

51  
Д 56  
616 819



ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ  
Г Р А В Е

# АКАДЕМИЯ НАУК СССР



Книга посвящена жизни и деятельности выдающегося советского математика, почетного члена Академии наук СССР Дмитрия Александровича Граве (1863—1939), основавшего первую в России алгебраническую школу. Затронутые в его исследованиях проблемы — нахождение всех интегралов системы дифференциальных уравнений задачи трех тел, не зависящих от закона действия сил, решения задач картографических проекций — нашли отражение в книге. В ней освещены также его исследования в области алгебры и теории чисел и др., участие Д. А. Граве в создании и становлении советской науки и культуры, в реформе высшей школы.

Книга рассчитана на преподавателей, студентов и всех лиц, интересующихся историей математики.



*Д. А. Граве (1863—1939)*

В. А. ДОБРОВОЛЬСКИЙ

ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

Г Р А В Е

1863—1939



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1968

Редакционная коллегия:

Д-р техн. наук *Л. Д. Белькинд*, д-р биол. наук *Л. Я. Бляхер*,  
д-р физ.-мат. наук *А. Т. Григорьян*, д-р физ.-мат. наук *Я. Г. Дор-  
фман*, академик *Б. М. Кедров*, д-р экон. наук *Б. Г. Кузнецов*,  
д-р биол. наук *А. И. Купцов*, д-р ист. наук *Д. В. Ознобишин*, д-р  
физ.-мат. наук *И. Б. Погребысский*, канд. техн. наук *З. К. Новок-  
шанова-Соколовская* (ученый секретарь), д-р хим. наук  
*Ю. И. Соловьев*, канд. техн. наук *А. С. Федоров* (зам. предсе-  
дателя), канд. техн. наук *И. А. Федосеев*, д-р хим. наук  
*Н. А. Фигуровский* (зам. председателя), канд. техн. наук  
*А. А. Чеканов*, д-р техн. наук *С. В. Шухардин*, академик  
*А. Л. Янишин* (председатель).

Ответственный редактор

*проф. Б. А. Розенфельд*

## ВВЕДЕНИЕ

Научно-педагогическая деятельность Дмитрия Александровича Граве (1863—1939), одного из выдающихся отечественных математиков, организатора первой в России крупной алгебраической школы, оставила глубокий след в развитии математики и сыграла большую роль в воспитании нескольких поколений математиков, педагогов и ученых.

Д. А. Граве принадлежал к младшему поколению Петербургской математической школы, созданной великим русским математиком П. Л. Чебышевым. Граве внес заметный вклад в теорию дифференциальных уравнений, в дифференциальную геометрию и теорию функций, в алгебру и теорию чисел. Наряду с этим он довольно глубоко разрабатывал различные прикладные вопросы, проявив оригинальный подход в их изучении и трактовке. Воспитанный на лучших традициях передовой отечественной и западноевропейской математической культуры, Д. А. Граве был замечательным педагогом, прекрасным лектором, хорошим популяризатором науки, вдумчивым и требовательным воспитателем молодежи, внимательным другом и душевным человеком.

Д. А. Граве прожил большую жизнь, насыщенную интересными событиями, встречался с выдающимися математиками — П. Л. Чебышевым, А. Н. Коркиным, А. А. Марковым, А. М. Ляпуновым, В. А. Стекловым и многими другими.

Об этих встречах он много рассказывал своим ученикам.

В настоящей книге на основе большого фактического материала, работ Д. А. Граве и его воспоминаний, ар-

живных материалов и переписки Граве дается характеристика жизненного и творческого пути ученого.

Однако в связи с тем, что многие документы, записные книжки и другие материалы, относящиеся к биографии Граве, утеряны, некоторые периоды жизни и творчества Граве освещены недостаточно полно.

В первой главе рассказывается о жизненном пути Д. А. Граве, вторая — посвящена характеристике его научных и литературных трудов, более подробно автор останавливается на основных работах Граве, в третьей — рассматривается деятельность его школы, ранние работы его учеников.

В конце книги помещен список опубликованных работ Д. А. Граве и список литературы о нем, а также указаны ранние работы его учеников, о которых говорится в тексте. Ссылки на источники из первого списка даются в прямых скобках, ссылки на источники из второго — приводятся в круглых скобках.

Книга эта рассчитана на педагогов, студентов и любителей математики.

Автор выражает благодарность ученикам и сотрудникам Граве, которые поделились своими воспоминаниями о нем, а также проф. Б. А. Розенфельду, профессорам А. Л. Наумову, Е. Я. Ремезу, Ю. Д. Соколову, сделавшим ряд весьма полезных замечаний.



# ЖИЗНЕННЫЙ ПУТЬ Д. А. ГРАВЕ

## Петербургский период

### *Детство и юность. Гимназия*

В 120 километрах северо-западнее Вологды находится старый русский город Кириллов. Он образовался из слободы при Кирилло-Белозерском монастыре, основанном в 1397 г. Строения монастыря, напоминавшие по внешнему виду крепость, расположились на берегах больших озер — Сиверского и Долгого. В XV—XVII вв. монастырь был местом ссылки и заключения лиц из светской и церковной феодальной знати, князей М. Воротынского, И. Шуйского, боярина Морозова, патриарха Никона и др.

В этом старинном городе, насчитывавшем к середине прошлого века уже примерно пять тысяч жителей, в семье чиновника Александра Ивановича Граве 25 августа (ст. ст.) 1863 г. родился сын Дмитрий. Раннее детство его благодаря заботам и вниманию матери, Надежды Ивановны, проходило радостно и легко. Первые воспоминания детства Дмитрия связаны с историей города и монастыря. Рассказы о прошлом родных мест, частые прогулки в компании ровесников производили большое впечатление на мальчика. Граве поведал об этом через несколько десятков лет в своих воспоминаниях [180].

Первым учителем Д. А. Граве в начальной народной школе был Виталий Алексеевич Васильев. Он всячески поощрял пробудившийся у мальчика интерес к математике. Граве интересовали рассказы учителя об устройстве паровой и электрической машин. Иногда он разрешал Дмитрию брать электрическую машину домой. Проче-



Д. А. Граве (начало 80-х годов)

лав серию опытов, тот возвращал машину в полной исправности в школу.

После смерти отца (1871 г.) семья — мать, Дмитрий и его сестры — переселилась в Петербург. В 1873 г. Граве поступил в частную гимназию Бычкова. В гимназии Бычкова Граве получил прочные и широкие знания по математике. Уроки математики вели Николай Иванович Билибин и Федор Федорович Бычков. Н. И. Билибин перевел на русский язык курс алгебры французского математика Бертрана, а Ф. Ф. Бычков — автор задачника по алгебре. Знающий педагог и хороший методист Ф. Ф. Бычков так подбирал материал к своим урокам, что умел пробудить любознательность учеников, учил их преодолевать трудности в решении задач, видеть сущность задачи за сложными алгебраическими выкладками, пробуждал интерес к занятиям математикой.

Не удивительно, что дальнейшую свою судьбу Д. А. Граве решил связать с математикой. Гимназию Д. А. Граве окончил в 1881 г. с золотой медалью. В аттестате зрелости сказано, что «прилежание в науках он проявил отличное и любознательность обнаруживал в особенности в занятиях древними языками и науками физико-математическими» (7, л. 6).

### *Университетские годы*

Окончив гимназию, Д. А. Граве поступает на математическое отделение физико-математического факультета Петербургского университета. К тому времени Петербургский университет стал крупнейшим центром образования и научных исследований в России, особенно в области математики. Учителями Д. А. Граве в университете были: по математике — П. Л. Чебышев (теория чисел, теория эллиптических функций и различные спецкурсы), А. Н. Коркин (теория дифференциальных уравнений и вариационное исчисление), А. А. Марков (введение в анализ, теория вероятностей), И. Л. Пташицкий (аналитическая геометрия, теория эллиптических функций), К. А. Поссе (дифференциальное и интегральное исчисление), Ю. В. Сохоцкий (высшая алгебра, теория функций комплексного переменного), по астрономии — С. П. Глазенап. Это были годы расцвета школы П. Л. Чебышева. Лекции его Д. А. Граве слушал лишь на первых семестрах, так как П. Л. Чебышев вскоре оставил работу в университете. Но научное общение со своим учителем, так же как и с его последователями, Граве не прерывал.

Вспоминая студенческие годы, Д. А. Граве писал, что «может быть хороший лектор, приятно читающий по чужим книгам, однако неспособный сказать свое собственное слово» [180, л. 3]. А вот Менделеев «был плохим лектором, но в то же время поразительным профессором». Чебышев же «был прекрасный профессор и прекрасный лектор. Он читал очень маленькие курсы. Когда раздавался звонок, он немедленно бросал мел и, ковыляя, покидал аудиторию. Наряду с этим он был очень аккуратен и не опаздывал на лекции».

Граве вспоминает, что «особенно интересны были отступления Чебышева от темы лекции, в которых он рассказывал о своих встречах с известными математиками и о предметах их бесед. Тогда вся аудитория настораживалась, стараясь не пропустить ни слова». Лекции Чебышева, отмечает Граве, сыграли громадную роль в воспитании блестящих ученых — Е. Золотарева, А. Маркова и др. Как известно, школу Чебышева характеризует дух творческого соревнования, высокая требовательность к качеству работы, оригинальность и новизна идей, мастерство аналитических выкладок.

Д. А. Граве отмечает принципы, на которых была построена работа школы Чебышева (180, л. 4):

1. Надо заниматься не тем, что интересно и любопытно, а тем, что важно и необходимо. Важность работы Чебышев понимал в смысле пользы ее для математики и ее приложений.

2. Самые плодотворные задачи ставит перед математикой практика.

3. Математика имеет целью найти общие методы для получения эффективных результатов при минимальных возможностях и затратах в различных сферах человеческой деятельности.

Учителем Граве был и Александр Николаевич Коркин.

А. Н. Коркин происходил из крестьян Вологодской губернии и, как вспоминает Граве, сохранил характерный вологодский говор. Он жил на одной из отдаленных линий Васильевского острова в маленькой квартире, обставленной старинной мебелью. Еженедельно по вечерам у него собирались гости. Здесь встречались профессора университета и молодежь — начинающие ученые, среди них был и Граве. Умный и образованный, Коркин был интересным собеседником. Особенно увлекали слушателей беседы о математике. «Я должен признаться,— замечает Граве,— что обе мои диссертации вытекали из этих разговоров, хотя в докторской диссертации играли большую роль Чебышев и Марков» [180, л. 5, 6].

Граве отмечает точность и ясность лекций Коркина, их оригинальность и мастерство изложения. Свои лекции Коркин диктовал. Такой способ оправдывал себя. «Я в моей педагогической деятельности,— замечает Граве,— неоднократно прибегал к способу Коркина, особенно, когда не было подходящих руководств. К лекциям Коркина студенты относились с большим уважением и аудитории его всегда были полны. Но в шутку лекции Коркина студенты называли «интегральной диктовкой» [180, л. 8].

А. Н. Коркин был одним из любимых учеников Чебышева (24, стр. 372), но позже дружба их перешла, как считает Граве, в скрытую вражду. Так, при выдвижении кандидатур в члены Академии наук Чебышев систематически обходил Коркина. Об одном из таких

случаев Граве рассказывает: «После смерти Имшенецкого... Чебышев заявил, что он желает провести в Академию профессора Варшавского университета Сонина. У Маркова же явилась мысль провести в Академию Коркина. Когда Чебышев узнал о кандидатуре Коркина, он заявил, что академиком может быть только Сонин и никто другой. Так как в то время Чебышев, по французской поговорке, делал дождь в хорошую погоду, то был выбран Сонин» [180, л. 9].

Неприязнь Сонина к Коркину перешла отчасти и на Д. А. Граве.

Большое влияние на становление Граве как ученого оказал также Андрей Андреевич Марков. Граве считал его наиболее яркой и колоритной личностью, человеком в высшей степени принципиальным, вспоминая в связи с этим историю об отлучении А. Маркова от церкви.

Марков и в науке, говорит Граве, был врагом всякой фальши и шарлатанства. Будучи очень резким человеком, он был особенно непримирим, когда сталкивался с нечестностью и беспринципностью в науке. Его полемика с П. А. Некрасовым «достигла такой резкости, что открытки Маркова... почтальоны не решались передавать по адресу. Несомненно, все симпатии были на стороне Маркова, ибо Некрасов, этот карьерист из духовной семинарии, пытался при помощи теории вероятностей доказать необходимость «самодержавия, православия и народности» [180, л. 12].

Начинающих ученых Марков встречал настороженно. Он обладал замечательным критическим даром и часто находил ошибки, когда другие математики их не замечали.

«Я любил говорить и спорить с Марковым, — признается Д. А. Граве. — Был случай, когда я начал разговор с ним утром и закончил поздно вечером. Под влиянием Маркова у меня развились критические способности» [180, л. 13].

Д. А. Граве был весьма дружен с К. А. Поссе. Их объединяла не только любовь к математике, но и к музыке. Поссе был талантливым пианистом, хорошо чувствовал и понимал музыку. Почти слепой он исполнял, как отмечает Граве, серьезные произведения, сочинения современных композиторов, требующие хорошей техники.

Сам Д. А. Граве был скрипачом и пианистом, знал теорию музыки.

С самого начала занятий в университете Граве попал в благоприятные творческие условия. Не удивительно поэтому, что Д. А. Граве увлекся научной работой еще будучи студентом. Он состоял в студенческом научном обществе, был инициатором издания журнала под названием «Записки физико-математического общества студентов С.-Петербургского университета». Это общество, как вспоминает Граве, было организовано по инициативе студентов. Декан факультета, известный химик Н. А. Меншуткин, поддерживал идею создания студенческого общества и помогал ему. Д. А. Граве был председателем общества и в журнале его напечатал статьи: «Об идеальной форме оптического стекла без сферической аберрации» [1], «Об интегрировании одного класса совокупных дифференциальных уравнений» [2], «О поверхностях минима» [3].

После введения нового университетского устава 1884 г. студенческое общество стало называться кружком и было передано под контроль акад. А. А. Маркова. Характер заседаний, отмечает Граве, изменился. Кружок существовал многие годы. В 1915 г. Д. А. Граве был назначен председателем экзаменационной комиссии в Петербургском университете. Тогда же он сделал доклад в студенческом кружке, на который собралось много студентов. Им было интересно встретиться с профессором Граве, который был 30 лет назад председателем кружка.

В студенческие годы Д. А. Граве опубликовал заметку [4] в «Журнале элементарной математики» Ермакова. Университет он окончил в 1885 г. со степенью кандидата. Его кандидатская диссертация «О поверхностях минима» [3] состояла из трех глав. В первой главе автор излагал сведения из вариационного исчисления, на основе которых ищутся условия, удовлетворяющие наименьшей поверхности. Во второй — рассматривал теоремы, относящиеся к кривизне наименьших поверхностей. В последней, — наибольшей по объему, дано интегрирование дифференциальных уравнений наименьших поверхностей.

Через всю жизнь Д. А. Граве проходит увлечение астрономией. Некоторое время он даже исполнял обя-

занности директора астрономической обсерватории (в Киеве). В Петербурге он встречался с выдающимися астрономами и геодезистами О. А. Баклундом, В. В. Витковским и др. В студенческие годы по поручению Министерства путей сообщения он проводил нивелировку (более 200 верст) между станциями Луга Варшавской и Чудово Николаевской дороги. Цель работы — определить высоту озера Ильмень над уровнем моря.

*Подготовка к научной деятельности.  
Защита диссертации. Преподавательская работа  
в Петербурге*

После окончания университета Д. А. Граве был оставлен при нем на два года для приготовления к профессорскому званию, но без назначения стипендии. Семья не имела средств. И чтобы содержать мать и сестер, Граве вынужден был давать уроки и искать случайные заработки.

Несмотря на полуголодное существование и заметное ухудшение здоровья, Д. А. Граве успешно занимался в течение двух лет и сдал магистерские испытания. По математике его экзаменовали А. Н. Коркин, А. А. Марков, К. А. Поссе, Ю. В. Сохоцкий; по механике — Д. К. Бобылев и Ю. В. Сохоцкий. После сдачи экзаменов его оставили при университете для работы над магистерской диссертацией.

Д. А. Граве поддерживал тесный контакт с выдающимися учеными Петербургской математической школы и по окончании университета. Вместе с Г. Ф. Вороным, В. А. Марковым и другими он принадлежал к младшему поколению этой школы.

От своего учителя Чебышева Д. А. Граве воспринял широту диапазона математических интересов и тонкое умение сочетать в своих исследованиях теоретический поиск с решением конкретных практических задач. Для всей научной деятельности Граве характерна тенденция разрабатывать четко поставленные конкретные проблемы, привлекать для их решения мощный аналитический аппарат, доводить выкладки до конца и получать просто сформулированные результаты. Эти особенности творчества Граве проявились уже в его магистерской диссертации. Она была закончена к началу 1889 г. [6].

Более подробно рассказывается о ней в следующей главе. Оппонентами по диссертации Д. А. Граве выступали А. Н. Коркин и Ю. В. Сохоцкий. Защита состоялась 30 апреля 1889 г.

В этом же году Д. А. Граве становится приват-доцентом Петербургского университета и получает должность преподавателя математики в Институте инженеров путей сообщения. В университете он вел практические занятия по дифференциальному исчислению, а также читал специальный курс геометрических приложений дифференциального и интегрального исчисления, а в Институте инженеров путей сообщения — аналитическую геометрию и другие части общего курса математики.

Специальный курс по теории поверхностей, который вел Граве в университете, в числе вольнослушателей посещал и профессор Морской академии будущий академик Алексей Николаевич Крылов.

С 1891 г. Д. А. Граве приглашают читать лекции на Бестужевских Высших женских курсах, а с 1893 г. — в Военно-топографическом училище.

В 1892—1893 гг. он читал лекции в помощь офицерам-топографам, занимающимся самообразованием. В своих воспоминаниях выдающийся военный астроном и геодезист профессор В. В. Витковский рассказывает: «Взявшись за высшую математику, многие топографы встретили на первых же порах непреодолимые затруднения. ...Желая облегчить первые шаги молодых топографов при изучении высшей математики, я уговорил друга моего Д. А. Граве, бывшего тогда приват-доцентом университета и еще только магистром чистой математики, прочесть ряд лекций в управлении финляндской съемки. Ее начальник, А. Р. Бонсдорф, не только согласился предоставить для лекций наибольший из чертежных зал, но сделал распоряжение о покупке доски и устройстве подходящего освещения для вечерних занятий. Лекции продолжались всю зиму 1892/93 г. и происходили два раза в неделю; их очень усердно посещали не только молодые офицеры последнего выпуска, прикомандированные к пехотным полкам Петербургского гарнизона, но и более пожилые топографы; не говоря уже о том, что ни Бонсдорф, ни я не пропускали ни одной из них. Вероятно, и теперь многие с благодарностью вспо-



минают бескорыстные труды нашего выдающегося математика, ныне профессора университета в Киеве. Он с замечательным искусством умел излагать самые отвлеченные и трудные вопросы с редкою простотою и ясностью. ...Лекции Граве так приохотили петербургских топографов к занятиям науками, что некоторые из них обратились ко мне с просьбой подробно объяснить им те отделы геодезии, которые излагались в училище очень кратко или даже вовсе не проходились» (23, стр. 276).

О профессоре В. В. Витковском Д. А. Граве вспоминал: «Я застал его полковником генерального штаба. Он жил в небольшой квартире из пяти комнат один с денщиком» [180, л. 16]. Витковский интересовался музыкой был хорошим пианистом. У него была скрипка Страдивариуса. «Мы,— пишет Граве,— часто играли с ним дуэты: он на своем хорошем рояле, а я на его Страдивариусе». Витковский читал лекции по геодезии и топографии в школе военных топографов. Чтобы приобщить слушателей лекций к музыке, он устраивал музыкальные вечера, на которые приглашал и профессоров, преподававших в училище.

О лекциях Д. А. Граве в Военно-топографическом училище В. В. Витковский вспоминает с восторгом: «Он с величайшим искусством преподавал в нашем училище целые три года, и я уверен, что офицеры-топографы, имевшие счастье слушать Граве, всегда с благодарностью вспоминают его мастерские лекции» (23, стр. 281).

Уже в самом начале педагогической деятельности Д. А. Граве проявил себя как хороший лектор, его лекции увлекали слушателей, будили их любознательность и стремление к дальнейшим занятиям. Эта черта его преподавательской деятельности сыграла потом немаловажную роль в организации Киевской школы математиков.

Помимо чтения лекций, Д. А. Граве в 1892—1897 гг. сотрудничал в математическом отделе Энциклопедического словаря Ф. А. Брокгауза и И. А. Ефрона под редакцией К. К. Арсеньева и Ф. Ф. Петрушевского.

В 1892—1899 гг. Граве принимал деятельное участие во вновь организованном С.-Петербургском математическом обществе, выступал на его заседаниях с сообщени-

ями (29). Летом 1892 г. он отправился в научную командировку за границу на пять месяцев. Много времени было посвящено работам, связанным с докторской диссертацией «Об основных задачах математической теории построения географических карт» [44].

Диссертация была готова к началу 1896 г. О решении основных задач Граве рассказывал: «Знаменитый Лагранж решил задачу относительно обычных, так называемых конформных карт, то есть таких, в которых сохраняется подобие в бесконечно малых частях. Он нашел все случаи конформных карт, у которых меридианы и параллели суть прямые или круги. Коркин задумал попробовать подобную же задачу для карт эквивалентных, у которых площади на карте точно подобны площадям изображений страны. И вот Коркин с некоторыми из учеников приступил к решению этой задачи. Но она оказалась далеко более трудной, чем задача Лагранжа. Долгое время они не могли ее вполне решить. Тогда я объявил, что даю им срок до мая месяца и, если им до этого срока не удастся решить задачу, то к решению ее приступлю я. Они не решились задачи, и я приступил к обдумыванию ее. У меня дело пошло более скоро. Случай, когда обе системы как меридианы, так и параллели должны быть на карте прямые я решил в две недели. Случай прямых и кругов я решил за лето. И главную трудность составил случай, когда обе системы должны быть кругами. Мне удалось решить и этот случай и тем закончить полное решение задачи к февралю следующего года. Марков, заметив, что у меня дело идет успешно, советовал попробовать доказать теорему Чебышева, которая не была доказана в продолжение 50 лет, несмотря на то, что были авторы, которые, несомненно, думали о ней, но рассматривали ее в упрощенном виде» [180, л. 6, 7].

Как известно, П. Л. Чебышев сформулировал свою теорему без доказательства. Граве утверждает, что доказательство ее он нашел очень быстро, буквально в несколько минут. Но, очевидно, этому предшествовали долгие предварительные размышления.

Диссертация Граве обратила на себя внимание многих ученых, способствовала завязыванию его дружбы с Шарлем Эрмитом (Париж) и Карлом Шварцем (Берлин).

Об этом он написал: «Я послал Эрмиту статью на французском языке о моей основной задаче об эквивалентных картах и уже через несколько недель я получил корректуру этой статьи [45] из редакции журнала Луи-вилля («Журнал чистой и прикладной математики». — В. Д.) Надо сказать, что это было большой честью, ибо в журнале Луи-вилля в то время ожидали годами очереди известные авторы. Особенно ценною была для меня дружба берлинского академика Шварца, которая продолжалась вплоть до его смерти. Я часто навещал Шварца во время моих поездок в Германию» [180, л. 8].

Защита докторской диссертации Д. А. Граве состоялась 21 апреля 1896 г. Официальными оппонентами выступали проф. А. А. Марков и приват-доцент И. Л. Пташицкий. Газета «Новости» писала: «Зал заседания был переполнен публикой, между которой, кроме представителей физико-математического факультета, во главе с деканом проф. Советовым находились члены нашей Академии наук, масса студентов и посторонних лиц... Лучшей характеристикой диссертации служит отзыв неофициального оппонента проф. А. Н. Коркина, который, указав на некоторые несущественные недостатки ее, сказал, что «этой работой Д. А. Граве укрепил традиции, установленные у нас Эйлером и которым следуют все математики нашего университета. Работа эта, несомненно, обратит на себя всеобщее внимание и вызовет уважение всего ученого мира» (47).

«Вы являетесь,— сказал Коркин, обращаясь к Граве,— достойным учеником Эйлера. В Вашей диссертации совсем нет воды, и каждая глава ее имеет вполне конкретное содержание. Эйлер, как все великие люди, имеет врагов. И теперь нашлись люди, которые с невероятным самомнением осмелились критиковать Эйлера. Когда же я Вам посоветовал посмотреть работы этих критиков, то Вы не нашли у них ничего, кроме полного непонимания предмета» (180, л. 9). Из деликатности Коркин не назвал имени акад. Сониной, попечителя Петербургского учебного округа, декана Бестужевских курсов, сидевшего в публике рядом с курсистками.

Защита диссертации была признана успешной и приват-доцент Д. А. Граве был удостоен степени доктора чистой математики (8, л. 9). «На этом,— говорит Д. А. Граве,— закончилось мое математическое образо-

вание, тесно связанное со школой знаменитого математика Чебышева» (6, л. 4).

После защиты докторской диссертации Граве продолжал свою педагогическую деятельность в Петербурге еще около трех лет. Н. Г. Чеботарев писал, что у Граве об этом периоде жизни сохранились яркие воспоминания, которыми он делился со своими учениками (63). Особенно любил он вспоминать о работе в Институте инженеров путей сообщения, где сотрудником его был талантливый математик В. А. Марков (брат академика), рано умерший.

### *Переезд в Харьков*

К концу 90-х годов здоровье Д. А. Граве ухудшилось. У него был суставной ревматизм в тяжелой форме и предрасположение к туберкулезу легких. Врачи советовали ему переехать на юг. К тому же, в Петербурге получить должность, соответствующую новому ученому званию, не представлялось возможным.

Весной 1899 г. Д. А. Граве прибыл в Харьков и стал лечиться грязями на курорте в Славянске. С 1 июля 1899 г. он получил место ординарного профессора кафедры чистой математики Харьковского университета. Одновременно он был профессором Технологического института. В Харьков Граве был приглашен по рекомендации М. А. Тихомандрицкого, поддерживал это предложение и А. М. Ляпунов. В марте 1899 г. Граве писал по этому поводу Ляпунову: «Мне кажется, что исключительный по благоприятности исход моего дела много зависел от Вашего благосклонного участия. Поощрение, оказываемое мне Харьковским университетом, дает мне силы и бодрость для дальнейших научных занятий» (3, л. 1). В марте 1902 г. Граве писал Ляпунову в связи с уходом последнего из Харьковского университета: «Два года совместной с Вами службы в Харьковском университете оставили в моей душе на всю жизнь самые светлые воспоминания» (3, л. 2,3). В Харькове Граве подружился также с В. А. Стекловым и в последующие годы вел с ним довольно регулярную переписку. Граве был официальным оппонентом на защите докторской диссертации Стеклова.

В Харьковском университете Граве в 1900 г. попытался создать при кафедре чистой математики математический кабинет и организовать семинар по теории алгебраических поверхностей. В математическом кабинете, по его мнению, должны быть не только различные геометрические модели, но и приборы — планиметры, пантографы, перспектографы, интеграфы, чебышевские механизмы и т. д. Однако планы Граве не были осуществлены из-за противодействия ректора Харьковского университета Г. И. Лагермарка (56, стр. 209, 210).

По тематике семинар, который хотел организовать Граве, примыкает к геометрии, т. е. близок его научным интересам. Но вместе с тем тема семинара связана с новыми течениями, которые тогда начали углубленно разрабатываться, главным образом, в трудах французских и итальянских математиков.

### Киевский период (1902—1918)

Один из старейших русских университетов — Киевский — был открыт в 1834 г. сначала в составе двух факультетов — философского и юридического. Вскоре на базе первого стали функционировать физико-математический и историко-филологический факультеты, а также был организован медицинский факультет. Университет в Киеве стал важнейшим научным и культурным центром юго-запада России. Начиная с 60-х годов здесь значительно улучшается преподавание математики. На физико-математический факультет приходят новые высококвалифицированные и энергичные преподаватели — П. Э. Ромер, М. Г. Ващенко-Захарченко, а в 70-х годах — В. П. Ермаков. Они расширили содержание читаемых математических курсов и продолжали вводить новые предметы. В этот же период начинается интенсивная научная деятельность преподавателей математики Киевского университета.

М. Г. Ващенко-Захарченко и В. П. Ермаков внесли большой вклад в русскую учебную математическую литературу. Их курсы были написаны с учетом новейших достижений науки и распространены и в других русских университетах. В трудах И. И. Рахманинова, М. Г. Ващенко-Захарченко, П. Э. Ромера разрабатывались акту-



Дмитрий Александрович Граве.  
(90-е годы)

альные вопросы науки. Благодаря их работам русская математическая общественность познакомилась с новыми достижениями в таких важнейших отраслях современной математики, как теория функций комплексного переменного, теория кватернионов, с различными вопросами алгебры, геометрии и др. Уже в эти годы повысился интерес киевских математиков к новым направлениям в науке.

В 70-х годах в Киевский университет пришел В. П. Ермаков. Он много ценного внес в методику преподавания математики, организовал издание «Журнала элементарной математики». Научно-педагогическое творчество математиков Киевского университета в эти годы подготовляло почву для будущей Киевской математической школы.

В 90-е годы прошлого столетия развернуло свою деятельность Киевское физико-математическое общество. Основное творческое ядро составляли преподаватели университета. Широкое распространение на математическом отделении получает семинарская форма занятий, введенная В. П. Ермаковым в конце 80-х годов. Ученые Киевского университета сделали очень много для разви-

тия науки в России. Работы их широко были известны и за рубежом. Такие, как признак сходимости Ермакова, его работы по теории дифференциальных уравнений, диссертации Ващенко-Захарченко и Ромера, сочинения Рахманинова.

Выдающуюся роль сыграл Киевский университет и в истории революционного движения в России. В 1839 г. была раскрыта революционная организация, в состав которой входило 35 человек. Многие из них были отданы в солдаты, а университет закрыли на год. В 90-е годы и в начале 900-х годов студенты университета активно участвовали в революционной деятельности. За участие в «беспорядках» студентов отдали в солдаты. Это событие отметил В. И. Ленин в газете «Искра» в статье «Отдача в солдаты 183-х студентов»<sup>1</sup>.

Общая демократическая настроенность большей части студенчества Киевского университета существенно влияла на уровень и на методы преподавания многих естественных дисциплин, в том числе и математики. Новое и прогрессивное вызывало интерес и находило поддержку слушателей.

Прогрессивные и демократически настроенные преподаватели, профессора были популярными в среде студентов, а «правым» нередко устраивали обструкции.

В такой обстановке начал Д. А. Граве свою работу в Киевском университете.

К концу 90-х годов математику здесь преподавали профессора В. П. Ермаков, М. Г. Ващенко-Захарченко, П. М. Покровский, Б. Я. Букреев. В 1898 г. проф. Ермаков перешел в штат Киевского политехнического института, а в 1901 г. умер проф. Покровский. На кафедре чистой математики Киевского университета оказались две свободные вакансии. На одну из них и был приглашен проф. Д. А. Граве. Он переехал в Киев в апреле 1901 г., поселился на даче в Святошино (ныне Октябрьский район г. Киева) и каждую неделю ездил в Харьков читать лекции.

В ответ на ходатайство Киевского университета о переводе проф. Граве, министр просвещения дал указание объявить на вакантное место конкурс. В конкурсе

---

<sup>1</sup> В. И. Ленин. Полное собрание сочинений, т. 4, стр. 391—396.

приняли участие: Д. А. Граве, профессор Казанского университета П. С. Назимов, из Юрьевского университета В. Г. Алексеев и Д. М. Синцов из Екатеринославского высшего горного училища. После обсуждения и баллотировки на факультете Д. А. Граве был избран большинством 16 голосов против двух, а на Совете университета — большинством 39 голосов против одного (13, л. 11). Таким образом, в январе 1902 г. проф. Д. А. Граве занял кафедру чистой математики в Киевском университете, где продолжалась вся его дальнейшая научно-педагогическая деятельность на протяжении почти 40 лет.

Вспоминая о начальном периоде работы в Киевском университете, Граве писал: «Новость, которую я застал в Киевском университете, состояла в том, что была в полном ходу конкуренция между профессорами, причем параллельные курсы происходили с полной строгостью, то есть в те же часы, что и основные, в различных аудиториях. Так, например, конкурировали профессора Букреев и Хандриков<sup>1</sup> [180, л. 32]. Хандриков «читал математику по старинке», а Букреев излагал материал, учитывая современное состояние науки.

Вскоре после переезда в Киев Д. А. Граве постигло тяжелое горе, он потерял близких ему людей. В 1902 г. умерла мать, немного позже жена, оставив на его попечении троих детей.

Несчастья преследовали его. Д. А. Граве простудился и заболел плевритом, перешедшим в острую форму туберкулеза. С осени 1906 г. он лечился около года за границей. Некоторое время был в санатории Шрейбера в Австрии, затем лечился на Ривьере (юг Франции) и в Монте-Карло. За это время он поправил свое здоровье. В Вене он познакомился с дочерью немецкого крестьянина из Моравии Марией Рихтер, ставшей его второй женой. Из-за болезни Д. А. Граве в 1905—1907 гг. почти ничего не печатал.

В 1902 г. Граве был послан от Киевского университета в Христианию (Осло) на празднование 100-летнего юбилея со дня рождения Абеля. Почти каждый год

---

<sup>1</sup> Основной специальностью М. Ф. Хандрикова были астрономия и геодезия. Но ему принадлежит и обширный курс анализа, составленный на основе трудов французских авторов.



Граве использовал летние каникулы для поездок за границу и ознакомления с уровнем науки, с постановкой преподавания математики в различных университетах, Граве сблизился с такими учеными, как К. Г.-А. Шварц и Ф. Г. Фробениус (Берлин), К. Гензель (Марбург), Е. Ландау (Геттинген), Ф. Мертенс (Вена), К. Штермер (Осло) (6, л. 64). Обмен мнениями с учеными оказал влияние на направление научных интересов Граве, которые с 1907 г. сосредоточиваются главным образом на новых разделах алгебры и теории чисел. Работы Граве этого периода содержат вывод нового тождества в теории квадратичных форм, теорию эллиптических функций в связи с проблемами теории чисел, отдельные вопросы общей теории функций, алгебраическое решение уравнений пятой степени, изящное упрощение изложения теории Галуа, изложение теории идеалов при помощи функционалов (по Веберу), новый вывод свойств Гауссовой суммы и др. По инициативе Граве в Киеве было начато углубленное изучение и дальнейшая разработка трудов Г. Ф. Вороного и Е. И. Золотарева, возрос интерес к вопросам аналитической теории чисел.

В этот же период Д. А. Граве выпустил целый ряд курсов, относящихся главным образом к алгебре и теории чисел. Кроме того, в журнале «*Intermédiaire des Mathématiciens*» («Посредник математиков») Граве предложил несколько задач и дал решение вопросов, поставленных другими авторами. Между прочим, он предложил доказать, что неопределенное уравнение

$$\frac{\pi}{4} = m \operatorname{arctg} \frac{1}{p} + n \operatorname{arctg} \frac{1}{q}$$

имеет только пять четверок целых решений  $m, n, p, q$ , а именно

$$m = 1, n = 1, p = 2, q = 3;$$

$$m = 2, n = 1, p = 1, q = 1;$$

$$m = 2, n = 1, p = 2, q = -7;$$

$$m = 2, n = 1, p = 3, q = 7 \text{ (Эйлер)}$$

$$m = 4, n = 1, p = 5, q = -239 \text{ (Мечин)}$$

Эта теорема была потом доказана К. Штермером. Подобные задачи Граве предлагал и своим студентам.

Курсы и пособия, составленные Д. А. Граве, имели большое значение для развития математических знаний в нашей стране. Они пропагандировали новые отрасли бурно развивающейся математической науки, будили и формировали интересы читателей и были широко распространены среди учащейся молодежи не только Киевского, но и других университетов России. Книги эти отличались оригинальностью и новизной материала, живым языком и доступным изложением. В свои руководства по новым вопросам алгебры и теории чисел автор умел вложить богатый фактический материал. Известно, что выхода новых курсов Граве всегда ждали с большим нетерпением. Один из учеников Граве, Н. Г. Чеботарев писал: «Можно без особого преувеличения сказать, что книги Граве воспитали и привили вкус к математике большинству современных математиков Союза» (63, § 4).

В создании и издании учебных книг существенную помощь оказывали Граве его ученики. Так, например, В. П. Вельмин был соавтором книги «Арифметическая теория алгебраических величин» [73], К. Ф. Абрамович помогал составлять «Введение в анализ» [70], «Теорию эллиптических функций» [71] и др.; Е. И. Жилинский принимал участие в первом издании «Курса теории чисел» [67], О. Ю. Шмидт — во втором издании этой книги [85] и в «Энциклопедии математики» [81]; В. А. Зморевич был соавтором «Аналитической геометрии» [154].

В Киевском университете проф. Граве читал аналитическую геометрию, алгебру, теорию чисел, теорию эллиптических функций, теорию групп и многие специальные курсы.

Граве многое сделал для улучшения преподавания в Киевском университете. Так, в 1908 г. по его предложению теория чисел была переведена из дополнительного курса в обязательный. Он писал: «Теория чисел, изучая свойства чисел целых, дробных, рациональных и алгебраических, составляет естественный фундамент для всей математики. Педагогическое значение теории чисел громадно. Всякий, хотя бы поверхностно знакомый с этой теорией, знает, что главную привлекательность эта теория имеет по характеру, строгости и логической последовательности доказательств и приемов изучения. Другие части математики берут, можно сказать, в пример, строгость изложения из теории чисел.

Помню указанного теоретического значения теории чисел, не надо забывать, что мы готовим преподавателей математики для средних школ. Какое же возможно преподавание арифметики без изучения основ теории чисел?» (9, л. 45).

Граве состоял также профессором Киевского коммерческого института (с начала 1910 г. до 1925 г.). Он организовал в этом институте страховой подотдел и кабинет страхового дела и заведовал им с 1913 г. В 1916 г. Граве был избран на должность декана коммерческого технического отдела.

Он читал общий курс математики, теорию вероятностей, страховую математику, а с 1915 г. — также специальный курс — теорию пенсионных касс. Желавшие по вечерам слушали его дополнительные курсы. Граве стремился, чтобы студенты имели хорошие знания основ математики и энергично протестовал против попыток уменьшить число часов по математике (15, л. 30). Руководства Граве по страхованию и пенсионным кассам возникли в результате его работы в Коммерческом институте.

Участвуя в работе Всероссийского сельскохозяйственного съезда в 1914 г., Граве был избран председателем комиссии по разработке вопроса о страховании от градобития (15, л. 52). В 1916 г. под руководством Граве его ученик В. Д. Васильев произвел вычисления пенсионной кассы для городского самоуправления г. Саратова.

Граве — горячий сторонник высшего женского образования. Так, в письме к В. С. Иконникову, который был директором Высших женских курсов в Киеве, он в 1906 г. писал: «Я получил от проф. Воронца известие, что среди профессоров циркулировала бумага, где расписывались все профессора, которые согласны читать лекции на женских курсах. Я как бывший профессор Бестужевских курсов, читавший там лекции восемь лет, буду очень обижен, если не буду приглашен читать лекции на Киевских курсах. Я принадлежу к числу самых ревностных сторонников высшего женского образования» (17). Вскоре Граве был приглашен на Киевские женские курсы для чтения лекций.

Здесь необходимо также отметить, что Граве был инициатором основания университета в Крыму. По его

поручению Н. М. Крылов, уехавший в Ялту для лечения в 1919 г., поднял этот вопрос перед городскими властями. Идея получила поддержку и предполагалось использовать под учебные помещения дворец в Ливадии. Совет Киевского университета также одобрил эту идею, и вскоре в Крыму был открыт филиал Киевского университета. После установления Советской власти Крымский филиал был преобразован в Таврический университет.

Д. А. Граве стремился привлечь к работе в высшие учебные заведения Киева видных математиков. В этом его поддерживал проф. Ермаков.

Так, в 1902 г. Д. А. Граве писал проф. В. А. Стеклову: «Переговорив обстоятельно с Ермаковым, я узнал, что в Политехникуме Вы всегда желанный гость. Стоит Вам сказать слово и ординатура будет в Вашем распоряжении. Что касается университета, которым Вы, конечно, больше интересуетесь, то мы с Ермаковым стараемся сделать все возможное, но тут могут встретиться разные побочные обстоятельства, конечно, не научного характера. Во всяком случае можно посоветовать в случае каких-либо задержек с университетом взять место в Политехникуме: ничто не мешает Вам впоследствии образовать органическую связь с университетом, выступив там в качестве приват-доцента. Пример такой уже был с Жуковским в Москве» (1, л. 2—3).

Как профессор Граве пользовался большим авторитетом и популярностью. Его ученик проф. Б. Н. Делоне пишет: «Д. А. Граве был замечательным профессором, лекции его отличались глубиной мысли и необыкновенным блеском изложения. Д. А. считал, что и общеобязательные курсы (он читал обычно аналитическую геометрию, высшую алгебру и теорию чисел) должны давать широкую картину предмета, причем надо подчеркивать связи между отдельными математическими дисциплинами. Особое значение он придавал специальным курсам и семинарам. На них-то и выдвигались ученики Граве» (27, стр. 351). Лекции Граве носили творческий характер. Многие теоремы, например по теории Галуа, впервые были им изложены на лекциях. Об этом упоминает студент Белоновский в своем сочинении «Об алгебраическом решении уравнений» (12, л. 2) и ряд других слушателей.

Граве развил и закрепил на факультете семинарскую форму занятий со студентами. Она использовалась еще до приезда Граве профессорами Ермаковым, Букреевым и др. В течение первых четырех — пяти лет традиция семинаров была закреплена, и уже к 1908 г. в Киеве вырисовываются контуры новой алгебраической школы.

Такой успех объясняется в значительной мере и талантливостью Граве как научного руководителя и лектора. Несомненно, большую роль сыграло и то, что сам Граве был воспитанником Петербургской школы, хотя в Киеве его научные интересы уже разошлись с кругом проблем его «петербургского» периода.

В начале 900-х годов Граве увлекся новыми современными направлениями в алгебре и теории чисел, четко осознав их место и значение в развитии других разделов математики. Этому способствовало его знание истории математики, его тонкая математическая интуиция, его знакомство с современным состоянием науки. Он улавливал основные тенденции и пути прогресса математики и очень удачно направлял творческие усилия своих учеников на разработку наиболее актуальных и трудных проблем алгебры и теории чисел. Вместе с тем Граве не стеснял своих учеников узкими рамками намеченных тем, предоставляя им самостоятельность в поисках нерешенных задач. Ученики Граве представляли работы, стоящие на уровне мировой науки. Многие из них вскоре сами стали первоклассными учеными.

Д. А. Граве выступал с докладами о своих работах на съездах ученых за рубежом, а также принимал деятельное участие в ряде съездов русских естествоиспытателей и врачей.

Особый интерес вызвал его доклад «О вычислении таблицы индексов для второй тысячи» на XII съезде русских естествоиспытателей и врачей в Москве в январе 1910 г.

Суть доклада состояла в следующем. Если разность  $a - b$  двух целых чисел  $a$  и  $b$  делится на  $k$ , то они называются сравнимыми между собою по модулю  $k$ , что записывается следующим образом  $a \equiv b \pmod{k}$ . Сравнения обладают свойствами, аналогичными свойствам уравнений алгебры. Если задано сравнение  $f(x) \equiv 0 \pmod{k}$ , где  $f(x)$  — целая функция с целыми коэффициентами, то

может быть поставлена задача о решении этого сравнения аналогично задаче решения уравнений в алгебре.

При рассмотрении показательных сравнений  $a^x \equiv \equiv b \pmod{k}$  получается теория, аналогичная теории логарифмов. Показательное сравнение  $a^x \equiv b \pmod{p}$ , где  $a$  так называемый первообразный корень простого числа  $p$ , можно решить при всяком числе  $b$ , не делящемся на  $p$ . Число  $x$  называется индексом числа, а первообразный корень  $a$  — основанием индексов. Индексы в теории чисел дают возможность достигать вычислительных выгод, аналогичных тем, которые дают логарифмы, а именно, умножение чисел, заменяется сложением индексов, возвышение в степень заменяется умножением индекса на числа.

Известный математик К. Г.-Я. Якоби составил таблицу индексов для всех простых модулей до 1000. Эта его работа под заглавием «*Canon arithmeticus*» была издана в 1839 г. Встреченное Д. А. Граве в литературе замечание о том, что для второй тысячи таблицы индексов никогда не будут вычислены, натолкнуло его на мысль попробовать осуществить эту кажущуюся невозможной работу, но только коллективно. Д. А. Граве составил план работы и обратился к студентам-математикам Киевского университета с предложением принять участие в составлении таблицы индексов. На это предложение откликнулось 63 студента, и едва ли посильный для одного человека труд с успехом был выполнен в шесть недель. Сравнительно короткий срок выполнения этой работы объяснялся тем, что велась она коллективно, а также тем, что наиболее утомительная часть вычислений была произведена на арифмометрах. Расчеты делались таким образом, что после 10—18 вычислений являлась возможность получить контрольное число (единицу), и это давало уверенность в правильности вычисления таблиц. О докладе Граве на XII съезде русских естествоиспытателей и врачей известный харьковский математик Д. М. Синцов писал: «Блестящий результат планомерного разделения труда и значение коллективного труда даже в такой области, как чистая математика, произвели сильное впечатление на присутствовавших членов съезда» («Вестник опытной физики и элементарной математики», Одесса, 1910, № 508.)

Д. А. Граве был ученым с передовыми философскими взглядами, прогрессивно демократически настроенным. Сущность и роль математики он понимал в материалистическом духе. В 1908 г., когда получили распространение идеи махизма и позитивизма в России, а в математике культивировались идеи конвекционализма А. Пуанкаре, Граве на торжественном акте в Киевском университете в речи о «Значении математики в естествознании» изложил свои философские взгляды. В начале речи автор указал, что «единственным звеном, связывающим наш внутренний мир с внешней природой, являются наши чувства». Как же удостовериться в истинности их показаний? На это он отвечает: «...желание разобраться в правдивости показаний чувств привело к критическому отношению к опыту и наблюдению». Нужно было отделить истину в показаниях наших чувств от самообмана. В результате появился научный опыт и как следствие его теория. «Теория есть всегда до некоторой степени произвольно выбранная логическая схема, в рамки которой мы укладываем результаты опыта и наблюдений». Как же составляется теория? Сначала на основании данных чувств строится догадка, гипотеза. Затем она проверяется и, если не удовлетворяет, заменяется новой, более совершенной. Граве подчеркивает, что представление о внешнем мире «не может основываться на каких-либо априорных соображениях, но должно совершаться а posteriori, т. е. на основании опыта», выступая тем самым против кантианства, идеи которого, как известно, в те годы распространились среди русской интеллигенции. Правда, Граве не был последовательным материалистом, не владел четко теорией отражения и несколько преувеличивал роль количественной характеристики явлений, роль «математических теорий всех явлений природы».

В вопросе о происхождении и развитии науки, в частности математики, Граве, подобно Чебышеву, особо отмечал роль практики и прикладных наук. Критикуя высказывания идеалистов о том, что математика есть «чистая наука», «продукт духа», не связанный с жизненным опытом и т. п., он говорил: «Значение приложений для прогресса чистой математики, по моему мнению, настолько важно, что я не берусь отвечать на вопрос, что имеет более важное значение: математика для при-

ложений или приложения для математики. Мы не погрешим, если скажем, что развитие математики совершалось под постоянным влиянием приложений». Эти приложения были как теоретические в натурфилософии, так и практические в технике и вообще в обыденной жизни. Окружающая нас «жизнь так разнообразна, так богата, что не может быть уложена в рамки какой-нибудь рутинной теории. Эта жизнь не дает покоя уму. Она будит его и направляет его насильно в новые области, ставит новые математические задачи и, что еще важнее, дает возможность находить новые методы исследований» [66, стр. 85].

Подчеркивая важное значение приложений в математической теории, Граве призывал сотрудничать представителей различных наук. Математик, натуралист и техник должны идти рука об руку, каждый из них нуждается в помощи другого. Только совместная их работа может быть успешна и дает нужные плоды.

Высказывания Граве по вопросам теории познания и другим философским проблемам имеются в его книге «Энциклопедия математики» [81], выпущенной в 1912 г. Говоря об открытии анализа бесконечно малых, автор отмечает, что уже Ньютон сознавал большое прикладное значение новых методов математики и поэтому называл приемы их приложения к изучению природы «математическими принципами натуральной философии». Однако на пути всестороннего их применения возникают серьезные трудности. Граве отмечает идею бесконечности, которая «простирается в обе стороны — в сторону бесконечно больших — бесконечность пространства, в котором двигаются небесные тела, и в сторону бесконечно малых, в сторону тайн молекулярного строения материи» [81, стр. 113].

Как известно, природа бесконечного была предметом различных толкований и многих дискуссий. Некоторые математики, в частности Д. Гильберт, считали, что математическая бесконечность не существует в природе и представляет собой некоторое условное понятие. В отличие от такой точки зрения Граве считал, что математическая бесконечность имеет объективный характер, прообразом ее является реальная физическая бесконечность материи. Подчеркивая диалектическую связь конечного и бесконечного, он правильно отмечал, что сущ-



ность бесконечного можно понять только через конечное. «Не имея сил обнять идею бесконечности во всем ее объеме, — писал Граве, — мы изучаем конечные факты, на которых проявляется влияние бесконечности, и таким образом мы стараемся составить себе понятие, если не об идее бесконечности, в самой себе, то, по крайней мере, об ее проявлениях в вещах конечных» [81, стр. 114].

В отличие от идеалистов-махистов, говоривших о невозможности познания объективной истины и признававших только условный и относительный характер наших знаний, Граве, как отметил Б. В. Пясковский (54), защищал объективный характер науки, в том числе и математики. «Мир идей, — писал Граве, — должен быть таков, чтобы все логические выводы из него не противоречили показаниям чувств и, обратно, чтобы всякое чувственное восприятие находило себе объяснение в мире идей». Этот мир идей постепенно совершенствуется и поправляется опытными данными. «Мы верим, что постепенно, исправляя наши теории и поправляя наши ошибки, мы строим здание внутреннего мира идей, все ближе и ближе приближающегося к параллелизму с внешним миром» [81, стр. 583]. «История науки, — продолжает Граве, — дает целый ряд поразительных примеров гармонической связи между математической теорией и опытным знанием» [81, стр. 584].

Граве принадлежал к числу прогрессивно мыслящих ученых. Вспоминая обсуждения нового университетского устава в начале 900-х годов в Харьковском и Киевском университетах, он отмечал, что эти обсуждения произвели на него тяжелое впечатление. «О науке же говорили как-то вскользь. Я же полагал, что единственное правильное понимание университета это есть то, что университет должен быть лабораторией науки, в которой профессор должен быть исследователем, а студент — начинающим ученым» [180, л. 36].

Граве поддерживал студенческое движение накануне 1905 г. Так, в письме В. А. Стеклову от 3 января 1903 г. он сообщает: «по просьбе студентов я не читал двух лекций 8 октября, за что получил выговор от попечителя» (1, л. 7).

Граве предлагал построить пенсионные кассы на демократических основах: «1) пенсионные кассы следует организовать для всего населения; 2) необходимо



Д. А. Граве (начало 900-х годов)

положить в основание пенсионного дела принцип труда в том или другом учреждении» [95, предисловие]).

Интересно его письмо к В. А. Стеклову от 14 мая 1917 г. (I, л. 26, 27) по поводу организации Свободной ассоциации наук. Он писал: «Я хочу Вам сообщить мои мысли, которые я давно сообщаю моим друзьям и знакомым, о желательном направлении школьной политики в вопросе о высшей школе. Мне интересно знать, будут ли мои мысли соответствовать господствующим течениям в Вашей Ассоциации. Я ставлю три принципа в основу новой школы: свободу, децентрализацию и демократизацию.

Свободу я понимаю в смысле возможной краткости и лаконичности нового университетского устава, который не мешал бы жизни школы развиваться самостоятельно в зависимости от местных условий. Поставьте по возможности меньше рогаток и формалистики... Децентрализацию я понимаю, как стремление основывать высшие школы по всей территории России, а не сгущать их в немногих центрах. Без большого числа провинциальных университетов невозможен прогресс культуры провинции... Под демократизацией науки я понимал обя-

зательность для научного университета руководить также и народным, который должен быть слит с научным.

В особенности это верно для провинции.

Я считаю, что, быть может, было бы полезно начинать основание провинциальных университетов с основания народных, которые можно было бы далее расширять, пока они не обратятся в научные.

Это бы дешевле стоило и, быть может, тогда выработалась форма университета, созданная гением русского народа».

Как известно, Свободная ассоциация наук возникла в Петербурге в результате объединения передовых ученых и писателей, стремившихся к интенсификации русской науки и приближению ее к народу. На первом организационном собрании ее 10 апреля 1917 г. с речами выступали А. М. Горький и акад. И. П. Павлов. В. А. Стеклов был избран (совместно с Д. К. Заболотным) председателем Организационного комитета<sup>1</sup>. Третье публичное заседание Оргкомитета проходило 24 мая 1917 г. в Москве, в Большом театре.

## После Октября (1918—1939)

После установления Советской власти на Украине Граве с энтузиазмом приступил к большой работе по перестройке высшей школы, по организации научных исследований на новых основах. В письме от 2 января 1918 г. О. Ю. Шмидт, поздравляя своего учителя с Новым годом, желал ему осуществления его «горячих желаний — расцвета высшего образования в России» (16, № 359). Активное участие Граве в создании советской науки и культуры, в реформе высшей школы было отмечено специальным декретом Совнаркома УССР в 1921 г. (18, стр. 371). Граве продолжал свою научно-педагогическую деятельность в Киеве. Однако в 20-е и в начале 30-х годов основная тематика его научных интересов значительно изменилась. Преобладающее место в его исследованиях заняли механика и различные прикладные вопросы математики. Это было обусловлено, очевидно, желанием более активно содействовать восстановлению и развитию народного хозяйства.

<sup>1</sup> Подробнее об этом см. в кн.: Г. И. Игнатиус. Владимир Андреевич Стеклов. М., «Наука», 1967, стр. 88 и сл.

В 1918 г. в Киеве начало свою деятельность научное общество, где Граве возглавлял математическую секцию. На основе этого общества в 1919 г. была организована Украинская Академия наук. Физико-математический отдел Академии, согласно ее уставу, объединял науки чисто теоретические (математика, теоретическая физика и др.) и прикладные (химия, биология, техника и др.). Основное внимание сотрудников должно было быть направлено на разработку практических вопросов и связанных с ними теоретических проблем.

Первым математиком в действительные члены Украинской Академии наук в январе 1920 г. единогласно был избран Д. А. Граве. С 1920 г. в составе Украинской Академии было три математические кафедры (или по терминологии того времени — комиссии): прикладной математики (Д. А. Граве), чистой математики (Г. В. Пфейфер), математической физики (Н. М. Крылов). Они объединялись в математический цикл. Некоторое время Граве возглавлял также Институт технической механики, Астрономическую обсерваторию, лабораторию по испытанию строительных материалов и другие учреждения Академии.

Кафедра прикладной математики с 1919 г. в течение нескольких лет изучала, главным образом, магнитное поле Солнца и роль электрических сил в небесной механике. При кафедре была организована «лаборатория экспериментальных исследований по натуральной философии», особенно активно действовавшая в 1921—1922 гг. Кроме самого Граве, в лаборатории работали его ученики и сотрудники Ю. Д. Соколов, И. Я. Штаерман, физик Носов и др. Они занимались, как вспоминает Ю. Д. Соколов, небесной механикой и математической физикой (функции гамма, гипергеометрические и др.). Несколько позже большое внимание уделялось теории относительности Эйнштейна в связи с принципами механики. Особое внимание Граве обращал на изучение связи между электрическими силами и всемирным тяготением.

В 1921 г. Ю. Д. Соколов, будучи студентом последнего курса университета, готовился сдавать курс теоретической астрономии. В связи с этим он более углубленно изучил расчеты небесной механики, что дало ему возможность сделать полное вычисление орбиты движения кометы 1—1921 г. Верность вычислений элементов и эфемерид кометы 1—1921 г., произведенных Ю. Д. Соколо-

вым, была вне сомнений. Д. А. Граве был в восторге от блестящего успеха своего ученика.

С 1921 г. Ю. Д. Соколов был зачислен в штат Украинской Академии наук, в 1939 г. избран членом-корреспондентом и ныне является ее сотрудником.

Как видно из отчетов физико-математического отделения УАН, в середине 20-х годов Граве продолжал изучение электромагнитной деятельности Солнца в направлении гидродинамики и математической теории электричества. Много времени и внимания он уделял воспитанию научных кадров. Так, на заседаниях отделения в 1925 г. он неоднократно докладывал о работах Н. И. Ахиезера, В. Е. Дьяченко, Ю. Д. Соколова.

В. Е. Дьяченко занимался теорией движения «разрывов» при движении жидкости, Н. И. Ахиезер писал трактат по аэродинамике, Ю. Д. Соколов работал над проблемами трех тел и  $n$  тел.

Над вопросами прикладного характера Д. А. Граве продолжал работать и в последующие годы. Так, в начале 1926 г. он предлагает тему для премии — «Теория винта», публикует ряд статей, касающихся резонанса, теории относительности, теории упругости, теоретической астрономии. Но в то же время намечается переключение его внимания на чисто теоретические вопросы. Так, на заседании физико-математического отдела УАН 25 февраля 1926 г. Д. А. Граве делает доклад «Геометрия плоскости как предельная для геометрии псевдосферы», посвященный 100-летию открытия неевклидовой геометрии Лобачевским. Это сообщение сопровождалось демонстрацией геометрических моделей. К концу года научные интересы Граве концентрируются главным образом на теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, а также на некоторых вопросах дифференциальной геометрии.

В последующие шесть-семь лет Д. А. Граве все еще уделяет значительное внимание прикладным вопросам. Следует отметить весьма широкий круг его научных занятий в 20-е — начале 30-х годов. Так, его интересуют следующие вопросы — взаимоотношение между астрономией, метеорологией и ботаникой (механизм влияния солнечных пятен); движение электронов в магнитном поле; обнаружение магнитных залежей; влияние электрической гипертатмосферы на земной магнетизм; движение

сжимаемой жидкости; влияние вращения Земли на вращение горизонтальных гидравлических турбин; физические основы гидро- и аэродинамики; поверхности Римана и теоретические основы электротехники; сопротивление жидкости движению тел и т. д. При решении этих конкретных вопросов ученый с большим мастерством использовал свои математические знания, разностороннюю образованность в областях, смежных с математикой.

Значительное место в научном творчестве Граве с середины 20-х годов заняла теория дифференциальных уравнений.

Вместе с тем он продолжал работать в области алгебры и теории чисел. Его статьи по этим вопросам появлялись и в 20-е и в 30-е годы, этой тематикой он был поглощен в последние годы жизни.

Об оригинальности и простоте изложения работ Граве писал акад. А. Н. Крылов: «Я восхищен Вашим решением вопроса Чебышева, в особенности отчетливостью и ясностью изложения, в котором Вы по-старинному дорожите временем и трудом читателя, так, чтобы ему не приходилось подолгу размышлять над каждой строчкой» (16, л. 280).

Помимо научной и педагогической деятельности, Д. А. Граве вел большую работу по организации научных исследований в актуальных областях прикладной математики. Уже в начале 20-х годов он создал семинар по прикладной математике и механике. Совместно с М. Ф. Кравчуком и И. Я. Штаерманом Граве руководил семинаром по чистой математике (6, л. 5). Он неустанно подчеркивал необходимость совместной работы инженеров и математиков (42, стр. 63).

Переход к новой тематике в первые годы после революции нельзя считать неожиданным. Д. А. Граве, оставаясь верным принципам чебышевской школы, всегда рассматривал математику в ее тесной связи с проблемами естествознания, с решением конкретных практических задач, но существенную роль в определении тематики в эти годы сыграла конкретная историческая обстановка. Граве правильно понимал узловые задачи науки и хотел оказать максимальную поддержку народному хозяйству молодой страны.

Граве предложил организовать в Киеве музей труда и науки. «Только единением науки и труда,— писал он

в 1924 г., — можно надеяться поднять страну из ее тяжелого экономического состояния. Надеяться на иностранный капитал и технику не приходится, если не желать полного порабощения союзного пролетариата. Необходимо приблизить науку к труду и поднять рабочего на возможно большую высоту интеллектуального и научного уровня» (16, № 85). Граве считал, что высшие технические учебные заведения должны отойти от «теоретичности и оторванности от жизни» и приблизиться к производству. Он предлагал избавиться от «старорежимного соревнования между ведомствами» и не устраивать при отдельных вузах «плохонькие музеи», а организовать центральный музей труда и науки для всех вузов и техникумов, для широких кругов населения и в первую очередь для рабочего от станка.

Изменение научных интересов Граве отразилось и на его преподавательской деятельности, продолжавшейся почти до середины 30-х годов. В это время он читал лекции в Университете, переименованном в Институт народного образования (ИНО) и в Физико-химико-математическом институте, выделившемся из университета, в Институте народного хозяйства и в Архитектурном.

Примерно до середины 20-х годов он преподавал еще аналитическую геометрию, алгебру, теорию чисел, коммерческую арифметику, а в дальнейшем стал вести почти исключительно теоретическую механику. У него сложился весьма своеобразный курс «Теоретическая механика на основе техники» [141]. Об этом курсе акад. А. Н. Крылов писал Д. А. Граве 2 апреля 1932 г.: «... Спешу Вас искренно поблагодарить за экземпляр второго издания Вашего превосходного курса теоретической механики, радуясь при этом, что Вы, правоверный математик, сообразились в нашу техническую ересь и считаете наши практические вопросы достойными Вашего внимания» (16, № 278).

Лекции Граве в конце педагогической деятельности иногда сводились, как вспоминают ученики, к чтению и комментированию пособий и учебников самого Граве.

На своих лекциях наряду с изучением программного материала Граве рассказывал много интересных эпизодов из истории математики, из истории изучения отдельных проблем. Молодежь его слушала всегда с большим интересом.

Граве исключительно чутко и тепло относился к молодым ученым. Как вспоминают ученики Граве, он не жалел времени, чтобы помочь им усвоить материал, беседы с ним иногда продолжались по несколько часов. Некоторое время Граве непосредственно руководил научно-исследовательской кафедрой математики, где велась подготовка аспирантов.

Он принимал деятельное участие в организации института нового типа. Об этом Граве писал акад. А. Н. Крылову 20 сентября 1930 г.: «... дня два тому назад я послал Вам мою книгу на украинском языке под заглавием «Теоретична механіка на основі техніки». Эта книга должна быть основным курсом в институте «Физ.-хим.-мат.», который организуется на месте бывших университета и ИНО. На место ИНО организовано три института: Соцвос, Профобр и Физ.-хим.-мат. Институт Физ.-хим.-мат. является осуществлением моей давнишней мечты об осуществлении школы, подобной Ecole Polytechnique (Парижской политехнической школы.—В. Д.). Осуществляют институт мои ученики с В. Е. Дьяченко во главе. Тут будет самое широкое преподавание математики и механики, соединенное с явно выраженным индустриальным направлением... Мы будем выпускать, кроме специалистов по математике, физике и химии, еще инженеров-исследователей.

Будут построены новые технические лаборатории и приглашены уже все лучшие инженерные силы Киева. По моей инициативе наш институт официально обращается к Вам с приглашением приехать в Киев для прочтения какого-нибудь курса по Вашему выбору. Нам, конечно, было бы желательно, чтобы этот курс был прикладного характера или же по приближенным вычислениям. Я лично был бы счастлив встретиться с Вами после столь долгой разлуки» (4, л. 10, 11).

Большое значение придавал Граве распространению образования и популяризации науки. В статье о строении мира он критикует идеалистические и религиозные взгляды на происхождение Вселенной и пропагандирует материалистические идеи Коперника, Лапласа, Эйнштейна и др. [99]. Популярны статьи он помещал также в газете «Народна воля» и в журнале «Вісник кооперативного страхування».

В статье, написанной несколько позже, говоря о зна-



чении математики для социалистического строительства [148], Граве осуждает различные идеалистические течения в математике и подчеркивает большое методологическое значение диалектического материализма для математики. «Только философия диалектического материализма,— писал он,— оправдывает веру в математику и в науку вообще. Математика, которую создала сама материя, способна все более приближаться к объяснению природы» [148].

Весьма интересны взгляды Граве на будущее машинной математики. Он утверждал: «Математику надо механизировать. Я уверен, что будущее в математике принадлежит вычислительным машинам» [148, стр. 48].

В конце 1933 г. в Академии наук УССР был организован Институт математики, первым директором которого стал Д. А. Граве. В 1939 г. он оставил этот пост и принял заведование сектором алгебры и теории чисел, чтобы иметь возможность больше внимания уделять научной работе. В это время шла подготовка к печати третьего тома его «Трактата по алгебраическому анализу». Однако смерть помешала ученому завершить этот труд. Д. А. Граве умер 19 декабря 1939 г.

Большой заслугой Д. А. Граве было создание первой в нашей стране крупной алгебраической школы. В 1932 г. Н. Г. Чеботарев отметил, что «в деле развития интереса к вопросам алгебры, в частности к теории Галуа и алгебраическим числам, главная роль принадлежит акад. Д. А. Граве, который сумел заинтересовать ими молодежь, а также направить ее по путям, которые оказались весьма плодотворными» (61, стр. 5).

В 1935 г. общественность торжественно отметила 50-летний юбилей научно-педагогической деятельности Д. А. Граве. На юбилей в Киев съехались многочисленные ученики и «научные потомки» Граве. За заслуги в социалистическом строительстве и воспитании научных кадров Граве был награжден орденом Трудового Красного Знамени. Ему было присвоено почетное звание Заслуженного деятеля науки УССР.

В 1924 г. Граве был избран членом-корреспондентом, а в 1929 г.— почетным членом Академии наук СССР. Он был членом Петербургского, Московского, Харьковского, Киевского математических обществ и Львовского научного общества им. Т. Г. Шевченко.

## НАУЧНОЕ ТВОРЧЕСТВО Д. А. ГРАВЕ

Научно-литературная деятельность Д. А. Граве продолжалась 55 лет. За эти годы опубликовано 180 его работ. Начал Граве с небольших заметок в студенческом журнале. Затем его статьи, заметки, весьма объемистые курсы и монографии выходили довольно регулярно. Круг научных интересов Граве необычайно широк, ему принадлежат работы по теории дифференциальных уравнений и геометрии, алгебре и теории чисел, теоретической механике и прикладным вопросам, теории функций и страховой математике. Некоторые его работы посвящены вопросам преподавания математики, истории ее, популяризации науки.

### Теория дифференциальных уравнений

Теория дифференциальных уравнений находилась в центре внимания Петербургской математической школы. Много внимания уделял ей в своих работах учитель Д. Граве А. Н. Коркин. В докторской диссертации Коркина «О совокупных уравнениях с частными производными первого порядка и некоторых вопросах механики» (С.-Петербург, 1867) содержался новый метод интегрирования уравнений названного типа. Открытие этого метода Коркиным было связано, по словам Граве, желанием решать вопросы механики, для которых известный тогда метод Якоби был неприменим. В 70-е годы подобная тематика разрабатывалась в трудах немецкого математика А. Майера и выдающегося норвежского математика Софуса Ли. Независимо друг от друга они открыли новые методы интегрирования систем дифференциальных уравнений с частными производными. При этом метод

Майера вошел в литературу под названием второго метода Якоби.

В магистерской диссертации [6] Граве обобщил второй метод Якоби интегрирования уравнений с частными производными первого порядка на случай, когда заданные уравнения содержат в явном виде искомую функцию (§ 18 и след.). В § 10 он дал новое доказательство основной теоремы Коркина, а в § 27 и следующих использовал метод Коркина для решения обобщенной задачи Коши: интегрировать замкнутую систему  $g$  уравнений так, чтобы искомая функция обращалась при частных значениях  $g$  из  $n$  переменных ( $g \leq n$ ) в произвольно заданную функцию остальных. Автор видоизменил метод Коркина, приняв начальные значения переменных за произвольные постоянные; при этом он доказал, что исследования Майера по линейным уравнениям и новый в то время метод Ли являются частными случаями метода Коркина. Вторая часть работы посвящена приложениям, где автор указал ряд классов непосредственно интегрирующихся систем и применил теорию к задаче трех тел. Здесь он решает задачу, предложенную ему Коркиным, об отыскании для уравнения Бертрана всех интегралов, независимых от закона действия сил. Для этого он берет систему в бертрановских координатах

$$\begin{aligned} u &= x^2 + y^2 + z^2 & u_1 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ v &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 & v_1 &= \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 \\ w &= x\xi + y\eta + z\zeta & w_1 &= x_1\xi_1 + y_1\eta_1 + z_1\zeta_1 \\ r &= x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta & r_1 &= x\xi_1 + y\eta_1 + z\zeta_1 \\ & & q &= xx_1 + yy_1 + zz_1 \\ & & s &= \xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1, \end{aligned}$$

которые связаны зависимостью

$$\begin{vmatrix} u & q & w & r_1 \\ q & u_1 & r & w_1 \\ w & r & v & s \\ r_1 & w_1 & s & w \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнения системы принимают вид:

$$\frac{du}{dt} = \frac{2w}{m}, \quad \frac{du_1}{dt} = \frac{2w_1}{m}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{r}{m} + \frac{r_1}{m_1}$$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= 2\alpha w + 2\beta r, & \frac{dv_1}{dt} &= 2\alpha_1 w_1 + 2\beta r_1, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{v}{m} + \alpha u + \beta q, & \frac{dw_1}{dt} &= \frac{v_1}{m_1} + \alpha_1 u_1 + \beta q, \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{s}{m_1} + \alpha q + \beta u_1, & \frac{dr_1}{dt} &= \frac{s}{m} + \alpha_1 q + \beta u, \\ \frac{ds}{dt} &= \alpha_1 r + \alpha r_1 + \beta(w + w_1).\end{aligned}$$

Здесь  $\alpha, \alpha_1, \beta$  — коэффициенты, зависящие от закона действия сил. Приравнявая нулю полную производную искомого интеграла  $V$ , выраженную при помощи этих уравнений, Граве получил неоднородную линейную функцию от  $\alpha, \alpha_1, \beta$ . Приравнявая затем коэффициенты этой функции нулю, автор находит для  $V$  систему из четырех частных уравнений. Их интегрирование представляло большие трудности. При решении этой задачи автор проявил блестящую технику выкладок, которой отличались все его лучшие работы. В этой работе проявилось также стремление Д. А. Граве к получению конкретных решений задачи, характерное для Петербургской школы.

В этот же период Граве изучал вопрос об интегрировании линейных уравнений второго порядка в квадратурах. В одной из работ [5] он находит два ряда пар функций  $P_n, Q_n$ , которые обладают следующим свойством: если нам известно частное решение некоторого уравнения

$$y'' + P_n y' + Q_n y = 0,$$

то при помощи этого решения интегрируются в квадратурах все уравнения вида:

$$y'' + P_m y' + Q_m y + R = 0,$$

где  $R$  — произвольная функция от  $x$ , а  $m$  — целое число, меняющееся от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Немного позже Граве занялся вопросом интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных высших порядков и сделал на эту тему в 1891 г. два сообщения [48] на заседаниях С.-Петербургского математического общества (50, стр. 15—17).

В то же время он составил курс интегрирования уравнений с частными производными [7] и поместил в энциклопедическом словаре статьи о дифференциальных уравнениях [32] и об их интегрировании [35].

В дальнейшем научные интересы Граве были переключены на другие вопросы. К теме дифференциальных уравнений он возвратился примерно через 30 лет. В большой статье [118] рассматриваются уравнения Эйлера и их применение к конкретным задачам теории упругости. Особое внимание автор уделил здесь уравнениям гипергеометрического типа. Роль функции Шварца в теории линейных дифференциальных уравнений высшего порядка освещена в работе [119], где автор предлагает новый способ решения однородных уравнений такого вида.

Решение весьма общей задачи нахождения линейных дифференциальных уравнений, инвариантных относительно дробно-линейной группы преобразований, найдено благодаря весьма остроумно расположенным большим вычислениям в работе [128].

Аналогичный вопрос рассмотрен для уравнений типа Лапласа. Таким уравнением оказалось уравнение Эйлера — Пуассона [132]. Об общем методе отыскания дифференциальных выражений, инвариантных относительно непрерывной группы преобразований, написана статья совместно с Н. Г. Чеботаревым [137]. Одну из своих статей Граве посвятил решению линейных дифференциальных уравнений при помощи интегральных уравнений типа Вольтерра. В работе «Функции математической физики и гипергеометрический ряд» рассматривается применение гипергеометрического ряда к решению дифференциальных уравнений математической физики [162]. В этих работах получили дальнейшее развитие, углубление и упрощение классические результаты теории дифференциальных уравнений.

## Геометрия

Ряд важнейших задач дифференциальной геометрии, связанных с черчением географических карт, решен в докторской диссертации Граве [44]. Вопросы картографии, в частности рассмотрение различных спосо-

бов отображения сферы на плоскость при тех или иных условиях, с давних пор привлекали внимание математиков и среди них Эйлера, Лагранжа, Чебышева, Коркина, Маркова, Дарбу, Тиссо и др.

Как известно, земная поверхность не может быть развернута на плоскость. При этом происходит искажение масштаба и в различных точках по-разному. Поэтому весьма важно выбрать для данной страны из всех проекций такую, которая удовлетворяла бы известным основным требованиям и давала бы по возможности малое отклонение от постоянства масштаба. Одно из основных, давно распространенных требований, состояло в сохранении подобия в бесконечно малых частях, при котором проекции сохраняют углы (свойство конформности). Формулы, осуществляющие такое отображение, содержали еще произвольные функции. Поэтому можно было предъявить еще дополнительные требования. Лагранж, в частности, поставил условие, чтобы меридианы и параллели изображались кругами. Это условие ограничивало произвольные функции. Для ограничения постоянных параметров карты Лагранж потребовал, чтобы отклонение масштаба в разных точках страны при ее изображении на карте было возможно меньшим. Он показал, что параметры эти надо подбирать так, чтобы точка, соответствующая минимуму отклонения масштаба, попадала в центр изображаемой страны.

Кроме карт такого вида, большое значение имеют карты, сохраняющие подобие площадей. Эйлер сочетал это требование с условием перпендикулярности изображений координатных линий.

Граве показал, что проекции с сохранением подобия площадей определяются одним дифференциальным уравнением первого порядка с частными производными с двумя функциями, а проекции для карт с подобием в бесконечно малых частях определяются двумя уравнениями с частными производными с двумя функциями.

Впервые вопрос в случае для карт, сохраняющих подобие в бесконечно малых частях, был решен Лагранжем в работе «О построении географических карт» («Sur la construction des cartes géographiques» *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin*, année 1779. *Oeuvres Complètes*, Tome quatrième, p. 637).

Подобный же вопрос для случая проекции Эйлера был решен А. Коркиным в статье «О географических картах» («Sur les cartes géographiques». — *Mathematische Annalen*, Bd. 31, стр. 589).

Гораздо более трудной была задача, поставленная Коркиным, о нахождении всех прямолинейных, смешанных и круговых проекций, сохраняющих подобие площадей без условия перпендикулярности меридианов и параллелей. Здесь под прямолинейными проекциями понимаются те, у которых обе системы (меридианы и параллели) состоят из прямых; под смешанными — те, у которых одна система — прямые, другая — круги; под круговыми, — когда обе системы — круги.

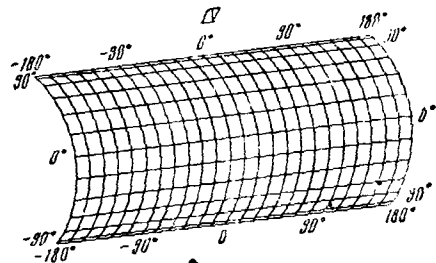
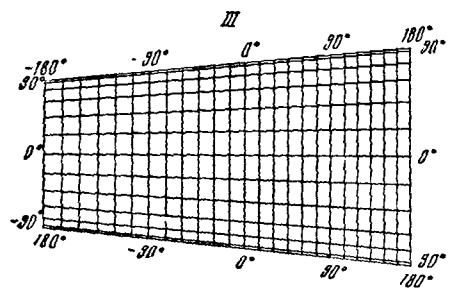
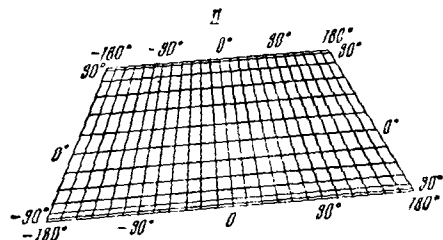
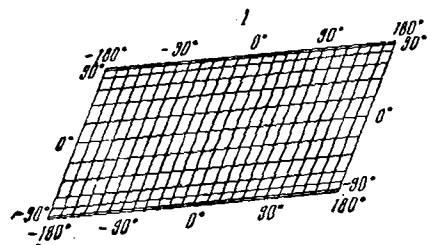
Граве дал полное решение поставленной задачи и нашел 11 типов таких проекций и доказал, что они единственно возможны (гл. 2). Из них наивыгоднейшими автор считает те, при которых меридианы и параллели взаимно ортогональны. Решение задачи Коркина Граве дал двумя способами, второй из них помещен во французском математическом журнале [45]. Формулы, определяющие указанные типы проекций, можно найти в «Университетских известиях» [63]. Приведем здесь чертежи (1—11), соответствующие найденным Граве 11 типам проекций. Впервые они были помещены в «Известиях Русского астрономического общества» [41].

Диссертация Граве состояла из введения и четырех глав. Во всей работе, а особенно в первых главах Граве проявил высокое мастерство выкладочной техники.

В третьей главе диссертации Граве дает свой метод отыскания решения так называемой задачи Дирихле. Надо найти решение уравнения

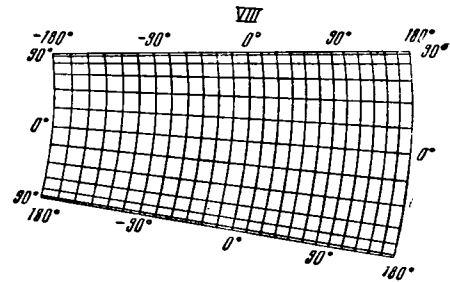
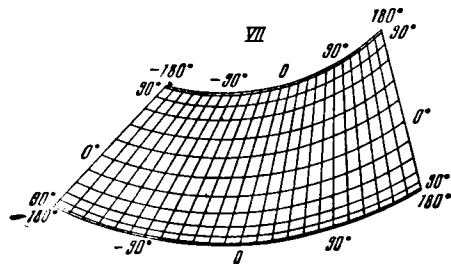
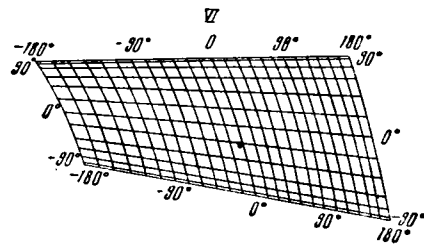
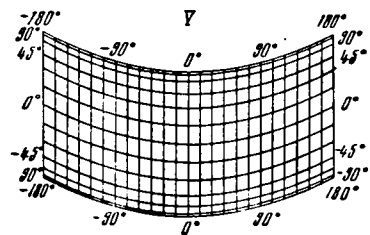
$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

которое было бы конечным, однозначным и непрерывным вместе со своими производными первых двух порядков во всех точках внутри данного контура  $S$  и которое на этом контуре принимало бы заданные значения. Граве удалось найти новый метод решения этой задачи, с успехом прилагаемый для случая алгебраических контуров. Его метод основан на введении комплексных переменных и на особом способе преобразования плоских фигур.

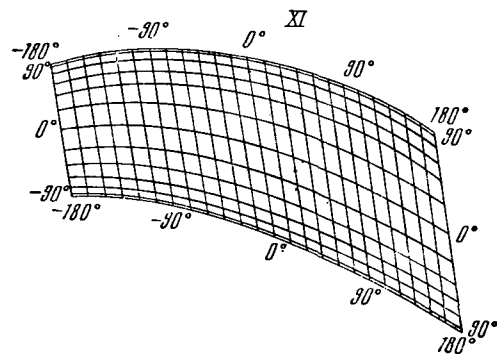
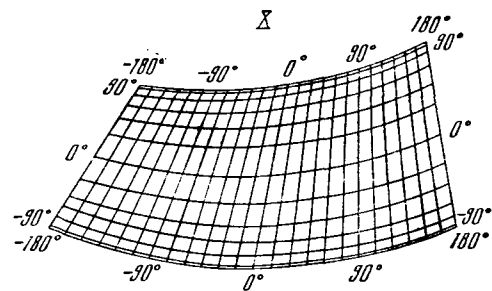
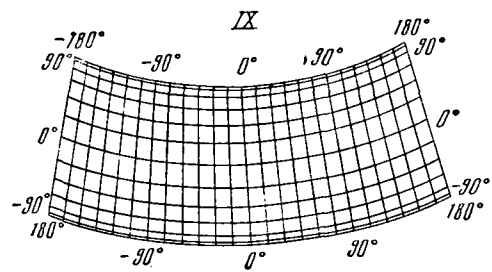


Чертежи (1—11) 11 проекций Граве





Продолжение (V—VIII)



Окончание (IX—XI)

Формулы последнего он называет комплексным преобразованием по заданному контуру. Рассмотрев свойства этого преобразования, он показал его приложение к задаче Дирихле. Краткое сообщение об этом методе было доложено автором на конгрессе в Бордо в июле 1895 г. [39].

Исходя из задачи Дирихле, Граве предложил новую классификацию алгебраических кривых. Как отметил Н. И. Кованцов (39), предложенная Граве классификация в некоторых случаях имеет больше преимуществ, чем классификация по степеням уравнений кривой относительно прямоугольной декартовой системы координат.

Чрезвычайно важным результатом Граве было доказательство в четвертой главе теоремы Чебышева о выборе наилучшей проекции для данного участка земной поверхности. Теорема, высказанная без доказательства Чебышевым на заседании Петербургской Академии наук 18 января 1853 г., гласила: «Наивыгоднейшая проекция для изображения какой-нибудь части земной поверхности на карте есть та, в которой на границе изображения масштаб сохраняет одну и ту же величину, легко определяемую по принятой нормальной величине масштаба».

Первое доказательство этой теоремы Граве нашел еще в 1894 г. Об этом он доложил на конгрессе французской ассоциации содействия прогрессу наук [38]. В диссертации вопрос этот изложен более полно. В 1911 г. Граве снова возвратился к его рассмотрению и обобщил свое доказательство на поверхности, имеющие гауссову кривизну постоянного знака [74].

В диссертации Граве решил и ряд частных задач картографии. Он произвел сравнение отклонения масштаба в проекциях Гаусса и Чебышева и показал преимущество последней. Для этого он взял четырехугольник, ограниченный дугами параллелей  $40^\circ$  и  $70^\circ$  северной широты и двумя меридианами с разностью в  $40^\circ$ . В это пространство укладывалась вся Европейская Россия. Граве подсчитал отклонение масштаба вдоль среднего меридиана через каждые  $5^\circ$ . Оказалось, что в проекции Чебышева «отклонение от нуля логарифма масштаба почти в два с половиной раза меньше, чем для Ламбертовой проекции, которая под именем Гауссовой введена при изображении Российской империи» [44].

Диссертация Граве имела чрезвычайно важное и теоретическое и практическое значение. Отдельные ее части были напечатаны в «Известиях Академии наук» и зарубежных математических журналах [37], [38], [39], [41], [45], [46] и принесли автору широкую известность. Этому способствовали также его доклады на международных конгрессах в Кане и Бордо.

В это же время Граве опубликовал заметку [40], посвященную правилу Чебышева приближенного спрямления дуг. К геометрической тематике относятся также написанные в Петербурге студенческие работы Граве [1], [3], его обширный курс по аналитической геометрии [15].

К геометрии Граве возвращался и в начале 900-х годов. Так, в 1901 г. по этой тематике он публикует статьи «Об одной теореме проективной геометрии», «Об одной теореме, относящейся к линейным поверхностям второго порядка» [55], [58]. В одной из статей автор указывает пример связи между тремя системами координат; связь выражается через три уравнения высших степеней, которые могут быть решены рационально относительно каждой из этих трех систем [59]. Граве интересовался и линиями третьего порядка. Эту тему он предлагал студентам университета для написания конкурсных сочинений, а в 1904 г. о линиях третьего порядка опубликовал статью [62].

В 1911 г. Граве пишет заметку об особых точках алгебраических образов [75], а в 1926 г. — статью о кривизне пространств порядка выше третьего [120].

К тематике петербургского периода — об отображении поверхности на плоскость при определенных условиях — Граве возвращается в работах, написанных в 20-е годы, [127], [129]. В одной из них он предложил, как отметил Б. Н. Делоне (27, стр. 350), изящный алгоритм для решения задачи о покрытии шара сеткой. Решение уравнения

$$\frac{d^2\alpha}{du dv} = -\sin\alpha$$
 заменяется здесь приближенным решением разностного уравнения. Одна из статей Граве посвящена поверхностям, сохраняющим площадь при их отображении на плоскость [129].

Весьма интересна статья Граве, посвященная 100-летию открытия неевклидовой геометрии. Здесь идет речь об интерпретации геометрии Лобачевского и о так называемой «предельной геометрии». Обыкновенная геомет-

рия Евклида обращается в предельную при помощи инверсии. С другой стороны, геометрия Лобачевского переходит в предельную геометрию (в случае интерпретации Пуанкаре), когда радиус окружности Пуанкаре стремится к нулю. Автор отмечает в конце статьи, «что для трехмерного пространства возможны две картины евклидовой геометрии: обычная и предельная» [126].

В Энциклопедическом словаре Брокгауза и Ефрона Граве поместил статьи по геометрии [13], [14], [18—22], [25], [27], [47] и др. Граве создает новый учебник по аналитической геометрии (см. стр. 62).

## Анализ и теория функций

Цикл работ Д. А. Граве посвящен отдельным вопросам анализа и теории функций, в частности теории эллиптических функций.

Из них весьма замечательны статьи о линиях, состоящих из прямолинейных частей [51], и об основных предложениях теории функций двух вещественных переменных [52], опубликованные в 1898 г. В первой из них автор исследовал кривые линии, состоящие целиком из прямолинейных частей и имеющие непрерывно изменяющиеся касательные. Такие линии он называл полигональными. Характерные примеры полигональных кривых рассмотрены в статье «Об основных предложениях теории функций двух вещественных переменных» [52]. Автор обобщает свои рассуждения и получает поверхности с непрерывно меняющейся касательной плоскостью; эти поверхности состоят целиком из плоских частей<sup>1</sup>. Соответственно этому он строит особые «полиэдральные» неубывающие функции с замечательными свойствами. Через шесть лет независимо от этого к аналогичным результатам пришел известный французский математик Фреше. Особенно интересно проводилось вычисление определенного интеграла. По существу Граве здесь пользовался методом интегрирования Лебега за несколько лет до его открытия. Граве применяет тут свой прием на

---

<sup>1</sup> Полиэдральные поверхности, говорит Д. А. Граве, представляют нечто среднее между кривыми поверхностями, с одной стороны, и многогранниками, когда число плоских частей бесконечно велико, — с другой.

конкретном примере, не давая общих абстрактных определений. Большого размера рисунок одной из полигональных кривых по указанию Граве был изготовлен студентами Института путей сообщения, Граве передал его в математический кабинет Харьковского университета.

В это же время Граве интересовался и теорией неявных функций. В статье «К учению о неразложимых функциях» Шварц дал строгое доказательство основной теоремы учения о неявных функциях. Его доказательство было основано на представлении функций бесконечными рядами. Граве в статье «Новое доказательство основной теоремы учения о неявных функциях» доказал ту же теорему иным путем, обходясь без рассмотрения рядов [53].

В начале 900-х годов Граве уделял значительное внимание теории эллиптических функций [49], [65], [71]. Об этом в письме В. А. Стеклову от 1 марта 1903 г. он писал: «... Я, вероятно, надолго погрузился всецело в теорию алгебраических линий и поверхностей. Приготавливаю к печати две статьи... Я теперь очень сошелся с А. П. Котельниковым. Это прекрасная личность и серьезный ученый. Мы с ним штудлируем теперь теорию эллиптических функций. По унаследованной из Петербурга склонности к старым математикам мы начали с Лежандра» (1, л. 7—8). В одной из статей 1908 г. рассмотрена связь известного разложения Вейерштрасса с формулой Лежандра [65]. Значительно позже, в 30-е годы, Граве показал, что переход модуля периодичности эллиптической функции в идеальный модуль приводит к так называемому комплексному умножению, впервые замеченному Абелем. Далее автор трактует вопросы об автоморфных функциях Клейна и вспоминает о дискуссии между Клейном и Пуанкаре, склоняясь в сторону последнего [150].

Глубокое знакомство Д. А. Граве с теорией алгебраических поверхностей дало ему возможность выступить оппонентом на защите докторской диссертации Г. В. Пфейфера, посвященной особым точкам алгебраических поверхностей [78].

К вопросам, относящимся к теории так называемых главных решений  $F(x)$  уравнения  $F(x+1) - F(x) = f(x)$ , где  $f(x)$  — заданная функция, Граве обращается в

1930 г. [140]. В связи с формулами Эйлера — Маклорена и Плана — Абеля автор находит формулу, которая может дать главные решения. Он указывает на четыре направления, в которых может быть продолжено исследование.

В статье, написанной в 1936 г., рассматривается вычисление корней полиномов, а также исследование сходимости обобщенного алгоритма Ньютона для случая комплексных переменных [165]. Применяв геометрические приемы, автор упорядочивает теорию Липшица — Дедекинда — Фробениуса — Вебера последовательного вычисления корней многочлена с помощью метода подкасаемых Ньютона, примененного к комплексным переменным. Он считал этот способ недостаточным, так как начиная с некоторого комплексного числа  $\alpha$ , становится неизвестным, к какому из корней приводит алгоритм. Число  $\alpha$ , от которого начинается вычисление, автор называет репером корня и ставит вопрос о нахождении полной системы реперов. Для отыскания подобных полных систем реперов автор предлагает свои правила.

Ряд статей Граве также относится к анализу и теории функций [17], [26], [31], [33], [34] и др.

## Алгебра и теория чисел

Исследования по алгебре и теории чисел в научном наследии Граве занимают преобладающее место. Это и небольшие заметки, носящие характер методических упрощений, исправлений ошибок других авторов и дополнений к их работам, и весьма фундаментальные оригинально обработанные монографии обзорного характера и, наконец, его знаменитые курсы, включающие результаты новейших работ самого автора, его учеников и других ученых.

Работы этого цикла начинаются небольшой статьей о некоторых приложениях определителей к выражению геометрических отношений в эвклидовом  $n$ -мерном пространстве [56]. Далее Граве изучает свойства коварианта Гессе некоторых бинарных форм [60], дает свое доказательство теоремы Бертрана, отметив ошибочные положения при изложении этого вопроса в известном «Учебнике алгебры» Г. Вебера [61].

Одна из заметок, написанных в 1908 г., посвящена установлению тождества между определенными величинами при переходе через подстановки одной двойной квадратичной формы в другую и получению более простым путем известного результата Гаусса о двусторонних формах [68].

Весьма интересна статья, где автор ставит задачу об отыскании алгебраических разрешимых уравнений пятой степени с рациональными коэффициентами при неизвестных и произвольным свободным членом. В результате он получает два класса таких уравнений

$$x^5 + [s] = 0, \quad x^5 + 10px^3 + 20p^2x + s = 0$$

и одно уравнение вида:  $x^5 + 5x^3 + x^2 + x - 17,5 = 0$  [69].

В статье «Об алгебраических единицах» Граве показал, как просто может быть изложена теория алгебраических единиц Дирихле, играющая большую роль в теории алгебраических чисел [76], а в другой статье отметил ошибку в одной теореме теории групп [79].

Говоря о значении способа Коркина для решения двучленных уравнений, Граве подчеркивает, что таблица Коркина может быть рассмотрена как полная таблица индексов, т. е. приведенные в ней характеры достаточны для вычисления индексов произвольно взятых чисел [84]. В статье он показывает, как это выполняется практически.

Ряд свойств сумм вида:

$$\psi(2\mu, n) = \sum_{s=0}^{n-1} e^{s^2 \frac{2\mu\pi i}{n}},$$

где  $n$  — целое нечетное число больше нуля, а  $\mu$  — взаимно простое с  $n$  рассматривается в заметке, относящейся к 1915 г. [91]. В статье «О периодических непрерывных дробях» автор берет квадратное уравнение с коэффициентами из данного алгебраического поля  $\Omega$   $n$ -й степени. Пусть  $a_1$  — целое число из  $\Omega$ , ближайшее к корню  $x$ . Тогда  $x = a_2 + \frac{1}{x_1}$ , где  $x_1$  — поправка. Найдем  $a_2$  из  $\Omega$  ближайшее меньшее от  $x_1$ . Имеем  $x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2}$  и т. д. Как частные случаи автор рассматривает Гауссово поле комплексных рациональных чисел, затем поле с базисом  $1, i, \theta, \theta i$ , где  $\theta^2 = i$  [92].



Работа «Об основных положениях теории Галуа» была, по словам автора, опытом «нового, более простого и в то же время совершенно полного и строгого изложения основных положений теории Галуа. Особое внимание он обратил на точную формулировку различия между буквенными и числовыми уравнениями. О плане своей работы автор говорит: «Я докажу знаменитые теоремы Лагранжа для буквенных уравнений, а затем при помощи приема, заимствованного у Кронекера, я покажу сразу, что все теоремы будут иметь место и для численных уравнений, если вместо всей симметрической группы рассматривать подстановки только из группы Галуа» [87]. Эта работа позже составила 14—20 главы курса «Элементы высшей алгебры» [90]. Отметим, что другие авторы до этого, например Вебер, предполагали, что теория, полученная для числовых уравнений, без особых обоснований и изменений может быть перенесена и на буквенные уравнения. Здесь же автор стремится иначе подойти к проблеме. Он подчеркивает наиболее важные по приложениям пункты: зависимость неприводимости уравнения от транзитивности группы, понятие об импримитивности и т. д. Значительное внимание уделено оригинально изложенному вопросу решения уравнений в радикалах. Эта монография Граве была ценным вкладом в русскую математическую литературу.

К алгебре и теории чисел относятся также ряд заметок, опубликованных до 1914 г. [16], [28], [57], [80], [88], [89].

Алгебра и теория чисел занимали значительное место в творчестве Граве и в последующий период. Его статьи по этой тематике стали появляться уже в начале 20-х годов. В то время он занимался решением конкретных вопросов. Так, в заметках 1923 г. он дает обобщение одной теоремы Абеля [102], рассматривает вопрос о корнях пятой степени из единицы [101], о равенствах вида:  $a^3 + b^3 = c^3$ ;  $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$  и т. д.

В 1925 г. Граве опубликовал две статьи по теории идеальных чисел. В одной из них излагаются основы теории идеальных чисел, исходя из понятия об общем наибольшем делителе. Автор рассматривает работы Дедекинда и Золотарева, подчеркивая их значение и устанавливая взаимную связь [107]. В другой статье рассматривается разложение простых натуральных чисел,

входящих в индекс, на простые идеальные множители [108]. В том же году вышла статья по вопросу о вычислении алгебраических единиц конечных полей [109].

Опубликованная в следующем году статья об основах теории Галуа [121] является переработанной и сокращенной статьей, о которой говорилось выше [87] (см. стр. 55).

Следующая статья по этой тематике появляется в 1933 г. В ней рассматривается связь теории эллиптических функций с теорией идеалов и проблема комплексного умножения [150].

Разложение алгебраических функций на простые идеалы, а также некоторые применения идеалов алгебраических функций в геометрии, анализе, теории чисел кратко изложены в работе «ідеальні модулі алгебраїчних функцій» [155]. Дальнейшее развитие эта тема получает в статье «Арифметична теорія алгебраїчних величин» [163]. Здесь Граве обращается к обоснованию Кронекера теории идеалов при помощи трансцендентного расширения. При этом ему удается добиться значительного упрощения этой теории по сравнению с лучшим в то время ее изложением у Вебера. Далее Граве приводит одно обобщение теоремы Акселя Туе [153] и рассматривает вопрос об обобщении алгоритма Вороного [151] нахождения основных алгебраических единиц произвольного кубического поля на случай полей высших степеней. В статье намечены общие пути подхода к решению поставленной задачи и указывается, что для осуществления этого «нужна планомерно распределенная работа целого коллектива».

Доказательство ортогональности одной квадратной матрицы Эйлера дано автором с помощью кватернионов в заметке «Про одну задачу Эйлера» [169], в том же, 1930 г., он публикует статью, освещающую вопрос о невозможности алгебраического решения общего уравнения выше четвертой степени [170].

Новую теорему алгебры Граве доказал в статье «Малые колебания и некоторые предложения алгебры». Если  $A, B, C$  — три положительные квадратичные формы, то уравнение  $A + \lambda B + \lambda^2 C = 0$  есть уравнение Гурвица. Эта теорема имеет важное значение при изучении устойчивости малых колебаний в сопротивляющейся среде [138].

Следующий цикл работ Граве связан с большой теоремой Ферма и с определением числа классов квадратичных полей.

В статье «О методах борьбы с трудностями теоремы Ферма» автор отмечает, что элементарные способы решения этой задачи безнадежны. Однако это не значит, что можно пренебречь всеми элементарными соображениями, связанными с задачей Ферма. Далее следует обзор работ ряда ученых, в том числе Куммера. В другом месте Граве выразил несогласие с мыслью Ландау о том, что теорема Ферма не может быть доказана для бесконечного числа показателей и считал более вероятным возможность полного ее доказательства [156].

В этом смысле интересны статьи Граве, где на основании больших вычислений высказывается предположение о регулярности простых чисел вида  $4n+3$ ,  $4n+1$  в соответственных квадратичных полях. Эти поля имеют важное значение при рассмотрении большой задачи Ферма [158], [159].

В статьях и заметках, носящих исторический характер, дается обзор исследований П. Л. Чебышева и Римана по теории простых чисел [172]; уточняются авторство и формулировка теорем Гольдбаха и Эйлера, отмечаются некоторые ошибки в связи с этим в курсе теории чисел Ландау и вносятся соответствующие поправки [173], выясняются причины ошибочного примера, попавшего в 3-е издание книги П. Л. Чебышева «Теория сравнений» [178].

Самой значительной работой Граве по алгебре был «Трактат по алгебраическому анализу». В свет вышло два тома «Трактата» на украинском [174], [175] и на русском [176], [177] языках. Был написан также третий том, известны названия четвертого и пятого, а всего автором было задумано 17 томов. Трактат должен был широко осветить развитие алгебры вплоть до современности во всех ее разветвлениях и аспектах с включением различных отделов теории чисел и близких вопросов анализа, теории функции и других дисциплин.

В первом томе «Начала науки» рассмотрен примерно тот круг вопросов, который изучается в университетах и пединститутах. Не останавливаясь на содер-

жании книги, отметим только историчность изложения материала и богатство ее содержания, сравнительно небольшой объем (около 200 стр.)

Во втором томе (вдвое большем по объему) дан исторический обзор. Здесь рассмотрены: Арифметика древних; Диофантов анализ; Группы многогранников; Функции теории чисел; Теория сравнений; Алгебраические функции; Элементарная теория алгебраических чисел; Гипергеометрический ряд Гаусса; Трансцендентность чисел  $e$  и  $\pi$ . В конце книги помещены числовые таблицы и указатели.

Третий том «Квадратичная область» не был напечатан, в нем излагаются исследования Эйлера, Лагранжа и Лежандра, теория Гаусса бинарных квадратичных форм, рассматривались работы Дирихле, Гильберта, Эрмита, Фробениуса, Кэли, Сильвестра, Сальмона. Сюда входила теория разложимых и неразложимых форм. Далее следовало изложение формулы Эйнштейна, результатов Ст. Смита и В. Маркова, Минковского, Вороного и Делоне. Автор уделил значительное место исследованиям Петербургской школы (Чебышев, Коркин, Золотарев, А. Марков).

Четвертый том Граве предполагал посвятить теории идеалов с приложением к теореме Ферма; пятый — должен был содержать эллиптические функции и их алгебраические приложения. В 1939 г. Граве писал (4, л. 18) А. Н. Крылову, что этот план он наметил на ближайшую пятилетку. Смерть помешала осуществлению его замысла. Но и выход первых двух томов «Трактата» имел важное значение для науки. Об этом сочинении Н. Г. Чеботарев писал, что оно «ценно тем, что вводит читателя, пользуясь элементарными средствами, в круг современных идей по алгебре, содержащий в то же время много важного, но полузабытого материала, которого не найти ни в каких других руководствах» (63, стр. 14).

## Теоретическая механика и прикладные вопросы

Эта тематика преобладала в творчестве Граве 20-х годов. В начале его научной деятельности она нашла отражение лишь в магистерской диссертации, когда он

решал задачу об отыскании интегралов, не зависящих от закона действия сил в проблеме трех тел, и в статье на ту же тему [43]. Граве занимался этой проблемой и позже, до середины 30-х годов. Всего по этой тематике Граве опубликовал более 30 работ, из них по теоретической механике и смежным вопросам около 20 работ.

После публикации общего очерка об основных законах движения [106] Граве изучал взаимоотношение между астрономией, метеорологией и ботаникой. В результате была написана статья, где излагались результаты многолетних работ американского ученого А. Е. Дугласа и некоторые соображения автора о механизме влияния солнечных пятен [110],

Большое внимание Граве уделял также изучению теории электричества, магнетизма, движения электронов, электромагнитных явлений в солнечной системе, взаимодействия электромагнитных и механических сил, влияния электрической гиператмосферы на земной магнетизм и т. п. Эти вопросы освещены в ряде статей [111], [112], [117], [131], [133], [134], [135], [139]. Граве считает, что в солнечной системе действует не только закон всемирного тяготения, но и электромагнитные силы. Интенсивность последних связана с характером и состоянием солнечных пятен. Причины, приводящие к аномалиям в движении планет, имеются и в межзвездном пространстве. Теория Эйнштейна не может объяснить аномалий, например в узлах Венеры. В связи с этим Граве и Соколов предложили учесть электромагнитные силы. Благодаря этому качественно были объяснены все наблюдавшиеся отклонения, в том числе и в узлах Венеры. Однако для совпадения количественных оценок потребовалось бы приписать планетам непомерно большие электрические заряды. Под электрической гиператмосферой Граве понимал ту часть пространства вокруг планеты, где сами электроны оказывают заметное влияние на физические явления на планете. Он предложил также свою гипотезу происхождения электромагнитных сил в междупланетном пространстве [117].

Большой интерес представляют статьи Граве [136] о принципах механики и о физических основах гидро-и аэродинамики [149]. В них автор предложил критиче-

ски пересмотреть основные положения механики и наметил девять направлений, по которым следует пересмотреть принципы механики и прежде всего принципы классической гидродинамики. Граве считал, что теория идеальной жидкости не может считаться и первым приближением к действительности как схема, радикально противоречащая действительности. Решение задачи о построении правильной теории механики жидкости автор видит в том, чтобы переходить от опыта к теории, а не наоборот. Отсюда следует, что гидро- и аэромеханика должны развиваться в направлении усовершенствования механики не идеальной, а вязкой жидкости.

Граве отмечает, что применение теории упругости, в основе которой лежит закон Гука, также ограничено. Ряд явлений остается за ее пределами, например разрушение материала при разрыве и т. п. Поэтому для дальнейшего развития теории надо изучать процессы, происходящие в материалах тогда, когда закон Гука не действует. Граве высказал весьма любопытные соображения относительно путей дальнейшего развития теории относительности, квантовой механики, электродинамики и других наук.

Вопросы движения сжимаемой жидкости рассмотрены Граве в ряде статей [143], [152]. В них автор дает объяснение ошибкам, допущенным в вопросе о сохранении вихревых линий в капитальном труде А. А. Фридмана «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости» (1922). Соппротивление жидкости движению тел было темой доклада Граве на I Всесоюзном съезде математиков в г. Харькове [166].

Приложение уравнений Эйлера в теории упругости [118] отмечается автором в таких задачах: 1) отыскание условий равновесия анизотропной цилиндрической оболочки, толщина стенки которой меняется по параболическому закону; 2) колебание упругих пластинок и пруты; 3) теория упругих конических, сферических и кольцевых оболочек.

В 20—30-х годах появились статьи Граве, посвященные качению тяжелого однородного шара по двум конусам [115], закону Гука в теории упругости [124], вопросу о резонансе [125], уравнению аксоидов движения твердого тела [160], поверхностям Риманна и теории электричества [161].

Он изучил также некоторые конкретные технические вопросы, произвел их математическую обработку и дал соответственные практические рекомендации. Это касается направления вращения горизонтальных гидравлических турбин [145], действия одноцилиндровой паровой машины [146], кавитации и коррозии быстродвигающихся гидравлических турбин [157].

В работах прикладного характера Граве проявил себя как разносторонне образованный человек, хорошо знающий области, смежные с математикой, критически мыслящий, знакомый с новейшими достижениями науки.

Оригинальный курс Граве «Теоретическая механика на основе техники» выдержал три издания [141], [144], [147]. Автор отказался от традиционной планировки материала и деления его на статику, кинематику и динамику. Положив в основу изложения математический метод исследования, Граве связал его теснейшим образом с запросами техники и требованиями быстрой подготовки математически грамотных инженерных кадров.

Курс этот состоит из трех концентров: 1) механика точки и твердого тела; 2) механика переменных тел (теория упругости, гидродинамика, теория потенциала, гидравлика, упругие колебания, сопротивление материалов); 3) механика машин (основы науки о машинах, применения гироскопа, конструкция регистрационных аппаратов, турбины, математические основы авиации, электрические машины и т. д.). В написании некоторых отделов Граве помогали его ученики М. Ф. Кравчук, В. Е. Дьяченко, Н. И. Ахиезер, А. Л. Наумов, В. И. Можар. Вот что писал об этом курсе автору А. Н. Крылов: «Хотя я и не знаю украинского языка, но, проследив по формулам этот курс, я не могу не выразить своего удивления (admiration), что в столь малый объем Вы сумели вложить такое богатое содержание с полным и вразумительным его изложением. Я очень рад, что Ваш курс будет издан на русском языке, что его сделает доступным гораздо более широкому кругу читателей. Кстати, с благодарностью вспоминаю, что на днях исполнилось ровно сорок лет с тех пор, как я имел удовольствие слушать Ваши лекции по дифференциальной геометрии в СПб университете» (4, л. 21). Из сохра-

нившейся переписки Граве с Крыловым, видно, насколько тщательно Граве подбирал и обрабатывал материал для своего курса. Так, еще в конце 1926 г., приступая к составлению курса, Граве просил Крылова прислать описание изобретенного последним компаса.

В русском издании курса [144] добавлена глава о плавании судов. Рукопись ее была послана Крылову на просмотр. Вскоре Крылов ответил Граве: «Вашу главу «О плавании судов» я прочел внимательно и по опыту преподавания «Теории корабля» могу лишь отметить, что слово «отвесной», если даже напечатать так: «Отвесной», то и тогда его учащиеся, формулируя условие (2°), ухитряются пропускать... Пользуясь случаем, посылаю Вам только что изданную книжку мою «О расчете балок, лежащих на упругом основании». В связи с этим Граве писал Крылову в марте 1931 г.: «Я обращаюсь к Вам с просьбой: не согласились бы Вы сделать набросок новой главы «О балке» для моей книги (см. [147].— В. Д.), причем при критике Хаяси несколько подробнее указать на практические недостатки его метода» (4, л. 16)). Граве советовался с Крыловым и по другим вопросам, относящимся к курсу механики.

### Учебная литература и специальные курсы

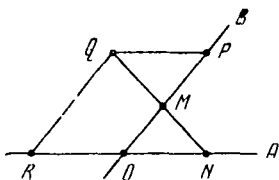
Первым учебным руководством Граве (1892) был литографированный курс по интегрированию уравнений с частными производными [7]. Курс этот был читан на Бестужевских курсах и состоял из двух частей: первая — посвящалась интегрированию уравнений первого порядка, в ней главное внимание обращалось на геометрическую теорию характеристик; во второй — рассматривалось интегрирование уравнений второго порядка и излагался, между прочим, классический меуар Ампера в связи с работами С. Ли.

Год спустя вышел «Курс аналитической геометрии» в издании Института путей сообщения [15]. Книга была набрана двумя шрифтами. Крупным шрифтом печатались отделы, обязательные для изучения по программе института, мелким — добавления к основному курсу. Эта книга (650 стр.) охватывала большой фактический

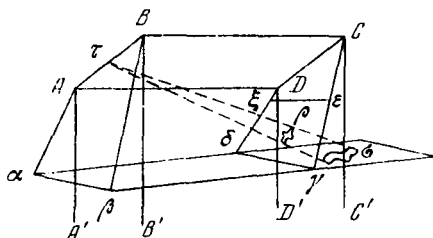


материал. Интересно и оригинально излагалась теория линий и поверхностей второго порядка (с помощью сокращенного метода, основанного на преобразованиях квадратичной формы при помощи выделения квадратов линейных функций). В приложении давались основные понятия и свойства из теории определителей.

Через 17 лет Граве опубликовал второй курс — «Основы аналитической геометрии, ч. 1 Геометрия на плоскости» [77], значительно отличающийся от первого. В основу книги легли лекции Граве в Киевском университете. Курс начинается с изложения теории векторов, которые довольно широко использовались далее. Большое место уделено здесь, как говорит автор, приемам чисто геометрическим, т. е. взятым из проективной геометрии и допускающим характерное аналитическое толкование. В книге довольно широко применяется теория определителей.



Чертеж (1) к прибору  
Граве



Чертеж (2) к прибору Граве

О том, насколько тщательно Граве обдумывал построение этого курса, свидетельствует такой факт. В одном из параграфов главы 14, посвященной основным положениям проективной геометрии, решается задача определения соотношений между координатами данной точки плоскости и ее перспективы на другой плоскости. После несложных рассуждений получается, что перспективное соответствие точек двух плоскостей зависит от двух величин  $\alpha$  и  $\alpha_1$ , характеризующих положение точки проекции, и не зависит от угла наклона этих плоскостей. Оно остается без изменения, если одну плоскость вращать вокруг линии их пересечения, а стороны параллелограмма  $\alpha$  и  $\alpha_1$ , определяющие точку зрения, оставлять без изменения. Чтобы сделать эту задачу наглядной, Граве летом

1909 г., находясь во Фрейберге, сконструировал прибор, описание которого дал в письме профессору метеорологии И. И. Косоногову. Он писал: «...Моя просьба состоит в следующем: обдумывая нормальную программу университетского курса по аналитической геометрии, я считаю необходимым включить в программу элементарную аналитическую теорию перспективы, в которой будет доказана следующая теорема: проективное соответствие двух плоскостей, выражаемое формулами

$$x_1 = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}, \quad y_1 = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{ax + by + c}$$

есть не что иное, как перспектива точек одной плоскости на другую. Попутно будет доказана теорема, что перспектива  $N$  точки  $M$  не меняется, если прямую  $OA$  оставим неподвижною, прямую же  $OB$  будет вращать около точки  $O$ , причем точка глаза  $Q$  будет также перемещаться таким образом, что параллелограмм  $OPQR$  не меняет размеров сторон (черт. 1).

Мне хочется построить прибор, наглядно демонстрирующий эту теорему. Так как изложение ее будет иметь место в конце октября, то с устройством прибора надо поторопиться. Быть может, Вы поможете мне, многоуважаемый Иосиф Иосифович, заказать этот прибор немедленно опытному конструктору. Я надеюсь, что Вы поможете также Вашим компетентным советом. Прибор я проектирую сделать так: прямоугольная рама (черт. 2)  $ABCD$  стоит на 4-х ножках  $AA^1$ ,  $BB^1$ ,  $CC^1$  и  $DD^1$ ; между ножками  $AA^1$  и  $BB^1$ , а также между ножками  $CC^1$  и  $DD^1$  качается качель, сидение которой  $\alpha\beta\gamma\delta$  продолжено далее за сторону  $\gamma\delta$ . Вы, конечно, видите, что стороны  $A\alpha$ ,  $B\beta$ ,  $C\gamma$ ,  $D\delta$  должны быть одинаковой длины, чтобы при качании сидение оставалось по возможности точно горизонтальным. Посредине перекладки  $AB$  находится визирная точка: черный кружок с малым отверстием. Нужно постараться, чтобы отверстие приходилось точно на оси  $AB$  — вращения стержней  $A\alpha$  и  $B\beta$  качели. Если мы вставим в прямоугольник  $\delta\gamma CD$  стекло  $\delta\gamma\epsilon\zeta$  с начерченным на нем кругом  $\rho$  и на продолжении сидения качели какой-нибудь краской, например красной, нарисуем пятно  $\sigma$ , контур которого при визировании из отверстия кружка  $\tau$  совпадал с контуром  $\rho$ , нарисованным на



Прибор Д. А. Граве

стекле, то при качании качели красное пятно  $\sigma$  не выйдет из границ контура  $\rho$ . Для большей наглядности не мешает сделать так, чтобы размеры стержней  $Aa$  и  $Bb$  можно было бы менять, ибо тогда теорема перестает сохраняться и красное пятно сдвигается с кругового контура» (5).

В результате был изготовлен довольно простой, но очень удобный прибор, наглядно демонстрирующий нужное явление (см. рис.).

Вторая часть курса — «Аналитическая геометрия в пространстве» — вышла в 1913 г. литографированным способом [86].

В 1933 г. опубликован третий курс аналитической геометрии Граве [154], предназначенный и для университетов и для технических вузов. Хотя автор имел в виду прежде всего практическое применение, его изложение не было примитивным. Во многих случаях исследование производится в косоугольных координатах. При классификации линий и поверхностей второго порядка использовались инварианты преобразования координат. Курс имеет ряд ценных дополнений — основы теории тензоров, формулы векторного анализа, замечания о наглядном изучении многомерных геометрий и т. д.

Следующая группа пособий Граве относится к алгебраическому анализу и высшей алгебре. Первый курс— «Элементы алгебраического анализа» [63]—был опубликован в 1904, 1905, 1908 гг. Его первая часть посвящалась теории подстановок, вторая—общей теории групп. В 1908 г. курс был выпущен отдельной книгой [64]. Как свидетельствует А. К. Сушкевич (58), это была первая монография на русском языке, посвященная специально теории групп. Вместе с тем это был первый опыт ввести теорию групп в круг преподавания в русских университетах. Автор книги ограничил свою задачу теорией конечных групп как наиболее важной для алгебраического анализа.

В 1910 г. вышел литографированный «Курс алгебраического анализа» Граве [72], составленный студентом К. Ф. Абрамовичем по записям лекций студентов, издававшихся прежде в разные годы. Содержание данного курса описано А. К. Сушкевичем довольно подробно (58) и вследствие этого мы останавливаться на нем не будем.

Наконец, в 1914 г. изданы были фундаментальные «Элементы высшей алгебры» Граве [90]. О причинах, побудивших его предпринять этот капитальный труд, Граве писал В. А. Стеклову: «...я сообщу Вам о том, что я в настоящее время делаю. Я занят печатанием моего университетского курса высшей алгебры. Многие упрекают меня, что я теряю время с изданием курсов, мои же собственные исследования не двигаются вперед. В ответ на эти упреки я должен по поводу моей новой книги сказать следующее. Я ждал с нетерпением выхода в свет малого издания алгебры Вебера, думая в этой книге встретить то, что мне надо при элементарном преподавании алгебры. Книга Вебера меня совершенно разочаровала. Начать с его сокращений: они настолько неудачны, что в одном месте (стр. 215, верхние две строки) оказалась грубейшая ошибка.

...Решив выпустить собственную алгебру, я буду хвастаться изложением теории Галуа. Изложение у Вебера я не могу назвать строгим. Вплоть до последних своих работ, он определяет группу Галуа (по Галуа) двойным свойством: 1) не нарушать зависимости между корнями, 2) давать рациональное значение всякой функции, принадлежащей группе Галуа. Из моего из-

ложения с простотой и ясностью Вы увидите, что группу Галуа можно определить так:

«Группа Галуа есть совокупность подстановок, из которых каждая не нарушает всякого соотношения между корнями».

Второе свойство есть теорема, а потому включение его в определение есть логическая ошибка.

В последнее время моего преподавания я упростил теорию Галуа в такой степени, что дальше идти некуда. Я послал в Московский сборник статью (см. [87]. — В. Д.), в которой я резюмирую мою методику. Изложение Вебера я не могу назвать общим, потому что оно относится к численным уравнениям, коэффициенты которых постоянные числа, а потому переход к случаю коэффициентов функциональных требует добавочных рассуждений. У меня получается теория строгая, совершенно общая и настолько простая, что в лекционном изложении переход от Лагранжевых теорем о функциях, принадлежащих к группам в смысле неизменяемости вида, к самой общей теории численных уравнений занял два часа.

Не могу согласиться с тем, что Вебер в малом издании ничего не говорит об уравнениях сложной степени. Недоговорено два слова, а между прочим осталась за бортом совершенно классическая теорема Абеля — Галуа, из-за которой у меня была перепалка с Loewy. Старик, вероятно, не мог упростить своих путаных и длинных рассуждений второго тома большого издания.

В моем изложении Вы увидите, что теоремы Жордана (теорема о ряде индексов данной группы. — В. Д.) вовсе не нужны. Достаточно доказать, что разрешимая группа всегда имеет отличный от единицы коммутативный нормальный делитель, полное доказательство чего можно поместить на одной странице.

Вообще мы со Шмидтом надеемся вывести на чистую воду эту громоздкую и тяжелую теорию» (1, л. 20—21).

Рассматриваемый курс Граве был более совершенен, чем малое издание известного руководства по алгебре Вебера. Курс был значительно шире обычной университетской программы, в которой отсутствовали такие важнейшие отделы, как теория подстановок, теория групп, теория Галуа. Не останавливаясь на содержании курса (58), отметим некоторые его особенности.

В главе шестой, заключающей изложение элементарных свойств инвариантов, автор касается важного вопроса о нахождении конечных групп ортогональных линейных преобразований многомерного пространства. Этот вопрос изучался незадолго перед тем в его семинаре по алгебре в осеннем семестре 1913 г.

В главе 11, после доказательства теоремы Штурма, автор показывает связь ее с непрерывными дробями. Он начинает с замечательных исследований акад. А. Маркова. Из формул Маркова он получает формулы Сильвестера, а уже отсюда приходит к исследованиям Эрмита, указавшим связь с квадратичными формами. Переходя далее к отделению мнимых корней, автор излагает теорию индексов Коши, которая в свою очередь ведет к более широкой теории характеристик Кронекера. В конце главы даются приложения характеристик к доказательствам теорем Гурвица об уравнениях, все корни которых имеют отрицательные вещественные части.

В главе 12, излагая способ вычисления корней трехчленных уравнений Гаусса, автор приводит также и свой способ вычисления вещественных корней подобных уравнений. Этот способ основан на методе итерации и был найден автором в 1883 г. еще в студенческие годы. Алгоритм Граве представляет некоторое обобщение алгоритма непрерывных дробей. Оно заключалось в том, что при непрерывных дробях чередуются две операции — деление и сложение; здесь же чередовались три операции: возвышение в степень, деление и сложение. Практически этот способ не хуже способа Гаусса и запоминается легче.

С главы 14 и до последней (всего в книге 20 глав) дается оригинальное изложение теории Галуа. В сущности «Элементы» Граве представляли собой не только превосходное руководство, но и ценный научный труд. Монография была полезным пособием для начинающих алгебраистов и не утратила интереса до настоящего времени. Исторические ссылки и замечания, обращения к читателю оживляли изложение, будили мысль читателя. Точность формулировок и простота изложения помогали усвоить материал.

Помимо руководств по алгебре для университетов, Граве в 1915 г. выпустил «Начала алгебры» для гимназий и других средних учебных заведений [93]. План этой кни-

ги, как сообщает автор в предисловии, был совместно с В. А. Марковым задуман за 20 лет до ее издания, когда Граве преподавал в Институте путей сообщения. Обсуждая вопрос издания учебника, В. А. Марков и Граве пришли к выводу, что состояние науки дает возможность изложить элементарную алгебру как стройную науку, строго логически, просто и доступно для понимания среднего ученика. Особенное внимание предполагалось обратить на упорядочение изложения иррациональных чисел и пределов. В результате был написан первый (и тогда единственный) русский учебник алгебры для средней школы, учитывающий современные достижения науки и отвечающий всем требованиям. Основной материал в нем был набран обычным шрифтом, а дополнительный — пентитом.

Всего в учебнике 16 глав. В главе 3 вводится понятие поля. Изложение теории рациональных и иррациональных чисел (6 глава) весьма близко к современному. В главе 7 трактуется понятие о пределе переменной. Сначала автор вводит понятие о переменной величине как об общем элементе совокупности. Далее следует определение бесконечно малой и бесконечно большой величины, а предел определяется через бесконечно малую. В главе 8 (действия над радикалами) дается алгоритм извлечения корней высших степеней по способу акад. Н. Я. Сони́на. В главе 11, где рассмотрены уравнения, приводящиеся к уравнениям первой и второй степени, сказано о теореме Абеля и решении уравнений в радикалах. В последней главе дается понятие о функциональной зависимости, графиках, элементарные приемы определения максимумов и минимумов.

В дополнение к этому учебнику Граве выпустил брошюру с методическими указаниями, которая рассылалась преподавателям математики бесплатно [94]. В 1919 г. учебник алгебры был переведен на украинский язык в Киеве [96].

Тесно связаны с алгебраическими курсами Граве его курсы по теории чисел. Первый из них «Элементарный курс теории чисел» появился в 1909 г. [67]. Сюда входили: 1) основания теории сравнений с теорией индексов и теорией квадратичных вычетов; 2) теория квадратичных форм в объеме гауссовых *Disquisitiones arithmeticae* до счета классов; 3) основы общей теории алгебраических

чисел. В 1913 г. было выпущено второе издание этой книги [85], полностью переработанное и значительно дополненное. По существу это была новая книга. Здесь автор вводит в круг «элементарного курса» теории чисел такие проблемы, которые обычно считались принадлежащими к высшим ее частям. Это нововведение он обосновывал тем, что развитие теории чисел требует применения новых методов общих теорий и методов, «которые сделались классическими и которые составляют азбуку теории чисел». В первых трех главах книги рассматривались вопросы делимости чисел, элементарные сведения из аналитической теории чисел, теория сравнений.

В главе 4—«О вычетах степеней» — впервые излагался метод Коркина решения двучленных сравнений при помощи составленной им таблицы характеров чисел (продолженной и опубликованной К. А. Поссе) (см. Сообщения Харьковского математического общества, сер. 2, 1909). В главе 5 рассмотрены квадратичные вычеты и решение квадратичных сравнений, линейные делители квадратичных форм.

В главах 6—7 — связь с теорией групп, теории полей, в том числе поле  $p$ -адических чисел Гензеля. Особое внимание посвящено конечному полю и его приложениям (главы 8 и 9). Здесь изложена теория алгебраического решения уравнений и приведена теорема студента О. Ю. Шмидта. Глава 10 содержит элементарную теорию непрерывных дробей. Далее подробно излагается теория бинарных форм (глава 11). Затем автор переходит к общей теории алгебраических чисел и приводит наряду с теоремой Минковского, теорему студента Е. И. Жилинского.

Автор останавливается на работах русских математиков Золотарева, Маркова, Иванова, Вороного, Сохоцкого. В этой же главе идет речь об идеальных числах и идеалах. Глава 13 посвящена исчислению матриц, глава 14 — числам Бернулли, глава 15 — большой теореме Ферма.

Как видим, этот курс включал ряд новых исследований, в том числе исследования учеников автора. Изложение книги оживлено многими историческими ссылками и комментариями автора. В конце книги приложены многочисленные таблицы, в том числе таблицы степеней, индексов, чисел Бернулли, таблица Коркина, таблица



решений уравнения Пелля, линейных делителей квадратичных форм и др.

В 1909 г. Граве наметил широкую программу дальнейшего чтения специальных курсов. Результатом одного из них явилась изданная в 1909—1910 гг. «Арифметическая теория алгебраических величин» [73]. Это был первый том задуманного обширного труда, который должен был содержать еще четыре отдельных курса: 1) общая теория идеалов (Граве читал в 1910—1911 гг.); 2) деление круга (задача Ферма); 3) кубическая область (алгоритм Вороного); 4) комплексное умножение. В первом томе при изложении квадратичной области автор придерживался классической теории Гаусса, модернизируя ее, где возможно, но не отступая в сторону теории идеалов. Граве сделал это, чтобы, вводя читателя в широкую область современной теории чисел, не оставлять его в неведении относительно классических методов основателя всей этой науки и еще потому, что теория идеальных чисел при всем ее первостепенном значении в науке не есть единственное обобщение теории квадратичных форм. Это есть то обобщение, которое имело дело с формами разложимыми. Существуют уже серьезные обобщения гауссовой теории в сторону квадратичных форм с большим числом переменных.

В виде приложения в этом же курсе помещена статья ученика Граве В. П. Вельмина, содержащая интересное изложение теории идеалов квадратичной области. Здесь рассматривались также алгебраические числа в квадратичной области.

Второй том этого труда «Теория идеалов» был опубликован в 1913 г. [83]. В предисловии автор останавливается на истории вопроса — трудах Куммера, Золотарева, Дедекинда и Кронекера, последний параллельно с теорией алгебраических чисел рассматривал алгебраические функции и таким образом сблизил теорию чисел с анализом. Идеи Кронекера получили новое развитие в работах его ученика Гензеля, еще более сблизившего теорию алгебраических чисел с теорией алгебраических функций. С Гензелем, как упоминалось, Граве был в дружеских отношениях, вел переписку и встречался во время своих поездок в Западную Европу.

Эти идеи в ближайшие годы нашли свое дальнейшее развитие в лекциях Граве. Так, в январе 1916 г. он писал

А. А. Маркову: «... я буду в этом полугодии читать большой курс (четыре лекции в неделю) об алгебраических числах и функциях.

Излагая по Кронекеру, как это сделано Вебером во втором томе его алгебры, я буду сразу рассматривать оба случая: когда основное поле или числовое, или функциональное, причем буду предполагать, конечно, алгебраические функции только от одной переменной независимой.

Все то, где соображения будут общие, я буду излагать, не оговаривая, который из двух случаев рассматривается.

Только в тех случаях, когда рассуждения будут расходиться, я рассмотрю отдельно оба случая. Случай алгебраических функций я подразделю в свою очередь на 5.

... Интересно, насколько эти лекции будут интересовать моих учеников» (2, л. 3—4).

Как известно, эти лекции были восприняты с большим энтузиазмом, особенно представителями младшего поколения Киевской школы.

«Теория идеалов» состояла всего из трех глав. В главе 1 — «Фундаментальный базис» — даются основные свойства алгебраических чисел. В конце главы рассматривается область деления круга. Глава 2 посвящена общей теории модулей. Глава 3 — арифметике идеалов. В заключение автор останавливается более подробно на изучении некоторых свойств функции  $\varphi(m)$ .  $\varphi(m)$  — число классов по модулю  $m$ , взаимно простых с  $m$ , представляющих естественное обобщение свойств функции, встречавшейся в элементарной теории чисел. Остальные тома этого руководства не были выпущены. Следующая группа руководств Граве охватывает такие предметы, как введение в анализ, теорию эллиптических функций, различные вопросы страхования. Первым был издан в 1895 г. литографированным способом «Курс дифференциального исчисления».

Значительно позже вышла книга — «Введение в анализ. Иррациональные числа и пределы», опубликованная в 1910 г. [70]. В предисловии автор высказывает мысль о необходимости введения без излишнего педантизма теории пределов и иррациональных чисел в программу средней школы. Книга состоит из трех глав: иррациональные числа, пределы и элементарная теория рядов (последняя содержит и раздел бесконечных произведений) и заклю-

чение, где речь идет об основных положениях учения о числовых множествах. Здесь приведены теоремы Кантора и Вейерштрасса; дано понятие о трансфинитных числах.

В дальнейшем, в 1924 г. Граве опубликовал еще «Краткий курс математического анализа» [105], предназначенный для студентов вузов и для самообразования.

Курс теории эллиптических функций Граве [71] был частично опубликован в 1910 г. Он должен был состоять из двух выпусков, из которых вышел только первый, излагающий саму теорию. Второй выпуск автор предполагал посвятить теории преобразования и «вообще тем вопросам теории эллиптических функций, как говорится в предисловии, которые имеют непосредственную связь с наиболее важными частями современных алгебраического анализа и теории чисел».

Два руководства Граве — «Математика страхового дела» [82] и «Теория пенсионных касс» [95] — предназначались для студентов страхового подотдела Киевского коммерческого института. Здесь нашла применение теория вероятностей к различным видам страхования и вычисления пенсий. Книги были написаны ясным языком, содержали достаточное количество примеров и задач. Работы эти лежат несколько в стороне от основных интересов Граве и подробно на них останавливаться мы не будем. Заметим лишь, что во второй из них автор критиковал постановку дела пенсионных касс в России, узость и непрактичность организации их в отдельных ведомствах и городах и предложил свои принципы их организации, построенные на демократических основах. В начале 20-х годов эта же тематика нашла отражение в ряде работ [104], [97].

Курсы и учебные пособия Граве сыграли большую роль в развитии математического образования в нашей стране и особенно в распространении новых научных идей среди учащейся молодежи.

## История математики и научно-популярная литература

Во многих работах Граве встречаются исторические отступления. Рассматривая тот или иной вопрос, автор выясняет его место в общей схеме развития данной проблемы.

Это помогает лучше его понять. Изложение материала в своих работах Граве часто связывает с конкретными авторами отдельных теорий и теорем и благодаря этому текст лучше и легче воспринимается.

Сведения по истории математики содержатся и в статьях Граве прикладного характера. Например, в статье о новых принципах небесной механики говорится о том, что математика вызвана к жизни практическими нуждами [139]. Тут же изложены взгляды Чебышева на задачи математики. Исторический обзор имеется и в статье о борьбе с коррозией [157] и в ряде других.

Несколько работ Граве непосредственно относятся к истории математики. Среди них отметим прежде всего второй том «Трактата по алгебраическому анализу» [175—177]. Это наиболее крупный его труд по истории алгебры и дисциплинам, к ней примыкающим, начиная от арифметики древних и Диофантова анализа. Особенно интересен обзор выдающихся открытий в рассматриваемой области за последние 300 лет (см. стр. 57).

Широкий круг исторических вопросов затрагивается в статье «Прогрессирует ли математика?» [179], написанной в конце 20-х годов. Она предназначалась для Комиссии по истории знаний при АН СССР, в работе которой Граве принимал участие в 1928—1929 гг. Автор здесь отмечает, что весьма часто открытия, сделанные одним математиком забываются, открываются вновь потом другими. В статье приводятся несколько конкретных примеров недоразумений, как говорит автор, касающихся таких ученых, как Ньютон, Эйлер, Лагранж, Гаусс, Коши.

Большой интерес представляют исторические заметки Граве автобиографического характера — «Моя жизнь и научная деятельность» [180].

В «Исторических заметках» [114] автор обращает внимание на то, что теория иррациональных чисел Дедекинда имела место уже у Евклида, что правило ложного положения было известно еще в средние века. У арабов оно называлось арифметикой двух ошибок. Здесь же отмечается, что как следует из одной арабской рукописи, известная задача о 15 мусульманах и 15 христианах и мнемоническая фраза, выражающая ее решение, были известны арабам, т. е. значительно раньше, чем это принято считать.



Д. А. Граве с группой преподавателей и студентов Киевского университета, 1914 г.

Граве публикует неизвестное письмо К. Гаусса к Г. В. Ольберсу от 12 марта 1811 г. из Геттингена. Оно было найдено Д. А. Граве совместно с Д. А. Карамышевым в одной из книг Киевской обсерватории; книга эта принадлежала ранее наследникам Ольберса [98], [103].

В Энциклопедическом словаре Брокгауза — Ефрона Граве поместил ряд очерков о жизни и деятельности известных математиков Гаусса [10], Давидова [23], Гарнье [9] и др. [8], [11], [12].

К 20-летию Октябрьской революции была написана статья, в которой давался обзор деятельности Института математики АН УССР за годы Советской власти [167].

В статье, в которой рассматривается теория относительности в историческом аспекте, автор, говоря о перевороте в науке, связанном с работами Эйнштейна, отмечает: «Как бы гениальна ни была личность отдельного человека, она не в силах коренным образом повлиять на изменение научных взглядов. Обычно происходит явление обратное. Известная эпоха в своем коллективном творчестве направляет научную мысль в известную сторону и, когда тут назревают большие открытия, тогда являются гениальные люди, формулирующие их и облекающие в вид теорий. Эти теории удерживаются впредь до нового этапа прогресса науки. Так, например, Коперник высказал в сущности мысли некоторых греческих философов, которые брезжились далее в арабской и средневековой науке» [123]. Любопытны его замечания о связи математики и практики. Касаясь работ Лагранжа, автор говорит: «Отдавая должное бессмертному творению Лагранжа (имеется в виду его «Аналитическая механика». — В. Д.), я должен сказать, что при всей моей любви к математическому анализу, я не принадлежу к таким фанатикам, которые бы радовались, когда какая-либо прикладная наука отбрасывает все, что относится к ее природе, и становится простым математическим анализом. Да в сущности этого и не было в книге Лагранжа. Все равно он основывает механику на принципах, взятых из жизни и природы». Далее автор отмечает: «Когда мы желаем, чтобы наша математическая схема действительно соответствовала тому, что мы видим в материальном мире, то математики должны обращаться за советами к настоящим знатокам материи — физикам». А последние, продолжал он, — «нуждаются в помощи

математиков» (16, д. 78, л. 1—9). В статье говорится о работах предшественников Эйнштейна (в том числе Лобачевского, Гаусса, Риманна, Гельмгольца, С. Ли, Гильберга, Герца, Планка), рассматриваются основные положения теории относительности, а также намечается план курса механики.

Граве много сделал для популяризации науки, и в частности математики. Важную роль в этом сыграла прежде всего его речь «Значение математики в естествознании» [66], которая полностью вошла в его работу «Энциклопедия математики» [81]. В книге в доступной форме излагаются основные направления, цели и методы современных автору математических исследований. Граве дает в ней не только основные положения аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления, но и помещает краткие обзоры других математических дисциплин, обращая как он говорит об этом в предисловии, преимущественное внимание на идейную сторону вопроса. Автор посвятил книгу «главным образом истинным любителям математики, особенно живущим в провинции, вдали от университетских центров», а также ученикам старших классов средних учебных заведений, имеющим склонность к математике. Как учебное руководство книга должна была дополнить краткий курс высшей математики, который читал автор в Киевском коммерческом институте. Помимо традиционных отделов и понятий математики, в ней рассмотрены так называемые невозможные задачи и их роль в математике; многомерные геометрии; теория множеств; теория групп и теория Галуа; теория сравнений и арифметическая теория алгебраических величин; теория функций комплексного переменного; функции, наименее уклоняющиеся от нуля; черчение географических карт; известная задача Менделеева; интегрирование дифференциальных уравнений; приближенные вычисления и конечные разности; основные понятия аналитической механики, математической физики и теории вероятностей.

Здесь упоминаются работы Эйлера, Лобачевского, Гаусса, Чебышева, Лиувилля, Якоби, Абеля и других известных математиков.

В последней главе речь шла о намечавшейся реформе преподавания математики в средней школе и о некоторых вопросах преподавания математики в высшей школе.

В заключение автор высказывает свои взгляды по вопросам теории познания (см. стр. 30).

Такого же рода были и некоторые заметки Граве [24], [29], [36], помещенные в Энциклопедическом словаре Брокгауза-Ефрона. Граве читал в Киеве также публичные лекции по различным отделам математики.

Особенно часто выступал он с публичными лекциями в послеоктябрьский период — читал их красноармейцам и морякам, выступал перед рабочими. В начале 30-х годов Граве прочел цикл лекций по аэродинамике и ее приложениям рабочим завода в Харькове.

Научно-популярный характер имела упоминаемая выше статья по теории относительности [123]. Немного раньше он выпустил брошюру о том, как устроена Вселенная [99]. В ней освещались идеи Коперника, Лапласа, Эйнштейна и др., критиковались различные идеалистические и религиозные измышления о происхождении мира.

В одной из работ автор останавливается на истоках математики, дает краткий исторический очерк ее развития и в конце указывает на использование математики в технике [142]. В другой брошюре рассмотрен такой же круг вопросов — критика различных идеалистических течений, перспективы развития и значение математики в социалистическом строительстве [148].



## ШКОЛА ГРАВЕ

Образование Киевской математической школы было одним из выдающихся событий в культурной жизни России дореволюционного периода. «Создание крупной математической школы в дореволюционное время, притом в провинциальном центре, — писал Н. Г. Чеботарев, — является исключительным, почти единичным фактом в истории русской математики» (63, стр. 12).

Важное место в тематике Киевской школы занимали алгебра и теория чисел. И это не случайно. Алгебраическая тематика нашла широкое отражение в работах киевских математиков задолго до того, как была создана школа.

Серьезные исследования в этой области опубликовали М. А. Тихомандрицкий, П. Э. Ромер, М. Г. Ващенко-Захарченко, а позже В. П. Ермаков, П. М. Покровский, Б. Я. Букреев, Г. В. Пфейфер, Д. А. Граве. Благодаря работам Ромера и известным курсам Ващенко-Захарченко и Граве, в конце XIX и начале XX в. многие новые вопросы алгебры получили распространение в России. Много докладов и сообщений на заседаниях Киевского физико-математического общества (организовано в 1889 г.) было посвящено также алгебре и теории чисел.

Уровень преподавания математики в Киевском университете был весьма высок. Учебники, созданные Граве и его коллегами, отражали современное состояние предмета и прививали молодежи вкус к науке. Все шире применялась на математическом отделении университета семинарская форма занятий. Инициатором ее был еще в 80-е годы прошлого столетия проф. Ермаков.

Непосредственные истоки Киевской алгебраической школы восходят к 90-м годам XIX в. К этому времени значительно выросла научная активность студентов математического отделения. В Киеве учились известные позже ученые А. Пшеборский, Г. Пфейфер, П. Воронец, И. Белянкин, А. Билимович и др.

Важную роль в оформлении Киевской математической школы сыграл Д. А. Граве. Он удачно использовал сложившиеся уже традиции на физико-математическом факультете и стремление способной молодежи к знаниям и научной работе. Поставив перед учениками новые актуальные научные проблемы, Граве сумел объединить их интересы и направить их творческие усилия на разработку этих новых, хотя и трудных вопросов теории. Его ученики, освоив современные методы исследования, добились больших успехов.

Студенты принимали участие в семинарских занятиях уже с первых курсов университета. После изучения учебной литературы они занимались реферированием литературы по специальности. Киевский семинар начал свою работу с 1904 г. Семинарские занятия проводились, как правило, во внелекционное время в математическом кабинете, открытом по инициативе Б. Я. Букрева. В 1904—1905 гг., когда университет был закрыт, Граве проводил занятия семинара у себя дома (82, л. 5).

В 1905 г. был разработан специальный устав семинара, который, как пишет Граве (6, л. 93), испугал консервативную профессию своими радикальными тенденциями.

В 1907 г. по возвращении Граве из-за границы семинар также некоторое время собирался у него дома.

Кроме того, в университете проходили занятия и так называемого подготовительного семинара, или просеминара, где рассматривались более элементарные вопросы. Активно работали семинары Граве в 1908—1914 гг. и в 1916—1918 гг.

В 1908—1911 г., особое внимание на семинарах уделялось теории групп. Вот как описывал занятия семинара в 1911 г. и обосновывал предмет его занятий Граве в своей рецензии на книгу О. Ю. Шмидта «Абстрактная теория групп»: «Теория групп является одной из важней-

ших доктрин современной математики, но несмотря на ее выдающуюся роль в науке, преподавание ее в России находится до сих пор в рудиментарном состоянии. Если я не ошибаюсь, теория групп совершенно не упоминается в официальных обозрениях русских университетов.

В моем стремлении поднять преподавание чистой математики в Киевском университете я столкнулся с большими препятствиями косности официальных программ. Теории групп не было места в обязательном преподавании.

Желая тем не менее дать серьезным студентам, занимающимся наукой, возможность практически познакомиться с теорией групп и получить, таким образом в свое распоряжение сильное орудие исследования, я выделил один день в неделю из моего семинара, который посвятил теории групп. Я назвал занятия по теории групп *просеминаром*, желая этим подчеркнуть элементарность указанной теории: элементарность не в смысле простоты ее, а в том смысле, что основы теории групп не требуют почти никаких предварительных сведений по другим предметам.

Занятия в этом просеминаре происходили в осеннем полугодии 1911 г. по субботам. Самый характер занятий был такой. Мы взяли книгу Е. Pascal. *Repertorium der höheren Analysis* (Э. Паскаль. Справочник по высшему анализу.— В. Д.), в которой заключается статья проф. Loewy об абстрактной теории групп. В этой статье перечислены теоремы без доказательства с подробными литературными ссылками. Эти теоремы выставлялись в русском переводе в книге, находившейся в помещении математического семинара. Студенты должны были пробовать сами доказать теоремы и, если встречали затруднение, то могли обратиться к литературе» (76, л. 12).

Граве, привлекая студентов к самостоятельной исследовательской работе, проявлял известную смелость в выборе тем занятий. Он предлагал ученикам большие отделы алгебры, в которых они сами должны были разобраться. Граве поощрял студентов, выбирающих трудные вопросы. Его ученики дали доказательство ряда важных теорем, будучи студентами 3—4 курсов.

В семинаре принимал участие и проф. В. П. Ермаков. Он вел теорию чисел.

На семинаре по алгебре в 1913 г., как сообщал об этом Граве в письме к Стеклову (1, л. 20—21), изучали конечные группы ортогональных преобразований и теорию алгебраических функций с арифметической и групповой точек зрения.

В другие годы темами семинара были: арифметическая теория квадратических форм, теория идеалов, теория эллиптических функций и связанных с ней проблем теории чисел, общая теория полей и др. На семинарах обсуждались также и отдельные вопросы, касающиеся издания новых курсов Д. А. Граве.

Большое внимание на математическом отделении Киевского университета уделялось воспитанию научных сотрудников. По окончании университета наиболее способных выпускников оставляли при нем для подготовки к магистерскому званию.

Д. А. Граве старался оставить при университете больше выпускников, считая, что отбор научных работников должен производиться в процессе творческой работы. При этом ему часто приходилось отстаивать их кандидатуры в Совете университета.

На протяжении двух-трех лет магистранты должны были проработать большую литературу, сдать магистерские экзамены и заняться собственными научными исследованиями. Профессор-руководитель давал своему ученику письменную инструкцию. А магистрант обязан был через каждый год отчитываться о проделанной работе. Этот отчет с отзывом научного руководителя пересылали в Министерство народного просвещения.

По инструкциям и отчетам можно составить представление о том, как готовили магистрантов.

Так в инструкции Е. И. Жилинскому, окончившему университет в 1911 г. и командированному на два года за границу, Д. А. Граве писал (71, д. 447, л. 39—40): «Проф. Гензель в личной со мной беседе дал очень лестные отзывы о познаниях Жилинского и изъявил свое согласие руководить занятиями молодого ученого. Поэтому я избрал местом командировки Марбург. Для пополнения университетского образования я советую Жилинскому ближайший летний семестр провести в Геттингене, где слушать лекции проф. Ландау по следующим предметам: теории идеалов, теории Галуа, целым трансцен-

дентным функциям. Что касается приготовления к магистерскому экзамену, то ввиду того, что Жилинский выбрал своею специальностью теорию чисел, я могу рекомендовать изучение следующих сочинений...» По теории чисел перечисляется девять курсов, в том числе Гаусса, Дирихле, Лежандра, Бахмана, Вебера, Гильберта, Гензеля; по алгебре три — Вебера, Нетто, Жордана; по эллиптическим функциям — Вебер. Курс алгебры, т. III.

В инструкции К. Ф. Абрамовичу после указания курсов, которые должен проработать магистрант, Граве писал (69, л. 71): «...что же касается до самостоятельных научных занятий, то я должен обратить внимание факультета на то обстоятельство, что г. Абрамович имел уже возможность в продолжение двух последних лет серьезно углубиться в теорию гипергеометрических функций... Ввиду этого является самым практичным посоветовать г. Абрамовичу не покидать того плодотворного поля занятий, в котором он уже с успехом пробовал свои силы. Поэтому я энергично советую г. Абрамовичу выбрать предметом своих занятий теорию одноморфных функций... Я считаю необходимым посоветовать г. Абрамовичу принять деятельное участие в занятиях моих семинара и просеминара по чистой математике. В нынешнем году занятия семинара посвящены высшим частям теории идеалов и смежных с ними глав алгебраического анализа и теории эллиптических функций».

Несколько позже, в инструкции Н. Г. Чеботареву Граве писал, что он должен продолжать успешно начатые свои самостоятельные исследования и немедленно приступить к серьезной подготовке к магистерским экзаменам.

Как выполнялись инструкции и проходили занятия магистрантов, видно из их отчетов. Например, в отчете за 1915 г. О. Ю. Шмидт (9, д. 1908, л. 16—20) пишет, что отчетный год прошел для него «под знаком магистерского испытания» и продолжает: «...мое математическое развитие пока прошло через две совершенно различные стадии. Рано, еще на втором курсе университета, я начал работать под руководством проф. Д. А. Граве в области алгебры и, в частности теории групп. Плодом занятий вскоре явились несколько печатных работ...

Для моих специальных работ мне приходилось просматривать все имеющиеся в библиотеке Ун. Св. Вл. математические журналы за последние десятки лет. При этом я часто пробегал, а иногда и прочитывал более внимательно, много мемуаров и заметок по другим вопросам. Затем я перелистал почти весь богатый запас книг учебного характера библиотеки математического семинария. Наконец, я читал много отделов из обеих больших энциклопедий, а малый справочник «*Repertorium der höheren Mathematik*» Паскаля у меня всегда является настольной книгой. Это знакомство с литературой оказывало мне и окажет еще большую помощь. ...К началу нынешнего 1915 г. у меня была предварительно прочитана большая часть книг, необходимых к магистерскому экзамену, а также ряд более легких книг, служивших к ним введением. В 1915 г. надо было, выбрав немного лучших руководств, изучать их подробно и внимательно для окончательной подготовки к экзамену. Конечно, каждый предмет имеет свою прелесть, а в молодой голове каждая книга вызывает целый рой вопросов и мыслей, которыми хотелось бы заняться подробнее, но такие стремления приходилось сурово оттеснять, так как я решил ничем не отвлекаться от непосредственно нужной будничной работы. Впрочем, эвакуация университета в Саратов и закрытие библиотеки сделали этот род занятий единственно возможным, по крайней мере, для начинающего. Занесенные в записную книжку, все возбужденные чтением вопросы ждут окончания экзаменов и более благоприятной обстановки». Далее О. Ю. Шмидт перечисляет литературу, проработанную по теории дифференциальных уравнений, теории функций, по вариационному исчислению и геометрии (всего около 20 томов), и дает им характеристику.

«Кроме того, — пишет Шмидт, — я слушал лекции проективной геометрии у проф. А. П. Котельникова и по предложению проф. Д. А. Граве помогал ему в практических занятиях со студентами по аналитической геометрии».

Познакомившись с отчетом Б. Н. Делоне за 1914 г. (71, л. 350), проф. К. А. Поссе на заседании ученого комитета Министерства сказал: «...в лице г. Делоне мы имеем, без сомнения, талантливого молодого матема-

тика. Главным предметом его специальных занятий является теория чисел и в ней высшие ее отделы, связанные с такими же отделами высшей алгебры. Между прочим, г. Делоне заинтересовался работами Кронекера, представляющими большие трудности для их изучения, вследствие крайней сжатости изложения, доходящей иногда до простого намека на глубокую, но скрытую идею. Не будучи специалистом в этой области, я обратился к проф. И. И. Иванову, много работавшему по вопросам общей теории чисел, с просьбой ознакомиться с отчетом г. Делоне и приложенной к нему статьей стипендиата, представленной им в журнал Крелля на немецком языке, но пока еще не напечатанной. Проф. Иванов дал самый лестный для стипендиата отзыв о его работе и вполне разделяет мнение проф. Граве о выдающихся способностях его ученика».

В апреле 1913 г. член ученого комитета Министерства просвещения проф. Б. М. Коялович, который ознакомился с отчетом стипендиата Е. И. Жилинского, сказал (70, л. 47): «Проф. Граве удалось создать при Киевском университете крупную математическую школу, которая может служить рассадником новых научных деятелей для всей России. Считаю своим долгом отметить этот факт и приветствовать проф. Граве с таким блестящим успехом его профессорской деятельности».

Киевская математическая школа получила всеобщее признание, а семинар ее руководителя проф. Граве стал известен среди европейской математической общности.

О своем семинаре Граве писал: «Моя школа имела блестящих по способностям учеников и я горжусь тем, что свободные приемы работы с ними давали быстрые и хорошие результаты. Семинар мой (1912—1914 гг.— В. Д.) происходил у меня на дому. Он не находился ни в каком отношении к официальному преподаванию в университете. Кроме того, также не находясь ни в каких отношениях с университетским преподаванием, происходил по вечерам мой семинар в здании университета. Единственное, в чем я поддерживал связь с общим университетским преподаванием это то, что требовал, чтобы мои ученики сдавали экзамены по другим дисциплинам удовлетворительно» [180, л. 36, 37].

## Деятели Киевской математической школы

К старшему поколению Киевской школы можно отнести К. Ф. Абрамовича, В. П. Вельмина, Е. И. Жилинского.

К. Ф. Абрамович, ученик профессоров Букреева и Граве, основное внимание уделял изучению специальных главным образом гипергеометрических функций. Уже в студенческой работе «О гипергеометрическом ряде» он проявил элементы самостоятельного творчества. За это сочинение он был награжден золотой медалью. В сокращенном виде оно было напечатано (83). В 1916—1917 гг. К. Ф. Абрамович как приват-доцент читал в университете спецкурс по теории эллиптических функций, впоследствии преподавал математику в различных высших школах Польши.

В. П. Вельмин — ученик Граве и Ермакова. Первым его печатным выступлением в студенческие годы было решение задачи, предложенной В. П. Ермаковым (58, стр. 437). Далее последовала заметка о разложении числа  $e$  в обыкновенную непрерывную дробь. За статью о кривых линиях третьего порядка он был награжден золотой медалью.

Его работы, написанные в 1910—1913 гг., относились в основном к алгебре и теории чисел. Из них особо следует отметить монографию «О квадратичном законе взаимности в произвольной квадратичной области» (89). Это сочинение было посвящено одному из важнейших вопросов теории чисел — так называемым обобщенным законам взаимности. Оно было одним из первых по данной теории (87, ст. 346).

После сдачи магистерских экзаменов В. П. Вельмин в 1909 г. стал преподавателем Варшавского университета. В период 1915—1950 гг. он был профессором Ростовского университета. Там он руководил исследованиями по алгебре и теории чисел. С 1950 г. В. П. Вельмин переехал в Киев и стал заведовать кафедрой высшей математики в Институте легкой промышленности (99) и (129).

Работы Е. И. Жилинского в период 1911—1917 гг. были обращены к совсем новым в то время вопросам теории чисел, а именно к теории  $p$ -адических чисел. За свою



первую студенческую работу «Новейшие течения в теории идеалов» он был награжден серебряной медалью. Как отметил проф. Граве, работа носила самостоятельный характер и выходила за рамки обычных студенческих сочинений. Затем основы теории  $p$ -адических чисел Гензеля были изложены Е. И. Жилинским в одной из статей (101). Особое внимание автор обратил на связь  $p$ -адических чисел с обычными рациональными.

Весьма интересна его статья (100), содержащая доказательство очень важной теоремы, которая была доложена Жилинским на заседании Геттингенского физико-математического общества и произвела большое впечатление. Гильберт дал указание опубликовать ее в «*Mathematische Annalen*» вне очереди, а Ландау включил ее в свой курс.

Е. И. Жилинский в 1915—1916 гг. был ассистентом Киевского университета, впоследствии он преподавал в различных высших учебных заведениях Польши (в последние годы жизни — в Лодзинском университете).

Среднее поколение Киевской школы более многочисленно. Это — О. Ю. Шмидт, Б. Н. Делоне, А. М. Островский, П. Д. Белоновский, А. Шадурский, М. Ф. Кравчук.

Первая работа О. Ю. Шмидта «Об уравнениях, решаемых в радикалах, степень которых есть степень простого числа (124) была студенческим сочинением, за которое автор получил золотую медаль. О значении этой работы Шмидта Д. А. Граве писал (14, л. 70): «Дебют автора в этой трудной области надо признать блестящим. Автор говорит свое новое слово настолько серьезно, что делаются заметными неясные контуры красивых законов там, где до сих пор было пустое белое место. Изложение настолько новое и самостоятельное, что труднее сказать, что не принадлежит автору, чем перечислить его результаты... Главная причина успеха автора лежит в глубоком изучении «*Traité*» Жордана и в превосходном знании современной теории групп. Автор поставил себе целью провести исследование в духе Жордана только не при помощи линейных групп, как это последний делает, а при помощи групп Бетти, то есть при помощи конечного поля. Прежде всего надо подчеркнуть гениальный по простоте критерий того, что данная целая функция дает подстановку элементов поля. Известен

был критерий Эрмита, усовершенствованный Диксоном. Автор показал, что дело гораздо проще, а именно, что целая функция  $f(x)$  представляет подстановку всякий раз, когда существует целая функция, дающая обратную подстановку, что моментально приводится к неравенству нулю некоторого определителя. Упростив таким образом метод исследования, автор энергично принялся за проведение своей мысли. Читатель с захватывающим интересом следит, как трудности вопроса падают одна за другой под ударами неумолимой логики рассуждений автора... Хотя подобно Жордану автор показывает лишь схему решения в общем случае, тем не менее вся схема автора занимает четыре страницы, тогда, как у Жордана дело очень сложно. Результат автора является в то же время более просто формулируемым... Заканчивает свой труд автор приложением метода к случаю  $p^2$ , причем изящными и красивыми выкладками, раз в пять короче, получаются все результаты Жордана, относящиеся к этому случаю» (58, стр. 445). В дальнейшем, как отмечал А. Г. Курош (104), эта работа нашла продолжение в исследованиях некоторых советских алгебраистов.

Две следующие работы О. Ю. Шмидта (123, 125) были посвящены доказательству известной теоремы Ремака о том, что конечная группа может быть представлена лишь одним образом как прямое произведение неразложимых групп. Важно при этом отметить, что доказательство Шмидта было более простое и значительно короче, чем доказательство Ремака. В книгах по теории групп, выходявших позже, доказательство этой важной теоремы дается всегда по Шмидту, оно сделалось классическим.

Работа О. Ю. Шмидта «Абстрактная теория групп» (126) выросла, как говорит автор в предисловии ко второму изданию своей книги, из его занятий в семинаре проф. Д. А. Граве. Д. А. Граве писал об этом (76, л. 2): «Уже с самого начала (работы семинара в 1911 г. — В. Д.) выделился и далеко оставил за собой других товарищей студент 5-го семестра О. Ю. Шмидт.

С быстротой, характеризующей выдающийся математический талант, г-н Шмидт овладел предметом и с увлечением предавался теории групп, причем бросил временно занятия по алгебраическому решению уравнений, степень которых есть степень простого числа. Этот вопрос



Д. А. Граве и О. Ю. Шмидт

он изучал раньше по моему совету. Я не только упрекал Шмидта за перерыв в его первоначальных занятиях, но всеми силами поощрял его в новой сфере, ибо был убежден, что хорошее знание теории групп ему окажет большие услуги как раз в том же его специальном вопросе.

Шмидт проявил большую изобретательность и часто приводил слушателей в восторг своими неожиданными остроумными более простыми, чем у предшественников, доказательствами.

...Несмотря на то, что Шмидт оказался талантливым лектором и умел вызывать товарищей на оживленный обмен мыслей, скоро он оказался так далеко в теории групп, что я заметил, что студенты начинают с трудом следить за его изложением, а аудитория начала редеть. Тогда я изменил предмет занятий просеминара, взяв более элементарный предмет, а Шмидту посоветовал обработать результаты его занятий в виде книги по теории групп». Эта монография (58, стр. 425) стала классическим руководством по теории групп. Как отметил А. Г. Курош (107), она оказала очень большое влияние на развитие теоретико-групповых исследований в нашей стране.

В 1916 г. О. Ю. Шмидт успешно сдал магистерские экзамены и стал приват-доцентом Киевского университета.

После Октябрьской революции О. Ю. Шмидт вел большую партийную и научно-организационную работу и не мог полностью посвятить себя математике, но математику он не оставлял, публиковал интересные работы, руководил семинаром в МГУ. Больших успехов он достиг и в других областях науки (106), (107), (127).

Первое сочинение Б. Н. Делоне, за которое он получил золотую медаль, называлось «О соотношении между теорией идеалов и теорией Галуа». Автор исследовал здесь нормальную алгебраическую область, или так называемую область Галуа, при помощи теории идеалов. Уже в этом сочинении 1912 г. содержались серьезные научные результаты. После дальнейшей разработки темы сочинения осенью 1913 г. Б. Делоне получил новое доказательство знаменитой теоремы Кронекера об абелевых уравнениях (92).

С осени 1914 г., не оставляя вопросов теории идеалов и теории Галуа, Б. Н. Делоне поставил себе целью найти полное решение бинарных неопределенных уравнений 3-го порядка. Решению этой задачи могли содействовать работы Вороного и Дирихле, относящиеся к кубическим уравнениям и выяснившие ряд вопросов в теории кубического поля.

Программу своих исследований Б. Н. Делоне разделил на следующие вопросы (10, л. 144): 1) подробно разобрать существующие способы вычисления основных единиц кубических областей; 2) решить неопределенное уравнение  $ax^3 + y^3 = 1$  (кубическое уравнение Пелля); 3) решить более общее уравнение  $x^3 + nx^2y + px^2y + qy^3 = 1$ ; 4) построить аналогично решение уравнения:  $x^3 + nx^2y + + px^2y + qy^3 = N$ ; 5) свести решение уравнения  $ax^3 + bx^2y + + cx^2y + dy^3 = N$  на решение одного из предыдущих; 6) решить самое общее уравнение  $ax^3 + bx^2y + cx^2y + + dy^3 + ex^2 + fxy + qy^2 + hx + ky + 1 = 0$ .

Б. Н. Делоне весной 1915 г. имел решение второго вопроса. Об этом он писал (10, л. 145): «Решение этого уравнения далось мне далеко не сразу, так как теория его оказалась зависящей от довольно своеобразных комбинаций. Зато изящный результат вполне вознаграждал меня за мой настойчивый труд, не малой наградой

за который было для меня также лестное признание, которое встретило мое исследование как со стороны моего глубокоуважаемого учителя проф. Д. А. Граве, так и со стороны академика А. А. Маркова». И действительно, об этой работе Д. А. Граве писал, что автор ее добился прекрасных результатов и что «наиболее сильный специалист теории чисел академик Марков отнесся также одобрительно к исследованию Делоне» (10, л. 144). Результаты этой работы были опубликованы в четырех заметках под названием «К решению неопределенного уравнения  $x^3p + y^3 = 1$ » (93), (94).

Далее Б. Н. Делоне приступил к решению кубических уравнений более общего вида. Работы Б. Н. Делоне оказали большое влияние на многих математиков. В начале 20-х годов он был приглашен на должность профессора в Ленинградский университет. Здесь, а позже в Москве, он провел интересные работы по алгебре, теории чисел, геометрии, математической кристаллографии и др. (97), (118), (122).

Одним из выдающихся участников семинара проф. Граве был А. М. Островский. В процессе работы семинара определились его научные интересы.

Пятнадцатилетнего Островского привел к Граве его учитель математики Чирьев. Юноша учился тогда в частном коммерческом училище, особую одаренность проявлял к математике. Граве проверил его. Во-первых, он хотел узнать, насколько самостоятельно Островский может решать трудные вопросы. Для этого он дал ему несколько теорем без доказательства из самой трудной части абстрактной теории чисел. Через два дня Островский пришел со своими доказательствами. Во-вторых, Граве дал Островскому свою книгу о квадратичной области, чтобы решить, насколько быстро тот способен читать трудные книги. Островский прочел ее в несколько дней и, придя к Граве, спорил о его приемах доказательства. После этого Граве принял его в свой семинар, где Островский выступал почти на всех заседаниях.

Как вспоминает А. М. Островский, Граве проявил к нему много терпения и внимания. Он сразу же предложил Островскому изучать теорию чисел по известной работе Гаусса «Disquisitiones arithmeticae» и к тому же на латинском языке. Далее Островский изучал поле Гаула и теорию  $p$ -адических чисел.

После окончания коммерческого училища он не мог поступить в университет, так как не имел аттестата зрелости. Граве ходатайствовал перед попечителем округа Деревицким о допуске Островского к экзаменам экстерном. Но ему в этом отказали. Тогда Граве написал письма Ландау в Геттинген и Гензелю в Марбург с просьбами об устройстве Островского. Через две недели Граве получил удовлетворительный ответ от обоих. Он посоветовал Островскому поступить в Марбургский университет, а затем совершенствоваться в Геттингенском.

Первые работы А. М. Островского были посвящены новейшим вопросам алгебры главным образом абстрактной теории полей. Упомянем здесь его замечательные результаты в так называемой бевертунг-теории, где наряду с другими результатами ему удалось довольно быстро найти очень тонкое и весьма простое доказательство главной теоремы Кюршака, доложенной последним в Кембридже в 1912 г. Уже к началу 20-годов А. М. Островский был известен как один из ведущих алгебраистов. В последующие годы он опубликовал ряд важных работ в различных областях математики. Он редактировал сочинения Ф. Клейна, принимал участие в редактировании сочинений Кронекера, был помощником редактора журнала Крелля. После Марбурга А. М. Островский некоторое время работал в Гамбурге и Геттингене ассистентом и приват-доцентом, а с 1927 г. — он профессор Базельского университета.

П. Д. Белоновский был сначала студентом Петербургского технологического института. На лекциях математики Б. М. Кояловича он заинтересовался рядом вопросов высшей алгебры и перешел в 1910 г. в Киевский университет, где написал обширное сочинение по теории Галуа. Занимаясь в семинаре проф. Граве, П. Д. Белоновский провел интересные исследования в отдельных вопросах алгебры. С 1925 г. он работал в Вятском (Кировском) педагогическом, а затем в Высшем Арктическом институтах.

Выдающимся учеником проф. Граве был М. Ф. Кравчук. Одно из его первых студенческих сочинений называлось «Основные результаты теории автоморфных функций». Дипломное сочинение было написано на тему: «О параметрическом представлении перестановоч-

ных матриц». Этот вопрос и дальнейшая разработка его М. Ф. Кравчуком были освещены в статье «О группах перестановочных матриц» (104). В этой работе дается более простое доказательство и обобщение известной теоремы Шура о высшем пределе числа линейно независимых матриц перестановочной группы  $n$ -го порядка.

После Октябрьской революции М. Ф. Кравчук был профессором Киевского университета и опубликовал ряд важных работ по алгебре и другим отделам математики (теория дифференциальных и интегральных уравнений, теория функций, теория вероятностей, теория чисел и др.). Особенно плодотворна была его научная деятельность в 20-е годы. Он был избран действительным членом АН УССР, руководил семинаром, имел своих учеников.

Участник семинара, профессорский стипендиат А. Шадурский вскоре после окончания университета написал статью «К теории исключения» (121). Изложение данного вопроса относилось здесь к целым рациональным функциям. К сожалению, его жизнь оборвалась очень рано — в июле 1916 г. он погиб от авиабомбы.

Напомним кратко о начальном периоде научной деятельности выдающегося представителя Киевской математической школы Н. Г. Чеботарева. Он начал принимать участие в семинаре проф. Граве еще будучи студентом второго курса. Уже в одном из своих первых докладов он предложил простое доказательство теоремы Бертрана о границе индексов симметрической группы. Затем он изучал теорию алгебраических функций и алгебраические числа по Гензелю, т. е. в связи с  $p$ -адическими разложениями. Занимаясь этим вопросом, он нашел арифметическую теорему монодромии о том, что композиции всех групп инерции нормального поля есть группа Галуа этого поля.

Н. Г. Чеботарев получил доказательство теоремы Дадекинда — Фробениуса, связывающей группу Галуа с разложением на идеальные множители; Делоне предложил ему доказать эту теорему независимо от теории идеалов, это доказательство автор изложил осенью 1916 г. на заседании семинара.

В дальнейшем М. Г. Чеботарев создал ряд фундаментальных трудов (96), (119).

Представителями младшего поколения Киевской школы были также Михальский, В. Колодий, А. Матусевич, А. Русецкий, А. Тарасевич и др.

Как было отмечено выше, многие из участников семинара Граве добились больших творческих успехов, прославили русскую математику.

Ученики Граве, будучи уже зрелыми учеными, не порывали связи со своим учителем, советовались с ним, информировали его о ходе своих работ. Об этом свидетельствуют письма его учеников — Абрамовича, Жилинского, Шмидта, Чеботарева и др. Так, в конце 1930 г. И. Г. Чеботарев (16, № 347) писал Граве: «На днях я закончил корректуру моей работы по проблеме резольвент. Позвольте Вам как главе нашей школы сделать о ней краткий доклад».

Высокая математическая культура Петербургской школы оказала большое влияние на развитие Киевской математической школы, отчасти продолжавшей традиции Петербурга. Этому способствовал и приход Граве в Киев и тот тесный творческий и личный контакт, который поддерживали киевские математики с петербургскими. Однако Киевская школа, сложившаяся в конце первого десятилетия XX в., имела свои особенности, свои характерные черты. Основной чертой, отличающей ее, было новое направление тематики. Многие молодые ученые, именно в Киеве, впервые начали серьезно заниматься исследованиями по новейшим вопросам алгебры — теории групп, теории алгебраических чисел, теории идеалов, рассматривать вопрос, об объединении высших областей теории чисел с алгеброй и теорией функций. Эти вопросы в большинстве своем не были свойственны традиционной тематике Петербургской школы.

Киевская математическая школа сыграла выдающуюся роль в истории математики нашей Родины. Ее воспитанники внесли большой вклад в дальнейшее развитие математики и подготовили научные кадры. О. Ю. Шмидт, Б. Н. Делоне и Н. Г. Чеботарев стали основателями новых алгебраических школ в Москве, Ленинграде и Казани.

\*   \*  
\*

Научные интересы Граве в послеоктябрьский период существенным образом изменились. В это время он стал заниматься механикой, математической физикой и различными прикладными вопросами. Творческие усилия





Д. А. Граве со своими учениками М. Г. Крейном,  
Н. И. Ахиезером, Н. Г. Чеботаревым

своих учеников Граве направляет в такие области, как гидро- и аэромеханика, теоретическая физика, теоретическая электромеханика, небесная механика и т. п.

Особенно плодотворна была деятельность Граве в 20-е годы. Разработка учениками Граве важнейших теоретических вопросов принесла блестящие результаты.

Учеником Граве был Н. И. Ахиезер. В 1925 г. он поступил к Граве в аспирантуру. К этому времени уже вышла в свет его первая печатная работа (совместно с И. Я. Штаерманом) (84). Авторы предложили общий вид разложения квадратичной формы  $n$  переменных в виде сумм двух форм специального вида, обобщив таким образом результаты Дарбу и других авторов. Далее Н. И. Ахиезер изучал главным образом теорию функций комплексного переменного и ее приложения в аэродинамике. Этой тематике, а также разным вопросам анализа он посвятил около 15 работ. В диссертации «Аеродинамічні досліді» (85) автор дает обобщение известной формулы Шварца — Кристоффеля на случай отображения двусвязной многоугольной области на круговое кольцо, а также обобщение теории С. А. Чаплыгина, посвященной колебаниям крыла бесконечно большого размаха, при которых циркуляция остается постоянной.

Интересные и важные результаты получил автор и в других работах.

Степень доктора Н. И. Ахиезер получил в 1936 г. без защиты диссертации, а немного раньше, в 1934 г., он был избран членом-корреспондентом АН УССР. С 1933 г. Ахиезер профессор Харьковского университета. За эти годы он опубликовал около ста работ, относящихся к теории приближений, проблеме моментов, теории функций комплексного переменного, гидромеханике, интегральным уравнениям и др. (86), (105).

Воспитанник Морского корпуса В. Е. Дьяченко, с 1919 по 1921 г. служил в штабе Днестровской военной флотилии. По ходатайству Граве Дьяченко был откомандирован из флота. В 1927 г. он закончил аспирантуру и в 1928 г. стал научным сотрудником. Первые его работы, выполненные под влиянием Граве, связаны с теорией относительности, электронной оптикой, планетной механикой и другими прикладными вопросами. Позже В. Е. Дьяченко занимался разработкой эффективных методов вычислительной математики, конструированием вычислительных приборов и машин (88).

М. Г. Крейн в 14 лет слушал курс лекций по аналитической геометрии, которые читал Б. Н. Делоне студентам Киевского Политехнического института (103). В 1922—1923 гг. он как вольнослушатель посещает лекции на старших курсах физико-математического отделения Киевского ИНО и принимает участие в работе семинаров Граве.

Весной 1924 г. М. Г. Крейн уезжает в Одессу и продолжает там изучение математики. В конце того же года он докладывает о своей первой научной работе и обращает на себя внимание Н. Г. Чеботарева и С. О. Шатуновского. Докторскую степень он получил в 1939 г. без защиты диссертации и в том же году по рекомендации Д. А. Граве был избран членом-корреспондентом АН УССР. Работы М. Г. Крейна охватывают такие разделы, как алгебра, анализ, теория функций, дифференциальные и интегральные уравнения и др. Он создал и возглавил Одесскую школу функционального анализа.

В студенческие годы сдавая экзамены проф. Граве, А. Л. Наумов хорошо подготовил сразу три предмета и этим обратил на себя внимание ученого. По окончании университета в 1922 г. А. Л. Наумов стал ассистентом

Граве, а через год заменял его на лекциях. В 1926 г. Граве рекомендовал своему аспиранту Наумову заняться теорией электрических машин. Для более глубокого овладения предметом А. Л. Наумов поступил в КПИ и окончил его в 1930 г. Диссертация его была посвящена математической теории магнитного поля в машинах постоянного тока (110). В январе 1941 г. он защитил докторскую диссертацию.

Продолжая развивать идеи Граве, А. Л. Наумов выпустил оригинальный учебник по теоретической механике, где нет традиционного деления на три части. В нем рассматриваются основные законы в теории относительности и квантовой механики, которыми в свое время с увлечением занимался Граве. А. Л. Наумов работал во многих учебных заведениях, а ныне заведует кафедрой теоретической механики Киевского университета.

Работы М. Х. Орлова касались вычисления элементов критических эллипсоидов разных видов, вопросов равновесия, приближенных методов решения дифференциальных и интегральных уравнений и др. В 1931 г. он получил степень доктора физико-математических наук, в 1934 г. был избран членом-корреспондентом АН УССР.

Воспитанник Киевского ИНО Е. Я. Ремез (окончил в 1924 г.) был аспирантом Б. Я. Букреева и Н. М. Крылова, затем сотрудником Граве. Его работы 1926—1929 гг. относились к интегрированию дифференциальных уравнений и приближенным методам. В это время он читал лекции в ИНО. В 1929 г. Е. Я. Ремез защитил диссертацию «Некоторые методы численного интегрирования дифференциальных уравнений с оценкой границ допущенных погрешностей».

Развивая идеи Граве, он в своей первой монографии (115) выяснил связь, существующую между теорией проекций, удовлетворяющих теореме Чебышева, и современной теорией субгармонических функций. Благодаря этой и работам других авторов, как отметил А. Ющенко (130), оказалось возможным лучше и глубже понять сущность данного вопроса и разработать практические приемы вычисления указанных проекций. В своей работе Е. Я. Ремез установил, что Д. А. Граве нашел полное решение вопроса П. Л. Чебышева задолго до того, когда развилась теория суб- и супергармонических функций. Впоследствии Е. Я. Ремез стал крупнейшим специалистом в



Д. А. Граве с учениками и сотрудниками (30-е годы)  
 Сидят (слева направо) М. А. Бык, Д. А. Граве, Туллио Леви Чивита (гость из Италии) Г. В. Пфейфер, М. Ф. Кравчук, М. Х. Орлов;  
 стоят (слева направо) Ю. Д. Соколов, В. Е. Дьяченко, К. А. Брус, В. И. Можар, А. С. Смогоржевский, Е. Я. Ремез, А. Л. Наумов, И. Б. Погребынский

области конструктивной теории функций. В 1936 г. он получил степень доктора физико-математических наук без защиты диссертации, а в 1939 г. был избран членом-корреспондентом АН УССР (90), (98).

Ю. Д. Соколов по окончании Киевского университета (в 1921 г.), начал свою многолетнюю плодотворную научную деятельность в Академии наук УССР. Истоки ее были заложены в семинарах Граве. Ю. Д. Соколов был ближайшим помощником и сотрудником во многих предприятиях, осуществляемых Граве, участвовал в астрономических наблюдениях, в работе специальной лаборатории и, наконец, в совместных разработках ряда теоретических и прикладных вопросов. Первые результаты, полученные Ю. Д. Соколовым в связи с решением задачи о движении материальной точки, притягивающейся к неподвижному центру и подверженной действию постоянной возмущающей силы, показали его научную самостоятельность и зрелость. Исследования Соколова по качественной и аналитической теории дифференциальных уравнений динамики носят классический характер и являются большим вкладом в науку. Среди работ

Ю. Д. Соколова, посвященных теории соударений в классической задаче трех тел, особого внимания заслуживает его докторская диссертация «Об условиях общего соударения трех тел, взаимно притягивающихся по закону Ньютона» (116), защищенная в 1929 г. В том же году он получил звание профессора, в 1939 г. был избран членом-корреспондентом АН УССР. В дальнейшем Ю. Д. Соколов нашел много новых и важных решений, иногда при помощи созданных им новых методов в области проблем трех тел и проблем  $n$  тел, а также и в других прикладных и теоретических областях (109), (114).

И. Я. Штаерман по окончании Киевского университета в 1915 г. прошел полный курс Киевского политехнического института. Еще будучи студентом он принимал активное участие в семинарах Граве. В его ранних работах рассматривались различные вопросы приближенного анализа, теория квадратических форм, решение некоторых алгебраических уравнений и др. Особо следует отметить его докторскую диссертацию «Об интегрировании дифференциальных уравнений равновесия упругих оболочек» (1930). Большое внимание заслуживают работы Штаермана, посвященные контактной теории упругости и некоторым вопросам строительной механики (102), (128). И. Я. Штаерман долгие годы возглавлял кафедру теоретической механики Киевского Политехнического института, работал в научно-исследовательских учреждениях АН УССР. В 1939 г. он был избран членом-корреспондентом АН УССР.

Учениками Граве были Т. В. Путята, сейчас профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Киевского Политехнического института; И. Б. Погребысский доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Института истории естествознания и техники АН СССР и др.

Многочисленные ученики Граве работают и ныне во всех концах нашей Родины, обогащают своими трудами советскую и мировую науку, воспитывают новые поколения ученых педагогов, инженеров, имеют своих учеников, ставших кандидатами и докторами наук.

Лучшие традиции и черты Киевской школы Граве передаются новым поколениям ученых. Происходит закономерный процесс развития науки, много сделал для этого замечательный ученый Дмитрий Александрович Граве.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### РАБОТЫ Д. А. ГРАВЕ

1. Об идеальной форме оптического стекла без сферической аберрации.— Зап. физ.-матем. об-ва студентов С.-Петербургского университета, т. I. СПб., 1884, стр. 3—13.
2. Об интегрировании одного класса совокупных дифференциальных уравнений.— Там же, т. II. 1885, стр. 11—25.
3. О поверхностях минима.— Там же, стр. 99—108, 115—126, 131—167 и отд. изд. «О наименьших поверхностях». СПб., 1886 (кандидатская диссертация).
4. Решение двенадцатой задачи не в очередь (совместно с А. Борисовым).— Журнал элементарной математики, т. II. Киев, 1886, стр. 327—329.
5. Об одном классе линейных уравнений второго порядка, интегрируемых в квадратурах.— Математический сборник, т. XIV. М., 1889, стр. 197—201.
6. Об интегрировании частных дифференциальных уравнений первого порядка (магистерская диссертация). СПб., 1889, 99 стр.
7. Курс интегрирования уравнений с частными производными. СПб., 1892 (литогр.).
8. Гарнак.— Энциклопедический словарь Брокгауза — Ефрона кн. 15. СПб., 1892, стр. 142.
9. Гарнье.— Там же, стр. 144.
10. Гаусс.— Там же, стр. 184—185.
11. Гашетт.— Там же, стр. 189.
12. Габер.— Там же, стр. 214.
13. Геодезическая линия.— Там же, стр. 402.
14. Геометрия.— Там же, стр. 412—416.
15. Курс аналитической геометрии. СПб., 1893, 652 стр.
16. Гессиян.— Энциклопедический словарь Брокгауза — Ефрона, кн. 16. СПб., 1893, стр. 582—583.
17. Гиперболические функции.— Там же, стр. 712—720.
18. Гиперболоид.— Там же, стр. 720.
19. Гиперболы.— Там же, стр. 720—722.
20. Гомография.— Там же, кн. 17, стр. 166.
21. Гомологические фигуры.— Там же, стр. 166.
22. Гомотетические фигуры.— Там же, стр. 168.
23. Давидов Август Юльевич.— Там же, кн. 19, стр. 1—2.
24. Дактилономия.— Там же, стр. 39.
25. Двойная точка.— Там же, стр. 186.
26. Двойные ряды.— Там же, стр. 193.

27. Двойственность.— Там же, стр. 196.
28. Двучлен.— Там же, стр. 227—228.
29. Деривационное исчисление.— Там же, стр. 469.
30. Десятиугольник.— Там же, кн. 20, стр. 494.
31. Дифференциальное исчисление.— Там же, стр. 668—705.
32. Дифференциальные уравнения.— Там же, стр. 706.
33. Изменение переменной независимой.— Там же, кн. 24. СПб., 1894, стр. 855—856.
34. Интегральное исчисление.— Там же, кн. 25, 1894, стр. 249—253.
35. Интегрирование дифференциальных уравнений.— Там же, стр. 254—258.
36. Иррациональное число.— Там же, стр. 346.
37. О проекциях поверхности вращения на плоскости, в которых сохраняются площади, причем меридианы изображаются прямыми, а параллели кругами.— Изв. Академии наук, сер. V, т. I. СПб., 1894, стр. 73—85.
38. Sur une question de Tchebycheff. Association Française pour l'avancement des sciences.— Comptes rendus de la 23-me session. Congrès de Caen. 1894, p. 196—197.
39. Sur le problème de Dirichlet. Association Française pour l'avancement des sciences.— Comptes rendus de la 24-me session. Congrès de Bordeaux, 1895, p. 111—136.
40. Заметка, написанная в память последнего в жизни П. Л. Чебышева математического разговора «О правиле Чебышева для приближенного спрямления дуг».— Изв. Академии наук, сер. V, т. II. СПб., 1895, стр. 131—134.
41. Об изображениях шара на плоскости с сохранением площадей.— Изв. Русского астрономического об-ва. СПб., 1895, вып. IV, стр. 15.
42. Курс дифференциального исчисления (литогр.). СПб., 1895.
43. Sur le problème de trois corps.— Nouv. Annales de mathém., 1896, t. 15, p. 537—547.
44. Об основных задачах математической теории построения географических карт (докторская диссертация). СПб., 1896, стр. 197.
45. Sur la construction des cartes géographiques.— Journal de mathém. pures et appliquées, 1896, 5, t. 2, p. 317—361.
46. De la meilleure représentation d'une contrée donnée. Association Française pour l'avancement des sciences.— Comptes rendus de la 25-me session. Congrès de Tunis, 1896, p. 186—115.
47. Наложение.— Энциклопедический словарь Брокгауза — Ефрона, кн. 40. СПб., 1897, стр. 510—511.
48. К интегрированию системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных высших порядков. Протоколы Петербургского матем. об-ва за 1890—1899 гг. СПб., 1899, стр. 15—17.
49. Об одной эллиптической функции.— Там же, стр. 110—111.
50. Sur le expressions dites surpuissances.— Nouv. Annales de mathém., t. 17, 1898, p. 80—91.
51. Sur les lignes composées de parties rectilignes.— Comptes rendus Acad. Sci. Paris, t. 127, 1898, p. 1005—1007.
52. Об основных предложениях теории функций двух вещественных переменных.— Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, сер. (2), т. VI, № 5—6. Харьков, 1898, стр. 251—287.
53. Новое доказательство основной теоремы учения о неявных функциях.— Там же, стр. 288—293.

54. Об одном вопросе Чебышева.—Сборник Института путей сообщения, вып. I. СПб., 1899.
55. Об одной теореме проективной геометрии.—Математический сборник, т. XXII. М., 1901, стр. 239—242.
56. О некоторых приложениях определителей.—Там же, стр. 243—258.
57. Об одном видоизменении задачи о курьерах.—Зап. Харьковск. ун-та, Харьков, 1901, кн. 3, стр. 1—6.
58. Об одной теореме, относящейся к линейным поверхностям второго порядка.—Там же, стр. 7—8.
59. Un cas remarquable de transformation rationnelle de l'espace. *Comptes rendus Acad. Sci. Paris*, t. 134, 1902, p. 1345—1346.
60. О некоторых свойствах коварианта Hesse.—*Универс. изв.*, Киев, 1903, № 6, стр. 1—9.
61. О теореме Бертрана.—Там же, 1904, № 10, стр. 11—19.
62. О линиях третьего порядка.—Там же, стр. 33—49.
63. Элементы алгебраического анализа.—Там же, 1904, № 7; 1905, № 10; 1908, № 11.
64. Теория конечных групп. Киев, 1908, 204 стр.
65. Zur Theorie der elliptischen Functionen.—*Универс. изв.*, Киев, 1908, № 9, стр. 1—7.
66. Значение математики в естествознании.—Там же, № 12, стр. 1—12 и отд. изд. Киев, 1908.
67. Элементарный курс теории чисел.—*Универс. изв.*, Киев, 1909, № 2, 3, 7, 8, 10; 1910, № 3—4 и отд. изд. 340 стр.
68. Sur une identité dans la théorie des formes binaires quadratiques.—*Comptes rendus Acad. Sci. Paris*, t. 149, 1909, p. 770—772.
69. Sur les équations du cinquième degré résolubles algébriquement, quand le produit des racines reste arbitraire.—*Bulletin des sciences mathématiques*, 1910, t. 34, p. 23—29.
70. Введение в анализ. Иррациональные числа и пределы.—*Универс. изв.* Киев, 1910, № 1, 2, 3, 4, 9 и отд. изд. Киев, 1910, 155 стр.
71. Элементы теории эллиптических функций, вып. I. Киев, 1910, 169 стр.; под заглавием: Теория эллиптических функций.—*Универс. изв.* Киев, 1910, № 7, 1912, № 6.
72. Курс алгебраического анализа. Киев, 1911, 512 стр. (литогр.).
73. Арифметическая теория алгебраических величин, т. I. Квадратичная область. Киев, 1910, 372 стр. (литогр.).
74. Démonstration d'un théorème de Tchebycheff généralisé. *Journal für die reine und angew. Mathematik*, 1911, Bd. 140, s. 247—251.
75. К вопросу об особых точках алгебраических образований. Сборник статей, посвященных проф. Г. К. Сусливу. Киев, 1911, стр. 169—170.
76. Об алгебраических единицах.—*Универс. изв.* Киев, 1912, № 5 и отд. изд. Киев, 1911, стр. 24.
77. Основы аналитической геометрии, ч. I. Геометрия на плоскости.—*Универс. изв.* Киев, 1910, № 8; 1911, № 4, 7, 9; 1912, № 1, 2 и отд. изд. Киев, 1911, 492 стр.
78. Отзыв на докторскую диссертацию Г. В. Пфейфера (соавтор Б. Я. Букреев).—*Универс. изв.* Киев, 1911, № 8.
79. Comment on écrit les revues encyclopediques?—Там же, 1912, № 10, стр. 1—2.
80. Отзыв о медальных сочинениях.—Там же, № 6.



81. Энциклопедия математики. Очерк ее современного положения. Киев, 1912, 601 стр.; Изв. коммерческ. ин-та. Киев, 1911, № 9—12.
82. Математика страхового дела. Киев, 1912, 87 стр.
83. Арифметическая теория алгебраических величин, т. II. Теория идеалов.— Универс. изв. Киев, 1913, № 1—3 и отд. изд., 1912, 132 стр.
84. О таблице характеров Коркина. Математический сборник, т. XXIX, вып. I. М., 1913, стр. 7—11.
85. Элементарный курс теории чисел. Изд. 2-е, перераб. Киев, 1913, 416 стр.
86. Основы аналитической геометрии, ч. 2. Геометрия в пространстве. Киев, 1913 (литогр.).
87. Об основных положениях теории Галуа. Математический сборник, т. XXIX. М., 1914, стр. 153—170.
88. Sur la généralisation d'un théorème de St. Smith.— Универс. изв. Киев, 1914, № 6, стр. 59—60.
89. Correction d'une table de Cayley. Там же, стр. 61.
90. Элементы высшей алгебры. Киев, 1914, 698 стр.
91. Sur les sommes de Gauss.— Сообщ. Харьковск. матем. об-ва (2), т. XIV. Харьков, 1915, стр. 202—208.
92. О периодических непрерывных дробях.— Там же, стр. 239—246.
93. Начала алгебры. Петроград, 1915, 316 стр.
94. О преподавании алгебры. Методические указания к книге «Начала алгебры», изд. К. А. Риккера, 1915.
95. Теория пенсионных касс. Киев, Типография Ун-та св. Владимира акц. об-ва Корчак-Новицкого, 1917, 68 стр.
96. Основы алгебры. Всеукраїнський кооперативний видавничий союз. Київ, 1919, 270 стр.
97. Социальное страхование.— Вісник кооперативного страхування, № 8, Київ, 1919.
98. Письмо К. Ф. Гаусса к Г. В. Ольберсу, найденное в Киевской обсерватории.— Журн. чистого и прикладного знания, отд. физ.-матем. и техн. наук, т. I, вып. I. Одесса, 1921.
99. Как устроена Вселенная. Популярный очерк. Киев, 1923, 58 стр.
100. Sur un théorème d'Euler.— Зап. фіз.-матем. відділу ВУАН, т. I, вип. I, Київ, 1923, стр. 1—3.
101. Sur les racines cinquièmes de l'unité.— Там же, стр. 4—6.
102. Généralisation d'un théorème d'Abel.— Там же, стр. 7—8.
103. Ein neuentdeckter Brief von C. F. Gau an H. W. Olbers.— Зап. фіз.-матем. відділу ВУАН, т. I, вип. 2. Київ, 1923, стр. 91—95.
104. Математика социального страхования. Общедоступное изложение для неспециалистов. Госиздат, Л., 1924, 151 стр.
105. Краткий курс математического анализа. Киев, Госиздат Украины, 1924, 368 стр.
106. Основные законы движения.— Изв. Екатеринославского горного института, т. XIV. Екатеринослав, 1924.
107. Об основных положениях теории идеальных чисел.— Математический сборник, т. XXXII, вып. I. М., 1924, стр. 135—151.
108. О разложении простых чисел на идеальные множители.— Там же, вып. 3. М., 1925, стр. 542—560.
109. О единицах конечного поля.— Там же, стр. 562—568.
110. Über den Zusammenhang zwischen Astronomie, Meteorologie und Botanik.— Зап. фіз.-матем. відділу ВУАН, т. I, вип. 3. Київ, 1925, стр. 53—55.

111. Über Poincaresches Problem.— Там же, стр. 57—59.
112. Über die elektromagnetischen Grundlagen der Mechanik.— Там же, стр. 84—90.
113. Über Plotnikowsche Zahl.— Там же, вып. 4, стр. 5.
114. Historische Bemerkungen.— Там же, стр. 6—7.
115. Über die Rollbewegung einer schweren homogenen Kugel auf zwei Kegeln.— Там же, стр. 8—11.
116. Vegards Hypothese des getrorenen Stickstoffs.— Там же, стр. 29—31.
117. Електромагнітні сили в сонячній системі. Збірник математично-природописно-лікарської секції наукового товариства ім. Шевченка, т. XXIII—XXIV. Львів, 1925, стр. 43—46.
118. Об уравнениях Эйлера и их приложениях к теории упругостей.— Изв. Академии наук СССР, сер. VI, т. XX, № 10—11. Л., 1926, стр. 917—942.
119. Роль Шварцовой функції у теорії лінійних диференціальних рівнянь вищого порядку.— Зап. фіз.-матем. відділу ВУАН, т. II, вип. 1. Київ, 1926, стр. 1—5.
120. Sur la courbure des hyperespaces.— Там же, стр. 41—48.
121. Основы теорії Galois.— Там же, стр. 49—55.
122. Sur le mouvement du périhélie de Mercure (соавтор Ю. Д. Соколов). Труды фіз.-матем. відділу ВУАН, т. V, вип. 1. Київ, 1926, стр. 1—11.
123. Теорія відносності в історичній перспективі.— Збірник істор.-філолог. відділу ВУАН, № 51, Юбіл. збірник на пошану акад. Д. Багалія, ч. I. Київ, 1926, стр. 220—237.
124. Закон Гука в теорії упругості.— Журн. Киевск. ин-та народного хозяйства. I. Киев, 1926, стр. 111—113.
125. О резонансе.— Там же, стр. 114—116.
126. Плоская геометрия Эвклида как предельная для геометрии Лобачевского. Сборник «In memoriam N. I. Lobatschewskii», т. II. Казань, 1927, стр. 25—36.
127. Über eine Tchebychef'sche Frage.— Збірник математично-природописно-лікарської секції наук, т-ва ім. Шевченка, т. 26, Львів, 1927, стр. 45—50.
128. Über die linearen Differentialgleichungen die in Bezug auf die lineare gebrochene Transformationsgruppe invariant sind.— Journ. für die reine und angew. Mathem., Bd. 156, 1927, S. 164—175.
129. Flächentreue Abbildungen der Flächen auf die Ebene.— Mathem. Zeitschrift, Bd. 26, n. 5. Leipzig, 1927, S. 691—693.
130. О решении линейных дифференциальных уравнений при помощи определенных интегралов.— Изв. АН СССР, сер. VI, т. XXI, № 12—14. Л., 1927, стр. 943—952.
131. Über die electromagnetischen Erscheinungen im Sonnensysteme.— Зап. фіз.-матем. відділу ВУАН, т. II, вип. 2. Київ, 1927, стр. 9—12.
132. Про Лапласове рівняння.— Там же, т. II, вип. 3, стр. 1—4.
133. По поводу магнитных аномалий.— Доклады АН СССР. Л., 1928, № 16—17, стр. 316—318.
134. Оценка влияния электрической гипертатмосферы на земной магнетизм.— Там же, № 22.
135. Электрическая гипертатмосфера и земной магнетизм.— Изв. АН СССР, сер. VII, отд. физ.-матем. наук, № 4—5. Л., 1928, стр. 347—366.

136. Принципы механики.— Вестник Коммунистической академии, т. XXVII. М., 1928.
137. Über eine allgemeine Methode zur Bildung von Differentialausdrücken, die in Bezug auf eine kontinuierliche Transformationsgruppe invariant bleiben. (соавтор Н. Г. Чеботарев).— Зап. фіз.-матем. відділу ВУАН, т. III, вип. 1. Київ, 1928, стр. 53—59.
138. Малые колебания и некоторые предложения алгебры.— Изв. АН СССР, сер. VI, отд. физ.-матем. наук, № 6. Л., 1929, стр. 563—570.
139. Les nouveaux principes de la mécanique céleste.— Труды фіз.-матем. відділу ВУАН, т. IX, вип. 4. Київ, 1929, стр. 325—335.
140. Über die Summenformeln.— Зап. фіз.-матем. відділу ВУАН, т. IV, вип. 5. Київ, 1930, стр. 269—282.
141. Теоретична механіка на основі техніки. Харків — Київ, Державне вид-во України, 1930, 394 стр.
142. Математика та її застосування.— Журн. матем. циклу ВУАН, т. I, № 1, Київ, 1931, стр. 3—14.
143. Про рух стиснутого течива.— Там же, т. II, № 2. Київ, 1932, стр. 55—59.
144. Теоретическая механика на основе техники ОНТИ. М., 1932, 406 стр.
145. В какую сторону должны вращаться горизонтальные гидравлические турбины? — Изв. АН СССР, сер. VII, отд. матем. и ест. наук, № 1. Л., 1932, стр. 39—42.
146. О действии одноцилиндровой паровой машины.— Там же, № 4, стр. 503—509.
147. Теоретична механіка на основі техніки. Харків, Техвидав, 1932, стр. 364.
148. Математика та її значення в соціалістичному будівництві. Вид-во ВУАН, Київ, 1932.
149. Физические основы гидро- и аэродинамики.— Изв. АН СССР, сер. VII, отд. матем. и ест. наук, № 6. М., 1932, стр. 763—782.
150. Зв'язок теорії еліптичних функцій з теорією ідеалів.— Журн. матем. циклу ВУАН, т. III, № 2, Київ, 1933, стр. 3—13.
151. Про узагальнення алгоритма Вороного.— Там же, стр. 17—23.
152. О движении сжимаемой жидкости.— Изв. АН СССР, сер. VII, отд. матем. и ест. наук, № 5. Л., 1933, стр. 653—658.
153. Об одном обобщении теоремы Акселя Туе.— Доклады АН СССР. Л., 1933, № 6, стр. 263.
154. Аналітична геометрія. Київ, Держ. науково-технічне вид-во України, 1933, 308 стр.
155. Идеальні модулі алгебраїчних функцій.— Журн. матем. циклу ВУАН, т. I, вип. 4. Київ, 1934, стр. 23—32.
156. Методи боротьби з труднощами великої задачі Фермата.— Там же, стр. 33—44.
157. Кавітація і корозія швидко-рушних гідравлічних турбін.— Там же, стр. 85—90.
158. Про прості числа виду  $p = 4n + 3$ .— Там же, стр. 91—96.
159. Про деякі квадратичні поля.— Там же, стр. 97—112.
160. Аксоїди руху твердого тіла.— Журн. інст. матем. ВУАН, Київ, 1934, № 1, стр. 3—9.
161. Поверхні Ріманна і теорія електрики.— Там же, Київ, 1935, № 1, стр. 3—15.

162. Функції математичної фізики і гіпергеометричний ряд.— Журн. інст. матем. ВУАН (за 1934 г.). Київ, 1935, № 3—4, стр. 3—23.
163. Арифметична теорія алгебраїчних величин.— Там же, стр. 25—44.
164. Про Ейлерові інтеграли.— Там же, стр. 45—61.
165. Algorithme du calcul des racines des equations algébriques.— Журн. інст. матем. ВУАН. Київ, 1936, № 2, стр. 3—20.
166. Сопротивление жидкости движению тел. Труды I Всесоюзного съезда математиков (Харьков, 1930). М.—Л., ОНТИ НКТП СССР, 1936
167. Інститут математики Академії наук УРСР до XX роковин Великої Жовтневої революції (соавтор К. Бреус).— Журн. інст. матем. АН УРСР. Київ, 1937, № 3, стр. 3—17.
168. Принципи теорії Галуа.— Там же, стр. 65—71.
169. Про одну задачу Ейлера.— Там же, стр. 73—74
170. Про неможливість алгебричного розв'язання загального рівняння вище четвертого степеня.— Там же, Київ, 1937, № 4, стр. 3—8.
171. Про загальну показникову функцію.— Там же, стр. 43—45.
172. Про прості числа.— Там же, Київ, 1938, № 1, стр. 3—16.
173. Про задачу Гольдбаха.— Там же, стр. 77—79.
174. Тракта́т з алгебричного аналізу, т. I. Початки науки. Київ, Вид-во АН УРСР, 1938, 196 стр.
175. Тракта́т з алгебричного аналізу, т. II. Історичний огляд. Київ, Вид-во АН УРСР, 1938, 399 стр.
176. Тракта́т по алгебраическому анализу. Том первый. Начала науки. Киев, Изд-во УАН, 1938, 196 стр.
177. Тракта́т по алгебраическому анализу. Том второй. Исторический обзор. Киев, Изд-во УАН, 1939, 411 стр.
178. Про один помилковий приклад в теорії простих чисел.— Збірник праць ін-ту матем. АН УРСР. Київ, 1939, № 3, стр. 63—64.
179. Чи прогресує математика? — Нариси з історії техніки і природознавство, вип. VI. Київ, Наукова думка, 1965, стр. 56—71.
180. Моя жизнь и научная деятельность (рукоп.). Библ. Ин-та матем. АН УССР, 1, Г-75, 40 стр.

#### МАТЕРИАЛЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ

1. Архив АН СССР, ф. 162, оп. 2, д. 108.
2. Там же, ф. 173, оп. 1, д. 5
3. Там же, ф. 257, оп. 1, д. 35.
4. Там же, ф. 759, оп. 3, д. 60.
5. Там же, ф. 765, оп. 2, д. 10.
6. Архив АН УССР, дело Д. А. Граве.
7. Государственный исторический архив Ленинградской области (ГИАЛО), ф. 14, оп. 3, д. 8699.
8. Там же, ф. 14, оп. 3, д. 14936.
9. Центральный государственный исторический архив (ЦГИА) УССР, ф. 708, оп. 465, д. 1791.
10. Там же, оп. 465, д. 1927.
11. Там же, оп. 365, д. 56.
12. Там же, оп. 171, д. 1336.
13. Там же, оп. 340, д. 79.

14. Там же, оп. 1912, д. 160.
15. Киевский областной исторический архив, ф. 3359, оп. 2, д. 92.
16. Рукописный отдел Публичной библиотеки АН УССР (Киев), ф. XX.
17. Там же, ф. III, д. 48465, 48648, 48649.

\* \* \*

18. Большая советская энциклопедия, изд. 1, т. 18.
19. Большая советская энциклопедия, изд. 2, т. 12.
20. К. А. Бреус. Дмитрий Александрович Граве (К столетию со дня рождения).— Украинск. матем. журн., т. XV, № 3, Киев, 1963.
21. Л. Н. Вивальнюк. Київська алгебрична школа.— Наукові записки Чернігівського пед. інституту, т. 4, вип. 1. Київ, 1958.
22. Л. Н. Вивальнюк. Значение деятельности профессора Киевского университета акад. Д. А. Граве для развития алгебры в Советском Союзе. Кандидатская диссертация. Институт математики АН УССР, Киев, 1959.
23. В. В. Витковский (1856—1924). Пережитое. Изд. топографо-геодезического кружка. Л., 1927.
24. Р. И. Галченко. Математика в Ленинградском (Петербургском) университете в XIX в. Историко-математические исследования, вып. 14. М., Физматгиз, 1961.
25. Б. В. Гнеденко, И. Б. Погребысский. О развитии математики на Украине. Историко-математические исследования, вып. IX. М., Физматгиз, 1956.
26. Л. Н. Граціанська. Вклад учених університету в розвиток природничих наук (математика). В кн.: Історія Київського університету, Київ, Вид-во КУ, 1959.
27. Б. Н. Делоне. Дмитрий Александрович Граве (1863—1939).— Изв. АН СССР, сер. матем., т. IV, № 4—5. М., 1940.
28. И. Я. Депман. Памяти академика АН УССР Д. А. Граве.— Природа, М., Изд-во АН СССР, 1940, № 7.
29. И. Я. Депман. С.-Петербургское математическое общество. Историко-математические исследования, вып. 13. М., Физматгиз, 1960.
30. Г. М. Добров, В. С. Сологуб. Пам'яті Д. О. Граве (наукова конференція).— Доповіді АН УРСР, Київ, 1964, № 5.
31. В. А. Добровольский. Развитие математики в Киевском университете в период его основания до 1917 г. Автореферат. М., Изд-во АН СССР, 1956.
32. В. А. Добровольский. Деятельность Киевской математической школы в 1908—1917 гг.— Труды III Всесоюзного математического съезда, т. I. М., Изд-во АН СССР, 1956.
33. В. О. Добровольский. Д. О. Граве про пріоритет Эйлера в одному питанні аналізу.— Історіко-математичний збірник, вип. I. Київ, Вид-во АПН УРСР, 1959.
34. В. О. Добровольский. Алгебраїчна тематика в працях київських математиків.— Там же, вип. 2. Київ, 1961.
35. В. О. Добровольский. Діяльність Київської математичної школи в дожовтневий період (1908—1917 рр.). Нариси з історії техніки і природознавства, вип. I. Київ, Вид-во АН УРСР, 1962.
36. В. А. Добровольский. Научно-педагогическая деятельность.

- Д. А. Граве. Историко-математические исследования, вып. 15. М. Физматгиз, 1963.
37. Зап. физ.-матем. об-ва студентов С.-Петербургского университета. 1884—1885 гг., т. I—II, СПб., 1886.
  38. Институт математики АН УРСР. Д. О. Граве (некролог).— Збірник праць інституту математики АН УРСР, Київ, 1940, № 4.
  39. М. І. Кованцов. Д. О. Граве як геометр. Нариси з історії техніки і природознавства, вип. VI, Київ, Наукова думка, 1965.
  40. М. П. Кравчук. Математика та математики в Київському університеті за 100 років. В кн.: Розвиток науки в Київському університеті за 100 років. Київ, Вид-во КДУ, 1935.
  41. М. Ф. Кравчук. О работах Института математики Академии наук УССР.— Успехи матем. наук, вып. 3. М., 1937.
  42. М. Кравчук, М. Крилов, Ю. Пфейфер, І. Штаєрман. Півстоліття науково-педагогічної діяльності академіка Д. О. Граве.— Вісті УАН, Київ, 1935, № 5.
  43. Д. С. Кузнецов. Общая механика.— В кн.: «Наука в СССР за пятнадцать лет». Механика. М.—Л, ГТТИ, 1932.
  44. Л. Люстерник. Дмитрий Александрович Граве (1863—1939). Некролог.— Успехи матем. наук, вып. VIII. М., 1940.
  45. Математика и естествознание в СССР за 20 лет. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1938.
  46. Математика в СССР за тридцать лет (1917—1947). М.—Л., Госиздат тех.-теор. л-ры, 1948.
  47. «Новости». СПб., 22 апреля 1896, № 110.
  48. О. В. Палладин. Академія наук УРСР (1919—1944). Київ, Вид-во АН УРСР, 1944.
  49. И. Б. Погребысский. Дмитрий Александрович Граве.— Математика в школе. М., Учпедгиз, 1963, № 5.
  50. Протоколы Петербургского математического общества за 1890—1899 гг. СПб., 1899.
  51. Ю. В. Пфейфер і ін. Дмитро Олександрович Граве.— Вісті АН УРСР, Київ, 1939, № 9—10.
  52. Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлін. Діяльність видатних механіків на Україні. Київ, Держтехвидав, 1952.
  53. Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлін. Праці акад. Д. О. Граве з механіки. Нариси з історії техніки і природознавства, вип. VI. Київ, Наукова думка, 1965.
  54. Б. В. Пясковський. 100-річчя з дня народження ак. Д. О. Граве.— Там же, вип. IV, Київ, Наукова думка, 1963.
  55. Сборник памяти акад. Д. А. Граве. М.—Л., Госиздат, тех.-теорет. л-ры, 1940.
  56. Д. Синцов. Материалы по истории физико-математического факультета Харьковского университета. Харьков, 1908.
  57. В. Стеклов, П. Лазарев, А. Белопольский. Записка об ученых трудах Д. А. Граве.— Изв. Российской академии наук, сер. VI. Л., 1924, № 12—18.
  58. А. К. Сушкевич. Материалы к истории алгебры в XIX в. и в начале XX в. Историко-математические исследования, вып. 4. М., Физматгиз, 1951.
  59. И. Ф. Тесленко. Академик Дмитрий Александрович Граве.— Вопросы элементарной и высшей математики, вып. 1. Изд-во Львовского ун-та, 1952.
  60. Українська Радянська енциклопедія, т. 3.

61. Н. Г. Чеботарев. Алгебра.— В кн.: «Наука в СССР за пятнадцать лет (1917—1932)». ГТТИ, М.—Л., 1932.
62. Н. Г. Чеботарев. Академик Дмитрий Александрович Граве (к 50-летию его научно-педагогической деятельности).— Успехи матем. наук, вып. 3, М.—Л., 1937.
63. Н. Г. Чеботарев. Академик Дмитрий Александрович Граве (1863—1939).— В кн.: Сборник памяти акад. Д. А. Граве. Госиздат тех.-теорет. л-ры, М.—Л., 1940.
64. Н. Г. Чеботарев. Алгебра I (Алгебра полиномов и полей). В кн.: «Математика в СССР за тридцать лет (1917—1947)». Госиздат тех.-теорет. л-ры, М.—Л., 1948.
65. И. З. Штокало. Розвиток математики в УРСР за 30 років радянської влади. Збірник праць Інституту математики АН УРСР. Київ, 1948, № 10.
66. И. З. Штокало. Досягнення в галузі математики в Київському державному університеті ім. Т. Г. Шевченка за роки радянської влади.— Математичний збірник КДУ. Київ, 1957, № 10.
67. И. З. Штокало. Нарис розвитку математики на Україні за 40 років радянської влади. Київ, Вид-во АН УРСР, 1958.
68. И. З. Штокало. Розвиток природничих наук в університеті (математика). В кн.: Історія Київського університету. Київ, Вид-во КДУ, 1959.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

69. Центральный государственный исторический архив Ленинграда (ЦГИАЛ), ф. 733, оп. 155, д. 159.
70. Там же, ф. 733, оп. 155, д. 778.
71. Там же, д. 1069.
72. Там же, ф. 733, оп. 156, д. 459.
73. Центральный государственный исторический архив (ЦГИА) УССР, ф. 708, оп. 155, д. 447.
74. Там же, оп. 353, д. 121.
75. Там же, оп. 355, д. 70.
76. Там же, оп. 405, д. 1855.
77. Там же, оп. 465, д. 1833.
78. Там же, д. 1834.
79. Там же, д. 1839.
80. Там же, д. 1926.
81. Там же, д. 1933.
82. Там же, оп. 1906, д. 25.
83. К. Ф. Абрамович. О гипергеометрических функциях с одной особенной по виду точкой.— Универс. изв., Киев, 1912, № 10, 11.
84. И. И. Ахизер, И. Я. Штаерман. К теории квадратичных форм.— Изв. Киевск. политехнич. и с.-х. ин-тов, т. 19/2, вып. 1. Киев, 1924.
85. Н. И. Ахизер. Аеродинамічні досліді.— Зап. фіз.-мат. відділу ВУАН, т. 2, вип. 2. Київ, 1928.
86. В. Балтага, Г. Дринфельд, Б. Левин. Наум Ильич Ахизер (К 50-летию со дня рождения).— Успехи матем. наук, т. 6, вып. 2. М., 1951.

87. И. Г. Башмакова. Обоснование теории делимости в трудах Е. И. Золотарева. Историко-математические исследования, вып. 2. М., 1949.
88. К. Бреус, Т. Положий. Вадим Евгеньевич Дьяченко.— Украинск. матем. журнал, т. VI, № 3, Киев, 1954.
89. В. П. Вельмин. О квадратичном законе взаимности в произвольной квадратичной области.— Универс. изв. Варшава, 1914.
90. Б. В. Гнеденко, И. Б. Погребысский. Евгений Яковлевич Ремез (К 60-летию со дня рождения).— Украинск. матем. журнал, т. VIII, № 2, Киев, 1956.
91. Б. В. Гнеденко. Математика на Украине за 40 лет Советской власти. Там же, т. IX, № 4, 1957.
92. Б. Н. Делоне. К определению алгебраической области при помощи сравнений (с приложением к абелевым уравнениям).— Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, сер. 2, т. 14, № 6. 1915.
93. Б. Н. Делоне. К решению неопределенного уравнения  $x^3p + y^3 = 1$ . Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, сер. 2, т. 15, № 1, 2. 1915.
94. Б. Н. Делоне. La solution générale de l'équation  $x^3p + y^3 = 1$ .— Comptes rendus Acad. Sci., t. 162, Paris, 1916.
95. Б. Н. Делоне. Sur le nombre de représentations d'un nombre par une forme cubique binaire à discriminant négatif. Comptes rendus Acad. Sci., t. 171. Paris, 1920.
96. Б. Н. Делоне. Н. Г. Чеботарев.— Изв. АН СССР, сер. матем., М., 1948, № 4.
97. Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел. М., 1951.
98. В. К. Дзядык, Ю. А. Митропольский. Евгений Яковлевич Ремез. (К 70-летию со дня рождения).— Украинск. матем. журнал, т. XVIII, № 3, Киев, 1966.
99. В. О. Добровольский. Володимир Петрович Вельмін.— Вісник Київського університету, № 4, сер. матем. та мех., вип. 1, Київ, 1961.
100. Е. И. Жилинский. Zur Theorie der außerwesentlichen Diskriminantenteiler algebraischer Körper.— Mathematische Annalen, Bd. 73. Leipzig, 1913.
101. Е. И. Жилинский. Об области рациональных  $p$ -адических чисел.— Универс. изв., Киев, 1914, № 6.
102. М. О. Кільчевський, Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлін. Ілля Наумович Штаерман (до 70 річчя з дня народження).— Прикладна механіка, т. 7, вип. 6, Київ, 1961.
103. А. Н. Колмогоров, М. А. Красносельский, Марк Григорьевич Крейн (к 50-летию со дня рождения).— Успехи матем. наук, т. 13, вып. 3. М., 1958.
104. М. Ф. Кравчук. О группах перестановочных матриц.— Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, сер. 2, т. 14, 1914.
105. М. Г. Крейн, Б. Я. Левин. Наум Ильич Ахиезер (К 60-летию со дня рождения).— Успехи матем. наук, т. 16, вып. 4. М., 1951.
106. А. Г. Курош. Отто Юльевич Шмидт (К 60-летию со дня рождения).— Успехи матем. наук, т. 6, вып. 5. М., 1951.
107. А. Г. Курош. Основоположник советской алгебраической школы.— В кн.: Отто Юльевич Шмидт. Жизнь и деятельность. М., Изд-во АН СССР, 1959.
108. О. П. Маркевич. Наука і наукові працівники в КДУ за 112 років його існування.— Наукові зап. КДУ, т. 5, вип. 1. Київ, 1946.



109. Ю. А. Митропольский, В. П. Шевело, А. Ю. Лучка, Н. С. Курпель. Юрий Дмитриевич Соколов (К 70-летию со дня рождения).— Украинск. матем. журн., т. 18, № 4. Киев, 1966.
110. А. Л. Наумов. Математична теорія магнетового кола в машинах постійного струму.— Зап. фіз.-матем. відділу ВУАН, т. 4, вип. 4. Київ, 1929.
111. A. Ostrowski. Über einige Fragen der allgemeinen Körpertheorie. Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 143, 1913.
112. А. М. Островский. К алгебре конечных полей.— Универс. изв. Киев, 1914, № 6.
113. A. Ostrowski. Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften. Göttingen, 1919.
114. Т. В. Путятя, Б. П. Фрадлин. Юрий Дмитриевич Соколов.— Украинск. матем. журн., т. 8, № 2. Киев, 1956.
115. Е. Я. Ремез. Про методи найкращого в розумінні Чебишева наближеного представлення функцій. Київ, Вид-во АН УРСР, 1935, 162 стр.
116. Ю. Д. Соколов. Умови загального співудару трьох тіл, що обопільно притягуються за законом Ньютона. Труды фіз.-матем. відділу ВУАН, т. 9, вип. 1. Київ, 1928 (докт. дисс.)
117. Українська математична бібліографія. Київ, Вид-во АН УРСР, 1963.
118. Д. К. Фадеев. Борис Николаевич Делоне К 60-летию со дня рождения).— Успехи матем. наук, т. 5, вып. 6. М., 1950.
119. Н. Г. Чеботарев. Математическая автобиография.— Успехи матем. наук, т. 3, вып. 4. М., 1948.
120. П. Л. Чебышев. Собрание сочинений, т. V. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1951.
121. А. Шадурский. К теории исключения.— Универс. изв. Киев, 1914, № 6.
122. И. Р. Шафаревич. Борис Николаевич Делоне (К 70-летию со дня рождения).— Успехи матем. наук, т. 16, вып. 3. М., 1961.
123. О. Ю. Шмидт. Über die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren.— Отчеты и протоколы физ.-матем. об-ва при Киевском ун-те за 1912 г.— Универс. изв. Киев, 1913, № 9.
124. О. Ю. Шмидт. Об уравнениях, решаемых в радикалах, степень которых есть степень простого числа.— Там же.
125. О. Ю. Шмидт. Sur les produits directs.— Bulletin de la société. Mathématique de France, t. 41, 1913.
126. О. Ю. Шмидт. Абстрактная теория групп. Киев, 1916; второе издание.— М., 1933.
127. Отто Юльевич Шмидт. Жизнь и деятельность. М., Изд-во АН СССР, 1959.
128. И. Я. Штаерман (1891—1962). Некролог.— Изв. АН СССР, отд. техн. наук, мех. и машиностр. М., 1962, № 6.
129. И. З. Штокало, Л. А. Калужнин, Ю. В. Благовещенский, А. Н. Боголюбов. Владимир Петрович Вельмин (К 80-летию со дня рождения).— Украинск. матем. журн., т. 17, № 5, Киев, 1965.
130. А. Ющенко. Картография. М.—Л., Изд-во Главсевморпути, 1953.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>Жизненный путь Д. А. Граве</b> . . . . .	<b>7</b>
Петербургский период . . . . .	7
Детство и юность. Гимназия . . . . .	7
Университетские годы . . . . .	9
Подготовка к научной деятельности. Защита диссертации. Преподавательская работа в Петербурге . . . . .	13
Переезд в Харьков . . . . .	18
Киевский период (1902—1918) . . . . .	19
После Октября (1918—1939) . . . . .	33
<b>Научное творчество Д. А. Граве</b> . . . . .	<b>40</b>
Теория дифференциальных уравнений . . . . .	40
Геометрия . . . . .	43
Анализ и теория функций . . . . .	51
Алгебра и теория чисел . . . . .	53
Теоретическая механика и прикладные вопросы . . . . .	58
Учебная литература и специальные курсы . . . . .	62
История математики и научно-популярная литература . . . . .	73
<b>Школа Граве</b> . . . . .	<b>79</b>
Деятели Киевской математической школы . . . . .	86
<b>Приложения</b> . . . . .	<b>100</b>
Работы Д. А. Граве . . . . .	100
Материалы и исследования . . . . .	106
Дополнительные материалы . . . . .	109

*Вячеслав Алексеевич Добровольский*

**ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ ГРАВЕ (1863—1939)**

*Утверждено к печати  
редколлегией научно-биографической серии  
Академии наук СССР*

Редактор *Е. И. Володина*

Технический редактор *Н. Ф. Егорова*

Корректор *Н. М. Вельюбская*

Сдано в набор 12/1 1968 г. Подписано к печати 25/V 1968 г.  
Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бумага № 1. Усл. печ. л. 6. Уч.-изд. л. 5,9.  
Тираж 12000 экз. Т-06359. Тип. зак. 5016. Цена 36 коп.

Издательство «Наука». Москва, К-62, Подсосенский пер., д. 21.

2-я типография издательства «Наука». Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

36 коп.



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»