AB}=-\frac{10\cdot 1+20\cdot 3{,}5}{5}=16 \text{ кн};$$

из (2)

$$R_A=\frac{P_2\cdot DB+P_1\cdot CB}{AB}=\frac{20\cdot 1{,}5+10\cdot 4}{5}=14 \text{ кн}.$$

5. Проверим правильность решения, составив уравнение проекций сил на вертикальную ось y:

$$\sum Y_i=0; \quad R_A-P_1-P_2+R_B=0.$$

Подставляя в это уравнение числовые значения, получаем тождество

$$14-10-20+16=0 \text{ или } 0=0.$$

Значит задача решена правильно. Реакции опор: $R_A=14$ *кн* и $R_B=16$ *кн*.

При решении задач рекомендуется не пренебрегать проверкой. От правильности определения реакций опор зависит правильность всего остального решения или расчета.

Задача 78-14. На консольную балку, имеющую в точке A шарнирно-неподвижную, а в точке B шарнирно-подвижную опору, действуют две сосредоточенные нагрузки: $P_1=18$ *кн* и $P_2=50$ *кн*, как показано на рис. 104, *а*; угол $\alpha=40°$. Определить реакции опор балки.

Решение.

1. Рассматривая находящуюся в равновесии балку AD, видим, что в точке C на нее действует вертикально вниз нагрузка $\overline{P}_1$, а в точке D под углом α к AB действует другая нагрузка $\overline{P}_2$ (рис. 104, *б*).

2. Освобождаем балку от связей и заменим их действие реакциями. В месте шарнирно-подвижной опоры B возникает вертикаль-

ная реакция $\overline{R}_B$. Направление реакции шарнирно-неподвижной опоры в данном случае непосредственно определить нельзя, поэтому заменим эту реакцию ее двумя составляющими $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$.

3. Для полученной системы из пяти сил, произвольно расположенных в плоскости, составим систему уравнений равновесия вида (3),

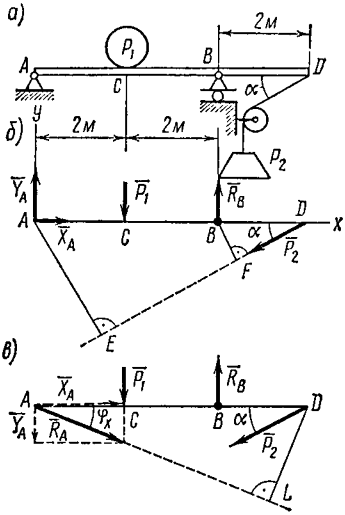


Рис. 104

расположив ось x вдоль балки, а за центры моментов приняв точки A и B:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A - P_2 \cos\alpha = 0; \tag{1}$$

$$\sum M_A(\overline{P}_i) = 0; \quad -P_1 \cdot AC + R_B \cdot AB - P_2 \cdot AE = 0; \tag{2}$$

$$\sum M_B(\overline{P}_i) = 0; \quad -Y_A \cdot BA + P_1 \cdot BC - P_2 \cdot BF = 0. \tag{3}$$

4. Решаем полученные уравнения.

Из (1)

$$X_A = P_2 \cos\alpha = 50 \cos 40^\circ = 38{,}3 \ \textit{кн}.$$

Так как $AE = AD \sin\alpha$,

то из (2)

$$R_B = \frac{P_1 \cdot AC + P_2 \cdot AD \sin\alpha}{AB} = \frac{18 \cdot 2 + 50 \cdot 6 \sin 40^\circ}{4} = 57{,}2 \ \textit{кн}.$$

Замечая, что $BF = BD \sin\alpha$,

из (3) получаем

$$Y_A = \frac{P_1 \cdot BC - P_2 \cdot BD \sin\alpha}{BA} = \frac{18 \cdot 2 - 50 \cdot 2 \sin 40^\circ}{4} = -7{,}1 \ \textit{кн}.$$

Знак минус, получившийся в последнем случае, показывает, что Y_A—вертикальная составляющая реакция неподвижного шарнира — направлена вниз, а не вверх, как предполагалось перед составлением уравнения (3).

5. При необходимости реакцию $\bar{R}_A$ шарнира A легко определить (рис. 104, *в*).

Модуль реакции шарнира A найдем из формулы

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{38,3^2 + 7,1^2} \approx 39 \text{ кн}.$$

Направление реакции $\bar{R}_A$ установим, определив угол

$$\varphi_x = \angle(\bar{R}_A;\ AD),$$

$$\sin\varphi_x = \frac{|Y_A|}{R_A} = \frac{7,1}{39} = 0,182,$$

откуда $\varphi_x = 10°30'$.

6. Проверим правильность решения задачи. Так как при решении не использовано уравнение проекций на ось y, то используем его для проверки:

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A - P_1 + R_B - P_2 \sin\alpha = 0.$$

Уравнение составлено по рис. 104, *б*.

После подстановки в это уравнение известных значений получим.

$$-7,1 - 18 + 57,2 - 50\sin 40° = 0;$$

$$-25,1 + 57,2 - 32,1 = 0 \text{ и } 0 = 0.$$

В данном случае, проверка решения при помощи уравнения проекций не дает возможности установить правильность определения полной реакции $\bar{R}_A$ шарнира A. Чтобы проверить и этот этап решения, составим уравнение моментов относительно точки D, воспользовавшись рис. 104, *в*, на котором изображена реакция так, как она направлена в действительности:

$$\sum M_D(\bar{P}_i) = 0; \quad R_A \cdot DL + P_1 \cdot DC - R_B \cdot DB = 0.$$

Подставляем в это уравнение числовые значения, имея в виду, что

$$DL = AD\sin\varphi_x = 6\sin 10°30' = 1,095 \text{ м};$$

$$39 \cdot 1,095 + 18 \cdot 4 - 57,2 \cdot 2 = 0 \text{ и } 114,7 - 114,4 \approx 0.$$

Расхождение в результатах, равное 0,3, получается из-за округлений при вычислениях.

В следующих задачах проверка решения не приводится и ее рекомендуется производить самостоятельно.

Задача 79-14. Горизонтальная балка имеет в точке A шарнирно-подвижную опору, плоскость которой наклонена к горизонту под углом $\alpha = 24°$ (рис. 105, *а*), а в точке B — шарнирно-неподвижную опору. Балка нагружена в точках C и D двумя сосредоточенными силами $P_1 = 24$ *кн* и $P_2 = 30$ *н*. Определить реакции опор.

Решение.

1. Так же как и в задаче 77-14, балка нагружена двумя параллельными силами, но в отличие от этой задачи здесь реакция подвижного шарнира $\overline{R}_A$ направлена не параллельно вертикальным нагрузкам, а под углом α к вертикали — перпендикулярно к опорной поверхности шарнира (рис. 105, *б*). Поэтому реакция неподвижного шарнира не будет направлена вертикально и, так же как в задаче 78-14, ее целесообразно заменить двумя составляющими $\overline{X}_B$ и $\overline{Y}_B$.

2. Расположив оси x и y, как показано на рис. 105, *б*, составляем уравнения равновесия вида (1):

$$\sum X_i = 0; \quad R_A \sin\alpha - X_B = 0; \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_A \cos\alpha - P_1 - P_2 + Y_B = 0; \tag{2}$$

$$\sum M_A(\overline{P}_i) = 0; \quad -P_1 \cdot AC - P_2 \cdot AD + Y_B \cdot AB = 0. \tag{3}$$

3. Решаем полученные уравнения.

Из уравнения (3) находим Y_B:

$$Y_B = \frac{P_1 \cdot AC + P_2 \cdot AD}{AB} = \frac{24 \cdot 2 + 30 \cdot 4}{6} = 28 \text{ кн.}$$

Из уравнения (2) находим R_A:

$$R_A = \frac{P_1 + P_2 - Y_B}{\cos\alpha} = \frac{24 + 30 - 28}{\cos 25^\circ} = 28{,}7 \text{ кн.}$$

Из уравнения (1) находим X_B:

$$X_B = R_A \sin\alpha = 28{,}7 \sin 25^\circ \approx 12{,}1 \text{ кн.}$$

Таким образом, реакция шарнира A $R_A = 28{,}7$ *кн*, а составляющие реакции шарнира B $X_B = 12{,}1$ *кн* и $Y_B = 28$ *кн*.

4. Проверку решения производим при помощи уравнения моментов относительно точки C или D.

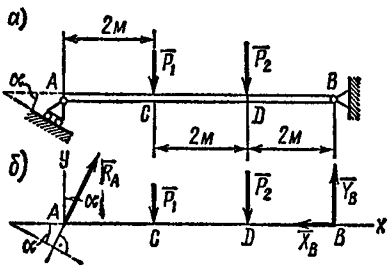


Рис. 105

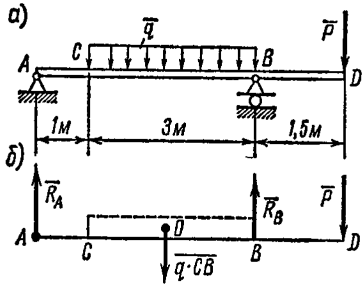


Рис. 106

● **Задача 80-14.** Решить задачу 49-9, не определяя первоначально направление реакции $\overline{R}_A$, а заменив ее составляющими $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$. Определив $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_B$, найти модуль и направление $\overline{R}_A$.

Задача 81-14. На консольную балку, имеющую в точке A шарнирно-неподвижную, а в точке B шарнирно-подвижную опору, действуют две нагрузки (рис. 106, *а*): в точке D — сосредоточенная нагрузка $P=8$ *кн*, а на участке CB — равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q=2$ *кн/м*. Определить реакции опор.

Решение.

1. В этой задаче, кроме сосредоточенной силы P, на участке CB действует равномерно распределенная сила, интенсивность которой q. Полная величина этой нагрузки (ее равнодействующая) равна $q \cdot CB$ и приложена в точке O посредине участка CB (рис. 106, *б*), т. е.

$$CO = OB = \frac{CB}{2}.$$

2. Так же как в задаче 77-14, реакция $\overline{R}_B$ подвижного шарнира направлена вертикально (перпендикулярно к опорной поверхности). Следовательно, и реакция $\overline{R}_A$ неподвижного шарнира направлена вертикально. Таким образом, на балку действует система параллельных сил (см. рис. 106, *б*).

3. Составим два уравнения моментов относительно точек B и A:

$$\sum M_B(\overline{P}_i) = 0; \quad -R_A \cdot BA + q \cdot CB \cdot BO - P \cdot BD = 0; \qquad (1)$$

$$\sum M_A(\overline{P}_i) = 0; \quad -q \cdot CB \cdot AO + R_B \cdot AB - P \cdot AD = 0. \qquad (2)$$

4. Из уравнения (1)

$$R_A = \frac{q \cdot CB \cdot OB - P \cdot BD}{BA} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1{,}5 - 8 \cdot 1{,}5}{4} = -0{,}75 \text{ кн}.$$

Отрицательное значение реакции R_A означает, что она направлена вниз, а не вверх, как показано на рис. 106, *б*, потому что момент силы P относительно опоры B больше, чем момент равномерно распределенной нагрузки.

Из уравнения (2) находим R_B:

$$R_B \frac{q \cdot CB \cdot AO - P \cdot AD}{AB} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2{,}5 + 8 \cdot 5{,}5}{4} = 14{,}75 \text{ кн}.$$

Таким образом, реакция шарнира A равна $R_A = 0{,}75$ *кн* и направлена вертикально вниз; реакция шарнира B составляет $R_B = 14{,}25$ *кн* и направлена вертикально вверх.

5. Для проверки решения можно использовать уравнение проекций на вертикальную ось.

Задача 82-14*. На двухконсольную балку с шарнирно-неподвижной опорой в точке A и с шарниро-подвижной в точке B действуют, как показано на рис. 107, *а*, сосредоточенная сила $P=10$ *кн*, сосредоточенный момент (пара сил) $M=40$ *кн·м* и равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q=0{,}8$ *кн/м*. Определить реакции опор.

---

* Перед тем как приступить к рассмотрению этой и следующих задач, необходимо вспомнить два важных свойства пары сил (см. стр. 74).

Решение.

1. В отличие от предыдущей задачи здесь, кроме сосредоточенной силы и равномерно распределенной нагрузки, равнодействующая $\overline{q \cdot AD}$ которой приложена в точке O посредине участка AD $\left(AO = OD = \frac{AD}{2} = 3{,}5\ м\right)$, на балку действует момент M, направленный по часовой стрелке (рис. 107, *б*).

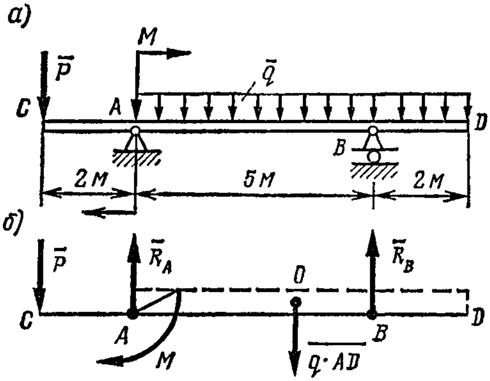


Рис. 107

2. После освобождения балки от связей и замены связей их реакциями $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ получаем уравновешенную систему, составленную из четырех параллельных сил и одной пары сил (момента).

3. Составим два уравнения моментов относительно точек B и A:

$$\sum M_B(\overline{P}_i) = 0;\quad P \cdot BC - R_A \cdot BA - M + q \cdot AD \cdot BO - 0; \qquad (1)$$

$$\sum M_A(\overline{P}_i) = 0;\quad P \cdot AC - M - q \cdot AD \cdot AO + R_B \cdot AB = 0. \qquad (2)$$

4. Решая эти уравнения, находим, что

$$R_A = 7{,}68\ кн \text{ и } R_B = 7{,}92\ кн.$$

● **Задача 83-14.** Двухконсольные балки с шарнирно-подвижной опорой в точке A и шарнирно-неподвижной опорой в точке B нагружена, как показано на рис. 108. Определить реакции опор.

Ответ. а) $R_A = 61{,}25\ кн$; $R_B = 33{,}75\ кн$; б) $R_A = 95\ кн$; $X_B = 32{,}1\ кн$; $Y_B = 18{,}4\ кн$.

Задача 84-14. Жестко заделанная у левого конца консольная балка AB (рис. 109, *а*) нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 5\ кн/м$, сосредоточенной силой $P = 12\ кн$ и моментом $M = 20\ кн \cdot м$. Определить реакции заделки.

Решение.

1. На балку действуют три нагрузки: в точке C — вертикальная сосредоточенная сила $\overline{P}$, по всей длине балки — равномерно распределенная нагрузка, которую заменим сосредоточенной силой $\overline{q \cdot AB}$,

приложенной в точке $O\left(AO=OB=\frac{AB}{2}=2\ м\right)$. Правый конец балки нагружен моментом M, действующим против хода часовой стрелки (рис. 109, *б*).

2. Равновесие балки обеспечивается жесткой заделкой у точки A. Освободив балку от связи, заменим ее действие силой — реакцией связи $\bar{R}_A$ и реактивным моментом M_A. Но так как реакцию $\bar{R}_A$ заделки сразу определить нельзя (по тем же причинам, что и на-

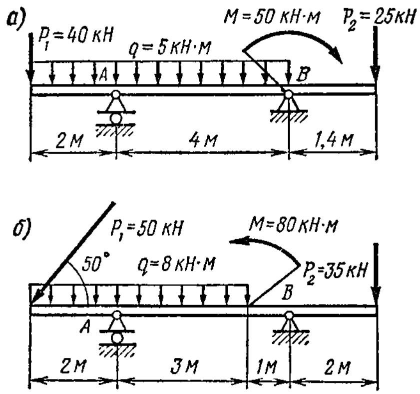


Рис. 108

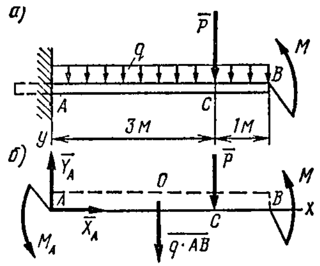


Рис. 109

правление реакции неподвижного шарнира), заменим $\bar{R}_A$ ее составляющими $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$, совместив их с осями x и y (см. рис. 109, *б*).

3. Составим уравнения равновесия — уравнение проекции на оси x и y и уравнение моментов относительно точки A:

$$\sum X_i=0;\quad X_A=0; \tag{1}$$

$$\sum Y_i=0;\quad Y_A-q\cdot AB-P=0; \tag{2}$$

$$\sum M_A(\bar{P}_i)=0;\quad M_A-q\cdot AB\cdot AO-P\cdot AC+M=0. \tag{3}$$

4. Из уравнения (1) $X_A=0$, а это означает, что горизонтальная составляющая реакции заделки $\bar{R}_A$ равна нулю, так как в данном случае нет усилий, смещающих балку AB в горизонтальном направлении.

Из уравнения (2)

$$Y_A=q\cdot AB+P=5\cdot 4+12=32\ кн.$$

Выше найдено, что $X_A=0$; значит реакция заделки $\bar{R}_A$ перпендикулярна к оси x. Следовательно,

$$R_A=Y_A=32\ кн.$$

Из уравнения (3)

$$M_A=q\cdot AB\cdot AO+P\cdot AC-M=5\cdot 4\cdot 2+12\cdot 3-20=56\,кн\cdot м.$$

Таким образом,

$$R_A = 32\ кн \text{ и } M_A = 56\ кн \cdot м.$$

5. Проверку правильности решения можно произвести при помощи уравнения моментов относительно точки C или B. В любое из них входят обе найденные величины.

● **Задача 85-14.** Консольные балки AB, жестко заделанные у левого конца, нагружены, как показано на рис. 110. Определить полные реакции заделок и реактивные моменты.

Ответ: а) $R_A = 32{,}8\ кн$; $\angle(\bar{R}_A, AB) = 90°$; $M_A = 18{,}4\ кн \cdot м$. б) $R_A = 20{,}7\ кн$; $\angle(\bar{R}_A, AB) = 164°20'$; $M_A = 31{,}6\ кн \cdot м$.

Задача 86-14. Однородный брус длиной $AB = 5\ м$ и весом $G = 400\ н$ концом A упирается в гладкий горизонтальный пол и в гладкий вертикальный выступ, а в точке D — в ребро вертикальной стенки высотой $ED = 4\ м$. В этом положении брус образует с вертикальной плоскостью стенки угол $\alpha = 35°$ (рис. 111, *а*). Определить реакции опор.

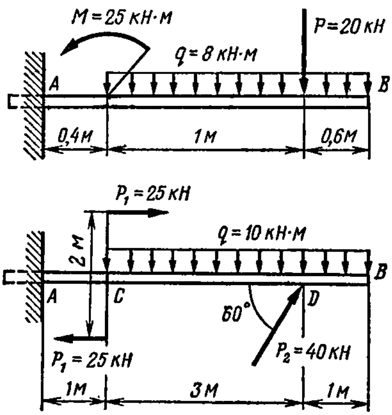


Рис. 110

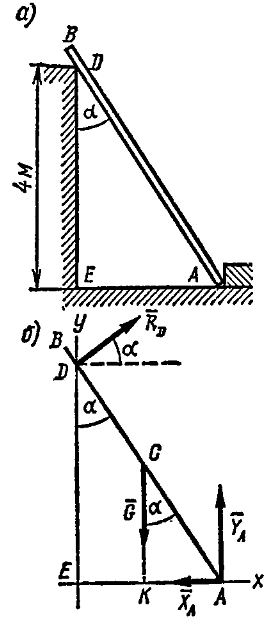


Рис. 111

Решение.

1. В отличие от предыдущих задач здесь нет ни шарнирных опор, ни жесткой заделки. Брус свободно опирается о пол, выступ и ребро стенки. Нагрузкой является только вес бруса, приложенный по его середине, так как брус однороден.

2. Освободив брус от связей, изобразим его вместе со всеми действующими на него силами (рис. 111, *б*): в точке C на брус действует его вес $\bar{G}$ $\left(BC = AC = \frac{AB}{2} = 2{,}5\ м\right)$. Пренебрегая поперечными размерами бруса, можно считать, что в точке A на брус действуют две реакции: $\bar{Y}_A$ — вертикальная реакция пола и $\bar{X}_A$ — горизонтальная реакция выступа; в точке D к брусу приложена $\bar{R}_D$

реакция стенки. В данном случае брус свободно опирается о связи, поэтому реакции связей перпендикулярны к опорным поверхностям.

3. Таким образом, на брус действуют четыре силы: $\bar{G}$, $\bar{R}_D$, $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$. Расположив оси проекций, как показано на рис. 111, *б*, и приняв за центр моментов точку A, составим уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad R_D \cos\alpha - X_A = 0; \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_D \sin\alpha - G + Y_A = 0; \tag{2}$$

$$\sum M_A(\bar{P}_i) = 0; \quad -R_D \cdot AD + G \cdot AK = 0. \tag{3}$$

4. Решаем полученную систему уравнений.

Предварительно определяем AK и AD. Из рис. 111, *б* находим, что

$$AK = AC\sin\alpha \quad \text{и} \quad AD = ED/\cos\alpha.$$

И теперь из уравнения (3):

$$R_D = \frac{G \cdot AK}{AD} = \frac{G \cdot AC \sin\alpha \cos\alpha}{ED} = \frac{400 \cdot 2{,}5 \sin 35^\circ \cos 35^\circ}{4}$$

и

$$R_D \approx 117 \textit{ н}.$$

Из уравнения (1)

$$X_A = R_D \cos\alpha = 117 \cos 35^\circ = 96 \textit{ н}.$$

Из уравнения (2)

$$Y_A = G - R_D \sin\alpha = 400 - 117 \sin 35^\circ = 333 \textit{ н}.$$

Следовательно, $X_A = 95$ *н*, $Y_A = 333$ *н* и $R_D = 117$ *н*.

5. Проверку можно произвести при помощи уравнения моментов относительно точки C.

Задача 87-14. Однородный брус AB длиной 5 *м* и весом $G = 180$ *н*, прикрепленный к вертикальной стене шарниром A, опирается в точке D на выступ, ширина которого $ED = 1{,}5$ *м*; при этом брус образует с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$. К концу B бруса прикреплена нить, перекинутая через блок и несущая на другом конце груз $P = 360$ *н* (рис. 112); угол $\beta = 40^\circ$. Определить реакцию выступа ED и полную реакцию шарнира A.

Решение 1.

1. К брусу AB приложены две нагрузки—его собственный вес $\bar{G}$ в середине бруса (так как брус однородный), действующий вертикально вниз, и к нижнему концу—сила $\bar{P}$, направленная под углом β к BA. Изобразим брус вместе с этими силами отдельно на рис. 113, *а*.

2. Брус имеет две опоры. В точке D он свободно опирается на ребро выступа ED, и поэтому реакция выступа $\bar{R}_D$ направлена перпендикулярно к брусу AB. В точке A брус имеет шарнирно-неподвижную опору, направление реакции $\bar{R}_A$ которой неизвестно.

Заменим искомую реакцию двумя составляющими $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$, допустив, что первая направлена горизонтально, а вторая — вертикально (см. рис. 113, *а*).

Таким образом, на брус AB действует уравновешенная система пяти сил $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{R}_D$, $\bar{G}$ и $\bar{P}$.

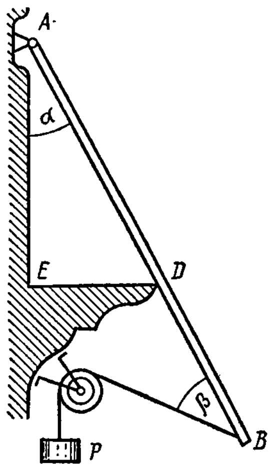


Рис. 112

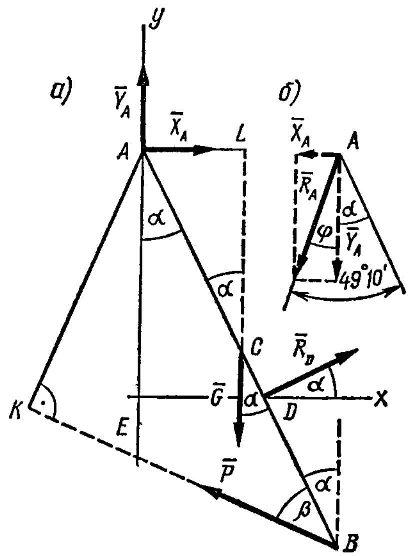


Рис. 113

3. Поместив начало осей координат в точке E и расположив их в соответствии с выбранным направлением сил $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$ горизонтально и вертикально, составим уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + R_D \cos\alpha - P\sin(\alpha+\beta) = 0; \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A - G + R_D \sin\alpha + P\cos(\alpha+\beta) = 0; \tag{2}$$

$$\sum M_A(\bar{P}_i) = 0; \quad -G\cdot AL + R_D\cdot AD - P\cdot AK = 0. \tag{3}$$

4. Находим плечи AL, AD и AK:

$$AL = AC\sin\alpha = \frac{AB}{2}\sin\alpha = \frac{5}{2}\sin 30° = 1{,}25 \text{ м},$$

$$AD = ED/\sin\alpha = 1{,}5/\sin 30° = 3 \text{ м},$$

$$AK = AB\sin\beta = 5\sin 40° = 3{,}21 \text{ м}.$$

Теперь решаем полученные уравнения.

Из уравнения (3)

$$R_D = \frac{G\cdot AL + P\cdot AK}{AD} = \frac{180\cdot 1{,}25 + 360\cdot 3{,}21}{3} = 460 \text{ н}.$$

Из уравнения (1)

$$X_A = P\sin(\alpha+\beta) - R_D\cos\alpha = 360\sin 70° - 460\cos 30° = -60 \text{ н}.$$

Из уравнения (2)

$$Y_A = G - R_D \sin\alpha - P\cos(\alpha+\beta) = 180 - 460\sin 30^\circ - \\ - 360\cos 70^\circ = -173 \ \text{н}.$$

5. Знаки «минус» у числовых значений составляющих реакции шарнира A показывают, что составляющая $\bar{X}_A$ направлена по горизонтали влево, а $\bar{Y}_A$ — по вертикали вниз, как это показано на рис. 113, *б*:

6. Находим модуль полной реакции $\bar{R}_A$ шарнира A и ее направление (угол φ на рис. 113, *б*):

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{60^2 + 173^2} = 183 \ \text{н},$$

$$\sin\varphi = \frac{|X_A|}{R} = \frac{60}{183} = 0{,}328 \ \text{и} \ \varphi = 19^\circ 10'.$$

Из рис. 113, *б* видно, что реакция шарнира A образует с брусом AB угол $(\varphi+\alpha) = 49^\circ 10'$.

Таким образом, реакция выступа перпендикулярна к брусу и равна $R_D = 460$ *н*; реакция шарнира направлена к брусу под углом $49^\circ 10'$ и равна $R_A = 183$ *н*.

Решение 2.

Так как направление и числовое значение полной реакции шарнирно-неподвижной опоры не зависят от первоначально предполагаемого выбора направления составляющих $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$, то при решении подобных задач можно расположить их как угодно.

1. Можно, например, предположить, что одна из составляющих реакции шарнира направлена вдоль бруса AB, а вторая — перпендикулярно к нему.

2. Изобразим при таком предположении силы, приложенные к брусу, на рис. 114, *а*. Расположим оси x и y, как показано на том же рисунке, и составим уравнения равновесия, приняв за центр моментов [для уравнения (3)] точку D:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + G\cos\alpha - P\cos\beta = 0; \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A - G\sin\alpha + R_D - P\sin\beta = 0; \qquad (2)$$

$$\sum M_D(\bar{P}_i) = 0; \quad -Y_A \cdot DA + G \cdot DL - P \cdot DK = 0. \qquad (3)$$

3. Найдем плечи:

$$DA = \frac{ED}{\sin\alpha} = \frac{1{,}5}{\sin 30^\circ} = 3 \ \text{м};$$

$$DL = CD\sin\alpha = (DA - CA)\sin\alpha = (3 - 2{,}5)\sin 30^\circ = 0{,}25 \ \text{м};$$

$$DK = DB\sin\beta = (AB - AD)\sin\beta = (5 - 3)\sin 40^\circ = 1{,}285 \ \text{м}.$$

Теперь решим уравнения.

Из уравнения (1)

$$X_A = P\cos\beta - G\cos\alpha = 360\cos 40^\circ - 180\cos 30^\circ = 119 \ \text{н}.$$

Из уравнения (3)

$$Y_A = \frac{G \cdot DL - P \cdot DK}{DA} = \frac{180 \cdot 0{,}25 - 360 \cdot 1{,}285}{3} = -139\ н.$$

Из уравнения (2)

$$R_D = G \sin\alpha + P \sin\beta - Y_A = 180 \sin 30^\circ + 360 \sin 40^\circ + 139 = 460\ \ н.$$

4. Как видно, реакция R_D имеет такое же значение, что и в первом решении. Составляющие реакции $\overline{R}_A$ направлены так, как показано на рис. 114, *б*. Используя этот рисунок, найдем модуль и направление (угол φ) $\overline{R}_A$:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{119^2 + 130^2} = 183\ н;$$

$$\sin\varphi = \frac{|Y_A|}{R_A} = \frac{139}{183} = 0{,}760, \quad \varphi = 49^\circ 30'.$$

Как видно, результаты получаются те же; небольшое расхождение (0,7%) в значении угла, определяющем направление реакции $\overline{R}_A$ относительно бруса AB, объясняется приближенностью вычислений.

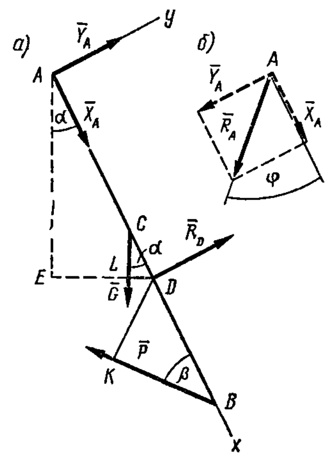


Рис. 114

● **Задача 88-14.** Однородный брус AB длиной 4 *м* и весом $G = 200$ *н*, закрепленный в точке A неподвижным шарниром, а в точке C опирающийся на ребро стены, образует с горизонтом угол $\alpha = 45^\circ$ (рис. 115). К концу B прикреплена веревка, несущая груз $P = 500$ *н*. Веревка перекинута через блок D, расположенный так, что угол, образуемый веревкой и брусом равен $\beta = 25^\circ$; $AC = 2{,}5$ *м*. Определить реакцию шарнира и стены.

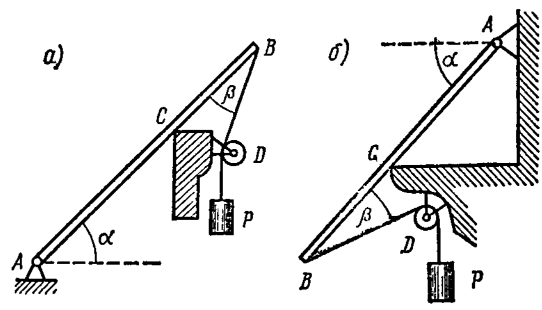


Рис. 115

Ответы:

а) $R_A = 602$ *н*; $\angle(\overline{R}_A, AB) = 9^\circ 25'$; $R_C = 451$ *н*;

б) $R_A = 327$ *н*; $\angle(\overline{R}_A, AB) = 17^\circ 30'$; $R_C = 451$ *н*.

Задача 89-14. Балка AB, нагруженная, как показано на рис. 116, *а*, удерживается в равновесии стержнями *1*, *2* и *3*, имеющими по концам шарнирные крепления. Определить реакции стержней.

При этом $P=80$ *кн*; $M=50$ *кн·м*; $q=20$ *кн/м*; $\alpha=30°$ и $\beta=40°$.

Решение 1.

1. На балку AB действуют три нагрузки: в точке A — сосредоточенная сила $\bar{P}$ и момент M, а на участке $CB=6$ *м* — равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q, которую заменим равнодействующей $\overline{q \cdot CB}$, приложенной в точке O — посредине участка CB. Следовательно (рис. 116, *б*),

$$CO=CB/2=3 \text{ м}.$$

2. Так как прямолинейные стержни при шарнирных креплениях могут только растягиваться или сжиматься, то реакции стержней направлены вдоль них. Предположим, что все стержни растянуты. Заменим их (см. рис. 116, *б*) реакциями $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ и $\bar{N}_3$.

3. Составим, как обычно, три уравнения равновесия:

$$\sum X_i=0; \quad -N_1 \sin\alpha+N_2 \sin\beta=0; \tag{1}$$

$$\sum Y_i=0; \quad -P+N_1\cos\alpha+N_2\cos\beta-q\cdot CB-N_3=0; \tag{2}$$

$$\sum M_C(\bar{P}_i)=0; \quad -M+P\cdot AC-q\cdot CB\cdot CO-N_3\cdot CD=0. \tag{3}$$

4. Из уравнения (3)

$$N_3=\frac{P\cdot AC-M-q\cdot CB\cdot CO}{CD}=\frac{80\cdot 1-50-20\cdot 6\cdot 3}{5}=-66 \text{ кн}.$$

Знак «минус» указывает на то, что стержень *3* сжат и реакция $\bar{N}_3$ направлена вверх.

Из уравнения (1) выразим N_1 через N_2:

$$N_1=N_2\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin 40°}{\sin 30°}N_2=1{,}286N_2. \tag{4}$$

Подставим полученное значение N_1 в уравнение (2) и найдем из него N_2:

$$-P+1{,}286N_2\cos\alpha+N_2\cos\beta-q\cdot CB-N_3=0,$$

$$N_2=\frac{P+q\cdot CB+N_3}{1{,}286\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{80+20\cdot 6-66}{1{,}286\cos 30°+\cos 40°}=\frac{134}{1{,}88}=71{,}3 \text{ кн}.$$

И теперь из (4) $N_1=1{,}286\cdot 71{,}3=91{,}6$ *кн*.

Таким образом, стержни *1* и *2* растянуты и их реакции $N_1=91{,}6$ *кн*, $N_2=71{,}3$ *кн*, стержень *3* сжат, его реакция $N_3=66$ *кн*.

Рассмотренное решение неудобно тем, что оно требует подстановки в одно из уравнений неизвестного из другого уравнения.

Если из числа трех опорных стержней два имеют общий шарнир, то задачу можно решить иначе. Сначала определить реакцию общего шарнира, а затем, используя правило треугольника, найти реакции сходящихся у шарнира стержней.

В рассмотренной задаче обе нагрузки действуют вертикально, а момент только стремится повернуть балку; значит нет усилий, смещающих балку в горизонтальном направлении. Поэтому аналогично тому, как указывалось в задачах 77-14, 81-14, 82-14, нагрузки могут быть уравновешены двумя реакциями, перпендикулярными к балке. А так как реакция стержня *3* перпендикулярна к балке, то и равнодействующая реакций *1* и 2 перпендикулярна к ней. На этом и основывается следующее решение.

Р е ш е н и е 2.

1. В отличие от первого решения реакции стержней *1* и *2* заменим их равнодействующей $\overline{R}_C$. Тогда расчетная схема примет вид, показанный на рис. 117, *а* (штриховыми линиями CC_1 и CC_2 показаны положения стержней *1* и *2*).

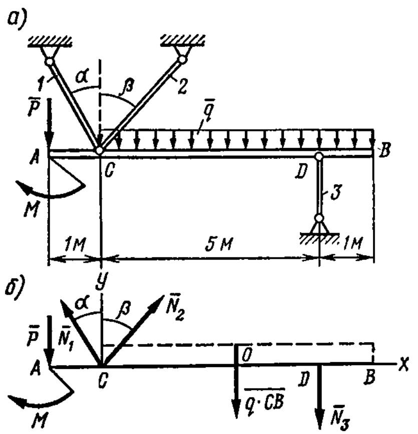


Рис. 116

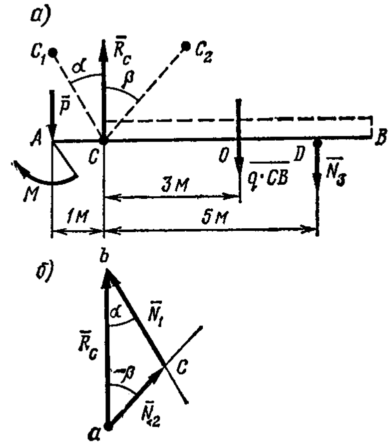


Рис. 117

2. Составим два уравнения моментов, приняв за центры моментов точки C и D:

$$\sum M_C(\overline{P}_i)=0; \quad -M+P\cdot CA-q\cdot CB\cdot CO-N_3\cdot CD=0, \qquad (1)$$

$$\sum M_D(\overline{P}_i)=0; \quad -M+P\cdot DA-R_C\cdot DC+q\cdot CB\cdot DO=0. \qquad (2)$$

3. Уравнение (1) аналогично уравнению (3) в первом решении. Решая уравнение (1), найдем, что $N_3=-66$ *кн*.

Из уравнения (2)

$$R_C=\frac{P\cdot AD-M+q\cdot CB\cdot OD}{CD}=\frac{80\cdot 6-50+20\cdot 6\cdot 2}{2}=134 \text{ кн}.$$

Таким образом, вертикальная равнодействующая реакций $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ двух первых стержней равна 134 *кн*.

4. Применив правило треугольника, разложим силу $\overline{R}_C$ на составляющие $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ (рис. 117, *б*), направления которых известны (реакции $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ направлены вдоль стержней CC_1 и CC_2).

На векторе $\overline{R}_C$ как на стороне построим треугольник *abc*, стороны *ac* и *cb* которого, изображающие искомые реакции стержней, соответственно параллельны стержням CC_2 и CC_1.

5. На основе теоремы синусов

$$\frac{N_1}{\sin\beta}=\frac{N_2}{\sin\alpha}=\frac{R_C}{\sin(\alpha+\beta)},$$

так как

$$\sin c=\sin[180^\circ-(\alpha+\beta)^\circ]=\sin(\alpha+\beta).$$

Отсюда

$$N_1=\frac{R_C\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{134\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}=91{,}6\ \text{кн}$$

и

$$N_2=\frac{R_C\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{134\sin 30^\circ}{\sin 70^\circ}=71{,}3\ \text{кн}.$$

● **Задача 90-14.** Балка AB, нагруженная, как показано на рис. 118, удерживается в равновесии в горизонтальном положении тремя стержнями с шарнирными креплениями по концам. Определить реакции стержней, если:

а) $q=12$ *кн/м*; $M=30$ *кн·м*; $\alpha=40^\circ$; $\beta=50^\circ$; $\gamma=0^\circ$;

б) $q=18$ *кн/м*; $M=60$ *кн·м*; $\alpha=20^\circ$; $\beta=35^\circ$; $\gamma=20^\circ$.

Ответы:

а) $N_1=45{,}6$ *кн* (сжат); $N_2=54{,}4$ *кн* (сжат); $N_3=1$ *кн* (растянут);

б) $N_1=76{,}5$ *кн*; $N_2\approx 45{,}0$ *кн*; $N_3=1{,}065$ *кн* (все стержни сжаты).

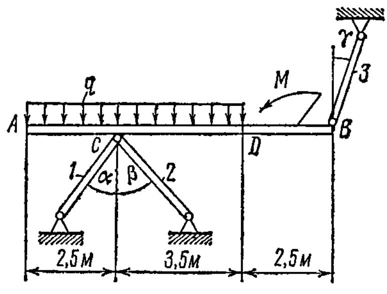


Рис. 118

§ 15-3. Равновесие с учетом сил трения

Задачи, приведенные в этом параграфе, отличаются от предыдущих тем, что в них рассматривается равновесие тел, имеющих, кроме идеальных, еще и реальные связи, т. е. связи с трением (Е. М. Никитин, § 35, 36 и 37).

При свободном опирании тела на поверхность идеальной связи реакция такой связи $\overline{R}_{\text{и. с}}$ (рис. 119, *а*) направлена перпендикулярно к ее поверхности, т. е. по нормали n к этой поверхности.

Если же тело опирается на поверхность реальной связи (в отличие от идеальных связей реальные связи условимся отмечать двойной штриховкой), то ее реакция $\overline{R}_{\text{р. с}}$ (рис. 119, *б*) в зависимости от нагрузок, приложенных к телу, отклонится от нормали n к поверхности связи на некоторый угол φ.

Поясним это общее положение следующим примером.

Наклонный брус (рис. 120, *а*), вес которого $\overline{G}$, опирается в двух точках A и B соответственно на вертикальную и горизонтальную поверхности идеальных связей. Этот брус не может находиться в равновесии, потому что три силы — вес бруса $\overline{G}$ и реакции $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ — расположенны так, что не выполняется необходимое условие равновесия трех непараллельных сил; их линии действия не пересекаются в одной точке.

Чтобы брус, показанный на рис. 120, *а*, находился в равновесии, необходимо наложить еще одну связь, например, удержать брус шнуром или упереть в выступ на горизонтальной плоскости (обе возможные связи показаны штриховыми линиями).

Теперь представим, что в точке *B* брус опирается не на идеально гладкую, а на шероховатую (реальную) поверхность (рис. 120, *б*). В этом случае брус может находиться в равновесии без дополнительной связи (шнура или упорной планки). Значит три силы — вес $\overline{G}$ и реакции опор $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ — образуют уравновешенную систему. Равновесие трех сил, действующих на брус, возможно потому, что реакция $\overline{R}_B$ реальной связи откло-

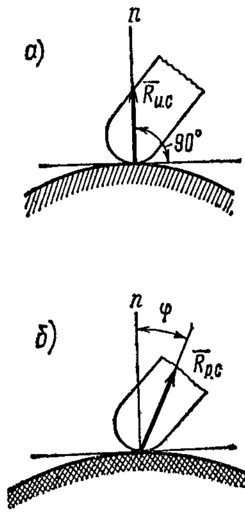


Рис. 119

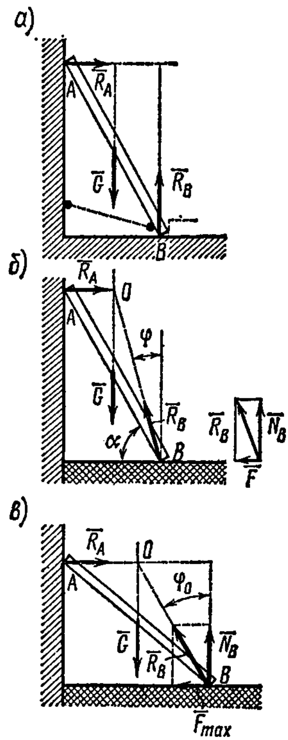


Рис. 120

няется на некоторый угол φ от нормали к поверхности связи и линии действия всех трех сил пересекаются в точке *O*.

Если реакцию $\overline{R}_B$ реальной связи разложим на две составляющие, направленные вдоль поверхности и перпендикулярно к ней (это разложение показано на рис. 120, *а* справа), то получим силу $\overline{N}_B$ — нормальную составляющую $\overline{R}_B$, численно равную силе нормального давления, производимой концом бруса на опору, и силу $\overline{F}$ — касательную составляющую реакции $\overline{R}_B$, которая называется силой трения.

При увеличении угла α, характеризующего наклон бруса относительно горизонтальной поверхности, угол φ уменьшается, а вместе с ним уменьшается и сила трения, но брус сохраняет равновесие.

Если же уменьшать угол α, то угол φ, характеризующий отклонение реакции $\overline{R}_B$ от нормали, увеличивается, а вместе с ним увеличивается и сила трения (рис. 120, *в*). При некотором наклоне бруса, определенном для данной пары соприкасающихся в точке B тел (например, для деревянного бруса, опирающегося о деревянный пол), брус скользит. Это означает, что сила трения, достигая предельного значения, больше увеличиваться не может. При этом реакция отклоняется также до предельного значения $\varphi = \varphi_0$ и при дальнейшем уменьшении угла α линия действия реакции $\overline{R}_B$ уже не попадает в точку пересечения сил $\overline{G}$ и $\overline{R}_A$.

Угол φ_0, соответствующий $\overline{F}_{\max}$ — максимальному значению силы трения, называется углом трения. Числовое значение угла трения зависит от материала соприкасающихся тел и от состояния их поверхностей.

Для случая предельного равновесия (грань между покоем и движением; § 37 в учебнике Е. М. Никитина) между силой трения и углом трения имеем такую зависимость:

$$F_{\max}/N_B = \operatorname{tg} \varphi_0.$$

Постоянное для данной пары соприкасающихся тел значение $\operatorname{tg} \varphi_0 = f$ называется коэффициентом трения при покое.

Таким образом, $F_{\max} = fN$ [формула (33) в учебнике Е. М. Никитина, § 36].

При решении задач необходимо учитывать, что сила трения направлена всегда в сторону, противоположную той, при которой тело может скользить по идеальной поверхности.

Если в число реакций связей, обеспечивающих равновесие тела, входит сила трения, то такое состояние равновесия называется самоторможением (условие самоторможения тела в общей форме изложено в конце § 37 учебника Е. М. Никитина). Во всех приведенных ниже задачах рассмотрены различные случаи самоторможения (равновесия при наличии силы трения) и условия, при которых возможно самоторможение.

Задача 91-15. Тело A массой 8 *кг* поставлено на шероховатую горизонтальную поверхность стола. К телу привязана нить, перекинутая через блок $Б$ (рис. 121, *а*). Какой груз P можно подвязать к концу нити, свешивающейся с блока, чтобы не нарушить равновесия тела A? Коэффициент трения $f = 0,4$. Трением на блоке пренебречь.

Решение.

1. Если масса тела A $m = 8$ *кг*, то его вес

$$G = mg = 8 \cdot 9,81 = 78,48\ н \approx 78,5\ н.$$

2. Пренебрегая размерами тела, будем считать, что все силы приложены к точке A.

3. Когда тело поставлено на горизонтальную поверхность, то на него действуют только две силы: вес $\overline{G}$ и противоположно направленная реакция опоры $\overline{R}_A = \overline{N}$ (рис. 121, *б*).

4. Если же приложить некоторую силу $\overline{P}$, действующую вдоль горизонтальной поверхности, то реакция $\overline{R}_A$, уравновешивающая силы $\overline{G}$ и $\overline{P}$, начнет отклоняться от вертикали, но тело A будет находиться в равновесии до тех пор, пока модуль силы P не превысит максимального значения силы трения F, соответствующей предельному значению угла φ_0 (рис. 121, *в*).

5. Разложив реакцию $\overline{R}_A$ на две составляющие $\overline{F}$ и $\overline{N}$, получаем систему четырех сил, приложенных к одной точке (рис. 121, *г*).

Спроектировав эту систему сил на оси x и y, получим два уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad P - F_{max} = 0; \qquad (1)$$
$$\sum Y_i = 0; \quad N - G = 0. \qquad (2)$$

Решаем полученную систему уравнений: $P = F_{max}$, но $F_{max} = fN$, а $N = G$, поэтому $P = fG = 0{,}4 \cdot 78{,}5 = 31{,}4$ *н*.

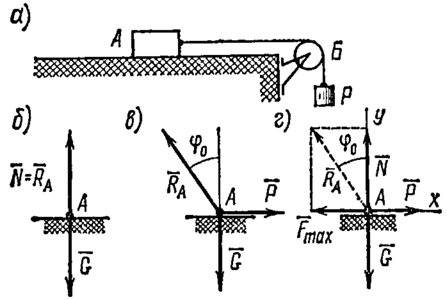


Рис. 121

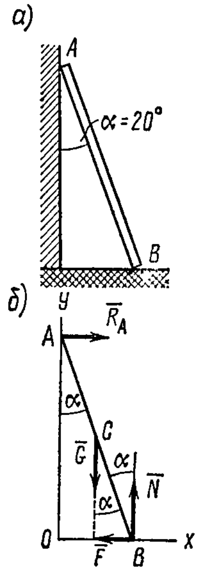


Рис. 122

Таким образом, равновесие тела A сохраняется при условии, что к концу нити, перекинутой через блок, подвешен груз, не превышающий по весу 31,4 *н*.

При этом масса груза P

$$m_P = \frac{P}{g} = \frac{31{,}4}{9{,}81} = 3{,}2 \text{ кг}.$$

Задача 92-15. При каком минимальном коэффициенте трения между полом и лестницей последняя может находиться в равновесии, опираясь верхним концом о гладкую стену, как показано на рис. 122, *а*? Вес лестницы $G = 120$ *н*.

Решение.

1. На лестницу действует только одна нагрузка—ее собственный вес, приложенный в точке C посредине длины лестницы AB.

2. Вес лестницы уравновешен реакцией $\overline{R}_A$ гладкой стены и реакцией шероховатого пола, которую заменим двумя составляющими: $\overline{N}$—нормальной составляющей и $\overline{F}$—силой трения (рис. 122, *б*).

3. Составим три уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad R_A - F = 0; \tag{1}$$
$$\sum Y_i = 0; \quad N - G = 0; \tag{2}$$
$$\sum M_B(\overline{P}_i) = 0; \quad G\frac{AB}{2}\sin\alpha - R_A \cdot AB\cos\alpha = 0. \tag{3}$$

4. Из уравнений (1) и (3)

$$F = R_A = \frac{G\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{G}{2}\operatorname{tg}\alpha = 60\operatorname{tg}20^\circ = 21{,}8 \text{ н}.$$

А так как $N = G$ [из уравнения (2)], то минимальный коэффициент трения, обеспечивающий равновесие лестницы,

$$f = \frac{F}{N} = \frac{F}{G} = \frac{21{,}8}{120} = 0{,}182 \approx 0{,}2.$$

Таким образом, при $f \geqslant 0{,}2$ лестница находится в равновесии.

Задача 93-15. В месте соприкосновения пола и лестницы в предыдущей задаче коэффициент трения $f = 0{,}4$. Сможет ли человек, масса которого 70 *кг*, подняться по лестнице до самого верха и чтобы лестница при этом не скользила по полу?

Решение.

1. К силам $\overline{G}_л$, $\overline{R}_A$, $\overline{F}$ и $\overline{N}$, действующим на лестницу и приведенным в предыдущей задаче, необходимо добавить еще одну нагрузку — вес человека $\overline{G}_ч$ — и приложить его у верхнего конца лестницы (рис. 123).

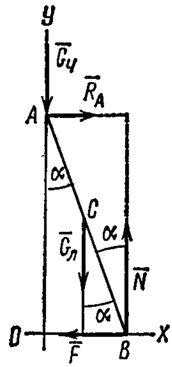


Рис. 123

2. Вес человека $G_ч = mg = 70 \cdot 9{,}81 = 687$ *н*.

3. Человек сможет подняться до самого верха лестницы лишь в том случае, если горизонтальная составляющая реакции пола (сила $\overline{F}$ на рис. 123) будет меньше $F_{max} = fN$ максимального значения силы трения, возможного при данном коэффициенте трения.

4. Составим уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad R_A - F = 0; \tag{1}$$
$$\sum Y_i = 0; \quad N - G_л - G_ч = 0; \tag{2}$$
$$\sum M_B(\overline{P}_i) = 0; \quad G_ч \cdot AB\sin\alpha - R_A \cdot AB\cos\alpha + G_л\frac{AB}{2}\sin\alpha = 0. \tag{3}$$

5. Из уравнения (2)

$$N = G_л + G_ч = 120 + 687 = 807 \text{ н}.$$

Максимальная сила трения, которая может возникнуть в данном случае, $F_{max} = fN = 0{,}4 \cdot 807 = 323$ *н*.

Из уравнений (1) и (3) находим силу F — горизонтальную составляющую реакции пола, которая может обеспечить равновесие лестницы с человеком, стоящим наверху:

$$F = R_A = \left(G_ч + \frac{G_л}{2}\right) \operatorname{tg} \alpha = (687 + 60) \operatorname{tg} 20° = 272 \text{ н}.$$

Таким образом, $F_{max} > F$.

Следовательно, человек сможет подняться по лестнице до самого верха.

Задача 94-15. При каких значениях угла α, образуемого с гладкой вертикальной стеной, лестница, опирающаяся нижним концом о шероховатый горизонтальный пол, будет находиться в равновесии, если, кроме собственного веса, она ничем не нагружена и известно, что коэффициент трения при соприкосновении лестницы с полом f?

Решение.

1. Для решения этой задачи воспользуемся рис. 122, *б*, так как на лестницу действуют те же четыре силы: вес лестницы $\overline{G}$, реакция гладкой стены $\overline{R}_A$ и две составляющие реакции пола — $\overline{F}$ и $\overline{N}$.

2. Лестница не выйдет из состояния равновесия (не начнет скользить) до тех пор, пока

$$F < F_{max} = fN, \tag{а}$$

т. е. пока горизонтальная составляющая реакции пола остается меньше максимальной силы трения, возникающей при опирании лестницы о пол в данном случае.

3. Из уравнений (1) и (3), составленных при решении задачи 92-15, найдено, что

$$F = \frac{G}{2} \operatorname{tg} \alpha. \tag{б}$$

Сопоставляем уравнения (а) и (б):

$$\frac{G}{2} \operatorname{tg} \alpha < fN.$$

А так как в данном случае $G = N$, то лестница находится в равновесии до тех пор, пока выполняется неравенство

$$\operatorname{tg} \alpha < 2f, \tag{в}$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha < 2 \operatorname{tg} \varphi_0, \text{ где } \varphi_0 \text{ — угол трения.}$$

Следовательно, лестница находится в равновесии до тех пор, пока тангенс угла, образуемого лестницей с вертикальной гладкой стеной, остается меньше удвоенного коэффициента трения между лестницей и полом.

Например, при $f = 0{,}4$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0{,}8, \quad \alpha = 38°40'$$

и неравенство (в) соблюдается при значениях углов

$$0 < \alpha < 38°40'.$$

Следовательно, при $f = 0{,}4$ лестница не будет скользить по полу при любом значении угла α от 0 до $38°40'$.

● **Задача 95-15.** При каких значениях угла α однородная лестница, опирающаяся на шероховатые стену и пол (рис. 124), будет

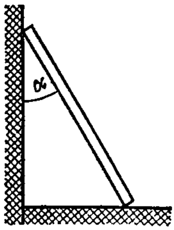


Рис. 124

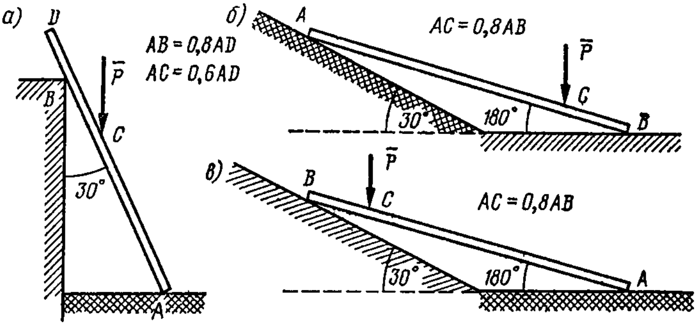


Рис. 125

находиться в равновесии? Коэффициенты трения при опирании лестницы о стену и о пол считать одинаковыми и равными f.

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha < \frac{2f}{1-f^2}$ или $\operatorname{tg}\alpha < \frac{2\operatorname{tg}\varphi_0}{1-\operatorname{tg}^2\varphi_0} = \operatorname{tg} 2\varphi_0$.

Указание. В данной задаче в системе сил, действующих на лестницу, образуется пять неизвестных: четыре реакции и угол α. Поэтому при решении задачи нужно к трем уравнениям равновесия добавить еще два уравнения, выражающих зависимость сил трения от силы нормального давления.

● **Задача 96-15.** Однородный брус весом $G = 800$ *н* (рис. 125) имеет в точке A негладкую, а в точке B идеально гладкую опору. На брус в точке C действует вертикальная нагрузка $P = 300$ *н*. Определить реакцию гладкой опоры, значение коэффициента трения бруса о негладкую опору, при котором возможно равновесие бруса; найти также модуль и направление полной реакции негладкой опоры.

Ответ.

а) $R_B = 363$ *н*; $f \geqslant 0{,}342$; $R_A = 970$ *н*; $\angle(\overline{R}_A, AD) = 8°$;

б) $R_B = 640$ *н*; $f \geqslant 0{,}577$; $R_A = 460$ *н*; направлена вертикально;

в) $R_B = 622$ *н*; $f \geqslant 0{,}552$; $R_A = 642$ *н*; $\angle(\overline{R}_A, AD) = 43°$.

Задача 97-15. Цилиндр с горизонтальной площадкой наверху (рис. 126, *а*), находясь в двух кольцевых направляющих, скользит вниз, так как между поверхностью цилиндра и поверхностями направляющих имеется незначительный зазор. Вес цилиндра $\overline{G}$. На каком наименьшем расстоянии l от оси цилиндра необходимо поместить груз Q, чтобы цилиндр перестал скользить? Коэффициент трения f. Расстояние между направляющими кольцами a.

Решение.

1. На цилиндр в состоянии равновесия действуют две нагрузки: вес $\overline{G}$ и груз $\overline{Q}$ (рис. 126, *б*).

2. Груз Q, помещенный на горизонтальную площадку, прижимает цилиндр к верхнему направляющему кольцу в точке A, а к нижнему—в точке B. Благодаря зазору в точках C и D цилиндр не касается направляющих колец. В точках A и B возникают две реакции, которые заменим их составляющими $\overline{N}_1$, $\overline{F}_1$ (в точке A) и $\overline{N}_2$, $\overline{F}_2$ (в точке B).

3. Образовалось пять неизвестных величин: F_1, N_1, F_2, N_2 и l. Если спроектировать все силы на ось x, то получим

$$N_2 - N_1 = 0, \tag{1}$$

откуда

$$N_1 = N_2. \tag{1a}$$

Так как

$$F_1 = fN_1 \tag{2}$$

и

$$F_2 = fN_2, \tag{3}$$

а также, имея в виду равенство (1a), находим, что

$$F_1 = F_2. \tag{3a}$$

Спроектировав все силы на ось y, получим четвертое уравнение:

$$F_1 + F_2 - G - Q = 0, \tag{4}$$

откуда с учетом (3a)

$$F_1 = F_2 = \frac{G+Q}{2}. \tag{4a}$$

Приняв за центр моментов точку O, лежащую на оси цилиндра и на середине расстояния a, составим пятое уравнение—уравнение моментов, в котором d—диаметр цилиндра ($d = CA = BD$):

$$-Ql + F_1\frac{d}{2} + N_1\frac{a}{2} - F_2\frac{d}{2} + N_2\frac{a}{2} = 0. \tag{5}$$

Имея в виду равенства (1a) и (3a), уравнение (5) можно упростить так:

$$Ql = N_1 a,$$

откуда

$$l = \frac{N_1 a}{Q}. \tag{5a}$$

Если теперь в уравнение (2) подставить значение F_1 из (4a), то

$$\frac{G+Q}{2} = fN_1,$$

откуда

$$N_1 = \frac{G+Q}{2f}.$$

И теперь выражение (5а) принимает окончательный вид:

$$l \geqslant \frac{(G+Q)a}{2fQ}.$$

При значениях l, удовлетворяющих полученному неравенству, цилиндр не скользит вниз.

Задача 98-15. Тело A поставлено на негладкую пластину BC, которую можно поворачивать около шарнира B. Коэффициент трения f между телом A и пластиной BC известен. Определить, при каких значениях угла α (рис. 127, *а*) тело A будет оставаться на пластине в покое?

Решение.

1. Представим, что пластина BC наклонена к горизонту на некоторый угол α (рис. 127, *б*).

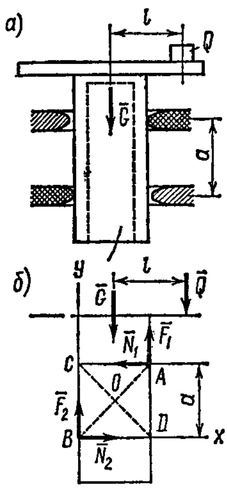


Рис. 126

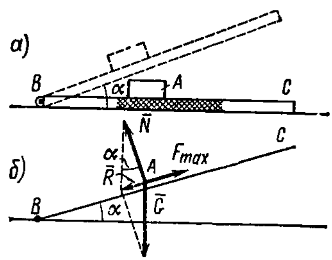


Рис. 127

При этом положении пластины на тело A действуют три силы: его собственный вес $\overline{G}$, нормальная реакция $\overline{N}$ пластины и сила трения $\overline{F}$, действующая на тело вдоль пластины и которая при некотором положении пластины BC сможет достичь максимального значения.

2. Тело A будет находиться в покое до тех пор, пока равнодействующая сил $\overline{G}$ и $\overline{N}$, направленная вдоль пластины, будет оставаться меньше F_{max}, т. е. пока $R < F_{max} = fN$.

Но $R = N \operatorname{tg} \alpha$, поэтому $N \operatorname{tg} \alpha < fN$ или $\operatorname{tg} \alpha < f$. (а)

Следовательно, пока тангенс угла наклона пластины к горизонту меньше коэффициента трения, тело A остается в покое.

Это положение выражает так называемое условие самоторможения тела по наклонной плоскости.

3. Учитывая, что $f = \operatorname{tg} \varphi_0$,

где φ_0—угол трения, неравенство (а) можно представить в виде

$$\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi_0.$$

Так как углы α и φ_0 — острые и, следовательно, меньшему тангенсу соответствует меньший угол, последнее неравенство можно заменить равносильным неравенством $\alpha < \varphi_0$.

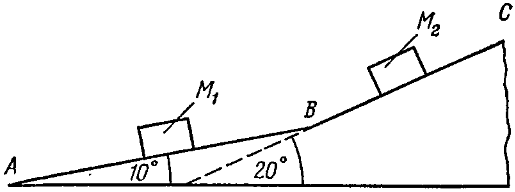


Рис. 128

Тело А находится в покое на наклонной плоскости до тех пор, пока угол наклона плоскости меньше угла трения.

● **Задача 99-15.** Коэффициент трения между наклонными плоскостями AB, BC и поставленными на них телами M_1, M_2 (рис. 128) одинаков и равен 0,38. Которое из тел скользит вниз по наклонной плоскости?

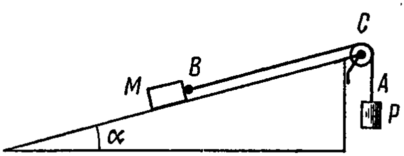


Рис. 129

● **Задача 100-15.** Какой груз P можно прикрепить к концу нити AB, перекинутой через блок C, чтобы тело M весом $G = 5$ *кн* могло находиться в состоянии покоя на наклонной плоскости с углом подъема α при коэффициенте f? При этом: 1) $\alpha = 20°$ и $f = 0{,}25$; 2) $\alpha = 30°$ и $f = 0{,}4$ (рис. 129).

Ответ. 1) $0{,}54$ *кн* $< P < 2{,}88$ *кн*; 2) $0{,}77 < P < 4{,}23$ *кн*.

§ 16-3. Сочлененные системы

Сочлененной называется система нескольких тел, соединенных друг с другом при помощи внутренних связей: простого опирания, стержней или нитей (цепей), шарниров.

При решении некоторых задач с сочлененными системами равновесие каждого тела системы рассматривают отдельно. При этом в месте сочленения тел возникают две силы, одна из которых приложена к одному телу, а другая — ко второму телу. Эти силы равны по модулю, направлены вдоль одной прямой, но в противоположные стороны (закон равенства действия и противодействия).

На рис. 130 показаны силы взаимодействия, возникающие между телами A и B: $\overline{P}_{AB}$ — действие тела A на тело B и $\overline{P}_{BA}$ — действие тела B на тело A. Если, например, тело A служит опорой для B (связью), то $\overline{P}_{AB}$ — реакция связи, приложенная к телу B, а $\overline{P}_{BA}$ — сила давления (нагрузка), приложенная к телу A.

На рис. 131 показаны силы, возникающие при взаимодействии тел A и B не непосредственно друг с другом, а через стержень. Если допустить, что тело A действует на B через стержень силой

$\overline{T}_{AB}$, то тогда со стороны тела B возникает сила $\overline{T}_{BA}$. В задачах, как правило, рассматривают только эти две силы, приложенные к телам A и B (рис. 131, *а*).

На рис. 131, *б* показаны силы, приложенные только к стержню, т. е. показаны действия на стержень тел A и B.

Если два тела A и B связаны друг с другом при помощи так называемого внутреннего шарнира (рис. 132), то направление сил взаимодействия заранее неизвестно. Поэтому каждая из сил взаимодействия между телами (силы $\overline{R}_{AB}$ и $\overline{R}_{BA}$ — предположительно пока-

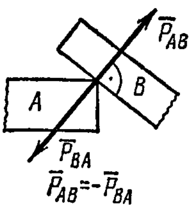


Рис. 130

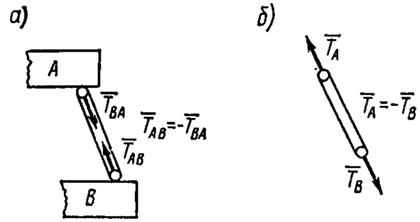


Рис. 131

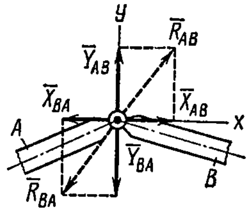


Рис. 132

заны на рис. 132 штриховыми векторами) заменяются составляющими $\overline{X}_{AB}$, $\overline{Y}_{AB}$ и $\overline{X}_{BA}$, $\overline{Y}_{BA}$. Причем $\overline{R}_{AB}=-\overline{R}_{BA}$, $\overline{X}_{AB}=-\overline{X}_{BA}$ и $\overline{Y}_{AB}=-\overline{Y}_{BA}$.

Задача 101-16. Балка AB, имея в точке A шарнирное крепление, опирается в точке B на балку CD (рис. 133, *а*), которая удерживается в равновесии стержнем EF (в точках E и F — шарнирные соединения) и шарниром D. Размеры и расположение нагрузок показаны на рисунке.

Определить реакции шарниров A, D и стержня EF. $P_1=P_2=20$ *кн*, $q=12$ *кн/м*, $\alpha=48°$.

Решение.

1. Рассмотрим равновесие каждой балки. Для этого изобразим балки AB и CD раздельно. На рис. 133, *б* изображена балка AB с двумя нагрузками $\overline{P}_1$ и $\overline{q\cdot LB}$, составляющими реакции шарнира $A(\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A)$, и реакцией опоры в точке B $(\overline{N}_{CB})$.

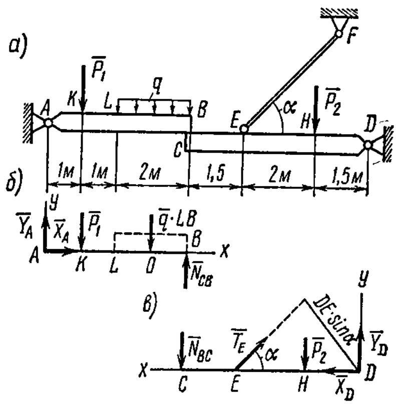


Рис. 133

На рис. 133, *в* изображена балка CD, имеющая заданную нагрузку $\overline{P}_2$, нагрузку $\overline{N}_{BC}$, которая неизвестна, составляющие реакции шарнира $D(\overline{X}_D$ и $\overline{Y}_D)$ и реакцию $\overline{T}_E$ стержня FF.

2. Рассмотрим равновесие балки AB и составим уравнения (начинать решение задачи с рассмотрения равновесия балки CD пока не имеет смысла, так как в три уравнения равновесия, кото-

рые можно составить для плоской системы сил, войдут четыре неизвестные силы N_{BC}, T_E, X_D и Y_D):

$$\sum X_i = 0; \quad X_A = 0; \tag{1}$$

$$\sum M_A(\overline{P}_i) = 0; \ -P_1 \cdot AK - q \cdot LB \cdot AO + N_{CB} \cdot AB = 0; \tag{2}$$

$$\sum M_B(\overline{P}_i) = 0; \ -Y_A \cdot BA + P_1 \cdot BK + q \cdot LB \cdot BO = 0. \tag{3}$$

Из уравнения (1)

$$X_A = 0.$$

Из уравнения (2)

$$N_{CB} = \frac{P_1 \cdot AK + q \cdot LB \cdot AO}{AB} = \frac{20 \cdot 1 + 12 \cdot 2 \cdot 3}{4} = 23 \ кн.$$

Из уравнения (3)

$$Y_A = \frac{P_1 \cdot BK + q \cdot LB \cdot BO}{BA} = \frac{20 \cdot 3 + 12 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 21 \ кн.$$

3. Теперь можно рассмотреть равновесие балки CD. Реакция балки CD, иными словами ее противодействие давлению балки AB, уже известна:

$$N_{CB} = 23 \ кн,$$

а значит известна и сила давления N_{BC}.

Таким образом,

$$N_{CB} = N_{BC} = 23 \ кн.$$

Учитывая это, составим уравнения равновесия для балки CD и решим их:

$$\sum X_i = 0; \quad X_D - T_E \cos\alpha = 0; \tag{1}$$

$$\sum M_E(\overline{P}_i) = 0; \quad Y_D \cdot ED - P_2 \cdot EH + N_{BC} \cdot EC = 0; \tag{2}$$

$$\sum M_D(\overline{P}_i) = 0; \quad P_2 \cdot DH - T_E \cdot DE \sin\alpha + N_{BC} \cdot DC = 0. \tag{3}$$

Из уравнения (3)

$$T_E = 55{,}7 \ кн.$$

Из уравнения (1)

$$X_D = 37{,}3 \ кн.$$

Из уравнения (2)

$$Y_D = 1{,}57 \ кн.$$

Реакция шарнира A определена выше: $R_A = Y_A = 21$ *кн*.

Проверку решения можно произвести при помощи любого из трех уравнений равновесия, составленного для всей сочлененной системы. В данном случае для проверки можно, например, использовать уравнение моментов относительно точки опоры одной балки на другую (точка B или C, рис. 133, *а*):

$$\sum M_B(\overline{P}_i)=0;\quad -Y_A\cdot AB+P_1\cdot KB+q\cdot LB\cdot OB+ +T_E\cdot CE\sin\alpha-P_2\cdot HB+Y_D\cdot DB=0.$$

Подставив в уравнение значения величин, убедимся в том, что уравнение обратится в тождество. Значит, задача решена правильно.

Задача 102-16. Балка AB жестко заделана у точки A и нагружена по всей длине равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q=8$ *кн/м* (рис. 134, *а*). В точке B к балке шарнирно прикреплен стержень, ко второму концу которого также шарнирно прикреплена вторая балка CD, опирающаяся кроме того, в точке D на стержни DF и DK (соединения в точках D, F и K — шарнирные). Балка CD нагружена силой $P=10$ *кн* и моментом $M=50$ *кн·м*.

Определить реакции в заделке и усилия во всех трех стержнях, если стержень BC вертикален и углы $\alpha=52°$, $\beta=38°$.

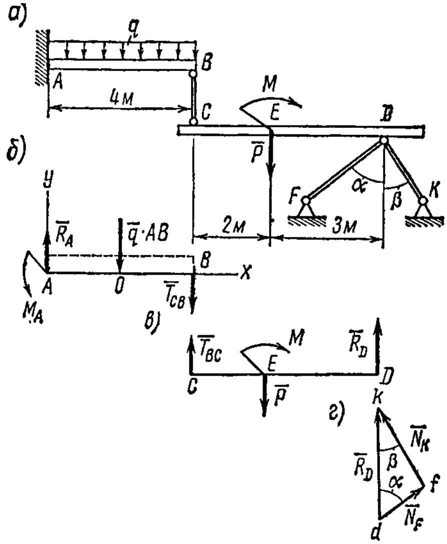


Рис. 134

Решение.

1. Рассмотрим равновесие каждой балки отдельно.

К балке AB приложены две нагрузки — по всей длине равномерно распределена нагрузка $\overline{q\cdot AB}$ и в точке B сила $\overline{T}_{CB}$ — переданное стержнем действие балки CD (рис. 134, *б*). Обе эти нагрузки уравновешиваются вертикальной реакцией $\overline{R}_A$ и реактивным моментом M_A заделки (реакция $\overline{R}_A$ заделки не отклонена от вертикали, так как в данном случае нет усилий, стремящихся сместить балку AB в горизонтальном направлении).

К балке CD приложены сосредоточенная сила $\overline{P}$ и момент M. Обе нагрузки уравновешиваются реакциями, возникшими в стержнях BC, DF и DK. Но так как соединительный стержень BC расположен перпендикулярно к балке, а нагрузки не смещают ее в горизонтальном направлении, то равнодействующая реакций стержней DF и DK, приложенная в точке D, направлена перпендикулярно к балке (реакция $\overline{R}_D$ (рис. 134, *в*).

2. Составим уравнения равновесия для балки CD

$$\sum M_D(\overline{P}_i)=0;\qquad -T_{BC}\cdot DC-M+P\cdot DE=0; \tag{1}$$

$$\sum M_C(\overline{P}_i)=0;\qquad -M-P\cdot CE+R_D\cdot CD=0, \tag{2}$$

Из уравнения (1)

$$T_{BC}=\frac{P\cdot DE-M}{DC}=\frac{10\cdot3-50}{5}=-4\ \textit{кн}.$$

Знак минус показывает, что реакция $\overline{T}_{BC}$ направлена не вверх, как показано на рис. 134, *в*, а вниз. Таким образом, стержень BC не растянут, как предполагалось, а сжат. Значит и $T_{CB}=T_{BC}=-4$ *кн*, т. е. нагрузка $\overline{T}_{CB}$ на балку AB действует вверх, а не вниз, как показано на рис. 134, *б*.

Из уравнения (2)

$$R_D=\frac{M+P\cdot CE}{CD}=\frac{50+10\cdot2}{5}=14\ \textit{кн}.$$

3. Реакция $\overline{R}_D$ является равнодействующей реакцией $\overline{N}_F$ и $\overline{N}_K$ стержней DF и DK. Найдем эти реакции из рассмотрения треугольника dkf (рис. 134, *г*), построенного на силе $\overline{R}_D$ (см. задачу 89-14, решение 2).

Треугольник dkf прямоугольный, так как $\alpha+\beta=52°+38°=90°$, следовательно,

$$N_F=R_D\sin 38°=14\sin 38°=8{,}6\ \textit{кн}$$

(стержень ED сжат, так как реакция направлена от стержня к шарниру D):

$$N_K=R_D\sin 52°=14\sin 52°=11\ \textit{кн}$$

(стержень KD также сжат).

Таким образом, усилия во всех стержнях найдены и все стержни сжаты.

4. Для определения реакций в заделке нужно составить уравнения равновесия для балки AB (см. рис. 134, *б*):

$$\sum Y_i=0;\quad R_A-q\cdot AB-T_{CB}=0; \tag{3}$$

$$\sum M_A(\overline{P}_i)=0;\quad M_A-q\cdot AB\cdot AO-T_{CB}\cdot AB=0. \tag{4}$$

Из уравнения (3) находим R_A (учитывая, что $T_{CB}=-4$ *кн*):

$$R_A=q\cdot AB+T_{CB}=8\cdot4-4=28\ \textit{кн}.$$

Из уравнения (4)

$$M_A=q\cdot AO\cdot AB+T_{CB}\cdot AB=8\cdot4\cdot2-4\cdot4=48\ \textit{кн}\cdot\textit{м}.$$

Проверку решения рекомендуется выполнить самостоятельно.

● **Задача 103-16.** Определить реакции шарниров A и C, а также усилия в стержнях BD и EF системы, показанной на рис. 135. Весом балок AB, CD и стержней пренебречь.

Ответ. $X_A=0$; $Y_A=40$ *кн*; $X_C=115$ *кн*; $Y_C=45$ *кн*; $N_{BD}=40$ *кн*; $N_{EF}=121$ *кн* (оба стержня растянуты).

● **Задача 104-16.** Определить реакции и момент заделки A, а также усилия в стержнях BC, CF и DE системы, показанной на рис. 136. Весом балок и стержней пренебречь.

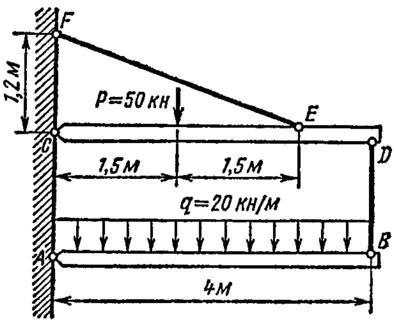


Рис. 135

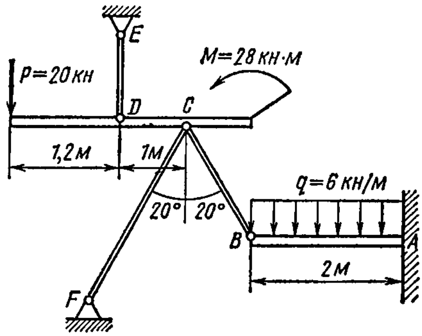


Рис. 136

Ответ. $X_A = 9{,}45$ *кн*; $Y_B = 14$ *кн* (вниз);
$M_A = 40$ *кн·м* (против хода часовой стрелки);
$N_{BC} = N_{FC} = 27{,}6$ *кн*; $N_{DE} = 72$ *кн* (все стержни растянуты).

* *
*

При решении задач, в которых сочленение тел произведено при помощи промежуточного шарнира, целесообразно сначала составить уравнения равновесия для всей системы, а затем добавить к ним уравнение моментов сил относительно промежуточного шарнира для одного из тел сочлененной системы.

Покажем это на примере следующей задачи.

Задача 105-16. Балки *1* и *2*, шарниром C соединенные между собой, шарнирно прикреплены к неподвижным опорам в точках A и B (рис. 137, *а*). Длина балок одинакова: $AC = BC = 4$ *м*. Балка *1* в точке D нагружена вертикальной силой $P_1 = 100$ *кГ*, а в точке E — горизонтальной силой $P_2 = 80$ *кГ*. Балка *2* в точке F нагружена перпендикулярной к ней силой $P_3 = 200$ *кГ*. Угол $\alpha = 50°$. Определить реакции шарниров A и B.

Решение.

1. Освободим балки от связей в точках A и B. Действие шарниров A и B заменим их реакциями, разложив каждую реакцию на две составляющие по осям x и y (рис. 137, *б*).

При рассмотрении равновесия обеих балок силы взаимодействия, возникающие в промежуточном шарнире C (составляющие этих сил показаны на рис. 137, *б* штриховой линией), друг друга уравновешивают и поэтому могут не учитываться при составлении уравнений равновесия.

Таким образом, на систему балок *1* и *2* действуют всего семь внешних сил, расположенных в одной плоскости: $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{X}_B$ и $\overline{Y}_B$, из них четыре последние силы неизвестны.

2. Для определения четырех неизвестных сил необходимо составить четыре уравнения.

Из условия равновесия системы балок составим три уравнения

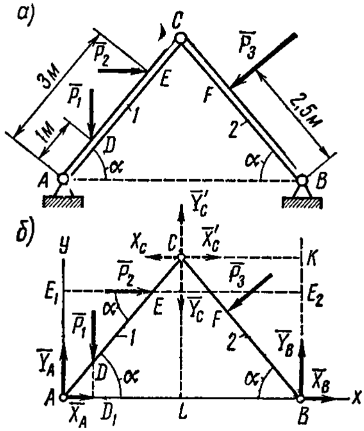


Рис. 137

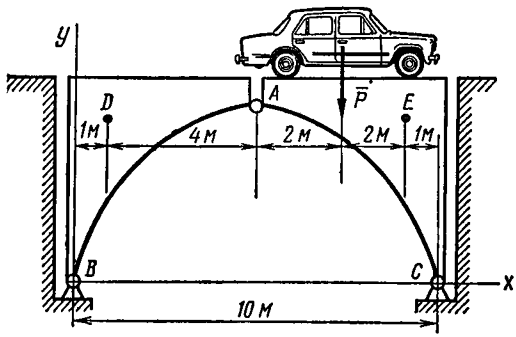


Рис. 138

равновесия, приняв для третьего уравнения за центр моментов точку B:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + P_2 - P_3 \sin\alpha + X_B = 0; \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A - P_1 - P_3 \cos\alpha + Y_B = 0; \tag{2}$$

$$\sum M_B(\overline{P}_i) = 0; \quad -Y_A \cdot BA + P_1 \cdot BD_1 - P_2 \cdot BE_2 + P_3 \cdot BF = 0. \tag{3}$$

Четвертое уравнение составим исходя из равновесия балки *2* (на нее действует меньше сил, чем на балку *1*):

$$\sum M_C(\overline{P}_i) = 0; \quad Y_B \cdot CK + X_B \cdot CL - P_3 \cdot CF = 0. \tag{4}$$

3. Определяем плечи сил, входящие в уравнения (3) и (4) (рис. 137, *б*):

$$BA = 2 \cdot AL = 2 \cdot AC \cos\alpha = 2 \cdot 4 \cos 50^\circ = 5{,}14 \text{ м};$$

$$BD_1 = BA - D_1A = BA - AD \cos\alpha = 5{,}14 - 1 \cdot \cos 50^\circ = 4{,}50 \text{ м};$$

$$BE_2 = AE_1 = AE \sin\alpha = 3 \sin 50^\circ = 2{,}30 \text{ м};$$

$$BF = 2{,}5 \text{ м};$$

$$CK = BC \cos\alpha = 4 \cos 50^\circ = 2{,}57 \text{ м};$$

$$CL = BC \sin\alpha = 4 \sin 50^\circ = 3{,}06 \text{ м};$$

$$CF = BC - BF = 4 - 2{,}5 = 1{,}5 \text{ м}.$$

4. Теперь из уравнения (3) находим

$$Y_A = \frac{P_1 \cdot BD_1 - P_2 \cdot BE_2 + P_3 \cdot BF}{BA} = \frac{100 \cdot 4{,}50 - 80 \cdot 2{,}30 + 200 \cdot 2{,}5}{5{,}14} = 149 \text{ кн}.$$

Из уравнения (2)

$$Y_B = P_1 + P_3 \cos\alpha - Y_A = 100 + 200 \cos 50^\circ - 149 = 79{,}5 \text{ кн}.$$

Из уравнения (4)

$$X_B = \frac{P_3 \cdot FC - Y_B \cdot CK}{CL} = \frac{200 \cdot 1,5 - 79,5 \cdot 2,57}{3,06} = 31,1 \textit{ кн.}$$

Из уравнения (1)

$$X_A = -P_2 + P_3 \sin\alpha - X_B = -80 + 200 \sin 50^\circ - 31,1 = 41,9 \textit{ кн.}$$

Проверку решения рекомендуется сделать самостоятельно при помощи уравнения моментов относительно точки C, составленного для всей системы.

Если в соответствии с условием задачи требуется определить силу взаимодействия между балками в шарнире C, то теперь ее легко найти, рассмотрев равновесие одной из балок.

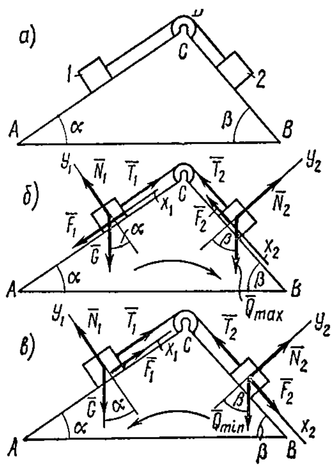


Рис. 139

● **Задача 106-16.** Мост состоит из двух частей, связанных между собой шарниром A и прикрепленных к береговым устоям шарнирами B и C. Вес каждой части моста 40 *кн*, их центры тяжести D и E. Определить силу взаимодействия в шарнире A и реакции в точках B и C, если на правой части моста стоит автомобиль, вес которого $P = 20$ *кн* (рис. 138).

Ответ: $X_A = \mp 17,5$ *кн*; $Y_A = \mp 6$ *кн*; $X_B = -X_C = 17,5$ *кн*; $Y_B = 46$ *кн*; $Y_C = 54$ *кн*.

В следующей задаче рассмотрим равновесие сочлененной системы при наличии сил трения.

Задача 107-16. На наклонных плоскостях AC и BC помещены два тела *1* и *2*, связанные нитью, которая перекинута через блок D (рис. 139, *а*), f_1 — коэффициент трения при взаимодействии тела *1* с плоскостью AC; f_2 — коэффициент трения при взаимодействии тела *2* с плоскостью BC. Вес первого тела G. При каком весе Q второго тела будет соблюдаться равновесие?

Решение.

1. Допустим, что тела *1* и *2*, связанные нитью, поставлены на наклонные плоскости и находятся в равновесии.

2. Если вес тела *2* постепенно увеличивать, то при некотором значении веса Q_{max} равновесие нарушится и оба тела начнут скользить вправо (тело *2* — вниз по CB, а тело *1* — вверх по AC).

Изобразим оба тела с действующими на них силами в предельном состоянии (рис. 139, *б*) равновесия, т. е. в момент перед началом движения. На каждое тело действуют их веса $\overline{G}$ и $\overline{Q}_{max}$, нормальные реакции наклонных плоскостей $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$, реакции нитей $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$ и силы трения $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, направленные в стороны, противоположные движению тел.

3. Рассмотрим равновесие каждого из тел в отдельности, пренебрегая их размерами, т. е. считая, что на тела действуют системы сходящихся сил.

Для сил, действующих на тело *1*, получим такие уравнения равновесия:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_{1i}=0; \quad T_1-F_1-G\sin\alpha=0, \\ &\sum Y_{1i}=0; \quad N_1-G\cos\alpha=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Для сил, действующих на тело *2*, получим такие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_{2i}=0; \quad -T_2-F_2+Q_{\max}\sin\beta=0; \\ &\sum Y_{2i}=0; \quad N_2-Q_{\max}\cos\beta=0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Из системы уравнений (1)

$$T_1=G\sin\alpha+F_1=G\sin\alpha+f_1N_1,$$

а так как

$$N_1=G\cos\alpha,$$

то

$$T_1=G(\sin\alpha+f_1\cos\alpha). \qquad (a)$$

Из системы уравнений (2)

$$T_2=Q_{\max}\sin\beta-F_2=Q_{\max}\sin\beta-f_2N_2,$$

а так как

$$N_2=Q_{\max}\cos\beta,$$

то

$$T_2=Q_{\max}(\sin\beta-f_2\cos\beta). \qquad (б)$$

Натяжение нити, перекинутой через блок, по всей длине одинаково, поэтому $T_1=T_2$ и, следовательно, правые части равенств (а) и (б) также равны между собой, т. е.

$$G(\sin\alpha+f_1\cos\alpha)=Q_{\max}(\sin\beta-f_2\cos\beta).$$

Отсюда определяем $Q_{\max}$:

$$Q_{\max}=G\frac{\sin\alpha+f_1\cos\alpha}{\sin\beta-f_2\cos\beta}.$$

4. Теперь представим себе, что вес тела *2* постепенно уменьшается. При некотором значении веса $Q_{\min}$ равновесие снова нарушится, но теперь оба тела начнут скользить влево (тело 1 — вниз по CA, а тело *2* — вверх по BC).

Изобразим на рис. 139, *в* оба тела с действующими на них силами в момент перед началом движения.

В этом случае по сравнению с предыдущим обе силы трения $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ изменяют свое направление, так как изменяется направление скольжения тел.

Рассматривая равновесия каждого из тел в отдельности, получаем следующие системы уравнений равновесия:

для тела *1*

$$\left.\begin{aligned}&\sum X_{1i}=0; \quad T_1+F_1-G\sin\alpha=0;\\ &\sum Y_{1i}=0; \quad N_1-G\cos\alpha=0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

для тела *2*

$$\left.\begin{aligned}&\sum X_{2i}=0; \quad -T_2+F_2+Q_{\min}\sin\beta=0;\\ &\sum Y_{2i}=0; \quad N_2-Q_{\min}\cos\beta=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Решая эти системы уравнений так же, как и в предыдущем случае, находим $Q_{\min}$:

$$Q_{\min}=G\frac{\sin\alpha-f_1\cos\alpha}{\sin\beta+f_2\cos\beta}.$$

5. Таким образом, тела *1* и *2* находятся в равновесии при соблюдении условия

$$Q_{\min}<Q<Q_{\max},$$

причем значения $Q_{\min}$ и $Q_{\max}$ зависят от веса первого тела, от коэффициентов трения и от углов подъема наклонных плоскостей.

Так, например, при $G=100$ *кГ*, $\alpha=\beta=45°$ и $f_1=f_2=0{,}2$ имеем:

$$Q_{\max}=G\frac{\sin\alpha+f_1\cos\alpha}{\sin\beta-f_2\cos\beta}=100\frac{\sin 45°+0{,}2\cos 45°}{\sin 45°-0{,}2\cos 45°}=\frac{100\cdot 1{,}2}{0{,}8}=150\ кГ,$$

$$Q_{\min}=G\frac{\sin\alpha-f_1\cos\alpha}{\sin\beta+f_1\cos\beta}=100\frac{\sin 45°-0{,}2\cos 45°}{\sin 45°+0{,}2\cos 45°}=\frac{100\cdot 0{,}8}{1{,}2}=66{,}7\ кГ,$$

т. е. вес Q удовлетворяет условию

$$66{,}7\ кГ<Q<150\ кГ.$$

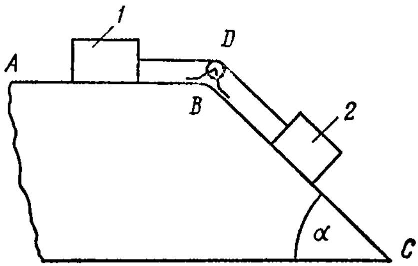


Рис. 140

● **Задача 108-16.** На горизонтальную плоскость AB поставлено тело *1* весом P, а связанное с ним нитью тело *2*, вес которого G, поставлено на плоскость BC, наклоненную под углом α к горизонту (рис. 140). Коэффициент трения тела *1* по плоскости AB равен f_1. Каким должен быть f_2—коэффициент трения тела *2* по наклонной плоскости, чтобы система начала двигаться? Трением на блоке D пренебречь.

Ответ: $f_2\leqslant \operatorname{tg}\alpha-\dfrac{Pf_1}{G\cos\alpha}$.

§ 17-3. Статически определимые фермы. Методы вырезания узлов и сквозного сечения

Плоская или пространственная неизменяемая конструкция, составленная из шарнирно соединенных между собой стержней, называется *фермой*.

На рис. 141 изображена простая плоская ферма (пример пространственной фермы приведен в § 19-4).

Если число узлов (шарниров) фермы n, а число стержней k, то в простой плоской ферме соблюдается условие

$$k = 2n - 3$$

(подробнее см. § 17 в учебнике Е. М. Никитина).

Ферма называется *статически определимой*, если усилия во всех стержнях фермы, нагруженной в шарнирах, можно определить при помощи уравнений равновесия.

Все плоские простые фермы статически определимы.

Для определения усилий в стержнях ферм употребляются графические или аналитические методы. Рассмотрим только аналитические методы: метод вырезания узлов (задача 109-17) и метод сквозного сечения — метод Риттера (задача 110-17).

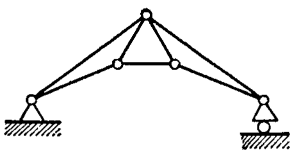


Рис. 141

При использовании метода вырезания узлов необходимо придерживаться следующего порядка:

а) выяснить, какие нагрузки действуют на ферму, как они направлены и где приложены, а затем определить реакции связей, используя уравнения равновесия. Правильность этой части решения нужно обязательно проверить: для проверки можно использовать любое дополнительно составленное уравнение равновесия;

б) затем следует определить усилия в стержнях фермы, начиная с того узла, на который действуют не более двух неизвестных сил, так как в каждом случае на узел действует система сходящихся сил и, следовательно, для одного узла можно составить лишь два уравнения равновесия;

в) вырезав узел, необходимо заменить действие на узел отброшенной части фермы усилиями, действующими вдоль стержней, считая при этом, что все стержни растянуты, а затем составить уравнения равновесия;

г) путем перехода от узла к узлу определяют усилия во всех стержнях, один из узлов при этом остается нерассмотренным; составив уравнения равновесия для этого узла, можно проверить правильность решения задачи.

При определении усилий в стержнях ферм по методу сквозного сечения необходимо придерживаться следующего порядка:

а) прежде всего, так же как и при методе вырезания узлов, выявив все нагрузки, определить реакции опор;

б) мысленно разрезать фермы на две части таким образом, чтобы разрез проходил не более чем через три стержня, усилия в которых неизвестны *, и, отбросив одну из частей, заменить действие отбро-

* При разрезании фермы через четыре и большее число стержней образуется плоская система сил с четырьмя или соответственно большим числом неизвестных. Так как для произвольной плоской системы сил можно составить только три уравнения равновесия, задачу решить нельзя.

шенной части на оставшуюся усилиями, направленными вдоль стержней, предполагая при этом, что все разрезанные стержни (с неизвестными усилиями) растянуты;

в) составить три уравнения равновесия; при выборе направлений осей проекций, а также центра моментов нужно исходить из того, чтобы в каждое из уравнений по возможности входило не более одной неизвестной силы.

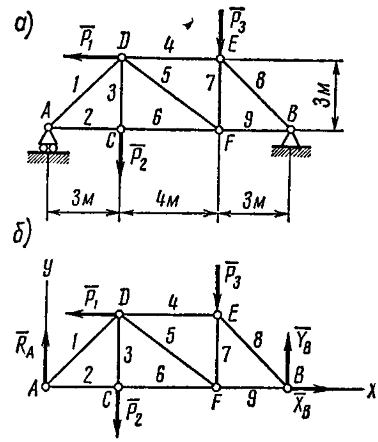


Рис. 142

Задача 109-17. Определить усилия в стержнях фермы, нагруженной, как показано на рис. 142, *а*, тремя силами: $P_1 = 10$ *кн*, $P_2 = 20$ *кн* и $P_3 = 30$ *кн*. Размеры фермы показаны на рисунке.

Решение—методом вырезания узлов.

1. Освободим ферму от связей и заменим связи их реакциями. Действие подвижного шарнира A заменим реакцией $\overline{R}_A$, а действие неподвижного шарнира B—двумя составляющими $\overline{X}_B$ и $\overline{Y}_B$, так как направление полной реакции этого шарнира неизвестно (рис. 142, *б*).

Составим три уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad -P_1 + X_B = 0;$$

$$\sum M_A(\overline{P}_i) = 0; \quad -P_2 \cdot AC + P_1 \cdot DC - P_3 \cdot AF + Y_B \cdot AB = 0;$$

$$\sum M_B(\overline{P}_i) = 0; \quad -R_A \cdot BA + P_1 \cdot DC + P_2 \cdot BC + P_3 \cdot BF = 0.$$

Подставив в эти уравнения числовые значения и решив их, находим (вычисления рекомендуем произвести самостоятельно):

$$X_B = 10 \text{ кн}; \quad Y_B = 24 \text{ кн} \quad \text{и} \quad R_A = 26 \text{ кн}.$$

Для проверки можно использовать уравнение проекций сил на ось y или уравнение моментов сил относительно точки C (или D, или E, или F).

2. Вырежем узел A, заменив действие на узел отброшенной части фермы силами $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$, направленными вдоль стержней *1* и *2* от узла A (рис. 143), предполагая, что стержни растянуты. Расположим оси проекции так, чтобы ось x совпала с направлением силы $\overline{N}_2$, а ось y—с направлением реакции $\overline{R}_A$. Замечая, что угол $DAC = \alpha = 45°$ (так как $AC = DC$), составим два уравнения равновесия:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0; \quad N_1 \cos\alpha + N_2 = 0; \\ &\sum Y_i = 0; \quad R_A + N_1 \sin\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

Из уравнения (2)

$$N_1 = -\frac{R_A}{\sin\alpha} = -\frac{26}{\sin 45^\circ} = -36{,}8 \text{ кн (стержень 1 сжат)}.$$

Из уравнения (1)

$$N_2 = -N_1\cos\alpha = \frac{R_A}{\sin 45^\circ}\cos 45^\circ = R_A = 26 \text{ кн} \quad \text{(стержень 2 растянут)}.$$

3. Вырежем узел C, заменив действие на узел отброшенной части фермы силами $N_2 = 26$ *кн*, $\overline{N}_3$ и $\overline{N}_6$; расположив оси проекций, как

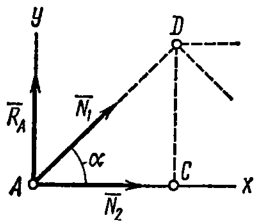


Рис. 143

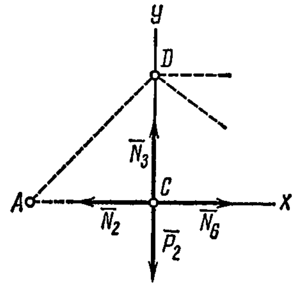


Рис. 144

показано на рис. 144, составим уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad -N_2 + N_6 = 0; \tag{3}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N_3 - P_2 = 0. \tag{4}$$

Отсюда $N_6 = N_2 = 26$ *кн* (стержень *6* растянут); $N_3 = P_2 = 20$ *кн* (стержень *3* растянут).

4. Вырежем узел D. В этом случае узел находится в равновесии под действием пяти сил, три из них известны: $P_1 = 10$ *кн*, $N_1 =$

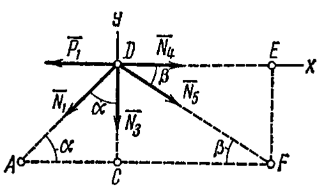


Рис. 145

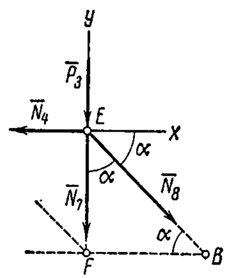


Рис. 146

$= -36{,}8$ *кн* * и $N_3 = 20$ *кн*, а две силы N_5 и N_4 нужно определить. Выберем направление осей проекций, как показано на рис. 145. Угол $ADC = \alpha = 45^\circ$, угол $EDF = \beta$ неизвестен, но легко определить,

* Хотя из рассмотрения условия равновесия узла A установлено, что усилие в стержне 1 (N_1) сжимающее, изображаем его как растягивающее. При подстановке числовых значений в уравнение равновесия узла D учитываем знак «минус».

что $\cos\beta=\frac{DE}{DF}=\frac{4}{5}=0{,}8$ (так как в $\triangle DEF$ катет $FE=3$ *м*, катет $DE=4$ *м* и, следовательно, гипотенуза $DF=5$ *м*), а $\sin\beta=\frac{EF}{DF}=\frac{3}{5}=0{,}6$.

Составим уравнение равновесия:

$$\sum X_i=0;\quad -P_1+N_4+N_5\cos\beta-N_1\cos\alpha=0; \tag{5}$$

$$\sum Y_i=0;\quad -N_1\cos\alpha-N_3-N_5\sin\beta=0. \tag{6}$$

Из уравнения (6)

$$N_5=\frac{-N_1\cos\alpha-N_3}{\sin\beta}=\frac{-(-36{,}8)\cos 45^\circ-20}{0{,}6}=10\ \textit{кн}$$

(стержень *5* растянут).

Из уравнения (5)

$$N_4=P_1-N_5\cos\beta+N_1\cos\alpha=10-10\cdot 0{,}8+(-36{,}8)\cos 45^\circ=-24\ \textit{кн}$$

(стержень *4* сжат).

5. Вырежем узел E, к которому приложены четыре силы: две из них известны ($P_3=30$ *кн* и $N_4=-24$ *кн*), а силы N_7 и N_8 нужно определить.

Расположив оси проекций, как показано на рис. 146, и замечая, что угол $BEF=\alpha=45^\circ$, составим уравнения равновесия:

$$\sum X_i=0;\quad -N_4+N_8\cos\alpha=0; \tag{7}$$

$$\sum Y_i=0;\quad -P_3-N_7-N_8\cos\alpha=0. \tag{8}$$

Из уравнения (7)

$$N_8=\frac{N_4}{\cos\alpha}=-\frac{24}{\cos 45^\circ}=-34\ \textit{кн}\ \text{(стержень 8 сжат)}.$$

Из уравнения (8)

$$N_7=-P_3-N_8\cos\alpha=-30-\left(-\frac{24}{\cos 45^\circ}\right)\cos 45^\circ=-6\ \textit{кн}$$

(стержень *7* сжат).

6. Вырежем узел B, к которому приложены четыре силы: реакции $X_B=10$ *кн* и $Y_B=24$ *кн*, найденное в стержне *8* усилие $N_8=-34$ *кн* и неизвестное усилие $\overline{N}_9$, действующее вдоль стержня *9*. Располагая оси проекций, как показано на рис. 147, и замечая, во-первых, что $\angle FBE=\alpha=45^\circ$, во-вторых, что в данном случае нужно определить лишь одну силу (силу N_9), составляем одно уравнение равновесия:

$$\sum X_i=0;\quad -N_9-N_8\cos\alpha+X_B=0, \tag{9}$$

из которого $N_9=34$ *кн* (стержень *9* растянут).

Усилия, возникающие во всех стержнях под действием внешних нагрузок, определены. Теперь рассмотрим узел F. Вырезав этот узел и составив для сил $\overline{N}_5$, $\overline{N}_6$, $\overline{N}_7$ и $\overline{N}_9$, действующих на него, два уравнения равновесия, проверим их. Если после подстановки в уравнения числовых значений левые части их приведутся к нулю, задача решена правильно.

Найденные значения усилий в стержнях целесообразно представить в виде таблицы:

№ стержней	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Усилия, *кн*	—36,8	26	20	—24	10	26	—6	—34	34

Задача 110-17. Определить усилия в стержнях *4*, *5* и *6* фермы, нагруженной тремя силами: $P_1 = 10$, $P_2 = 20$ и $P_3 = 30$ *кн*, как показано на рис. 142, *а* (ферма задачи 109-17).

Решение.

1. Так же как и при решении методом вырезания узлов, прежде всего определяем реакции опор; в данном случае они те же, что и в предыдущем примере: $X_B = 10$ *кн*; $Y_B = 24$ *кн* и $R_A = 26$ *кн*.

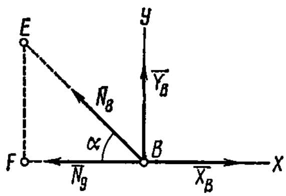


Рис. 147

2. Разрежем ферму через стержни *4*, *5* и *6* и, отбросив правую ее часть, заменим действие правой части на левую силами $\overline{N}_4$, $\overline{N}_5$ и $\overline{N}_6$ (рис. 148). На левую часть теперь действуют шесть сил, три из них известны ($R_A = 26$ *кн*, $P_1 = 10$ *кн*, $P_2 = 20$ *кн*), а три силы (N_4, N_5 и N_6) нужно определить.

3. Составим три уравнения равновесия:

$$\sum Y_i = 0; \quad R_A - N_5 \sin\beta - P_2 = 0; \tag{1}$$

$$\sum M_D(\overline{P}_i) = 0; \quad -R_A \cdot AC + N_6 \cdot DC = 0; \tag{2}$$

$$\sum M_F(\overline{P}_i) = 0; \quad -R_A \cdot FA + P_1 \cdot FE + P_2 \cdot FC - N_4 \cdot FE = 0. \tag{3}$$

Из уравнения (1)

$$N_5 = \frac{R_A - P_2}{\sin\beta} = \frac{26-20}{0,6} = 10 \text{ кн (стержень } 5 \text{ растянут).}$$

Из уравнения (2)

$$N_6 = \frac{R_A \cdot AC}{DC} = \frac{26 \cdot 3}{3} = 26 \text{ кн (стержень } 6 \text{ растянут).}$$

Из уравнения (3)

$$N_4 = \frac{P_2 \cdot FC + P_1 \cdot FE - R_A \cdot FA}{FE} = \frac{20 \cdot 4 + 10 \cdot 3 - 26 \cdot 7}{3} = -24 \text{ кн}$$

(стержень *4* сжат).

Сравнивая найденные числовые значения усилий в *4*, *5* и *6* стержнях фермы с теми, которые для этих же стержней получены в задаче 109-17, видим, что они одинаковы.

Правильность решения здесь можно проверить, составив уравнение проекций сил на ось x. Для проверки это уравнение вполне надежно, так как в него входят все три искомые силы. Проверку решения этим способом рекомендуется произвести самостоятельно.

● **Задача 111-17.** Кронштейн $ABCD$ (рис. 149) изготовлен из четырех шарнирно соединенных между собой стержней. На опоре кронштейн закреплен также при помощи шарниров. К шарниру A прикреплен груз, масса которого известна.

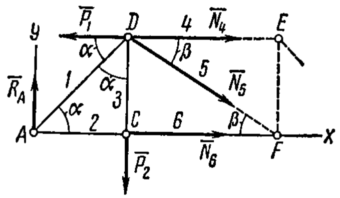


Рис. 148

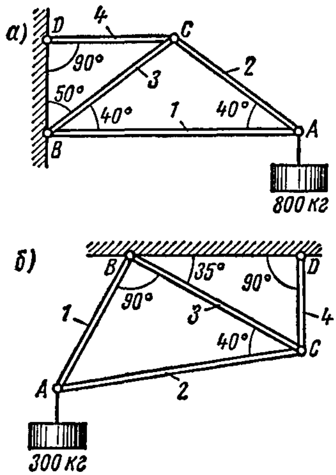


Рис. 149

Определить методом вырезания узлов усилия во всех четырех стержнях.

Ответ:

Вариант	а)				б)			
Стержни	*AB*	*AC*	*BC*	*DC*	*AB*	*AC*	*BC*	*DC*
Усилия, *кн*	−9,35	12,2	−12,2	18,7	3,83	−2,21	2,68	−1,73

● **Задача 112-17.** Определить методом вырезания узлов усилия во всех стержнях фермы, нагруженной, как показано на рис. 150,

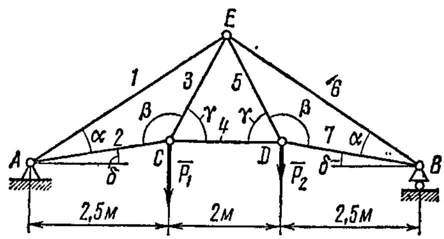


Рис. 150

двумя силами: $P_1 = 30$ *кн* и $P_2 = 10$ *кн*. Углы $\alpha = 25°$; $\beta = 125°$; $\gamma = 65°$ и $\delta = 10°$.

Ответ.

№ стержней	1	2	3	4	5	6	7
Усилия, *кн*	—53,3	44,4	41,6	26,1	17,4	—39,9	33,2

ГЛАВА IV

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

При решении задач, приведенных в этой главе, необходимо использовать не две оси координат, которые всегда можно расположить в одной плоскости — в плоскости рисунка, иллюстрирующего задачу, а три взаимно перпендикулярные оси.

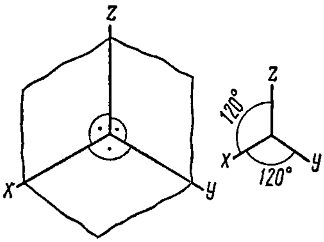


Рис. 151

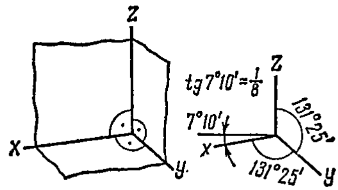


Рис. 152

Эти оси нельзя расположить в одной плоскости и при изображении пространственной системы сил на рисунке надо использовать одну из принятых в машиностроительном черчении аксонометрических проекций (ГОСТ 2.305—68. Изображения — виды, разрезы, сечения).

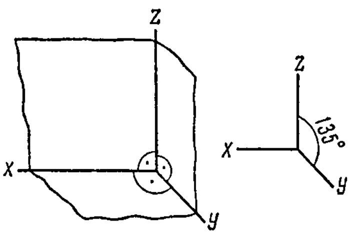


Рис. 153

На рис. 151 показано изображение трех взаимно перпендикулярных плоскостей в изометрической проекции. Пересечение двух вертикальных плоскостей определяет положение вертикальной оси z, пересечением обеих вертикальных плоскостей с горизонтальной определяются положения двух горизонтальных осей x и y.

На рис. 152 представлены те же три взаимно перпендикулярные плоскости в диметрической проекции, а на рис. 153 — в фронтальной диметрической проекции. На каждом рисунке справа показано положение осей при изображении соответствующей проекции.

Если при решении задач, в которых рассматривается пространственная система сил, трудно представить взаимное расположение сил или их расположение относительно выбранных осей координат, то следует изготовить из плотной бумаги модель трех пересекающихся под прямым углом плоскостей, а линии пересечения плоскостей выделить цветными линиями и обозначить их соответственно x, y и z. В такой модели трех взаимно перпендикулярных осей можно помещать модели систем сил, рассматриваемых в задаче, изготовленные из пластилина, проволочек и спичек.

§ 18-4. Правило параллелепипеда сил

Простейшую пространственную систему сходящихся сил образуют три силы, приложенные к одной точке.

Для сложения таких трех сил применяется правило параллелепипеда (рис. 154). Если даны силы $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и $\overline{P}_3$, то заменяющая их действие равнодействующая $\overline{R}$ по модулю и направлению соответ-

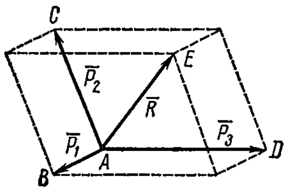


Рис. 154

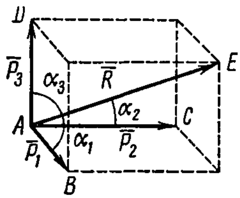


Рис. 155

ствует диагонали AE параллелепипеда, ребра которого AB, AC и AD соответствуют трем силам.

В частном случае, который наиболее характерен для решения практических задач, три данные силы $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и $\overline{P}_3$ взаимно перпендикулярны и тогда при их сложении образуется прямоугольный параллелепипед (рис. 155).

В этом случае модуль равнодействующей

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2},$$

а направление $\overline{R}$ относительно каждой из составляющих сил можно найти по формулам

$$\cos\alpha_1 = \frac{P_1}{R}; \quad \cos\alpha_2 = \frac{P_2}{R}; \quad \cos\alpha_3 = \frac{P_3}{R}.$$

Так же как и правило параллелограмма (см. § 1-1, 5-2 и 6-2), правило параллелепипеда можно использовать не только при сложении сил, но и при разложении данной силы на три составляющие. Наиболее часто производят разложение силы на составляющие, действующие по трем взаимно перпендикулярным направлениям.

Задача 113-18. Три цепи одинаковой длины l соединены вместе кольцом A (рис. 156, a). Оставшиеся свободными концы цепей закреплены в трех точках B, C и D таким образом, что эти точки образуют вершины куба. Как необходимо установить под кольцо A

подпорку AE и какую длину она должна иметь, чтобы кольцо A располагалось относительно точек B, C и D как четвертая вершина куба? При этом цепь AB должна быть натянута силой P, а цепи AD и AC—силами $2P$ каждая. Определить также усилие в подпорке AE. Весом подпорки пренебречь.

Решение.

1. Из точки A (рис. 156, *б*) вдоль цепей отложим заданные силы: вдоль цепи AB—силу $\overline{P}$, вдоль цепей AC и CD—силы $2\overline{P}$. Построив

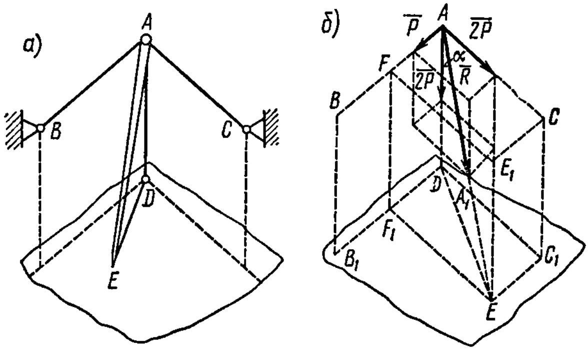


Рис. 156

на них параллелепипед, получим в нем диагональ AA_1, выражающую равнодействующую трех усилий в цепях.

Вдоль линии действия равнодействующей $\overline{R}$ нужно установить подпорку AE, которая должна соответствовать диагонали параллелепипеда $ACE_1FDC_1EF_1$, подобного силовому параллелепипеду.

2. Находим модуль равнодействующей:

$$R=\sqrt{P_1^2+P_2^2+P_3^2}=\sqrt{P^2+2(2P)^2}=\sqrt{P^2+8P^2}, \quad R=3P.$$

3. Из подобия двух показанных на рис. 156, *б* параллелепипедов следует пропорция

$$\frac{AC}{2P}=\frac{AF}{P}=\frac{AE}{R}.$$

Зная, что длина цепи $AC=l$ и $R=3P$, находим длину подпорки AE:

$$AE=\frac{R\cdot AC}{2P}=\frac{3l}{2},$$

а также расстояние $AF=C_1E$:

$$AF=\frac{AC\cdot P}{2P}=\frac{l}{2}.$$

Таким образом, усилие в подпорке равно $3P$, длина подпорки $1{,}5l$, а установить ее нужно так, чтобы нижний конец E находился от DB_1 на расстоянии $F_1E=l$ и от DC_1—на расстоянии $C_1E=$ $=AF=\frac{l}{2}$.

Решение этой задачи после выполнения пункта 2 можно продолжать иным путем. Можно найти угол α, образуемый $\overline{R}$ с вертикальной цепью, а затем определить из $\triangle ADE$ длину AE и т. д.

Задача 114-18. Найти усилия в стержне AB и цепях AC и AD, поддерживающих груз Q весом 42 *кГ*, если $AB = 145$ *см*, $AC = 80$ *см*, $AD = 60$ *см*. Плоскость прямоугольника $CADE$ горизонтальна, а плоскости V и W вертикальны. Крепление в точке B шарнирное (рис. 157, *а*).

Решение.

1. Разложим силу $\overline{Q}$ на три составляющие $\overline{T}_B$, $\overline{T}_C$ и $\overline{T}_D$, направленные соответственно вдоль стержня AB и цепей AC и AD. Для этого, приняв вектор $\overline{Q}$ за диагональ AA_1, построим силовой параллелепипед, из которого видно, что составляющая $\overline{T}_B$ сжимает стержень AB, а составляющие $\overline{T}_C$ и $\overline{T}_D$ растягивают цепи AC и AD (рис. 157, *б*).

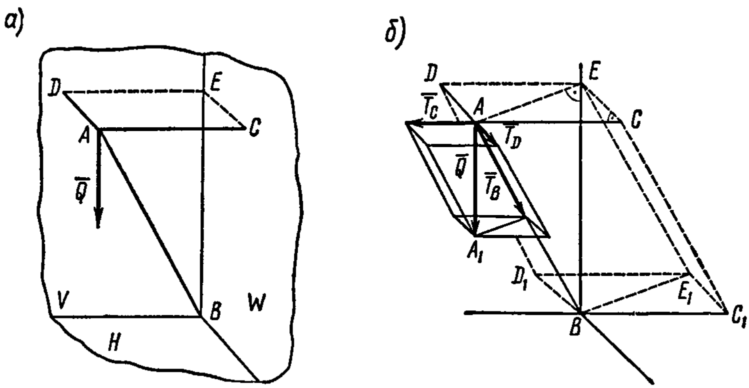


Рис. 157

2. Соответственно приняв отрезок BE за диагональ, а стержень AB и цепи AC и AD — за ребра, построим параллелепипед, подобный силовому (см. рис. 157, *б*).

3. Из подобия параллелепипедов, полученных на рис. 157, *б*, следует пропорция

$$\frac{Q}{BE} = \frac{T_C}{AC} = \frac{T_D}{AD} = \frac{T_B}{AB}. \qquad (a)$$

4. Длины трех отрезков из четырех, входящих в пропорцию, известны. Длина отрезка BE неизвестна. Найдем ее из рассмотрения прямоугольных треугольников ABE и ACE:

$$BE^2 = AB^2 - AE^2 = AB^2 - (AC^2 + CE^2) = AB^2 - AC^2 - AD^2,$$

откуда

$$BE = \sqrt{AB^2 - AC^2 - AD^2} = \sqrt{145^2 - 80^2 - 60^2} = 105 \text{ см}.$$

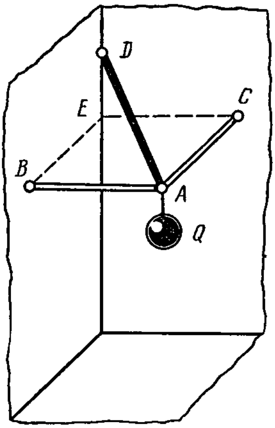


Рис. 158

5. Рассматривая теперь первое отношение пропорции (а) вместе со вторым, а затем с третьим и четвертым, находим

$$T_C = \frac{Q \cdot AC}{BE} = \frac{42 \cdot 80}{105} = 32 \text{ кГ};$$

$$T_D = \frac{Q \cdot AD}{BE} = \frac{42 \cdot 60}{105} = 24 \text{ кГ};$$

$$T_B = \frac{Q \cdot AB}{BE} = \frac{42 \cdot 145}{105} = 58 \text{ кГ}.$$

● **Задача 115-18.** Найти усилия в стержнях AB, AC, а также в цепи AD, поддерживающих груз $Q = 4$ *кн*, если $AB = 48$ *см*, $AC = 60$ *см*, $AD = 79{,}4$ *см*. Площадь прямоугольника $ABEC$ горизонтальна, а плоскости крепления шарниров B и C вертикальны (рис. 158).

Ответ: 9,6 *кн*; 12 *кн*; 15,9 *кн*.

§ 19-4. Проекция силы на три взаимно перпендикулярные оси. Определение равнодействующей системы пространственных сил, приложенных к точке

Если требуется определить проекции силы $\overline{P}$ на три взаимно перпендикулярные оси (рис. 159), то обычно силу проектируют сначала на одну из плоскостей (например, горизонтальную), а уже затем на оси, расположенные в этой плоскости. При этом нужно обратить внимание на то, что в отличие от проекций силы на оси, являющихся скалярами, проекция силы на плоскость ($\overline{P}_{xy}$ на рис. 159) — величина векторная (Е. М. Никитин, § 39).

Легко заметить, что на трех взаимно перпендикулярных проекциях можно построить прямоугольный параллелепипед, диагональю которого является проектируемый вектор.

Из рис. 159 видно, что проекция на горизонтальную плоскость

$$P_{xy} = P \cos \alpha,$$

поэтому

$$X = P \cos \alpha \cos \alpha_x; \quad Y = P \cos \alpha \cos \alpha_y \quad \text{и} \quad Z = P \cos \varphi_z.$$

Если же известны углы φ_x и φ_y (на рисунке они не показаны), образуемые вектором $\overline{P}$ с осями x и y, то его проекции на эти оси соответственно равны $X = P \cos \varphi_x$ и $Y = P \cos \varphi_y$.

При помощи проекций сил на три оси легко определить равнодействующую системы сил, приложенных к точке.

Для этого необходимо:

1) выбрать расположение осей так, чтобы проекции всех сил определились простейшим образом;

2) найти проекции всех сил на каждую из осей;

3) сложить проекции всех сил на каждую из осей и найти таким образом три проекции искомой равнодействующей на оси:

$$X_R = \sum X_i; \quad Y_R = \sum Y_i \text{ и } Z_R = \sum Z_i;$$

4) определить модуль равнодействующей $\overline{R}$:

$$R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2};$$

5) определить направление равнодействующей, найдя какие-либо два угла из трех:

$$\cos\varphi_x = \frac{X_R}{R}; \quad \cos\varphi_y = \frac{Y_R}{R}; \quad \cos\varphi_z = \frac{Z_R}{R}.$$

Задача 116-19. На одну из вершин куба действуют пять сил таким образом, что три силы направлены вдоль ребер, сходящихся в этой вершине; четвертая сила направлена по диагонали грани,

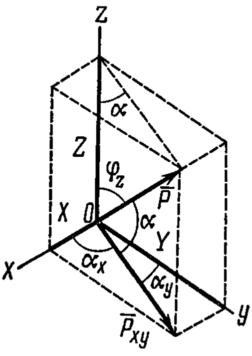


Рис. 159

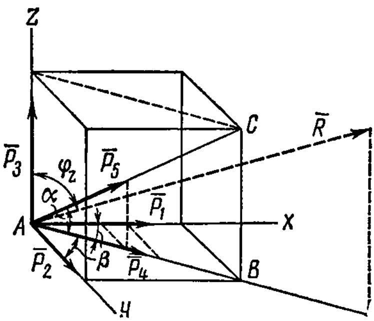


Рис. 160

а пятая — вдоль диагонали самого куба. Определить равнодействующую этих сил, считая, что численно они равны между собой.

Решение.

1. Приняв точку A за вершину куба, изобразим данные силы. Силы $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и $\overline{P}_3$ действуют вдоль ребер куба; сила $\overline{P}_4$ — вдоль диагонали AB нижней грани и сила $\overline{P}_5$ — вдоль диагонали AC куба (рис. 160).

Так как, по условию, модули сил равны, то примем

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P.$$

2. Ось x совместим с ребром куба, вдоль которого действует сила $\overline{P}_1$; ось y — с ребром, вдоль которого действует сила $\overline{P}_2$, и ось z — с третьим ребром.

3. Найдем проекции сил на каждую из осей:

$$X_1 = P_1, \quad Y_1 = 0, \quad Z_1 = 0,$$
$$X_2 = 0, \quad Y_2 = P_2, \quad Z_2 = 0,$$
$$X_3 = 0, \quad Y_3 = 0, \quad Z_3 = P_3,$$
$$X_4 = P_4 \cos\beta, \quad Y_4 = P_4 \cos\beta, \quad Z_4 = 0,$$
$$X_5 = P_5 \cos\alpha \cos\beta, \quad Y_5 = P_5 \cos\alpha \cos\beta, \quad Z_5 = P_5 \sin\alpha.$$

4. Сложим проекции на каждую ось и найдем проекции равнодействующей, учитывая, что модули всех сил равны между собой и что $\beta = 45°$, а $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = 0{,}707$. Следовательно, $\alpha = 35°20'$:

$$X_R = P(1 + \cos 45° + \cos 35°20' \cos 45°) = 2{,}28P;$$
$$Y_R = P(1 + \cos 45° + \cos 35°20' \cos 45°) = 2{,}28P;$$
$$Z_R = P(1 + \sin 35°20') = 1{,}58P.$$

Как видно, проекции равнодействующей на оси x и y равны между собой: $X_R = Y_R = 2{,}28P$.

Равенство проекций получается из-за симметричности расположения сил относительно диагональной плоскости куба (плоскости, в которой расположен $\triangle ABC$).

5. Определим модуль равнодействующей:

$$R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2} = P\sqrt{2 \cdot 2{,}28^2 + 1{,}58^2} = 3{,}59P.$$

6. Так как силы расположены симметрично относительно диагональной плоскости куба, линия действия равнодействующей находится в плоскости симметрии расположения сил, проходящей через ось z. Поэтому направление равнодействующей определяется углом φ_z, образуемым линией действия $\bar{R}$ с осью z:

$$\cos\varphi_z = \frac{Z_R}{R} = \frac{1{,}58}{3{,}59} = 0{,}440, \quad \varphi_z = 63°50' \approx 64°.$$

На рис. 160 положение равнодействующей показано штриховым вектором $\bar{R}$.

§ 20-4. Равновесие пространственной системы сходящихся сил

Если система сходящихся сил уравновешена, то ее равнодействующая $R = 0$, а это означает, что и проекции равнодействующей на три взаимно перпендикулярные оси равны нулю ($X_R = 0$, $Y_R = 0$, $Z_R = 0$). Отсюда образуются три уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0;$$
$$\sum Y_i = 0;$$
$$\sum Z_i = 0.$$

При помощи этих уравнений и решаются задачи на равновесие пространственной системы сходящихся сил.

Уравнений равновесия—три, следовательно, статически определимой является такая пространственная система сходящихся сил, в которой неизвестных сил не более трех.

Задача 117-20. Груз, масса которого $m = 500$ *кг*, подвешен на кронштейне $ABCD$, состоящем из трех стержней *1*, *2* и *3*. Стержни *1* и *2* образуют в месте соединения прямой угол и расположены в горизонтальной плоскости. Стержень *3* образует с горизонтальной плоскостью угол $\alpha = 40°$ (рис. 161, *а*). Определить усилия, вызванные действием груза в стержнях. Соединения стержней между собой и с вертикальной стенкой шарнирные. Весом стержней пренебречь.

Решение.

1. На точку C кронштейна действует вертикальная нагрузка, равная весу массы груза, поэтому

$$G = mg = 500 \cdot 9{,}81 = 4900\ н = 4{,}9\ кн.$$

2. Действие веса G на кронштейн уравновешивается реакциями трех стержней. Известно, что реакции направлены вдоль стержней (так как соединения стержней шарнирные). Нужно определить их модули и направление каждой реакции, т. е. определить, какой из стержней сжат, а какой растянут.

Мысленно разрежем стержни вблизи точки C и изобразим узел C, образуемый соединением трех стержней отдельно (рис. 161, *б*) вместе с четырьмя действующими на него силами: вертикально вниз действует известная сила $G = 4{,}9$ *кн*, а вдоль стержней действуют три их реакции: $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$ и $\bar{T}_3$. Причем условно считаем, что все стержни растянуты, поэтому на рис. 161, *б* все реакции направлены от узла C.

3. Расположим оси координат, как показано на рисунке. Замечая, что осью x прямой угол ACB разделен пополам ($\angle ACO = \angle BCO = \beta = 45°$), составим три уравнения равновесия для пространственной системы сходящихся сил:

$$\sum X_i = 0;\quad T_1 \cos\beta + T_2 \cos\beta + T_3 \cos\alpha = 0; \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0;\quad T_1 \sin\beta - T_2 \sin\beta = 0; \qquad (2)$$

$$\sum Z_i = 0;\quad -T_3 \sin\alpha - G = 0. \qquad (3)$$

4. Решаем полученную систему уравнений.

Из уравнения (3)

$$T_3 = -\frac{G}{\sin\alpha} = -\frac{4{,}9}{\sin 40°} = -7{,}62\ кн.$$

Знак «минус» показывает, что реакция $\bar{T}_3$ направлена в сторону, противоположную той, которая изображена на рисунке. Значит стержень *3* сжат усилием 7,62 *кн*.

Из уравнения (2) $T_1 = T_2$.

Из уравнения (1) $T_1 = T_2 = -\dfrac{T_3 \cos\alpha}{2\cos\beta} = \dfrac{7{,}62 \cos 40°}{2\cos 45°} = 4{,}13$ *кн*.

Числовые значения реакций $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$ получились положительные, значит стержни 1 и 2 растянуты силами по 4,13 *кн*.

5. Если найденные значения реакций стержней перевести в единицы технической системы, то

$$T_1 = T_2 = 422\ кГ;\ T_3 = -777\ кГ.$$

Правильность перевода из единиц СИ в единицы технической системы рекомендуется проверить самостоятельно.

Задача 118-20. Переносный кран, поднимающий груз массой $m = 2000\ кг$, устроен так, как указано на рис. 162, *а*; $AB = AD = AE = 2м$;

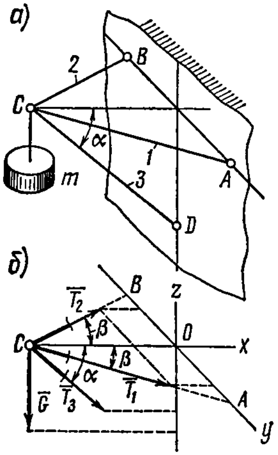


Рис. 161

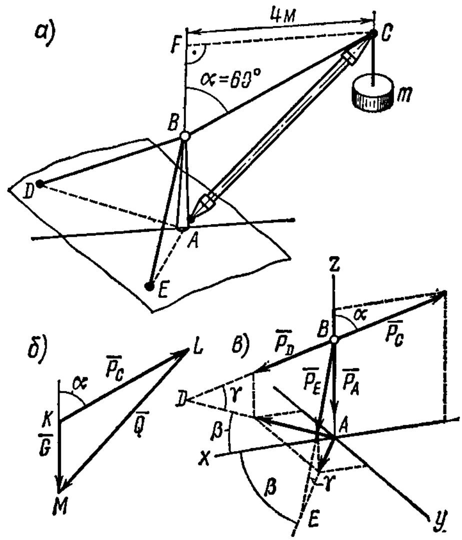


Рис. 162

угол $DAE = 120°$, плоскость ABC, в которой расположена стрела AC крана, делит двугранный угол DAE пополам. Определить силу, сжимающую вертикальную стойку AB, и силы, растягивающие тросы BD и BF; весом частей крана пренебречь.

Решение.

1. В задаче рассматривается равновесие системы тел — стрелы и стойки, связанных струной BC. Прежде чем приступить к определению усилий в стойке и тросах, необходимо найти натяжение струны BC.

2. В точке C на кран действует вес $\overline{G}$ груза, масса которого m, следовательно,

$$G = mg = 2000 \cdot 9{,}81 = 19600\ н = 19{,}6\ кн.$$

Разложим вес $\overline{G}$ на две составляющие, действующие вдоль струны BC и стрелы AC, воспользовавшись правилом треугольника (рис. 162, *б*). Для этого из произвольной точки K построим вектор $\overline{G}$, а затем из его начала и конца проведем линии, параллельные BC и AC. В получившемся силовом треугольнике KLM ($KL \parallel BC$ и $LM \parallel CA$) сторона KL изображает силу $\overline{P}_C$, растягивающую струну BC, а сторона LM — силу $\overline{Q}_A$ сжимающую стрелу AC.

Из построения следует, что $\triangle KLM \backsim \triangle BCA$, поэтому $P_C/G = BC/BA$. Отсюда $P_C = G \cdot BC/BA$.

Не известную по условию задачи длину струны BC легко найти, рассмотрев прямоугольный треугольник BCF (см. рис. 162, *а*)

$$BC = \frac{CF}{\sin\alpha}.$$

Таким образом, $P_C = G\frac{CF}{BA\sin\alpha} = 19{,}6\frac{4}{2\sin 60^\circ} = 45{,}3$ *кн*.

3. Перенесем силу $\overline{P}_C$ вдоль линии ее действия из точки C в точку B и рассмотрим равновесие узла B, на который, кроме нагрузки $P_C = 45{,}3$ *кн*, действуют реакции трех связей: $\overline{P}_A$ — реакция стойки, $\overline{P}_D$ и $\overline{P}_E$ — реакции тросов BD и BE. В соответствии с общим правилом считаем, что все связи растянуты (рис. 162, *в*).

4. Расположим систему координатных осей, как показано на рис. 162, *в*, и составим три уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad P_E\cos\gamma\cos\beta + P_D\cos\gamma\cos\beta - P_C\sin\alpha = 0; \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad P_E\cos\gamma\sin\beta - P_D\cos\gamma\sin\beta = 0; \tag{2}$$

$$\sum Z_i = 0; \quad -P_E\sin\gamma - P_D\sin\gamma - P_A + P_C\cos\alpha = 0. \tag{3}$$

Замечая, что $\gamma = 45^\circ$ (так как треугольники BAE и BAD имеют равные катеты: $BA = AE = AD$) и $\alpha = \beta = 60^\circ$ (так как угол DAE, равный 120°, осью x разделен пополам), решаем получившиеся уравнения.

Из уравнения (2) $P_E = P_D$.

Теперь уравнения (1) и (3) примут такой вид:

$$2P_E\cos\gamma\cos\beta - P_C\sin\alpha = 0; \tag{4}$$

$$-2P_E\sin\gamma - P_A + P_C\cos\alpha = 0. \tag{5}$$

Умножим обе части уравнения (5) на $\cos\beta$ и сложим его после этого с уравнением (4):

$$-P_C\sin\alpha - P_A\cos\beta + P_C\cos^2\alpha = 0.$$

Отсюда

$$P_A = \frac{P_C(\cos^2\alpha - \sin\alpha)}{\cos\beta} = \frac{45{,}3(\cos^2 60^\circ - \sin 60^\circ)}{\cos 60^\circ} = 45{,}3(\cos 60^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ).$$

$$P_A = -55{,}8 \text{ кн}.$$

Знак «минус» указывает на то, что реакция $\overline{P}_A$ направлена не от узла B, а к узлу, т. е. стойка сжата силой 55,8 *кн*.

Подставив найденное значение $P_A = -55{,}8$ *кн* в уравнение (5), найдем реакции P_E и P_D:

$$P_E = P_D = \frac{P_C \cos\alpha - P_A}{2 \sin\gamma} = \frac{45{,}3 \cos 60° - (-55{,}8)}{2 \sin 45°},$$

откуда

$$P_E = P_D = 55{,}4 \text{ кн}.$$

Тросы AD и AE растянуты усилиями по 55,4 *кн*.

● **Задача 119-20.** Три стержня AD, BD и CD (рис. 163), прикреплены в точках A, B и C к плоской поверхности шарнирами. Шарнирное соединение D трех стержней нагружено силой $P = 2$ *кн*, линия действия которой расположена в одной плоскости со стержнем DC. Определить реакции стержней.

Ответ:

Схема	Реакции стержней, *кн*		
	AD	*BD*	*CD*
а	2,45	2,45	—4
в	—1,80	—1,80	2,45

● **Задача 120-20.** Пространственная ферма состоит из шести стержней (рис. 164). Соединения стержней между собой и в местах их прикрепления к опоре шарнирные. На шарнир A действует

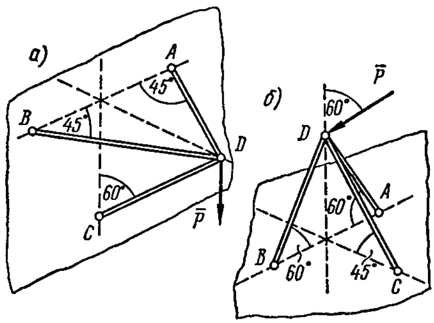


Рис. 163

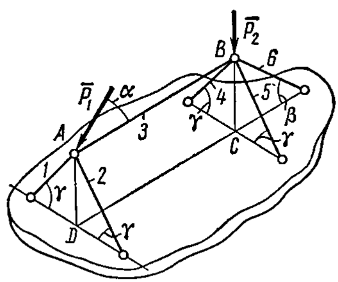


Рис. 164

сила $P_1 = 10$ *кн* под углом $\alpha = 60°$ к вертикали, а на шарнир B действует вертикальная сила $P_2 = 15$ *кн*. Обе силы расположены в вертикальной плоскости, проходящей через $ABCD$.

Определить усилия в стержнях, если $\beta = 50°$, $\gamma = 60°$.

Ответ:

№ стержней	1	2	3	4	5	6
Усилия, *кн*	—5	—5	5	—12,1	—12,1	7,78

§ 21-4. Момент силы относительно оси

Чтобы определить момент силы $\overline{P}$ относительно заданной или выбранной оси, например оси z (рис. 165), необходимо выполнить следующие операции:

1) расположить плоскость H перпендикулярно оси z;

2) определить проекцию силы $\overline{P}$ на плоскость H — найти $\overline{P}_H$;

3) из точки пересечения оси с плоскостью (из точки O) провести перпендикуляр к направлению проекции $\overline{P}_H$ и определить длину этого перпендикуляра OA — плечо силы $\overline{P}_H$;

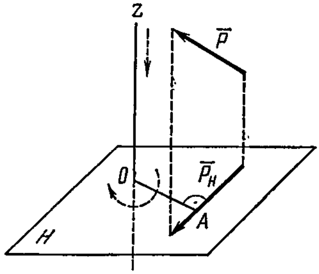


Рис. 165

4) определить знак момента, придерживаясь такого правила: посмотрим на плоскость H со стороны положительного направления оси, если увидим, что проекция $\overline{P}_H$ поворачивает плечо против хода часовой стрелки, значит момент имеет положительный знак; а если проекция $\overline{P}_H$ поворачивает плечо по часовой стрелке (как это показано, например, на рис. 165), момент имеет отрицательный знак;

5) находим числовое значение момента силы $\overline{P}$ относительно оси; для этого P_H — модуль проекции силы $\overline{P}$ на плоскость, перпендикулярную к оси, умножаем на плечо OA.

Таким образом (см. рис. 165) $M_z(\overline{P}) = -P_H \cdot OA$.

Момент силы относительно оси, так же как и момент силы относительно точки, измеряется по Международной системе (СИ) в ньютон-метрах (*н·м*) или в килоньютон-метрах (*кн·м*), а по технической системе (МКГСС) — в *кГ·м*.

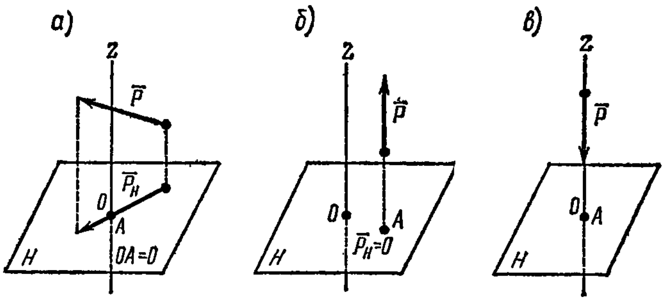


Рис. 166

Для успешного решения задач и облегчения составления уравнений моментов относительно осей нужно иметь в виду три частных случая, в которых момент силы относительно оси равен нулю (рис. 166):

Случай 1-й (рис. 166, *а*). Сила $\overline{P}$ или линия ее действия пересекает ось; в этом случае плечо $OA = 0$, поэтому $P_H \cdot OA = 0$.

Случай 2-й (рис. 166, *б*). Линия действия силы $\bar{P}$ параллельна оси; в этом случае $P_H = 0$, поэтому $P_H \cdot OA = 0$.

Случай 3-й (рис. 166, *в*). Линия действия силы $\bar{P}$ совпадает с осью; в этом случае и $P_H = 0$ и плечо $OA = 0$.

Задача 121-21. К вершинам квадрата $ABCD$ ($AB = AD = 2$ *м*), расположенного в горизонтальной плоскости, приложены силы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ и $\bar{P}_4$, как показано на рис. 167. Сила $\bar{P}_1$ направлена по диагонали AC; сила $\bar{P}_2$ действует вверх перпендикулярно к плоскости квадрата; сила $\bar{P}_3$ действует в плоскости квадрата, и ее направление образует с диагональю CA угол $\alpha = 20°$; сила $\bar{P}_4$ действует в плоскости, перпендикулярной к плоскости квадрата, и направлена к стороне DC под углом $\beta = 30°$. Определить моменты каждой силы относительно осей x, y и z.

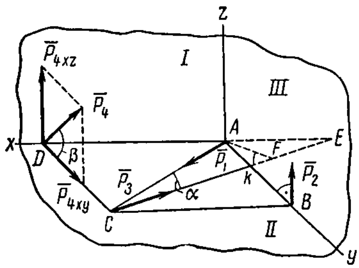


Рис. 167

Модули сил $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 5$ *кн*.

Решение.

1. Замечаем, что расположение осей, показанное на рис. 167, определяет положение трех взаимно перпендикулярных плоскостей; плоскости *I*, перпендикулярной к оси y, плоскости *II*, перпендикулярной к оси z, и плоскости *III*, перпендикулярной к оси x.

2. Определяем моменты силы $\bar{P}_1$. Сила $\bar{P}_1$ приложена в точке A пересечения всех трех осей, следовательно, согласно первому частному случаю (см. рис. 166, *а*),

$$M_x(\bar{P}_1) = 0; \quad M_y(\bar{P}_1) = 0; \quad M_z(\bar{P}_1) = 0.$$

3. Определяем моменты силы $\bar{P}_2$.

Сила $\bar{P}_2$, приложенная в точке B, пересекает ось y и параллельна оси z. Следовательно, согласно первому и второму частным случаям (см. рис. 166, *в*)

$$M_y(\bar{P}_2) = 0 \quad \text{и} \quad M_z(\bar{P}_2) = 0.$$

Чтобы определить момент силы $\bar{P}_2$ относительно оси x, необходимо найти проекцию $\bar{P}_2$ на плоскость *III*, перпендикулярную к оси x. Сила $\bar{P}_2$ расположена в этой плоскости и, следовательно, проектируется полностью $P_{2yz} = P_2$. Плечом является сторона AB квадрата. Знак момента положительный, так как если посмотреть от точки D вдоль оси x на плоскость *III*, то увидим, что сила $\bar{P}_2$ поворачивает плечо AB против хода часовой стрелки. Поэтому

$$M_x(\bar{P}_2) = P_2 \cdot AB = 5 \cdot 2 = 10 \ кн \cdot м.$$

4. Определяем моменты силы $\bar{P}_3$.

Сила $\bar{P}_3$ расположена в горизонтальной плоскости. В этой же плоскости расположены оси x и y. Поэтому линия действия силы $\bar{P}_3$ пересекает ось x (в точке E) и ось y (в точке K). Значит

$$M_x(\bar{P}_3)=0 \quad \text{и} \quad M_y(\bar{P}_3)=0.$$

Плоскость, в которой расположена сила $\bar{P}_3$, перпендикулярна оси z, значит $P_{3xy}=P_3$. Плечо AF силы $\bar{P}_3$ найдем из треугольника AFC:

$$AF=AC\sin\alpha=AB\sqrt{2}\sin\alpha.$$

Знак момента положительный (если посмотреть на плоскость II со стороны оси z). Поэтому

$$M_z(\bar{P}_3)=P_3\cdot AF=P_3\cdot AB\sqrt{2}\sin\alpha=5\cdot 2\cdot\sqrt{2}\sin 20^\circ=4{,}83\ \textit{кн}\cdot\textit{м}.$$

5. Определяем моменты силы $\bar{P}_4$.

Линия действия силы $\bar{P}_4$ пересекает ось x, следовательно,

$$M_x(\bar{P}_4)=0.$$

Спроектируем силы $\bar{P}_4$ на плоскости I и II:

$$P_{4xz}=P_4\sin\beta \quad \text{и} \quad P_{4xy}=P_4\cos\beta;$$

плечом силы $\bar{P}_4$ является сторона квадрата AD.

$$M_y(\bar{P}_4)=-P_{4xz}\cdot AD=-P_4\sin\beta\cdot AD=-5\sin 30^\circ\cdot 2=-5\ \textit{кн}\cdot\textit{м};$$
$$M_z(\bar{P}_4)=P_{4xy}\cdot AD=P_4\cos\beta\cdot AD=5\cos 30^\circ\cdot 2=8{,}66\ \textit{кн}\cdot\textit{м}.$$

§ 22-4. Равновесие произвольной пространственной системы сил

Произвольную пространственную систему сил, так же как и плоскую, можно привести к одной точке и заменить главным вектором $\bar{R}_{гл}$ и главным моментом $M_{гл}$. Только в этом случае линия действия главного вектора может находиться не в плоскости действия главного момента.

Если $\bar{R}_{гл}=0$ и $\bar{M}_{гл}=0$, то система сил уравновешена и отсюда образуется система шести уравнений равновесия:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum X_i=0;\\
&\sum Y_i=0;\\
&\sum Z_i=0;\\
&\sum M_x(\bar{P}_i)=0;\\
&\sum M_y(\bar{P}_i)=0;\\
&\sum M_z(\bar{P}_i)=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Первые три уравнения (уравнения проекций) получены из условия $\overline{R}_{гл}=0$. Если главный вектор равен нулю, то и алгебраические суммы проекций всех сил на каждую из осей также равны нулю.

Последние три уравнения (уравнения моментов) получены из условия $M_{гл}=0$. Если главный момент системы сил равен нулю, то алгебраические суммы моментов сил относительно каждой из осей равны нулю.

Для облегчения составления уравнений равновесия тело, равновесие которого рассматривается, целесообразно изображать вместе с действующими на него силами в проекциях на три основные плоскости, т. е. изображать вид спереди, вид сверху и один боковой вид — вид слева или вид справа (см. задачи 123-22, 124-22 и 125-22).

В частном случае линии действия сил, образующих пространственную систему, могут оказаться параллельными. Тогда одну из осей (например, ось z) выгодно расположить параллельно силам (рис. 168), а две другие оси расположатся в плоскости, перпендикулярной к линиям действия сил.

Легко понять, что для уравновешенной пространственной системы параллельных сил вместо шести уравнений можно составить лишь три: алгебраическую сумму проекций сил на ось, параллельную данным силам, и два уравнения моментов относительно двух других осей. Остальные уравнения превратятся в тождество вида $0=0$.

В соответствии с расположением осей (см. рис. 168) уравнения равновесия имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}&\sum Z_i=0;\\&\sum M_x(\overline{P}_i)=0;\\&\sum M_y(\overline{P}_i)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Для пространственной системы параллельных сил можно составить лишь три уравнения равновесия, поэтому, чтобы задача была

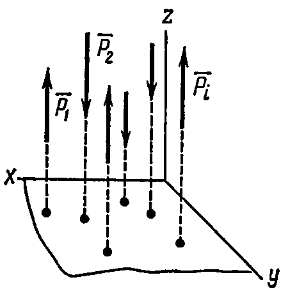


Рис. 168

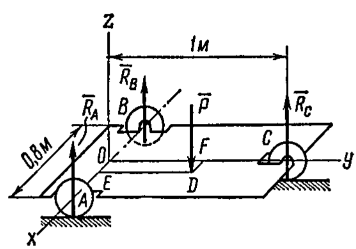


Рис. 169

статически определимой, в ней должно содержаться не более трех неизвестных сил.

Задача 122-22. На рис. 169 схематично изображена трехколесная платформа для перевозки грузов. На платформе лежит груз

$P=8$ *кн* таким образом, что его вес можно считать приложенным в точке D, причем $EO=DF=0{,}1$ *м* и $DE=OF=0{,}5$ *м*.

Определить силы давления, производимые колесами на горизонтальную опорную плоскость. Собственным весом платформы пренебречь.

Решение.

1. Силы давления, производимые колесами, численно равны реакциям опоры, поэтому приложим к каждому колесу перпендикулярно к опорной плоскости реакции $\bar{R}_A$, $\bar{R}_B$ и $\bar{R}_C$. Образовалась система четырех параллельных сил, расположенных в пространстве.

2. Расположим оси координат, как показано на рис. 169, и составим уравнения равновесия:

$$\sum Z_i=0; \quad R_A+R_B+R_C-P=0; \tag{1}$$

$$\sum M_x(\bar{P}_i)=0; \quad -P\cdot DE+R_C\cdot OC=0; \tag{2}$$

$$\sum M_y(\bar{P}_i)=0; \quad P\cdot DF-R_A\cdot OA+R_B\cdot OB=0. \tag{3}$$

3. Решаем полученную систему уравнений. Из уравнения (2)

$$R_C=\frac{P\cdot DE}{OC}=\frac{8\cdot 0{,}5}{1}=4 \text{ кн}.$$

Затем решение можно продолжить так. Подставляя известные числовые значения в уравнения (1) и (3) и перенеся известные члены в правую сторону, получаем такую систему двух уравнений:

$$R_A+R_B=4; \tag{4}$$

$$R_A\cdot 0{,}4-R_B\cdot 0{,}4=8\cdot 0{,}1. \tag{5}$$

Разделим обе части уравнения (5) на 0,4, тогда система уравнений приобретает такой простой вид:

$$R_A+R_B=4;$$

$$R_A-R_B=2.$$

Сложив эти уравнения, найдем: $R_A=3$ *кн*.

Вычтем из первого второе, найдем: $R_B=1$ *кн*.

Как видно, реакции не равны между собой, следовательно, соответственно колеса давят на опорную плоскость также неодинаково.

Как нужно поместить груз P, чтобы силы давления, производимые колесами, равнялись между собой?

В следующих задачах рассматриваются системы сил, произвольно расположенные в пространстве.

Задача 123-22. Квадратная крышка весом 400 *н* удерживается приоткрытой на 60° над горизонтальной плоскостью противовесом Q (рис. 170). Определить, пренебрегая трением на блоке D, вес противовеса Q и реакции шарниров A и B, если блок D укреплен на одной вертикали с шарниром A и $AD=AC$.

Решение.

1. Выбрав за начало координат точку A и расположив оси так, как показано на рис. 170, покажем на этом же рисунке активные силы и реакции опор.

На крышку действует сила тяжести $\overline{G}$, которую считаем приложенной в точке E (центр симметрии квадрата), и реакция $\overline{T}$ нити CD, приложенная в точке C. Сила T численно равна весу Q

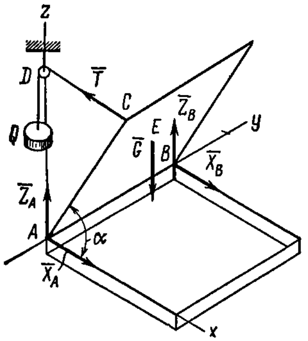


Рис. 170

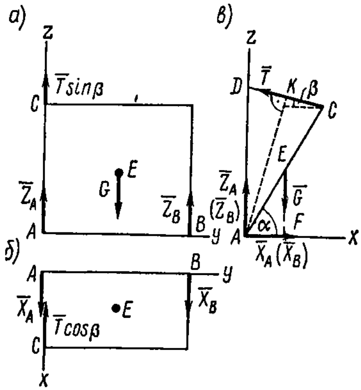


Рис. 171

противовеса. Действие этих сил уравновешивается реакциями шарниров A и B. Так как силы $\overline{T}$ и $\overline{G}$ действуют в плоскостях, перпендикулярных к оси y, то реакции шарниров лежат в плоскостях, перпендикулярных к той же оси. Поэтому реакцию шарнира A заменим двумя составляющими $\overline{X}_A$ и $\overline{Z}_A$, а реакцию шарнира B—составляющими $\overline{X}_B$ и $\overline{Z}_B$.

2. Если составление уравнений равновесия по рис. 170 затруднительно, можно предварительно изобразить крышку вместе с действующими на нее силами в трех проекциях, как это сделано на рис. 171:

а) вид спереди, ось x перпендикулярна к плоскости проекции;

б) вид сверху, ось z перпендикулярна к плоскости проекции;

в) вид слева, ось y перпендикулярна к плоскости проекции.

3. Составим уравнения равновесия.

Для составления уравнений проекций на ось x воспользуемся рис. 171, *б* или 171, *в*:

$$X_A - T\cos\beta + X_B = 0. \qquad (1)$$

На ось y силы не проектируются, так как все они перпендикулярны к этой оси.

Для составления уравнений проекций на ось z воспользуемся рис. 171, *а* или 171, *в*:

$$Z_A + T\sin\beta - G + Z_B = 0. \qquad (2)$$

Для составления уравнения моментов относительно оси x воспользуемся рис. 171, *а*:

$$-G\frac{AB}{2}+Z_B\cdot AB=0. \tag{3}$$

Для составления уравнения моментов относительно оси y воспользуемся рис. 171, *в*:

$$-G\cdot AF+T\cdot AK=0. \tag{4}$$

Для составления уравнения моментов относительно оси z воспользуемся рис. 171, *б*:

$$-X_B\cdot AB=0. \tag{5}$$

4. Решаем полученные уравнения.

Из уравнения (5) находим (так как $AB\neq0$): $X_B=0$.

Из уравнения (4)

$$T=\frac{G\cdot AF}{AK}=G\frac{AE\cos\alpha}{AC\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2}}.$$

Так как $AE=AC/2$, то $T=400\frac{\cos 60^\circ}{2\cos 15^\circ}=103{,}5$ *н*.

Из уравнения (3)

$$Z_B=\frac{G}{2}=200\,н.$$

Из уравнения (2)

$$Z_A=-T\sin\beta+G-Z_B=-103{,}5\sin 15^\circ+400-200=173{,}2\,н$$

(угол $\beta=15^\circ$, так как треугольник ACD равнобедренный).

Из уравнения (1)

$$X_A=T\cos\beta=103{,}5\cos 15^\circ=100\ н.$$

Таким образом, чтобы крышка находилась в равновесии приоткрытой под углом 60°, вес противовеса должен быть $Q=T=103{,}5$ *н*. При этом реакция шарнира A имеет две составляющие: горизонтальную $X_A=100$ *н* и вертикальную $Z_A=173{,}2$ *н*, а реакция шарнира B направлена вертикально и равна $Z_B=200$ *н*.

Задача 124-22. На вал *1* ворота намотана веревка, удерживающая груз Q (рис. 172). Радиус колеса *2* ворота в четыре раза больше радиуса вала. Веревка, прикрепленная к ободу колеса и натягиваемая грузом силой $P=80$ *н*, сходит с колеса в точке F по касательной; радиус DF колеса образует с вертикалью угол $\alpha=60^\circ$. Определить величину груза Q, при котором ворот остается в равновесии, а также реакции подшипников A и B, если общий вес вала и колеса $G=600$ *н* и приложен в точке C ($AC=0{,}4$ *м*).

Решение.

1. Три нагрузки — вес $\overline{G}$ и грузы $\overline{Q}$ и $\overline{P}$, приложенные к вороту, уравновешиваются реакциями подшипников A и B. Нагрузки действуют в плоскостях, перпендикулярных к оси вала, и, следовательно, не смещают вал вдоль оси, поэтому и реакции подшипников расположатся в плоскостях, перпендикулярных к этой же оси. Заменим их составляющими $\overline{X}_A$, $\overline{Z}_A$ и $\overline{X}_B$, $\overline{Z}_B$ (рис. 172). Следует учесть, что обычный подшипник не создает реакции, направленной вдоль оси вала. Если на вал действуют нагрузки, смещающие вал вдоль оси, то один из подшипников должен быть заменен подпятником.

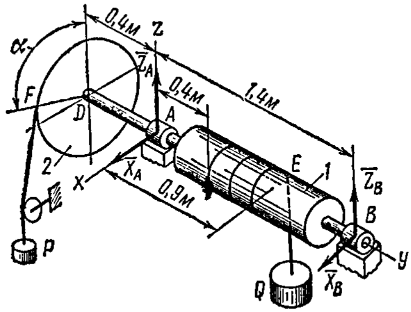


Рис. 172

2. Изобразим ворот со всеми действующими на него силами в трех проекциях (рис. 175 *а*, *б*, *в*) и при помощи их составим уравнения равновесия.

Так же как и в предыдущей задаче, уравнение проекций на ось y превратится в тождество вида $0=0$. При составлении уравнения моментов относительно оси y — уравнения (4) — нужно учи-

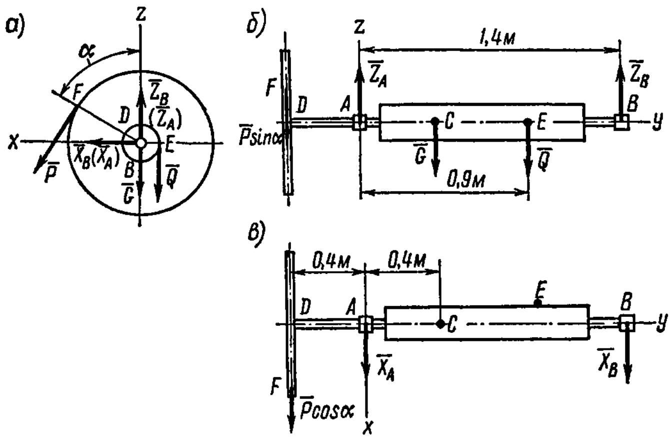


Рис. 173

тывать, что радиус колеса R в четыре раза больше радиуса вала r $(R=4r)$.

$$\sum X_i=0; \quad P\cos\alpha+X_A+X_B=0; \tag{1}$$

$$\sum Z_i=0; \quad -P\sin\alpha+Z_A-G-Q+Z_B=0 \tag{2}$$

$$\sum M_x(\overline{P}_i)=0; \quad P\sin\alpha\cdot AD-G\cdot AC-Q\cdot AE+Z_B\cdot AB=0; \tag{3}$$

$$\sum M_y(\overline{P}_i)=0; \quad P\cdot 4r-Q\cdot r=0; \tag{4}$$

$$\sum M_z(\overline{P}_i)=0; \quad P\cos\alpha\cdot AD-X_B\cdot AB=0. \tag{5}$$

3. Из уравнения (5)

$$X_B = \frac{P\cdot\cos\alpha\cdot AD}{AB} = \frac{80\cdot\cos 60^\circ\cdot 0{,}4}{1{,}4} \approx 11{,}4 \textit{ н}.$$

Из уравнения (4)

$$Q = \frac{P\cdot 4\cdot r}{r} = 80\cdot 4 = 320 \textit{ н}.$$

Из уравнения (3)

$$Z_B = \frac{-P\cdot\sin\alpha\cdot AD + G\cdot AC + Q\cdot AE}{AB} =$$

$$= \frac{-80\sin 60^\circ\cdot 0{,}4 + 600\cdot 0{,}4 + 320\cdot 0{,}9}{1{,}4} \approx 357 \textit{ н}.$$

Из уравнения (2)

$$Z_A = P\sin\alpha + G + Q - Z_B = 80\sin 60^\circ + 600 + 320 - 357 = 632 \textit{ н}.$$

Из уравнения (1)

$$X_A = -P\cos\alpha - X_B = -80\cos 60^\circ - 11{,}4 = -51{,}4 \textit{ н}.$$

Задача 125-22. Деревянный брус прямоугольного поперечного сечения $b = 20$ *см* и $h = 25$ *см* жестко заделан в стене таким образом, что выступающая из стены часть бруса горизонтальна и имеет длину $AB = l = 0{,}6$ *м* (см. рис. 174, *а*). Свободный конец бруса нагружен тремя силами: силой $P_1 = 1{,}5$ *кн*, действующей вдоль вертикального ребра торца бруса, силой $P_2 = 2$ *кн*, приложенной в центре тяжести торца и действующей в вертикальной плоскости под углом $\alpha = 35^\circ$ к горизонтали, и силой $P_3 = 1$ *кн*, действующей вдоль нижнего горизонтального ребра торца бруса.

Определить реакции заделки.

Решение.

1. Освободим брус от связи (от стены) и заменим ее реакциями (рис. 174, *б*). Как известно (см. § 14-3, п. 5 и задачи 84-14, 85-14), равновесие балки, жестко заделанной одним концом, обеспечивается двумя реактивными факторами: реактивной силой и реактивным моментом. В данной задаче нагрузки, действующие на брус, расположены не в одной плоскости, поэтому нельзя заранее определить, в каких плоскостях расположатся реактивная сила и реактивный момент.

Заменим реактивную силу тремя составляющими: $\overline{X}_з$, $\overline{Y}_з$ и $\overline{Z}_з$, направив их вдоль предварительно выбранных осей координат. Реактивный момент заменим также тремя моментами* — тремя парами сил: M_x, M_y и M_z.

---

* Как известно, пару сил можно тоже представить в виде вектора (см. рис. 62, § 10—3). Вектор пары сил, так же как и вектор силы, можно разложить на три составляющих вектора, направленных вдоль осей (рис. 175, *а*), а затем каждый составляющий вектор пары заменить парой сил, действующей в плоскости, перпендикулярной к той оси, вдоль которой направлен вектор пары (рис. 175 *б*, *в*, *г*).

2. Таким образом, на брус, кроме трех заданных сил, действуют шесть неизвестных реактивных факторов — три силы и три момента. Для пространственной системы сил можно составить шесть уравнений равновесия — значит задача статически определима.

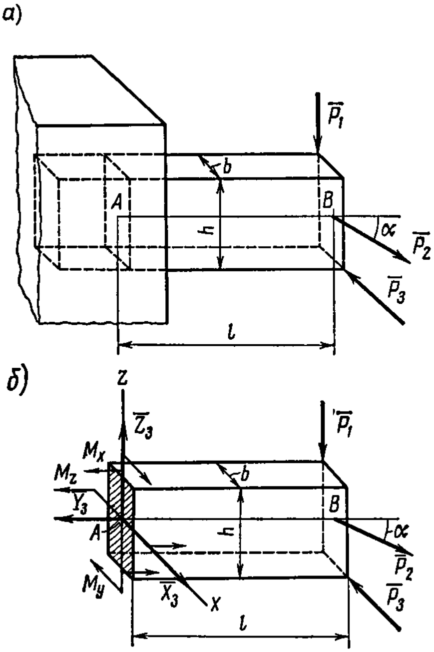


Рис. 174

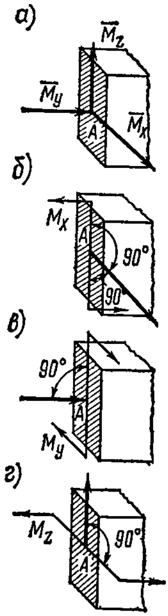


Рис. 175

3. Для облегчения составления уравнений равновесия изобразим брус вместе с действующими на него силами в трех проекциях (рис. 176, *а*) и составим уравнение равновесия.

Можно, конечно, при составлении уравнений пользоваться только одним рис. 174, *б*:

$$\sum X_i = 0; \quad X_з - P_з = 0; \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -Y_з + P_2 \cos\alpha = 0; \tag{2}$$

$$\sum Z_i = 0; \quad Z_з - P_1 - P_2 \sin\alpha = 0; \tag{3}$$

$$\sum M_x(\overline{P}_i) = 0; \quad M_x - P_1 \cdot l - P_2 l \cdot \sin\alpha = 0; \tag{4}$$

$$\sum M_y(\overline{P}_i) = 0; \quad -M_y + P_1 \frac{b}{2} - P_3 \frac{h}{2} = 0; \tag{5}$$

$$\sum M_z(\overline{P}_i) = 0; \quad M_z + P_3 \cdot l = 0. \tag{6}$$

4. Решая эти уравнения, получаем:

из (1) $X_з = P_з = 1$ *кн*;

из (2) $Y_з = P_2 \cos\alpha = 1{,}64$ *кн*;

из (3) $Z_з = P_1 + P_2 \sin\alpha = 2{,}65$ *кн*;

из (4) $M_x = (P_1 + P_2 \sin\alpha)\, l = 1{,}59$ *кн·м*;

из (5) $M_y = \frac{P_1 b - P_з h}{2} = 0{,}025$ *кн·м*;

из (6) $M_z = -P_з l = -0{,}6$ *кн·м*.

Одной из типичных задач, в которых применяются уравнения равновесия пространственной системы сил, является задача определения реакций опор вала какой-либо машины.

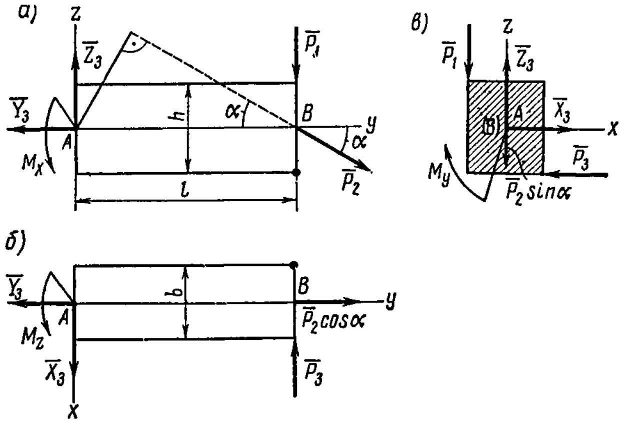


Рис. 176

Задачи этого типа можно решать так же, как задачи 123-22 или 124-22, т. е. при помощи проекций вала вместе с векторами заданных и искомых сил на три взаимно перпендикулярные плоскости. Но в некоторых случаях оказывается более рациональным несколько иной прием решения, основанный на приведении сил к оси вала. В качестве примера для такого решения возьмем вал одного из многочисленных видов редукторов*.

Задача 126-22. На валу редуктора жестко укреплены два зубчатых колеса: коническое *1* и цилиндрическое *2* (рис. 177, *а*). Левая цапфа вала опирается на подшипник, воспринимающий только радиальную силу давления, действующую перпендикулярно к оси вала, а правая цапфа (пята) опирается на подпятник, т. е. на опору, способную, кроме радиальной силы давления, воспринимать и осевую (силу, действующую вдоль оси вала).

---

* Редуктором называется механическое устройство для передачи мощности от двигателя, вал которого вращается с большой скоростью, к рабочей машине, вал которой имеет скорость вращения, в несколько раз меньшую.

На колесо *1* действуют три силы: касательная $P_1 = 4$ *кн* (окружное усилие); радиальная $Q_1 = 1{,}28$ *кн* и осевая $S_1 = 0{,}48$ *кн*. Определить в положении равновесия силы P_2 и $Q_2 = 0{,}36P_2$, приложенные к колесу *2*, а также реакции опор *A* и *B*. Необходимые размеры (в *мм*) даны на рис. 177, *а*. Весом вала и колес пренебречь.

Решение.

1. Заданные и искомые силы, приложенные к колесам *1* и *2*, приведем к точкам C_1 и C_2 на геометрической оси вала (рис. 177, *б*).

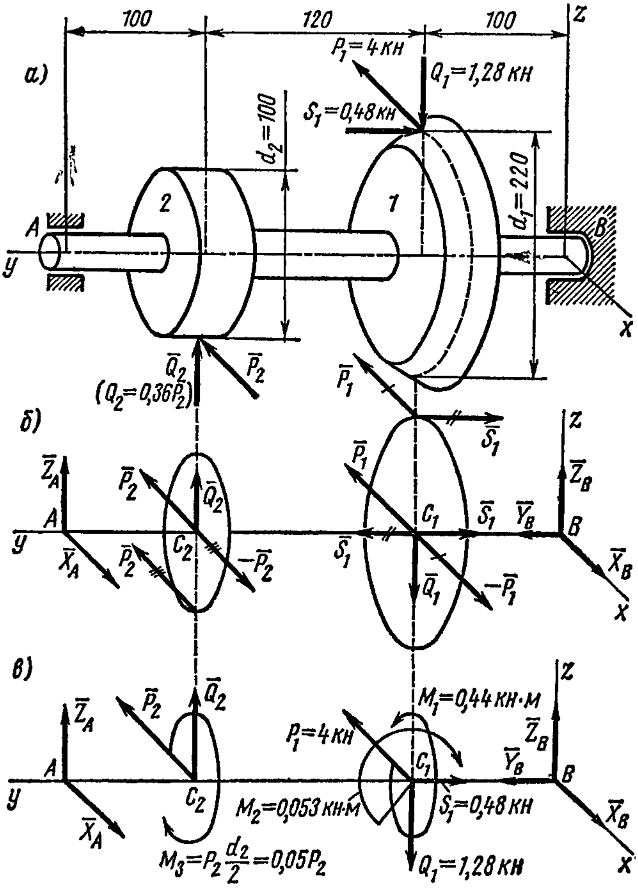


Рис. 177

Сила $Q_1 = 1{,}28$ *кн*, действующая вдоль радиуса колеса, переносится в точку C_1 непосредственно. Для приведения к точке C_1 силы $P_1 = 4$ *кн*, приложим к этой точке уравновешенную систему сил $\overline{P}_1$ и $-\overline{P}_1$ и тогда, кроме приведенной силы $\overline{P}_1$, образуется пара сил $(\overline{P}_1; -\overline{P}_1)$, отмеченная на рисунке одной черточкой (присоединенная пара сил). При переносе в точку C_1 силы $S_1 = 0{,}48$ *кн* аналогичным образом появляется пара ($\bar{S}_1$; $-\bar{S}_1$), отмеченная двумя черточками. Сила $\overline{Q}_2$, действующая вдоль радиуса колеса 2, переносится в точку C_2 непосредственно. При переносе в точку C_2 силы $\overline{P}_2$ образуется пара ($\overline{P}_2$; $-\overline{P}_2$), отмеченная на рисунке тремя черточками.

2. Освободив вал в точках A и B от опор, заменяем действие опор их реакциями: подшипник A не препятствует горизонтальному смещению вала, поэтому его реакцию, расположенную в плоскости, перпендикулярной к оси вала, заменяем двумя составляющими: горизонтальной $\overline{X}_A$ и вертикальной $\bar{Z}_A$; подпятник B препятствует смещению вала вдоль его оси, поэтому его реакцию заменяем тремя составляющими $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$ и $\bar{Z}_B$ (см. рис. 177, *б*).

3. При известном навыке решения задач вместо расчетной схемы, показанной на рис. 177, *б*, можно получить более простую схему (рис. 177, *в*), на которой вместо пар сил круговыми стрелками обозначены их моменты. Так, круговой стрелкой M_1 обозначен момент пары сил ($\overline{P}_1$; $-\overline{P}_1$), действующей в плоскости, перпендикулярной к оси y; M_2—момент пары ($\overline{S}_1$; $-\overline{S}$), действующей в плоскости, перпендикулярной к оси x, и M_3—момент пары ($\overline{P}_2$; $-\bar{P}_2$), действующей в плоскости, перпендикулярной к оси y.

Если силы выражать в *кн*, а плечи пар в *м*, то получим такие абсолютные числовые значения моментов M_1 и M_2:

$$M_1 = P_1 \frac{d_1}{2} = 4 \cdot \frac{0{,}22}{2} = 0{,}44 \ кн \cdot м;$$

$$M_2 = S_1 \frac{d_1}{2} = 0{,}48 \cdot \frac{0{,}22}{2} = 0{,}0528 \approx 0{,}053 \ кн \cdot м;$$

а момент M_3 выразится так:

$$M_3 = P_2 \frac{d_2}{2} = 0{,}05 P_2.$$

4. Составим шесть уравнений равновесия.

$$\sum X_i = 0; \quad X_A - P_2 - P_1 + X_B = 0; \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -S_1 + Y_B = 0; \qquad (2)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad Z_A + Q_2 - Q_1 + Z_B = 0; \qquad (3)$$

$$\sum M_x(\overline{P}_i) = 0; \quad -Z_A \cdot AB - Q_2 \cdot C_2B - M_2 + Q_1 \cdot C_1B = 0; \qquad (4)$$

$$\sum M_y(\overline{P}_i) = 0; \quad -M_3 + M_1 = 0 \ \text{или} \ -0{,}05P_2 + M_1 = 0; \qquad (5)$$

$$\sum M_z(P_i) = 0; \quad X_A \cdot AB - P_2 \cdot C_2B - P_1 \cdot C_1B = 0. \qquad (6)$$

5. Решая эти уравнения последовательно, получим:
из уравнения (5)

$$P_2 = \frac{M_1}{0{,}05} = \frac{0{,}44}{0{,}05} = 8{,}8 \ кн.$$

Так как

$$Q_2 = 0{,}36 P_2,$$

то

$$Q_2 = 0{,}36 \cdot 8{,}8 = 3{,}17 \text{ кн}.$$

Из уравнения (6)

$$X_A = \frac{P_2 \cdot C_2B + P_1 \cdot C_1B}{AB} = \frac{8{,}8 \cdot 0{,}22 + 4 \cdot 0{,}1}{0{,}32} = 7{,}3 \text{ кн}.$$

Из уравнения (4)

$$Z_A = \frac{Q_1 \cdot C_1B - Q_2 \cdot C_2B - M_2}{AB} = \frac{1{,}28 \cdot 0{,}1 - 3{,}17 \cdot 0{,}22 - 0{,}053}{0{,}32} = -1{,}95 \text{ кн}.$$

Реакция Z_A направлена не вверх, как на рис. 177, *в*, а вниз. Из уравнения (3)

$$Z_B = Q_1 - Q_2 - Z_A = 1{,}28 - 3{,}17 - (-1{,}95) = 0{,}05 \text{ кн}.$$

Из уравнения (2) $Y_B = S_1 = 0{,}48$ *кн*.
Из уравнения (1) $X_B = P_1 + P_2 - X_A = 4 + 8{,}8 - 7{,}3 = 5{,}5$ *кн*.

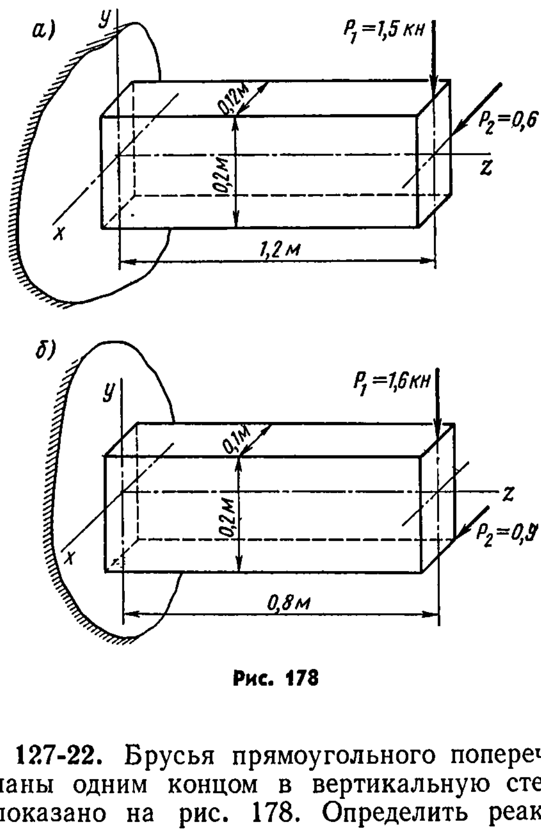


Рис. 178

● **Задача 127-22.** Брусья прямоугольного поперечного сечения жестко заделаны одним концом в вертикальную стенку и нагружены, как показано на рис. 178. Определить реакции (силы и моменты) заделки.

Ответ:

а) $X_з = -0,6$ *кн*; $Y_з = 1,5$ *кн*; $Z_з = 0$; $M_x = 1,8$ *кн·м*; $M_y = 0,72$ *кн·м*; $M_z = 0$;

б) $X_з = -0,9$ *кн*; $Y_з = 1,6$ *кн*; $Z_з = 0$; $M_x = 1,28$ *кн·м*; $M_y = 0,72$ *кн·м*; $M_z = 0,09$ *кн·м*.

● **Задача 128-22.** На валу, горизонтально смонтированном в подшипниках A и B (рис. 179), жестко закреплены два зубчатых колеса, диаметры которых $d_1 = 300$ *мм* и $d_2 = 450$ *мм*. Определить вертикальное окружное P_2 и радиальное Q_2 усилия, действующие в положении равновесия на второе колесо ($Q_2 = 0,364P_2$), а также реакции обоих подшипников, если к первому (малому) колесу приложено горизонтальное окружное усилие $P_1 = 1800$ *н* и радиальное $Q_1 = 0,364P_1$. Расстояния по длине вала даны на рисунке.

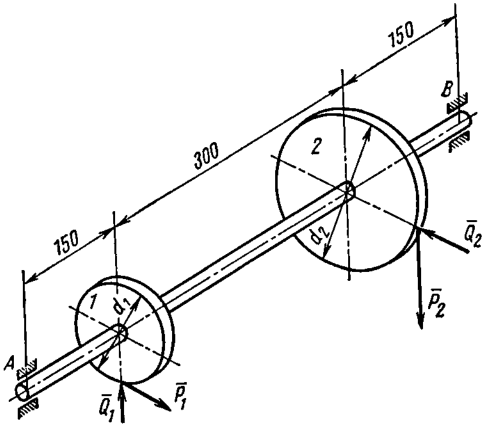


Рис. 179

Ответ. $P_2 = 1200$ *н*; $Q_2 = 437$ *н*; $X_A = -1241$ *н*; $Z_A = -191$ *н*; $X_B = -122$ *н*; $Z_B = 736$ *н*.

● **Задача 129-22.** На вал насажены зубчатое колесо *2* и шкив *1*, на которые действуют силы, как показано на рис. 180. Определить силу P и реакции подшипников A и B в положении равновесия. Диаметры шкива, зубчатого колеса и размеры вала показаны на рисунке.

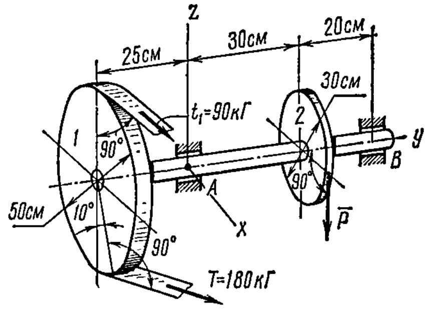


Рис. 180

Ответ. $P = 150$ *кГ*; $X_A = -400,5$ *кГ*; $X_B = 133,5$ *кГ*; $Z_A = 12,8$ *кГ*; $Z_B = 105,6$ *кГ*.

ГЛАВА V

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Центр тяжести — точка, через которую проходит линия действия равнодействующей элементарных сил тяжести. Он обладает свойством центра параллельных сил (Е. М. Никитин, § 44). Поэтому формулы для определения положения центра тяжести различных тел имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum G_i x_i}{\sum G_i}; \\ y_C &= \frac{\sum G_i y_i}{\sum G_i}; \\ z_C &= \frac{\sum G_i z_i}{\sum G_i}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Если тело, центр тяжести которого нужно определить, можно отождествить с фигурой, составленной из линий (например, замкнутый или незамкнутый контур, изготовленный из проволоки, как на рис. 181), то вес G_i каждого отрезка l_i можно представить в виде произведения

$$G_i = l_i d,$$

где d — постоянный для всей фигуры вес единицы длины материала.

После подстановки в формулы (1) вместо G_i их значений $l_i d$ постоянный множитель d в каждом слагаемом числителя и знаме-

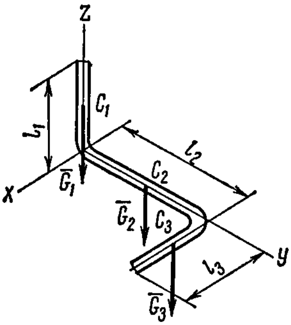


Рис. 181

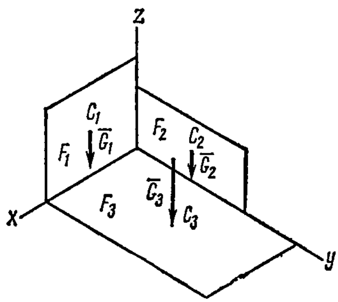


Рис. 182

нателя можно вынести за скобки (за знак суммы) и сократить. Таким образом, формулы для определения координат центра тяжести фигуры, составленной из отрезков линий, примут вид:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum l_i x_i}{\sum l_i}; \\ y_C &= \frac{\sum l_i y_i}{\sum l_i}; \\ z_C &= \frac{\sum l_i z_i}{\sum l_i}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Если тело имеет вид фигуры, составленной из расположенных различным образом плоскостей или кривых поверхностей (рис. 182), то вес каждой плоскости (поверхности) можно представить так:

$$G_i = F_i p,$$

где F_i — площади каждой поверхности, а p — вес единицы площади фигуры.

После подстановки этого значения G_i в формулы (1) получаем формулы координат центра тяжести фигуры, составленной из площадей:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}; \\ y_C &= \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}; \\ z_C &= \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Если же однородное тело можно разделить на простые части определенной геометрической формы (рис. 183), то вес каждой части $G_i = V_i\gamma$, где V_i — объем каждой части, а γ — вес единицы объема тела.

После подстановки значений G_i в формулы (1) получаем формулы для определения координат центра тяжести тела, составленного из однородных объемов:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum V_i x_i}{\sum V_i}; \\ y_C &= \frac{\sum V_i y_i}{\sum V_i}; \\ z_C &= \frac{\sum V_i z_i}{\sum V_i}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

При решении некоторых задач на определение положения центра тяжести тел иногда необходимо знать, где расположен центр тяжести дуги окружности, кругового сектора или треугольника.

Если известен радиус дуги r и центральный угол 2α, стягиваемый дугой и выраженный в радианах, то положение центра тяжести C (рис. 184, *а*) относительно центра дуги O определится формулой

$$x_C = r\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{5}$$

Если же задана хорда $AB = b$ дуги, то в формуле (5) можно произвести замену

$$\sin\alpha = \frac{b}{2r}$$

и тогда

$$x_C = \frac{b}{2\alpha}. \tag{5а}$$

В частном случае для полуокружности обе формулы примут вид (рис. 184, *б*)

$$x_C = OC = \frac{2r}{\pi} = \frac{d}{\pi}. \qquad (5б)$$

Положение центра тяжести кругового сектора, если задан его радиус r (рис. 184, *в*), определяется при помощи формулы

$$x_C = \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha}. \qquad (6)$$

Если же задана хорда сектора, то

$$x_C = \frac{b}{3\alpha}. \qquad (6а)$$

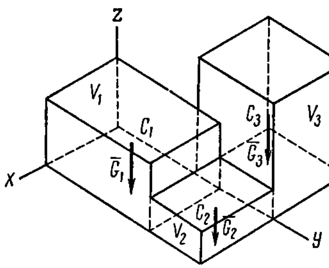


Рис. 183

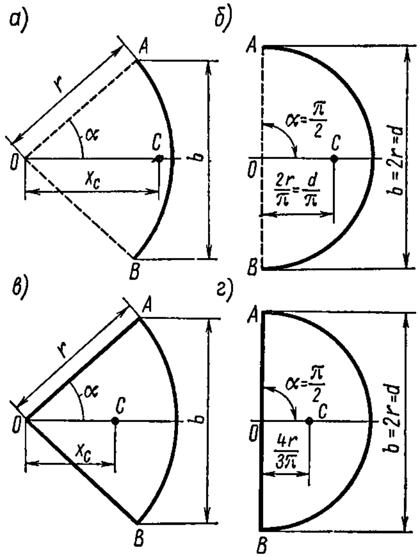


Рис. 184

В частном случае для полукруга обе последние формулы примут вид (рис. 184, *г*)

$$x_C = OC = \frac{4r}{3\pi} = \frac{2d}{3\pi}. \qquad (6б)$$

Центр тяжести площади любого треугольника расположен от любой стороны на расстоянии, равном одной трети соответствующей высоты.

У прямоугольного треугольника центр тяжести находится на пересечении перпендикуляров, восставленных к катетам из точек, расположенных на расстоянии одной трети длины катетов, считая от вершины прямого угла (рис. 185).

При решении задач на определение положения центра тяжести любого однородного тела, составленного либо из тонких стержней (линий), либо из пластинок (площадей), либо из объемов, целесообразно придерживаться следующего порядка:

1) выполнить рисунок тела, положение центра тяжести которого нужно определить. Так как все размеры тела обычно известны, при этом следует соблюдать масштаб;

2) разбить тело на составные части (отрезки линий или площади, или объемы), положение центров тяжести которых определяется исходя из размеров тела;

3) определить или длины, или площади, или объемы составных частей;

4) выбрать расположение осей координат;

5) определить координаты центров тяжести составных частей;

6) найденные значения длин или площадей, или объемов отдельных частей, а также координат их центров тяжести подставить в соответствующие формулы и вычислить координаты центра тяжести всего тела;

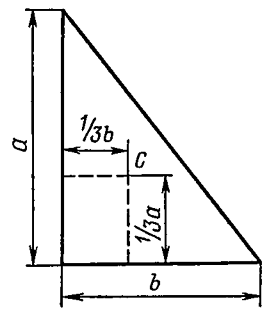


Рис. 185

7) по найденным координатам указать на рисунке положение центра тяжести тела.

§ 23-5. Определение положения центра тяжести тела, составленного из тонких однородных стержней

Задача 130-23. Определить положение центра тяжести плоской фигуры (рис. 186), изогнутой из тонкой проволоки.

Решение.

1. Фигура состоит из четырех прямых отрезков: $AB = l_1 = 8$ *см*; $BD = l_2 = 10$ *см*; $DE = l_3 = 6$ *см*; $EF = l_4 = 4$ *см*. На эти четыре части и разделим всю фигуру.

2. Оси координат расположим так, чтобы они совпали с отрезками DE (ось x) и DB (ось y). Так как фигура плоская, третья ось здесь не нужна.

3. Для центров тяжести C_1, C_2, C_3 и C_4 каждого отрезка соответственно найдем, исходя из размеров фигуры, их координаты. Обозначив x_1 и y_1 координаты C_1, найдем, что

$$x_1 = \frac{BA}{2} = 4 \text{ см}; \quad y_1 = DB = 10 \text{ см};$$

координаты C_2: $x_2 = 0$; $y_2 = \frac{DB}{2} = 5$ *см*;

координаты C_3: $x_3 = \frac{DE}{2} = 3$ *см*; $y_3 = 0$;

координаты C_4: $x_4 = DE = 6$ *см*; $y_4 = \frac{EF}{2} = 2$ *см*.

Для удобства, а также ввиду того, что координаты центров тяжести можно определить непосредственно по рисунку, данные для подстановки в формулы следует представлять в таком виде:

$$\begin{aligned} &l_1 = 8 \text{ см}; && C_1(4;\ 10); \\ &l_2 = 10 \text{ см}; && C_2(0;\ 5); \\ &l_3 = 6 \text{ см}; && C_3(3;\ 0); \\ &l_4 = 4 \text{ см}; && C_4(6;\ 2). \end{aligned}$$

4. Подставим значения l_i, x_i и y_i в формулы (2) и сделаем вычисления:

$$x_C = \frac{8 \cdot 4 + 10 \cdot 0 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 6}{8 + 10 + 6 + 4} = \frac{74}{28} = 2{,}64\ см;$$

$$y_C = \frac{8 \cdot 10 + 10 \cdot 5 + 6 \cdot 0 + 4 \cdot 2}{8 + 10 + 6 + 4} = \frac{138}{28} = 4{,}93\ см.$$

5. Отложив вдоль осей x и y найденные координаты, отметим на рис. 186 положение центра тяжести C данной фигуры.

Задача 131-23. Определить положение центра тяжести плоской фигуры OAB, изогнутой из тонкой проволоки в виде квадранта (рис. 187).

Решение 1.

1. Фигура состоит из трех частей: двух прямолинейных отрезков *1* и *2* длиной r и дуги *3*, равной четверти окружности.

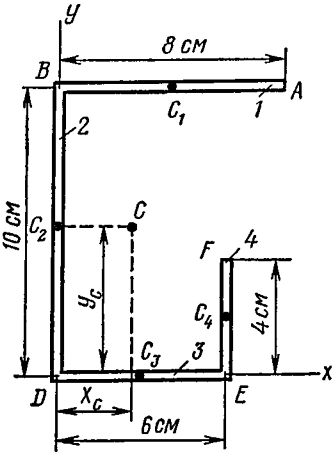


Рис. 186

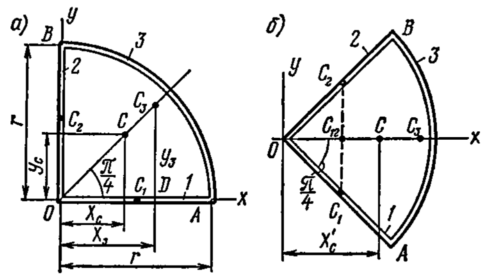


Рис. 187

2. Совместив оси координат с прямолинейными отрезками OA и OB (рис. 187, *а*), приведем данные для подстановки в формулы:

$$l_1 = r; \qquad C_1\,(0{,}5r;\ 0);$$
$$l_2 = r; \qquad C_2\,(0;\ 0{,}5r);$$
$$l_3 = 0{,}5\pi r; \qquad C_3\left(\frac{2r}{\pi};\ \frac{2r}{\pi}\right).$$

Координаты C_3 находим из прямоугольного треугольника OC_3D;

$$x_3 = y_3 = OC_3 \sin\frac{\pi}{4},$$

но по формуле (5)

$$OC_3 = r\,\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4r \cdot \sin\frac{\pi}{4}}{\pi},$$

поэтому

$$x_3 = y_3 = \frac{4r \cdot \sin^2\frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{4r\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\pi} = \frac{2r}{\pi}.$$

3. Подставим значение l_i и координат x_i и y_i в формулы (2) и сделаем вычисления:

$$x_C = y_C = \frac{r \cdot 0,5r + 0,5\pi r \frac{2r}{\pi}}{r + r + 0,5\pi r} = \frac{1,5r}{2 + 0,5\pi} = 0,420\, r.$$

Решение 2.

1. Так как фигура имеет одну ось симметрии, проходящую по биссектрисе прямого угла, одну из осей координат целесообразно совместить с осью симметрии (рис. 187, *б*).

В этом случае общий центр тяжести отрезков OA и OB (точка C_{12}) находится на оси симметрии (оси x).

2. Определим исходные данные для подстановки в формулы (2):

$$l_1 + l_2 = 2r; \quad C_{12}\left(0,5r \cdot \sin\frac{\pi}{4};\ 0\right);$$

$$l_3 = 0,5\pi r; \quad C_3\left(\frac{4r \cdot \sin\frac{\pi}{4}}{\pi};\ 0\right).$$

3. Найденные значения l_i и координат x_i и y_i подставим в формулы (2):

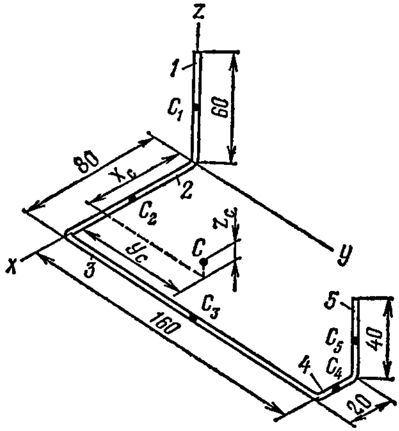


Рис. 188

$$x'_C = \frac{2r \cdot 0,5r \cdot \sin\frac{\pi}{4} + 0,5\pi \cdot r \cdot 4r\,\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\pi}}{2r + 0,5\pi r} = \frac{3r\,\sin\frac{\pi}{4}}{2 + 0,5\pi} = 0,595r.$$

Сравнивая x'_C с x_C из первого решения, видим, что (см. рис. 187, *а*)

$$x_C = OC \sin\frac{\pi}{4} = x'_C \sin\frac{\pi}{4} \quad \text{или}$$

$$x_C = 0,595r \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 0,420r.$$

Задача 132-23. Определить положение центра тяжести пространственно изогнутой проволочной фигуры (рис. 188); размеры — в *мм*.

Решение.

1. Расположив проволочную фигуру в осях координат как показано на рис. 188, разделим ее на пять прямолинейных участков *1*, *2*, *3*, *4* и *5* и отметим точками C_1, C_2, C_3, C_4 и C_5 центры тяжести каждого участка.

2. Найдем исходные данные для подстановки в формулы (l_i — длины участков и координаты C_i):

$$\begin{aligned} &l_1 = 6\ см; && C_1(0;\ 0;\ 3); \\ &l_2 = 8\ см; && C_2(4;\ 0;\ 0); \\ &l_3 = 16\ см; && C_3(8;\ 8;\ 0); \\ &l_4 = 2\ см; && C_4(7;\ 16;\ 0); \\ &l_5 = 4\ см; && C_5(6;\ 16;\ 2). \end{aligned}$$

3. Найденные исходные данные подставим в формулы (2) и вычислим координаты центра тяжести всей фигуры:

$$x_C = \frac{6\cdot 0 + 8\cdot 4 + 16\cdot 8 + 2\cdot 7 + 4\cdot 6}{6+8+16+2+4} = \frac{198}{36} = 5^1/_2\ см = 55\ мм;$$

$$y_C = \frac{6\cdot 0 + 8\cdot 0 + 16\cdot 8 + 2\cdot 16 + 4\cdot 16}{6+8+16+2+4} = \frac{224}{36} = 6^2/_9\ см = 62{,}2\ мм;$$

$$z_C = \frac{6\cdot 3 + 8\cdot 0 + 16\cdot 0 + 2\cdot 0 + 6\cdot 2}{6+8+16+2+4} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}\ см = 7{,}2\ мм.$$

4. Таким образом, центр тяжести фигуры расположен в точке C (55,0; 62,2; 7,2).

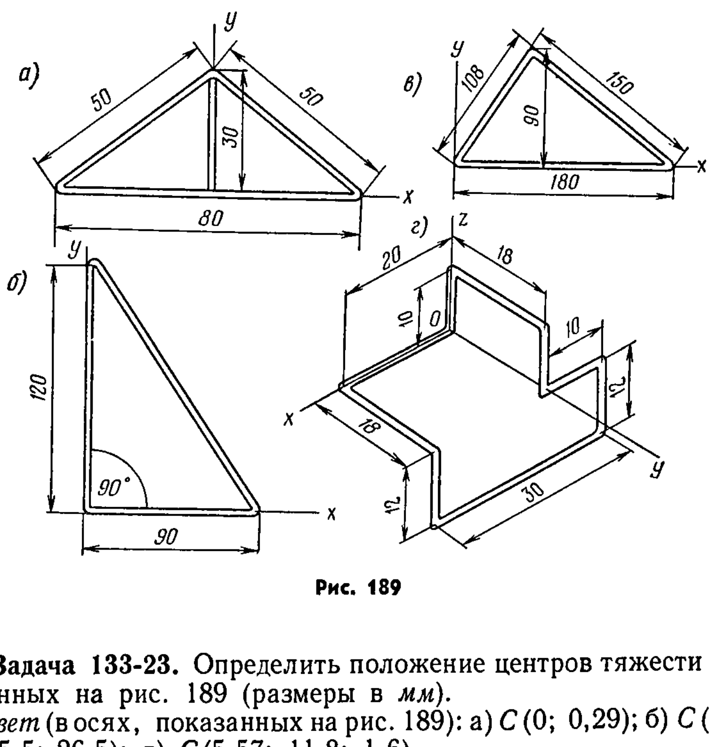


Рис. 189

● **Задача 133-23.** Определить положение центров тяжести фигур, показанных на рис. 189 (размеры в *мм*).

Ответ (в осях, показанных на рис. 189): а) C (0; 0,29); б) C (30; 45); в) C (85,5; 26,5); г) C (5,57; 11,8; 1,6).

§ 24-5. Определение положения центра тяжести фигур, составленных из пластинок

Задача 134-24. Определить положение центра тяжести фигуры, составленной из трех тонких плоских пластинок прямоугольной формы, пересекающихся друг с другом под прямыми углами (рис. 190); размеры — в *мм*.

Решение.

1. Поместим начало координат в вершине трехгранного угла и расположим оси координат вдоль линий пересечения пластинок.

Фигура состоит из трех прямоугольников с центрами тяжести C_1, C_2, C_3, расположенными на пересечении прямых, соединяющих середины противоположных сторон.

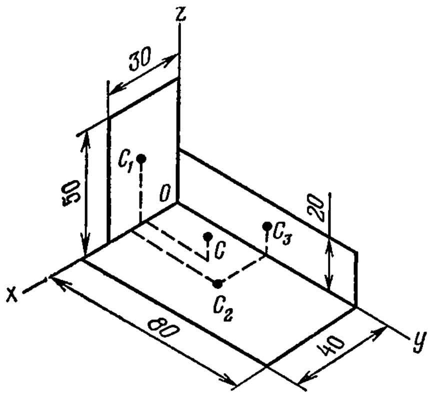


Рис. 190

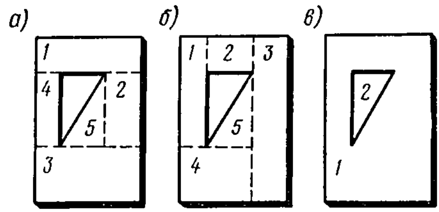


Рис. 191

2. Исходя из размеров фигуры, определим необходимые данные для подстановки в формулы (3): F_i — площади прямоугольников и координаты x_i, y_i и z_i их центров тяжести:

$$F_1 = 3\cdot 5 = 15\ см^2;\quad C_1\,(1{,}5;\ 0;\ 2{,}5);$$
$$F_2 = 4\cdot 8 = 32\ см^2;\quad C_2\,(2;\ 4;\ 0);$$
$$F_3 = 8\cdot 2 = 16\ см^2;\quad C_3\,(0;\ 4;\ 1).$$

3. Подставим эти данные в формулы (4) и вычислим искомые координаты центра тяжести фигуры:

$$x_C = \frac{15\cdot 1{,}5 + 32\cdot 2 + 16\cdot 0}{15+32+16} = \frac{86{,}5}{63} = 1{,}37\ см = 13{,}7\ мм;$$
$$y_C = \frac{15\cdot 0 + 32\cdot 4 + 16\cdot 4}{15+32+16} = \frac{192}{63} = 3{,}04\ см = 30{,}4\ мм;$$
$$z_C = \frac{15\cdot 2{,}5 + 32\cdot 0 + 16\cdot 1}{15+32+16} = \frac{53{,}5}{63} = 0{,}85\ см = 8{,}5\ мм.$$

Центр тяжести фигуры расположен в точке C(13,7; 30,4; 8,5).

В последней задаче, а также в задачах, приведенных в предыдущем параграфе, расчленение фигур на составные части не вызывает особых затруднений. Но иногда фигура имеет такой вид, который позволяет разделить ее на составные части несколькими способами, например тонкую пластинку прямоугольной формы с треугольным вырезом (рис. 191). При определении положения центра тяжести такой пластинки ее площадь можно разделить на четыре прямоугольника (*1*, *2*, *3* и *4*) и один прямоугольный треугольник *5* — несколькими способами. Два варианта показаны на рис. 191, *а* и *б*.

Наиболее рациональным является тот способ деления фигуры на составные части, при котором образуется наименьшее их число. Если в фигуре есть вырезы, то их можно также включать в число составных частей фигуры, но площадь вырезанной части считать отрицательной. Поэтому такое деление получило название способа отрицательных площадей.

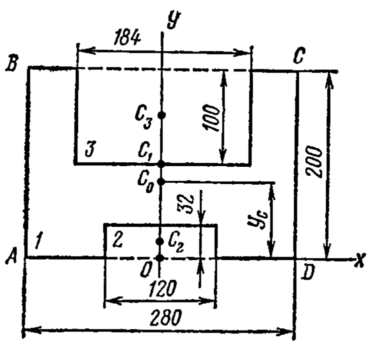


Рис. 192

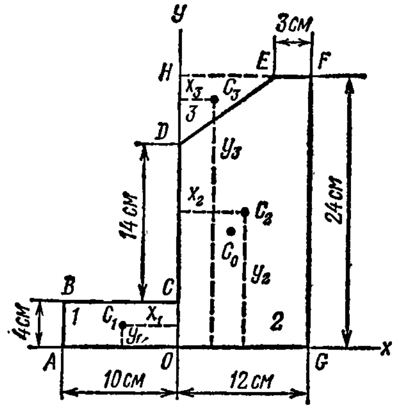


Рис. 193

Пластинка на рис. 191, *в* делится при помощи этого способа всего на две части: прямоугольник *1* с площадью всей пластинки, как будто она целая, и треугольник *2* с площадью, которую считаем отрицательной.

Задача 135-24. Определить положение центра тяжести тонкой однородной пластинки, имеющей ось симметрии. Форма и размеры пластинки показаны на рис. 192.

Решение.

1. Пластинка имеет ось симметрии, на которой находится центр тяжести. Совместим с осью симметрии ось y, а ось x — с нижним краем пластинки.

2. Дополнив пластинку до прямоугольника $ABCD$, разобьем ее тем самым на три части: *1*, *2* и *3*.

3. Определим площади каждой части в $см^2$ и координаты их центров тяжести в *см*:

$$F_1 = 28 \cdot 20 = 560\ см^2; \qquad C_1(0;\ 10);$$

$$F_2 = -12 \cdot 3{,}2 = -38{,}4\ см^2; \qquad C_2(0;\ 1{,}6);$$

$$F_3 = -18{,}4 \cdot 10 = -184\ см^2; \qquad C_3(0;\ 15).$$

4. Определим ординату центра тяжести пластинки, подставив найденные значения во вторую формулу системы (3):

$$y_C = \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i},$$

$$y_C = \frac{560\cdot 10 - 38,4\cdot 1,6 - 184\cdot 15}{560 - 38,4 - 184} \approx \frac{2779}{337,6} \approx 8,23\,см.$$

Таким образом, центр тяжести C_0 имеет ординату $y_C \approx 82\,мм$.

Задача 136-24. Определить положение центра тяжести плоской однородной пластинки *ABCDEFG*, размеры которой в *см* указаны на рис. 193.

Решение.

1. Разбиваем пластинку на два прямоугольника *ABCO* и *OHFG* и на треугольник *DHE*, площадь которого считаем отрицательной.

2. Начало координат помещаем в точке *O*, ось x совмещаем с прямой *AG*, ось y—с прямой *CD*.

3. Определяем площади F_i составных частей и координаты x_i, y_i их центров тяжести C_i:

$F_1 = 40\ см^2$; $C_1(-5;\ 2)$;
$F_2 = 288\ см^2$; $C_2(6;\ 12)$;
$F_3 = -27\ см^2$; $C_3(3;\ 22)$.

4. Подставляем найденные значения площадей и координат в две первые формулы (3) и производим вычисление:

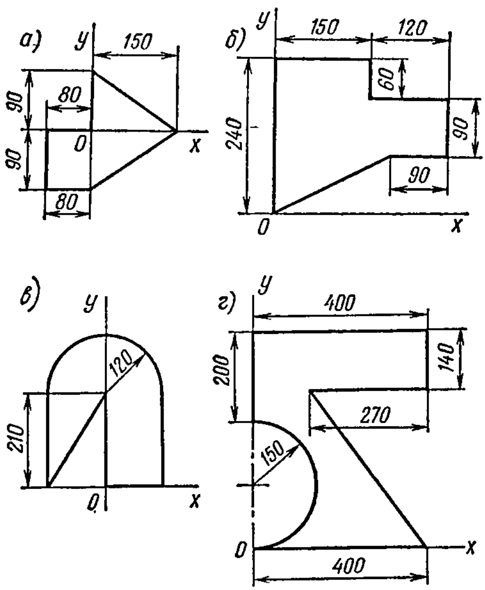


Рис. 194

$$x_C = 4,8\ см \text{ и } y_C = 9,8\ см.$$

Таким образом, центр тяжести пластинки находится в точке C_0 (4,8; 9,8).

● **Задача 137-24.** Определить положение центров тяжести тонких однородных пластинок, форма и размеры которых показаны на рис. 194.

Ответ: а) $x_C = 18,7\ мм$; $y_C = -15,7\ мм$;

б) $x_C = 107\ мм$; $y_C = 135\ мм$;

в) $x_C = 8,75\ мм$; $y_C = 187\ мм$;

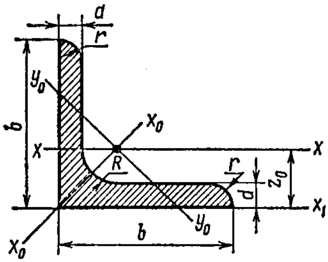
г) $x_C = 19,5\ см$; $y_C = 28,4\ см$.

§ 25-5. Определение положения центра тяжести сечений, составленных из профилей стандартного проката

При решении задач, приведенных в этом параграфе, нужно пользоваться таблицами из ГОСТа на прокатную сталь (табл. 1—4).

Таблица 1

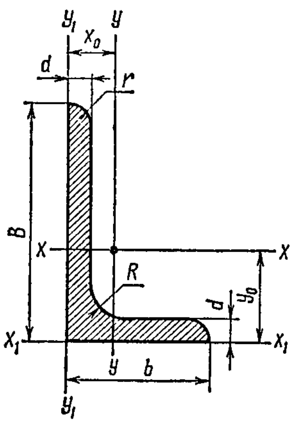
Сталь прокатная угловая равнополочная. Сортамент. ГОСТ 8509—72



№ профилей	Размеры, *мм*				Площадь профиля F, $см^2$	z_0, *см*
	b	*d*	*R*	*r*		
5	50	3	5,5	1,8	2,96	1,33
		4			3,89	1,38
		5			4,80	1,42

Таблица 2

Сталь прокатная угловая неравнополочная. Сортамент. ГОСТ 8510—72



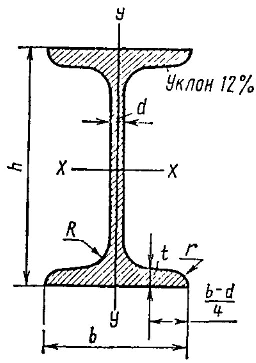
№ профилей	Размеры, *мм*					Площадь профиля F, $см^2$	Справочные данные для осей x_1-x_1	Справочные данные для осей y_1-y_1
	B	*b*	*d*	*R*	*r*		расстояние от центра тяжести y_0, *см*	расстояние от центра тяжести x_0, *см*
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	1,6	0,72
			4			3,17	1,65	0,76
7,5/5	75	50	5	8	2,7	6,11	2,39	1,17
			6			7,25	2,44	1,21
			8			9,47	2,52	1,29

Эти таблицы для каждого профиля содержат их размеры и площадь, а для уголков и швеллера, кроме того, — координаты центров тяжести.

Задача 138-25. Определить положение центра тяжести симметричного сечения, составленного, как показано на рис. 195, из полосы размером 120×10 *мм*, двутавра № 12 (ГОСТ 8239—72) и швеллера № 14 (ГОСТ 8240—72).

Таблица 3

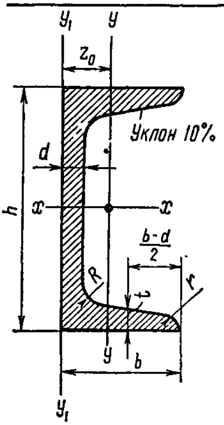
Сталь прокатная. Балки двутавровые. Сортамент. ГОСТ 8239—72



№ профилей	Размеры, *мм*						Площадь сечения, F, $см^2$
	h	b	d	t	R	r	
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4

Таблица 4

Сталь прокатная. Швеллеры А. Сортамент. ГОСТ 8240—72



№ профилей	Размеры, *мм*						Площадь сечения F, $см^2$	z_0, *см*
	h	b	d	t	R	r		
10	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,9	1,44
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,3	1,55
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,6	1,67

Решение.

1. Разбиваем сечение на три части: I — полоса, II — двутавр и III — швеллер.

2. Находим площади каждой части, выражая их в $см^2$. Площадь полосы определяем путем перемножения двух данных размеров, а площади двутавра и швеллера — по таблицам из ГОСТа.

Площадь сечения полосы $F_1 = 12 \cdot 1 = 12\,см^2$.

Площадь сечения двутавра № 12 $F_2 = 14{,}7\,см^2$.

Площадь сечения швеллера № 14 $F_3 = 15{,}6\,см^2$.

3. Данное сечение имеет вертикальную ось симметрии. Совместим с этой осью ось y, а ось x проведем через середину двутавра через точку C_2 — центр тяжести его сечения. Центр тяжести сечения полосы C_1 расположен ниже точки C_2, принятой в данном случае за

начало координат, на расстоянии

$$y_1 = -\left(\frac{h}{2} + 0{,}5\right) = -6{,}5\,см.$$

Центр тяжести швеллера C_3 находим при помощи тех же таблиц из ГОСТа. Положение центра тяжести швеллеров в таблицах обозначено одной координатой z_0; для швеллера № 14 $z_0 = 1{,}67\,см$, следовательно,

$$y_3 = \frac{h}{2} + z_0 = 7{,}67\,см.$$

Таким образом,

$$F_1 = 12\,см^2;\ C_1(0;\ -6{,}5);$$
$$F_2 = 14{,}7\,см^2;\ C_2(0;\ 0);$$
$$F_3 = 15{,}7\,см^2;\ C_3(0;\ 7{,}67).$$

4. Подставляем эти значения в расчетную формулу для ординаты y_C:

$$y_C = \frac{-12\cdot 6{,}5 + 14{,}7\cdot 0 + 15{,}7\cdot 7{,}67}{12 + 14{,}7 + 15{,}6} = \frac{42{,}0}{42{,}3} \approx 1{,}0\,см.$$

В выбранных осях положения центра тяжести сечения выражены координатами $C_0(0;\ 1)$.

Это значит, что центр тяжести сечения находится от его нижнего края (от точки A) на расстоянии $AC_0 = 8\,см$.

Задача 139-25. Определить положение центра тяжести сечения, составленного, как показано на рис. 196, из трех профилей стандартного проката: швеллера № 10 (ГОСТ 8240—72), двутавра № 12 (ГОСТ 8239—72) и неравнобокого уголка № 5/3,2 (размеры $50\times 32\times 4$ *мм* ГОСТ 8510—72).

Решение.

1. Разбиваем сечение на три части: *I* — швеллер, *II* — двутавр и *III* — неравнобокий уголок.

2. Начало координат поместим в вершине прямого угла неравнобокого уголка; ось x совместим с нижней полкой двутавра, а ось y — с его вертикальной осью симметрии.

3. При помощи таблиц из ГОСТа находим:

площадь сечения швеллера № 10

$$F_1 = 10{,}9\,см^2;$$

площадь сечения двутавра № 12

$$F_2 = 14{,}7\,см^2;$$

площадь сечения уголка № 5/3,2

$$F_3 = 3{,}17\,см^2.$$

4. В таблицах из ГОСТа положение центра тяжести C_1 швеллера № 10 показано одной координатой $z_0 = 1{,}44\,см$, так как швеллер

имеет одну ось симметрии. Положение центра тяжести C_2 двутавра в таблицах не показано, так как он имеет две оси симметрии и его центр тяжести расположен на их пересечении. Положение центра тяжести C_3 неравнобокого уголка № 5/3,2 показано двумя координатами: $x_0 = 0{,}76$ и $y_0 = 1{,}65$ *см*.

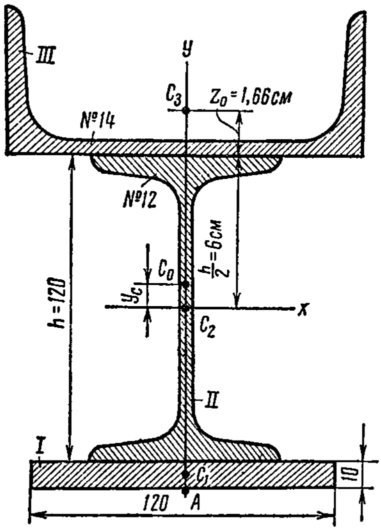


Рис. 195

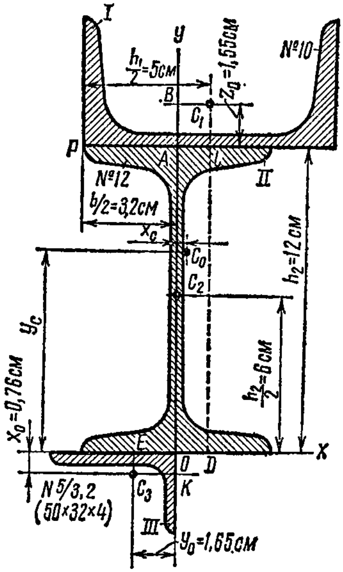


Рис. 196

Располагаем центры тяжести C_1, C_2 и C_3 на рисунке (см. рис. 196), а затем при помощи таблиц находим их координаты в выбранных

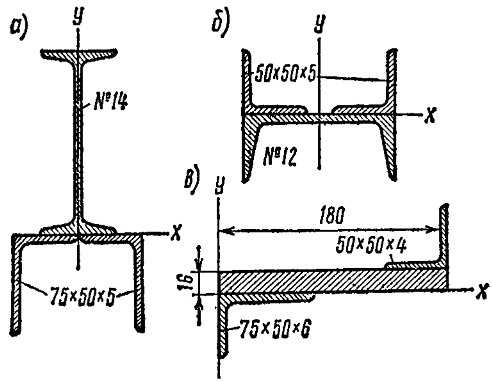


Рис. 197

осях, учитывая другие необходимые размеры профилей, которые также берутся из таблиц:

координаты центра тяжести C_1:

$$x_1 = OD = PL - PA = 5 - 3,2 = 1,8\ см;$$
$$y_1 = OB = OA + AB = 12 + 1,44 = 13,44\ см;$$

координаты центра тяжести C_2: $x_2 = 0$; $y_2 = OC_2 = 6\ см$;
координаты центра тяжести C_3:

$$x_3 = -OE = -y_0 = -1,65\ см,$$
$$y_3 = -OK = -x_0 = -0,76\ см.$$

5. Таким образом,

$$F_1 = 10,9\ см^2; \quad C_1(1,8;\ 13,44);$$
$$F_2 = 14,7\ см^2; \quad C_2(0;\ 6);$$
$$F_3 = 3,17\ см^2; \quad C_3(-1,65;\ -0,76).$$

6. Подставляем эти значения в расчетные формулы:

$$x_C = \frac{10,9\cdot 1,8 + 14,7\cdot 0 - 3,17\cdot 1,65}{10,9 + 14,7 + 3,17} = \frac{14,4}{28,8} = 0,50\ см;$$

$$y_C = \frac{10,9\cdot 13,44 + 14,7\cdot 6 - 3,17\cdot 0,76}{10,9 + 14,7 + 3,17} = \frac{232,4}{28,8} = 8,08\ см.$$

7. Центр тяжести данного составного сечения имеет координаты (в *мм*) $C_0(5,0;\ 80,8)$.

Задача 140-25. Определить положение центра тяжести трех сечений, составленных из профилей стандартного проката, как показано на рис. 197. *Ответ* (в *мм*): а) $C(0;\ 31,4)$; б) $C(0;\ -3,5)$; в) $C(85,4;\ 4,87)$.

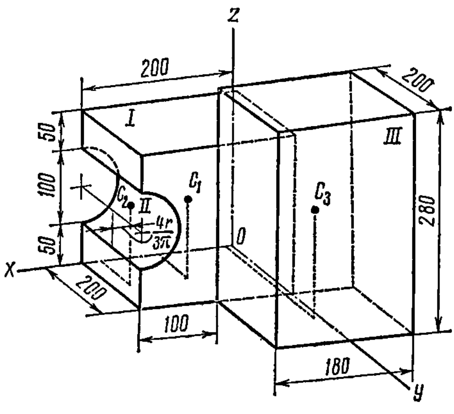


Рис. 198

§ 26-5. Определение положения центра тяжести тела, составленного из частей, имеющих простую геометрическую форму

Чтобы решать задачи на определение положения центра тяжести тела, составленного из частей, имеющих простую геометрическую форму, необходимо иметь навыки определения координат центра тяжести фигур, составленных из линий или площадей.

Задача 141-26. Определить положение центра тяжести тела, составленного из куба *I*, имеющего горизонтальную цилиндрическую канавку *II*, и прямоугольного параллелепипеда *III* (рис. 198); размеры — в *мм*.

Решение

1. Тело состоит из куба I, полуцилиндра II, объем которого считаем отрицательным, так как он вырезан из объема куба I, и прямоугольного параллелепипеда III.

2. Отметив на рисунке положение центра тяжести составных частей (C_1—центр тяжести куба, C_2—центр тяжести полуцилиндра

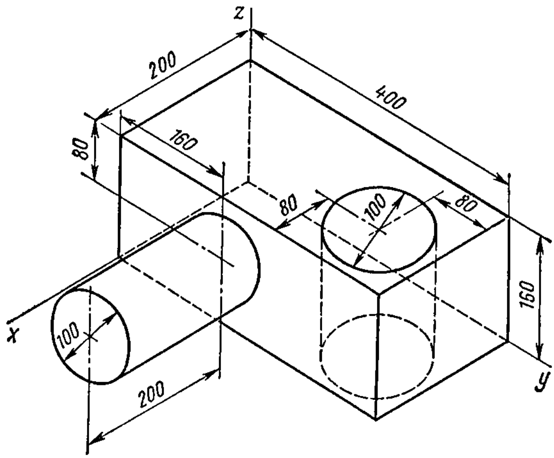


Рис. 199

и C_3—центр тяжести параллелепипеда), найдем исходные величины для подстановки их в формулы (4)—объемы V_i и координаты x_i, y_i, z_i их центров тяжести:

$$V_1 = 8000\,см^3;\ C_1(10;\ 10;\ 10);$$
$$V_2 = -785\,см^3;\ C_2(17{,}9;\ 10;\ 10);$$
$$V_3 = 10080\,см^3;\ C_3(1;\ 30;\ 14).$$

3. После подстановки в расчетные формулы имеем:

$$x_C = \frac{8000\cdot 10 - 785\cdot 17{,}9 + 10080\cdot 1}{8000 - 785 + 10080} \approx 4{,}40\,см \approx 44\,мм;$$

$$y_C = \frac{8000\cdot 10 - 785\cdot 10 + 10080\cdot 30}{8000 - 785 + 10080} \approx 21{,}6\,см \approx 216\,мм;$$

$$z_C = \frac{8000\cdot 10 - 785\cdot 10 + 10080\cdot 14}{8000 - 785 + 10080} \approx 10{,}6\,см \approx 106\,мм.$$

Таким образом, центр тяжести данного тела находится в точке C_0(44; 216; 106).

Эту точку рекомендуется отметить на рис. 198 самостоятельно.

● **Задача 142-26.** Определить положение центра тяжести тела, форма и размеры (в *мм*) которого показаны на рис. 199.

Ответ. C(122; 183; 80).

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

КИНЕМАТИКА

В кинематике изучаются законы движения материальных точек и твердых тел с чисто геометрической стороны. Законом движения точки или тела можно назвать такую совокупность математических образов и уравнений, которая в любой момент времени позволяет установить, где находится точка или тело, куда и как они движутся. При этом в кинематике не рассматриваются вопросы, почему точка или тело двигается именно так, а не иначе. Эти вопросы изучаются в разделе «Динамика».

Прежде чем решить задачи по кинематике, необходимо выяснить следующее:

а) можно ли данный в задаче движущийся предмет рассматривать как материальную точку или его нужно считать твердым телом;

б) в какой форме закон движения задан в задаче.

Необходимость выяснения первого положения вызывается тем, что законы движения материальных точек (предметов, формой и размерами которых можно пренебречь) и законы движения твердых тел (предметов, состоящих из множества материальных точек), как правило, отличаются друг от друга.

От способа задания закона движения зависит ход решения задачи.

ГЛАВА VI

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

В этой главе в основном рассмотрены методы решения задач, в которых закон движения точки выражен так называемым естественным способом: уравнением $s=f(t)$ по заданной траектории*.

В этом случае главными параметрами, характеризующими движение точки по заданной траектории, являются: s — расстояние от заданного начального положения и t — время.

Величина, характеризующая в каждый данный момент времени направление и быстроту движения точки, называется *скоростью* ($\overline{v}$ на рис. 200). *Вектор* скорости всегда направлен вдоль касательной в ту сторону, **куда** движется точка. Числовое значение ско-

* Решения задач, в которых закон движения задач координатным способом, рассмотрены в конце главы (§ 31—6).

рости в любой момент времени выражается производной от расстояния по времени:

$$v=ds/dt \text{ или } v=f'(t).$$

Ускорение $\bar{a}$ точки в каждый данный момент времени характеризует быстроту изменения скорости. При этом нужно отчетливо понимать, что скорость—вектор, и, следовательно, изменение скорости может происходить по двум признакам: по числовой величине (по модулю) и по направлению.

Быстрота изменения модуля скорости характеризуется касательным ускорением $\bar{a}_t$—составляющей полного ускорения $\bar{a}$, направленной по касательной к траектории (см. рис. 200).

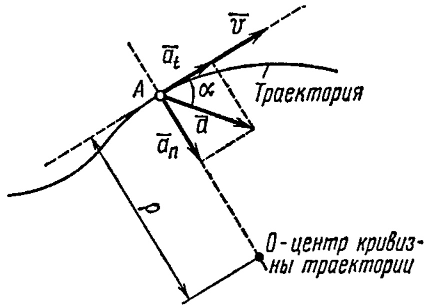


Рис. 200

Числовое значение касательного ускорения в общем случае определяется по формуле

$$a_t=\frac{dv}{dt} \text{ или } a_t=f''(t).$$

Быстрота изменения направления скорости характеризуется нормальным (центростремительным) ускорением $\bar{a}_n$—составляющей полного ускорения $\bar{a}$, направленного по нормали к траектории в сторону центра кривизны (см. рис. 200).

Числовое значение нормального ускорения определяется в общем случае по формуле

$$a_n=\frac{v^2}{\rho},$$

где v—модуль скорости точки в данный момент: ρ—радиус кривизны траектории в месте, где находится точка в данный момент.

После того как определены касательное и нормальное ускорения, легко определить и ускорение $\bar{a}$ (полное ускорение точки).

Так как касательная и нормаль взаимно перпендикулярны, то числовое значение ускорения $\bar{a}$ можно определить при помощи теоремы Пифагора:

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}.$$

Направление $\bar{a}$ можно определить, исходя из тригонометрических соотношений, по одной из следующих формул:

$$\sin\alpha=\frac{a_n}{a};\ \cos\alpha=\frac{a_t}{a};\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{a_n}{a_t}.$$

Но можно сначала определить направление полного ускорения $\bar{a}$, использовав формулу

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a_n}{a_t},$$

а затем найти числовое значение a: $a=\frac{a_n}{\sin a}$ или $a=\frac{a_t}{\cos\alpha}$.

Касательное и нормальное ускорения точки являются главными кинематическими величинами, определяющими вид и особенности движения точки.

Наличие касательного ускорения ($\bar{a}_t \neq 0$) или его отсутствие ($\bar{a}_t = 0$) определяют соответственно неравномерность или равномерность движения точки.

Наличие нормального ускорения ($\bar{a}_n \neq 0$) или его отсутствие ($\bar{a}_n = 0$) определяют криволинейность или прямолинейность движения точки.

Движение точки можно классифицировать так:

а) равномерное прямолинейное ($\bar{a}_t = 0$ и $\bar{a}_n = 0$);

б) равномерное криволинейное ($\bar{a}_t = 0$ и $\bar{a}_n \neq 0$);

в) неравномерное прямолинейное ($\bar{a}_t \neq 0$ и $\bar{a}_n = 0$);

г) неравномерное криволинейное ($\bar{a}_t \neq 0$ и $\bar{a}_n \neq 0$).

Таким образом, движение точки классифицируется по двум признакам: по степени неравномерности движения и по виду траектории.

Степень неравномерности движения точки задана уравнением $s = f(t)$, а вид траектории задается непосредственно.

§ 27-6. Равномерное прямолинейное движение точки

Если $\bar{a}_t = 0$ и $\bar{a}_n = 0$, то вектор скорости остается постоянным ($\bar{v} = \text{const}$), т. е. не изменяется ни по модулю, ни по направлению. Такое движение называется *равномерным прямолинейным*.

Уравнение равномерного движения имеет вид

$$s = s_0 + vt \qquad \text{(а)}$$

или в частном случае, когда начальное расстояние $s_0 = 0$,

$$s = vt. \qquad \text{(б)}$$

В уравнение (а) входит всего четыре величины, из них две переменные: s и t и две постоянные: s_0 и v. Поэтому в условии задачи на равномерное и прямолинейное движение точки должны быть заданы три любые величины.

При решении задач необходимо выяснить все заданные величины и привести их к одной системе единиц. При этом нужно заметить, что как в системе МКГСС (технической), так и в СИ единицы всех кинематических величин одинаковы:

расстояние s измеряется в *м*, время t — в *сек*, скорость v — в *м/сек*.

Задача 143-27. Точка, совершая равномерное и прямолинейное движение, проходит прямолинейный участок траектории AB, равный 60 *м* (рис. 201, *а*) за 30 *сек*. Простояв затем 10 *сек* на месте, точка возвращается в исходное положение со скоростью 3 *м/сек*. Сколько всего времени проходит от начала движения точки до ее возвращения в исходное положение? Какой путь проходит точка?

Построить графики перемещения и скорости точки.

Решение.

1. Расстояние от A до B, равное $s_{AB}=60\,м$, равномерно пройдено за $t_{AB}=30\,сек$. В данном случае начальное расстояние $s_0=0$, поэтому из уравнения (б) находим скорость точки на участке AB

$$v_{AB}=\frac{s_{AB}}{t_{AB}}=\frac{60}{30}=2\,м/сек.$$

2. Точка находится в покое в течение времени $t_{BB'}=10\,сек$.

3. Точка возвращается в исходное положение, пройдя расстояние от B до A $s_{BA}=60\,м$ со скоростью $v_{BA}=3\,м/сек$ за время

$$t_{BA}=\frac{s_{BA}}{v_{BA}}=\frac{60}{3}=20\,сек.$$

4. Время от начала движения до момента возвращения в исходное положение равно:

$$t_{AB}+t_{BB'}+t_{BA}=30+10+20=$$
$$=60\,сек=1\,мин$$

5. Путь, пройденный точкой за это время,

$$s=s_{AB}+s_{BA}=60+60=120\,м.$$

6. Построим теперь график перемещения (рис. 201, *б*) и скорости точки (рис. 201, *в*) с одинаковым масштабом по оси времени.

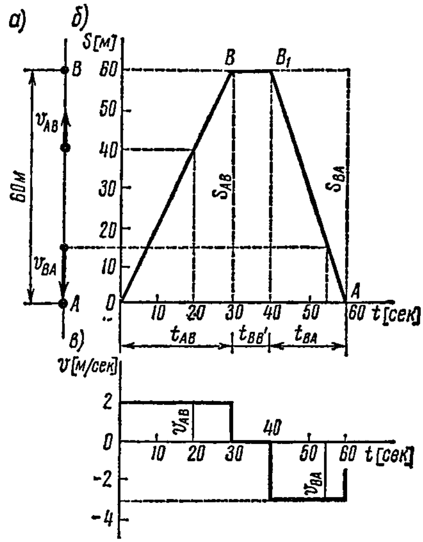


Рис. 201

Задача 144-27. Из двух пунктов A и B прямолинейного шоссе, находящихся один от другого на расстоянии $100\,км$, одновременно выезжают навстречу друг другу два велосипедиста и двигаются с постоянными скоростями. Велосипедист, выезжающий из A, имеет скорость $v_A=40\,км/ч$, а велосипедист, выезжающий из B, — скорость $v_B=26^2/_3\,км/ч$. Определить, за какое время каждый из них проедет расстояние $100\,км$. Через сколько часов и где они встретятся?

Решение.

1. Находим время, затраченное первым велосипедистом на проезд от точки A до B:

$$t_{AB}=\frac{s_{AB}}{v_A}=\frac{100}{40}=2^1/_2\,ч.$$

2. Находим время, затраченное вторым велосипедистом на проезд от точки B до A:

$$t_{BA}=\frac{s_{BA}}{v_B}=\frac{100}{26^2/_3}=3^3/_4\,ч.$$

3. Время и место встречи велосипедистов наиболее просто определить графически. Расстояние между пунктами A и B, равное 100 *км*, изобразим на оси ординат отрезком в 50 *мм* (рис. 202), т. е. в масштабе $\mu_s = 2$ *км/мм* $\left(100 \text{ км} = \mu_s \cdot 50 \text{ мм} \text{ и } \mu_s = \frac{100 \text{ км}}{50 \text{ мм}} = 2 \text{ км/мм}\right)$.

По оси абсцисс отложим время в масштабе $\mu_t = 0{,}1$ *ч/мм* (4 часа изображены отрезком 40 *мм*, поэтому $4 \text{ ч} = \mu_t \cdot 40 \text{ мм}$ и $\mu_t = \frac{4 \text{ ч}}{40 \text{ мм}} = 0{,}1 \text{ ч/мм}$).

Первый велосипедист расстояние от A до B проезжает за 2,5 *ч*. Его перемещение изображается на графике прямой OB_1.

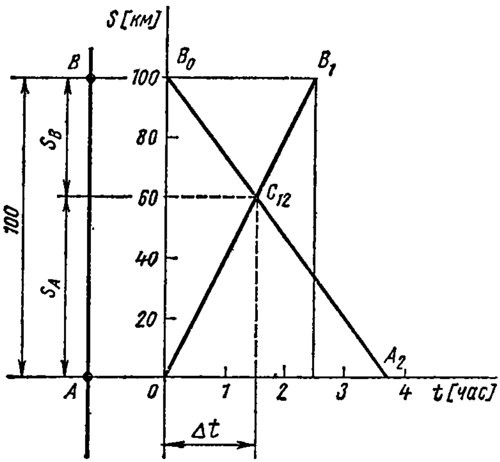


Рис. 202

Второй велосипедист расстояние от B до A проезжает за $3^3/_4$ *ч* и его перемещение изображается на графике прямой B_0A_2.

Точка C_{12} пересечения обоих графиков указывает место и время встречи. Встреча происходит на расстоянии $s_A = 60$ *км* от пункта A (или на расстоянии $s_B = 40$ *км* от пункта B) через $\Delta t = 1{,}5$ *ч* после начала движения велосипедистов.

Если вместо графического решения применить аналитическое, то нужно рассуждать таким образом.

Допустим, что место встречи происходит на расстоянии s от пункта A, а время встречи Δt, считая от начала движения. Тогда уравнение движения первого велосипедиста примет вид

$$s = v_A \cdot \Delta t \qquad (1)$$

и уравнение движения второго велосипедиста

$$s = s_0 - v_B \cdot \Delta t, \qquad (2)$$

где $s_0 = 100$ *км* — расстояние второго велосипедиста от пункта A в момент начала отсчета (при $t = 0$).

Так как левые части уравнения (1) и (2) равны, то

$$v_A \cdot \Delta t = s_0 - v_B \cdot \Delta t.$$

Отсюда

$$\Delta t = \frac{s_0}{v_A + v_B} = \frac{100 \text{ км}}{(40 + 26^2/_3) \text{ км/ч}} = 1{,}5 \text{ ч}.$$

Из уравнения (1) определяем s:

$$s = v_A \cdot \Delta t = 40 \cdot 1{,}5 = 60 \text{ км}.$$

● **Задача 145-27.** Какой вид примет график движения велосипедистов, если, встретившись, они остановятся на 0,5 *ч*, а затем продолжат свой путь с прежними скоростями?

● **Задача 146-27.** Две материальные точки находятся друг от друга на расстоянии 120 *м*. Первая точка совершает равномерное движение по направлению ко второй со скоростью 0,5 *м/сек*; вторая точка также совершает равномерное движение по направлению к первой, но через 30 *сек* после начала движения первой и со скоростью 1,6 *м/сек*. Определить место и время встречи.

Ответ. Встреча произойдет через 80 *сек* после начала движения первой точки и на расстоянии 40 *м* от ее первоначального положения.

● **Задача 147-27.** Между двумя пунктами, расположенными на шоссе, расстояние 60 *км*. Выехав из пункта *A* в 12 *ч*, велосипедист рассчитывал, двигаясь равномерно, приехать в пункт *B* к 14 *ч* 30 *мин*.

На половине пути произошел прокол шины, ремонт которой занял 27 *мин*. С какой скоростью ехал велосипедист первую половину дороги и с какой скоростью он должен ехать вторую половину, чтобы прибыть в пункт *B* в назначенное время?

Ответ. 24 *км/ч*; 37,5 *км/ч*.

● **Задача 148-27.** При движении по прямолинейному шоссе автомобиль проехал *s км* с постоянной скоростью $v_1 = 30$ *км/ч*. Следующие *s км* он проехал также с постоянной скоростью $v_2 = 60$ *км/ч*. Какова средняя скорость автомобиля на всем пути?

Ответ. $v_{ср} = \frac{2v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2} = 40$ *км/ч*.

§ 28-6. Равномерное криволинейное движение точки

Если $\bar{a}_t = 0$ и $\bar{a}_n \neq 0$, то модуль скорости остается неизменным (точка движется равномерно), но ее направление изменяется и точка движется криволинейно. Иначе, при равномерном движении по криволинейной траектории точка имеет нормальное ускорение, направленное по нормали к траектории и численно равное

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \text{ где } \rho \text{ — радиус кривизны траектории.}$$

В частном случае движения точки по окружности (или по дуге окружности) радиус кривизны траектории во всех ее точках постоянный:

$$\rho = r = \text{const},$$

а так как и числовое значение скорости постоянно, то

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \text{const}.$$

При равномерном движении числовое значение скорости определяется из формулы

$$v = \frac{s - s_0}{t} \quad \text{или} \quad v = \frac{s}{t}.$$

Если точка совершит полный пробег по окружности, то путь s равен длине окружности, т. е. $s = 2\pi r = \pi d$ ($d = 2r$ — диаметр), а время равно периоду, т. е. $t = T$. Выражение скорости примет вид

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{\pi d}{T}.$$

Задача 149-28. Тепловоз проходит закругление длиной 800 *м* за 50 *сек*. Радиус закругления по всей его длине постоянный и равняется 400 *м*. Определить скорость тепловоза и нормальное ускорение, считая движение равномерным.

Решение.

1. Принимая тепловоз за материальную точку, найдем его скорость:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{800}{50} = 16 \text{ м/сек}.$$

2. Находим нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{16^2}{400} = 0{,}64 \text{ м/сек}^2.$$

3. Таким образом, при равномерном движении тепловоза по закруглению со скоростью $v = 16$ *м/сек* он имеет нормальное ускорение $a_n = 0{,}64$ *м/сек*^{2} (рис. 203).

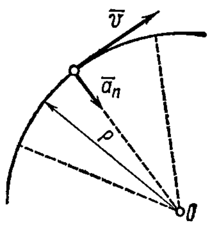


Рис. 203

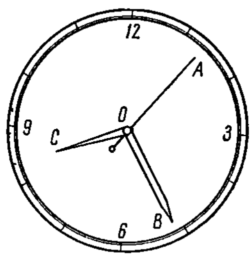


Рис. 204

Задача 150-28. Определить, с какими скоростями движутся точки A, B и C, расположенные на концах секундной, минутной и часовой стрелок часов. Принять длину секундной и минутной стрелок равной 14 *мм* и длину часовой стрелки — 10 *мм* (рис. 204).

Решение.

1. Скорости данных точек найдем из формулы

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

2. Определим исходные данные.

Для точки A (конец секундной стрелки)

$$OA = r_A = 14 \text{ мм}; \quad T_A = 1 \text{ мин} = 60 \text{ сек}.$$

Для точки B (конец минутной стрелки)

$$OB = r_B = 14\ мм;\quad T_B = 1\ ч = 3600\ сек.$$

Для точки C (конец часовой стрелки)

$$OC = r_C = 10\ мм;\quad T_C = 12\ ч = 43\,200\ сек.$$

3. Находим искомые скорости:

$$v_A = \frac{2\pi r_A}{T_A} = \frac{2\pi 14}{60} = 1{,}47\ мм/сек;$$

$$v_B = \frac{2\pi r_B}{T_B} = \frac{2\pi 14}{3600} = 0{,}0244\ мм/сек;$$

$$v_C = \frac{2\pi r_C}{T_C} = \frac{2\pi 10}{43200} = 0{,}00146\ мм/сек.$$

● **Задача 151-28.** Какое нормальное ускорение приобретет автомобиль, проезжающий со скоростью 80 *км/ч* арочный выпуклый мостик, радиус кривизны которого 200 *м*?

Ответ. $a_n = 2{,}47\ м/сек^2$.

● **Задача 152-28.** Считая, что Земля движется равномерно вокруг Солнца по круговой орбите, радиус которой $15 \cdot 10^{10}$ *м*, определить ее скорость и нормальное ускорение.

Ответ. $v \approx 30 \cdot 10^3\ м/сек \approx 30\ км/сек;$

$$a_n \approx 6 \cdot 10^{-3}\ м/сек^2 \approx 0{,}006\ м/сек^2.$$

● **Задача 153-28.** Круговая орбита (траектория) искусственного спутника Земли лежит в плоскости экватора. Скорость спутника на орбите 3,05 *км/сек*. На какой высоте над поверхностью Земли должна проходить орбита спутника, чтобы он постоянно находился над одной и той же точкой земного экватора и каково будет на этой высоте нормальное ускорение спутника? Радиус Земли 6400 *км*.

Ответ. $h = 35\,600\ км;\quad a_n = 0{,}222\ м/сек^2$.

§ 29-6. Равнопеременное движение точки

Если $\bar{a}_t = \text{const}$ (касательное ускорение постоянно как по модулю, так и по направлению), то $\bar{a}_n = 0$. Такое движение называется *равнопеременным и прямолинейным*.

Если же постоянным остается только числовое значение касательного уравнения

$$a_t = \frac{dv}{dt} = f''(t) = \text{const},$$

то $\bar{a}_n \neq 0$ и такое движение точки называется *равнопеременным криволинейным*.

При $|a_t| > 0$ движение точки называется равноускоренным, а при $|a_t| < 0$ — равнозамедленным.

Уравнение равнопеременного движения независимо от его траектории имеет вид (см. § 63 в учебнике Е. М. Никитина)

$$s=s_0+v_0t+\frac{a_t t^2}{2}. \qquad (1)$$

Здесь s_0 — расстояние точки от исходного положения в момент начала отсчета; v_0 — начальная скорость и a_t — касательное ускорение — величины численно постоянные, а s и t — переменные.

Числовое значение скорости точки в любой момент времени определяется из уравнения

$$v=v_0+a_t\cdot t. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) являются основными формулами равнопеременного движения и они содержат шесть различных величин: три постоянные: s_0, v_0, a_t и три переменные: s, v, t.

Следовательно, для решения задачи на равнопеременное движение точки в ее условии должно быть дано не менее четырех величин (систему двух уравнений можно решить лишь в том случае, если они содержат два неизвестных).

Если неизвестные входят в оба основных уравнения, например, неизвестны a_t и t, то для удобства решения таких задач выведены вспомогательные формулы:

после исключения a_t из (1) и (2)

$$s=s_0+\frac{v+v_0}{2}t; \qquad (3)$$

после исключения t из (1) и (2)

$$s=s_0+\frac{v^2-v_0^2}{2a_t}. \qquad (4)$$

В частном случае, когда начальные величины $s_0=0$ и $v_0=0$ (равноускоренное движение из состояния покоя), то получаем те же формулы в упрощенном виде:

$$s=\frac{a_t t^2}{2}; \qquad (5)$$

$$v=a_t\cdot t; \qquad (6)$$

$$s=\frac{v}{2}\cdot t; \qquad (7)$$

$$s=\frac{v^2}{2a_t}. \qquad (8)$$

Уравнения (5) и (6) являются основными, а уравнения (7) и (8) — вспомогательными.

Равноускоренное движение из состояния покоя, происходящее под действием только силы тяжести, называется свободным падением. К этому движению применимы формулы (5)—(8), причем

$$a_t=g=9{,}81\ м/сек^2\approx 9{,}8\ м/сек^2.$$

Задача 154-29. Шарик, размерами которого можно пренебречь, начинает скатываться по наклонной плоскости из состояния покоя. Через 20 *сек* после начала движения шарик находится от исходного положения на расстоянии 6 *м*.

Определить ускорение шарика и его скорость в конце 10-й и 20-й *сек*, а также расстояние, пройденное шариком за первые 10 *сек*.

Решение.

1. Из условия задачи следует, что $s_0 = 0$ и $v_0 = 0$. Пройденное за $t_2 = 20$ *сек* расстояние $s_{20} = 6$ *м*. Даны четыре величины. Требуется определить ускорение шарика (движение прямолинейное, значит определить нужно только a_t), скорости v_{10}, v_{20} и расстояние s_{10}.

2. Найдем из формулы (7) скорость шарика, которую он приобретает в конце 20-й *сек*:

$$v_{20} = \frac{2s_{20}}{t_2} = \frac{2 \cdot 6}{20} = 0{,}6 \text{ м/сек}.$$

3. Найдем из формулы (6) ускорение шарика, которое он имеет, двигаясь по наклонной плоскости:

$$a_t = \frac{v_{20}}{t_2} = \frac{0{,}6}{20} = 0{,}03 \text{ м/сек}^2.$$

4. Теперь из этой же формулы (6) можно найти скорость в конце 10-й *сек* ($t_1 = 10$ *сек*): $v_{10} = a_t \cdot t_1 = 0{,}03 \cdot 10 = 0{,}3$ *м/сек*.

5. Из формулы (5) находим расстояние, пройденное точкой за первые 10 *сек*: $s_{10} = \frac{a_t \cdot t_1^2}{2} = \frac{0{,}03 \cdot 10^2}{2} = 1{,}5$ *м*.

Задачу можно решить в ином порядке. Сначала из формулы (5) определить ускорение $a_t = \frac{2s_{20}}{t_2^2} = \frac{2 \cdot 6}{20^2} = 0{,}03$ *м/сек*^{2}.

Затем из формулы (6) определить v_{10} и v_{20} и, наконец, из формулы (5) найти s_{10}.

Задача 155-29. Автомобиль, движущийся равномерно и прямолинейно со скоростью 60 *км/ч*, увеличивает в течение 20 *сек* скорость до 90 *км/ч*. Определить, какое ускорение получит автомобиль и какое расстояние он проедет за это время, считая движение равноускоренным.

Решение.

1. Здесь также четыре данных величины:

$$v_0 = 60 \text{ км/ч} = \frac{60 \cdot 1000}{3600} \text{ м/сек} = 16{,}7 \text{ м/сек},$$

$$v_{20} = 90 \text{ км/ч} = 25 \text{ м/сек}, \quad t_{0-20} = 20 \text{ сек} \quad \text{и} \quad s_0 = 0,$$

так как движение автомобиля рассматривается только на том участке траектории (дороги), где он движется с ускорением.

2. Из вспомогательной формулы (3), полагая в ней $s_0 = 0$, найдем s_{0-20}:

$$s_{0-20} = \frac{v_{20} + v_0}{2} \cdot t_{0-20} = \frac{25 + 16{,}7}{2} \cdot 20 = 417 \text{ м}.$$

3. Из формулы (2) найдем ускорение, полученное автомобилем:

$$a_t = \frac{v_{20} - v_0}{t_{0-20}} = \frac{25 - 16{,}7}{20} = 0{,}415 \text{ м/сек}^2.$$

Задачу можно решить несколько иным путем. Сначала из формулы (2) найти ускорение автомобиля, а затем из формулы (1) найти пройденное расстояние.

Задача 156-29. Имея скорость 20 *м/сек*, автомобиль въезжает на криволинейный участок дороги, имеющий радиус закругления 200 *м*. За 40 *сек* равнопеременного движения он проезжает расстояние 400 *м*.

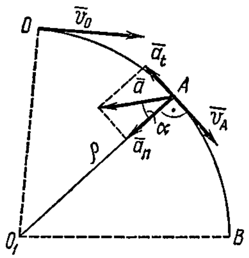


Рис. 205

Определить, с каким касательным ускорением движется автомобиль, какова его скорость в конце пройденных 400 *м* и каково полное ускорение на середине этого пути.

Решение.

1. Изобразим участок дороги, по которой движется автомобиль (рис. 205): O — начало участка, B — конец участка и A — его середина.

Для равнопеременного движения в задаче имеется четыре основных данных: $s_0 = 0$ (так как за начало отсчета движения принимаем точку O); $v_0 = 20$ *м/сек*; $t_{0B} = 40$ *сек* и $s_{0B} = 400$ *м*; кроме того, известен радиус закругления $O_1A = \rho = 200$ *м*.

2. Из формулы (3) найдем скорость v_B в конце участка дороги длиной $s_{0B} = 400$ *м* (полагая, что $s_0 = 0$):

$$v_B = \frac{2s_{0B}}{t_{0B}} - v_0 = \frac{2 \cdot 400}{40} - 20 = 0.$$

В конце рассматриваемого участка автомобиль останавливается, значит движение равнозамедленное*.

3. Найдем касательное ускорение автомобиля из формулы (2):

$$a_t = \frac{v_B - v_0}{t_{0B}} = \frac{0 - 20}{40} = -0{,}5 \text{ м/сек}^2.$$

Получившееся отрицательное значение ускорения — подтверждение того, что движение автомобиля равнозамедленное.

4. Для того чтобы определить полное ускорение автомобиля в середине A участка OB, нужно сначала найти скорость v_A — скорость автомобиля в момент прохождения им точки A.

---

* Решение задачи можно начать с определения касательного ускорения из формулы (1), считая $s_0 = 0$. Тогда

$$a_t = \frac{2s_{0B} - 2v_0 t_{0B}}{t_{0B}^2} = \frac{2s_{0B}}{t_{0B}^2} - \frac{2v_0}{t_{0B}} = \frac{2 \cdot 400}{40^2} - \frac{2 \cdot 20}{40} = -0{,}5 \text{ м/сек}^2.$$

Ускорение получается отрицательным, значит движение равнозамедленное.

Эту скорость найдем из уравнения (4), приняв $s_0 = 0$ и $s = s_{0A} = 200$ *м*:

$$v_A = \sqrt{2a_t \cdot s_{0A} + v_0^2} = \sqrt{2\cdot(-0{,}5)\cdot 200 + 20^2} = \sqrt{200};$$

$$v_A = 10\sqrt{2} \text{ м/сек}^*.$$

5. Находим нормальное ускорение автомобиля в точке A:

$$a_{nA} = \frac{v_A^2}{\rho} = \frac{(10\sqrt{2})^2}{200} = 1 \text{ м/сек}^2.$$

6. И, наконец, находим полное ускорение автомобиля:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_{nA}^2} = \sqrt{0{,}5^2 + 1^2} = 1{,}12 \text{ м/сек}^2.$$

7. Вектор полного ускорения $\bar{a}$ направлен к вектору скорости $\bar{v}_A$ под углом $(\bar{a}, \bar{v}_A) = \alpha + 90°$. Угол α можно найти при помощи его синуса:

$$\sin\alpha = \frac{a_{nA}}{a} = \frac{1}{1{,}12} = 0{,}893, \quad \alpha \approx 63°.$$

Следовательно,

$$\text{угол } (\bar{a}, \bar{v}_A) = 63° + 90° = 153°.$$

Задача 157-29. Точка движется в горизонтальной плоскости по заданной траектории $OABC$ (рис. 206, *а*). Начав движение из состояния покоя, точка проходит участок $OA = 300$ *м* равноускоренно за 30 *сек*, а расстояние от A до B, равное 200 *м*, она проходит равномерно с той же скоростью, которую имеет в конце участка OA. Из B точка движется в C уже равнозамедленно и проходит это расстояние за 40 *сек*. Остановившись в C, точка находится в покое 20 *сек*, а затем возвращается обратно в O по той же траектории, двигаясь равномерно и затратив на это движение 30 *сек*.

Построить графики перемещения, скорости и касательного ускорения точки.

Определить полное ускорение точки в момент времени через 60 *сек* после начала движения.

Решение.

1. На участке OA, длина которого 300 *м*, точка движется равноускоренно из состояния покоя и проходит этот участок за 30 *сек*:

$$s_{OA} = 300 \text{ м}, \quad v_0 = 0, \quad t_{0A} = 30 \text{ сек}.$$

2. Находим ускорение a_{OA} на участке OA из уравнения (5):

$$a_{OA} = \frac{2s_{OA}}{t_{OA}^2} = \frac{2\cdot 300}{30^2} = \frac{2}{3} \text{ м/сек}^2.$$

3. Скорость точки в конце участка OA находим из уравнения (6):

$$v_A = a_{OA} t_{0A} = \frac{2}{3}\cdot 30 = 20 \text{ м/сек}.$$

---

* В дальнейшем для определения a_n нужно иметь значение v_A^2.

4. Следующий участок траектории AB длиной $s_{AB}=200$ *м* точка проходит с постоянной скоростью $v_A=20$ *м/сек*. Определяем время t_{AB}, затраченное на это движение:

$$t_{AB}=\frac{s_{AB}}{v_A}=\frac{200}{20}=10 \text{ сек.}$$

Причем в конце участка AB скорость $v_B=v_A=20$ *м/сек*. Значит, движение на участке BC точка начинает со скоростью $v_B=20$ *м/сек*

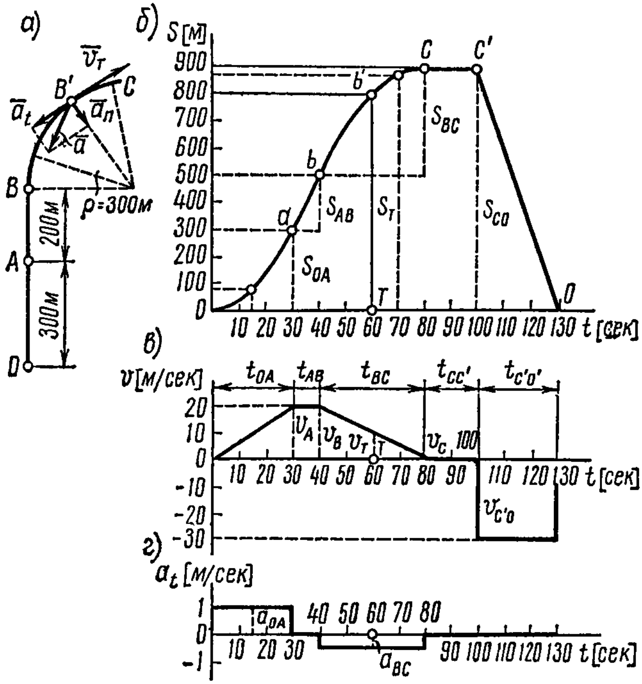


Рис. 206

и, двигаясь равнозамедленно, останавливается в C ($v_C=0$) через $t_{BC}=40$ *сек*.

Длину участка BC найдем по формуле (3), приняв $s_0=0$:

$$s_{BC}=\frac{v_B+v_C}{2}t_{BC}=\frac{20+0}{2}\cdot 40=400 \text{ м.}$$

5. Ускорение a_{BC} точки на участке BC определяем из формулы (2):

$$a_{BC}=\frac{v_C-v_B}{t_{BC}}=\frac{0-20}{40}=-0{,}5 \text{ м/сек}^2.$$

6. В конце траектории точка находится в покое в течение времени $t_{CC'}=20$ *сек*.

7. Затем точка движется обратно и проходит равномерно путь

$$s_{CO}=s_{CB}+s_{BA}+s_{AO}=400+200+300=900\ м$$

за время $t_{C'O}=30\ сек.$

Скорость точки в этом движении

$$v_{C'O}=\frac{s_{CO}}{t_{C'O}}=\frac{900}{30}=30\ м/сек;$$

она направлена относительно скоростей первой части движения (например, относительно скоростей v_A и v_B) в обратную сторону.

8. На все движение точки по траектории $OABC$ в одну и другую сторону вместе с остановкой в конце траектории C затрачено 130 *сек*, которые складываются из времени:
$t_{OA}=30$ *сек* — равноускоренного движения,
$t_{AB}=10$ *сек* — равномерного движения,
$t_{BC}=40$ *сек* — равнозамедленного движения,
$t_{CC'}=20$ *сек* — стояния точки,
$t_{C'O}=30$ *сек* — равномерного обратного движения.

9. Описанное выше движение точки изображаем графически построив три графика: перемещений, скоростей и ускорений, расположенных один под другим (рис. 206, *б*, *в*, *г*).

Для построения графиков необходимо выбрать удобные масштабы для времени и остальных величин.

Рекомендуется графики, показанные на рис. 206, вычертить самостоятельно на отдельном листе бумаги в клетку. Масштабы по оси времени на всех трех графиках одинаковы. Масштаб времени t принят равным $\mu_t\approx 2{,}9$ *сек/мм* (2,9 *сек* в 1 *мм*) и поэтому на графике 130 *сек* изображаются отрезком, равным 45 *мм*; масштаб перемещения $s-\mu_s=29$ *м/мм* (29 *м* в 1 *мм*) и расстояние между началом траектории O и ее концом C, равное 900 *м*, изображается отрезком, равным 31 *мм*; масштаб скоростей $v-\mu_v=2{,}86$ *м/сек·мм* (2,86 *м/сек* в 1 *мм*) и 20 *м/сек* изображаются отрезком, равным 7 *мм*, а 30 *м/сек* — длиной $\approx$ 10 *мм*; масштаб ускорений $a-\mu_a=0{,}25$ *м/сек*$^2\times$ $\times$*мм* (0,25 *м/сек*^{2} в 1 *мм*) и 1 *м/сек*^{2} изображается отрезком, равным 4 *мм*, а 0,5 *м/сек*^{2} — длиной 2 *мм*.

При самостоятельном построении этих графиков следует все масштабы увеличить, например принять

$$\mu_t=1\ сек/мм;\quad \mu_s=10\ м/мм;\quad \mu_v=1\ м/сек\cdot мм$$

и

$$\mu_a=0{,}1\ м/сек^2\cdot мм.$$

10. После построения графиков определяем ускорение точки в момент времени $T=60$ *сек* после начала движения (см. условие задачи). Для этого прежде всего на графике перемещения из точки O (начало осей координат) по оси времени откладываем отрезок

$$OT=\frac{T}{\mu_t}=\frac{60\ сек}{2{,}9\ сек/мм}\approx 21\ мм.$$

Этот отрезок определит на оси времени время $T=60$ *сек* (на самостоятельно построенном графике расстояние получится большим: $\frac{60\ сек}{1\ сек/мм}=60\ мм\Big)$.

Из точки T восставим перпендикуляр Tb', измерив его, получим $Tb'=28$ *мм*, значит

$$s_T=\mu_s\cdot Tb'=29\ м/мм\cdot 28\ мм\approx 800\ м.$$

Если это расстояние отложить на траектории, то увидим, что точка в момент времени $T=60$ *сек* будет находиться на криволинейном участке траектории (положение B') с радиусом кривизны $\rho=300$ *м*. Значит ускорение движущейся точки складывается из касательного $\bar{a}_t$ и нормального $\bar{a}_n$ ускорений.

Нормальное ускорение

$$a_n=\frac{v_T^2}{\rho}.$$

Скорость v_T в момент времени $T=60$ *сек* находим из графика скорости:

$$v_T=\mu_0\cdot Tb''=2{,}86\ м/сек\cdot мм\cdot 3{,}5\ мм\approx 10\ м/сек.$$

Следовательно,

$$a_n=\frac{v_T^2}{\rho}=\frac{10^2}{300}=\frac{1}{3}\ м/сек^2.$$

Касательное ускорение a_t находим из графика ускорений

$$a_t=a_{BC}=-0{,}5\ м/сек^2.$$

Полное ускорение движущейся точки в момент времени $T=60$ *сек*

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}\approx 0{,}6\ м/сек^2.$$

Векторы $\bar{v}_T$, $\bar{a}_t$, $\bar{a}_n$ и $\bar{a}$, характеризующие кинематическое состояние точки в момент времени $T=60$ *сек* после начала движения, изображены на рис. 206, *а*.

Задача 158-29. С крыши высотного дома через каждые 0,5 *сек* отрываются и свободно падают одна за другой капельки воды. Определить, через сколько времени после отрыва первой капли расстояние между этой и следующей за ней каплей достигнет 7,6 *м*?

Решение.

1. Эта задача отличается от предыдущей тем, что в ней рассматривается движение не одной, а сразу двух материальных точек.

2. Изобразим перемещение обеих точек (рис. 207). Первая капля за искомое время t_1 *сек* успевает пролететь расстояние s_1 *м*. Вторая капля, начавшая падение через 0,5 *сек*, находится в падении $t_2=(t_1-0{,}5)$ *сек* и успевает за это время пролететь расстояние s_2 *м*.

3. Расстояние 7,6 *м* между каплями через t_1 *сек* после начала движения выразим в виде уравнения

$$s_1 - s_2 = 7{,}6. \qquad \text{(а)}$$

Используя формулу (5), получим уравнения падения капель: для первой капли:

$$s_1 = \frac{9{,}81 \cdot t_1^2}{2} \approx 4{,}9 t_1^2; \qquad \text{(б)}$$

для второй капли

$$s_2 = \frac{9{,}81\,(t_1 - 0{,}5)^2}{2} \approx (t_1 - 0{,}5)^2. \qquad \text{(в)}$$

4. Подставив в уравнение (а) значения s_1 и s_2 из уравнений (б) и (в), получаем уравнение, содержащее лишь одно неизвестное t_1: $4{,}9t_1^2 - 4{,}9\,(t_1 - 0{,}5)^2 = 7{,}6$.

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим: $4{,}9t_1 - 1{,}23 = 7{,}6$, откуда $t_1 = \frac{7{,}6 + 1{,}23}{4{,}9} = 1{,}8$ *сек*.

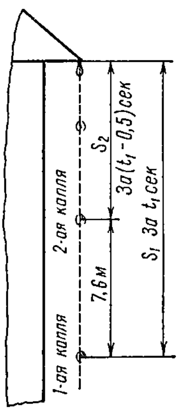


Рис. 207

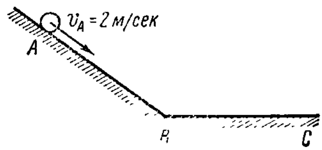


Рис. 208

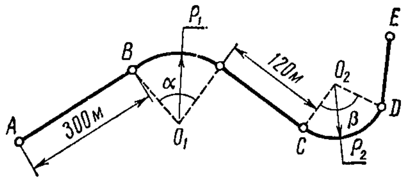


Рис. 209

Таким образом, через 1,8 *сек* после отрыва первой капли или через $1{,}8 - 0{,}5 = 1{,}3$ *сек* после отрыва второй расстояние между ними будет составлять 7,6 *м*.

● **Задача 159-29.** Скатывающийся по наклонной плоскости шарик в точке *A* (рис. 208) достигает скорости 2 *м/сек*. Расстояние $AB = 8$ *м* он проходит за 2 *сек*. Затем шарик катится по горизонтальной плоскости и останавливается в точке *C*, спустя еще 2,5 *сек*.

Считая движение на участках *AB* и *BC* равнопеременным, определить ускорения шарика при движении по наклонной плоскости и по горизонтальной *BC*. На каком расстоянии от точки *B* останавливается шарик? С какой средней скоростью проходит он весь путь от *A* до остановки в *C*?

Ответ. $a_{AB} = 2$ *м/сек*²; $a_{BC} = -2{,}4$ *м/сек*²;

$s_{BC} = 7{,}5$ *м*; $v_{ср} = 3{,}44$ *м/сек*.

● **Задача 160-29.** Точка движется в горизонтальной плоскости по заданной траектории $ABCDE$ от A к E (рис. 209). Начав движение из состояния покоя, точка проходит участок AB равноускоренно за 30 *сек*. От B до C точка движется равномерно, а участок CDE проходит равнозамедленно за 40 *сек*. В конце участка CDE точка останавливается и остается неподвижной в течение 10 *сек*. Затем точка движется по той же траектории, но в обратном направлении. Весь обратный путь точка проходит равномерно за 49,5 *сек*. Углы $\alpha = 1{,}2$ *рад* и $\beta = 2$ *рад*. Радиусы кривизны: $\rho_1 = 100$ *м* и $\rho_2 = 50$ *м*.

Построить графики перемещения, скорости, касательного и нормального ускорения точки.

Определить величину и направление полного ускорения точки в момент, когда она выходит из закругления траектории в точке D.

Ответ. Скорость равномерного движения при обратном движении 19 *м/сек*; полное ускорение в точке D:

$$a_D = 6{,}02 \text{ м/сек}^2; \quad \angle(\bar{v}_D;\ \bar{a}_D) = 94^\circ 45'.$$

● **Задача 161-29.** Мотоциклист, двигаясь с постоянной по величине скоростью 15 *м/сек*, промчался мимо контрольного поста, нарушив правила уличного движения. Через четыре секунды с контрольного поста за ним отправилась машина с постоянным ускорением (начальная скорость равна нулю). Проехав 365 *м*, она настигла мотоциклиста.

Через сколько времени машина настигла мотоцикл? Каково было ее ускорение? Чему равнялась скорость машины, когда она поравнялась с мотоциклом? Постройте графики движения мотоцикла и машины?

Ответ. $t = 20\ 1/3$ *сек*; $a = 1{,}77$ *м/сек*^{2}; $v = 35{,}9$ *м/сек*.

● **Задача 162-29.** Для измерения глубины ущелья сверху в него отпускают камень и одновременно приводят в действие секундомер. Звук от упавшего на дно ущелья камня отмечен в момент, когда секундомер фиксирует время 7,9 *сек*. Считая, что скорость звука 335 *м/сек*, а падение камня свободное ($g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}), определить глубину ущелья.

Ответ. $h \approx 234$ *м*.

§ 30-6. Неравномерное движение точки по любой траектории

Задача 163-30. Движение точки по прямолинейной траектории описывается уравнением

$$s = 0{,}2t^3 - t^2 + 0{,}6t \ (s \text{ — в } м,\ t \text{ — в } сек).$$

Определить скорость и ускорение точки в начале движения. В какие моменты времени скорость и ускорение точки равны нулю? Построить графики перемещений скоростей и ускорений для первых пяти секунд движения.

Решение.

1. Продифференцировав данное уравнение движения, получим уравнение скорости

$$v=\frac{ds}{dt}=0{,}6t^2-2t+0{,}6.$$

2. Чтобы определить скорость в начале движения, положим в этом уравнении время $t=0$ и получим

$$v_0=0{,}6\ м/сек.$$

3. Чтобы определить, в какие моменты времени скорость равна нулю, решим уравнение скорости (см. п. 1) относительно времени t, приняв в нем $v=0$:

$$0{,}6t^2-2t+0{,}6=0$$

или

$$0{,}3t^2-t+0{,}3=0,$$

$$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}3}}{2\cdot 0{,}3}.$$

Отсюда

$$t_1=\frac{1}{3}\ сек\ \text{и}\ t_2=3\ сек.$$

Таким образом, скорость точки дважды оказывается равной нулю: первый раз — через $\frac{1}{3}$ *сек*, а второй раз — через 3 *сек* после начала движения.

4. Продифференцировав уравнение скорости, получим уравнение касательного ускорения:

$$a_t=\frac{dv}{dt}=1{,}2t-2.$$

5. Подставив в это уравнение значение $t=0$, найдем, что в начале движения

$$a_{t0}=-2\ м/сек^2.$$

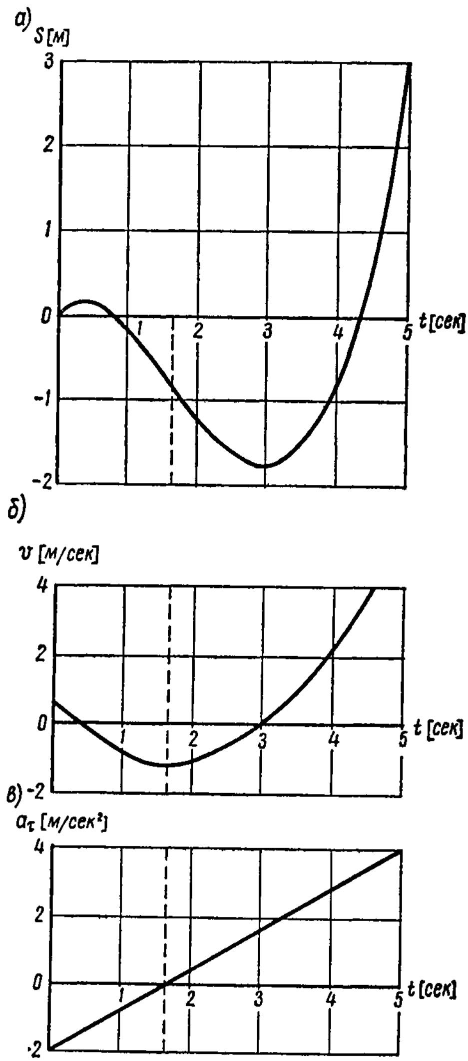


Рис. 210

Получившееся отрицательное значение касательного ускорения при положительном значении v_0 указывает на то, что в начале движение было замедленным.

6. Определим, в какой момент времени касательное ускорение равно нулю:
если $a_t = 0$, то $1{,}2t - 2 = 0$.

Отсюда находим, что $a_t = 0$ при $t' = 1^2/_3$ *сек*.

7. Для построения графиков предварительно составим сводную таблицу числовых значений s, v и a_t при значениях t от 0 до 5 *сек* (табл. 5).

Таблица 5

Значения t, *сек*	0	1	2	3	4	5
$s = 0{,}2t^3 - t^2 + 0{,}6t$, *м*	0	−0,2	−1,2	−1,8	−0,8	3
$v = 0{,}6t^2 - 2t + 0{,}6$, *м/сек*	+0,6	−0,8	−1	0	2,2	5,6
$a_t = 1{,}2t - 2$, *м/сек*²	−2	−0,8	0,4	1,6	2,8	4

8. Построенные по этим данным графики показаны на рис. 210. Графики даны в масштабах: по оси времени $\mu_t = 0{,}1$ *сек/мм*; по оси s: $\mu_s = 0{,}08$ *м/мм* (на графике перемещений, рис. 210, *а*); по оси v: $\mu_v = 0{,}2$ *м/сек·мм* (на графике скоростей, рис. 210, *б*) и по оси a_t: $\mu_a = 0{,}2$ *м/сек²·мм* (на графике ускорений, рис. 210, *в*).

Рекомендуется построить графики в масштабах: $\mu_t = 0{,}05$ *сек/мм*, $\mu_s = 0{,}04$ *м/мм*, $\mu_v = 0{,}1$ *м/сек·мм* и $\mu_a = 0{,}1$ *м/сек²·мм* и дать по ним описание движения точки.

● **Задача 164-30.** Точка движется по окружности, радиус которой 10 *м*. Движение точки описывается уравнением

$$s = 10t - 2{,}5t^2 \ (s \text{ — в } м \text{ и } t \text{ — в } сек).$$

Построить графики перемещения, скорости и касательного ускорения точки для первых 4 *сек* движения. На основании анализа построенных графиков указать: на каких участках движение ускоренное, на каких—замедленное, какой путь проходит точка за первые 4 *сек* и успевает ли она обойти полностью окружность или нет?

Определить полное ускорение точки в момент времени $t_i = 0{,}5$ *сек*.

Ответ. $a = 7{,}53$ *м/сек²*; $\angle(\bar{v};\ \bar{a}) = 131°45'$.

§ 31-6. Определение траектории, скорости и ускорения точки, если закон ее движения задан в координатной форме

Если точка движется относительно некоторой системы координат, то координаты точки изменяются с течением времени. Уравнения, выражающие функциональные зависимости координат движущейся точки от времени, называют уравнениями движения точки в системе координат (см. § 54, п. 2 в учебнике Е. М. Никитина).

Движение точки в пространстве задается тремя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(t);\\ y&=f_2(t);\\ z&=f_3(t). \end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Движение точки в плоскости (рис. 211) задается двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(t);\\ y&=f_2(t). \end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Системы уравнений (1) или (2) называют *законом движения точки в координатной форме*.

Ниже рассматривается движение точки в плоскости, поэтому используется только система (2).

Если закон движения точки задан в координатной форме, то:

а) траектория плоского движения точки выражается уравнением

$$y=F(x),$$

которое образуется из данных уравнений движения после исключения времени t;

б) числовое значение скорости точки находится из формулы

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$$

после предварительного определения проекции (см. рис. 211) скорости на оси координат

$$v_x=\frac{dx}{dt} \text{ и } v_y=\frac{dy}{dt};$$

в) числовое значение ускорения находится из формулы

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$$

после предварительного определения проекций ускорения на оси координат

$$a_x=\frac{dv_x}{dt} \text{ и } a_y=\frac{dv_y}{dt};$$

г) направления скорости и ускорения относительно осей координат определяются из тригонометрических соотношений между векторами скорости или ускорения и их проекциями.

Задача 165-31. Движение точки A задано уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x&=2t^2+2;\\ y&=1{,}5t^2+1, \end{aligned}\right\}$$

где x и y — в *см*, а t — в *сек*. Определить траекторию движения точки, скорость и ускорение в моменты $t_0=0$ *сек*, $t_1=1$ и $t_5=5$ *сек*, а также путь пройденный точкой за 5 *сек*.

Решение.

1. Определяем траекторию точки. Умножаем первое заданное уравнение на 3, второе — на (—4), а затем складываем их левые и правые части:

$$\begin{array}{r} 3x = 6t^2 + 6 \\ -4y = -6t^2 - 4 \\ \hline 3x - 4y = 2 \end{array}.$$

Получилось уравнение первой степени — уравнение прямой линии, значит движение точки — прямолинейное.

Для того чтобы определить координаты A_0 — начального положения точки, подставим в данные уравнения значение $t_0 = 0$; из

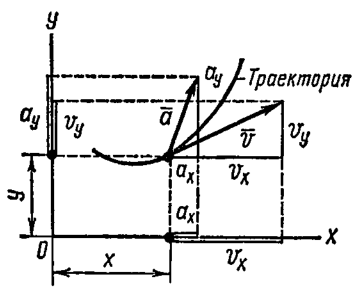


Рис. 211

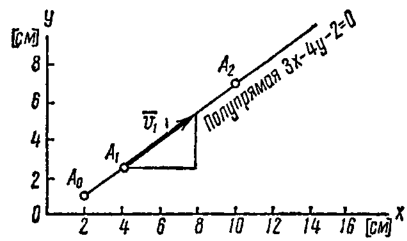


Рис. 212

первого уравнения получим $x_0 = 2$ *см*, а из второго $y_0 = 1$ *см* (рис. 212). Замечая, что при любом другом значении t (так как в оба уравнения t входит во второй степени) координаты x и y движущейся точки только возрастают, делаем окончательный вывод: траекторией точки служит полупрямая $3x - 4y - 2 = 0$ с началом в точке A_0 (2; 1).

2. Определяем скорость движения точки, для чего сначала найдем ее проекции на оси координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (2t^2 + 2)' = 4t,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = (1{,}5t^2 + 1)' = 3t.$$

Тогда

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{16t^2 + 9t^2} = 5t.$$

Таким образом, уравнение скорости имеет вид $v = 5t$.

При $t_0 = 0$ начальная скорость точки $v_0 = 0$.

При $t_1 = 1$ *сек* скорость точки $v_1 = 5$ *см/сек*.

При $t_5 = 5$ *сек* скорость точки $v_5 = 25$ *см/сек*.

3. Определяем ускорение точки.

Проекции ускорения на оси координат:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = (4t)' = 4,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = (3t)' = 3.$$

Как видно, проекции ускорения не зависят от времени движения, значит ускорение тоже постоянно и

$$a = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ см/сек}^2,$$

т. е. движение точки равноускоренное.

4. Так как в данном случае движение точки прямолинейное, то модуль ускорения можно определить путем непосредственного дифференцирования уравнения скорости:

$$v = 5t;$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 5 \text{ см/сек}^2.$$

5. Как установлено, движение точки прямолинейное, равноускоренное, значит векторы скорости и ускорения совпадают с траекторией точки, т. е. направлены вдоль полупрямой $3x - 4y - 2 = 0$. На рис. 212 показан вектор скорости $\bar{v}_1$ (скорость точки в момент $t_1 = 1$ *сек*).

6. Определяем путь, пройденный точкой за первые 5 *сек* движения. Выразим предварительно путь как функцию времени t. Зная, что $v = \frac{ds}{dt}$, имеем $ds = v \cdot dt$.

Проинтегрируем последнее выражение:

$$s = \int v \cdot dt.$$

При $v = 5t$

$$s = \int 5t \cdot dt = 2{,}5t^2 + C.$$

Если $t = t_0 = 0$, то $C = s_0$,
но так как в данном случае начальное расстояние $s_0 = 0$, то окончательно $s = 2{,}5t^2$.

И теперь находим, что за $t = 5$ *сек* точка проходит расстояние $s_{0-5} = 2{,}5 \cdot 5^2 = 62{,}5$ *см* *.

● **Задача 166-31.** Движение точки задано уравнениями $x = 8 \cdot \sin t$; $y = 8 \cdot \cos t$, где x и y — в *м*, t — в *сек*.

Определить траекторию точки, а также скорость и ускорение точки в начале и через 2 *сек* после начала движения.

---

* Путь, пройденный точкой, в данном случае (так как движение прямолинейное) можно найти, используя способ аналитической геометрии, как расстояние между двумя точками A_0 (3; 1) и A_5 (52; 38,5), характеризующими положение движущейся точки в начальный момент времени $t_0 = 0$ и в момент $t_5 = 5$ *сек*.

Указание. Для того чтобы исключить t (при определении траектории точки), каждое уравнение необходимо возвести в квадрат, потом сложить.

Ответ. Траектория — окружность с радиусом 8 *м* ($x^2+y^2=64$); $v=8$ *м/сек* и $a=a_n=8$ *м/сек*^{2}.

§ 32-6. Кинематический способ определения радиуса кривизны траектории

При решении многих технических задач возникает необходимость знать радиус кривизны ρ $\left(\text{или } \frac{1}{\rho} \text{ — кривизну}\right)$ траектории (Е. М. Никитин, § 59). Если задано уравнение траектории, то радиус ее кривизны в любой точке можно определить при помощи дифференциального исчисления. Используя уравнения движения точки в координатной форме, можно определить радиус кривизны траектории движущейся точки без непосредственного исследования уравнения траектории. Определение радиуса кривизны траектории при помощи уравнений движения точки в координатной форме называется кинематическим способом. Этот способ основан на том, что радиус кривизны траектории движущейся точки входит в формулу

$$a_n=\frac{v^2}{\rho},$$

выражающую числовое значение нормального ускорения.

Отсюда

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}. \tag{а}$$

Скорость v точки определяется по формуле

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}. \tag{б}$$

Следовательно,

$$v^2=v_x^2+v_y^2. \tag{б$'$}$$

Числовое значение нормального ускорения a_n входит в выражение полного ускорения точки

$$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2},$$

откуда

$$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}, \tag{в}$$

где квадрат полного ускорения

$$a^2=a_x^2+a_y^2 \tag{г}$$

и касательное ускорение

$$a_t=\frac{dv}{dt}. \tag{д}$$

Таким образом, если закон движения точки задан уравнениями

$$x=f_1(t); \qquad y=f_2(t),$$

то при определении радиуса кривизны траектории рекомендуется произвести следующее:

1. Продифференцировав уравнения движения, найти выражения проекций на оси координат вектора скорости:

$$v_x=f_1'(t); \qquad v_y=f_2'(t).$$

2. Подставив в (б′) выражения v_x и v_y, найти v^2.

3. Продифференцировав по t уравнение (б), полученное непосредственно из (б′), найти касательное ускорение a_t, а затем a_t^2.

4. Продифференцировав вторично уравнения движения, найти выражения проекций на оси координат вектора ускорения

$$a_x=f_1''(t)=v_x'; \qquad a_y=f_2''(t)=v_y'.$$

5. Подставив в (г) выражения a_x и a_y, найти a^2.

6. Подставить в (в) значения a^2 и a_t^2 и найти a_n.

7. Подставив в (а) найденные значения v^2 и a_n, получить радиус кривизны ρ.

Задача 167-32. Движение точки задано уравнениями

$$x=3t; \quad y=4t-3t^2,$$

(x, y — в *см*, t — в *сек*). Определить радиус кривизны траектории в те моменты, когда она пересекает ось Ox.

Решение.

1. В те моменты, когда траектория пересекает ось Ox, ордината $y=0$. Поэтому, подставив во второе уравнение движения значение $y=0$, получим

$$4t-3t^2=0.$$

Отсюда [решая уравнение относительно t: $t(4-3t)=0$; $t=0$ и $4-3t=0$] находим, что траектория пересекает ось Ox в моменты времени $t_1=0$ *сек* и $t_2=\frac{4}{3}$ *сек*.

2. Находим выражения проекций скорости:

$$v_x=(3t)'=3 \text{ и } v_y=(4t-3t^2)'=4-6t.$$

Как видно, проекция скорости на ось Ox — постоянная величина (не зависит от времени).

3. Определяем значение этих проекций в моменты пересечения траекторией оси Ox:

при $t_1=0$ $\quad v_x=3; \quad v_y=4;$

при $t_2=\frac{4}{3}$ *сек* $\quad v_x=3; \quad v_y=4-6\cdot\frac{4}{3}=-4.$

4. Числовое значение скорости точки в моменты пересечения траекторией оси Ox в данном случае одинаковы

$$v=v_1=v_2=\sqrt{3^2+(\pm 4)^2}=5 \text{ см/сек}.$$

5. Находим касательное ускорение точки. Для этого получим общее выражение (уравнение) скорости, воспользовавшись зависимостью (б):

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{3^2+(4-6t)^2}$$

или

$$v=\sqrt{25-48t+36t^2}.$$

Отсюда

$$a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{-48+72t}{2\sqrt{25-48t+36t^2}}.$$

При $t_1=0$ $a_{t_1}=-4{,}8$ *см/сек*^{2};

при $t_2=\frac{4}{3}$ *сек* $a_{t_2}=4{,}8$ *см/сек*^{2}.

6. Находим проекции полного ускорения точки:

$$a_x=(3t)''=0 \text{ и } a_y=(4t-3t^2)''=(4-6t)'=-6.$$

Следовательно, в данном случае полное ускорение точки — постоянная величина. Причем $a^2=a_x^2+a_y^2=(-6)^2=36$.

7. Определяем нормальное ускорение точки. Как при $t_1=0$, так и при $t_2=\frac{4}{3}$ *сек*

$$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=\sqrt{36-(\mp 4{,}8)^2}=3{,}61 \text{ см/сек}^2.$$

8. Зная, что в моменты пересечения траекторией оси Ox $v=5$ *см/сек* и $a_n=3{,}61$ *см/сек*, находим радиусы кривизны траектории в этих точках:

$$\rho=\rho_1=\rho_2=\frac{v^2}{a_n}=\frac{5^2}{3{,}61}=6{,}94 \text{ см}.$$

Решение этой задачи рекомендуется самостоятельно иллюстрировать чертежом, изобразив на нем траекторию точки, векторы скорости $\bar{v}$ и ускорения $\bar{a}$ в местах пересечения траектории с осью Ox (эти векторы легко построить при помощи найденных проекций), а также радиусы ρ_1 и ρ_2.

● **Задача 168-32.** Определить кинематическим способом радиус кривизны траектории точки, если ее движение задано уравнениями:

$$x=a\sin t, \quad y=a\cos t.$$

Ответ. $\rho=a$.

ГЛАВА VII

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

При поступательном движении тела (§ 64 в учебнике Е. М. Никитина) все его точки движутся по одинаковым траекториям и в каждый данный момент они имеют равные скорости и равные ускорения.

Поэтому поступательное движение тела задают движением какой-либо одной точки, обычно движением центра тяжести.

Рассматривая в какой-либо задаче движение автомобиля (задача 155-29) или тепловоза (задача 149-18), фактически рассматриваем движение их центров тяжести.

Вращательное движение тела (Е. М. Никитин, § 65) нельзя отождествить с движением какой-либо одной его точки. Ось любого вращающегося тела (маховика дизеля, ротора электродвигателя, шпинделя станка, лопастей вентилятора и т. п.) в процессе движения занимает в пространстве относительно окружающих неподвижных тел одно и то же место.

Движение материальной точки или поступательное движение тела характеризуют в зависимости от времени линейные величины s (путь, расстояние), v (скорость) и a (ускорение) с его составляющими a_t и a_n.

Вращательное движение тела в зависимости от времени t характеризуют угловые величины: φ (угол поворота в радианах), ω (угловая скорость в *рад/сек*) и ε (угловое ускорение в *рад/сек²*).

Закон вращательного движения тела выражается уравнением

$$\varphi = f(t).$$

Угловая скорость—величина, характеризующая быстроту вращения тела, определяется в общем случае как производная угла поворота по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = f'(t).$$

Угловое ускорение—величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости, определяется как производная угловой скорости

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = f''(t).$$

Приступая к решению задач на вращательное движение тела, необходимо иметь в виду, что в технических расчетах и задачах, как правило, угловое перемещение выражается не в радианах φ, а в оборотах $\varphi_{об}$.

Поэтому необходимо уметь переходить от числа оборотов к радианному измерению углового перемещения и наоборот.

Так как один полный оборот соответствует 2π *рад*, то

$$\varphi = 2\pi \cdot \varphi_{об} \text{ и } \varphi_{об} = \frac{\varphi}{2\pi}.$$

Быстрота вращения тел в технических расчетах обычно измеряется не в *рад/сек*, а в *об/мин*. Поэтому необходимо отчетливо уяснить, что угловая скорость ω *рад/сек* и так называемая частота вращения n *об/мин* выражают одно и то же понятие—скорость вращения тела, но в различных единицах.

Переход от *об/мин* — единиц частоты вращения — к *рад/сек* — единицам угловой скорости — производится по формуле

$$\omega=\frac{\pi n}{30},$$

а обратный переход от *рад/сек* к *об/мин* — по формуле

$$n=\frac{30\omega}{\pi}.$$

При вращательном движении тела все его точки движутся по окружностям, центры которых расположены на одной неподвижной прямой (ось вращающегося тела). Очень важно при решении задач, приведенных в этой главе, ясно представлять зависимость между угловыми величинами φ, ω и ε, характеризующими вращательное движение тела, и линейными величинами s, v, a_t и a_n, характеризующими движение различных точек этого тела (рис. 213).

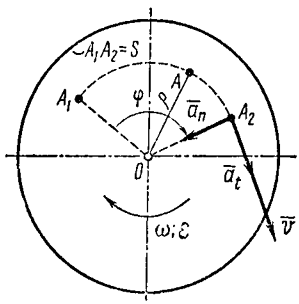


Рис. 213

Если ρ — расстояние от геометрической оси вращающегося тела до какой-либо точки A (на рис. 213 $\rho=OA$), то зависимость между φ — углом поворота тела и s — расстоянием, пройденным точкой тела за то же время, выражается так:

$$s=\rho\cdot\varphi.$$

Зависимость между угловой скоростью тела и скоростью точки в каждый момент выражается равенством

$$v=\rho\cdot\omega.$$

Касательное ускорение точки зависит от углового ускорения и определяется формулой

$$a_t=\rho\cdot\varepsilon.$$

Нормальное ускорение точки зависит от угловой скорости тела и определяется зависимостью

$$a_n=\omega^2\rho.$$

При решении задачи, приведенной в этой главе, необходимо ясно понимать, что вращением называется движение твердого тела, а не точки. Отдельно взятая материальная точка не вращается, а движется по окружности — совершает криволинейное движение.

§ 33-7. Равномерное вращательное движение

Если угловая скорость $\omega = \text{const}$, то вращательное движение называется равномерным.

Уравнение равномерного вращения имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

В частном случае, когда начальный угол поворота $\varphi_0 = 0$,

$$\varphi = \omega t.$$

Угловую скорость равномерно вращающегося тела

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

можно выразить и так:

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

где T — период вращения тела; $\varphi = 2\pi$ — угол поворота за один период.

Задача 169-33. Маховое колесо вращается равномерно с угловой скоростью 16 *рад/сек*. Определить, сколько оборотов сделает колесо за 5 *мин* вращения.

Решение 1.

1. Находим угол поворота маховика в радианах, имея в виду, что $\omega = 16$ *рад/сек* и $t = 5$ *мин* $= 300$ *сек*:

$$\varphi = \omega \cdot t = 16 \cdot 300 = 4800 \textit{ рад}.$$

2. Находим число оборотов маховика.

$$\varphi_{об} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{4\,800}{2\pi} = 764 \text{ оборота}.$$

Таким образом за 5 *мин* маховик сделает 764 оборота.

Решение 2.

1. Переведем угловую скорость $\omega = 16$ *рад/сек* в *об/мин*:

$$n = \frac{30 \cdot \omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 16}{\pi} = 152{,}8 \textit{ об/мин}.$$

2. Имея в виду, что уравнение равномерного вращательного движения можно представить так: $\varphi_{об} = nt$, где $\varphi_{об}$ — в оборотах; n — *об/мин* и t — в *мин*, находим число оборотов маховика:

$$\varphi_{об} = 152{,}8 \cdot 5 = 764 \text{ оборота}.$$

Задача 170-33. Вал, диаметр которого 0,06 *м*, вращается равномерно с частотой 1200 *об/мин*. Определить скорость и ускорение точек вала на его поверхности (рис. 214).

Решение.

1. Скорость точки вращающегося тела можно найти по формуле

$$v = \rho \cdot \omega,$$

2. Но известно, что

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

3. Поэтому

$$v = \rho \cdot \frac{\pi n}{30}.$$

4. Подставим сюда $\rho = \frac{d}{2} = \frac{0,06}{2} = 0,03$ *м* и $n = 1200$ *об/мин*:

$$v = \rho \cdot \frac{\pi n}{30} = 0,03 \frac{\pi \cdot 1200}{30} = 1,2\pi \text{ м/сек},$$

$$v = 3,77 \text{ м/сек}.$$

Вал вращается равномерно, значит скорость точек остается численно неизменной. По этой же причине у точек отсутствует касательное ускорение.

5. Нормальное ускорение найдем из формулы

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{3,77^2}{0,03} = 474 \text{ м/сек}^2,$$

которое также в данном случае остается по модулю неизменным.

Зад... ...-33. Дисковая пила *1* имеет диаметр 600 *мм*. На валу пилы насажен шкив *2* диаметром 300 *мм*, а шкив соединен беско-

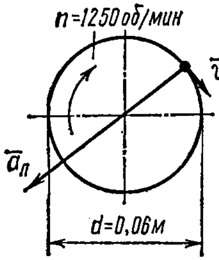


Рис. 214

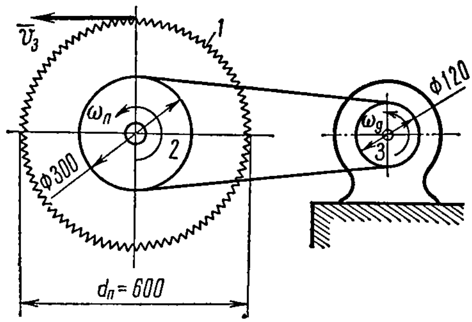


Рис. 215

нечным ремнем со шкивом двигателя *3* (рис. 215) диаметром 120 *мм*. С какой угловой скоростью должен вращаться шкив двигателя, чтобы скорость зубьев пилы не превышала 15 *м/сек*?

Решение.

1. Так как пила *1* и шкив *2* насажены на одном валу, то они имеют одну и ту же угловую скорость $\omega_п$ и скорость зубьев пилы $v_з = 15$ *м/сек* зависит от $\omega_п$:

$$v_з = \rho \cdot \omega_п \quad \text{или} \quad v_з = \frac{d_п}{2} \cdot \omega_п,$$

потому что

$$\rho = \frac{d_п}{2}.$$

2. Находим угловую скорость шкива *2*, который обеспечивает необходимую рабочую скорость зубьев пилы;

$$\omega_п = \frac{2v_з}{d_п} = \frac{2 \cdot 15}{0,6} = 50 \ рад/сек$$

($d_п = 600$ *мм* $= 0,6$ *м*).

3. Теперь найдем угловую скорость $\omega_д$ шкива двигателя.

Шкивы *2* и *3* соединены бесконечным ремнем. Полагая, что ремень не растягивается и не проскальзывает на шкивах, можно

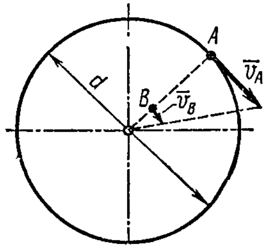


Рис. 216

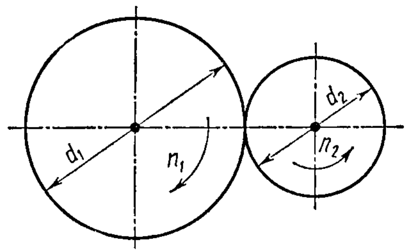


Рис. 217

считать, что все его точки движутся с одной и той же скоростью $v_р$. Это означает, что скорости точек, расположенных на поверхностях обоих шкивов одинаковы и равны $v_р$.

Поэтому применим зависимость $v = \rho \cdot \omega$:

$$v_р = \frac{d^2}{2} \omega_п = \frac{d_3}{2} \omega_д \ *.$$

Отсюда

$$\omega_д = \omega_п \frac{d_2}{d_3} = 50 \cdot \frac{300}{120} = 125 \ рад/сек.$$

4. Если перевести эту угловую скорость в *об/мин*, то

$$n_д = \frac{30\omega_д}{\pi} = \frac{30 \cdot 125}{\pi} \approx 1200 \ об/мин.$$

Таким образом, для того чтобы зубья пилы имели скорость 15 *м/сек*, шкив двигателя должен вращаться с угловой скоростью 125 *рад/сек* (или 1200 *об/мин*).

● **Задача 172-33.** Определить угловую скорость секундной, минутной и часовой стрелок часов.

Ответ. $\omega_{сек} = 0,105$ *рад/сек*;
$\omega_{мин} = 0,00175$ *рад/сек*;
$\omega_{час} = 0,000145$ *рад/сек*.

● **Задача 173-33.** Точка *A* шкива, лежащая на его ободе, движется со скоростью 50 *см/сек*, а точка *B* — со скоростью 10 *см/сек*

---

* Полученное отсюда отношение угловых скоростей, численно равное обратному отношению их диаметров $\frac{\omega_д}{\omega_п} = \frac{d_2}{d_3}$, называют передаточным числом ременной передачи.

(рис. 216), расстояние $AB=20$ *см*. Определить угловую скорость и диаметр шкива.

Ответ. $\omega=2$ *рад/сек*; $d=50$ *см*.

● **Задача 174-33.** Каток фрикционной передачи (рис. 217) диаметром $d_1=420$ *мм* вращается с частотой $n_1=180$ *об/мин*. Чему должен равняться диаметр d_2 второго катка, находящегося в сцеплении с первым, если его частота вращения $n_2=600$ *об/мин*? Определить нормальные ускорения точек, расположенных на ободах обоих катков. При решении задачи рассматривать установившееся вращение обоих катков без скольжения.

Ответ. $d_2=126$ *мм*; $a_{n_1}=74{,}6$ *м/сек*^{2}; $a_{n_2}\approx 249$ *м/сек*^{2}.

§ 34-7. Равнопеременное вращательное движение

Вращательное движение с переменной угловой скоростью называется неравномерным (см. ниже § 35-7). Если же угловое ускорение $\varepsilon=\mathrm{const}$, то вращательное движение называется равнопеременным. Таким образом, равнопеременное вращение тела — частный случай неравномерного вращательного движения.

Уравнение равнопеременного вращения

$$\varphi=\varphi_0+\omega_0 t+\frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (1)$$

и уравнение, выражающее угловую скорость тела в любой момент времени,

$$\omega=\omega_0+\varepsilon t \qquad (2)$$

представляют совокупность основных формул вращательного равнопеременного движения тела.

В эти формулы входят всего шесть величин: три постоянных для данной задачи φ_0, ω_0 и ε и три переменных φ, ω и t. Следовательно, в условии каждой задачи на равнопеременное вращение должно содержаться не менее четырех заданных величин.

Для удобства решения некоторых задач из уравнений (1) и (2) можно получить еще две вспомогательные формулы.

Исключим из (1) и (2) угловое ускорение ε:

$$\varphi=\varphi_0+\frac{\omega+\omega_0}{2}t. \qquad (3)$$

Исключим из (1) и (2) время t:

$$\varphi=\varphi_0+\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\varepsilon}. \qquad (4)$$

В частном случае равноускоренного вращения, начавшегося из состояния покоя, $\varphi_0=0$ и $\omega_0=0$. Поэтому приведенные выше основные и вспомогательные формулы принимают такой вид:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}; \qquad (5)$$

$$\omega = \varepsilon t; \qquad (6)$$

$$\varphi = \frac{\omega}{2} t; \qquad (7)$$

$$\varphi = \frac{\omega^2}{2\varepsilon}. \qquad (8)$$

Задача 175-34. Маховик, вращающийся с частотой $n_0 = 90$ *об/мин*, с некоторого момента начинает вращаться равноускоренно и через 1,5 *мин* достигает скорости вращения $n_к = = 150$ *об/мин*. Определить угловое ускорение маховика. Сколько всего оборотов делает маховик за 1,5 *мин*? Какую скорость имеют точки на цилиндрической поверхности маховика через 45 *сек* после начала равноускоренного движения, если диаметр маховика 1,2 *м*?

Решение 1. Все угловые величины выражаем в радианном измерении.

1. Если $n_0 = 90$ *об/мин*, то

$$\omega_0 = \frac{\pi n_0}{30} = \frac{\pi \cdot 90}{30} = 3\pi \ рад/сек;$$

если $n_к = 150$ *об/мин*, то

$$\omega_к = \frac{\pi n_к}{30} = \frac{\pi \cdot 150}{30} = 5\pi \ рад/сек.$$

2. Из уравнения (2) находим угловое ускорение, учитывая, что изменение угловой скорости от ω_0 до $\omega_к$ происходит за $t = 1,5$ *мин* $=$ $= 90$ *сек*:

$$\varepsilon = \frac{\omega_к - \omega_0}{t} = \frac{5\pi - 3\pi}{90} = \frac{\pi}{45} \ рад/сек^2 \approx 0,07 \ рад/сек^2.$$

3. Определяем из формулы (3) угол поворота тела за $t = 1,5$ *мин* $=$ $= 90$ *сек*, принимая $\varphi_0 = 0$:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\omega_к + \omega_0}{2} \cdot t = \frac{5\pi + 3\pi}{2} \cdot 90 = 360\pi \ рад.$$

4. Находим, какому числу оборотов соответствует этот угол поворота:

$$\varphi_{об} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{360\pi}{2\pi} = 180 \ оборотов.$$

Следовательно, за время равноускоренного вращения маховик успеет совершить 180 оборотов.

5. Прежде чем найти по формуле $v_1 = \omega_1 \rho$ скорость точек на ободе маховика в момент времени $t = 45$ *сек* после начала равноускоренного вращения, необходимо найти угловую ско-

рость маховика ω_1 в этот момент:

$$\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon t_1 = 3\pi + \frac{\pi}{45}\cdot 45 = 4\pi \textit{ рад/сек}.$$

Зная, что $\rho = \frac{d}{2} = \frac{1,2}{2} = 0,6$ *м*, получаем

$$v_1 = \omega_1\rho = 4\pi\cdot 0,6 = 2,4\pi \textit{ м/сек} \approx 7,54 \textit{ м/сек}.$$

Решение 2—угловые величины выражаются в оборотах, а время—в *сек* ($t = 1,5$ *мин* $= 90$ *сек*).

1. Выражаем данные скорости вращения в *об/сек*.

$n_0 = 90$ *об/мин* $= 1,5$ *об/сек* и $n_к = 150$ *об/мин* $= 2,5$ *об/сек*.

2. Представим формулу (3) в ином виде, приняв $\varphi_0 = 0$:

$$\varphi_{об} = \frac{n_к + n_0}{2}\cdot t.$$

Тогда

$$\varphi_{об} = \frac{1,5+2,5}{2}\cdot 90 = 180 \text{ оборотов}.$$

$$[(\textit{об/сек})\cdot \textit{сек}] = [\textit{об}].$$

3. Обозначив ε'—угловое ускорение, выраженное через обороты, формулу (2) можно представить в виде $n_к = n_0 + \varepsilon' t$ и тогда $\varepsilon' = \frac{n_к - n_0}{t} = \frac{2,5-1,5}{90} = \frac{1}{90} = 0,0111$ *об/сек*^{2}.

4. Найдем n_1—скорость вращения маховика через $t_1 = 45$ *сек* после начала равноускореннного вращения:

$$n_1 = n_0 + \varepsilon' t_1 = 1,5 + \frac{1}{90}\cdot 45 = 2 \textit{ об/сек},$$

что соответствует

$$n_1 = 2\cdot 60 = 120 \textit{ об/мин}.$$

Теперь находим при этой скорости вращения маховика скорость точек на его ободе:

$$v_1 = \frac{\pi n_1}{30}\cdot \rho = \frac{\pi\cdot 120}{30}\cdot 0,6 = 2,4\pi \approx 7,54 \textit{ м/сек}.$$

Если же n_1 выражено в *об/сек*, то

$$v_1 = 2\pi n_1\cdot\rho = 2\pi\cdot 2\cdot 0,6 = 2,4\pi \approx 7,54 \textit{ м/сек}.$$

Задачу можно решить и не переводя заданное время из минут в секунды, т. е. решить при заданных числовых величинах $n_0 = 90$ *об/мин*, $n_к = 150$ *об/мин* и $t = 1,5$ *мин*. Этот вариант решения рекомендуем выполнить самостоятельно.

Задача 176-34. Вал, вращающийся равноускоренно из состояния покоя, в первые 12 *сек* совершает 95,5 оборота. С каким угловым ускорением вращается вал и какую угловую скорость он приобретает?

Решение.

1. Угловое перемещение за время $t = 12$ *сек* равноускоренного движения составляет

$$\varphi = 2\pi\varphi_{об} = 2\pi \cdot 95,5 \text{ } рад.$$

2. Из формулы (5) находим угловое ускорение вала:

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{2 \cdot 2\pi \cdot 95,5}{12^2} \approx 8,33 \text{ } рад/сек^2.$$

3. К концу 12-й секунды вал приобретает угловую скорость [см. формулу (6)]:

$$\omega = \varepsilon t = 8,33 \cdot 12 = 100 \text{ } рад/сек,$$

что соответствует

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 100}{\pi} = 955 \text{ } об/мин.$$

Задачу можно решить и в другой последовательности, а также выражая величины через обороты.

Задача 177-34. Колесо, вращающееся с частотой 1500 *об/мин*, при торможении начинает вращаться равнозамедленно и через 30 *сек* останавливается. Определить угловое ускорение и число оборотов колеса с момента начала торможения до остановки.

Решение.

1. Выразим начальную угловую скорость в *рад/сек*:

$$\omega_0 = \frac{\pi n_0}{30} = \frac{\pi \cdot 1500}{30} = 50\pi = 157 \text{ } рад/сек.$$

Найдем угловое ускорение из формулы (2):

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 157}{30} = -5,23 \text{ } рад/сек^2.$$

2. Представим формулу (3) в виде

$$\varphi_{об} = \frac{n + n_0}{2} \cdot t.$$

Тогда число оборотов вала за $t = 30$ *сек* $= 0,5$ *мин*

$$\varphi_{об} = \frac{n + n_0}{2} \cdot t = \frac{0 + 1500}{2} \cdot 0,5 = 375 \text{ оборотов.}$$

● **Задача 178-34.** Маховик, находящийся в покое, приводится в равноускоренное вращение с угловым ускорением 0,5 *рад/сек*^{2}. Через сколько секунд он приобретает частоту вращения 360 *об/мин*? Сколько времени должен вращаться маховик с тем же ускорением, чтобы он совершил 600 оборотов, считая от начала движения?

Ответ. Через 75,4 *сек*; 123 *сек*.

● **Задача 179-34.** Определить, через сколько времени зубчатое коническое колесо *1* радиусом $r_1 = 10$ *см* (рис. 218) будет иметь

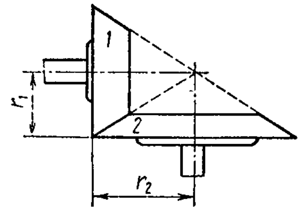


Рис. 218

частоту вращения $n_1 = 4320$ *об/мин*, если оно приводится во вращение из состояния покоя зубчатым колесом 2 радиусом $r_2 = 15$ *см*, начавшим вращаться с угловым ускорением 2 *об/сек*^{2}.

Ответ. Через 24 *сек.*

● **Задача 180-34.** Ротор двигателя, имея скорость 12 000 *об/мин*, вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = -30$ *рад/сек*^{2} в течение $\Delta t_1 = t_1 - 0 = 25$ *сек*. Затем в течение $\Delta t_2 = t_2 - t_1 = 45$ *сек* ротор вращается равномерно и, наконец, в течение $\Delta t_3 = t_3 - t_2 = 26$ *сек* ротор, вращаясь равнозамедленно, останавливается.

Сколько всего оборотов делает ротор за все время от начала движения до остановки?

Ответ. ≈ 8200 оборотов.

§ 35-7. Неравномерное вращательное движение

Рассмотрим пример решения задачи, в которой задано неравномерное вращательное движение тела.

Задача 181-35. Вращение вала в течение первых 20 *сек* происходит согласно уравнению $\varphi = 0{,}8t^3$.

Определить угловую скорость вала в конце 20-й секунды; угловое ускорение в начале движения, в конце 10-й и 20-й секунд; сколько всего оборотов делает вал за 20 *сек*.

Решение.

1. Определим число оборотов вала за 20 *сек*. Для этого предварительно найдем угол поворота за $t = 20$ *сек*:

$$\varphi = 0{,}8t^3 = 0{,}8 \cdot 20^3 = 6400 \text{ рад}.$$

И теперь

$$\varphi_{об} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{6400}{2\pi} = 1020 \text{ оборотов}.$$

2. Определим уравнение угловой скорости вала:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = (0{,}8t^3)' = 2{,}4t^2,$$

3. Найдем угловую скорость вала в конце 20-й секунды ($t = 20$ *сек*):

$$\omega_к = 2{,}4t^2 = 2{,}4 \cdot 20^2 = 960 \text{ рад/сек}.$$

Если выразить эту угловую скорость в *об/мин*, то

$$n_к = \frac{30\omega_к}{\pi} \approx 9170 \text{ об/мин}.$$

4. Определим уравнение углового ускорения:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = (2{,}4t^2)' = 4{,}8t.$$

5. Найдем угловое ускорение в начале движения ($t_0=0$), в конце 10-й ($t_1=10$ *сек*) и 20-й секунд ($t_2=20$ *сек*):

$$\varepsilon_0=4{,}8\cdot t_0=0; \quad \varepsilon_1=4{,}8t_1=4{,}8\cdot 10=48 \ \text{рад/сек}^2;$$
$$\varepsilon_2=4{,}8\cdot t_2=4{,}8\cdot 20=96 \ \text{рад/сек}^2.$$

● **Задача 182-35.** Определить, за какое время, считая с момента начала движения по уравнению

$$\varphi=5t+1{,}2t^3,$$

тело достигнет угловой скорости 70 *рад/сек*? Сколько оборотов за это время успеет совершить тело и какой величины достигнет угловое ускорение?

Ответ. 4,25 *сек*; ≈ 18 оборотов; 30,6 *рад/сек*^{2}.

● **Задача 183-35.** С каким угловым ускорением должен начать вращаться вал со шкивом, чтобы точки на ободе шкива, диаметр которого 40 мм, двигались согласно уравнению $s=0{,}01t^2$ (s — в *м*, t — в *сек*). Определить угловую скорость шкива через 20 *сек* после начала движения и число оборотов вала за это время.

Ответ: 1 *рад/сек*^{2}; 20 *рад/сек*; 32 оборота.

ГЛАВА VIII

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ И ТЕЛА

При решении задач, в которых рассматривается сложное движение точки или тела, необходимо уметь правильно расчленить сложное (составное), или так называемое абсолютное движение, на переносное и относительное.

При расчленении сложного движения рекомендуется учитывать следующее. Абсолютное (составное) движение происходит относительно неподвижной системы координат. Обычно эту систему координат связывают с Землей или с неподвижными относительно Земли предметами: зданием, деревом, полотном дороги и т. д.

Переносное движение точки или тела происходит вместе с некоторой материальной средой (телом), внутри или на поверхности которой находится рассматриваемое в задаче тело или рассматриваемая точка. Таким образом, переносное движение — это движение материальной среды вместе с точкой также относительно неподвижной системы координат.

Относительное движение точки или тела — это перемещение их внутри материальной среды, или по ее поверхности, независящее от движения самой материальной среды.

В тех случаях когда заданы движения двух (или более) тел (точек) относительно неподвижной системы координат и необходимо определить движение одного из этих тел относительно другого, удобно пользоваться теми же приведенными выше соображениями.

Тело, относительно которого требуется рассмотреть движение, мысленно остановим, а неподвижную систему координат заставим двигаться по его закону, но в обратном направлении. Тогда для второго тела это движение станет переносным, а движение второго тела — относительным. После этого очень просто понять, как будет двигаться второе тело по отношению к первому.

Этот последний прием использован при решении задач 186-36 и 193-37 и обычно его используют при рассмотрении планетарных механизмов (см. ниже § 40-9).

Решение всех задач на сложное движение необходимо иллюстрировать рисунком.

§ 36-8. Сложение движений точки, когда переносное и относительное движения направлены вдоль одной прямой

При изучении сложного движения точки будем рассматривать только перемещение и скорость.

Если переносное и относительное движения направлены вдоль одной прямой, то:

перемещение точки в абсолютном движении равно алгебраической сумме перемещений в переносном и относительном движениях;

скорость точки в абсолютном движении равна алгебраической сумме переносной и относительной скоростей.

Условимся направление переносного перемещения и соответственно направление переносной скорости считать положительными. Тогда относительное перемещение и соответственно относительная скорость будут также положительными, если они направлены в ту же сторону, что и переносное. Если же относительное перемещение (и скорость) имеют направление, противоположное переносному, то будем считать их отрицательными.

Таким образом, при совпадении направлений переносного и относительного движений

$$s_{абс}=s_{пер}+s_{отн} \quad \text{и} \quad v_{абс}=v_{пер}+v_{отн}.$$

При противоположных друг другу направлениях переносного и относительного движений

$$s_{абс}=s_{пер}-s_{отн} \quad \text{и} \quad v_{абс}=v_{пер}-v_{отн}.$$

Задача 184-36. Вниз по течению реки равномерно плывет лодка, приводимая в движение гребным винтом от мотора. Скорость течения реки 4 *км/ч*, скорость лодки, сообщаемая ей гребным винтом по отношению к воде, составляет 8 *км/ч*. Определить скорость лодки относительно берегов и расстояние, которое проходит лодка вдоль берегов за 20 *мин*.

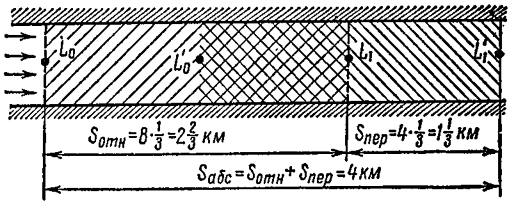
Решение иллюстрировать рисунком, считая берега реки на данном участке прямолинейными и параллельными.

Решение.

1. Лодку принимаем за материальную точку, а водную массу реки — за материальную среду.

Движение лодки относительно берегов или, иначе говоря, движение лодки, наблюдаемое с берега,— это абсолютное движение.

Переносное движение лодки — ее перемещение вместе с рекой; скорость $v_р = 4$ *км/ч*, которую сообщает лодке река,— ее переносная скорость.



Рис, 219

Относительное движение — перемещение лодки по поверхности воды, создаваемое гребным винтом; скорость относительного движения $v_л = 8$ *км/ч*.

2. Так как в данном случае переносное и относительное движения направлены в одну и ту же сторону, то скорость лодки относительно берегов (абсолютная скорость)

$$v_{абс} = v_р + v_л = 4 + 8 = 12 \text{ км/ч}.$$

3. За время $t = 20$ *мин* $= \frac{1}{3}$ *ч* лодка вдоль берегов проходит расстояние

$$s_{абс} = v_{абс} \cdot t = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4 \text{ км}.$$

4. Иллюстрируем решение задачи следующим образом (рис. 219).

Изобразим на рисунке тот участок водного пространства, который проходит лодка независимо от того, перемещается этот участок воды или нет. За 20 *мин* $= \frac{1}{3}$ *ч* лодка успевает пройти по этому пространству из положения L_0 в положение L_1 расстояние

$$L_0L_1 = s_{отн} = v_{отн} \cdot t = 8 \cdot \frac{1}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ км}.$$

За эти же 20 *мин*, или $\frac{1}{3}$ *ч*, показанное водное пространство переместится на расстояние

$$L_1L_1' = s_{пер} = v_р \cdot t = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ км}.$$

Таким образом, лодка, находившаяся в начале рассматриваемого движения относительно берегов в точке L_0, через 20 *сек* оказывается в точке L_1', т. е. проходит расстояние

$$L_0L_1' = s_{абс} = s_{отн} + s_{пер} = 2\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} = 4 \text{ км}.$$

Следовательно, скорость абсолютного движения

$$v_{абс} = \frac{s_{абс}}{t} = \frac{4}{1/3} = 12 \text{ км/ч}.$$

● **Задача 185-36.** С какой скоростью относительно берегов будет перемещаться лодка (по условию предыдущей задачи) и какое расстояние она проплывет за 30 *мин*, если будет двигаться против течения? Ответ иллюстрируйте чертежом.

Ответ. $v_{абс} = 4$ *км/ч*; $S_{абс} = 2$ *км*.

Задача 186-36. Два автомобиля *1* и *2* движутся параллельно друг другу в одну и ту же сторону со скоростями $v_1 = 80$ *км/ч* и $v_2 = 60$ *км/ч* (рис. 220, *а*). С какой скоростью второй автомобиль двигается относительно первого?

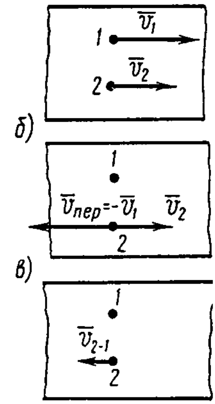


Рис. 220

Решение.

1. Ответ «по соображению» получается мгновенно: $v_{2-1} = 60 - 80 = -20$ *км/ч*, т. е. относительно первого второй автомобиль двигается со скоростью 20 *км/ч*, но в обратную сторону.

2. Объясним это решение с точки зрения теории сложного движения точки. Условно остановим первый автомобиль. Но тогда, чтобы не изменились условия движения, необходимо мысленно представить, что полотно дороги под вторым автомобилем и вместе с ним получает движение в обратную сторону со скоростью $\overline{v}_{пер} = -\overline{v}_1$ (рис. 220, *б*).

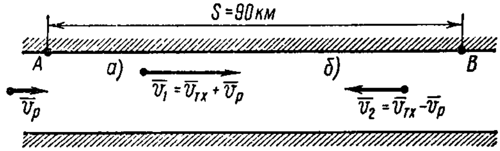


Рис. 221

Находясь в условном переносном движении со скоростью $v_{пер}$, второй автомобиль относительно дороги движется со скоростью v_2.

Поэтому результирующая обеих скоростей $\overline{v}_{абс} = \overline{v}_{2-1}$ численно равна их разности:

$$v_{2-1} = v_1 - v_2 = 80 - 60 = 20 \text{ км/ч}.$$

Как видно на рис. 220, *а*, результирующая направлена в сторону, противоположную скорости $\overline{v}_1$.

● **Задача 187-36.** (для самостоятельного решения). Два автомобиля двигаются навстречу друг другу по прямолинейному участку шоссе со скоростями $v_1 = 80$ *км/ч* и $v_2 = 60$ *км/ч*. С какой скоростью первый автомобиль двигается относительно второго?

Ответ. $v_{1-2} = 140$ *км/ч*.

Задача 188-36. Расстояние $s = 90$ *км* между двумя пристанями, расположенными на реке, теплоход проходит без остановки в одном направлении (по течению) за $t_1 = 3$ *ч* и в обратном направлении (против течения) за $t_2 = 5$ *ч*. Определить скорость течения реки и собственную скорость теплохода.

Решение.

1. Теплоход, который принимаем за материальную точку, двигаясь по течению, имеет абсолютную скорость (скорость относительно берегов): $v_1 = v_{тх} + v_р$, где $v_{тх}$ — искомая собственная скорость теплохода (относительная скорость); $v_р$ — скорость течения реки (переносная скорость .

При движении против течения абсолютная скорость теплохода

$$v_2 = v_{тх} - v_р.$$

2. Движение теплохода по течению описывается уравнением (рис. 221, *а*)

$$s = (v_{тх} + v_р)\, t_1. \qquad \text{(а)}$$

Движение теплохода против течения происходит по уравнению (рис. 221, *б*)

$$s = (v_{тх} - v_р)\, t_2. \qquad \text{(б)}$$

2. Решаем полученную систему уравнения. Из (а) и (б)

$$v_{тх} + v_р = \frac{s}{t_1},$$

$$v_{тх} - v_р = \frac{s}{t_2}.$$

Сложим правые и левые части этих уравнений:

$$2v_{тх} = \frac{s}{t_1} + \frac{s}{t_2} = \frac{90}{3} + \frac{90}{5} = 48 \text{ км/ч}$$

и

$$v_{тх} = 24 \text{ км/ч}.$$

Вычитаем из верхнего равенства нижнее:

$$2v_р = \frac{s}{t_1} - \frac{s}{t_2} = \frac{90}{3} - \frac{90}{5} = 12 \text{ км/ч} \quad \text{и} \quad v_р = 6 \text{ км/ч}.$$

Таким образом, собственная скорость теплохода составляет 24 *км/ч* и скорость течения реки равна 6 *км/ч*.

Задача 189-36. Расстояние между двумя пристанями, расположенными на реке, теплоход, двигаясь равномерно без остановки, проходит по течению реки за $t_1 = 3$ *ч*, а против течения (двигаясь в обратном направлении) — за $t_2 = 4{,}5$ *ч*. За какое время t_3 проплывает это же расстояние плот, передвигаемый только течением реки?

Задачу надо решить в общем виде, а потом подставить числовые значения.

Ответ. $t_3 = \dfrac{2t_1 \cdot t_2}{t_2 - t_1} = 18$ *ч*.

§ 37-8. Сложение движений точки, когда переносное и относительное движения направлены под углом друг к другу

Когда переносное и относительное движения направлены под углом друг к другу, то перемещения и скорости складываются геометрически.

Таким образом, абсолютная скорость точки $\bar{v}_{абс}$ определяется как геометрическая сумма переносной $\bar{v}_{пер}$ и относительной $\bar{v}_{отн}$ скоростей;

$$\bar{v}_{абс} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}, \qquad (1)$$

т. е. либо как диагональ параллелограмма, построенного на переносной и относительной скоростях (рис. 222, *а*), либо как замыкающий вектор треугольника скоростей (рис. 222, *б*).

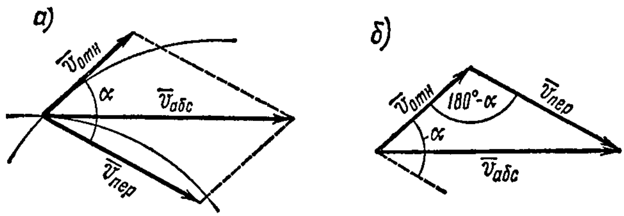


Рис. 222

При решении задач на определение скоростей наиболее удобно применять графо-аналитический способ (см. § 3-1 настоящего пособия).

Если применяется правило параллелограмма, то модуль абсолютной скорости определяется по формуле, выведенной из теоремы косинусов

$$v_{абс} = \sqrt{v_{пер}^2 + v_{отн}^2 + 2v_{пер}v_{отн}\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Если применяется правило треугольника, то модуль абсолютной скорости определяется непосредственно по теореме косинусов.

Направление абсолютной скорости по отношению к $\bar{v}_{пер}$ или $\bar{v}_{отн}$ можно найти при помощи теоремы синусов.

В частном случае, когда параллелограмм скоростей превращается в прямоугольник или когда треугольник скоростей получается прямоугольным, для решения задачи используются тригонометрические функции и теорема Пифагора (см. ниже задачи 190-37, 191-37, 192-37).

Если в частном случае $v_{пер} = v_{отн}$, то при геометрическом сложении таких скоростей образуется ромб (рис. 223, *а*) или равнобедренный треугольник (рис. 223, *б*), тогда

$$v_{абс} = 2v_{пер} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 2v_{отн} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (3)$$

Задача 190-37. Вертикально падающие капли дождя оставляют на боковых стеклах автомобиля полосы под углом $\alpha = 31°$ к вертикали. Скорость движения автомобиля 40 *км/ч*. Определить, с какой скоростью падают капли дождя.

Решение.

1. Изобразим движение капли дождя на рисунке (рис. 224). Капли падают вертикально, следовательно, скорость $\bar{v}_к$ какой-либо капли K относительно Земли является скоростью абсолютного (составного) движения. И эту скорость $\bar{v}_к$ можно представить в виде

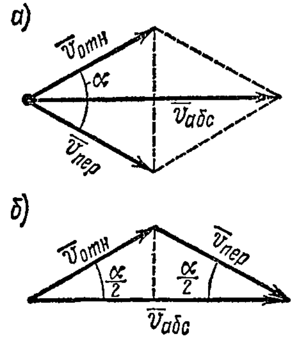


Рис. 223

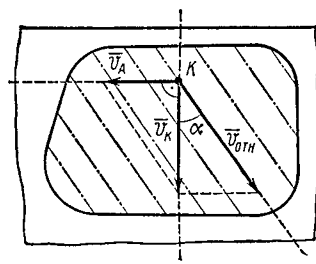


Рис. 224

геометрической суммы горизонтально направленной переносной скорости автомобиля $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_{отн}$—относительно скорости капли при ее движении по стеклу автомобиля.

2. Получившийся параллелограмм скоростей диагональ делит на два прямоугольных треугольника. Рассмотрев любой из этих треугольников, найдем

$$v_к = \frac{v_A}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{40}{\operatorname{tg} 31°} = 66{,}5 \text{ км/ч}.$$

Переводим полученную скорость падения капель в *м/сек*:

$$v_к = \frac{66{,}5 \cdot 1000}{3600} \approx 18{,}5 \text{ м/сек}.$$

Задача 191-37. От одного берега реки к другому плывет лодка, держа курс перпендикулярно к берегам. Ширина реки 800 *м*; лодка достигает противоположного берега через 12 *мин* после начала переправы. За это время лодку сносит вниз по течению на расстояние 600 *м*. Определить скорость течения реки; собственную скорость лодки: скорость лодки относительно берегов. Скорость течения у берегов и на середине реки считать одинаковой.

Решение.

1. Изобразим на рисунке движение лодки (рис. 225). Представим, что лодка отплывает из точки A на правом берегу. Если бы не было течения, она достигла бы противоположного берега в точке B;

известно, что ширина реки $AB = l_р = 800$ *м* $= 0{,}8$ *км*. Но лодку сносит вниз по течению (переносное движение) на расстояние $BC = l_{пер} = 600$ *м* $= 0{,}6$ *км* и поэтому движение лодки относительно берегов (абсолютное движение) происходит по прямой AC.

Обозначим точкой L положение лодки через некоторое время после начала движения. Скорость лодки относительно берегов — абсолютная скорость $\bar{v}_{абс}$ — направлена вдоль прямой AC и складывается из собственной скорости $\bar{v}_л$, сообщаемой гребным винтом или веслами, и из переносной скорости течения реки $\bar{v}_р$.

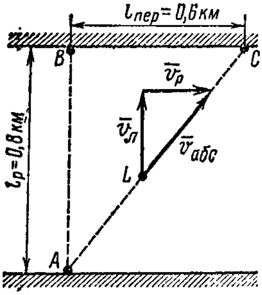


Рис. 225

2. Допустим, что нет течения реки, тогда лодка будет перемещаться относительно берегов так же, как и относительно воды, по прямой AB и ее движение опишется уравнением

$$l_р = v_л \cdot t,$$

где t — время переправы ($t = 12$ *мин* $= 0{,}2$ *ч*).

Отсюда находим собственную скорость лодки (скорость лодки относительно воды — относительную скорость)

$$v_л = \frac{l_р}{t} = \frac{0{,}8}{0{,}2} = 4 \text{ км/ч}.$$

3. Если лодка будет плыть, подчиняясь только течению реки, ее движение опишется уравнением

$$l_{пер} = v_р t.$$

Из этого уравнения найдем скорость течения реки:

$$v_р = \frac{l_{пер}}{t} = \frac{0{,}6}{0{,}2} = 3 \text{ км/ч}.$$

4. Теперь из прямоугольника треугольника скоростей (см. рис. 225) легко найти скорость лодки относительно берегов — абсолютную скорость:

$$v_{абс} = \sqrt{v_л^2 + v_р^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ км/ч}.$$

Задача 192-37. Под каким углом к прямой AB (см. задачу 191-37) нужно направлять лодку против течения, чтобы она переплыла реку, двигаясь точно по AB*? Какова будет в этом случае абсолютная скорость лодки и сколько времени займет переправа?

Ответ. 48°40′, $v_{абс} = 2{,}65$ *км/ч*, $t = 0{,}302$ *ч* $= 19$ *мин* 12 *сек*.

Задача 193-37. Трассы двух воздушных лайнеров пересекаются над поселком A. Первый лайнер летит точно на север, второй лайнер — на юго-восток. Скорости $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$ обоих лайнеров численно

---

* Когда будет определен этот угол, его нужно сравнить с углом между векторами $\bar{v}_{абс}$ и $\bar{v}_л$ из предыдущей задачи.

равны ($v_1 = v_2 = v$). Определить, чему равна и как направлена в этот момент скорость второго лайнера относительно первого.

Решение 1—методом «остановки» одного из тел.

1. Обозначим точкой A поселок, над которым в определенный момент находятся оба лайнера. Покажем страны света: C—север, $Ю$—юг, $В$—восток и $З$—запад. Изобразим скорости лайнеров относительно Земли: $\bar{v}_1$—скорость первого лайнера и $\bar{v}_2$—скорость второго (рис. 226, *а*).

2. Так как нужно определить скорость второго лайнера относительно первого, то мысленно первый лайнер остановим над пунк-

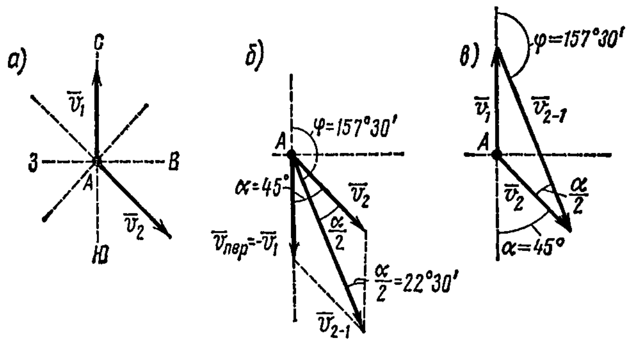


Рис. 226

том A, а воздушной среде вместе со вторым лайнером сообщим скорость $\bar{v}_{пер}$, но в обратную сторону по отношению к скорости $\bar{v}_1$ ($\bar{v}_{пер} = -\bar{v}_1$, рис. 226, *б*). Тогда скорость $\bar{v}_2$ второго лайнера приобретет значение относительной скорости (скорости относительно перемещающейся воздушной среды).

3. Сложив по правилу параллелограмма скорости $\bar{v}_{пер}$ и $\bar{v}_2$ (см. рис. 226, *б*), получим скорость $\bar{v}_{2-1}$, изображающую скорость второго лайнера по отношению к первому.

4. Так как скорости лайнеров $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$ численно равны ($v_1 = v_2 = v$), то параллелограмм скоростей на рис. 226, *б*—ромб и, следовательно [см. формулу (3) в начале этого параграфа], числовое значение $\bar{v}_{2-1}$ равно:

$$v_{2-1} = 2v \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 2 \cdot v \cdot \cos 22°30' = 1{,}85v.$$

Таким образом, второй лайнер движется относительно первого со скоростью, численно равной $1{,}85v_1$ и, как видно из рис. 226, *б*, удаляется от него на юго-юго-запад, т. е. под углом 157°30' (90° + 45° + 22°30') к направлению скорости первого лайнера.

Решение 2—методом разности скоростей.

1. Из выражения геометрической суммы скоростей

$$\bar{v}_{абс} = \bar{v}_{пер} + \bar{v}_{отн}$$

следует, что

$$\bar{v}_{\text{отн}} = \bar{v}_{\text{абс}} - \bar{v}_{\text{пер}}. \tag{а}$$

2. Для определения скорости второго лайнера относительно первого примем за абсолютную скорость $\bar{v}_{\text{абс}} = \bar{v}_1$ — скорость первого лайнера и за переносную скорость $\bar{v}_{\text{пер}} = \bar{v}_2$ — скорость второго лайнера; тогда искомую относительную скорость $\bar{v}_{\text{отн}} = \bar{v}_{2-1}$ получим как разность (см. рис. 3)

$$\bar{v}_{2-1} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1.$$

3. Чтобы произвести вычитания векторов, необходимо конец вычитаемого вектора $\bar{v}_1$ соединить с концом уменьшаемого вектора $\bar{v}_2$ в направлении от первого ко второму искомым вектором $\bar{v}_{2-1}$ (рис. 226, *в*).

4. В результате построения имеем равнобедренный треугольник скоростей ($v_1 = v_2 = v$), из которого легко найти, что числовое значение

$$v_{2-1} = 2v \cos\frac{\alpha}{2} = 1{,}85v.$$

Угол $\varphi = 157°30'$, определяющий в данный момент направление вектора $\bar{v}_{2-1}$ относительно $\bar{v}_1$ определяется непосредственно по рис. 226, *в*.

Задача 194-37. В кривошипно-кулисном механизме с поступательно движущейся кулисой *ВС* кривошип *ОА* (расположенный позади кулисы) длиной $l = 400$ *мм* вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ *рад/сек*. Концом *А*, соединенным шарнирно с камнем, скользящим в прорези кулисы, кривошип сообщает кулисе *ВС* возвратно-поступательное движение. Определить скорость кулисы в момент, когда кривошип образует с осью кулисы угол $xOA = 30°$ (рис. 227, *а*).

Решение.

1. В данном случае движение точки *А* вместе с кривошипом можно считать сложным, т. е. получающимся в результате сложения:

а) движения точки *А* вместе с кулисой в ее возвратно-поступательном (переносном) движении вдоль оси x;

б) относительного движения точки *А* вместе с камнем, движущимся возвратно-поступательно в прорези кулисы в направлении, перпендикулярном к оси x.

2. Абсолютная скорость точки *А*, модуль которой легко определяется по формуле $v_A = \omega \cdot l = 10 \cdot 0{,}4 = 4$ *м/сек*, направлена перпендикулярно к кривошипу *ОА*. Переносная скорость точки *А* равна поступательной скорости кулисы $\bar{v}_{\text{кул}}$, направлена по прямой *Аb* (рис. 227, *б*). Относительная скорость $\bar{v}_{\text{отн}}$ точки *А*, равная скорости камня в прорези кулисы, направлена по прямой *Ас*.

3. Изобразим скорость $v_A = 4$ *м/сек* вектором, перпендикулярным к *ОА*. Разложим ее на составляющие $\bar{v}_{\text{отн}}$ и $\bar{v}_{\text{пер}} = \bar{v}_{\text{кул}}$, как показано

на рис. 227, *б*. Вектор $\overline{AF}=\bar{v}_{кул}$ изображает искомую скорость кулисы.

4. $\angle FEA=\angle xOA=\alpha=30°$ (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами) и, следовательно,

$$v_{кул}=v_A\cdot\sin\alpha=4\cdot\sin 30°=2\ м/сек.$$

Таким образом, в данный момент кулиса перемещается вниз со скоростью 2 *м/сек*.

Чтобы лучше проанализировать движение кулисы, необходимо знать, когда кулиса двигается ускоренно, когда замедленно, при

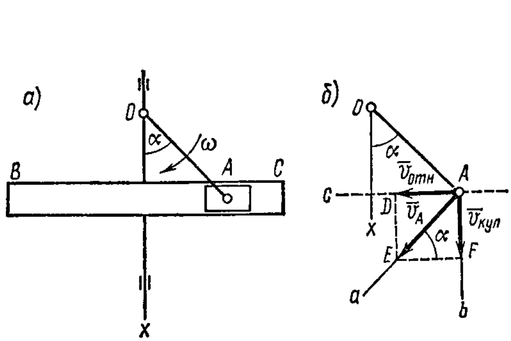


Рис. 227

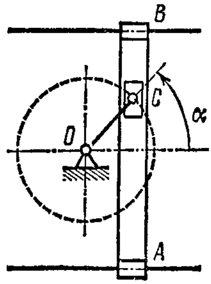


Рис. 228

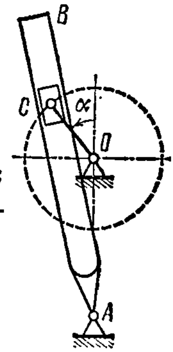


Рис. 229

каких положениях кривошипа кулиса имеет максимальную скорость и чему равна эта скорость, при каких положениях кривошипа скорость кулисы равна нулю?

● **Задача 195-37.** Кривошип $OC=30$ *см* вращается равномерно с частотой $n=150$ *об/мин* и приводит в возвратно-поступательное движение кулису AB при помощи ползуна C, передвигающегося в прорези кулисы. Определить скорость $v_п$ ползуна в прорези кулисы и скорость $v_к$ самой кулисы в тот момент, когда кривошип составляет с горизонталью угол $\alpha=35°$ (рис. 228).

Ответ. $v_п=3{,}86$ *м/сек*, $v_к=2{,}7$ *м/сек*.

● **Задача 196-37.** Кривошип $OC=20$ *см* вращается равномерно с частотой $n=180$ *об/мин* и приводит в движение качающуюся кулису AB при помощи ползуна C, двигающегося в прорези кулисы. Определить скорость $v_п$ ползуна в прорези кулисы и угловую скорость ω кулисы в тот момент, когда кривошип составляет с вертикалью угол $\alpha=40°$. Расстояние $AO=40$ *см* (рис. 229).

Ответ. $v_п=1{,}71$ *м/сек*, $\omega=5{,}90$ *рад/сек*.

§ 38-8. Плоскопараллельное движение тела

Сложное плоскопараллельное движение твердого тела составляется из поступательного и вращательного движений (см. § 73, 74 в учебнике Е. М. Никитина). Это свойство является основой первого способа определения скорости любой точки тела, находящегося в плоскопараллельном движении.

1. Поступательная часть плоскопараллельного движения принимается за переносное и зависит от движения какой-либо произвольно выбранной точки, называемой полюсом. За полюс принимают всегда ту точку, скорость которой в данный момент известна. Если движение является только поступательным, то все точки тела, в том числе и точка A (рис. 230, *а*), имеют ту же скорость, что и полюс O.

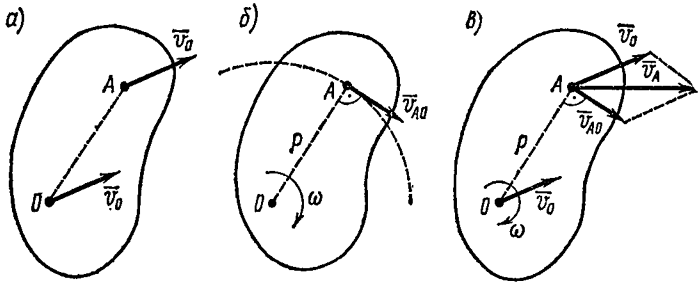


Рис. 230

2. Вращательная часть плоскопараллельного движения вокруг выбранного полюса принимается за относительное.

Если движение тела является только вращательным, то точка A совершает движение по окружности с центром в полюсе O со скоростью

$$v_{AO} = \omega \cdot \rho,$$

где ω — угловая скорость плоского сечения тела, в котором расположена данная точка A, и $\rho = OA$ — расстояние от полюса до точки A (рис. 230, *б*).

3. Абсолютная скорость $\bar{v}_A$ точки A равна геометрической сумме переносной скорости полюса $\bar{v}_0$ и ее относительной скорости $\bar{v}_{AO}$ вокруг полюса O (рис. 230, *в*). Таким образом, абсолютная скорость определяется либо при помощи правила параллелограмма, либо правила треугольника (см. выше § 37-8).

Второй способ определения скорости любой точки тела при его плоскопараллельном движении основан на использовании в качестве полюса мгновенного центра скоростей.

1. Как известно (§ 76 в учебнике Е. М. Никитина), мгновенным центром скоростей называется расположенная в плоскости сечения точка, абсолютная скорость которой в данный момент равняется нулю.

2. Если за полюс принять мгновенный центр скоростей, то в этот момент переносные (поступательные) скорости всех точек тела равны нулю и абсолютная скорость любой точки определяется по формуле

$$v = \omega \cdot \rho,$$

где ω — угловая скорость плоского сечения, которая не зависит от выбора полюса; ρ — расстояние от мгновенного центра скоростей C до данной точки (рис. 231).

Для скоростей любых точек сечения имеем зависимость

$$\frac{v_A}{\rho_A}=\frac{v_B}{\rho_B}=\frac{v_D}{\rho_D}=\ldots=\omega.$$

В приведенных решениях задач показаны оба способа. При самостоятельном решении задач можно использовать любой из двух.

При решении некоторых задач оказывается целесообразным использовать теорему о равенстве между собой проекций скоростей двух точек плоского сечения на прямую, соединяющую эти точки(Е. М. Никитин, § 75).

Задача 197-38. Стержень AB двигается в плоскости чертежа. В момент, когда стержень занимает горизонтальное положение (рис. 232, *а*), скорость его точки A равна 2 *м/сек* и направлена под углом $\alpha=60°$ к прямой AB. Определить скорость точки B, если известно, что она направлена вдоль AB.

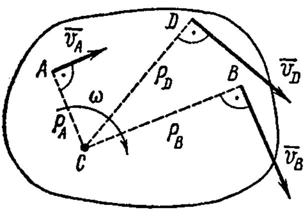


Рис. 231

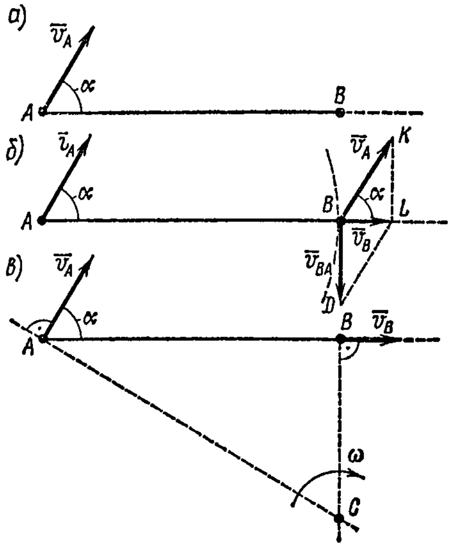


Рис. 232

Решение 1 — сложение переносной и относительной скоростей (рис. 232, *б*).

1. Примем за полюс точку A. Вместе с полюсом стержень AB движется поступательно, поэтому точка B как слагаемая скорость имеет скорость полюса, т. е. $\bar{v}_A$, которую изобразим у точки B вектором BK.

2. Вследствие вращения стержня вокруг полюса точка B имеет вторую слагаемую скорость $\bar{v}_{BA}$ — относительную скорость, направленную перпендикулярно к стержню.

3. Построим параллелограмм скоростей. В параллелограмме известно направление диагонали, которая изобразит искомую скорость $\bar{v}_B$; поэтому из точки K проведем до пересечения с продолжением AB отрезок KL, параллельный направлению относительной скорости $\bar{v}_{BA}$. Затем из точки L проведем прямую LD, параллельную KB

(или вектору $\bar{v}_A$), до пересечения в точке D с линией, характеризующей направление $\bar{v}_{BA}$. Получается параллелограмм $BKLD$, в котором диагональ BL изображает $\bar{v}_B$—скорость точки B.

4. Находим числовое значение $\bar{v}_B$:

$\triangle BLK$—прямоугольный ($KL \perp BL$), поэтому

$$v_B = v_A \cdot \cos\alpha = 2\cos 60° = 1 \text{ м/сек.}$$

Решение 2—при помощи мгновенного центра скоростей (рис. 232, *в*).

1. Из точек A и B проведем две прямые, перпендикулярные к направлениям скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$. Точка C пересечения этих прямых и определит положение мгновенного центра скоростей.

2. Вращение стержня AB вокруг мгновенного центра скоростей C в данный момент характеризуется угловой скоростью ω. Поэтому

$$\frac{v_A}{AC} = \frac{v_B}{BG} = \omega.$$

Отсюда

$$v_B = v_A \cdot BC/AC,$$

но так как $\angle BCA = \alpha$, то $BC/AC = \cos\alpha$, следовательно, $v_B = v_A \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \cos 60° = 1$ *м/сек.*

Решение 3—с применением теоремы о проекциях скоростей двух точек плоского сечения.

1. В рассматриваемом случае искомая скорость $\bar{v}_B$ направлена вдоль прямой, соединяющей точки A и B; при этом известен угол между данной скоростью $\bar{v}_A$ и той же прямой AB. Поэтому удобно применить теорему: *проекции скоростей двух точек плоского сечения на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой* (Е. М. Никитин, § 75).

2. Спроектировав данную скорость $\bar{v}_A$ и искомую $\bar{v}_B$ на прямую AB (см. рис. 224, *в*) и приравняв эти проекции, получим

$$v_B = v_A \cos\alpha.$$

Откуда

$$v_B = 2\cos 60° = 1 \text{ м/сек.}$$

При решении подобных задач иногда приходится выполнять довольно много промежуточных вычислений. Их можно избежать, если решить задачу графическим методом, но с приближенным результатом.

Поясним это на примере следующей задачи.

Задача 198-38. Кривошип $OA = r = 40$ *см* кривошипно-шатунного механизма (рис. 233, *а*) вращается с угловой скоростью $\omega = 25$ *рад/сек.* Длина шатуна, приводящего ползун B в возвратно-поступательное движение вдоль горизонтальных направляющих, равна $AB = l = 100$ *см.* Определить скорость ползуна B в тот момент, когда кривошип OA образует с горизонталью угол $\alpha = 30°$.

Решение 1 — при помощи мгновенного центра скоростей (решение путем сложения переносной и относительной скоростей рекомендуется выполнить самостоятельно).

1. Изобразим на рис. 233, *б* расчетную схему. Схематично покажем кривошип OA и шатун AB в заданном положении. Ползун B, двигающийся поступательно, можно отождествить с точкой B.

2. Замечаем, что кривошип совершает вращательное движение, ползун B движется поступательно, а шатун AB совершает плоскопараллельное движение.

3. Скорость $\bar{v}_A$ точки A направлена перпендикулярно к кривошипу OA (по касательной к окружности, которую описывает точка A). Ее числовое значение

$$v_A = \omega \cdot r = 25 \cdot 0{,}4 = 10 \ \text{м/сек}.$$

Скорость $\bar{v}_B$ точки B направлена вдоль прямой BO.

Проведем из точек A и B прямые, перпендикулярные к направлениям скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$. Найдем в точке их пересечения C мгновенный центр скоростей шатуна.

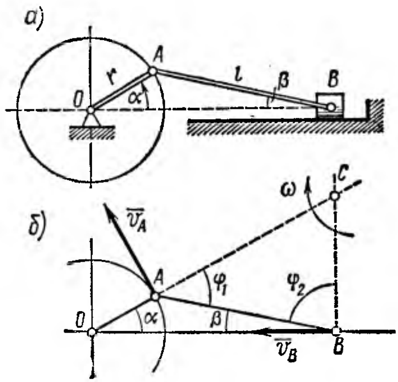


Рис. 233

4. Найдя положение мгновенного центра скоростей, получим

$$\frac{v_A}{CA} = \frac{v_B}{CB} = \omega.$$

Отсюда

$$v_B = v_A \cdot \frac{CB}{CA},$$

но предварительно нужно узнать значение отношения $\frac{CB}{CA}$, которое, как легко заметить, равно отношению синусов противолежащих углов (теорема синусов):

$$\frac{CB}{CA} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}.$$

5. Чтобы определить величину этого отношения, необходимо определить углы φ_1 и φ_2.

Замечая, что (см. рис. 233, *б*) $\varphi_2^\circ = 90^\circ - \beta^\circ$, найдем угол β, применив теорему синусов к $\triangle OBA$;

$$\frac{OA}{AB} = \frac{r}{l} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

откуда

$$\sin\beta = \frac{r}{l}\sin\alpha = \frac{40}{100}\sin 30^\circ = 0{,}2; \quad \beta \approx 11^\circ 30'.$$

Следовательно,

$$\varphi_2 = 90° - 11°30' = 78°30'.$$

Из того же рис. 233, *б* видно, что угол φ_1 является одним из внешних углов $\triangle OBA$, поэтому

$$\varphi_1 = \alpha + \beta = 30° + 11°30' = 41°30'.$$

6. Теперь можно определить числовое значение скорости ползуна B:

$$v_B = v_A \cdot \frac{CB}{CA} = v_A \cdot \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = 10 \cdot \frac{\sin 41°30'}{\sin 78°30'} = 6{,}75 \text{ м/сек}.$$

Решение 2 — графическим методом.

1. Построим в масштабе $\mu_l = 2{,}22$ *см/мм* схему кривошипно-шатунного механизма в заданном положении (рис. 234).

2. Скорость $v_A = 10$ *м/сек* точки A изобразим отрезком $AK = 18$ *мм*. Значит масштаб скоростей

$$\mu_v = \frac{10 \text{ м/сек}}{18 \text{ мм}} = 0{,}555 \text{ м/сек} \cdot \text{мм}.$$

3. Из точки B построим вектор $\overline{Bb} = \overline{v}_A$ (вектор $\overline{Bb}$ равен вектору $\overline{AK}$ и параллелен отрезку AK). Из точки b построим до пересечения с линией BO (направлением скорости $\overline{v}_B$) отрезок ba, пер-

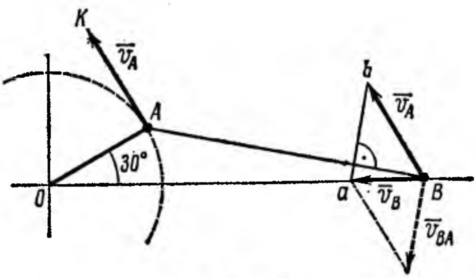


Рис. 234

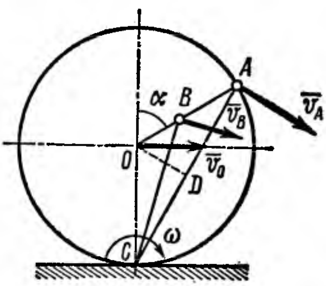


Рис. 235

пендикулярный к BA. Получившийся на линии BO вектор $\overline{Ba}$ изображает искомую скорость $\overline{v}_B$.

4. Измерив длину отрезка Ba, найдем, что $Ba = 12$ *мм*. Следовательно, числовое значение скоростей точки B

$$v_B = \mu_v \cdot Ba = 0{,}555 \text{ м/сек} \cdot \text{мм} \cdot 12 \text{ мм} = 6{,}66 \text{ м/сек}.$$

5. Как видно, между результатом, вычисленным при помощи мгновенного центра скоростей (6,75), и результатом, найденным при графическом решении (6,66), имеется расхождение, равное 0,09 (абсолютная ошибка). Следовательно, относительная ошибка, допущенная в графическом решении, составляет

$$0{,}09 \cdot 100/6{,}75 = 1{,}34\%.$$

Задача 199-38. Колесо катится без скольжения по горизонтальной плоскости, причем ось колеса перемещается равномерно со скоростью $v_0 = 5$ *м/сек*. Определить абсолютную скорость точки A на ободе колеса и точки B, находящейся на том же радиусе, в момент, когда радиус колеса, равный $OA = r = 40$ *см*, образует с вертикалью угол $\alpha = 60°$ (рис. 235). Расстояние $OB = 15$ *см*.

Решение 1 — при помощи мгновенного центра скоростей.

1. Колесо катится без скольжения, следовательно, точка C соприкосновения колеса с горизонтальной плоскостью является мгновенным центром скоростей, так как абсолютная скорость этой точки $v_C = 0$. Если принять точку C за полюс, то можно считать, что в данный момент колесо совершает вращение вокруг так называемой мгновенной оси, перпендикулярной к плоскости колеса и проходящей через точку C (мгновенный центр скоростей).

2. Определяем угловую скорость колеса:

$$\omega = \frac{v_0}{OC} = \frac{5}{0,4} = 12,5 \ \textit{рад/сек.}$$

3. Определяем абсолютную скорость точки A. Скорость направлена перпендикулярно к прямой AC, соединяющей точку A с мгновенным центром скоростей C,

$$v_A = \omega \cdot AC.$$

Но

$$AC = 2AD = 2AO \cdot \sin \frac{180° - \alpha°}{2} = 2 \cdot 0,4 \cdot \sin 60° = 0,694 \ \textit{м}.$$

Следовательно,

$$v_B = 12,5 \cdot 0,694 = 8,67 \ \textit{м/сек}.$$

4. Определяем абсолютную скорость точки B. Скорость $\bar{v}_B$ направлена перпендикулярно к прямой CB и численно равна

$$v_B = \omega \cdot BC.$$

Но

$$BC = \sqrt{OC^2 + OB^2 - 2OC \cdot OB \cdot \cos(180° - \alpha)} =$$
$$= \sqrt{0,4^2 + 0,15^2 - 2 \cdot 0,4 \cdot 0,15(-\cos 60°)} =$$
$$= \sqrt{0,16 + 0,0225 + 0,06} = 0,493 \ \textit{м}$$

и, следовательно, $v_B = 12,5 \cdot 0,493 = 6,17$ *м/сек*.

Решение 2 — при помощи сложения переносной и относительной скоростей.

1. Катящееся колесо совершает сложное движение, складывающееся из поступательного движения колеса вместе с осью O (переносного движения) и вращения колеса вокруг оси O (относительного движения).

2. Абсолютная скорость $\bar{v}_A$ точки A при таком рассмотрении движения колеса равна диагонали параллелограмма $ACDE$, постро-

енного на переносной $\bar{v}_{\text{пер}}$ и относительной $\bar{v}_{AO}$ скоростях точки A (рис. 236).

3. Переносная скорость точки A равна скорости $\bar{v}_0$ оси колеса. Найдем относительную скорость v_{AO} точки A; $v_{AO} = \omega \cdot AO$. Но угловая скорость относительного вращательного движения, как известно, не зависит от выбора полюса, поэтому, приняв за полюс

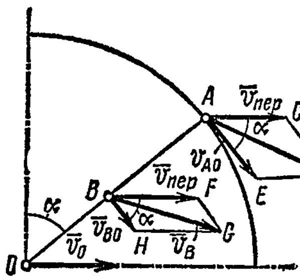


Рис. 236

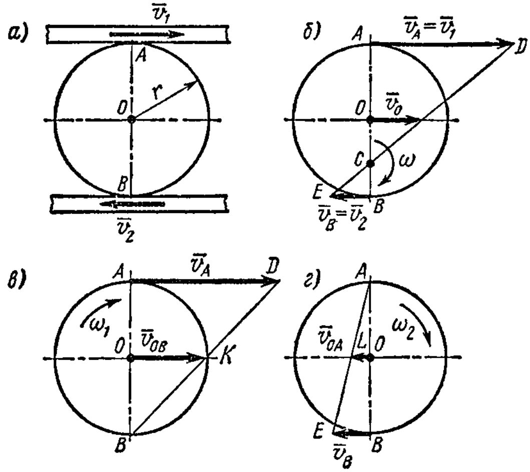


Рис. 237

точку C (см. рис. 235), найдем, что $\omega = \frac{v_0}{CO}$. Следовательно, $v_{AO} = \omega \cdot AO = \frac{v_0}{CO} \cdot AO = v_0$ (так как $CO = AO$ — радиус колеса).

Таким образом, для точки, расположенной на ободе катящегося без скольжения колеса,

$$v_{\text{пер}} = v_{AO} = v_0.$$

Следовательно, параллелограмм $ACDE$ есть ромб с углом $CAE = \alpha = 60°$, поэтому

$$v_A = 2v_0 \cos\frac{\alpha}{2} = 2 \cdot 5 \cdot \cos 30° = 8{,}67 \textit{ м/сек.}$$

4. Абсолютная скорость $\bar{v}_B$ точки B равна диагонали параллелограмма $BFGH$, построенного на переносной скорости $\bar{v}_{\text{пер}} = \bar{v}_0$ и на относительной скорости $\bar{v}_{BO}$, и ее числовое значение можно определить по формуле

$$v_B = \sqrt{v_{\text{пер}}^2 + v_{BO}^2 + 2v_{\text{пер}} \cdot v_{BO} \cdot \cos\alpha}.$$

Но предварительно необходимо найти скорость v_{BO}, которая определяется из соотношения

$$\frac{v_{AO}}{AO} = \frac{v_{BO}}{BO},$$

$$v_{BO} = \frac{v_{AO} \cdot BO}{AO} = \frac{5 \cdot 15}{40} = 1{,}88 \textit{ м/сек.}$$

Окончательно

$$v_B = \sqrt{5^2 + 1{,}88^2 + 2 \cdot 5 \cdot 1{,}88 \cdot \cos 60^\circ} =$$
$$= \sqrt{25 + 3{,}53 + 9{,}4} = \sqrt{37{,}93} = 6{,}17 \text{ м/сек.}$$

Задача 200-38. Две параллельные рейки (рис. 237, *а*) движутся в противоположные стороны с постоянными скоростями $v_1 = 8$ *м/сек* и $v_2 = 2$ *м/сек*. Между рейками зажат диск радиусом $r = 0{,}5$ *м*, катящийся по рейкам без скольжения.

Найти угловую скорость диска и скорость его центра.

Решение 1—при помощи мгновенного центра скоростей.

1. В данном случае известны скорости реек. Но так как диск катится между ними без скольжения, точки A и B в местах соприкосновения диска с рейками имеют те же скорости. Следовательно, $\bar{v}_A = \bar{v}_1$ и $\bar{v}_B = \bar{v}_2$ (рис. 237, *б*). Как видно, точки A и B лежат на прямой, перпендикулярной к направлениям этих скоростей. Соединив концы D и E векторов AD и BE, изображающих скорости $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, найдем на прямой AB точку C—мгновенный центр скоростей диска (Е. М. Никитин, § 76).

2. Скорость v_0 центра диска определяется по формуле

$$v_0 = \omega \cdot OC,$$

где ω—угловая скорость диска.

3. Величины угловой скорости ω и расстояния OC находим из равенств:

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_A}{r + OC} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_B}{r - OC}.$$

Так как левые части обоих равенств равны между собой, то

$$\frac{v_A}{r + OC} = \frac{v_B}{r - OC},$$

отсюда

$$OC = \frac{v_A - v_B}{v_A + v_B} \cdot r = \frac{8 - 2}{8 + 2} \cdot 0{,}5 = 0{,}3 \text{ м.}$$

и

$$\omega = \frac{v_A}{r + OC} = \frac{8}{0{,}5 + 0{,}3} = \frac{8}{0{,}8} = 10 \text{ рад/сек.}$$

4. Находим скорость v_0;

$$v_0 = \omega \cdot OC = 10 \cdot 0{,}3 = 3 \text{ м/сек.}$$

Решение 2—методом последовательной остановки реек.

1. Плоское движение диска образуется вследствие независимого друг от друга перемещения реек. Поэтому скорость центра диска можно получить как результат геометрического сложения скоростей, получаемых точкой O от перемещения каждой рейки.

2. Мысленно остановим нижнюю рейку (рис. 237, *в*). Тогда благодаря передвижению верхней рейки диск будет катиться по ниж-

ней без скольжения и в точке B образуется мгновенный центр скоростей.

Соединим точку B с точкой D (концом вектора $\bar{v}_A$) и получим треугольник BAD, в котором вектор $\overline{OK}=\bar{v}_{OB}$ изображает скорость центра диска при неподвижной нижней рейке.

Так как OK—средняя линия треугольника BAD,

$$v_{OB}=\frac{v_A}{2}=\frac{8}{2}=4 \text{ м/сек.}$$

Угловая скорость диска в этом движении

$$\omega_1=\frac{v_A}{AB}=\frac{8}{1}=8 \text{ рад/сек.}$$

3. Теперь мысленно остановим верхнюю рейку (рис. 237, *г*). Диск будет катиться без скольжения по верхней рейке, имея мгновенный центр скоростей в точке A.

Соединив точку A с концом E вектора $\bar{v}_B$, получим треугольник ABE, определяющий скорость $\bar{v}_{OA}=\overline{OL}$ центра диска при неподвижной верхней рейке.

И здесь OL—средняя линия треугольника ABE, поэтому

$$v_{OA}=\frac{v_B}{2}=\frac{2}{2}=1 \text{ м/сек.}$$

Угловая скорость диска в этом движении

$$\omega_2=\frac{v_B}{BA}=\frac{2}{1}=2 \text{ рад/сек.}$$

4. При одновременном движении обеих реек скорость центра диска

$$v_0=v_{OA}-v_{OB}=4-1=3 \text{ м/сек,}$$

так как обе скорости $\bar{v}_{OA}$ и $\bar{v}_{OB}$ направлены вдоль одной прямой, но в противоположные стороны.

5. Угловая скорость диска определяется как сумма угловых скоростей ω_1 и ω_2, найденных выше:

$$\omega=\omega_1+\omega_2=8+2=10 \text{ рад/сек.}$$

● **Задача 201-38.** Решить задачу 200-38 при условии, что обе рейки движутся в одну сторону, причем верхняя движется со скоростью $v_1=5$ *м/сек*, нижняя—со скоростью $v_2=3$ *м/сек*, а диаметр диска $d=0{,}5$ *м*.

Ответ. $v_0=4$ *м/сек*; $\omega=4$ *рад/сек*.

● **Задача 202-38.** Прямолинейный стержень AB длиной 1,4 *м*, падая на землю, равномерно вращается со скоростью $n=30$ *об/мин* в вертикальной плоскости вокруг центра тяжести O.

Считая, что центр тяжести стержня перемещается прямолинейно с ускорением $g=9{,}81$ *м/сек*^{2}, определить абсолютные скорости концов A и B стержня в тот момент, когда стержень повернется на угол $\varphi=45°$ из первоначального вертикального положения (рис. 238).

Ответ. $v_A = 4{,}3$ *м/сек*; $(\widehat{\bar{v}_A; AB}) = 66°20'$; $v_B = 1{,}81$ *м/сек*. $(\widehat{\bar{v}_B; BA}) = 165°$.

● **Задача 203-38.** Диск диаметром 2 *м*, поставленный на наклонную плоскость, скатывается по ней без скольжения, причем перемещение центра диска O происходит по уравнению $s = 0{,}5t^2$ (s—в *м*,

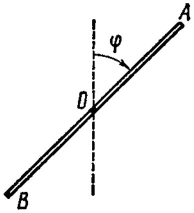


Рис. 238

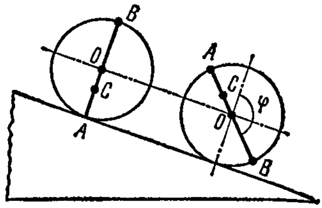


Рис. 239

t—в *сек*). В начальный момент движения диска его диаметр AB перпендикулярен к наклонной плоскости (рис. 239). Определить скорости точек A, B и C диска в тот момент, когда диаметр AB образует с перпендикуляром к наклонной плоскости угол $\varphi = 2$ *рад*. Расстояние $OC = 80$ *см*.

Ответ. $v_A = 3{,}36$ *м/сек*; $v_B = 2{,}16$ *м/сек*; $v_C = 3{,}04$ *м/сек*.

ГЛАВА IX
ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ МЕХАНИЗМОВ

§ 39-9. Определение передаточных отношений различных передач

Передаточное отношение—основная кинематическая характеристика любой передачи.

Передаточные отношения определяются при помощи тех или иных геометрических элементов звеньев передачи. Найденное его значение выражает отношение угловых скоростей $\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \text{ или } \frac{n_1}{n_2}\right)$ двух валов передачи, между которыми это отношение определяется.

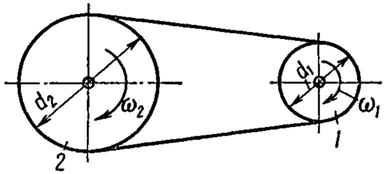
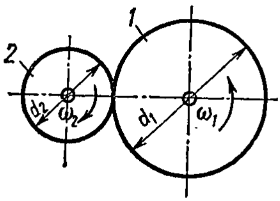
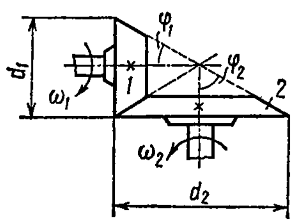
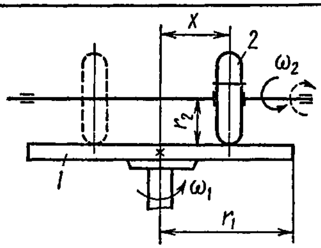
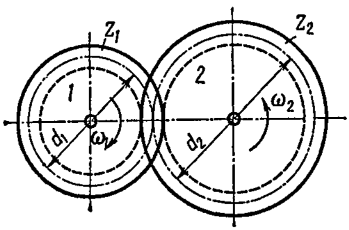
В табл. 6 даны формулы, при помощи которых определяются передаточные отношения различных простейших передач, составленных из пары звеньев.

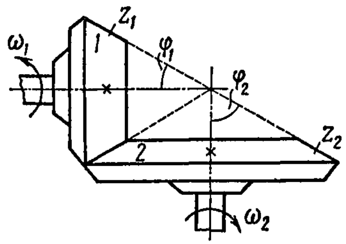
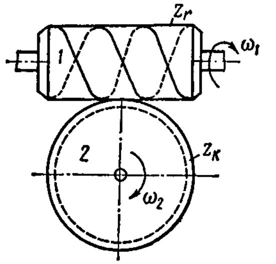
Передаточное отношение сложной передачи—передачи, составленной из нескольких простейших передач, равно произведению передаточных отношений простейших передач:

$$i_{1k} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} \ldots i_{(k-1)k}.$$

В тех случаях когда необходимо учесть, как происходит относительно друг друга вращение двух элементов передачи—в одну сторону или в противоположные стороны, передаточное отношение условно обозначают с положительным или отрицательным знаком.

Таблица 6

Передачи	Схема передачи	Формула для определения передаточного отношения $i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{n_1}{n_2}$
Ременная		$i_{12}=\frac{d_2}{d_1}$, где d_2 и d_1 — диаметры шкивов
Фрикционные: а) цилиндрическая		$i_{12}=\frac{d_2}{d_1}$, где d_2 и d_1 — диаметры катков
б) коническая		$i_{12}=\frac{d_2}{d_1}=\operatorname{tg}\varphi_2=\operatorname{ctg}\varphi_1$, где d_2 и d_1 — диаметры оснований конических катков; φ_2 и φ_1 — углы конусов
в) лобовая		$i_{12}=\frac{r_2}{x}$, где $x=0\div(\pm r_1)$ — расстояние, определяющее положение катка 2 относительно оси катка 1; r_1 и r_2 — радиусы катков
Зубчатые: а) цилиндрическая		$i_{12}=\frac{z_2}{z_1}$, где z_2 и z_1 — число зубьев колес; $d_1=mz_1$ и $d_2=mz_2$ — диаметры начальных окружностей колес; m — модуль колес

Передачи	Схема передачи	Формулы для определения передаточного отношения $i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{n_1}{n_2}$
б) коническая		$i_{12}=\frac{z_2}{z_1}=\operatorname{tg}\varphi_2=\operatorname{ctg}\varphi_1$, где z_2 и z_1 — число зубьев колес; φ_1 и φ_2 — углы начальных конусов
Червячная		$i_{12}=\frac{z_к}{z_ч}$, где $z_к$ — число зубьев червячного колеса; $z_ч$ — число заходов червяка

Передаточное отношение между двумя элементами передачи считается положительным, если оба элемента вращаются в одну сторону, например пара зубчатых колес с внутренним зацеплением.

Передаточное отношение между двумя элементами считается отрицательным, если оба элемента вращаются в противоположные стороны, например пара зубчатых цилиндрических колес с внешним зацеплением.

Задача 204-39. На каком расстоянии x необходимо установить каток *2* лобовой фрикционной передачи (см. схему к лобовой передаче в табл. 6), чтобы при скорости вращения $n_1=400$ *об/мин* катка *1* каток *2* вращался со скоростью $n_2=500$ *об/мин*? Диаметры катков $d_1=2r_1=400$ *мм*, $d_2=2r_2=16$ *мм*.

Определить также, какие наименьшую и наибольшую скорости вращения может получить вал катка 2 при различных положениях последнего.

Решение.

1. Необходимое значение x (расстояние от катка *2* до оси катка *1*) найдем непосредственно из формулы передаточного отношения любой передачи:

$$i_{12}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{r_2}{x} \quad \text{и} \quad x=\frac{n_2 r_2}{n_1}=\frac{500\cdot 8}{400}=10 \text{ мм}.$$

2. Если начать передвигать каток *2* ближе к краю катка *1* (увеличить x), то точки на ободе катка *2* будут вступать в контакт с точками на торцовой поверхности катка *1*, имеющими возрастающую скорость (по зависимости $v=\omega\cdot\rho$ и в данном случае $v=\omega_1 x$), и благодаря силе трения станут приобретать такую же большую скорость.

Если в выражение

$$i_{12}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{r_2}{x}$$

вместо x подставить наибольшее, теоретически возможное значение $x=r_1$ (практически x_{max} несколько меньше r_1), то

$$n_{2max}=\frac{n_1\cdot r_1}{r_2}=\frac{400\cdot 200}{8}=10\,000 \text{ об/мин.}$$

3. Если каток *2* установить у противоположного края катка *1*, то каток *2* будет вращаться с частотой 10 000 *об/мин*, но в обратную сторону.

Таким образом, при $x=-r_1$

$$n_{2min}=\frac{n_1(-r_1)}{r_2}=-\frac{400\cdot 200}{8}=-10\,000 \text{ об/мин.}$$

Благодаря способности изменять направление вращения вала, на котором укреплен каток *2*, любую фрикционную передачу называют фрикционным вариатором (передача, способная варьировать направлением вращения).

4. При $x=0$ (положение катка *2* совпадает с осью катка *1*) $n_x=0$.

Точки на ободе катка *2* касаются практически неподвижных точек на торце катка *1* и поэтому не двигаются.

Иначе говоря, если в выражении $x=\frac{n_2 r_2}{n_1}$ принять $x=0$, то $n_2 r_2=0$. Но так как $r_2\neq 0$, то $n_2=0$.

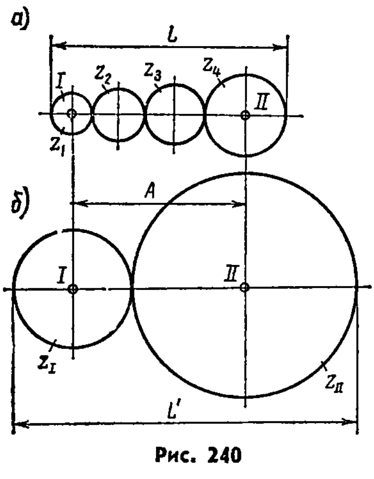


Рис. 240

Задача 205-39. Передача вращательного движения между валами I и II осуществляется при помощи четырех зубчатых колес, два из которых помещены на промежуточных валах (рис. 240, *а*). Числа зубьев колес: $z_1=22$, $z_2=28$, $z_3=32$, $z_4=44$. Модуль зубчатых колес $m=5$ *мм*. Определить передаточное отношение i_{I-II}, межосевое расстояние A и габариты передачи L. Как изменятся габариты, если передачу осуществить при помощи лишь двух колес того же модуля?

Решение.

1. Передаточное отношение i_{I-II} в данном случае равно произведению трех передаточных отношений между соседними колесами:

$$i_{I-II} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_4}{z_3} = \frac{z_4}{z_1} = \frac{44}{22} = 2.$$

Как видно, зубчатые колеса, находящиеся на промежуточных осях, не влияют на величину передаточного отношения; поэтому их иногда называют «паразитными».

2. Находим межосевое расстояние A (см. рис. 240, *а*):

$$A = \frac{d_1}{2} + d_2 + d_3 + \frac{d_4}{2},$$

где d_1, d_2, d_3 и d_4 — диаметры начальных окружностей зубчатых колес.

Подставляем вместо значений диаметров их выражения через модуль m и соответствующие числа зубьев:

$$A = \frac{mz_1}{2} + mz_2 + mz_3 + \frac{mz_4}{2} = m\left(\frac{z_1 + z_4}{2} + z_2 + z_3\right).$$

Откуда

$$A = 5\left(\frac{22 + 44}{2} + 28 + 32\right) = 465 \text{ мм}.$$

3. Находим габариты передачи L (см. рис. 240, *а*):

$$L = A + \frac{d_1 + d_4}{2} = A + \frac{m}{2}(z_1 + z_4) = 465 + \frac{5}{2}(22 + 44) = 630 \text{ мм}.$$

4. Если осуществить передачу при помощи двух колес с числами зубьев z_I и z_{II} того же модуля, оставляя при этом межосевое расстояние передачи неизменным, то оно выразится так (рис. 240, *б*):

$$A = \frac{d_I + d_{II}}{2} = \frac{m}{2}(z_I + z_{II}). \qquad (1)$$

Здесь имеются два неизвестных z_I и z_{II}, но учтя, что передаточное отношение остается неизменным, получаем второе уравнение:

$$i_{I-II} = \frac{z_{II}}{z_I}. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) $z_{II} = 2z_I$ (как уже известно, $i_{I-II} = 2$).

Подставим найденное значение z_{II} в уравнение (1)

$$A = \frac{m}{2} \cdot 3z_I,$$

откуда

$$z_I = \frac{2A}{3m} = \frac{2 \cdot 465}{3 \cdot 5} = 62,$$

и, следовательно,

$$z_{II} = 2z_I = 124.$$

Теперь, зная число зубьев, легко определить габариты двухколесного варианта передачи:

$L' = d_I + d_{II} = mz_I + mz_{II} = m(z_I + z_{II})$ и $L' = 5(62+124) = 930$ *мм*.

Как видно, габариты увеличиваются на 300 *мм*, т. е. почти в 1,5 раза (на 47,5%).

Отсюда следует сделать вывод, что при значительных межосевых расстояниях, которые по конструктивным причинам нельзя уменьшить, целесообразнее (для уменьшения габаритов) применять рядовое соединение нескольких зубчатых колес.

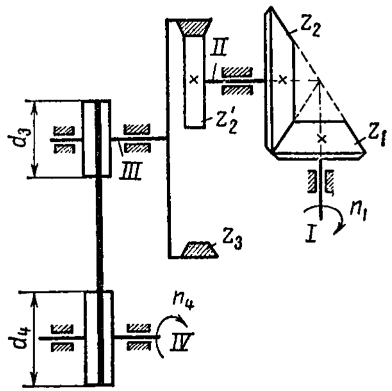


Рис. 241

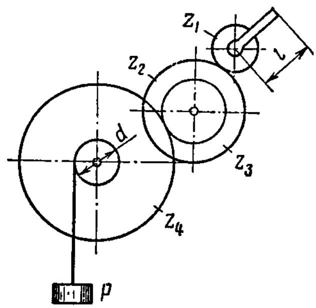


Рис. 242

Задача 206-39. Какую скорость n_1 нужно сообщить валу *I*, чтобы при помощи передачи, показанной на рис. 241, вал *IV* вращался со скоростью $n_4 = 450$ *об/мин*? Числа зубьев колес: конических $z_1 = 25$; $z_2 = 36$; цилиндрического $z_2' = 20$, с внутренним зацеплением $z_3 = 60$; диаметры шкивов $d_3 = 40$ *мм* и $d_4 = 50$ *мм*.

Решение.

1. Передаточное отношение от вала *I* к валу *IV* равно в данном случае произведению трех передаточных отношений:

$$i_{14} = \frac{n_1}{n_4} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34},$$

где $i_{12} = \frac{z_2}{z_1}$ — передаточное отношение конической зубчатой пары; $i_{23} = \frac{z_3}{z_2'}$ — передаточное отношение цилиндрической пары с внутренним зацеплением; $i_{34} = \frac{d_4}{d_3}$ — передаточное отношение ременной передачи.

2. Таким образом

$$n_1 = n_4 \cdot i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} = n_4 \cdot \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2'} \cdot \frac{d_4}{d_3}.$$

После подстановки в эту формулу числовых значений получаем, что скорость вращения первого вала

$$n_1 = 450 \cdot \frac{36 \cdot 60 \cdot 50}{25 \cdot 20 \cdot 40} = 2430 \text{ об/мин.}$$

Задача 207-39. Изображенный на рис. 242 механизм лебедки при вращении рукоятки, имеющей длину l, в вертикальном направлении перемещает груз P. Диаметр барабана $d = 200$ *мм*, число зубьев зубчатых колес механизма: $z_1 = 13$, $z_2 = 39$, $z_3 = 11$, $z_4 = 77$.

Определить: 1) с какой скоростью поднимается груз P, если скорость вращения рукоятки l $n_1 = 60$ *об/мин*. 2) частоту вращения n_1' рукоятки, если груз должен подниматься со скоростью $v_p' = 0{,}2$ *м/сек*.

Решение.

1. Если рукоятка l, жестко соединенная с колесом z_1, делает n_1' *об/мин*, то колесо z_4, а также жестко соединенный с ним барабан получают частоту вращения

$$n_4 = n_1 \cdot i_{41},$$

где i_{41} — передаточное отношение от колеса z_4 к колесу z_1, причем $i_{41} = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4}$ и, следовательно,

$$n_4 = n_1 \cdot \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4} = 60 \cdot \frac{13 \cdot 11}{39 \cdot 77} = 60 \cdot \frac{1}{21} = \frac{20}{7} \text{ об/мин.}$$

2. Так как барабан, вращаясь, делает n_4 *об/мин*, то окружная скорость точек на поверхности барабана

$$v = \frac{\pi n_4 d}{60} = \frac{\pi \cdot 20 \cdot 0{,}2}{60 \cdot 7} = 0{,}03 \text{ м/сек.}$$

Скорость подъема груза P равна окружной скорости и, следовательно,

$$v_P = v = 0{,}03 \text{ м/сек.}$$

3. Если нужно поднимать груз со скоростью v_P', то и барабан должен вращаться так, чтобы его точки двигались с окружной скоростью $v' = v_P'$, при этом частота вращения барабана

$$n_4' = \frac{60 \cdot v_P'}{\pi d} = \frac{60 \cdot 0{,}2}{\pi \cdot 0{,}2} = \frac{60}{\pi} \text{ об/мин.}$$

3. Если же барабан и вместе с ним колесо z_4 имеют n_4' *об/мин*, то колесо z_1 с рукояткой делают n_4' *об/мин*, причем

$$n_1' = n_4' \cdot i_{14} = n_4' \frac{z_4 \cdot z_2}{z_3 \cdot z_1} = \frac{60}{\pi} \cdot 21 = 401 \text{ об/мин.}$$

Такая частота вращения рукоятки при ручном приводе, конечно, неосуществима.

● **Задача 208-39.** Вращение вала *I* к валу *II* передается при помощи двух последовательно смонтированных червячных передач (рис. 243). С какой угловой скоростью должен вращаться вал I, чтобы вал II имел скорость $\omega_{II}=1$ *рад/сек*? Числа заходов червяков $z'_ч=1$ и $z''_ч=2$, числа зубьев колес $z'_k=z''_k=36$.

Ответ. $\omega_{II}=628$ *рад/сек* (≈ 6200 *об/мин*).

● **Задача 209-39.** Шкив диаметром $D=400$ *мм* приводится во вращательное движение электродвигателем A, ротор которого вращается со скоростью $n_A=1500$ *об/мин* (рис. 244). Для уменьшения

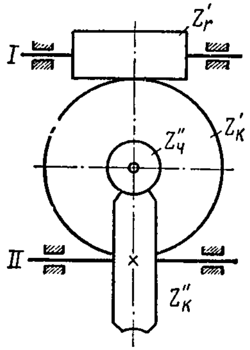


Рис. 243

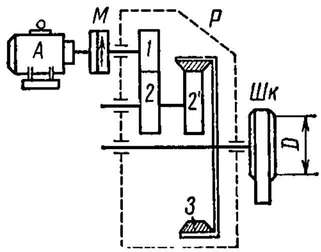


Рис. 244

угловой скорости при передаче движения от двигателя к шкиву между ними установлен двухступенчатый редуктор P. Зубчатые колеса 1, 2, $2'$ и 3 имеют числа зубьев $z_1=30$; $z_2=50$; $z'_2=50$ и $z_3=150$.

Определить скорость и направление вращения шкива (направление вращения ротора двигателя показано стрелкой на соединительной муфте M) и скорость движения ремня.

Ответ. $n_{шк}=300$ *об/мин*, шкив вращается относительно ротора в противоположную сторону; $v_P=6{,}28$ *м/сек*.

§ 40-9. Определение передаточных отношений простейших планетарных и дифференциальных передач

Планетарными называются передачи, в которых оси одного или нескольких колес закреплены в подвижном звене—водиле.

Любая планетарная передача состоит из трех групп элементов. Первая группа—центральные колеса (колеса, расположенные на неподвижных осях), вторая группа—сателлиты (колеса, расположенные на подвижном звене—водиле) и третья группа—водила.

На рис. 245 показана схема передачи, состоящей из центрального колеса 1, сателлита 2 и водила H.

В общем случае центральное колесо и водило могут получать вращение от двух источников независимо друг от друга. Такая передача имеет две степени свободы и называется *дифференциальной*.

Если закрепить центральное колесо, то получается передача с одной степенью свободы—движение можно передавать либо от водила к сателлиту, либо от сателлита к водилу — такая передача называется простой планетарной (рис. 246).

Чтобы в процессе решения задач глубже проанализировать кинематику планетарных передач, целесообразно не пользоваться готовыми выведенными в учебниках формулами, а применять метод сложения двух движений.

Сателлиты планетарных передач совершают сложное вращательное движение. Движение сателлитов относительно Земли (относительно неподвижной системы координат) складывается из вращения их вместе с водилом — переносного движения и вращения их вокруг осей, закрепленных в водиле, — относительного движения.

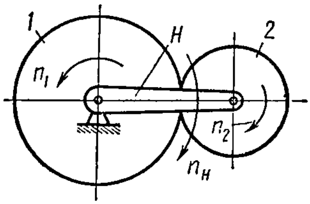


Рис. 245

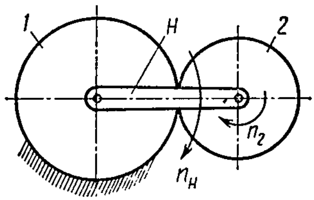


Рис. 246

Метод сложения двух движений можно распространить и на центральные колеса. Так, например, закрепленное центральное колесо простой планетарной передачи можно считать вращающимся вместе с водилом и одновременно поворачивающимся на их общей оси в обратную сторону с такой же скоростью, что и водило.

Поэтому метод, который подробно изложен в решениях задач, включает следующие четыре этапа:

1. Мысленно закрепляем все колеса на водиле и придаем ему вращение с угловой скоростью водила относительно его собственной неподвижной оси — получаем первое движение.

2. Освобождаем колеса от водила. Водило мысленно закрепляем (превращаем планетарную передачу в обычную зубчатую передачу с неподвижными осями) и поворачиваем центральное колесо с угловой скоростью — $(\omega_H - \omega_ц)$, т. е. с угловой скоростью, равной разности абсолютных скоростей водила и центрального колеса, но в обратную сторону относительно направления вращения водила. В результате этого движения центрального колеса все остальные колеса передачи получают соответствующие угловые скорости, определяемые при помощи передаточных отношений. Так получается второе движение.

3. Угловые скорости всех элементов передачи, получившиеся в первом и втором движениях, складываем.

4. Из получившихся в результате сложения действительных зависимостей между угловыми скоростями определяем неизвестные в задаче величины.

Введем такие обозначения:

ω_1, ω_2, ω_3, ... (или n_1, n_2, n_3, ...) — угловые скорости зубчатых колес (центральных или сателлитов), дифференциальных передач, индексы соответствуют нумерации колес; ω_H (или n_H) — угловая скорость водила в дифференциальной передаче;

угловые скорости колес или водила в простой планетарной передаче (с закрепленным колесом) обозначим теми же буквами, но с верхними индексами в скобках, соответствующих закрепленному колесу, например $\omega_2^{(1)}$ (или $n_2^{(1)}$) — угловая скорость второго колеса при закрепленном первом; $\omega_H^{(1)}$ — угловая скорость водила при закрепленном первом и т. д.

Аналогично обозначим и передаточные отношения:

$i_{12}^{(H)}$ — передаточное отношение от колеса *1* к колесу *2* при неподвижном водиле;

$i_{2H}^{(1)}$ — передаточное отношение от колеса *2* к водилу при неподвижном первом колесе;

i_{1H} — передаточное отношение от колеса *1* к водилу в дифференциальной передаче и т. д.

При решении задач с планетарными передачами необходимо очень внимательно следить за правильностью определения знаков передаточных отношений между отдельными элементами передачи. Правило знаков передаточных отношений приведено в § 39-9.

Задача 210-40. Определить передаточное отношение от сателлита *2* к водилу *H* для простой планетарной передачи, показанной на рис. 246, если числа зубьев колес z_1 и z_2.

Решение.

1. Осуществим первое движение. Закрепим колеса *1* и *2* на водиле и сообщим водилу вместе с колесами вращательное движение с угловой скоростью ω_H. Следовательно, в этом движении колеса *1* и *2* также получают угловую скорость ω_H.

2. Осуществим второе движение. Освободим колеса от водила. Закрепим водило, т. е. превратим простую планетарную передачу в обычную зубчатую передачу, состоящую в данном случае из пары зубчатых колес.

3. Угловая скорость центрального колеса в механизме $\omega_ц = \omega_1 = 0$, так как колесо *1* закреплено. Поэтому во втором движении колесу *1* сообщаем скорость

$$-(\omega_H - \omega_ц) = -(\omega_H - 0) = -\omega_H^{(1)}.$$

В результате вращения колеса *1* колесо *2* приобретет угловую скорость

$$-\frac{\omega_H^{(1)}}{i_{12}^{(H)}} = -\omega_H^{(1)}\left(-\frac{z_1}{z_2}\right) = \omega_H^{(1)}\frac{z_1}{z_2},$$

так как передаточное отношение от колеса *1*, вращающегося со скоростью $-\omega_H^{(1)}$, ко второму колесу при закрепленном водиле отрицательное и равно

$$i_{12}^{(H)} = -\frac{z_2}{z_1}.$$

Приведенные результаты заносим в табл. 7, в нижней графе которой затем осуществляем третий этап — сложение обоих значений.

Таблица 7

Элементы передачи	Водило H	Колесо 1	Колесо 2
Первое движение	$\omega_H^{(1)}$	$\omega_H^{(1)}$	$\omega_H^{(1)}$
Второе движение	0	$-\omega_H^{(1)}$	$+\omega_H^{(1)} \frac{z_1}{z_2}$
Результат сложения обоих движений	$\omega_H^{(1)}$	0	$\omega_2^{(1)} = \omega_H^{(1)} \left(1+\frac{z_1}{z_2}\right)$

4. Находим передаточное отношение от сателлита 2 к водилу:

$$i_{2H}^{(1)} = \frac{\omega_2^{(1)}}{\omega_H^{(1)}} = \frac{\omega_H^{(1)}\left(1+\frac{z_1}{z_2}\right)}{\omega_H^{(1)}}.$$

Таким образом,

$$i_{2H}^{(1)} = 1 + \frac{z_1}{z_2}.$$

Так как в данном случае передаточное отношение от колеса 2 к колесу 1 при закрепленном водиле имеет отрицательное значение

$$i_{21}^{(H)} = -\frac{z_1}{z_2};$$

то окончательно

$$i_{2H}^{(1)} = 1 - i_{21}^{(H)}. \qquad \text{(a)}$$

Но при помощи передачи, изображенной на рис. 246, неудобно передавать вращательное движение, так как необходимо дополнительное приспособление, чтобы сообщить угловую скорость сателлиту.

Аналогичная, но несколько видоизмененная простая планетарная передача рассматривается в следующей задаче.

Задача 211-40. Определить передаточное отношение от колеса 2 к водилу H простой планетарной передачи с закрепленным колесом внутреннего зацепления (рис. 247), если $z_1 = 30$, $z_2 = 60$ и $z_3 = 150$.

Решение.

1. Так же как и в предыдущей задаче, осуществим сначала первое движение, и тогда все элементы механизма (водило H, колеса 1, 2 и 3) получат угловую скорость $\omega_H^{(3)}$.

2. Превратим планетарную передачу в обычную, закрепив водило. Освободим колеса и осуществим второе движение — сообщим колесу 3 угловую скорость $-\omega_H^{(3)}$. Тогда колесо 2 приобретет угловую скорость

$$-\omega_H^{(3)} \cdot \frac{z_3}{z_2},$$

а колесо 1 — угловую скорость

$$-\omega_H^{(3)}\left(\frac{z_3}{z_2}\right)\left(-\frac{z_2}{z_1}\right)=\omega_H^{(3)}\frac{z_3}{z_1}.$$

3. Сведем результаты обоих движений в табл. 8 и произведем сложение угловых скоростей.

Таблица 8

Элементы передачи	Водило H	Колесо 3	Колесо 2	Колесо 1
Первое движение	$\omega_H^{(3)}$	$\omega_H^{(3)}$	$\omega_H^{(3)}$	$\omega_H^{(3)}$
Второе движение	0	$-\omega_H^{(3)}$	$-\omega_H^{(3)}\frac{z_3}{z_2}$	$+\omega_H^{(3)}\frac{z_3}{z_1}$
Результат сложения обоих движений	$\omega_H^{(3)}$	0	$\omega_2^{(3)}=\omega_H^{(3)}\left(1-\frac{z_3}{z_2}\right)$	$\omega_1^{(3)}=\omega_H^{(3)}\left(1+\frac{z_3}{z_1}\right)$

4. Найдем передаточное отношение $i_{1H}^{(3)}$:

$$i_{1H}^{(3)}=\frac{\omega_1^{(3)}}{\omega_H^{(3)}}=\frac{\omega_H^{(3)}\left(1+\frac{z_3}{z_1}\right)}{\omega_H^{(3)}}=1+\frac{z_3}{z_1}. \qquad (б)$$

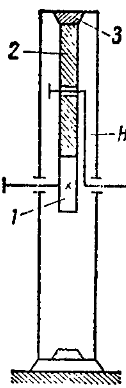


Рис. 247

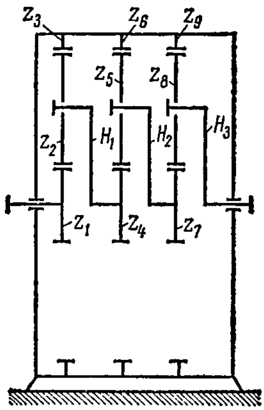


Рис. 248

Подставим в (б) числовые значения чисел зубьев:

$$i_{1H}^{(3)}=1+\frac{150}{30}=1+5=6.$$

Таким образом, если к передаче подвести угловую скорость слева (к колесу 1), то справа (у водила H) угловая скорость уменьшится в шесть раз.

Если в выражении передаточного отношения (б) заменить $\frac{z_3}{z_1}$ обозначением $-i_{13}^{(H)}$, то

$$i_{1H}^{(3)} = 1 - i_{13}^{(H)}. \tag{в}$$

Сравнивая выражение (в) с выражением (а) из предыдущей задачи, замечаем, что они аналогичны.

Как видно, эти передачи не дают большого кинематического эффекта по сравнению с обычными передачами с неподвижными осями: передаточные отношения отличаются только на единицу.

Чтобы увеличить передаточное отношение, передачи, рассмотренные в задаче 211-40, соединяют последовательно.

● **Задача 212-40.** Определить передаточное отношение трехступенчатой простой планетарной передачи (рис. 248), если $z_1 = z_4 = z_7 = 28$; $z_3 = z_6 = z_9 = 168$.

Ответ, $i_{1H_3} = 343$.

Если же передать вращение от водила к центральному колесу, то можно получить очень большое передаточное отношение.

Задача 213-40. Определить передаточное отношение $i_{H1}^{(3)}$ для простой планетарной передачи, показанной на рис. 249, если числа зубьев колес z_1, z_2, z_2' и z_3.

Решение.

1. Осуществим первое движение (см. табл. 9).

2. Осуществим второе движение при закрепленном водиле, сообщив вращение колесу *3* (см. табл. 9).

3. Записав угловые скорости каждого элемента в первом и втором движении, сложим их (табл. 9).

Таблица 9

Элементы передачи	Водило H	Колесо *3*	Колесо *2* и *2'* (блок сателлитов)	Колесо *1*
Первое движение	$\omega_H^{(3)}$	$\omega_H^{(3)}$	$\omega_H^{(3)}$	$\omega_H^{(3)}$
Второе движение	0	$-\omega_H^{(3)}$	$-\omega_H^{(3)} \frac{z_3}{z_2'}$	$-\omega_H^{(3)} \frac{z_3}{z_2'} \cdot \frac{z_2}{z_1}$
Результат сложения обоих движений	$\omega_H^{(3)}$	0	$\omega_2^{(3)} = \omega_H^{(3)} \left(1 - \frac{z_3}{z_2'}\right)$	$\omega_1^{(3)} = \omega_H^{(3)} \left(1 - \frac{z_3 \cdot z_2}{z_2' \cdot z_1}\right)$

4. Находим передаточное отношение $i_{H1}^{(3)}$:

$$i_{H1}^{(3)} = \frac{\omega_H^{(3)}}{\omega_1^{(3)}} = \frac{\omega_H^{(3)}}{\omega_H^{(3)} \left(1 - \frac{z_3 \cdot z_2}{z_2' \cdot z_1}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{z_3 \cdot z_2}{z_2' \cdot z_1}}.$$

Особенно большим получается передаточное отношение, если

$$\frac{z_3 \cdot z_2}{z_2' \cdot z_1} = i_{2'3}^{(H)} \cdot i_{12}^{(H)}$$

близко к единице. Так, например, при $z_1 = 100$, $z_2 = 99$, $z_2' = 100$ и $z_3 = 101$

$$i_{H1}^{(3)} = \frac{1}{1 - \frac{101 \cdot 99}{100 \cdot 100}} = \frac{10\,000}{10\,000 - 9999} = 10^4.$$

Следовательно, простая планетарная передача, состоящая всего из четырех колес, уменьшает угловую скорость в 10 тысяч раз.

Такие передачи создают большой кинематический эффект, но они имеют и крупный недостаток — крайне низкий коэффициент полезного действия (около 0,5%).

В следующей задаче рассматривается дифференциальная передача.

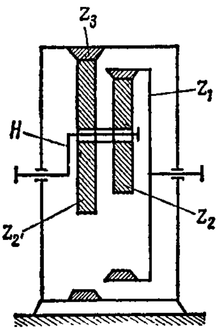


Рис. 249

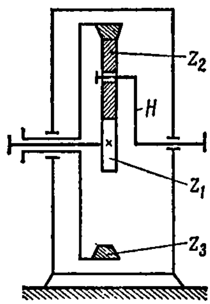


Рис. 250

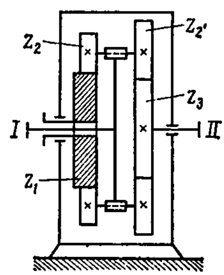


Рис. 251

Задача 214-40. Определить скорость вращения водила H и колеса 2 дифференциального зубчатого механизма (рис. 250), если число зубьев колес $z_1 = 18$, $z_3 = 54$. Частота вращения колеса 1 $n_1 = 120$ *об/мин*, а частота вращения колеса 3 $n_3 = 60$ *об/мин* при направлении вращения в обратную сторону относительно колеса 1 ($n_3 = -60$ *об/мин*).

Решение.

1. Осуществим первое движение. Закрепив жестко все колеса на водиле, сообщим последнему скорость вращения n_H, тогда все три колеса получат ту же самую скорость.

2. Освободив колеса от водила и закрепив его, сообщаем колесу 1 угловую скорость $-(n_H - n_1)$ *об/мин*. Тогда колесо 2 получит скорость

$$-(n_H - n_1)\left(-\frac{z_1}{z_2}\right) = +(n_H - n_1)\frac{z_1}{z_2},$$

а колесо 3

$$-(n_H - n_1)\left(-\frac{z_1}{z_2}\right)\left(+\frac{z_2}{z_3}\right) = +(n_H - n_1)\frac{z_1}{z_3}.$$

3. Сведем все результаты в табл. 10.

Таблица 10

Элементы механизма	Водило H	Колесо 1	Колесо 2	Колесо 3
Первое движение	n_H	n_H	n_H	n_H
Второе движение	0	$-(n_H-n_1)$	$(n_H-n_1)\frac{z_1}{z_2}$	$+(n_H-n_1)\frac{z_1}{z_3}$
Результат сложения первого и второго движения	n_H	n_1	$n_2=n_H+(n_H-n_1)\frac{z_1}{z_2}$	$n_3=n_H+(n_H-n_1)\frac{z_1}{z_3}$

4. Частоту вращения водила найдем из равенства

$$n_3=n_H+(n_H-n_1)\frac{z_1}{z_2},$$

откуда

$$n_H=\frac{n_3+n_1\frac{z_1}{z_3}}{1+\frac{z_1}{z_3}}=\frac{-60+120\cdot\frac{18}{54}}{1+\frac{18}{54}}=-15\ \textit{об/мин}.$$

Водило H вращается с частотой 15 *об/мин* в ту же сторону, что и колесо 3.

5. Частоту вращения колеса 2 определяем из равенства

$$n_2=n_H+(n_H-n_1)\frac{z_1}{z_2},$$

но предварительно необходимо определить число зубьев z_2.

Из рис. 250 ясно, что $d_3=d_1+2d_2$ или $mz_3=mz_1+2mz_2$. Так как модули всех колес равны между собой, то $z_3=z_1+2z_2$, откуда $z_2=\frac{z_3-z_1}{2}=\frac{54-18}{2}=18$ и теперь $n_2=-15+(-15-120)\cdot\frac{18}{18}=$ $=-150$ *об/мин*.

Таким образом, бегающее колесо (сателлит) вращается вокруг своей оси со скоростью 150 *об/мин* в ту же сторону, что и водило, и колесо 3.

● **Задача 215-40.** Найти угловую скорость ω_{II} вала II редуктора с дифференциальной передачей, если вал I, соединенный с водилом, несущим на себе спаренный блок сателлитов, вращается с угловой скоростью $\omega_H=120$ *рад/сек* (рис. 251). Колесо 1 вращается в ту же сторону с угловой скоростью $\omega_1=180$ *рад/сек* и имеет число зубьев $z_1=80$, число зубьев сателлитов $z_2=20$, $z_2'=40$, а у колеса 3 $z_3=60$.

Ответ. $\omega_{II}=\omega_3=280$ *рад/сек*.

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

ДИНАМИКА

В динамике завершается изучение законов движения. Здесь объясняется, **почему** материальные точки или тела двигаются именно так, а не иначе, **что** служит причиной тех или иных изменений в характеристике их движения.

Первая аксиома динамики — закон инерции (Е. М. **Никитин**, § 82) — объясняет, что равномерное и прямолинейное движение точки или тела происходит лишь в том случае, если на точку (тело) действует уравновешенная система сил. И наоборот, если нужно, чтобы точка или тело двигались равномерно и прямолинейно, то необходимо создать условия для равновесия всех сил, приложенных к данной точке или к данному телу.

В каждой задаче, в которой рассматривается криволинейное или неравномерное движение точки, применяется вторая аксиома динамики — основной закон динамики точки

$$\overline{P}=\overline{ma}.$$

Этот закон утверждает, во-первых, что причиной ускорения служит сила, во-вторых, что числовое значение приобретенного точкой ускорения пропорционально числовому значению силы и, в-третьих, что направление вектора ускорения всегда совпадает с направлением вектора силы.

Закон равенства действия и противодействия (третья аксиома динамики) в задачах по динамике, так же как и в статике, используется при определении взаимодействия двигающихся тел.

Четвертая аксиома динамики — закон независимости действия сил — позволяет при решении задач динамики выбирать пути их решения. Если на материальную точку действует несколько сил, то можно найти их равнодействующую, а затем рассмотреть ее действие на точку — найти ускорение точки, но можно сначала найти ускорения, приобретенные от действия каждой силы отдельно, а затем эти ускорения геометрически сложить.

Решая любые задачи по динамике, необходимо учитывать, что все уравнения, выражающие основные законы динамики, а также многие формулы, как правило, выражены в форме, позволяющей использовать их лишь при подстановке числовых значений величин в единицах одной системы.

Поэтому перед тем как приступить к решению задачи по динамике, необходимо выбрать, в какой из двух употребляемых систем единиц решать задачу: либо в единицах СИ, либо в единицах МКГСС (единицах технической системы).

Заметим, что единицы длины (1 *м*), времени (1 *сек*), скорости (1 *м/сек*) и ускорения (1 *м/сек*^{2}) и некоторых других величин (углового перемещения, угловой скорости, углового ускорения) в обеих системах совпадают, а единицы силы и массы различны.

Как известно из статики, в СИ единицей силы служит 1 *н* — сила, сообщающая массе в 1 *кг* ускорение 1 *м/сек*^{2}, в системе МКГСС единицей силы служит 1 *кГ* — основная единица.

Единицей массы в СИ служит 1 *кг* (основная единица) — масса платино-иридиевого эталона, а в системе МКГСС — единица массы производная. Она образуется при подстановке в уравнение основного закона динамики

$$P = m \cdot a$$

вместо P значения 1 *кГ* и вместо a значения 1 *м/сек*^{2}, т. е.

$$m = \frac{1\ кГ}{1\ м/сек^2} = 1\ кГ \cdot сек^2/м.$$

Таким образом, технической единицей массы (т. е. м.) является масса, которой сила, равная 1 *кГ*, сообщает ускорение 1 *м/сек*^{2}.

Техническая единица массы в 9,81 раза крупнее 1 *кг* (единицы СИ).

ГЛАВА X
ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 41-10. Основной закон динамики точки

Точка, движение которой ничем не ограничено, называется свободной. Свободная точка под действием приложенных сил может двигаться в каком угодно направлении. Задачи, в которых рассматривается свободная точка, решаются при помощи основного уравнения динамики

$$\bar{P} = \overline{ma}. \qquad \text{(а)}$$

Если на точку действует только одна сила $\bar{P}$ (примером такого движения может служить так называемое свободное падение — движение точки под действием силы тяжести в безвоздушном пространстве), то векторное уравнение (а) заменяется скалярным уравнением

$$P = ma, \qquad \text{(б)}$$

выражающим зависимость между модулями силы и ускорения.

Если на точку действует несколько сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$, то векторное уравнение (а) примет вид

$$\bar{R} = m\bar{a}, \qquad \text{(в)}$$

где равнодействующая $\bar{R}=\Sigma\bar{P}_i$ и, согласно закону независимости действия сил, $\bar{a}=\Sigma\bar{a}_i$ (ускорение точки равно геометрической сумме ускорений, сообщенных ей каждой силой в отдельности).

Векторное равенство (в) заменяется двумя или тремя скалярными равенствами.

Если силы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, ..., $\bar{P}_n$, действующие в одной плоскости, спроектировать на две взаимно перпендикулярные оси, получим два скалярных уравнения (уравнений проекций на оси x и y):

$$\left.\begin{aligned}\Sigma X_i = ma_x,\\ \Sigma Y_i = ma_y,\end{aligned}\right\} \tag{г}$$

где a_x и a_y—проекции ускорения $\bar{a}$ соответственно на ось x и y.

Если система сил, приложенных к точке,—пространственная, то вместо векторного уравнения (в) составляется три скалярных уравнения проекций на оси x, y и z.

В условиях задач по динамике, имеющихся в учебниках или задачниках, очень часто вместо массы точки или тела задается их вес (в *кГ*). В таких случаях массу точки (тела) определить очень легко: числовое значение массы (в *кг*) можно считать равным числовому значению веса (в *кГ*), так как масса 1 *кг* весит 1 *кГ*.

Задача 216-41. Свободная материальная точка, вес которой 5 *кГ*, движется прямолинейно с ускорением 50 *см/сек²*. Определить силу, приложенную к точке.

Решение.

1. Выразим значения обеих данных величин в единицах СИ. Так как точка весит 5 *кГ*, то ее масса $m=5$ *кг*, ускорение точки $a=50$ *см/сек²* $=0,5$ *м/сек²*.

2. Согласно основному закону динамики,

$$P=ma,$$

поэтому

$$P=5\cdot 0,5=2,5\,\frac{кг\cdot м}{сек^2}=2,5\ н.$$

Таким образом, сила, сообщающая массе, равной 5 *кг*, ускорение 0,5 *м/сек²*, равна 2,5 *н*, что соответствует $\approx 0,26$ *кГ*, так как

$$2,5\ н\cdot 0,102\ кГ/н\approx 0,26\ кГ.$$

Задача 217-41. Свободная материальная точка находится под действием постоянной силы $P=5,1$ *кГ* в течение 20 *сек* и проходит за это время по прямолинейной траектории путь 0,5 *км*. До начала действия силы точка находится в покое. Найти массу точки.

Решение 1—в единицах СИ.

1. Выразим данные величины в единицах СИ: действующая сила $P=5,1$ *кГ* $=5,1\cdot 9,81=50$ *н*; время $t=20$ *сек*; пройденный путь $s=0,5$ *км* $=500$ *м*. Так как точка начала́ движение из состояния покоя, то $s_0=0$ и $v_0=0$.

2. Найдем ускорение точки. Сила постоянна, поэтому ускорение, приобретенное точкой, также постоянно и, следовательно, движение точки по прямолинейной траектории будет равнопеременным, т. е.

$$s = \frac{at^2}{2}.$$

Отсюда

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 500}{20^2} = 2{,}5 \text{ м/сек}^2.$$

3. Из основного закона динамики

$$P = ma$$

легко найти массу точки:

$$m = \frac{P}{a} = \frac{50}{2{,}5} = 20 \text{ кг}$$

$$\left(н\colon \frac{м}{сек^2} = \frac{кг \cdot м}{сек^2} : \frac{м}{сек^2} = кг\right).$$

Решение 2—в единицах МКГСС.

1. Выразим величины в единицах технической системы: действующая сила $P = 5{,}1$ *кГ*; время $t = 20$ *сек*; пройденный путь $s = 0{,}5$ *км* $= 500$ *м*.

2. Ускорение определим так же, как и в первом решении:

$$a = 2{,}5 \text{ м/сек}^2.$$

2. Из основного закона динамики

$$P = ma$$

найдем массу точки:

$$m = \frac{P}{a} = \frac{5{,}2}{2{,}5} = 2{,}04 \frac{кГ \cdot сек^2}{м} (\text{т. е. м.})$$

$$\left(кГ\colon \frac{м}{сек^2} = \frac{кГ \cdot сек^2}{м}\right).$$

4. Если перевести получившиеся 2,04 технической единицы массы в *кг*, то

$$2{,}04 \cdot 9{,}81 = 20 \text{ кг}.$$

Как видно, результаты обоих решений одинаковы.

Задача 218-41. Точка массой $m = 5$ *кг* движется горизонтально по прямой AB с ускорением $a = 2$ *м/сек*², направленным вдоль той же прямой. Чему должны быть равны постоянные силы P_1 и P_2, лежащие в одной плоскости и действующие на точку, как показано на рис. 252.

Решение.

1. На точку действуют две силы, сообщившие ей ускорение $\bar{a}$, числовое значение и направление которого известны. Поэтому векторное равенство (в) для данной задачи примет вид: $\bar{P}_1 + \bar{P}_2 = \overline{ma}$.

2. Выбираем расположение осей координат, как показано на рис. 252, и, спроектировав векторное равенство на эти оси, получим два уравнения:

$$P_1 \cos\alpha = ma,$$
$$P_1 \sin\alpha - P_2 = 0$$

(вектор $\overline{ma}$ направлен вдоль оси x и перпендикулярно к оси y, поэтому его проекция на ось x равна ma, а проекция на ось y равна нулю).

3. Решаем получившуюся систему уравнений.

Из первого уравнения находим P_1:

$$P_1 = \frac{ma}{\cos\alpha} = \frac{5 \cdot 2}{\cos 38^\circ} = 12{,}7 \textit{ кн}.$$

Из второго уравнения находим P_2:

$$P_2 = P_1 \sin 38^\circ = 12{,}7 \sin 38^\circ = 7{,}82 \textit{ н}.$$

Задачу можно решить иначе. Сначала найти числовое значение равнодействующей сил $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$, воспользовавшись скалярным выражением уравнения (г): $R = ma$.

Затем, зная, что вектор $\overline{R}$ совпадает по направлению с вектором $\overline{a}$, по правилу параллелограмма разложить его на составляющие $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ и вычислить модули этих сил.

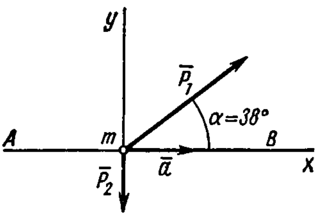


Рис. 252

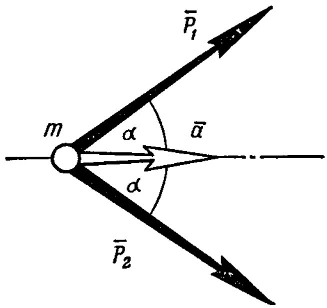


Рис. 253

● **Задача 219-41.** Под действием двух равных по модулю сил P_1 и P_2 (рис. 253) свободная материальная точка движется с ускорением $a = 2$ *м/сек*^{2}. Определить: а) массу точки, если $P_1 = P_2 = P = 10$ *н*, $\alpha = 60^\circ$; б) численное значение сил, если $m = 5$ *кг* и $\alpha = 30^\circ$.

Ответ: а) 5 *кг*; б) 5,78 *н*.

● **Задача 220-41.** Свободная материальная точка весит 25 *кГ*; на нее действует постоянная сила, равная 25 *кГ*. Какое ускорение получает точка и какое расстояние она успевает пройти за 10 *сек* действия силы, считая, что движение прямолинейное?

Ответ. $a = 9{,}81$ *м/сек*^{2}, $s \approx 490$ *м*.

§ 42-10. Применение принципа Даламбера к решению задач на прямолинейное движение точки

Обычно в задачах по динамике рассматривают так называемые несвободные материальные точки—материальные точки, движение которых ограничивается различными связями.

Приступая к решению задач, в которых рассматривается несвободная материальная точка, нужно прежде всего выявить действующие на точку активные силы (движущие силы и силы сопротивления), а также реакции связей (пассивные силы).

Выявив действующие силы, необходимо определить, находятся они в равновесии или нет? Этот вопрос в зависимости от заданных условий решается двояко.

Если, например, известно, что точка движется равномерно и прямолинейно, значит система сил уравновешена; если же известно, что точка двигается неравномерно или имеет криволинейную траекторию, то система сил неуравновешена (первая задача динамики; Е. М. Никитин, § 81).

Если система сил задана (все силы системы известны), то, определив проекции сил на оси координат, можно установить равновесие или неравновесие системы. В случае когда суммы проекций всех сил на каждую из осей равны нулю, заданная система сил уравновешена; когда же сумма проекций всех сил хотя бы на одну из осей не равна нулю, система сил неуравновешена; в первом случае точка движется равномерно и прямолинейно, во втором случае — имеет ускорение (вторая задача динамики).

При решении различных технических задач особенно важное значение приобретает случай, когда на материальную точку действует неуравновешенная система сил. В подобных случаях целесообразно решать задачи, применяя так называемый метод кинетостатики или принцип Даламбера (Е. М. Никитин, § 84), который формулируется так: *активные силы, реакции связей и сила инерций образуют уравновешенную систему сил.*

Применяя принцип Даламбера, необходимо очень хорошо понимать сущность силы инерции (Е. М. Никитин, § 85). Нужно помнить, во-первых, что сила инерции, численно равная произведению массы точки на приобретенное ускорение, всегда направлена в сторону, противоположную вектору ускорения;

во-вторых, что сила инерции в действительности не приложена к рассматриваемой в задаче материальной точке; она условно прикладывается к этой точке; фактически сила инерции приложена к двигающему телу или к связи;

в-третьих, что равновесие сил, которое образуется после добавления силы инерции к силам, приложенным к точке,— равновесие фиктивное; но оно позволяет воспользоваться для решения задачи уравнениями равновесия из статики.

При решении задач с помощью метода кинетостатики рекомендуется придерживаться такой последовательности:

1) выделить точку, движение которой рассматривается, и изобразить ее на рисунке;

2) выявить все активные силы и изобразить их приложенными к точке на рисунке;

3) освободить точку от связей, заменить связи их реакциями и также изобразить их на рисунке;

4) добавить к полученной системе сил силу инерции;

5) рассмотреть образовавшуюся уравновешенную систему сил и в зависимости от вида системы сил выбрать наиболее рациональный способ решения: графический, графо-аналитический или аналитический (методом проекций).

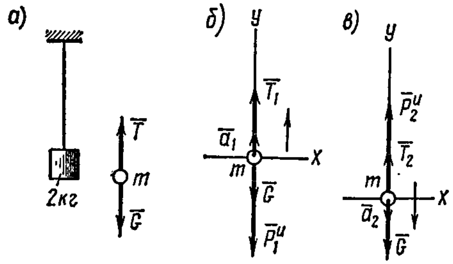


Рис. 254

Задача 221-42. На шнуре подвешена двухкилограммовая гиря (рис. 254, *а*). Каково при этом натяжение шнура? Как изменится натяжение шнура, если при его помощи поднимать гирю вертикально вверх равномерно? Поднимать вертикально вверх с ускорением $a_1 = 3$ *м/сек*. Опускать вертикально вниз с ускорением $a_2 = 4{,}5$ *м/сек*²?

Решение.

1. На гирю, которую принимаем за материальную точку массой $m = 2$ *кг*, подвешенную на шнуре (см. рис. 254, *а*), действуют две силы: сила тяжести $\bar{G}$ и реакция нити $\bar{T}$, равная ее натяжению. Других сил нет. Материальная точка (гиря) находится в покое, значит силы $\bar{G}$ и $\bar{T}$ образуют уравновешенную систему, т. е.

$$T = G = mg = 2 \cdot 9{,}81 = 19{,}62 \text{ кГ} \cdot \text{м/сек}^2 = 19{,}62 \text{ н}.$$

2. Если гиря, подвешенная на шнуре, поднимается вертикально вверх равномерно, то на нее действуют те же две силы и они также образуют уравновешенную систему. Происходит лишь замена статического равновесия (равновесия в состоянии покоя) динамическим равновесием (равновесием в состоянии движения — равномерного и прямолинейного).

Таким образом, и в этом случае (см. рис. 254, *а*) натяжение шнура $T = G = 19{,}62$ *н*.

3. Рассмотрим гирю в состоянии равноускоренного движения вертикально вверх с ускорением $a_1 = 3$ *м/сек*² (рис. 254, *б*). На гирю действуют также две силы: ее вес $\bar{G}$ и натяжение шнура $\bar{T}_1$. Теперь эти две силы не образуют уравновешенной системы, потому что точка движется с ускорением. Добавим к имеющимся силам $\bar{G}$ и $\bar{T}_1$ силу инерции $\bar{P}_1^и$, направив ее вертикально вниз — противоположно ускорению $\bar{a}_1$.

Система сил $\bar{G}$, $\bar{T}_1$ и $\bar{P}_1^и$ уравновешена, следовательно, алгебраическая сумма их проекций на вертикальную ось равна нулю (уравнение равновесия):

$$\Sigma Y_i = 0;\ T_1 - G - P_1^{и} = 0.$$

Из этого уравнения

$$T_1 = G + P_1^{и},$$

но

$$G = mg \text{ и } P_1^{и} = ma_1,$$

поэтому

$$T_1 = mg + ma_1 = m(g + a_1) = 2(9{,}81 + 3) = 25{,}62\ н.$$

Как видно, при подъеме гири вверх с ускорением натяжение шнура увеличивается:

$$T_1 - T = 25{,}62 - 19{,}62 = 6\ н.$$

4. Рассмотрим гирю в состоянии равноускоренного движения вертикально вниз с ускорением $a_2 = 4{,}5\ м/сек^2$ (рис. 245, *в*).

На гирю также действуют две силы: $\overline{G}$ и $\overline{T}_2$ и они так же, как и в предыдущем случае, не образуют уравновешенной системы.

Добавим силу инерции $\overline{P}_{2и}$, направив ее противоположно ускорению $\overline{a}_2$, т. е. вертикально вверх.

Уравнение равновесия примет вид

$$\Sigma Y_i = 0;\quad P_2^{и} + T_2 - G = 0,$$

откуда

$$T_2 = G - P_2^{и} = mg - ma_2 = m(g - a_2)$$
$$T_2 = 2(9{,}81 - 4{,}5) = 10{,}62\ н.$$

При ускоренном движении гири вниз натяжение шнура ослабевает. В данном случае по сравнению с состоянием равновесия натяжение шнура уменьшается на 9 *н*.

Примечание. Если решение задачи выполнить в технической системе единиц (МКГСС), то вес гири $G = 2\ кГ$, а сила инерции получит такое выражение

$$P_1^{и} = ma_1 = \frac{G}{g} a_1.$$

Тогда значение T_1 приобретет такой вид

$$T_1 = G + P_1^{и} = G + \frac{G}{g} a_1 = G\left(1 + \frac{a_1}{g}\right) = 2\left(1 + \frac{3}{9{,}81}\right) \approx 2{,}61\ кГ.$$

Легко проверить, что $2{,}61\ кГ = 25{,}62\ н$.

Отметим, что выражение натяжения шнура при равноускоренном движении гири вниз

$$T_2 = m(g - a_2).$$

Если ускорение a_2 увеличивается, то может наступить такое состояние, когда $a_2 = g = 9{,}81\ м/сек^2$, при этом

$$T_2 = m(g - a_2) = 0,$$

т. е. при свободном падении гири она не натягивает шнур. Образуется состояние «невесомости».

Задача 222-42. По наклонной плоскости AB длиной 4 *м* и с углом подъема $\alpha = 15°$ равноускоренно поднимают груз M весом $G = 200$ *кГ*, постоянной силой $P = 65$ *кГ*, направленной параллельно наклонной плоскости. Определить, сколько времени потребуется, чтобы переместить груз на расстояние AB, если коэффициент трения при движении груза по наклонной плоскости $f = 0{,}05$.

Решение — в единицах системы МКГСС.

1. Изобразим тело M на наклонной плоскости с приложенными к нему силами $\overline{G}$ и $\overline{P}$, а также силой трения $\overline{F}$ и нормальной реакцией $\overline{N}$ наклонной плоскости (рис. 255).

Находясь под действием этих сил, тело движется по наклонной плоскости с постоянным ускорением a.

2. Груз перемещается равноускоренно, без начальной скорости. Время его движения можно определить из уравнения движения

$$s = \frac{at^2}{2}, \text{ откуда } t = \sqrt{\frac{2s}{a}},$$

но предварительно необходимо определить ускорение a.

3. Так как груз движется с ускорением, то силы $\overline{G}$, $\overline{P}$, $\overline{N}$ и $\overline{F}$, приложенные к нему, не образуют уравновешенной системы. Приложим к грузу M силу инерции $P^{и} = ma = \frac{G}{g}a$, направив ее в сторону, противоположную ускорению a. Теперь система пяти сил $\overline{G}$, $\overline{P}$, $\overline{N}$, $\overline{F}$ и $\overline{P^{и}}$ является уравновешенной.

4. Выберем систему координат, как показано на рис. 255, и спроектируем все силы на оси x и y. Тогда получим два уравнения равновесия:

$$\Sigma X_i = 0; \quad P - G\sin\alpha - F - P^{и} = 0; \tag{1}$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad N - G\cos\alpha = 0. \tag{2}$$

5. Из уравнения (1)

$$P^{и} = P - G\sin\alpha - F,$$

но сила трения

$$F = fN.$$

Нормальную реакцию N найдем из уравнения (2):

$$N = G\cos\alpha.$$

Поэтому

$$P^{и} = P - G\sin\alpha - fG\cos\alpha = P - G(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Подставим в это уравнение числовые значения

$$P^{и} = 65 - 200(\sin 15° + 0{,}05\cdot\cos 15°) = 65 - 61{,}4 = 3{,}6 \text{ кГ}.$$

6. Из выражения $P^{и} = \frac{G}{g} a$ найдем ускорение a:

$$a = \frac{P^{и} g}{G} = \frac{3,6 \cdot 9,81}{200} = 0,18 \ м/сек^2.$$

7. Подставив значение ускорения a в выражение $t = \sqrt{\frac{2s}{2}}$, найдем время перемещения груза M по всей длине наклонной плоскости:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4}{0,18}} = 6,7 \ сек.$$

Рекомендуется повторить решение последней задачи в единицах СИ.

● **Задача 223-42.** При движении подъемника вертикально вверх его скорость изменяется согласно графику, показанному на рис. 256.

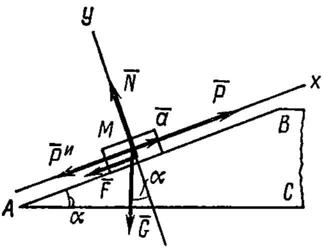


Рис. 255

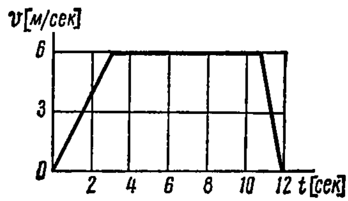


Рис. 256

Определить, как изменяется натяжение троса, при помощи которого передвигается подъемник. Масса подъемника 800 *кг*. На какую высоту поднимается подъемник за все время движения?

Ответ. $T_{0-3} = 9,45$ *кн*; $T_{3-11} = 7,85$ *кн*; $T_{11-12} = 3,05$ *кн*; $h = 60$ *м*.

● **Задача 224-42.** На наклонной плоскости длиной 2,54 *м* и высотой 0,7 *м* в верхней ее точке лежит небольшой по размерам груз массой 50 *кг*. Какую силу P, параллельную наклонной плоскости, нужно приложить к телу, чтобы стащить его вниз по всей длине наклонной плоскости равноускоренно за 5 *сек*? Коэффициент трения $f = 0,4$ считать постоянным и при покое, и при движении.

Ответ. $P = 64,5$ *н* $\approx 6,6$ *кГ*.

§ 43-10. Применение принципа Даламбера к решению задач на криволинейное движение точки

Как известно из кинематики, при движении материальной точки по криволинейной траектории ее ускорение $\bar{a}$ имеет два составляющих ускорения: $\bar{a}_t$—касательное (тангенциальное) и $\bar{a}_n$—нормальное (центростремительное).

Из динамики уже известно, что ускорение $\bar{a}$, приобретенное точкой, есть результат действия определенной системы сил. Равнодействующая $\overline{P}$ этой системы и ускорение $\overline{a}$ (рис. 257) находятся в зависимости, выражающей основной закон динамики точки:

$$\overline{P}=\overline{ma}.$$

Если уравновесить силу $\overline{P}$ приложением к точке силы инерции $\overline{P^и}$, а затем разложить ее на две составляющие $\overline{P_n^и}$ и $\overline{P_t^и}$ соответственно по нормали и по касательной, то эти составляющие будут находиться в зависимости от нормальных и касательных ускорений, определяемых такими векторными равенствами:

$$\overline{P_n^и}=-\overline{ma_n} \text{ и } \overline{P_t^и}=-\overline{ma_t}.$$

В задачах на криволинейное движение точки в основном рассматривается нормальная (центробежная) сила инерции $P_n^и$.

Числовое значение нормальной (центробежной) силы инерции можно выражать следующими формулами:

$$P_n^и=ma_n. \tag{1}$$

Заменим здесь $a_n=\frac{v^2}{\rho}$:

$$P_n^и=\frac{mv^2}{\rho}. \tag{2}$$

Если материальная точка, рассматриваемая в задаче, связана с каким-либо вращающимся телом, то скорость точки удобнее выражать через угловую скорость тела $v=\omega\rho$ и тогда

$$P_n^и=m\omega^2\rho. \tag{3}$$

Если в последней формуле выразить массу точки через ее вес $m=\frac{G}{g}$, а угловую скорость — в *об/мин* $\omega=\frac{\pi n}{30}$, то

$$P_n^и=\frac{G}{g}\frac{\pi^2 n^2}{900}\rho.$$

Здесь $\pi^2\approx g$ ($9,86\approx 9,81$), поэтому формуле можно придать такой вид

$$P_n^и\approx\frac{Gn^2\rho}{900}. \tag{4}$$

Эта формула дает приближенное значение центробежной силы инерции, но она очень удобна при решении многих задач.

Последовательность решения задач на криволинейное движение точки при помощи метода кинетостатики та же, что в предыдущем параграфе.

Задача 225-43. Шарик, масса которого $m=0,5$ *кг*, привязан к нити длиной 0,7 *м*. Нить вместе с шариком вращается в вертикальной плоскости, затрачивая на один оборот 1 *сек*. Определить натяжение шнура в моменты высшего и низшего положения шарика, считая, что скорость остается постоянной при перемещении по всей длине окружности.

Решение.

1. В соответствии с условием задачи считаем, что шарик движется равномерно по окружности, радиус которой равен длине нити ($r=0{,}7$ *м*). Следовательно, его скорость

$$v=\frac{2\pi r}{T}=\frac{2\pi 0{,}7}{1}\approx 4{,}4 \text{ м/сек}.$$

Оставаясь численно неизменной, скорость точки непрерывно изменяет направление, значит точка имеет нормальное ускорение

$$a_n=\frac{v^2}{r}=\frac{4{,}4^2}{0{,}7}=27{,}6 \text{ м/сек}^2.$$

2. Рассмотрим движущийся шарик в тот момент, когда он проходит через верхнюю точку траектории (рис. 258, *а*).

На шарик действуют две силы: его вес $\overline{G}$ и реакция нити $\overline{T}_1$, равная ее натяжению. Заметим, что обе силы направлены в одну сторону — к точке O подвеса, так как вес всегда направлен вертикально вниз. Реакция гибкой связи всегда направлена вдоль нити от тела, которое удерживается нитью. Шарик, привязанный к нити

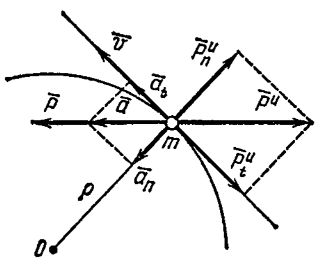


Рис. 257

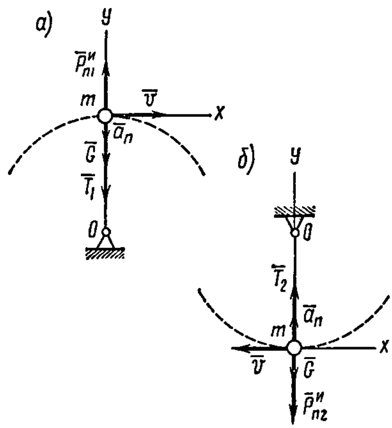


Рис. 258

и приведенный в движение, стремится согласно закону инерции двигаться равномерно и прямолинейно и поэтому он постоянно натягивает нить.

3. Добавим к силам $\overline{G}$ и $\overline{T}$ силу инерции $\overline{P}^и_{n_1}$, направив ее в сторону, противоположную ускорению a_n. Образовав таким образом уравновешенную систему сил, получим уравнение равновесия

$$\Sigma Y_i=0; \quad P^и_{n_1}-G-T_1=0.$$

4. Из уравнения равновесия находим T_1, учитывая, что $P^и_{n_1}=ma_n$ и $G=mg$:

$$T_1=P^и_{n_1}-G=m(a_n-g).$$

Подставим в это уравнение числовые значения:

$$T_1 = 0{,}5\,(27{,}6 - 9{,}81) = 0{,}5 \cdot 17{,}8 = 8{,}9 \ \textit{н}.$$

Таким образом, находясь в верхнем положении, двигающийся шарик натягивает нить силой 8,9 *н*, что соответствует $\approx 0{,}91$ *кГ*.

Отметим, что натяжение нити будет ослабевать при уменьшении скорости движения шарика. Следовательно, для того чтобы шарик при движении в вертикальной плоскости смог пройти верхнюю точку траектории с заданным радиусом кривизны ρ, он должен иметь в этой точке определенную скорость.

5. Рассмотрим теперь движущийся шарик в момент прохождения им нижней точки траектории (рис. 258, *б*).

В этом положении на шарик действуют также две силы: вес $\overline{G}$ и реакция нити $\overline{T}_2$, но в отличие от предыдущего случая эти силы, действуя вдоль одной прямой, направлены в противоположные стороны.

6. Добавим к силам $\overline{G}$ и $\overline{T}_2$ силу инерции $\overline{P}^и$ и составим уравнение равновесия:

$$\Sigma Y_i = 0; \quad T_2 - G - P^и_{n_2} = 0.$$

7. Находим T_2:

$$T_2 = G + P^и_{n_2} = m\,(g + a_n) =$$
$$= 0{,}5\,(9{,}81 + 27{,}6) = 18{,}7 \ \textit{н}$$

или приблизительно

$18{,}7\textit{н} \cdot 0{,}102$ *кГ/н* $\approx 1{,}91$ *кГ*.

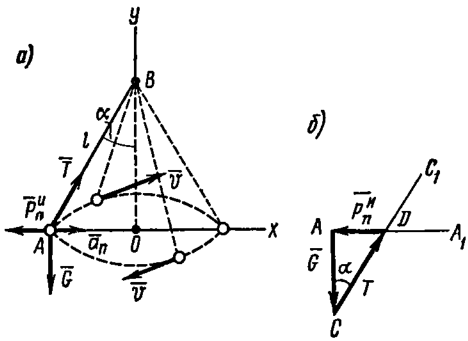


Рис. 259

Как видно, при прохождении через нижнюю точку траектории шарик создает наибольшее натяжение нити.

Задача 226-43. Шарик *А*, масса которого 2 *кг*, подвешен на нити длиной 60 *см*, закрепленной в точке *В*. Он равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости так, что нить описывает коническую поверхность и образует с вертикалью угол $\alpha = 30°$. Определить натяжение нити и скорость шарика.

Решение 1 — с применением метода проекций.

1. Если масса шарика $m = 2$ *кг*, то его вес $G = mg = 2 \cdot 9{,}81 = 19{,}62$ *н*. Кроме веса, на шарик действует натяжение (реакция $\overline{T}$) нити. Длина нити $l = 60$ *см* $= 0{,}6$ *м*.

Изобразим движущийся шарик с приложенными к нему силами $\overline{G}$ и $\overline{T}$ (рис. 259, *а*). Так как шарик движется по окружности равномерно, то он имеет только нормальное ускорение $\overline{a}_n$, направленное по радиусу $AO = r$ окружности. Применяя принцип Даламбера, для уравновешивания сил $\overline{T}$ и $\overline{G}$ приложим к шарику нормальную (центробежную) силу инерции $P^и_n$.

Изображая на рис. 259 силу инерции, необходимо учитывать, что она прикладывается к шарику условно. В действительности, сила инерции, как известно, приложена к двигающему телу или к связи. В данном случае нить служит для шарика и двигающим телом (через нить шарик приводится в движение), и связью (нить одновременно и ограничивает движение шарика). Поэтому сила инерции приложена к нити и отклоняет ее от вертикали.

2. Совместив оси координат с прямыми AO и BO и спроектировав силы на оси x и y, выведем уравнения равновесия:

$$T \sin\alpha - P_n^{и} = 0; \qquad (1)$$

$$T \cos\alpha - G = 0. \qquad (2)$$

3. Из уравнения (2)

$$T = \frac{G}{\cos\alpha} = \frac{19{,}62}{\cos 30^\circ} = 22{,}7 \ н.$$

4. Из уравнения (1)

$$P_n^{и} = T \sin\alpha = 22{,}7 \sin 30^\circ = 11{,}3 \ н.$$

Так как

$$P_n^{и} = \frac{mv^2}{r},$$

где v — искомая скорость шарика, а радиус окружности

$$r = l \sin\alpha = 0{,}6 \sin 30^\circ = 0{,}3 \ м,$$

то

$$v = \sqrt{\frac{P_n^{и} r}{m}} = \sqrt{\frac{11{,}3 \cdot 0{,}3}{2}} = 1{,}3 \ м/сек.$$

Таким образом, натяжение нити составляет 22,7 *н* при скорости движения шарика 1,3 *м/сек*.

Решение 2 — с применением графо-аналитического метода.

1. Этот вариант решения начинаем так же, как и предыдущий: изображаем шарик с действующими на него силами $G = 19{,}62$ *н* и искомой T, а затем добавляем силу инерции $\overline{P}_n^{и}$, направленную противоположно вектору $\overline{a}_n$ (см. рис. 259, *а*).

2. Силы $\overline{G}$, $\overline{T}$ и $\overline{P}_n^{и}$ образуют уравновешенную систему, поэтому многоугольник, построенный из векторов этих сил, должен быть замкнутым. Построение силового многоугольника начинаем с изображения вектора $\overline{AC} = \overline{G}$ (рис. 259, *б*). Затем из точек C и A проводим соответственно линии CC_1 и AA_1, параллельные направлениям сил $\overline{T}$ и $\overline{P}_n^{и}$ (см. рис. 259, *а*). Прямые CC_1 и AA_1 пересекаются в точке D и образуется векторный прямоугольный треугольник ACD, в котором $\angle ACD = \alpha = 30^\circ$.

3. Из прямоугольного треугольника ACD имеем:

$$T = \frac{G}{\cos\alpha} = \frac{19{,}62}{\cos 30^\circ} = 22{,}7 \ н,$$

$$P_n^{и} = G \operatorname{tg}\alpha = 19{,}62 \operatorname{tg} 30^\circ = 11{,}3 \ н.$$

И, наконец, так же как и в первом решении, находим скорость движения шарика по окружности

$$v=\sqrt{\frac{P_n^{и} r}{m}}=1,3\ м/сек.$$

Задача 227-43. Тонкий стержень AB, центр тяжести которого расположен на его оси O, вращается с частотой. $n=3000$ *об/мин.*

На сколько увеличится нагрузка на подшипник, в котором вращается стержень, если на одну из половинок стержня прикрепить массу $m=0,5$ *кг*, на расстоянии $\rho=0,1$ *м* от оси вращения (рис. 260, *а*).

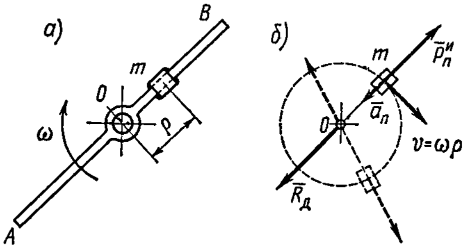


Рис. 260

Решение.

1. Стержень AB без прикрепленной к нему массы m создает нагрузку на подшипник, равную его собственному весу. Причем, если стержень хорошо центрирован, т. е. его центр тяжести расположен точно на оси подшипника, то нагрузка при вращении не изменится—она также будет равна весу стержня и будет действовать на подшипник вертикально вниз.

2. Если к стержню, по условию задачи, прикрепить массу m, то эта масса (примем ее за материальную точку), двигаясь по окружности радиусом $\rho=0,1$ *м*, начнет растягивать ту часть стержня, которая расположена между массой m и подшипником, силой, равной $\overline{P}_n^{и}$. Благодаря этому возникает дополнительная так называемая динамическая нагрузка на подшипник, уравновешиваемая его реакцией $\overline{R}_д$ (рис. 260, *б*).

3. Так как увеличение нагрузки равно возникшей силе инерции $P_n^{и}$, то и определим эту силу по формуле (3):

$$P_n^{и}=m\omega^2\rho,$$

где

$$m=0,5\ кг,\ \rho=0,1\ м\ и\ \omega=\frac{\pi n}{30}=\frac{3000\pi}{30}=314\ рад/сек.$$

Подставим эти значения в формулу (3):

$$P_n^{и}=0,5\cdot 314^2\cdot 0,1=4929,8\ н\approx 4,93\ кн.$$

Таким образом, в результате прикрепления массы m нагрузка на подшипник увеличивается почти на 5 *кн*, что соответствует почти 500 *кГ* (4929,8 *н*$\cdot$0,102 *кГ/н*$=$503 *кГ*).

4. Применив формулу (4) и положив в ней $G=0,5$ *кГ*, $n=3000$ *об/мин* и $\rho=0,1$ *м*, найдем силу инерции $P_n^{и}$, выраженную

в *кГ*:

$$P_n^{и} \approx \frac{Gn^2\rho}{900} = \frac{0{,}5 \cdot 3000^2 \cdot 0{,}1}{900} = 500 \text{ кГ}.$$

Результат, получившийся в этой задаче, подтверждает необходимость тщательной балансировки вращающихся деталей машин. Несбалансированные детали при вращении создают огромные дополнительные динамические нагрузки, которые приводят к быстрому износу подшипников.

● **Задача 228-43.** С какой скоростью должен ехать мотоциклист по арочному мостику, имеющему радиус 10 *м*, чтобы, проезжая через верхнюю точку мостика, он не производил на мостик давления? Как должна измениться эта скорость, если радиус мостика будет 20 *м*?

Ответ. $v_1 \approx 9{,}9$ *м/сек* $= 35{,}7$ *км/час*; $v_2 \approx 14$ *м/сек* $= 50{,}5$ *км/час*.

● **Задача 229-43.** Мотоциклист, масса которого вместе с мотоциклом составляет 250 *кг*, въезжает на горизонтальный мостик со скоростью 100 *км/час*. При движении мотоцикла мостик прогибается, образуя дугу, радиус которой 30 *м*. Определить максимальную силу N давления мотоцикла на мостик.

Ответ. $N = 8980$ *н* (916 *кГ*).

● **Задача 230-43.** Нить длиной 80 *см*, к которой привязан шарик весом 10 *н*, может выдержать максимальное натяжение 40 *н*. С какой скоростью может двигаться шарик по окружности в горизонтальной плоскости, чтобы нить, образуя коническую поверхность, натягивалась силой не более 20 *н*? При какой скорости шарика нить оборвется? Какие углы α_1 и α_2 нить будет образовывать с вертикалью?

Ответ. $v_1 = 3{,}42$ *м/сек*; $\alpha_1 \approx 60°$; $v_2 = 5{,}42$ *м/сек*; $\alpha_2 \approx 75°30'$,

ГЛАВА XI
РАБОТА И МОЩНОСТЬ. КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ

В этой главе рассмотрены задачи на определение работы, совершаемой постоянной силой, и развиваемой мощности при поступательном и вращательном движении тел (Е. М. Никитин, § 87—93).

§ 44-11. Работа и мощность при поступательном движении

Работа постоянной силы $\overline{P}$ на прямолинейном участке пути s, пройденном точкой приложения силы, определяется по формуле

$$A = Ps\cos\alpha, \tag{1}$$

где α—угол между направлением действия силы и направлением перемещения.

При $\alpha = 90°$

$$\cos\alpha = \cos 90° = 0 \text{ и } A = 0,$$

т. е. работа силы, действующей перпендикулярно к направлению перемещения, равна нулю.

Если направление действия силы совпадает с направлением перемещения, то $\alpha = 0$, поэтому $\cos\alpha = \cos 0 = 1$ и формула (1) упрощается;

$$A = Ps. \qquad (1')$$

На точку или на тело обычно действует не одна сила, а несколько, поэтому при решении задач целесообразно использовать теорему о работе равнодействующей системы сил (Е. М. Никитин, § 89):

$$A_R = \sum A_i, \qquad (2)$$

т. е. работа равнодействующей какой-либо системы сил на некотором пути равна алгебраической сумме работ всех сил этой системы на том же пути.

В частном случае, когда система сил уравновешена (тело движется равномерно и прямолинейно), равнодействующая системы сил равна нулю и, следовательно, $A_R = 0$. Поэтому при равномерном и прямолинейном движении точки или тела уравнение (2) принимает вид

$$\sum A_i = 0, \qquad (2')$$

т. е. алгебраическая сумма работ уравновешенной системы сил на некотором пути равна нулю.

При этом силы, работа которых положительна, называются движущими, а силы, работа которых отрицательна, называются силами сопротивления. Например, при движении тела вниз — сила тяжести — движущая сила и ее работа положительны, а при движении тела вверх его сила тяжести является силой сопротивления и работа силы тяжести при этом отрицательна (§ 93, Е. М. Никитин).

При решении задач в случаях, когда неизвестна сила P, работу которой можно определить, можно рекомендовать два приема (метода).

1. При помощи сил, заданных в условии задачи, определить силу P, а затем по формуле (1) или (1′) вычислить ее работу.

2. Не определяя непосредственно силы P, определить A_p — работу требуемой силы при помощи формул (2) и (2′), выражающих теорему о работе равнодействующей.

Мощность, развиваемая при работе постоянной силы, определяется по формуле

$$N = \frac{A}{t} \quad \text{или} \quad N = \frac{Ps\cos\alpha}{t}. \qquad (3)$$

Если при определении работы силы P скорость движения точки $v = \frac{s}{t}$ остается постоянной, то

$$N = Pv\cos\alpha. \qquad (3')$$

Если же скорость движения точки изменяется, то $\frac{s}{t} = v_{\text{ср}}$ — средняя скорость и тогда формула (2′) выражает среднюю мощность

$$N_{\text{ср}} = Pv_{\text{ср}} \cos \alpha.$$

Коэффициент полезного действия (к. п. д.) при совершении работы можно определить как отношение работ

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A}, \tag{4}$$

где $A_{\text{пол}}$ — полезная работа; A — вся произведенная работа, или как отношение соответствующих мощностей:

$$\eta = \frac{N_{\text{пол}}}{N}. \tag{4′}$$

Единицей работы в СИ служит 1 джоуль (*дж*) = 1 *н*·1 *м*, а в системе МКГСС — 1 *кГ*·*м* = 1 *кГ*·1 *м*.

Так как единицей длины в обеих системах служит 1 *м*, а 1 *кГ* = 9,81 *н* (или 1 *н* = 0,102 *кГ*), то

$$A\,(\text{дж}) = 9{,}81\,A\,(\text{кГ}\cdot\text{м})$$

или

$$A\,(\text{кГ}\cdot\text{м}) = 0{,}102 A\,(\text{дж}).$$

Единицей мощности в СИ служит 1 ватт $(\text{вт}) = \frac{1\ \text{дж}}{1\ \text{сек}} = 1\frac{\text{дж}}{\text{сек}}$, а в системе МКГСС — 1*кГ*·*м*/*сек*.

При использовании системы МКГСС мощность обычно измеряют в лошадиных силах (*л. с.*), причем

$$1\ \text{л. с.} = 75\frac{\text{кГ}\cdot\text{м}}{\text{сек}}.$$

При использовании СИ мощность измеряют в киловаттах (*квт*): 1 *квт* = 1,36 *л. с.*

Для перехода от одних единиц к другим следует пользоваться формулами

$$N\,(\text{квт}) = 1{,}36 N\,(\text{л. с.})$$

и

$$N\,(\text{л. с.}) = 0{,}736 N\,(\text{квт}).$$

Задача 231-44. Какую работу производит человек, передвигая по горизонтальному полу на расстояние 4 *м* горизонтально направленным усилием ящик массой 50 *кг*? Коэффициент трения $f = 0{,}4$.

Решение 1 — методом определения движущей силы P.

1. На ящик, поставленный на горизонтальный пол, действуют две силы: $\bar{G}$ и реакция пола $\bar{N}$ (рис. 261). Двигая ящик, человек прикладывает к нему силу $\bar{P}$, и тогда возникает сила трения $\bar{F}$.

При равномерном передвижении ящика четыре силы образуют уравновешенную систему и поэтому, спроектировав их на горизонтальную и вертикальную оси, найдем, что $P=F$ и $N=G$.

3. Работа, которую производит человек в данном случае, как видно, состоит в преодолении силы трения ($P=F$). Но так как

$$N=G, \text{ а } G=mg\,(н),$$

то

$$P=fmg=0{,}4\cdot 50\cdot 9{,}81=196{,}2 \; н.$$

Поэтому

$$A=Ps=196{,}2\cdot 4=784{,}8 \; дж.$$

4. Если решить задачу в системе МКГСС, то

$$P=F=fN=fG=0{,}4\cdot 50=20 \; кГ$$

и

$$A=Ps=20\cdot 4=80 \; кГ\cdot м.$$

Легко убедиться, что оба ответа выражают одну и ту же работу:

$$80 \; кГ\cdot м\cdot 9{,}81\frac{дж}{кГ\cdot м}=785 \; дж.$$

Решение 2 — с применением теоремы о работе равнодействующей.

1. Как показано в первом решении, на ящик при его перемещении действуют четыре силы: сила тяжести $\bar{G}$, реакция пола $\bar{N}$, движущая сила $\bar{P}$ и сила трения $\bar{F}$. Ящик движется равномерно

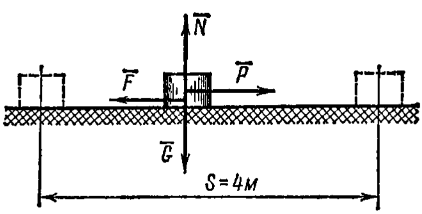


Рис. 261

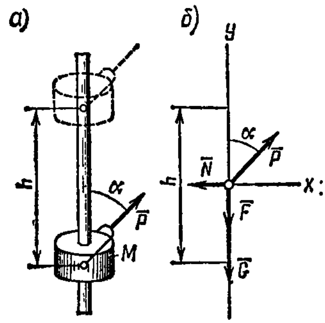


Рис. 262

и прямолинейно, поэтому эти четыре силы образуют уравновешенную систему. Следовательно, применив формулу (2′), получим уравнение

$$A_G+A_N+A_P+A_F=0.$$

2. В этом уравнении работа силы тяжести $A_G=0$, так как сила $\bar{G}$ действует перпендикулярно к направлению перемещения; по этой же причине работа реакции N $A_N=0$.

Таким образом, искомая работа при перемещении ящика

$$A_P = -A_F. \tag{a}$$

3. Работу силы трения A_F найдем по формуле (1), учитывая, что в этом случае $\alpha = 180°$:

$$A_F = Fs\cos 180° = -Fs.$$

Подставим значение A_F в уравнение (а): $A_P = Fs$.

Так как $F = Nf$ и $N = G$, то

$$A_P = Fs = Nfs = Gfs = mgfs$$

или

$$A_P = 50 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}4 \cdot 4 = 784{,}8 \text{ дж}.$$

Задача 232-44. На тело M массой $m = 40$ *кг*, могущее перемещаться вдоль вертикального направляющего бруска, действует некоторая сила $\bar{P}$, постоянно направленная под углом $\alpha = 18°$ к вертикали. Под действием этой силы тело поднимается равномерно на высоту $h = 4$ *м* (рис. 262, *а*); коэффициент трения при скольжении тела вдоль направляющего бруса $f = 0{,}2$. Определить произведенную работу и коэффициент полезного действия.

Решение 1.

1. При равномерном перемещении вдоль бруска вверх на тело M действуют четыре силы: сила тяжести $\bar{G}$, сила трения $\bar{F}$, нормальная реакция $\bar{N}$, равная давлению тела на брусок, и движущая сила $\bar{P}$ (рис. 262, *б*).

2. Сила P производит работу

$$A = Ph\cos\alpha.$$

Но чтобы определить ее, нужно сначала найти силу P.

3. Расположив оси координат, как показано на рис. 253, *б*, выведем уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0; \qquad P\sin\alpha - N = 0; \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad P\cos\alpha - F - G = 0, \tag{2}$$

а также уравнение, выражающее основной закон трения:

$$F = fN. \tag{3}$$

Из уравнения (1)

$$N = P\sin\alpha,$$

поэтому уравнение (3) примет вид

$$F = fP\sin\alpha.$$

Подставим полученное значение силы трения в уравнение (2):

$$P\cos\alpha - fP\sin\alpha - G = 0.$$

Отсюда

$$P = \frac{G}{\cos\alpha - f\sin\alpha}. \tag{4}$$

4. Подставим в последнее выражение числовое значение силы тяжести G в единицах СИ ($G = mg$):

$$P = \frac{40 \cdot 9{,}81}{\cos 18° - 0{,}2 \sin 18°} = \frac{40 \cdot 9{,}81}{0{,}889} = 440 \ \textit{н}.$$

Тогда работа, произведенная силой,

$$A = Ph\cos\alpha = 440 \cdot 4\cos 18° = 1670 \ \textit{дж}.$$

5. Если подставить в уравнение (4) силу тяжести G, выраженную в технических единицах ($G = 40$ *кГ*), то

$$P = \frac{40}{\cos 18° - 0{,}2 \sin 18°} \approx 45 \ \textit{кГ}.$$

Работа этой силы в единицах МКГСС получит такое значение:

$$A = Ph\cos\alpha = 45 \cdot 4 \cos 18° = 171 \ \textit{кГ} \cdot \textit{м}.$$

6. Определим коэффициент полезного действия:

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A}.$$

Вся произведенная работа $A = 1680$ *дж*, а полезная работа состоит в том, что тело весом $G = mg$ поднято на высоту h, т. е.

$$A_{\text{пол}} = Gh = 40 \cdot 9{,}81 \cdot 4 = 1570 \ \textit{дж}$$

и, следовательно,

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A} = \frac{1570}{1680} = 0{,}934.$$

Умножив найденное значение $\eta = 0{,}934$ на 100, выразим к. п. д. в процентах: $\eta = 93{,}4\%$.

Примечание. Можно не определять отдельно числовое значение силы P (см. п. 4 и 5), а получить предварительно в общем виде выражение работы для данного случая:

$$A = Ph\cos\alpha = \frac{G}{\cos\alpha - f\sin\alpha} h\cos\alpha$$

и после деления числителя и знаменателя на $\cos\alpha$:

$$A = \frac{Gh}{1 - f\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Но иногда в технических расчетах числовые значения действующих сил необходимы для решения каких-либо других вопросов.

Если воспользоваться приведенным выше выражением работы, то выражение к. п. д. для данной задачи получит такой вид:

$$\eta=\frac{A_{\text{пол}}}{A}=\frac{Gh}{\dfrac{Gh}{1-f\operatorname{tg}\alpha}}=1-f\operatorname{tg}\alpha.$$

Таким образом, коэффициент полезного действия при передвижении тела M по вертикальному направляющему бруску зависит от коэффициента трения f и угла α, определяющего направление действия силы относительно вертикального бруска.

Если заменить $f=\operatorname{tg}\varphi_0$, где φ_0—угол трения (см. § 15-3), то

$$\eta=1-\operatorname{tg}\varphi_0\operatorname{tg}\alpha.$$

Решение 2.

1. В первом решении выяснено, что на тело M действует система четырех сил: $\overline{G}$, $\overline{F}$, $\overline{N}$, $\overline{P}$ (см. рис. 262, *б*).

2. Так как тело движется по бруску равномерно, система этих сил уравновешена и, следовательно, алгебраическая сумма их работ равна нулю:

$$A_G+A_F+A_N+A_P=0.$$

Отсюда работа силы P:

$$A_P=-A_G-A_F-A_N. \qquad \text{(а)}$$

3. Тело M движется вертикально вверх и поднимается на высоту h, поэтому работа силы N, направленной перпендикулярно к направлению перемещения:

$$A_N=Nh\cos 90°=0;$$

работа силы тяжести $\overline{G}$, направленной вертикально вниз,

$$A_G=Gh\cos 180°=-Gh;$$

работа силы трения F, также направленной вниз,

$$A_F=Fh\cos 180°=-Fh.$$

Известно, что $F=Nf$. Спроектировав на ось x (см. рис. 262, *б*) силы, приложенные к телу M, найдем, что $N=G\sin\alpha$. Поэтому $F=Gf\sin\alpha$ и выражение работы силы трения примет вид

$$A_F=-Gfh\sin\alpha.$$

4. Подставим выражения работ A_G, A_F и A_N в уравнение (а)

$$A_P=Gh+Gfh\sin\alpha=Gh(1+f\sin\alpha).$$

5. Вычислим работу в единицах СИ. Тогда

$$G=mg=40\cdot 9{,}81\ \textit{н},$$

поэтому

$$A_P=40\cdot 9{,}81\cdot 4\,(1+0{,}2\sin 18°)=1670\ \textit{дж}.$$

Таким образом, вся работа, произведенная при подъеме тела M на высоту $h=4$ *м* составляет 1670 *дж*. К. п. д. при выполнении этой работы определяем так же, как и в первом решении.

Задача 233-44. Какой мощности электродвигатель необходимо поставить на лебедку, чтобы она могла поднимать клеть со строительными материалами общей массой $m=1200$ *кг* на высоту 20 *м* за 30 *сек*. Коэффициент полезного действия лебедки $\eta=0,72$.

Решение (в единицах СИ).

1. Полезная мощность, развиваемая лебедкой при подъеме,

$$N_{\text{пол}}=\frac{A_{\text{пол}}}{t}=\frac{Gh}{t}=\frac{mgh}{t}.$$

2. Мощность двигателя N найдем из выражения к. п. д. $\eta=\frac{N_{\text{пол}}}{N}$

$$N=\frac{N_{\text{пол}}}{\eta}.$$

3. Таким образом, мощность двигателя, необходимая для лебедки,

$$N=\frac{N_{\text{пол}}}{\eta}=\frac{mgh}{\eta t}=\frac{1200\cdot 9,81\cdot 20}{0,72\cdot 30}=10\,900\ \textit{вт}=10,9\ \textit{квт}.$$

Двигатель должен иметь мощность не менее 10,9 *квт*.

Рекомендуется решить самостоятельно эту задачу в единицах МКГСС и найти мощность двигателя, выраженную в *л. с.*

Задача 234-44. Какую работу необходимо произвести, чтобы равномерно передвинуть в горизонтальном направлении на расстояние s клинчатый ползун *1* вдоль направляющих *2*? Вес ползуна G, угол заострения ползуна и направляющих α (рис. 263, *а*), коэффициент трения между ползуном и направляющими f.

Решение.

1. На клинчатый ползун, когда он находится в горизонтально расположенных направляющих, действуют три силы: вес ползуна $\overline{G}$ и две реакции направляющих $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ (рис. 263, *в*), действующих на ползун перпендикулярно к боковым плоскостям (щекам) ползуна.

Для приведения ползуна в движение к нему нужно приложить параллельно направляющим силу $\overline{P}$ и тогда возникнут еще две силы—силы трения, действующие вдоль обеих боковых плоскостей ползуна (см. рис. 263, *б*—здесь вектор $\overline{R}_н$ изображает направленную вертикально вверх геометрическую сумму нормальных реакций $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$).

Таким образом, на ползун при его движении действуют всего шесть сил: $\overline{G}$, $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ и $\overline{P}$.

В данном случае нормальные реакции N_1 и N_2 равны между собой, следовательно, равны и силы трения F_1 и F_2, поэтому $N_1=N_2=N$ и $F_1=F_2=F$.

2. Работа при перемещении ползуна на расстояние s

$$A=Ps,$$

но предварительно найдем числовое значение движущей силы P.

3. Спроектировав приложенные к ползуну силы на ось x (см. рис. 263, *б*), получим $P=2F$.

Но $F=fN$, поэтому $P=2fN$. (а)

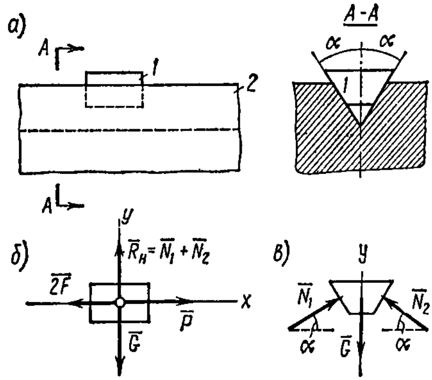


Рис. 263

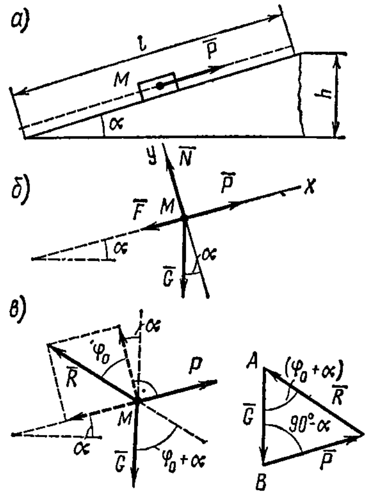


Рис. 264

Нормальную реакцию N найдем из уравнения проекций на ось y (см. рис. 263, *в*):

$$2N\sin\alpha - G = 0$$

и

$$N=\frac{G}{2\sin\alpha}.$$

Подставляем найденное значение N в (а):

$$P=\frac{fG}{\sin\alpha}. \qquad (б)$$

4. Следовательно, работа при передвижении клинчатого ползуна на расстояние s

$$A=Ps=\frac{f}{\sin\alpha}Gs.$$

Например, при $G=20$ *кГ*, $s=1{,}5$ *м*, $f=0{,}2$ и $\alpha=45°$

$$A=\frac{0{,}2}{\sin 45°}20\cdot 1{,}5=0{,}283\cdot 20\cdot 1{,}5=8{,}5 \text{ кГ}\cdot\text{м}.$$

Примечание. Входящая в формулу (б) величина $\frac{f}{\sin\alpha}$ называется коэффициентом трения клинчатого ползуна. При уменьшении угла α (при большем заострении ползуна и направляющих) коэффициент трения клинчатого ползуна резко увеличивается.

Решение задачи вторым способом с применением теоремы о работе равнодействующей силы рекомендуется выполнить самостоятельно.

Задача 235-44. Тело M весом $G = 50$ *кГ* равномерно перемещается вверх по наклонной плоскости, длина которой $l = 4$ *м* и угол подъема $\alpha = 20°$ (рис. 264, *а*). Определить работу, производимую силой, направленной параллельно наклонной плоскости, и коэффициент полезного действия наклонной плоскости. Коэффициент трения $f = 0,2$.

Решение. 1.

При движении тела M (примем его за материальную точку) вверх по наклонной плоскости на него действуют четыре силы: вес $\overline{G}$, нормальная реакция наклонной плоскости $\overline{N}$, движущая сила $\overline{P}$ и сила трения $\overline{F}$ (рис. 264, *б*).

2. Работа силы P при перемещении тела по длине наклонной плоскости

$$A = Pl.$$

3. Найдем необходимую для перемещения тела M силу P.

Расположив оси координат, как показано на рис. 264, *б*, составим два уравнения равновесия:

$$\Sigma X_i = 0; \quad P - G\sin\alpha - F = 0; \tag{1}$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad N - G\cos\alpha = 0. \tag{2}$$

Дополним эти уравнения третьим уравнением, выражающим основной закон трения:

$$F = fN. \tag{3}$$

Из уравнения (1)

$$P = G\sin\alpha + F.$$

Вместо силы трения F подставим ее значение из уравнения (3):

$$P = G\sin\alpha + fN,$$

а вместо нормальной реакции N подставим ее значение из уравнения (2):

$$P = G\sin\alpha + fG\cos\alpha = G(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

4. Следовательно, работа силы P

$$A = Gl(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

После подстановки в это уравнение числовых значений

$$A = 50 \cdot 4(\sin 20° + 0,2\cos 20°) = 106 \text{ кГ}\cdot\text{м}.$$

5. Находим к. п. д. наклонной плоскости:

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A}.$$

Полезная работа состоит в подъеме тела весом G на высоту $h = l\sin 20°$, поэтому

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A} = \frac{Gl\sin 20°}{A} = \frac{50 \cdot 4\sin 20°}{106} = 0,644.$$

Решение 2.

1. Можно считать, что на тело M действуют не четыре, а три силы: $\overline{G}$—вес тела, движущая сила $\overline{P}$ и полная реакция поверхности реальной связи $\overline{R}$, равная геометрической сумме сил $\overline{N}$ и $\overline{F}$ (рис. 264, *в*).

Реакция реальной связи $\overline{R}$, как известно (§ 15-3), при движении отклоняется от нормали к поверхности связи на величину угла трения φ_0, причем $\operatorname{tg}\varphi_0 = f$, где f—коэффициент трения.

2. Так как на тело M действуют только три силы и они образуют уравновешенную систему (тело M, принятое за материальную точку, движется равномерно и прямолинейно), силовой треугольник ABC, построенный из этих сил, является замкнутым.

3. По рис. 264, *в* можно определить, что в силовом треугольнике ABC угол $B = 90° - \alpha°$, угол $A = \varphi_0° + \alpha°$. Следовательно, $\angle C = 180° - (\angle B° + \angle A°) = 180° - (90° - \alpha° + \varphi_0° + \alpha°) = 90° - \varphi_0°$.

4. Применим к $\triangle ABC$ теорему синусов:

$$\frac{P}{\sin(\varphi_0° + \alpha°)} = \frac{G}{\sin(90° - \varphi_0°)}.$$

Так как

$$\sin(90° - \varphi_0°) = \cos\varphi_0°,$$

$$P = G\frac{\sin(\varphi_0° + \alpha°)}{\cos\varphi_0°}.$$

5. Работа силы P

$$A = Gl\,\frac{\sin(\varphi_0° + \alpha°)}{\cos\varphi_0°}.$$

Из равенства $\operatorname{tg}\varphi_0° = f = 0{,}2$ (см. п. 1) находим, что $\varphi_0° = 11°20'$. Подставим теперь в выражение работы числовые значения и определим, что

$$A = 50\cdot 4\,\frac{\sin(11°20' + 20°)}{\cos 11°20'} = 106\ \text{кГ}\cdot\text{м}.$$

6. Находим к. п. д. наклонной плоскости:

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A} = Gl\sin\alpha : Gl\frac{\sin(\varphi_0° + \alpha°)}{\cos\varphi_0°} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\varphi_0°}{\sin(\varphi_0° + \alpha°)}.$$

Развернем знаменатель получившейся дроби:

$$\eta = \frac{\sin\alpha°\cdot\cos\varphi_0°}{\sin\varphi_0°\cdot\cos\alpha° + \cos\varphi_0°\cdot\sin\alpha°}.$$

Числитель и знаменатель разделим на произведение $\cos\alpha°\cdot\cos\varphi_0°$ и получим окончательный вид формулы к. п. д. наклонной плоскости при действии силы P, параллельной этой плоскости

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha°}{\operatorname{tg}\varphi_0° + \operatorname{tg}\alpha_0°}. \qquad (1)$$

Подставив сюда значение угла $\alpha = 20°$ ($\operatorname{tg} 20° = 0,364$) и учтя, что $\operatorname{tg} \mathring{\varphi}_0 = 0,2$, получим

$$\eta = \frac{0,364}{0,364 + 0,2} = 0,645.$$

Примечания: 1. Как видно, результаты обоих решений совпадают, хотя получившиеся формулы для силы P внешне отличаются друг от друга.

Формулу для P из первого решения легко преобразовать и привести к результату второго решения:

$$P = G(\sin\alpha° + f\cos\alpha°) = G(\sin\alpha° + \operatorname{tg}\mathring{\varphi}_0 \cos\alpha°) =$$
$$= G\left(\sin\alpha° + \frac{\sin\mathring{\varphi}_0}{\cos\mathring{\varphi}_0}\cos\alpha°\right) = G\frac{\sin\alpha°\cos\mathring{\varphi}_0 + \sin\mathring{\varphi}_0\cos\alpha°}{\cos\mathring{\varphi}_0}$$

и

$$P = G\frac{\sin(\alpha° + \mathring{\varphi}_0)}{\cos\mathring{\varphi}_0}.$$

2. Выражение (1), полученное во втором решении, показывает, что к. п. д. наклонной плоскости зависит лишь от коэффициента трения $f = \operatorname{tg}\mathring{\varphi}_0$, т. е. от материала и состояния трущихся поверхностей тела M и угла подъема наклонной плоскости.

● **Задача 236-44.** Определить, какую работу необходимо произвести, чтобы усилием, параллельным наклонной плоскости, равномерно переместить тело M, описанное в предыдущей задаче, вниз по наклонной плоскости ($G = 50$ *кГ*, $l = 4$ *м*; $\alpha = 20°$; $f = 0,2$).

Определить также коэффициент полезного действия наклонной плоскости при перемещении тела вниз.

Указание. Решить задачу сначала в общем виде, а затем подставить числовые значения.

При определении к. п. д. необходимо иметь в виду, что в данном случае вся работа совершается вследствие перемещения тела вниз и $A = Gh$. Эта работа расходуется на преодоление вредного (силы трения) и полезного (силы $\overline{P}$) сопротивлений. Полезная часть работы $A_{пол} = Pl$.

Ответ. —30,7 *кГ·м**; 45%.

Задача 237-44. Тело M весом $G = 50$ *кГ* равномерно перемещается вверх по наклонной плоскости $l = 4$ *м* и с углом подъема $\alpha = 20°$. Определить работу, произведенную силой, направленной параллельно основанию наклонной плоскости (рис. 265, *а*), также коэффициент полезного действия наклонной плоскости. Коэффициент трения $f = 0,4$.

---

* Работа силы $\overline{P}$ в результате вычислений получается отрицательной, так как плоскость несамотормозящаяся (угол подъема $\alpha = 20°$, а угол трения $\varphi_0 = 11°20'$, следовательно, $\varphi_0 < \alpha$, см. задачу 98-15) и поэтому сила $\overline{P}$ направлена вверх, т. е. в сторону, противоположную движению. Без силы $\overline{P}$ тело M скользит вниз равноускоренно.

Решение.

1. Приняв тело M за материальную точку, изобразим на рис. 265, *б* (слева) три действующие на нее силы: вес $\overline{G}$, движущую силу $\overline{P}$ и полную реакцию $\overline{R}$ наклонной плоскости, которая отклонена на угол φ_0 (угол трения) от нормали к поверхности наклонной плоскости.

2. При равномерном движении тела по наклонной плоскости эти три силы образуют уравновешенную систему, и поэтому треугольник ABC, построенный из этих сил, является замкнутым (см. рис. 265, *б*—справа).

3. Силовой треугольник ABC получается в данном случае прямоугольным, так как вектор $\overline{G}$ перпендикулярен к вектору $\overline{P}$; угол $A=\varphi_0^\circ+\alpha^\circ$, поэтому числовое значение движущей силы

$$P=G\,\mathrm{tg}\,(\varphi_0^\circ+\alpha^\circ).$$

4. Работа силы P

$$A=Pl\cos\alpha=Gl\,\mathrm{tg}\,(\varphi_0^\circ+\alpha^\circ)\cos\alpha^\circ.$$

5. Подставим сюда числовые значения: $G=50\,\kappa\Gamma$; $l=4\,\text{м}$; $\alpha=20^\circ$ и $\varphi_0=21^\circ50'$ (так как $\mathrm{tg}\,\varphi_0=f=0{,}4$). Найдем

$$A=50\cdot 4\,\mathrm{tg}\,41^\circ50'\cos 20^\circ=168\ \kappa\Gamma\cdot\text{м}.$$

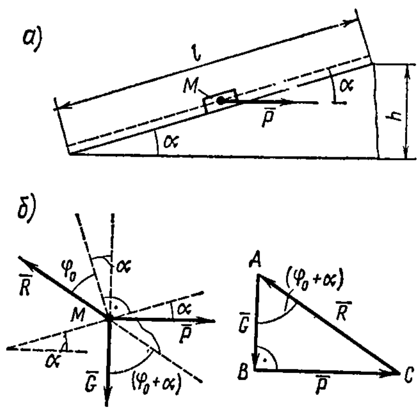


Рис. 265

Как видно, по сравнению с задачей 235-44 работа получается несколько больше (на 24 $\kappa\Gamma\cdot\text{м}$), потому что сила P, действующая параллельно основанию наклонной плоскости, прижимает тело к наклонной плоскости, при этом увеличивается сила нормального давления тела N, а вместе с ним и сила трения.

6. Определим коэффициент полезного действия. На основании изложенного, к. п. д. в данном случае уменьшится:

$$\eta=\frac{A_{\text{пол}}}{A}=\frac{Gh}{Pl\cos\alpha}=\frac{Gl\sin\alpha}{Gl\,\mathrm{tg}\,(\varphi_0^\circ+\alpha^\circ)\cos\alpha^\circ}.$$

Так как $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha$, окончательно получаем формулу к. п. д. наклонной плоскости при горизонтальном действии силы P:

$$\eta=\frac{\mathrm{tg}\,20^\circ}{\mathrm{tg}\,(\varphi_0+\alpha)}. \qquad \text{(II)}$$

Подставим сюда значения углов:

$$\eta=\frac{\mathrm{tg}\,20^\circ}{\mathrm{tg}\,41^\circ50'}=0{,}407.$$

По сравнению с к. п. д., полученным в задаче 235-44, к. п. д. наклонной плоскости в этой задаче уменьшается.

Задача 238-44. Определить произведенную работу и к. п. д. при равномерном передвижении клинчатого ползуна *1* массой 100 *кг* на расстояние 2,5 *м* по направляющим *2*, наклоненным к горизонту под углом 15° (рис. 266). Движущая сила действует параллельно наклонным направляющим; угол заострения ползуна $\alpha = 60°$; коэффициент трения $f = 0{,}35$.

Ответ. 1590 *дж* (162,5 *кГ·м*); 39,8%.

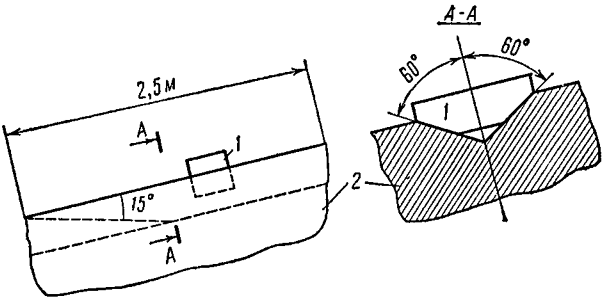


Рис. 266

Задача 239-44. Определить работу, которую необходимо произвести, чтобы перекатить каток массой 50 *кГ* на расстояние 4 *м* по горизонтальной негладкой поверхности. Считать, что сила, двигающая каток, приложена к оси катка и горизонтальна (рис. 267, *а*). Диаметр катка 20 *см*; коэффициент трения $f_к = 0{,}5$ *см*.

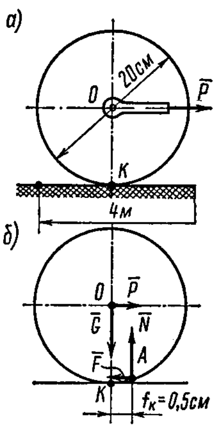


Рис. 267

Решение.

1. Как известно из кинематики, движение катящегося катка называется плоскопараллельным и составляется из двух движений — поступательного и вращательного.

Ось катка передвигается поступательно, поэтому работу силы P, приложенной к оси, можно определить по формуле $A = Ps$, но предварительно нужно найти числовое значение силы P.

2. На каток в неподвижном состоянии действуют две силы: вес катка $\overline{G}$ и реакция $\overline{N}$ горизонтальной поверхности, приложения к катку в точке K (геометрическая точка касания катка с поверхностью). При качении на каток действуют уже четыре силы (рис. 267, *б*): $\overline{G}$ — вес катка, $\overline{P}$ — движущая сила и две составляющие $\overline{N}$ и $\overline{F}$ полной реакции поверхности, место приложения которой перемещается из точки K в точку A — вперед по ходу катка (Е. М. Никитин, § 38).

3. Если спроектировать все силы на вертикальную и горизонтальную оси, то $N = G$ и $P = F$, т. е. на катящийся каток дейст-

вуют две пары сил: катящая пара ($\overline{P}$; $\overline{F}$) с плечом $OK = \frac{d}{2} = \frac{20\ см}{2} = 10\ см$ и пара сопротивления ($\overline{G}$; $\overline{N}$) с плечом $KA = f_к = 0{,}5\ см$. При равномерном перекатывании катка моменты этих пар численно равны между собой, т. е. $Pd/2 = Gf_к$.

Отсюда находим силу P, выразив силу тяжести в $кГ$ ($G = 50\ кГ$)

$$P = \frac{Gf_к}{\frac{d}{2}} = \frac{50 \cdot 0{,}5}{10} = 2.5\ кГ.$$

4. Таким образом, работа, произведенная при перемещении катка,

$$A = Ps = 2{,}5 \cdot 4 = 10\ кГ \cdot м.$$

Рекомендуется сопоставить этот результат с результатом полученным в задаче 231-44.

● **Задача 240-44.** Определить какую работу необходимо произвести, чтобы каток, рассмотренный в предыдущей задаче (масса катка 50 *кг*, диаметр 20 *см*, коэффициент трения качения $f_к = 0{,}5\ см$), закатить вверх по наклонной плоскости длиной 4 *м* и углом подъема $\alpha = 15°$, действуя силой, приложенной к оси катка и направленной а) параллельно наклонной плоскости и б) параллельно основанию наклонной плоскости.

Определить также в обоих случаях к. п. д.

Указание. Рисунки к обоим вариантам задачи выполнить самостоятельно, изобразить на них все действующие в том и другом случае на каток силы. Для определения силы P необходимо составить два уравнения равновесия: уравнение моментов всех сил относительно точки K — геометрической точки касания катка с плоскостью — и уравнение проекций на ось, перпендикулярную к плоскости.

Коэффициент полезного действия определить по формуле (4), приведенной в начале параграфа.

Ответ. а) 61,5 $кГ \cdot м$; 84,5%; б) 62,3 $кГ \cdot м$; 83,5%.

§ 45-11. Работа и мощность при вращательном движении

При вращательном движении тела движущим фактором является пара сил. Рассмотрим диск *1*, могущий свободно вращаться вокруг оси *2* (рис. 268). Если к точке A на ободе диска приложить силу $\overline{P}$ (направим ее вдоль касательной к боковой поверхности диска; направленная таким образом сила называется окружным усилием), то диск станет вращаться. Вращение диска обусловлено появлением пары сил. Сила $\overline{P}$, действуя на диск, прижимает его в точке O к оси (сила $\overline{P}_{давл}$ на рис. 268, приложенная к оси *2*) и возникает реакция оси (сила $\overline{P}_{ркц}$ на рис. 268), приложенная так же, как и сила $\overline{P}$, к диску. Так как все эти силы численно равны между собой и линии их действия параллельны, то силы $\overline{P}$ и $\overline{P}_{ркц}$ образуют пару сил, которая и приводит диск во вращение.

Как известно, вращающее действие пары сил измеряется ее моментом, но момент пары сил равен произведению модуля любой из сил на плечо пары, поэтому вращающий момент

$$M_{\text{вр}} = M_{\text{пары}} = M_O(\overline{P}) = P \cdot OA.$$

Единицей момента пары сил, а также момента силы относительно точки или относительно оси является 1 *н·м* (ньютон-метр) в СИ и 1 *кГм* (килограмм-сила-метр) в системе МКГСС. Но при этом не следует смешивать эти единицы с единицами работы (1 *н·м* = 1 *дж* или 1 *кГ·м*), имеющими ту же размерность.

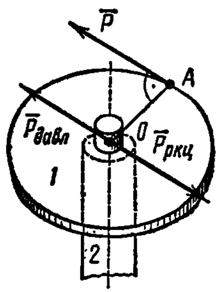


Рис. 268

Работу при вращательном движении производят пары сил.

Величина работы пары сил измеряется произведением момента пары (вращающего момента) на угол поворота, выраженный в радианах:

$$A = M_{\text{вр}}\varphi. \tag{1}$$

Таким образом, чтобы получить единицу работы, например, 1 *дж* = 1 *н·м*, необходимо единицу момента 1 *н·м* умножить на 1 *рад*. Но так как радиан — безразмерная величина

$$[радиан] = \left[\frac{длина\ дуги}{радиус}\right] = \left[\frac{м}{м}\right] = [1],$$

то

$$[дж] = [н \cdot м] \cdot [1] = [н \cdot м].$$

Мощность при вращательном движении

$$N = \frac{A}{t} = \frac{M_{\text{вр}}\varphi}{t}. \tag{2}$$

Если тело вращается с постоянной угловой скоростью, то, заменив в формуле (2) $\frac{\varphi}{t} = \omega$, получим

$$N = M_{\text{вр}}\omega. \tag{2'}$$

Мощность того или иного двигателя — величина постоянная, поэтому

$$M_{\text{вр}} = \frac{N}{\omega}, \tag{3}$$

т. е. *вращающий момент двигателя обратно пропорционален угловой скорости его вала.*

Это означает, что использование мощности двигателя при различных угловых скоростях позволяет изменять создаваемый им вращающий момент. Используя мощность двигателя при малой угловой скорости, можно получить большой вращающий момент.

Так как угловая скорость вращающейся части двигателя (ротора электродвигателя, коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания и т. п.) при его работе практически не изменяется, то между двигателем и рабочей машиной устанавливается какой-либо механизм (редуктор, коробка скоростей и т. п.), могущий передавать мощность двигателя при различных угловых скоростях.

Поэтому формула (3), выражающая зависимость вращающего момента от передаваемой мощности и угловой скорости (Е. М. Никитин, § 93), имеет очень важное значение.

Используя при решении задач эту зависимость, необходимо иметь в виду следующее. Формула (3) принимается для решения задач, если мощность N задана в ваттах, а угловая скорость — ω — в *рад/сек* [размерность (1/*сек*)], тогда вращающий момент $M_{вр}$ получится в *н·м*.

Соответственно, если мощность N подставлена в *квт* (киловаттах), то вращающий момент получится в *к·н·м* (килоньютонметрах).

Если передаваемая мощность выражена в *л. с.* (1 *л. с.* = = 75 *кГ·м/сек*), угловая скорость — в *об/мин* $\left(n \text{ об/мин} = \frac{30\omega}{\pi}\right)$, а вращающий момент нужно получить в *кГ·м*, то необходимо воспользоваться формулой

$$M_{вр}\,(кГ\cdot м) = 716{,}2\,\frac{N\,(л.\,с.)}{n\,(об/мин)}. \tag{4}$$

Если передаваемая мощность выражена в *квт*, угловая скорость — в *об/мин*, а вращающий момент нужно получить в *кГ·м*, то необходимо воспользоваться формулой

$$M_{вр}\,(кГ\cdot м) = 973{,}8\,\frac{N\,(квт)}{n\,(об/мин)}. \tag{5}$$

Задача 241-45. Для определения мощности электродвигателя через его шкив перекинута тормозная лента (рис. 269, *а*). Один конец ленты удерживается динамометром, а к другому концу прикреплена двухкилограммовая гиря. После запуска двигателя при установившейся частоте вращения $n = 1850$ *об/мин* динамометр показывает усилие 5 *кГ*. Определить мощность двигателя.

Решение — в единицах СИ.

1. Рассмотрим, какие силы действуют на шкив при установившемся равномерном вращении.

Шкив приводится во вращательное движение вращающим моментом $M_{вр}$, создаваемым двигателем. Кроме того, на шкив действуют сила натяжения правой ветви ленты, создаваемая динамометром ($T_д = 5\cdot 9{,}81 = 49$ *н*), и сила $T_г$ натяжения левой ветви ленты, создаваемая двухкилограммовой гирей ($T_г = 2\cdot 9{,}81 = 19{,}6$ *н*) (рис. 269, *б*).

2. Определим вращающий момент двигателя. Так как шкив вращается равномерно, то алгебраическая сумма моментов всех сил

относительно оси вращения шкива равна нулю:

$$M_{вр} - T_д \frac{d}{2} + T_г \frac{d}{2} = 0,$$

где d — диаметр шкива, $d = 240$ *мм* $= 0,24$ *м*. Отсюда

$$M_{вр} = (T_д - T_г) \frac{d}{2} = (49 - 19,6)\, 0,12 = 3,53 \text{ } н \cdot м.$$

3. Переведя угловую скорость $n = 1850$ *об/мин* в *рад/сек*:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi 1850}{30} = 194 \text{ } рад/сек,$$

из формулы (3) можно найти мощность двигателя:

$$N = M_{вр}\omega = 3,53 \cdot 194 = 685 \text{ } вт.$$

Таким образом, мощность двигателя составляет 685 *вт*.

Задачу можно решить еще при помощи формул (5). Рекомендуется эти решения выполнить самостоятельно.

Задача 242-45. Токарный станок приводится в движение электродвигателем, мощность которого $N = 2,21$ *квт*. Считая, что к резцу станка подводится лишь 0,8 мощности двигателя, определить вертикальную составляющую усилия резания, если диаметр обрабатываемой детали $d = 200$ *мм*, а шпиндель вращается со скоростью $n = 92$ *об/мин*.

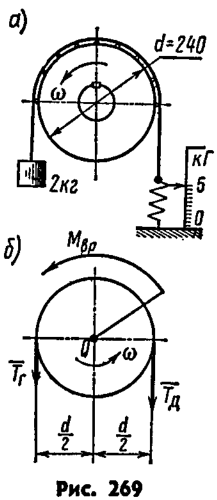


Рис. 269

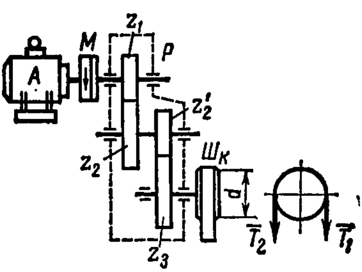


Рис. 270

Решение — при помощи формулы (5).

1. Шпиндель станка с закрепленной в нем деталью вращается под действием вращающего момента, который уравновешивается моментом искомого вертикального усилия резания P, т. е.

$$M_{вр} - P\frac{d}{2} = 0,$$

где $d = 200$ *мм* $= 0,2$ *м* — диаметр обрабатываемой детали.

Следовательно, $M_{вр} = P\frac{d}{2} = 0,1P$.

2. Мощность, подведенная к резцу, составляет 0,8 от всей мощности двигателя. Таким образом, к.п.д. передачи $\eta = 0{,}8$ и подведенная к резцу мощность

$$N_{\text{пол}} = \eta N = 0{,}8 \cdot 2{,}21 = 1{,}77 \text{ квт}.$$

3. Подставим найденные значения $M_{\text{вр}}$, $N_{\text{пол}}$ и данное в условии задачи значение n в формулу (5):

$$M_{\text{вр}} = 973{,}8 \frac{N}{n}.$$

Тогда $\quad 0{,}1P = 973{,}8 \frac{1{,}77}{92}.$

Откуда $\quad P = \frac{973{,}8 \cdot 1{,}77}{0{,}1 \cdot 92} = 188 \text{ кГ}.$

Решение задачи в единицах СИ рекомендуется выполнить самостоятельно.

● **Задача 243-45.** Определить вращающий момент электродвигателя мощностью 4,4 *квт* при скорости вращения ротора $n = 1200$ *об/мин.*

Ответ: 35 *н·м* (3,57 *кГ·м*).

● **Задача 244-45.** Станок приводится в движение ременной передачей от шкива, который получает вращение через редуктор P от электродвигателя A (рис. 270), мощность которого 1,5 *л. с.* при угловой скорости ротора 3000 *об/мин.* Коэффициент полезного действия каждой зубчатой пары 0,9, а ременной передачи 0,8; числа зубьев колес редуктора $z_1 = 20$, $z_2 = 30$, $z_2' = 25$ и $z_3 = 50$, диаметр шкива $d = 400$ *мм.*

Определить натяжения T_1 и T_2 ветвей ремня, считая, что $T_1 = 2T_2$.

Ответ. $T_2 = 3{,}48$ *кГ* (34,1 *н*).

ГЛАВА XII

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

В этой главе рассмотрено несколько простейших типовых задач, при решении которых можно использовать теоремы динамики для точки и системы материальных точек — теорему об изменении количества движения, теорему об изменении кинетической энергии и основной закон динамики для вращательного движения твердого тела (Е. М. Никитин, гл. XX и XXI).

§ 46-12. Задачи на поступательное движение тела

Если точка массой m, находясь под действием постоянной силы $\overline{P}$ в течение t *сек*, двигается прямолинейно, то теорема об изменении количества движения (Е. М. Никитин, § 95) выражается формулой

$$mv - mv_0 = Pt, \tag{1}$$

где разность $mv - mv_0$—величина изменения проекции количества движения на ось, совпадающую с направлением движения, а произведение Pt—проекция импульса силы на ту же ось.

В СИ количество движения и импульс силы измеряются в ньютон-секундах (*н·сек*) (Е. М. Никитин, § 94); в системе МКГСС—соответственно в килограмм-секундах в (*кГ·сек*).

Если, рассматривая действие силы $\overline{P}$ на материальную точку массой m, учитывать не продолжительность ее действия, а протяженность, т. е. то расстояние, на котором действует сила, то получим теорему об изменении кинетической энергии точки (Е. М. Никитин, § 97):

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A, \tag{2}$$

где A—работа всех сил, приложенных к точке, а $\frac{mv_0^2}{2}$ и $\frac{mv^2}{2}$—кинетическая энергия точки соответственно в начале и конце действия сил.

Кинетическая энергия измеряется единицами работы, т. е. в СИ—в джоулях (*дж*), в системе МКГСС—в *кГ·м*.

Необходимость введения двух динамических характеристик объясняется тем, что одна характеристика не отражает все особенности движения точки. Например, зная количество движения автомобиля (т. е. величину mv, а не величины m и v в отдельности) и действующую на него при торможении силу, можно определить, через сколько секунд автомобиль остановится, но по этим данным нельзя найти пройденный за время торможения путь. Наоборот, зная начальную кинетическую энергию автомобиля и тормозящую силу, можно определить тормозной путь, но по этим данным нельзя найти время торможения.

Если же в задаче заданы и масса точки, и ее скорость, то в принципе можно использовать для решения любую из теорем, но при этом необходимо иметь в виду, что для определения времени движения целесообразно использовать теорему об изменении количества движения, а для определения пройденного пути—теорему об изменении кинетической энергии.

Уравнения (1) и (2) применимы также и при рассмотрении поступательно движущихся тел. В этом случае любое твердое тело отождествляется с материальной точкой, имеющей массу всего тела и расположенной в его центре массы (Е. М. Никитин, § 100) или в точке, совпадающей с центром тяжести тела.

Задача 245-46. Машинист тепловоза отключает двигатель и начинает тормозить в момент, когда тепловоз имеет скорость 90 *км/ч*. Через сколько времени и пройдя какой путь тепловоз остановится, если сила торможения постоянна и составляет 0,12 его веса, а движение происходит по горизонтальному и прямолинейному участку дороги?

Решение.

1. Тепловоз движется поступательно, поэтому рассмотрим движение его центра тяжести C (центра массы), считая, что к нему приложены все внешние силы (рис. 271).

2. После того как отключается двигатель и включается тормозное устройство, на тепловоз действуют три силы: сила тяжести $\overline{G}$, нормальная реакция рельсов $\overline{N}$ и сила торможения $\overline{F}$. В начале торможения скорость $v_0 = 90$ *км/ч* $= 25$ *м/сек*, в конце $v = 0$. Требуется определить путь s и время t, за которое этот путь пройден (см. рис. 271).

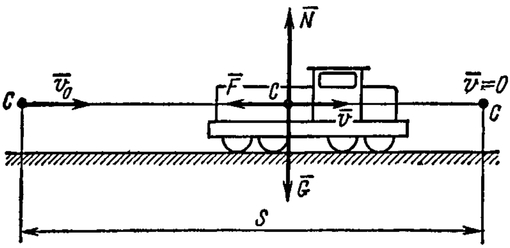


Рис. 271

3. Для определения времени торможения применим теорему об изменении количества движения.

Спроектировав векторы на горизонтальную ось (ось x), увидим, что проекции сил $\overline{G}$ и $\overline{N}$ равны нулю, а проекция силы $\overline{F}$ получается равной ее модулю, но со знаком минус; проекция скорости $\overline{v}_0$ также равна ее модулю, поэтому уравнение (1) в данном случае примет вид

$$-Ft = -mv_0.$$

4. Решаем это уравнение относительно t: $t = mv_0/F$. Так как сила торможения $F = 0{,}12G = 0{,}12mg$, то окончательно

$$t = \frac{v_0}{0{,}12g} = \frac{25}{0{,}12 \cdot 9{,}81} = 21{,}2 \text{ сек.}$$

5. Для определения тормозного пути s применим теорему об изменении кинетической энергии. В данном случае $v = 0$, $A = Fs\cos\alpha$ (угол α между направлением силы $\overline{F}$ и направлением перемещения равен 180° и, следовательно, $\cos 0 = \cos 180° = -1$), а работы сил $\overline{G}$ и $\overline{N}$ равны нулю (эти силы действуют перпендикулярно к направлению перемещения) поэтому уравнение (2) принимает вид

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -Fs.$$

6. Решаем это уравнение относительно s:

$$s = \frac{mv_0^2}{2F} = \frac{v_0^2}{2 \cdot 0{,}12g}$$

$$(F = 0{,}12G = 0{,}12mg).$$

После подстановки в эту формулу числовых значений

$$s=\frac{25^2}{2\cdot 0{,}12\cdot 9{,}81}=265\ м.$$

Таким образом, тепловоз остановится через 21,2 *сек*, пройдя 265 *м*.

Задача 246-46. Каков коэффициент трения колес заторможенного автомобиля о дорогу (считать, что заторможены все четыре колеса), если в момент выключения двигателя и нажатия тормоза скорость движения автомобиля $v_0=60$ *км/час* и автомобиль останавливается через 5 *сек* после начала торможения.

Решение.

1. В задаче известно время движения заторможенного автомобиля, т. е. имеется в виду импульс силы, поэтому для ее решения применим формулу (1) — закон количества движения.

2. На заторможенный автомобиль действуют девять сил (рис. 272, а): $\overline{G}$ — вес автомобиля, четыре реакции поверхности дороги, приложенные к каждому колесу, и четыре силы трения, также приложенные к колесам.

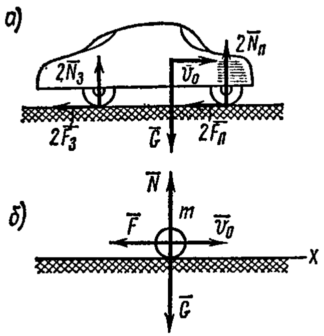


Рис. 272

Принимая автомобиль за материальную точку, считаем, что все эти силы приложены в центре тяжести автомобиля, и тогда, заменив четыре реакции поверхности их суммой $\overline{N}$ и четыре силы трения их суммой $\overline{F}$, получим только три силы $\overline{G}$, $\overline{N}$ и $\overline{F}$ (рис. 272, б).

3. Силы $\overline{G}$ и $\overline{N}$ численно равны друг другу и взаимно уравновешиваются. Следовательно, импульс создается силой трения $\overline{F}$.

4. Импульс силы трения в данном случае действует в сторону, противоположную движению, поэтому уравнение (1) для данной задачи примет вид

$$mv-mv_0=-Ft.$$

Но автомобиль через $t=5$ *сек* останавливается ($v=0$), поэтому

$$mv=0.$$

Следовательно,

$$-mv_0=-Ft \text{ или } mv_0=Ft.$$

5. Подставим сюда значения $m=\frac{G}{g}$ и $F=fN=fG$ (так как $N=G$):

$$\frac{G}{g}v_0=fGt.$$

Откуда, имея в виду, что $v_0 = 60$ *км/ч* $= 16{,}7$ *м/сек*,

$$f = \frac{v_0}{gt} = \frac{16{,}7}{9{,}81 \cdot 5} = 0{,}34.$$

Эту задачу можно решить, используя теорему об изменении кинетической энергии. Рекомендуем этот вариант решения выполнить самостоятельно.

Задача 247-46. За 500 *м* до станции, стоящей на пригорке высотой 2 *м*, машинист поезда, идущего со скоростью 12 *м/сек*, закрывает пар и начинает тормозить. Как велико должно быть сопротивление от торможения, считаемое постоянным, чтобы поезд остановился у станции, если масса поезда равна 10^6 *кг*, сопротивление трения 2000 *кГ*?

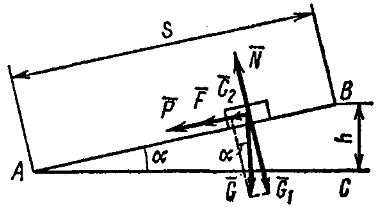


Рис. 273

Решение.

1. Решаем задачу, используя теорему об изменении кинетической энергии, так как в условии задачи задано уже не время торможения, а тормозной путь $s = 500$ *м*.

2. Поезд двигается поступательно, поэтому достаточно рассмотреть движение его центра тяжести O. Приложим к точке O все действующие силы (рис. 273). Вес поезда $\bar{G}$ разлагаем на две составляющие $\bar{G}_1$ и $\bar{G}_2$. На поезд в сторону, противоположную его движению, действуют три силы: составляющая веса $\bar{G}_1$, сила трения $\bar{F}$ и искомая сила торможения $\bar{P}$.

3. Равнодействующая этих сил, равная их сумме $(P + F + G_2)$, действуя на расстоянии s, производит работу $A = -(P + F + G_2)s$ (работа сил сопротивления отрицательна).

4. Работа A равна изменению кинетической энергии поезда [уравнение (2)]:

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Но так как конечная скорость поезда $v = 0$, то

$$-(P + F + G_2)s = -\frac{mv_0^2}{2}.$$

Из последнего уравнения можно найти силу торможения P:

$$P = \frac{mv_0^2}{2s} - F - G_2.$$

5. Но предварительно нужно определить составляющую веса G_2:

$$G_2 = G \sin\alpha.$$

А так как $\sin\alpha = \frac{h}{s}$,

то $$G_2 = G\frac{h}{s}.$$

Затем вычисляем величину силы P в системе МКГСС, учитывая, что

$$m = \frac{G}{g} = \frac{10^6}{9{,}81}\text{ т. е. м }\left(\frac{кГ \cdot сек^2}{м}\right):$$

$$P = \frac{mv_0^2}{2s} - F - G\frac{h}{s} = \frac{10^6 \cdot 12^2}{9{,}81 \cdot 2 \cdot 500} - 2000 - 10^6 \cdot \frac{2}{500} = 8700\ кГ.$$

6. Если решить задачу в единицах СИ, то все предварительные рассуждения не изменятся, но в окончательную расчетную формулу

$$P = \frac{mv_0^2}{2s} - F - G\frac{h}{s}$$

нужно подставить числовое значение силы F в ньютонах ($F = 2000$ *кГ* $= 19\,600$ *н*), а вес G выразить через массу ($G = mg$).

● **Задача 248-46.** Трогаясь с места, автомобиль через 10 *сек* развивает скорость 36 *км/ч*. Определить силу тяги двигателя P. Масса автомобиля 1500 *кг*. Все четыре колеса автомобиля — ведущие.

Ответ. $P = 1500$ *н* (153 *кГ*).

● **Задача 249-46.** По наклонной плоскости, угол подъема которой $\alpha = 30°$, спускается без начальной скорости тяжелое тело; коэффициент трения $f = 0{,}2$. Какую скорость v имеет тело, пройдя 2 *м* от начала движения?

Ответ. $v = 3{,}58$ *м/сек*.

§ 47-12. Задачи на вращательное движение тела

Мерой инертности материальной точки, а также тела при поступательном движении является их масса.

Если же тело вращается, то мерой инертности служит его момент инерции — величина, зависящая от величины массы тела и от того, каким образом масса распределена относительно оси вращения тела.

Как известно (Е. М. Никитин, § 102), моментом инерции тела относительно некоторой оси называется величина, составленная из суммы произведений масс всех материальных точек тела на квадраты расстояний от этих точек до оси вращения.

В математической форме величину момента инерции тела можно представить такой формулой:

$$J = \int_v dm\,\rho^2,$$

где J — момент инерции тела; dm — масса материальной точки; ρ — расстояние от точки до оси вращения; v у знака интеграла показывает, что интегрировать (т. е. суммировать произведения $dm\rho^2$) необходимо по всему объему тела.

Этой формулой можно пользоваться для определения моментов инерции тел, имеющих геометрическую форму тел вращения.

Если тело составлено из нескольких частей, имеющих определенную геометрическую форму, удобно использовать еще формулу

$$J = J_C + ma^2,$$

где J_C—момент инерции тела относительно центральной оси (т. е. относительно оси, проходящей через центр тяжести тела); J—момент инерции тела относительно оси, параллельной центральной оси; m—масса тела и a—расстояние между осями.

Если тело имеет очень сложную форму, то момент инерции определяется либо из опыта, либо по формулам, приведенным в различных технических справочниках.

Приведем несколько формул для определения моментов инерции тел (во всех формулах m—масса тела, а линейные размеры обозначены на рисунках).

1. Момент инерции тонкого прямого стержня относительно его центральной оси, перпендикулярной к стержню (рис. 274,*а*),

$$J_{yC} = \frac{1}{12} ml^2. \qquad (1)$$

2. Момент инерции тонкого прямого стержня относительно оси, перпендикулярной к стержню и расположенной у одного из его концов (рис. 274,*б*):

$$J_y = \frac{1}{3} ml^2. \qquad (2)$$

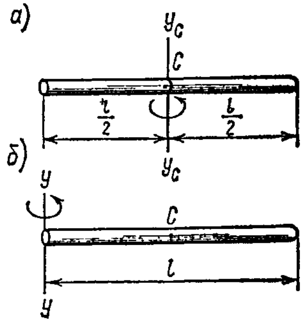


Рис. 274

3. Момент инерции сплошного однородного цилиндра относительно его геометрической оси (рис. 275, *а*)

$$J_x = \frac{1}{8} md^2. \qquad (3)$$

4. Момент инерции полого однородного цилиндра относительно его геометрической оси (рис. 275, *б*)

$$J_x = \frac{1}{8} m(D^2 + d^2). \qquad (4)$$

Сопоставляя между собой при помощи рисунков формулы (1) и (2), а также (3) и (4), необходимо учитывать то, что при одной и той же массе стержней и одинаковой длине второй стержень обладает в четыре раза большим моментом инерции (см. рис. 274, б), а также при одинаковых внешних размерах цилиндров и одинаковой массе (если цилиндры изготовлены из различных материалов, например из алюминия и стали) полый цилиндр обладает большим моментом инерции.

Если в формуле (4) пренебречь толщиной стенки цилиндра, т. е. считать, что $D=d$ (вся масса распределена по ободу цилиндра), то

$$J_x=\frac{1}{4}md^2.$$

Единицей измерения момента инерции тела являются в СИ:

$$1\ кг\cdot 1\ м^2=1\ кг\cdot м^2;$$

в системе МКГСС:

$$1\ \frac{кГ\cdot сек^2}{м}1\ м^2=1\ кГ\cdot сек^2\cdot м.$$

При вращательном движении (см. § 45-11) движущим фактором является вращающий момент (пара сил).

Если алгебраическая сумма моментов всех пар сил, приложенных к телу, имеющему ось вращения, не равна нулю, то тело приобретает угловое ускорение, числовое значение которого прямо пропорционально вращающему моменту $M_{вр}$:

$$M_{вр}=J\varepsilon.$$

В этом уравнении, выражающем основной закон динамики для вращательного движения тела, множителем пропорциональности является момент инерции тела. Тело с большим моментом инерции труднее привести во вращение.

Кинетическая энергия вращающегося тела

$$E_{вр}=\frac{J\omega^2}{2}.$$

Если тело находится в плоскопараллельном движении, например катящееся колесо, то его кинетическая энергия складывается из двух слагаемых:

$$E_{пл.\text{-}пар}=\frac{mv^2}{2}+\frac{J\omega^2}{2},$$

где $\frac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия, получающаяся от поступательной части этого сложного движения (см. § 37-8) при скорости v, равной скорости центра тяжести тела, а $\frac{J\omega^2}{2}$ — кинетическая энергия от вращательной части, причем J — момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести тела.

Задача 250-47. Два цилиндра, изготовленных из различных материалов (см. рис. 275), имеют одинаковую массу $m_{спл}=m_{пол}=80$ *кг*; их наружные диаметры $d_{спл}=D_{пол}=240$ *мм*, а внутренний диаметр полого цилиндра $d_{пол}=200$ *мм*. Полый цилиндр вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью $\omega_{пол}=20$ *рад/сек*.

С какой скоростью должен вращаться сплошной цилиндр, чтобы оба цилиндра имели одинаковый запас кинетической энергии?

Решение.

1. Если кинетические энергии обоих цилиндров обозначить, соответственно,

$$E_{пол}=\frac{J_{пол}\omega^2_{пол}}{2} \text{ и } E_{спл}=\frac{J_{спл}\omega^2_{спл}}{2},$$

то по условию задачи

$$\frac{J_{пол}\omega^2_{пол}}{2}=\frac{J_{спл}\omega^2_{спл}}{2},$$

отсюда

$$\omega_{спл}=\omega_{пол}\sqrt{\frac{J_{пол}}{J_{спл}}}.$$

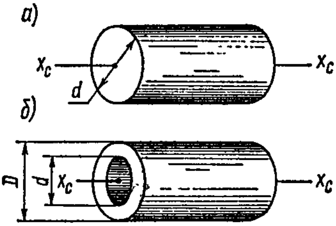


Рис. 275

2. Если определять числовые значения моментов инерции обоих цилиндров, то

$$J_{пол}=\frac{m_{пол}(D^2_{пол}+d^2_{пол})}{8}=\frac{80\,(0{,}24^2+0{,}2^2)}{8}=0{,}976\ кГ\cdot м^2;$$

$$J_{спл}=\frac{m_{спл}d^2_{спл}}{8}=\frac{80\cdot 0{,}24^2}{8}=0{,}576\ кГ\cdot м^2.$$

Определим скорость сплошного цилиндра

$$\omega_{спл}=\omega_{пол}\sqrt{\frac{J_{пол}}{J_{спл}}}=20\sqrt{\frac{0{,}976}{0{,}576}}=26\ рад/сек.$$

3. Если же числовые значения моментов инерции не определять, то

$$\omega_{спл}=\omega_{пол}\sqrt{\frac{J_{пол}}{J_{спл}}}=\omega_{пол}\sqrt{1+\frac{d^2_{пол}}{d^2_{спл}}}$$

и подставив сюда числовые значения диаметров, найдем

$$\omega_{спл}=20\sqrt{1+\frac{0{,}2^2}{0{,}24^2}}=20\sqrt{1+0{,}695}=20\cdot 1{,}3=26\ рад/сек.$$

Для второго варианта решения, как видно, массу цилиндров можно и не задавать.

Задача 251-47. Стержень длиной $l=1$ *м* и массой 3 *кг* имеет на концах шарообразные массы по 2 *кг* каждая (диаметры шариков $d=10$ *см*). Какой вращающий момент нужно приложить к стержню, чтобы привести его во вращение с угловым ускорением $\varepsilon=2$ *рад/сек*^{2} вокруг оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через центр тяжести системы (рис. 276)?

Решение.

1. Чтобы определить необходимый вращающий момент, нужно воспользоваться уравнением основного закона динамики для вращательного движения тела

$$M_{вр}=J\varepsilon,$$

но предварительно надо определить момент инерции системы стержня и шариков.

2. Находим момент инерции этой системы J_{yC}, который складывается из момента инерции стержня $J_{ст}$ и двух моментов инерции шариков ($2J_{ш}$), которые считаем материальными точками, т. е. при определении моментов инерции шариков принимаем, что их массы сосредоточены в центрах шариков на расстоянии $\left(\frac{l}{2}+\frac{d}{2}\right)$ от оси y.

Следовательно,

$$J_{yC}=J_{ст}+2J_{ш}=\frac{m_{ст}l^2}{12}+2m_{ш}\left(\frac{l+d}{2}\right)^2.$$

Подставим числовые значения:

$$J_{yC}=\frac{3\cdot 1^2}{12}+2\cdot 2\cdot 0{,}55^2=0{,}25+1{,}21=1{,}46 \ кг\cdot м^2.$$

3. И теперь определим вращающий момент, необходимый для сообщения стержню ускорения $\varepsilon=2$ *рад/сек*^{2},

$$M_{вр}=J_{yC}\varepsilon=1{,}46\cdot 2=2{,}92 \ н\cdot м$$

$$\left[кг\cdot м^2\cdot\frac{1}{сек^2}\right]=\left[\frac{кг\cdot м}{сек^2}\cdot м\right]=[н\cdot м].$$

Задача 252-47. Тормозной шкив, масса которого $m=2$ *кг*, диаметр $d=0{,}8$ *м*, имеет форму сплошного диска и вращается по инерции с угловой скоростью $\omega_0=10\pi\frac{рад}{сек}$. Для остановки вала

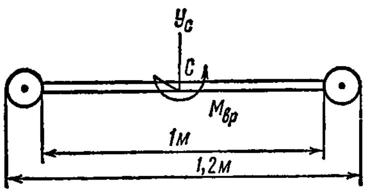


Рис. 276

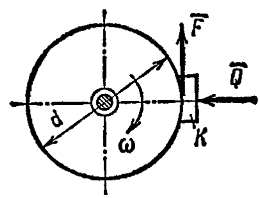


Рис. 277

к шкиву прижимают тормозную колодку k с силой $Q=5$ *н*. Через сколько секунд вал остановится и сколько оборотов он сделает до остановки, если коэффициент трения колодки о шкив $f=0{,}4$? Трением в подшипниках вала, на котором насажен шкив, пренебречь; массу вала не учитывать.

Решение—при помощи основного закона для вращающегося тела.

1. Изобразим шкив на рис. 277. Прижатая к шкиву колодка создает силу трения $F=fQ$, направленную в сторону, противоположную вращению колеса. Таким образом, на шкив с момента прижатия колодки начинает действовать тормозной момент, направленный в сторону, противоположную его вращению,

$$M_{т}=-F\frac{d}{2}=-fQ\frac{d}{2}=-0{,}4\cdot 5\cdot\frac{0{,}8}{2}=-0{,}8 \ н\cdot м.$$

2. Шкив имеет форму сплошного диска, его момент инерции определяется по формуле

$$J=\frac{1}{8}md^2=\frac{2\cdot 0{,}8^2}{8}=0{,}16\ кг\cdot м^2.$$

3. Из основного уравнения динамики для вращательного движения $M_{вр}=\varepsilon J$ находим угловое ускорение ε:

$$\varepsilon=\frac{M_т}{J}=\frac{-0{,}8}{0{,}16}=-5\ рад/сек^2$$

$$[(н\cdot м):(кг\cdot м^2)]=\left[\left(\frac{кг\cdot м}{сек^2}\,м\right):(кг\cdot м^2)\right]=\left[\frac{1}{сек^2}\right]=\frac{рад}{сек^2}.$$

4. Из формулы для углового ускорения равнопеременного вращения $\varepsilon=\frac{\omega-\omega_0}{t}$ находим время торможения:

$$t=\frac{\omega-\omega_0}{\varepsilon}=\frac{0-10\pi}{-5}=2\pi\ сек=6{,}28\ сек.$$

5. По уравнению равнопеременного вращения определяем угол поворота шкива (вала) за это время:

$$\varphi=\omega_0 t+\frac{\varepsilon t^2}{2}=10\pi\cdot 2\pi-\frac{5\,(2\pi)^2}{2}=20\pi^2-10\pi^2,$$

$$\varphi=10\pi^2\ рад.$$

6. Находим число оборотов вала, сделанное им с момента начала торможения до остановки:

$$\varphi_{об}=\frac{\varphi}{2\pi}=\frac{10\pi^2}{2\pi}=5\pi=15{,}7\ оборота.$$

Эту задачу можно решить и другим способом (используя закон кинетической энергии для вращающегося тела).

Задача 253-47. Цилиндр *1*, масса которого $m_ц=78\ кг$ и диаметр $d=24\ см$, может свободно вращаться около горизонтальной оси.

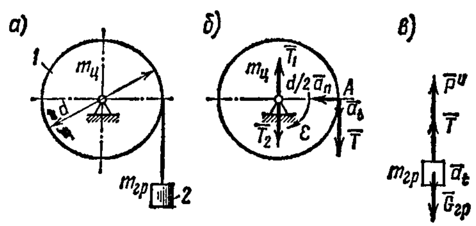


Рис. 278

На цилиндр намотана гибкая нить, имеющая на конце груз *2* массой $m_{гр}=10\ кг$. Падая, груз разматывает нить и вращает цилиндр (рис. 278, *а*).

Определить угловое ускорение цилиндра, натяжение нити, кинетическую энергию груза A и цилиндра через $t = 4$ *сек* после начала движения.

Массой нити и трением в оси цилиндра пренебречь.

Решение—при помощи метода кинетостатики и уравнения основного закона динамики для вращающегося тела.

1. В задаче рассматриваются два связанных между собой тела: вращающийся цилиндр и поступательно двигающийся груз. Мысленно разрежем нить и изобразим оба тела с действующими на них силами отдельно друг от друга.

2. На рис. 278, *б* показан цилиндр, на который действует вращающий момент пары сил $(\overline{T}, \overline{T}_1)$, созданной натяжением нити (сила $\overline{T}_2$ приложена к подшипнику цилиндра, см. § 45-11):

$$M_{\text{вр}} = T\frac{d}{2}.$$

3. Вращение цилиндра определяется уравнением:

$$M_{\text{вр}} = J_{\text{ц}}\varepsilon.$$

Так как $$J_{\text{ц}} = \frac{m_{\text{ц}}d^2}{8},$$

то $$T\frac{d}{2} = \frac{m_{\text{ц}}d^2}{8}\varepsilon.$$

Откуда $T = \frac{m_{\text{ц}}d\varepsilon}{4}$. (a)

В полученное выражение для T входит вторая неизвестная величина ε. Чтобы облегчить дальнейшие вычисления, подставим сюда те величины, которые известны (в единицах СИ: $m_{\text{ц}} = 78$ *кг* и $d = 0{,}24$ *м*):

$$T = \frac{78\cdot 0{,}24}{4}\varepsilon \text{ и } T = 4{,}68\varepsilon. \qquad (\text{a}')$$

4. Изобразим теперь (рис. 278, *в*) груз, на который действуют его вес $G_{\text{гр}} = m_{\text{гр}}g$, реакция нити $\overline{T}$, равная ее натяжению. Так как цилиндр падает с ускорением $\overline{a}_t$, то силы $\overline{G}_{\text{гр}}$ и $\overline{T}$ не уравновешивают друг друга. Добавим к ним силу инерции $\overline{P}^{\text{и}}$. Тогда уравнение равновесия сил примет вид: $P^{\text{и}} + T - G_{\text{гр}} = 0$.

Заменим в последнем уравнении силу инерции и вес груза их значениями $P^{\text{и}} = m_{\text{гр}}a_t$ и $G_{\text{гр}} = m_{\text{гр}}g$:

$$T = m_{\text{гр}}(g - a_t).$$

5. Считая нить нерастяжимой, получаем, что ускорение a_t груза равно ускорению любой точки нити, а следовательно, и точки A на ободе цилиндра (см. рис. 278, *б*). Но точка A принадлежит телу, вращающемуся с угловым ускорением ε, поэтому

$$a_t = \varepsilon\frac{d}{2}$$

и теперь

$$T = m_{\text{гр}} \left(g - \varepsilon \frac{d}{2} \right). \qquad (б)$$

Получено второе уравнение с теми же неизвестными T и ε.

Подставив в (б) числовые значения $\left(m_{\text{гр}} = 10 \textit{ кг},\ g = 9{,}81 \frac{м}{сек^2} \text{ и } d = 0{,}24 \textit{ м} \right)$, получаем

$$T = 10\,(9{,}81 - 0{,}12\varepsilon) \text{ или } T = 98{,}1 - 1{,}2\varepsilon. \qquad (б')$$

6. Решим систему уравнений (а′) и (б′). Правые части обоих уравнений равны T, значит: $4{,}68\varepsilon = 98{,}1 - 1{,}2\varepsilon$.
Отсюда

$$\varepsilon = \frac{98{,}1}{4{,}68 + 1{,}2} = 16{,}65 \textit{ рад/сек}^2.$$

Подставим найденное значение ε в любое из уравнений, например в (а′):

$$T = 4{,}68 \cdot 16{,}65 = 78 \textit{ н}.$$

7. Определим кинетическую энергию цилиндра и груза через $t = 4$ *сек* после начала движения системы:

$$E_{\text{ц}} = \frac{J_{\text{ц}} \omega_{\text{ц}}^2}{2} = \frac{m_{\text{ц}} d^2 (\varepsilon t)^2}{16} = \frac{78 \cdot 0{,}24^2 (16{,}65 \cdot 4)^2}{16} = 1240 \textit{ дж}.$$

$$E_{\text{гр}} = \frac{m_{\text{гр}} v_{\text{гр}}^2}{2} = \frac{m_{\text{гр}} (a_t t)^2}{2} = \frac{m_{\text{гр}} \left(\varepsilon \frac{d}{2} t \right)^2}{2} = \frac{10\,(16{,}65 \cdot 0{,}12 \cdot 4)^2}{2} = 319 \textit{ дж}.$$

8. Таким образом, общий запас кинетической энергии обоих тел

$$E = E_{\text{ц}} + E_{\text{гр}} = 1240 + 319 = 1559 \textit{ дж}.$$

● **Задача 254-47.** Шкив массой 120 *кг* и диаметром 600 *мм*, представляющий собой плоский однородный цилиндр, приводится во вращение из состояния покоя при помощи ременной передачи

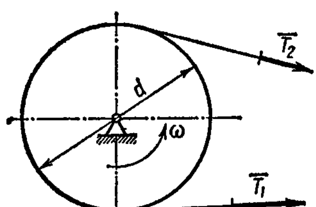


Рис. 279

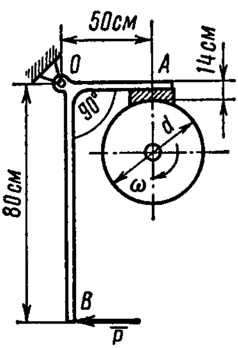


Рис. 280

(рис. 279). Натяжение ветвей ремня считать постоянными и равными $T_1 = 960$ *н* и $T_2 = 480$ *н*. Пренебрегая трением в цапфах шкива, определить его угловую скорость ω через $t = 3$ *сек* после начала движения.

Ответ. $\omega = 80$ *рад/сек*.

● **Задача 255-47.** Маховое колесо, имеющее момент инерции $J = 14$ *кГ·м·сек*² и диаметр $d = 70$ *см*, вращается по инерции с постоянной скоростью $n = 430$ *об/мин*; направление вращения показано на рис. 280. Остановка колеса производится путем прижатия к его ободу тормозной колодки при помощи рычага AOB. Какую силу P необходимо приложить к концу B рычага, чтобы остановить маховик в течение 40 *сек* (вращение маховика во время торможения считать равнозамедленным)? Сколько оборотов успеет сделать маховое колесо с момента начала торможения до остановки? Трением в оси маховика пренебречь. Коэффициент трения между колодкой и маховиком $f = 0{,}4$. Размеры рычага и колодки даны на рисунке.

Ответ. $P = 6{,}4$ *кГ*; 143,3 оборота.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел первый

Статика

Раздел второй

Кинематика

Раздел третий

Динамика

АЛЕКСАНДР ИОАКИМОВИЧ АРКУША

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Редактор К. И. Аношина. Художественный редактор Н. К. Гуторов. Технический редактор Н. В. Яшукова. Корректор О. Н. Шебашова

Сдано в набор 31/III-76 г. Подп. к печати 19/VII-76 г. Формат 60×90$^1/_{16}$. Бум. тип. № 3. Объем 18 печ. л. 18 усл. п. л. 16,56 уч.-изд. л. Изд. № ОТ—267. Тираж 100 000 экз. Зак. № 144. Цена 55 коп. БЗ—45—13 от 25/VI-76 г.

Издательство «Высшая школа». Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28

55 коп.

ВЫСШАЯ ШКОЛА · 1976