

285012

физико-математическая
БИБЛИОТЕКА ИНЖЕНЕРА

И. В. ДУНИН-БАРКОВСКИЙ
и Н. В. СМИРНОВ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
и
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
СТАТИСТИКА
В ТЕХНИКЕ
(ОБЩАЯ ЧАСТЬ)

И. В. ДУНИН-БАРКОВСКИЙ и Н. В. СМИРНОВ

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
СТАТИСТИКА В ТЕХНИКЕ**

(ОБЩАЯ ЧАСТЬ)

285012

**ВОЛОГОДСКАЯ
ОБЛАСТНАЯ
БИБЛИОТЕКА**

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1955

Дукин-Барковский Игорь Валерианович и Смирнов Николай Васильевич.
Теория вероятностей и математическая статистика в технике.

Редактор *А. Ф. Лапко.*

Техн. редактор *Н. Я. Мурашова.*

Корректор *Н. В. Казанская*

Сдано в набор 18/XI 1954 г. Подписано к печати 1/II 1955 г. Бумага 70×108/16. Физ. печ. л. 34,75. Усл. печ. л. 47,61.
Уч.-изд. л. 47,67. Тираж 8 000 экз. Т-00861. Цена книги 25 р. 85 к. Заказ № 1810.

Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва, В-71. Б. Калужская, 15

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической промышленности.
4-я тип. им. Евг. Соколовой. Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
-----------------------	---

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ТЕХНИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

ГЛАВА II

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Случайные события, величины и процессы. Частость и вероятность	16
2.1.1. Испытание. Событие. Случайная величина. Случайный процесс 16.	
2.1.2. Частость и вероятность 18. 2.1.3. Соотношения между событиями 19.	
2.1.4. Классическое определение вероятности 21. 2.1.5. Основные свойства вероятности 23.	
§ 2. Простейшие способы исчисления вероятностей	24
2.2.1. Непосредственный подсчет вероятностей 24. 2.2.2. Комбинаторика (теория соединений) и приближенное вычисление факториалов 25. 2.2.3. Задача о статистической (безвозвратной) выборке 26. 2.2.4. Правило сложения вероятностей 28. 2.2.5. Условная вероятность события. Правило сложения в общем случае 29. 2.2.6. Правило умножения вероятностей. Независимость событий в совокупности 33. 2.2.7. Формула полной вероятности 36. 2.2.8. Формула вероятностей гипотез 37.	
§ 3. Общие принципы исчисления вероятностей	38
2.3.1. Ограниченность классического определения вероятности 38. 2.3.2. Общие принципы исчисления вероятностей 39.	
§ 4. Схема независимых испытаний и связанные с ней распределения вероятностей	42
2.4.1. Биномиальное распределение 42. 2.4.2. Вероятнейшее число появлений события 45. 2.4.3. Распределение Пуассона 46. 2.4.4. Уточнение формулы Пуассона 50.	

ГЛАВА III

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

§ 1. Законы распределения случайных величин	51
3.1.1. Распределение дискретной случайной величины 51. 3.1.2. Непрерывные случайные величины. Интегральная функция распределения и плотность вероятности. Квантили 54.	
§ 2. Двумерные случайные величины	60
3.2.1. Дискретная двумерная величина и ее условные законы распределения 60. 3.2.2. Непрерывные двумерные величины, их функции распределения и плотности вероятности 65.	
§ 3. Числовые характеристики положения центра группирования	67
3.3.1. Математическое ожидание (среднее значение) 67. 3.3.2. Медиана 74. 3.3.3. Мода 75. 3.3.4. Теоремы о математических ожиданиях (средних значениях) 77.	
§ 4. Характеристики рассеивания	80
3.4.1. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение 80. 3.4.2. Коэффициент вариации 82. 3.4.3. Теоремы о дисперсиях 84. 3.4.4. Ковариация. Коэффициент корреляции 87. 3.4.5. Теорема о математическом ожидании произведения двух случайных величин в общем случае 88. 3.4.6. Теорема о дисперсии суммы 88. 3.4.7. Корреляция между двумя событиями 89.	

- § 5. Приближенное определение функций случайных величин 92
 3.5.1. Приближенное определение математического ожидания функции 92.
 3.5.2. Дисперсия функции случайной величины 93. 3.5.3. Математическое ожидание и дисперсия функции двух случайных величин 93.
- § 6. Моменты высших порядков и производящая функция 94
 3.6.1. Начальные и центральные моменты 94. 3.6.2. Производящая функция 95.
- § 7. Закон больших чисел. Теорема Чебышева 98
 3.7.1. Неравенство Чебышева 98. 3.7.2. Теорема Чебышева 100. 3.7.3. Теорема Я. Бернулли 101. 3.7.4. Понятие о законе больших чисел 104.

ГЛАВА IV

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

- § 1. Композиция законов распределения 105
 4.1.1. Закон распределения суммы дискретных величин 105. 4.1.2. Закон распределения суммы непрерывных величин 107.
- § 2. Моменты некоторых дискретных распределений 112
 4.2.1. Моменты биномиального распределения 112. 4.2.2. Моменты гипергеометрического распределения 114. 4.2.3. Моменты распределения Пуассона 117.
- § 3. Нормальное распределение 118
 4.3.1. Нормальная плотность вероятности и нормальная функция распределения 118. 4.3.2. Моменты нормального распределения 122. 4.3.3. Функция Лапласа 126. 4.3.4. Обоснование нормального распределения в трудах П. Л. Чебышева, А. А. Маркова и А. М. Ляпунова 128. 4.3.5. Применение нормального закона для вычисления вероятностей при биномиальном распределении. Теорема Лапласа 131. 4.3.6. Характеристики отклонения от нормального закона: асимметрия и эксцесс 137.
- § 4. Преобразование случайных величин 140
 4.4.1. Плотность вероятности монотонной функции случайной величины 140. 4.4.2. Плотность вероятности немонотонной функции случайной величины 143.
- § 5. Некоторые, встречающиеся в приложениях распределения 144
 4.5.1. Гамма-распределение 144. 4.5.2. Бэта-распределение 149. 4.5.3. χ^2 -распределение 152. 4.5.4. Преобразование χ^2 -распределения. Распределение существенно-положительных величин 155. 4.5.5. Уклонения от нормального закона в производственных условиях 160.
- § 6. Приложение теории кривых распределения к решению размерных цепей . . . 162
 4.6.1. Понятие о размерных цепях 162. 4.6.2. Расчет размерных цепей 163. 4.6.3. О выборе метода расчета 173.

ГЛАВА V

ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД И ПОЛУЧЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

- § 1. Основные понятия выборочного метода и задачи математической статистики 178
 5.1.1. Общие понятия о выборке 178. 5.1.2. Распределение выборки, ее характеристики и их распределения 180. 5.1.3. Задача получения статистических оценок распределения 182.
- § 2. Распределение выборки и его характеристики 183
 5.2.1. Вариационный ряд (упорядоченная выборка). Размах варьирования (широта распределения) 183. 5.2.2. Группировка значений выборки 185. 5.2.3. Графики статистических распределений: полигон, гистограмма, ступенчатая кривая 188. 5.2.4. Характеристики центра группирования и рассеивания выборки 189. 5.2.5. Статистические (эмпирические) моменты и их упрощенные вычисления 190. 5.2.6. Вычисление статистических моментов с помощью произвольного начального значения («ложного нуля») 191. 5.2.7. Вычисление статистических моментов с помощью выражения значений по интервалам в долях ширины интервала 193. 5.2.8. Вычисление статистических моментов по способу произведений 194. 5.2.9. Вычисление статистических моментов по способу сумм 197. 5.2.10. Другие формулы для вычисления статистических моментов 199. 5.2.11. Поправки к группировке (Шенпарда) 200.

§ 3. Статистические оценки параметров распределения	203
5.3.1. Проблема оценки параметров. Требования к оценкам: состоятельность, несмещенность и эффективность. Достаточные оценки (статистики) 203.	
5.3.2. Оценка средней и дисперсии по выборке из конечной совокупности. Дисперсия выборочной средней арифметической в этом случае 212. 5.3.3. Оценка средней при выборке по группам («типическая выборка»). Сравнительное уменьшение дисперсии средней арифметической 218. 5.3.4. Случай большой выборки из совокупности неограниченного объема. Метод моментов. Оценки центра распределения и дисперсии 223. 5.3.5. Применение теоремы Ляпунова при оценке генеральных средней и дисперсии. Выбор числа наблюдений 228. 5.3.6. Общие понятия о порядковых (ранговых) характеристиках 234. 5.3.7. Распределение членов вариационного ряда 236. 5.3.8. Предельные распределения квантилей выборки 240. 5.3.9. Доверительные пределы для теоретических квантилей 245. 5.3.10. Распределение крайних членов. Размах (широта) выборки. Случай оценки центра распределения с помощью крайних членов 246. 5.3.11. Оценка параметра σ по размахам нескольких выборок 253. 5.3.12. Допустимые (толерантные) пределы 254.	

§ 4. Оценки с помощью доверительных интервалов	257
5.4.1. Общее понятие о доверительных интервалах 257. 5.4.2. Распределение выборочной дисперсии s^2 и среднего квадратического отклонения s . Доверительные интервалы для оценки генеральной дисперсии σ^2 и среднего квадратического отклонения σ 262. 5.4.3. Построение доверительных интервалов для σ с помощью выборочного размаха R_n 269. 5.4.4. Распределение Стьюдента и доверительные интервалы для оценки генеральной средней a 271. 5.4.5. Общий метод получения доверительных интервалов 278. 5.4.6. Оценка вероятности по частоте 281. 5.4.7. Получение доверительных границ при большом числе наблюдений 283. 5.4.8. Метод максимума правдоподобия 285. 5.4.9. Доверительные области для теоретического закона распределения 288.	

ГЛАВА VI

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

§ 1. Общие понятия о статистических гипотезах и их проверке	292
6.1.1. Постановка задачи о проверке гипотез в математической статистике. «Нулевые гипотезы». Пример проверки нулевой гипотезы 292. 6.1.2. Статистические приемы проверки гипотез. «Критическая область». Уровень значимости критериев 294.	
§ 2. Проверка гипотезы о равенстве средних	295
6.2.1. Гипотеза о положении центра группирования 295. 6.2.2. Проверка гипотезы о равенстве двух средних по выборкам большого объема 297. 6.2.3. Проверка гипотезы о равенстве двух средних по малым выборкам 298. 6.2.4. Проверка гипотезы об однородности средних совокупности и ее подгрупп 300.	
§ 3. F -распределение и его применения к проверке гипотез	301
6.3.1. F -распределение 301. 6.3.2. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий 304. 6.3.3. Понятие о дисперсионном анализе. Проверка гипотезы об однородности ряда средних 306.	
§ 4. Статистическая проверка соответствия между гипотетическим распределением и данными выборки	316
6.4.1. Критерий χ^2 316. 6.4.2. Критерий независимости 323. 6.4.3. Проверка гипотезы об однородности ряда дисперсий 326. 6.4.4. Проверка гипотезы принадлежности двух независимых выборок одной и той же генеральной совокупности 331.	
§ 5. Критерий «случайности» последовательности	334
6.5.1. Постановка задачи 334. 6.5.2. Понятие серии 335. 6.5.3. Законы распределения, математические ожидания и дисперсии чисел серий 336. 6.5.4. Различные критерии «случайности» 339. 6.5.5. Способ последовательных разностей 344.	
§ 6. Проверка гипотезы нормальности	346
6.6.1. Способ выпрямленных диаграмм 346. 6.6.2. Проверка гипотезы нормальности по совокупности малых выборок 354. 6.6.3. Приближенная проверка гипотезы нормальности с помощью асимметрии и эксцесса 360.	
§ 7. Понятие о мощности критерия проверки гипотезы	360

ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОРРЕЛЯЦИИ

- § 1. Общие понятия о корреляции и регрессии 364
7.1.1. Стохастическая связь 364. **7.1.2.** Условные математические ожидания. Линии регрессии. Условные дисперсии. Дисперсия условных средних 366. **7.1.3.** Корреляционная зависимость. Корреляционное отношение и его свойства 370. **7.1.4.** Линейная регрессия. Уравнение регрессии. Коэффициенты регрессии и корреляции 372. **7.1.5.** Прямые регрессии как приближение к нелинейной регрессии 374. **7.1.6.** Свойства коэффициента корреляции 377. **7.1.7.** Стохастическая и корреляционная связь между непрерывными величинами 379.
- § 2. Нормальная корреляция 380
7.2.1. Общее понятие о нормальной корреляции. Уравнение нормальной регрессии 380. **7.2.2.** Геометрическая интерпретация нормальной корреляции. Нормальная поверхность распределения 383.
- § 3. Оценка коэффициентов корреляции и регрессии и корреляционного отношения по выборочным данным 385
7.3.1. Статистические коэффициенты корреляции и регрессии и корреляционное отношение. Их вычисление 385. **7.3.2.** Оценка коэффициента корреляции; его выборочное математическое ожидание, дисперсия и закон распределения 393. **7.3.3.** Проверка гипотезы об отсутствии корреляционной связи 396. **7.3.4.** Проверка гипотезы о криволинейности корреляционной связи 397.
- § 4. Множественная корреляция 397
7.4.1. Общее понятие о множественной корреляции. Случай трех величин 397. **7.4.2.** Уравнения линейной регрессии по эмпирическим данным 403. **7.4.3.** Частный коэффициент корреляции 406.
- § 5. Обобщение задачи регрессии. Способ наименьших квадратов 407
7.5.1. Постановка задачи и общие понятия 407. **7.5.2.** Оценка линейной зависимости по методу наименьших квадратов 410. **7.5.3.** Общая схема применения метода наименьших квадратов 424.

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ И ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

- § 1. Вводные замечания 431
- § 2. Вероятностные методы оценки ошибок механизмов 431
8.2.1. Общая характеристика применения вероятностных методов в современной теории точности механизмов 431. **8.2.2.** Оценка погрешностей кривошипного механизма 432. **8.2.3.** Оценка погрешности кулачкового механизма с толкателем 434.
- § 3. Статистические методы анализа технологических процессов 437
8.3.1. Задачи анализа технологических процессов 437. **8.3.2.** Анализ точности технологического процесса 438. **8.3.3.** Анализ стабильности технологического процесса 441. **8.3.4.** Анализ взаимосвязей между признаками качества и производственными факторами 444. **8.3.5.** Анализ настройки 445.
- § 4. Статистические методы оценки точности технических измерений 453
8.4.1. Понятие о точности технических измерений 453. **8.4.2.** Статистическая оценка точности измерений по их результатам 456. **8.4.3.** Ошибки отсчета 459.
- § 5. Статистические методы текущего предупредительного контроля качества продукции 467
8.5.1. Общие понятия и основные задачи 467. **8.5.2.** Некоторые варианты статистического текущего предупредительного контроля 468. **8.5.3.** Понятие о выборе варианта метода контроля и его параметров 475.
- § 6. Статистические методы приемочного последующего контроля качества продукции 478
8.6.1. Общие понятия и задачи 478. **8.6.2.** Одинарная выборка. Понятие о двойной выборке 479. **8.6.3.** Случай приемочного числа c , равного нулю 483. **8.6.4.** Последующая оценка результатов приемочного контроля 484. **8.6.5.** Процедура последовательного контроля 486.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица I. Вероятность $P_\lambda(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ числа m появлений редкого события, следующего закону Пуассона, где λ — среднее число появлений события 492

Таблица II. Интегральные вероятности $P_\lambda(m \geq k) = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ редкого события, следующего закону Пуассона, где m — число появлений события, λ — среднее число появлений события 495

Таблица III. Плотность вероятности $n(z; 0, 1) = N'(z; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ нормированного нормального распределения 498

Таблица IV. Нормированная функция Лапласа $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{v^2}{2}} dv$ 499

Таблица V. Удвоенная нормированная функция Лапласа $2\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{v^2}{2}} dv =$
 $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^z e^{-\frac{v^2}{2}} dv$ 501

Таблица VI. Вероятность $Q_z = P(|X - a| > z_q \sigma) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^z e^{-\frac{v^2}{2}} dv$ того, что нормально распределенная случайная величина X отклонится от центра a ее распределения больше, чем на взятое z_q раз ее среднее квадратическое отклонение σ 502

Таблица VII. q -процентные значения нормального отклонения z_q и вероятности $q = 100 P(|X - a| > z_q \sigma) = 100 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^z e^{-\frac{v^2}{2}} dv \right)$ нормального распределения 503

Таблица VIII. Значения χ_q^2 в зависимости от вероятности $P(\chi^2 > \chi_q^2) =$
 $= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \cdot 2^{\frac{k}{2}} \chi_q^{\frac{k}{2}}} \int_{\chi_q^2}^{\infty} (x)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$ и числа k степеней свободы χ^2 -распределения 503

Таблица IX. Вероятность $P(\chi^2 > \chi_q^2) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}} \chi_q^{\frac{k}{2}}} \int_{\chi_q^2}^{\infty} (x)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$ в зависимости от значений χ_q^2 и числа k степеней свободы χ^2 -распределения 505

Таблица X. Значения коэффициентов относительной асимметрии (α_k) и относительного рассеивания (k_k) при различных законах распределения 508

Таблица XI. Ориентировочное число a единиц допуска $0,5 \sqrt[3]{\bar{d}_{cp}}$ по классам точности системы допусков и посадок ОСТ 512

Таблица XII. Ориентировочное число a единиц допуска $0,5 \sqrt[3]{\bar{d}_{cp}}$ по посадкам классов точности диаметральных размеров по ОСТ 512

Таблица XIII. Значения t_p p -процентных пределов для отклонения максимального члена u_{nn} выборки из нормальной совокупности от центра распределения 513

Таблица XIV. q -процентные пределы для отношения выборочного размаха R_n к параметру σ исходного распределения; математическое ожидание $M\left(\frac{R_n}{\sigma}\right)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\frac{R_n}{\sigma}}$ этого же отношения в долях параметра σ исходного распределения 514

Таблица XV. Нижние z_1 и верхние z_2 границы доверительного интервала $z_1 s < \sigma < z_2 s$	515
Таблица XVI. Вероятность $P_t = B_k \int_{-\infty}^t \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt$ для распределения Стьюдента в зависимости от t и числа k степеней свободы	516
Таблица XVII. Вероятность $\frac{q}{100} = 1 - 2B_k \int_0^t \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt$ для распределения Стьюдента в зависимости от t и числа k степеней свободы	517
Таблица XVIII. Значения q -процентных пределов $t_{q,k}$ в зависимости от числа k степеней свободы и от вероятности $\frac{q_t}{100} = 2B_k \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt$ для распределения Стьюдента	520
Таблица XIX. Двухсторонние 95%-ные доверительные пределы для оценки вероятности по частоте при биномиальном распределении	520
Таблица XX. Значения пяти- и однопроцентных пределов уклонения величины F в зависимости от степеней свободы k_1 и k_2	530
Таблица XXI. Пяти- и однопроцентные пределы для отношения G_t наибольшей эмпирической дисперсии к сумме k эмпирических дисперсий, полученных из k независимых выборок объема n	534
Таблица XXII. Квантили нормального распределения $z_p = u_p + 5$, где u_p определяется из соотношения $\frac{p}{100} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_p} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$	536
Таблица XXIII. Вероятности $P(\lambda) = K(\lambda)$ распределения Колмогорова	539
Таблица XXIV. Значения z_q , удовлетворяющие уравнению $P\left(\frac{x_n - \bar{x}}{s} > z_q\right) = \alpha$, где $\bar{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, для распределения $r = \frac{x_n - \bar{x}}{\sqrt{\frac{n-1}{n} s}}$	540
Таблица XXV. Максимумы математических ожиданий ошибок отсчета (при различных истинных значениях измеряемой величины) в зависимости от отношения параметра σ исходного рассеивания погрешностей измерения к шагу h шкалы прибора	541
Таблица XXVI. Наивыгоднейшие комбинации объемов (n) выборки и приемочных чисел (c) при заданных объеме (N) контролируемой партии и средней доле (\bar{q}) производственного брака в партии в зависимости от допускового качества (q_0) или от отправного качества (Q_T)	541
Таблица XXVII. Максимумы среднего выходного качества	547
Таблица XXVIII. Объемы выборки, отвечающие различным уровням выходного качества	548
Таблица XXIX. Объемы выборки. Зависимость фактического выходного качества от доли брака до контроля (пример для $n = 50$). Ожидаемый (O) и минимально возможный (O_{\min}) объем контроля в процентах от объема всей партии	549
Таблица XXX. Значения $Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$, отвечающие значениям r	550
Литература	551
Предметный указатель	552

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга должна была по нашему первоначальному замыслу представлять попытку систематического и по возможности полного изложения с современных позиций основных вопросов теории вероятностей и математической статистики в их технических приложениях в предельно простой форме, доступной инженеру и студенту вуза.

Потребность в такой книге для довольно широкого круга читателей — исследователей, инженеров и студентов — давно уже назрела в связи с грандиозным расширением отечественного производства, тесно связанного с применением новой техники и новых прогрессивных технических методов, к которым, в частности, принадлежат широко применяемые в настоящее время передовыми предприятиями нашей страны математико-статистические и теоретико-вероятностные методы.

Мысль о написании этой книги возникла у одного из авторов в связи с чтением на протяжении ряда лет курса «Математическая статистика в технике» во вузах Москвы. Перед другим автором аналогичная задача еще ранее была поставлена издательством. Мы объединили усилия, учитывая, что наши неодинаковые специальности будут взаимно дополнять друг друга.

Современная математическая статистика настолько разрослась вширь и вглубь, что осуществление подобной задачи неизбежно приводит к довольно значительному объему книги. С другой стороны, в учебных планах вузов на «математическую статистику в технике» выделяется очень небольшое число часов, следовательно, учебник по этой дисциплине должен иметь соответственно небольшой объем. При этом он, естественно, не может вместить ни разъяснений более сложных вопросов, ни доказательств многих теорем, ни сколько-нибудь подробных практических примеров, ни даже некоторых разделов самой дисциплины. К последним относятся, в частности, некоторые специальные проблемы теории корреляции, дисперсионный анализ, теория вероятностных процессов и другие вопросы.

Вследствие того, что некоторые из этих вопросов требовали более сложного математического аппарата, оказалось целесообразным вначале завершить настоящую «общую часть» работы и выпустить ее в виде самостоятельной книги. В этой книге мы не уклоняемся от рассмотрения по существу теоретических основ статистических методов, давая всюду, где это оказалось возможным, доказательства, понятные для упоминавшегося выше круга читателей. Каждый из рассмотренных вопросов снабжен подробными примерами, почерпнутыми главным образом из производственной и исследовательской практики, причем во многих случаях был использован собственный опыт. Примеры относятся почти исключительно к машиностроению и приборостроению, но им придан в достаточной мере общий характер, позволяющий использовать изложенную методику в различных областях техники. Следует иметь, однако, в виду, что, несмотря на значительное место, отведенное примерам, они, естественно, служат в первую очередь иллюстрацией рассматриваемой в книге теории и хотя почти всюду доведены до окончательных числовых решений и поэтому могут быть использованы

на практике, тем не менее не претендуют на полную замену специальных руководств по таким вопросам, как анализ точности производства, статистические методы контроля и т. п.

Книга предназначена для инженеров-производственников, аспирантов и преподавателей вузов и других специалистов, применяющих в своей работе статистические методы. Она может быть использована также студентами при изучении «математической статистики в технике». Книга рассчитана на читателя, знающего математику в объеме программы для вузов.

Считаем своим долгом выразить глубокую благодарность академику А. Н. Колмогорову за очень ценные советы и указания, а также рецензенту книги А. В. Грошеву и редактору А. Ф. Лапко, существенные замечания которых в значительной степени помогли при подготовке книги к печати.

Очень ценными для нас будут критика и замечания читателей, которые мы надеемся использовать в дальнейшем.

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ТЕХНИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Целью настоящей книги является освещение основных понятий и положений теории вероятностей и математической статистики в их приложениях к решению некоторых инженерно-технических задач.

Грандиозное расширение масштабов отечественного производства на базе комплексной автоматизации и механизации совершающихся в нем процессов, продолжающееся распространение поточно-массовых принципов его организации, борьба за дальнейшее серьезное повышение качества продукции во всех отраслях промышленности тесно связаны с применением новой техники и новых прогрессивных технических методов. К числу таких методов, широко применяемых в настоящее время передовыми советскими предприятиями, принадлежат, в частности, математико-статистические и теоретико-вероятностные методы, дающие существенный экономический эффект за счет сокращения трудоемкости анализа и контроля технологических процессов, решительного сокращения брака, получения экономии металла, дальнейшего повышения общей производственно-технической культуры предприятия и т. д.

Чтобы уяснить себе роль и значение этих методов, мы должны остановиться на некоторых общих положениях, характеризующих приложение научных и, в частности, математических дисциплин к производству.

Современное конструирование, производство и эксплуатация разнообразных машин и приборов опираются на научные знания различных закономерностей и взаимосвязей. Техническое использование этих закономерностей, твердо определяющих, что неизбежно будет происходить при тех или иных наперед известных условиях, и лежит в основе всех инженерных расчетов. Обоснованный научно-техническими расчетами технологический процесс предусматривает множество разнохарактерных операций, протекающих в заранее строго регламентированных и детализированных производственных условиях, планомерно осуществляемых с целью получения строго однородной продукции, например в смысле одинаковости размеров всех экземпляров деталей в партии, удовлетворяющей техническим условиям. Однако такая картина точного чередования технологических операций с полным и точным учетом всех действующих факторов в значительной мере является лишь идеальной схемой. В действительности технологический процесс сам по себе без постоянного контроля и регулирования его еще не обеспечивает вполне однородного качества массовой продукции. Как бы ни был точен и совершен инженерный расчет, он не может все же заранее предусмотреть все многообразие различных обстоятельств, оказывающих то или иное влияние на ход процесса и зачастую по-разному складывающихся в последовательных повторениях одних и тех же операций. Влияние каждого из этих факторов в отдельности бывает нередко невелико и мало заметно, причем действия некоторых из них могут взаимно погашаться, суммарный же эффект воздействия их всех приводит обычно к тому, что вместо однозначно определяемого результата мы получаем более или менее колеблющиеся от случая к случаю и различающиеся друг от друга результаты. Такой именно характер

носит общеизвестный для производителей факт «рассеивания» размеров деталей, получаемых не только на станках универсального назначения, но и на автоматах и автоматических линиях.

Аналогично этому влияние случайных факторов, накладывающееся на основные закономерности, можно проследить в самых разнообразных приложениях научных методов. Даже в такой области, как небесная механика, достаточно полно учитывающей все существенные причины движения небесных тел, мы принуждены для получения определенных предсказаний опираться на инструментальные наблюдения, производимые лишь с некоторой ограниченной точностью. Последнее обстоятельство вносит некоторые неопределенности случайного характера в прогнозы астрономической науки. В качестве другого примера, в котором роль возмущающих случайных воздействий еще больше, можно привести полет артиллерийских снарядов. Основные факторы, определяющие механически движение снаряда в воздухе, хорошо изучены: существует детально разработанная математическая теория этого явления. Общеизвестно также явление «рассеивания» точек поражения, неизменно сопровождающее стрельбу из орудий и представляющее отклонения снарядов от теоретически вычисленной траектории, отвечающей «нормальным», т. е. некоторым средним начальным условиям и т. п. Эти отклонения вызываются случайными изменениями начального направления траектории, начальной скорости, сообщаемой снаряду, вариацией в его массе, коэффициенте сопротивления, порывами ветра, неоднородностью режима атмосферы.

Явление рассеивания снарядов изучается методами теории вероятности и математической статистики, лежащими в основе современной теории артиллерийской стрельбы.

В некоторых условиях оказывается возможным воздействовать на случайные явления в направлении сокращения рассеивания их результатов. Так, например, при обработке изделий на станках иногда оказывается возможным настолько уменьшить рассеивание размеров путем повышения точности оборудования, улучшения его настройки, подбора заготовок по размерам и т. д., что случайные колебания размеров становятся пренебрежимо малыми, составляющими лишь незначительную часть допуска. В других случаях, таких, как случайные помехи в радиоприемных устройствах, хотя и не представляется возможным непосредственно воздействовать на источники возникновения флюктуаций, но их все же удается учесть и свести к минимуму отрицательное действие случайных факторов.

Случайность эта существует объективно, вне нашего сознания, и она причинно обусловлена. Однако случайность не вытекает с необходимостью из закономерностей развития данного события, являясь лишь дополнением и формой проявления необходимости.

Случайное в одной связи может оказаться необходимым в другой связи в более полном комплексе явлений.

Вместе с тем всякий раз, когда наука сталкивается с явлениями, аналогичными только что рассмотренному рассеиванию снарядов, перед ней возникает новая задача учета воздействия и более подробного изучения «возмущающих» факторов.

Нередко такой учет оказывается возможным. Постепенное более глубокое и совершенное овладение многообразными действующими в определенных условиях факторами и служит одним из показателей научного прогресса в соответствующей области. Однако беспредельное усложнение теоретической схемы в отрыве от практических задач может привести к большим трудностям и оказаться бесполезным для научного предвидения реальных событий. Так, например, учет неравномерной «турбулентной» структуры ветрового потока, встречающегося движущийся снаряд, сделал бы теоретическую разработку задачи повышения меткости артиллерийской стрельбы практически неразрешимой. В то же время принципиально мы могли бы поставить задачу об изучении движений отдельных молекул идеального газа, находящихся в данном сосуде. Движение это подчи-

нено обычным законам механики. Для этого пришлось бы, однако, учесть начальные положения и скорости всех молекул в данном сосуде, что делает решение задачи совершенно необозримым. Но такой сложный путь необходим лишь в тех случаях, когда требуется полностью определить влияние всех факторов во все время данного процесса на отдельные, участвующие в нем объекты. В большинстве же реальных задач требуется лишь определить суммарный эффект действия многочисленных случайных факторов или их средний эффект в большом числе повторений изучаемого процесса.

Так именно и обстоит дело в современном массовом и крупносерийном промышленном производстве. Задачи обеспечения взаимозаменяемости деталей и узлов машин требуют не точного выполнения размера одной какой-нибудь изолированно взятой детали, а научно обоснованного построения технологического процесса, обеспечивающего массовое изготовление таких деталей и узлов, которыми можно было бы без ущерба заменить без подгонки любые детали и узлы, входящие в комплект соединения.

Изучение массовых процессов, при которых некоторая совокупность (опытов, операций, испытаний и т. п.) воспроизводится много раз при одинаковых условиях, и составляет предмет теории вероятностей и основанной на ней математической статистики. При таком изучении к массовым процессам применяется понятие вероятности, позволяющей обнаружить и формулировать своеобразные закономерности, которым подчинен результат этих процессов. Вероятность события является, как мы увидим в следующей главе, объективной характеристикой случайного события.

Как и все математические дисциплины, теория вероятностей и математическая статистика изучают общие закономерности массовых явлений в абстрактной форме, безразличной к специфической природе рассматриваемых объектов. Благодаря такому подходу выводы этих дисциплин могут быть применены к явлениям самой различной природы. Однако правильность такого применения не может быть оценена с помощью каких-либо формальных математических критериев. Для законного применения различных положений теории вероятностей и математической статистики необходимо убедиться путем надлежащего анализа действительности в реальном осуществлении основных положений общей теоретической схемы и правильно интерпретировать ее понятия и выводы. Математико-статистические приемы могут быть плодотворно применены лишь в сочетании с глубоким анализом причинных связей. Таким образом, применение этих методов должно быть подчинено специфическим закономерностям изучаемого круга явлений. Так, например, математическая статистика в технике имеет дело с технологическими процессами, примыкающими вплотную по своему характеру к физическим, химическим и другим процессам, относящимся к области естествознания.

Особенность статистического подхода к исследованию массового явления заключается в том, что исследователь в соответствии с объективным характером процесса сосредоточивает свое внимание на некоторых основных повторяющихся признаках совокупности объектов, принимаемых в этом отношении равноправными, и абстрагируется от остальных чисто индивидуальных признаков. Именно в этом случае при описании, анализе и сравнении массовых процессов возникают такие конкретные проблемы, которые с неизбежностью требуют своеобразных методов исследования. Так, в частности, обоснованные суждения о современных технологических процессах и их параметрах могут быть сделаны лишь при полном учете и надлежащем анализе статистических материалов, относящихся к массовому производству.

Принципиальные положения об основах статистических методов социально-экономической статистики, содержащиеся в трудах В. И. Ленина и И. В. Сталина, имеют и для математической статистики в технике свое, чрезвычайно большое принципиальное значение.

Так, в частности, метод группировок, преследующий в социально-экономической статистике своей целью правильное, основанное на положениях экономической науки построение статистических показателей в соответствующих разрезах, в технике указывает на важность правильного отбора качественных признаков, по которым ведутся наблюдения и делаются технические расчеты.

Принцип примата качественного анализа над количественным, предопределяющий исследование количественной стороны явлений в неразрывной связи с качественной их стороной, в технике является решающим в применении статистических и теоретико-вероятностных методов.

В своем историческом развитии теория вероятностей прошла через ряд этапов; на решающих из них русские ученые-математики сыграли выдающуюся роль.

Зародившись в XVI веке, теория вероятностей в зачаточном состоянии получила в XVI—XVII веках отражение в работах Тарталья (1500—1557), Кардано (1501—1576), Паскаля (1623—1662) и других ученых того времени.

Однако эти элементарные подсчеты вероятностей можно рассматривать лишь как предисторию теории вероятностей.

Первые ее успехи в анализе простейших массовых процессов связаны с предельными теоремами Якова Бернулли (1654—1705) и Муавра (1667—1754).

Последующие работы Лапласа (1749—1827) и Пуассона (1781—1840) расширили область применения результатов, достигнутых их предшественниками.

Новый период развития теории вероятностей, период оформления ее в стройную математическую дисциплину, связан с именем великого русского математика П. Л. Чебышева (1821—1894) и его выдающихся учеников — академиков А. А. Маркова (1856—1922) и А. М. Ляпунова (1857—1918).

П. Л. Чебышеву и его ученикам принадлежит обоснование двух фундаментальных теорем теории вероятностей, с которыми мы познакомимся в данном курсе.

Русским ученым принадлежит также приоритет в области применения методов теории вероятностей и математической статистики к контролю качества продукции. Еще в 1846 году знаменитый русский математик академик М. В. Остроградский (1801—1861) опубликовал в Известиях Российской Академии наук свою работу по данному вопросу.

Со времени П. Л. Чебышева советские ученые играют ведущую роль в развитии теории вероятностей.

Советская школа теории вероятностей представлена крупнейшими учеными — С. Н. Бернштейном, А. Н. Колмогоровым, А. Я. Хинчиным, Б. В. Гнеденко и др.

А. Н. Колмогоров завершил разработку стройной логической системы, в которой последовательно развертывается идея включения теории вероятностей — дисциплины недавно еще столь своеобразной — в ряд общих понятий математики.

Большую роль в развитии математической статистики сыграли работы Е. Е. Слуцкого, А. Н. Колмогорова, В. И. Романовского.

Особое значение для математической статистики в технике имеют работы по теоретическому исследованию и обоснованию статистических методов анализа производства и контроля качества продукции, проводящиеся за последнее время А. Н. Колмогоровым, В. И. Романовским, Н. А. Бородачевым и др.

Подлинно научная методологическая основа математической статистики в технике — марксистско-ленинская теория — коренным образом отличает ее от зарудных буржуазных статистических теорий.

Концепции буржуазных статистиков-математиков — А. Кетле (1796—1874), Ф. Гальтона (1822—1911), К. Пирсона (1857—1936) и др., которых в буржуазной литературе характеризуют как основателей математической статистики, имели большое значение в начальный период развития этой науки, но в

методологическом отношении, а также в отношении обоснования основных положений далеко отставали от работ русской школы.

Развитие производства и естествознания выдвинуло перед математической статистикой ряд новых проблем, решение которых привело к дальнейшему совершенствованию математических методов статистики. В этом отношении видная роль принадлежит английскому математику Р. Фишеру, а также Нейману и Вальду.

Вместе с этим использование англо-американской школой приемов математической статистики в социальных и отчасти в биологических науках преследовало явно реакционные цели.

Советские статистические методы в технике характеризуются их прогрессивной научной основой, массовостью их применения, тесной увязкой с достижениями новаторов производства.

Основанные на указанных принципах теоретико-вероятностные и математико-статистические методы находят широкое применение в современной технике при расчетах эффективности вооружения (в форме, например, вычисления вероятности поражения цели); при расчетах и исследованиях точности машин и приборов (их так называемой динамической точности), оценки их суммарных погрешностей и ошибок кинематических цепей; при расчетах размерных цепей; при расчетах и исследованиях точности производственного оборудования, инструментов, приспособлений и технологического процесса в целом; при анализе хода технологических процессов и в особенности технологических процессов заводоавтоматов; при анализе точности технических измерений; при разработке и выборе статистических предупредительных методов контроля качества продукции; при обработке результатов лабораторных, заводских и полигонных испытаний.

Таков далеко не полный перечень технических проблем, при решении которых плодотворно применяются статистические приемы.

ГЛАВА II

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Случайные события, величины и процессы. Частота и вероятность

2.1.1. Испытание. Событие. Случайная величина. Случайный процесс. Исходными понятиями теории вероятностей, подобными, например, понятию числа в арифметике или точки в геометрии, являются понятия: испытания (опыта), события, случайной величины и случайного процесса.

Испытанием (или опытом) называется осуществление на практике какого-нибудь комплекса условий; явления, происходящие при наличии этого комплекса, называются *событиями*. Так, например, если настроить закрепленный на стойке обычный индикатор часового типа на нуль и затем поднимать и опускать его измерительный стержень, то большая стрелка прибора будет всякий раз занимать относительно нулевого штриха новое положение, обусловливаемое наличием случайных погрешностей показаний прибора. Если теперь всю зону возможных положений стрелки разделить на некоторое число участков: A, B, C, \dots , то занятие положения на каком-либо участке A , или B , или C , или D будут представлять события, происходящие при данной обстановке измерений. Заметим, что при таком определении испытания вовсе не обязательно наличие наблюдателя или экспериментатора, ставящего опыт, так как под схему «испытаний» могут быть подведены вообще самые разнообразные явления действительности (например, выпадение дождя в данной местности и т. д.).

Теорию вероятностей интересуют повторные испытания, при которых один и тот же основной комплекс условий воспроизводится много раз. Явления, происходящие при многократных повторениях испытания, называются *массовыми*.

Если при каждой реализации некоторого комплекса условий (обозначаемого, например, γ), т. е., иначе говоря, при каждом испытании неизбежно происходит событие U , то такое событие называется *достоверным*. В обстановке измерения такой характер имеет событие, заключающееся в том, что стрелка индикатора остановится в пределах всей зоны возможных ее положений (представляющей сумму участков A, B, C и т. д.).

Если некоторое событие V заведомо не может произойти в условиях данного испытания, то его называют *невозможным*. Пусть, например, мы обозначим через V событие, состоящее в занятии стрелкой индикатора положения вне зоны U .

На практике весьма часто встречаются комплексы условий, подобные вышеприведенному, когда при испытании может произойти или событие A , или событие B , или событие C и т. д.

В теории вероятностей такие события, представляющие различные возможные исходы испытания, называются *случайными*.

К числу случайных событий следует отнести также, например, получение в определенных производственных условиях действительного размера изделия

в пределах первой четверти допуска (событие A) или второй четверти допуска (событие B) и т. д.

Массовое явление всегда складывается из большого, иногда необозримо большого числа событий.

Если бы мы подразделили допуск размера обрабатываемого в определенных производственных условиях изделия, например, на 10 равных частей и стали бы рассматривать получение действительного размера изделия в границах каждой из 10 частей допуска как событие, то легко убедились бы в том, что обычно задаваемые производственные условия, такие, как станок, инструмент, приспособления, режимы обработки, качество материала, форма заготовки, смазывающе-охлаждающая жидкость и т. п. (комплекс условий γ), не вполне определяют исход испытания, заключающегося в данном случае в обработке одного изделия в данных условиях. Каждое очередное изделие, обработанное в вышеуказанных неизменных условиях, по своим размерам будет получаться в границах то одной, то другой, то третьей и т. д., то десятой части допуска. Иными словами, при каждом очередном испытании происходило бы то событие A_1 , то событие A_2 , то событие A_3 , ..., то событие A_{10} .

Исход испытания, помимо основных условий γ , зависит в этом случае еще от многочисленных добавочных условий, которые складываются по-разному в различных отдельных испытаниях. В нашем примере такими добавочными условиями являются деформации и вибрации системы станок — инструмент — изделие, колебания разнообразных физических свойств, формы и размеров заготовки, колебание напряжения в сети, от которой питается электродвигатель станка и т. д.

Если взять только величину напряжения в электросети, от которой зависит характер режима обработки, то легко убедиться, что оно колеблется под влиянием случайного изменения нагрузки сети, например от включения и выключения станков и агрегатов, не имеющих прямого отношения к технологическому процессу обработки данной детали. Заранее предвидеть конечный результат каждого испытания, например точный размер каждой отдельной детали, в подобных случаях оказывается настолько сложным, что выявление и разработка всех многочисленных дополнительных условий оказываются практически нецелесообразными. Изучение подобного рода процессов требует специфических приемов, основанных на вероятностных закономерностях.

Другим важным исходным понятием теории вероятностей является случайная величина.

Случайной величиной в теории вероятностей называют переменную величину, которая в результате испытания может принять то или иное значение.

В ранее приведенных примерах мы могли бы рассматривать не события, такие, как занятие стрелкой индикатора положения на определенном участке или получение на станке детали с размером в границах некоторой части допуска, а величину отклонения стрелки индикатора от нуля, получающуюся при повторных поднятиях и опусканиях измерительного стержня, или величину отклонения размера вырабатываемых последовательно изделий от номинального размера; такие величины и называются *случайными*.

Во многих современных приложениях статистических методов приходится изучать совокупность случайных величин, отвечающих различным значениям некоторого пространственного или временного (неслучайного) параметра; такая совокупность случайных величин называется *случайным процессом* или *случайной функцией*. Например, ординаты кривой профиля обработанной поверхности в заданном направлении или вариации диаметра изготовленного валика по его длине, или, наконец, вибрации узлов станка в течение времени его работы могут служить примерами случайных процессов.

Аналогичный характер носят, например, координаты брауновской частицы, флуктуации в электрических цепях, шумы в «следящих системах» и т. п.

Приведенные определения и примеры говорят, в частности, о том, что математическое понятие случайного события, случайной величины и случайного процесса тесно связаны между собой. В самом деле, получение размера очередного обработанного валика в интересующих нас достаточно узких границах является случайным событием, диаметр валика, варьирующий от одного экземпляра к другому, — случайной величиной, а вариации этого размера вдоль оси обработанного валика — случайным процессом.

Все эти понятия используются в обстановке, когда испытания носят массовый характер. В такой обстановке научный и практический интерес представляют как раз не результаты единичного испытания, а некоторые общие закономерности массового явления в целом.

Так, например, при изготовлении изделий большими партиями в массовом и серийном производствах нас интересует не размер, который будет иметь та или иная, отдельно взятая из партии деталь, а распределение всей массы одинаковых деталей по их размерам, т. е. указание доли (или процента) деталей, попадающих по размеру в те или другие заданные пределы. Закономерности, проявляющиеся в распределении деталей по размеру, отражают наиболее существенные, общие для всей массы продукции условия производства.

Вот эти своеобразные новые закономерности массовых явлений требуют для своего изучения особых «статистических» приемов исследования.

Вспомогательным средством, наиболее приспособленным для исследования массовых явлений, оказался аппарат особых математических дисциплин — теории вероятностей и математической статистики, в абстрактной форме рассматривающих основные закономерности их протекания.

2.1.2. Частость и вероятность. При изучении массовых явлений мы прежде всего встречаемся с понятием *частости* случайного события.

Пусть мы повторили N раз испытание, в котором возможно появление некоторого события A и при этом k раз событие A фактически имело место; тогда частость появления события A в данной серии из N испытаний равна

$$W(A) = \frac{k}{N}. \quad (2.1.1)$$

Частость иногда называют еще *относительной частотой*.

Пусть, например, на станке обработано 1000 деталей и из них оказалось 357 с размерами в пределах первой четверти допуска на обработку (357 раз произошло событие A). Тогда частость события A в серии из 1000 испытаний составила у нас

$$W(A) = \frac{k}{N} = \frac{357}{1000} = 0,357.$$

В весьма обширном и важном классе случаев при многократном повторении испытания частость появления события A обнаруживает устойчивость, т. е. она очень редко сколько-нибудь существенно отклоняется от некоторого положительного постоянного числа.

Это положительное число, меньшее единицы, представляющее собой количественную оценку возможности случайного события A , называется его *вероятностью*.

Вероятность, обычно обозначаемая символом $P(A)$, представляет собой как бы физическую константу, связанную со случайным событием A , тогда как его частости в различных конкретных сериях испытаний есть лишь случайные проявления этой постоянной характеристики, выражающей вполне определенную объективную, хотя и своеобразную, связь между комплексом условий γ и случайным событием A .

За приближенное численное значение вероятности $P(A)$ может быть принята частость $W(A)$, полученная при большом числе N испытаний, производившихся в неизменных условиях γ ; точность такого эмпирического измерения вероятности тем выше, чем большее число испытаний было произведено.

Вероятность $P(A)$ отражает определенную объективную структуру самого процесса, в котором наблюдается событие A , и ее значение теснейшим образом связано с условиями массового испытания; оно изменяется как только изменятся основной комплекс условий.

Например, вероятность не обнаружить ни одной дефектной детали в пробе из n штук, взятой из партии в N штук изделий, изготовленных при одном технологическом процессе, будет одна, а вероятность получить тот же результат, произведя выборку из партии того же объекта, но изготовленной по другому технологическому процессу, будет другая.

Производимый статистический учет массовых явлений или специальные эксперименты позволяют, во-первых, подмечать существование в природе вероятностных закономерностей, находящих свое выражение в устойчивости частот, во-вторых, приближенно находить неизвестные вероятности и, в-третьих, производить проверку правильности теоретических предположений или гипотез, связанных с течением вероятностных процессов. Соотношение между частотой и вероятностью особенно наглядно выступает при осуществлении «выборки», т. е. случайного отбора предметов из обширной совокупности в N однородных предметов (например, из партии определенных изделий). Выборка предпринимается с целью приближенной оценки доли тех предметов в совокупности, которые обладают интересующим нас признаком (например, повышенным качеством). Пусть предметов с признаком A в совокупности содержится M и, следовательно, неизвестная доля равна $\frac{M}{N}$. Если в выборке численностью в n штук у нас оказалось

m предметов с признаком A и, таким образом, частота составила $\frac{m}{n}$, то при достаточно большом n мы можем быть практически уверены, что частота воспроизведет по крайней мере приближенно истинную долю $\frac{M}{N}$ в совокупности. В выборке малого объема (при малом n) частота может еще заметно отличаться от доли $\frac{M}{N}$ — в этом сказывается влияние случайных обстоятельств. Однако при возрастании n роль этих обстоятельств будет отступать на второй план. Так как случайный выбор обеспечивает равноправие всех предметов и каждый из них должен появиться одинаково часто, т. е. приблизительно в $\frac{1}{N}$ доле всех извлеченных предметов, то предметы, обладающие признаком A , должны составить приблизительно долю $\frac{M}{N}$ всех n отобранных предметов. Отношение $\frac{M}{N}$, около которого будут группироваться частоты в повторных выборках объема n (для простоты мы считаем, что отобранные предметы после регистрации результатов вновь возвращаются в совокупность), играет в данном примере роль вероятности появления интересующего нас события A — извлечения предмета с признаком A .

Здесь мы дали вероятности частотное истолкование.

При определенных простейших условиях можно дать еще и другое, полезное в ряде случаев определение вероятности, но для этого надо сначала остановиться на соотношениях между событиями.

2.1.3. Соотношения между событиями. Рассмотрим вначале систему S событий A, B, C, \dots , каждое из которых может при каждом испытании либо произойти (наступить, появиться), либо не произойти.

Между событиями A, B, C, \dots могут существовать определенные соотношения:

1. Если при каждом испытании (выполнении комплекса условий γ), в результате которого *происходит событие A , происходит также и событие B* , то говорят, что событие A *влечет за собой* событие B , и это соотношение обозначают символом

$$A \subset B \text{ или } B \supset A.$$

2. Если событие A *влечет за собой* событие B и в то же время событие B *влечет за собой* событие A , т. е. если при каждом испытании *или оба события*

A и B происходят или оба не происходят, то говорят, что такие два события A и B равносильны, и обозначают это соотношение символом

$$A = B.$$

Равносильные между собой события могут заменять друг друга. Их считают тождественными.

3. Событие, заключающееся в *совместном* наступлении обоих событий A и B в одном испытании, называют *произведением событий* A и B и обозначают символом

$$AB.$$

Эта запись равносильна такой записи: A и B .

4. Событие, заключающееся в наступлении *хотя бы одного из событий* A и B , называют *суммой событий* A и B и обозначают символом

$$A + B.$$

Эта запись равносильна такой записи: A или B .

5. *Достоверное событие*, определение которого было дано ранее, обозначим через U , а *невозможное событие* — через V .

6. События A и \bar{A} называются *противоположными*, если для них одновременно удовлетворяются два соотношения:

$$\bar{A} + \bar{\bar{A}} = U; \quad A \bar{A} = V, \quad (2.1.2)$$

т. е. если наступление какого-либо одного из них, A или \bar{A} , в *каждом* испытании достоверно, а совместное наступление обоих событий A и \bar{A} в *каком-либо* одном испытании невозможно.

7. Два события A и B называются *несовместимыми*, если их совместное появление в одном испытании невозможно, т. е. если

$$AB = V. \quad (2.1.3)$$

8. Если событие A заключается в наступлении хотя бы одного из событий B_1, B_2, \dots, B_n , т. е.

$$A = B_1 + B_2 + \dots + B_n,$$

причем события B_1, B_2, \dots, B_n *парно несовместимы*, т. е.

$$B_i B_j = V \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n),$$

то говорят, что событие A *подразделяется на частные случаи* B_1, B_2, \dots, B_n .

9. Говорят, что события B_1, B_2, \dots, B_n образуют *полную группу*, если хотя бы одно из них должно обязательно произойти при каждом испытании, т. е. если

$$B_1 + B_2 + \dots + B_n = U. \quad (2.1.4)$$

10. Особую роль в теории вероятностей играют полные группы *парно несовместимых* событий. В дальнейшем такие группы будут называться просто *полными группами событий*.

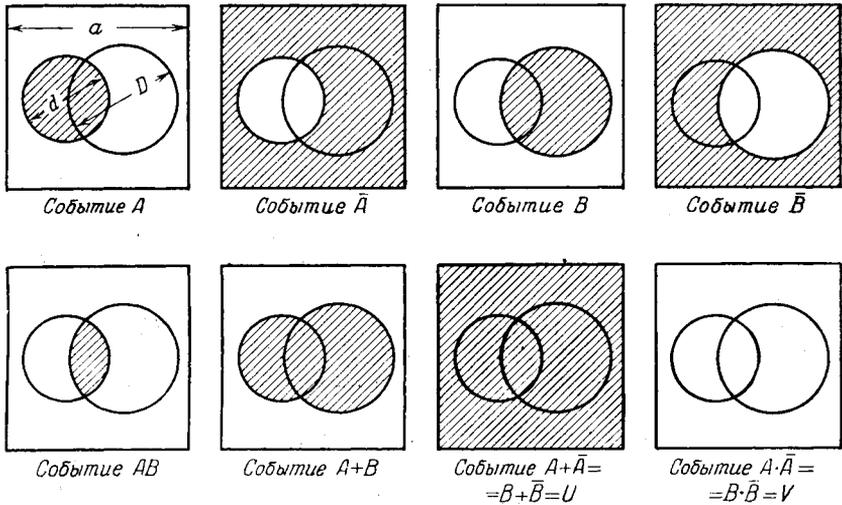
В теории вероятностей в каждой решаемой задаче рассматривается обычно известный круг взаимосвязанных событий, или, как говорят, система событий.

Пусть, например, при разметке некоторого контура точка *всегда* оказывается внутри квадрата со стороной a . Обозначим через U достоверное по условию событие, заключающееся в том, что точка окажется внутри квадрата со стороной a . Невозможным событием V будет по условию то, что точка не окажется внутри квадрата.

Обозначим через A событие, заключающееся в том, что точка окажется внутри окружности диаметра d , и через B событие, заключающееся в том, что точка окажется внутри окружности диаметра D .

Заштрихуем внутри квадрата (черт. 1) такие площади, при попадании разметочной точки на которые произойдут следующие события:

- 1) событие A ,
- 2) событие \bar{A} ,
- 3) событие B ,
- 4) событие \bar{B} ,
- 5) событие AB ,
- 6) событие $A+B$,
- 7) событие $U = A + \bar{A} = B + \bar{B}$,
- 8) событие $V = A\bar{A} = B\bar{B}$.



Черт. 1. Поля событий при разметке заданного контура.

2.1.4. Классическое определение вероятности. Теперь мы посмотрим, при каких именно условиях испытаний можно в частном случае определить вероятность $P(A)$, не прибегая с самого начала к опыту, т. е. не определяя приближенно вероятности $P(A)$ при помощи вычисления частоты $W(A)$ по результатам многократных испытаний.

Подсчет вероятности $P(A)$ события A в таких условиях носит название классического определения вероятности.

Классическое определение вероятности основано на понятии равновероятности или равновозможности всех возможных исходов данного испытания. Понятие равновозможности с классической точки зрения является основным и не подлежит логическому определению. Его можно пояснить следующим примером. Вынимая наугад одну деталь из партии в n деталей, имеющих различные отклонения от номинального размера, мы можем с равной возможностью вынуть любую из n деталей.

Таким образом, равновозможность физически означает некоторую равноправность (симметрию) отдельных исходов относительно основного комплекса условий γ данного испытания.

Пусть в данном испытании мы различаем полную группу, состоящую из n несовместимых и равновозможных исходов — событий

$$E_1, E_2, \dots, E_n.$$

Будем называть эти события *элементарными исходами* данного испытания.

Рассмотрим различные события, представляющие всевозможные суммы этих элементарных исходов. Всякое рассматриваемое событие A , таким образом,

может быть подразделено на некоторое число m элементарных исходов, т. е. если

$$A = E_1 + E_2 + \dots + E_m \quad (m \leq n),$$

то мы будем говорить, что событию A благоприятствует m исходов.

Теперь классическое определение вероятности может быть сформулировано следующим образом: *вероятность события A есть отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n всех возможных элементарных, несовместимых и равновероятных исходов испытания*, т. е.

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (2.1.5)$$

Пример 2.1.1. Допуск диаметра валика подразделен на четыре равных групповых допуска. В сборочном цехе имеется партия валиков численностью в 100 штук, из которых 15 штук с размерами в пределах первой группы (B_1), 40 штук — в пределах второй группы (B_2), 30 штук — в пределах третьей группы (B_3) и 15 штук — в пределах четвертой группы (B_4).

Сборщик из партии валиков вынимает наугад один валик.

Полная группа событий в условиях данной задачи состоит из 100 несовместимых и равновероятных случаев потому, что по условию при испытании сборщик вынимает один валик, тем самым один из 100 валиков будет обязательно вынут, при этом вынутым валиком может оказаться (в равной мере) любой из 100 валиков.

Событие B_1 подразделяется на 15 частных случаев этой полной группы, так как в партии валиков имеется 15 штук валиков с размерами в пределах допуска первой группы, и если сборщик вынет один из 15 валиков, то событие B_1 наступит.

Если бы 100 валиков были пронумерованы в порядке возрастания их размеров так: E_1, E_2, \dots, E_{100} , то к первой группе по размерам относились бы валики E_1, E_2, \dots, E_{15} . Эти исходы благоприятствуют событию B_1 . Поэтому вероятность события B_1 будет равна $P(B_1) = \frac{15}{100} = 0,15$.

Аналогично могут быть найдены вероятности:

$$P(B_2) = \frac{40}{100} = 0,4; \quad P(B_3) = \frac{30}{100} = 0,3 \quad \text{и} \quad P(B_4) = \frac{15}{100} = 0,15.$$

События E_1, E_2, \dots, E_{100} являются попарно несовместимыми, так как вынутая одна деталь не может одновременно иметь два порядковых номера.

Невозможное событие V в данном случае заключается в том, что вынутая из партии наугад деталь окажется по своему размеру не относящейся ни к одной из четырех групп. Так как таких деталей в партии нет, то событие V не может произойти ни в одном испытании:

$$V = \bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 \bar{B}_4.$$

Событие \bar{B}_1 , противоположное событию B_1 , заключается в том, что вынутая из партии деталь окажется не принадлежащей по своим размерам к первой группе, т. е. она будет принадлежать ко второй, третьей или четвертой группе:

$$\bar{B}_1 = B_2 + B_3 + B_4;$$

по определению:

$$P(\bar{B}_1) = \frac{85}{100} = 0,85.$$

Точно так же

$$P(\bar{B}_2) = \frac{60}{100} = 0,6.$$

События \bar{B}_1 и \bar{B}_2 совместимы, так как если вынутая деталь окажется принадлежащей к третьей или четвертой группе, то оба они наступят одновременно.

Отсюда следует, что событие $B_3 + B_4$ влечет за собой как событие \bar{B}_1 , так и событие \bar{B}_2 , т. е.

$$B_3 + B_4 \subset \bar{B}_1 \quad \text{и} \quad B_3 + B_4 \subset \bar{B}_2.$$

2.1.5. Основные свойства вероятности. Вероятности случайных событий обладают некоторыми общими свойствами.

Эти свойства на основе классического определения вероятности могут быть сформулированы так:

1. Вероятность любого события A неотрицательна, т. е.

$$P(A) \geq 0. \quad (2.1.6)$$

Действительно, поскольку в формуле (2.1.5) числитель неотрицателен, а знаменатель является существенно положительной величиной (это число элементарных событий), то дробь не может быть отрицательной.

2. Вероятность достоверного события U всегда равна единице, т. е.

$$P(U) = 1, \quad (2.1.7)$$

так как достоверному событию благоприятствуют все возможные элементарные случаи — оно появляется при любом возможном исходе испытания и поэтому для него в формуле (2.1.5) число благоприятствующих случаев m равно числу всех возможных случаев n , т. е. $m = n$, откуда дробь $\frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$. Обратное заключение в случае классического определения, очевидно, также имеет место: вероятность, равная единице, отвечает достоверному событию.

3. Вероятность невозможного события V равна нулю, т. е.

$$P(V) = 0, \quad (2.1.8)$$

так как невозможному событию не благоприятствует ни один из n возможных элементарных исходов, а это значит, что $m = 0$ и потому в формуле (2.1.5) дробь

$$\frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

4. Вероятность любого случайного события A заключена между вероятностями невозможного события V и достоверного события U , иными словами, заключена между нулем и единицей, т. е.

$$0 = P(V) \leq P(A) \leq P(U) = 1, \quad (2.1.9)$$

так как случайным событием, вообще говоря, называют такое, которое не является достоверным, т. е. ему благоприятствуют не все n возможных случаев, но не является и невозможным, т. е. среди n возможных элементарных случаев есть все же такие, которые ему благоприятствуют. Поэтому для случайного события A дробь в формуле (2.1.5) будет заключена между

$$\frac{0}{n} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{n}{n} = 1.$$

Таким образом, классическое определение устанавливает определенную шкалу для измерения вероятностей. Граничным точкам этой шкалы отвечают вероятности нуль и единица.

Числовая величина вероятности, например $P(A) = 0,47$, измеренная по этой шкале, может быть наглядно истолкована следующим образом: в данном испытании событие A столь же вероятно, как взятие наудачу одного «отмеченного» предмета из группы в 100 предметов, из которых 47 «отмеченных» и 53 не «отмеченных».

5. Вероятность наступления хотя бы одного из противоположных событий A и \bar{A} всегда равна 1, т. е.

$$P(A + \bar{A}) = P(U) = 1, \quad (2.1.10)$$

так как из формулы (2.1.2) следует, что вероятность наступления хотя бы одного из противоположных событий A и \bar{A} равносильна достоверному событию, а вероятность достоверного события равна 1, как это видно из формулы (2.1.7).

6. Вероятность наступления хотя бы одного события из событий A_1, A_2, \dots, A_n , составляющих полную группу, равна единице, т. е.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(U) = 1, \quad (2.1.11)$$

так как из формулы (2.1.4) следует, что наступление хотя бы одного события из событий, составляющих полную группу, равносильно достоверному событию, вероятность которого по формуле (2.1.7) равна единице.

Классическое определение вероятности позволяет предвидеть устойчивость частостей при многократных повторениях испытаний.

В самом деле, предположение, касающееся равновозможности элементарных частных событий, естественно понимать так, что при многократном повторении испытания все элементарные частные случаи повторяются примерно одинаковое число раз.

Если, например, произведено N испытаний, то каждый элементарный исход в полной группе E_1, E_2, \dots, E_n появится при этом примерно $\frac{N}{n}$ раз. Если событию A благоприятствует m исходов из числа всех n исходов, то оно произойдет в N испытаниях в $k \approx m \frac{N}{n}$ случаях и, таким образом, наблюдаемая частость события A будет равна

$$W(A) = \frac{k}{N} \approx \frac{m}{n} = P(A).$$

Устойчивость частости в этом случае является фактом, который может быть интуитивно предсказан заранее, и он неоднократно проверялся в ряде специальных экспериментов, причем в них со всей тщательностью обеспечивалась равновозможность элементарных исходов. Подтверждением этого фундаментального положения является также вся многолетняя обширная практика статистических наблюдений.

Практика, таким образом, показывает, что при определенных условиях действительно с увеличением числа испытаний частость $W(A)$ все с большей точностью выражает вероятность $P(A)$.

§ 2. Простейшие способы исчисления вероятностей

2.2.1. Непосредственный подсчет вероятностей. В теории вероятностей рассматривается ряд способов или приемов исчисления вероятностей сложных событий по заданным вероятностям исходных событий. Эти заданные вероятности могут быть определены статистическим путем или установлены на основе каких-либо теоретических допущений.

Остановимся вначале на простейших способах исчисления вероятностей. Сюда войдут:

1. Непосредственный подсчет вероятностей.
2. Правило сложения вероятностей.
3. Правило умножения вероятностей.
4. Формула полной вероятности.
5. Формула вероятностей гипотез.

Непосредственный подсчет вероятностей производится по весьма простой формуле (2.1.5).

Основная трудность при пользовании этой формулой заключается в правильном определении числа n всех равновозможных случаев и числа m благоприятствующих интересующему нас событию случаев.

Рассмотрим один характерный пример.

Пример 2.2.1. В сборочный узел входят две сопрягаемые детали: № 1 (валик) и № 2 (втулка). Узел имеет пониженное качество, если размер одной из деталей завышен, а другой занижен, или одной детали нормален, а другой завышен или занижен.

На сборку поступили партия валиков и партия втулок.

Из 10 валиков, входящих в партию, 7 имеют нормальные размеры, 2 — завышенные и 1 — заниженный.

Из 20 втулок, входящих в партию, 16 имеют нормальные размеры, 1 — завышенный и 3 — заниженные.

Требуется определить непосредственным подсчетом вероятность события Π , заключающегося в том, что первый собранный узел окажется пониженного качества.

Каждый из 10 валиков может попасть в первый узел и быть сопряженным в нем с каждой из 20 втулок. Следовательно, общее число всех возможных случаев, составляющих полную группу, будет равно

$$n = 10 \cdot 20 = 200.$$

Благоприятные комбинации для события Π складываются из:

1) сопряжений «завышенных» валиков с «заниженными» втулками

$$m_{1\Pi} = 2 \cdot 3 = 6.$$

2) Сопряжений «заниженных» валиков с «завышенными» втулками

$$m_{2\Pi} = 1 \cdot 1 = 1.$$

3) Сопряжений «нормальных» валиков с «заниженными» втулками

$$m_{3\Pi} = 7 \cdot 3 = 21.$$

4) Сопряжений «нормальных» валиков с «завышенными» втулками

$$m_{4\Pi} = 7 \cdot 1 = 7.$$

5) Сопряжений «завышенных» валиков с «нормальными» втулками

$$m_{5\Pi} = 2 \cdot 16 = 32.$$

6) Сопряжений «заниженных» валиков с «нормальными» втулками

$$m_{6\Pi} = 1 \cdot 16 = 16.$$

Всего благоприятных для события Π комбинаций будет:

$$m_{\Pi} = 6 + 1 + 21 + 7 + 32 + 16 = 83.$$

Таким образом, искомая вероятность равна

$$P(\Pi) = \frac{83}{200}.$$

2.2.2. Комбинаторика (теория соединений) и приближенное вычисление факториалов. Подсчет числа благоприятствующих случаев и числа всех возможных случаев для определения вероятности по формуле (2.1.5) нередко бывает осложнен тем, что элементарные случаи представляют собой комбинации или соединения заданных исходных событий.

Если рассматривать события как элементы такого рода соединений, то мы можем прийти к различным типам этих соединений, рассматриваемых в комбинаторике.

Различают три основных типа соединений (без повторений).

1. *Размещения* — это соединения, отличающиеся друг от друга либо числом, либо составом входящих в них элементов, либо при одном и том же числе и составе элементов порядком их расположения.

2. *Перестановки* — соединения, содержащие одни и те же элементы и отличающиеся друг от друга только порядком элементов.

3. *Сочетания* — соединения из данного числа элементов, отличающиеся друг от друга входящими в них элементами независимо от их порядка. Таким образом, если два сочетания различны, то в одном из них содержится хотя бы один элемент, не содержащийся в другом.

Кроме этих основных трех типов соединений без повторений в теории вероятностей, нередко используются еще соединения с *повторениями*, т. е. соединения, в которых элементы встречаются не по одному, а по несколько раз.

Число размещений из n по m обозначается символом A_n^m и подсчитывается по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (2.2.1)$$

Как следует из определения, перестановка, по существу, представляет размещения из n по n . Поэтому число перестановок, обозначаемое символом P_n , равно

$$P_n = n!, \quad (2.2.2)$$

так как

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\dots 2 \cdot 1 = n!.$$

Число сочетаний из n элементов по m обозначается символом C_n^m . Из каждого сочетания этого типа, переставляя всеми способами его элементы между собой, получают $P_m = m!$ размещений. Проведя эту операцию со всеми сочетаниями, получим всего $C_n^m \cdot P_m$ размещений из n по m .

Поэтому

$$A_n^m = C_n^m m!.$$

Отсюда, принимая во внимание (2.2.1) и (2.2.2), получим:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (2.2.3)$$

При вычислении вероятностей по способу непосредственного подсчета с применением комбинаторики часто приходится иметь дело с факториалами больших чисел. Понятно, что вычисления в этих случаях делаются очень трудоемкими. Чтобы облегчить вычисления, прибегают к следующей формуле (Стирлинга) для приближенного вычисления факториалов больших чисел:

$$n! \approx \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}. \quad (2.2.4)$$

По этой формуле факториал, например, 10 равен $10! = 3\,598\,696$, тогда как на самом деле $10! = 3\,628\,800$. Ошибка составляет $0,8\%$.

Относительная погрешность формулы убывает с возрастанием n .

При вычислениях по формуле Стирлинга естественно воспользоваться логарифмами. Из формулы (2.2.4) следует:

$$\lg n! \approx \lg \sqrt{2\pi} - n \lg e + \left(n + \frac{1}{2}\right) \lg n,$$

$$\lg \sqrt{2\pi} = 0,39909, \quad \lg e = 0,43429,$$

$$\sqrt{2\pi} = 2,506628, \quad e = 2,718282.$$

Если не требуется большой точности вычислений, то можно прибегнуть к таблице логарифмов факториалов.

В качестве примера использования комбинаторики при непосредственном подсчете вероятностей приведем еще практически важную задачу о статистической (безвозвратной) выборке.

2.2.3. Задача о статистической (безвозвратной) выборке. Если в процессе отбора упоминавшейся уже выше выборки каждый из отобранных объектов обратно не возвращается, то выборка называется безвозвратной или бесповторной.

Пусть каждый из S объектов некоторой совокупности обладает одним из двух признаков: A или \bar{A} , причем признаком A обладает K объектов и, следо-

вательно, признаком \bar{A} обладает $S - K$ объектов. Из этой совокупности отбирается s объектов так, что после отбора i объектов следующим за ними $i + 1$ -м объектом может с равной вероятностью оказаться любой из еще неотобранных объектов.

Интересующее нас событие заключается в том, что в выборке из s объектов окажется некоторое заданное число k ($k \leq s$) объектов, обладающих признаком A .

Будем различать между собой отдельные объекты совокупности, например, перенумеровав их в каком-нибудь порядке. За полную группу элементарных исходов в данном испытании можно принять совокупность всех сочетаний из S объектов по s взятых наудачу в выборку. Число этих сочетаний будет равно C_S^s .

Таким образом, отдельные элементарные исходы будут различаться между собой составом вынутой группы s (но не порядком их).

Подсчитаем теперь, какое число из всех C_S^s сочетаний полной группы будет благоприятствовать интересующему нас событию. Каждое благоприятствующее нашему событию сочетание можно получить, объединяя какую-либо группу из k объектов, обладающих признаком A , с какой-либо группой $s - k$ объектов, обладающих признаком \bar{A} . Различаемые нами группы при этом должны отличаться по составу элементов, т. е. представлять сочетания.

Число всех сочетаний по k объектов, обладающих признаком A , равно C_K^k , а число сочетаний по $s - k$ объектов, обладающих признаком \bar{A} , равно C_{S-K}^{s-k} .

Так как все сочетания по s , представляющие благоприятные комбинации, мы получим, комбинируя каждые из C_K^k сочетаний первого типа с каждым из C_{S-K}^{s-k} сочетаний второго, то общее число всех благоприятных комбинаций s отобранных объектов будет, следовательно, равно произведению $C_K^k \cdot C_{S-K}^{s-k}$.

На основании определения вероятности интересующая нас вероятность $P_{SK}(s, k)$ того, что в выборке из s объектов окажется k объектов с признаком A , окончательно будет равна

$$P_{SK}(s, k) = \frac{C_K^k C_{S-K}^{s-k}}{C_S^s}. \quad (2.2.5)$$

Можно было бы за полную группу элементарных исходов в данном испытании принять не совокупность сочетаний, а совокупность размещений из S объектов по s объектов.

Тогда число всех возможных случаев было бы равно A_S^s . Число же благоприятствующих нашему событию комбинаций мы получили бы, умножив произведение $C_K^k C_{S-K}^{s-k}$ на число перестановок P_s , которое можно составить из каждой благоприятствующей комбинации, содержащей s элементов. Таким образом, число благоприятствующих комбинаций будет равно

$$C_K^k \cdot C_{S-K}^{s-k} P_s.$$

Вероятность интересующего нас события будет равна

$$P_{SK}(s, k) = \frac{C_K^k C_{S-K}^{s-k} P_s}{A_S^s} = \frac{C_K^k C_{S-K}^{s-k}}{A_S^s : P_s} = \frac{C_K^k C_{S-K}^{s-k}}{C_S^s}.$$

Результат получился тот же самый. Иными словами, элементарными исходами в данном случае мы можем считать и сочетания из S по s и размещения из S по s , так как и те и другие по отдельности между собой равновозможны и несовместимы.

Формуле (2.2.5) можно придать иной вид, применив (2.2.3) для выражения чисел сочетаний

$$P_{SK}(s, k) = \frac{s!}{k!(s-k)!} \frac{K(K-1)\dots(K-k+1)(S-K)(S-K-1)\dots[S-K-(s-k)+1]}{S(S-1)\dots(S-s+1)} = \frac{s!}{k!(s-k)!(K-k)!} \frac{K!}{[S-K-(s-k)]!} \frac{(S-K)!}{S!}. \quad (2.2.6)$$

В частности, вероятность не получить в выборке ни одного предмета с признаком A получится из (2.2.6) при $k=0$ в виде

$$P_{SK}(s, 0) = \frac{(S-K)(S-K-1)\dots(S-K-s+1)}{S(S-1)\dots(S-s+1)}. \quad (2.2.7)$$

Пример 2.2.2. В партии деталей численностью в 100 штук имеется 30 деталей с отклонениями от номинального размера в плюс (+).

Из этой партии отбирается безвозвратная выборка численностью в 3 штуки. Требуется определить вероятность того, что в выборку попадает одна «плюсовая» деталь.

По формуле (2.2.5) находим:

$$P_{100,30}(3,1) = \frac{C_{30}^1 C_{70}^2}{C_{100}^3} = \frac{30 \cdot 70 \cdot 69 \cdot 3}{100 \cdot 99 \cdot 98} = 0,448.$$

2.2.4. Правило сложения вероятностей. Вторым приемом исчисления вероятностей является правило сложения вероятностей. Для несовместимых событий его можно сформулировать следующим образом: *если событие A в данном испытании подразделяется на частные несовместимые случаи A_1, A_2, \dots, A_s ($A = A_1 + A_2 + \dots + A_s$), то вероятность события A равна сумме вероятностей событий A_1, A_2, \dots, A_s , т. е.*

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^s A_i\right) = \sum_{i=1}^s P(A_i). \quad (2.2.8)$$

Поясним содержание этого правила на примере.

Пусть в условиях примера 2.1.1 событие B_{1-3} представляет собой то, что вынутая сборщиком деталь окажется по своему размеру в пределах первых трех четвертей общего допуска размера.

Это значит, что событие B_{1-3} подразделяется на три частных случая (несовместимых события) B_1, B_2 и B_3 , так как если вынутая деталь окажется по размерам лежащей в границах допусков первой (событие B_1), второй (событие B_2) или третьей (событие B_3) групп, то событие B_{1-3} наступит.

Таким образом,

$$B_{1-3} = B_1 + B_2 + B_3.$$

На основании правила сложения имеем:

$$P(B_{1-3}) = P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 0,15 + 0,4 + 0,3 = 0,85.$$

Доказательство правила сложения вероятностей в классической схеме вытекает прямо из определения вероятностей. В самом деле, если событие A подразделяется на несовместимые события A_1, A_2, \dots, A_s , каждому из которых благоприятствует соответственно m_1, m_2, \dots, m_s элементарных исходов (между собой не перекрывающихся или несовместимых) из полной группы, то событию A благоприятствует всего $m_1 + m_2 + \dots + m_s$ исходов и потому, если n обозначает общее число исходов полной группы,

$$P(A) = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_s}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \dots + \frac{m_s}{n} = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_s),$$

что и требовалось.

Правило сложения в современной теории вероятностей принимается за аксиому, выражающую основное свойство вероятности как своеобразной меры объективной возможности наступления события в рассматриваемом испытании.

Заметим еще, что если в N опытах каждое из несовместимых событий A_i произошло k_i раз, т. е. если число появления события $A = A_1 + A_2 + \dots + A_s$ будет $k = k_1 + k_2 + \dots + k_s$, то частость его $\frac{k}{N}$ будет представлять в точности сумму частостей $\frac{k_1}{N} + \frac{k_2}{N} + \dots + \frac{k_s}{N}$. Таков эмпирический смысл рассматриваемого свойства вероятности.

Из этого положения в свою очередь вытекает следующее.

1. Для полной группы событий из формул (2.1.11) и (2.2.8) получим:

$$\mathbf{P}(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(U) = 1, \quad (2.2.9)$$

где A_1, A_2, \dots, A_n — несовместимые события, составляющие полную группу.

Итак, сумма вероятностей несовместимых событий, составляющих полную группу, равна единице.

2. Для противоположных событий (по определению между собой несовместимых) из формул (2.1.10) и (2.2.8) получим:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}(A + \bar{A}) &= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A}) = \mathbf{P}(U) = 1, \\ \mathbf{P}(\bar{A}) &= 1 - \mathbf{P}(A), \end{aligned} \right\} \quad (2.2.10)$$

откуда

где A и \bar{A} — противоположные события.

Итак, вероятность противоположного события дополняет до единицы вероятность данного события.

Пример 2.2.3. Требуется по условиям примера 2.1.1:

1) проверить, пользуясь формулой (2.2.9), составляют ли события B_1, B_2, B_3 и B_4 полную группу и 2) вычислить вероятность события, заключающегося в том, что вынутая деталь не будет принадлежать к первой группе.

1) По формуле (2.2.9) получим:

$$\mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(B_2) + \mathbf{P}(B_3) + \mathbf{P}(B_4) = 0,15 + 0,4 + 0,3 + 0,15 = 1.$$

Следовательно, несовместимые между собой события B_1, B_2, B_3 и B_4 действительно составляют полную группу.

2) По формуле (2.2.10), если $\mathbf{P}(B_1) = 0,15$, то $\mathbf{P}(\bar{B}_1) = 1 - 0,15 = 0,85$.

Таким образом, вероятность того, что вынутая деталь не будет принадлежать к первой группе, равна $\mathbf{P}(\bar{B}_1) = 0,85$.

2.2.5. Условная вероятность события. Правило сложения в общем случае. Остановимся на важных в теории вероятностей понятиях условной вероятности события и независимости событий.

Ранее указывалось, что вероятность события A связана с определенным комплексом условий γ . Если никаких других условий, кроме комплекса γ , при вычислении вероятности $\mathbf{P}(A)$ события A не налагается, то такая вероятность называется *безусловной вероятностью* события A . Таким образом, строго говоря, и безусловная вероятность $\mathbf{P}(A)$ является условной в том смысле, что она связана с комплексом условий γ .

Условной вероятностью $\mathbf{P}(A|B)$ события A при наступлении события B называется вероятность события A , вычисленная в предположении, что событие B наступило. Вероятность $\mathbf{P}(A|B)$ отличается от вероятности $\mathbf{P}(A)$ тем, что предположение о наступлении события B изменяет прежний комплекс условий γ и вероятность $\mathbf{P}(A|B)$ относится по существу к испытанию в других условиях.

Поясним смысл условной вероятности на примере.

Пример 2.2.4. Предположим, что детали одного наименования («валик привода») поступают на сборку из двух механических цехов-изготовителей (№ 1 и № 2).

Среди «валиков привода» цехов № 1 и № 2 имеются валики с отклонениями от номинального размера в плюс (+) и в минус (-).

Каждые n валиков, имеющих на сборке, состоят из $a+k$ валиков цеха № 1, из которых a «минусовых» и k «плюсовых», и $b+l$ валиков цеха № 2, из которых l «плюсовых» и b «минусовых».

При этом $a+k+b+l=n$.

Обозначим через A событие, заключающееся в том, что взятая наугад из партии в n штук деталь окажется «плюсовой», и через B , — что она окажется изготовленной в цехе № 1.

Мы будем иметь четыре возможные комбинации признаков:

$$AB, \bar{A}B, A\bar{B} \text{ и } \bar{A}\bar{B}.$$

Распределение n валиков между этими комбинациями приведено в табл. 2.2.1.

Таблица 2.2.1

События	События		
	A	\bar{A}	Сумма
B	k	a	$k+a$
\bar{B}	l	b	$l+b$
Сумма	$k+l$	$a+b$	n

Вычислим непосредственным подсчетом вероятности появления событий A и B , противоположных им событий \bar{A} и \bar{B} и вероятности совместного появления различных попарных комбинаций этих четырех событий.

Вероятность совместного появления двух событий A и B , т. е., иными словами, события AB , заключающегося в том, что вынутый наугад валик окажется одновременно «плюсовым» и изготовленным в цехе № 1, равна

$$P(AB) = \frac{k}{n},$$

так как из общего числа n валиков k валиков являются одновременно «плюсовыми» и изготовленными в цехе № 1.

Аналогично этому получим:

$$P(A\bar{B}) = \frac{l}{n}; \quad P(\bar{A}B) = \frac{a}{n} \quad \text{и} \quad P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{b}{n}.$$

Вероятность появления события A равна

$$P(A) = \frac{k+l}{n},$$

ибо из общего числа n валиков $k+l$ валиков являются «плюсовыми» (без учета того, в каком цехе они изготовлены). Очевидно,

$$P(A) = \frac{k}{n} + \frac{l}{n} = P(AB) + P(A\bar{B}); \quad (2.2.11)$$

это следует также из правила сложения.

Аналогичным образом:

$$P(\bar{A}) = \frac{a+b}{n} = P(\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B}), \quad (2.2.12)$$

$$P(B) = \frac{k+a}{n} = P(AB) + P(\bar{A}B), \quad (2.2.13)$$

$$P(\bar{B}) = \frac{l+b}{n} = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}\bar{B}). \quad (2.2.14)$$

Вычислим теперь условные вероятности. Условная вероятность события B , вычисленная в предположении, что событие A наступило, т. е., иными словами, вероятность того, что вынутый наугад валик окажется изготовленным в цехе № 1, если предположить, что он заведомо «плюсовой», равна

$$P(B|A) = \frac{k}{k+l},$$

так как, предположив, что валик «плюсовой», мы тем самым исключили из подсчета все $a+b$ «минусовых» валиков, и общее число валиков теперь оказывается равным $k+l$, из которых k валиков изготовлено в цехе № 1.

Аналогично

$$P(A|B) = \frac{k}{a+k}.$$

Возьмем теперь полученное нами выражение для условной вероятности $P(B|A)$ и разделим в нем числитель и знаменатель на n ; тогда получим:

$$P(B|A) = \frac{k}{k+l} = \frac{\frac{k}{n}}{\frac{k+l}{n}} = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Аналогично этому

$$P(A|B) = \frac{k}{a+k} = \frac{\frac{k}{n}}{\frac{a+k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Таким образом, когда событие A подразделяется на $k+l > 0$ элементарных исходов из полной группы несовместимых и равновозможных между собой исходов, из которых ровно k благоприятствуют наступлению A вместе с B , то условная вероятность события B при условии наступления события A равна

$$P(B|A) = \frac{k}{k+l} = \frac{P(AB)}{P(A)}. \quad (2.2.15)$$

Формула (2.2.15) называется *формулой условной вероятности*.

Если событию A не благоприятствует ни один случай и $P(A) = 0$, то условная вероятность других событий в зависимости от события A не определяется.

Пользуясь выведенными соотношениями, можно обобщить правило сложения, распространив его на случай совместимых событий.

Событие $A+B$, заключающееся в том, что вынутый валик окажется либо «плюсовым», либо изготовленным в цехе № 1, очевидно, подразделяется на следующие три события:

Событие AB (валик «плюсовой» и изготовлен в цехе № 1).

Событие $\bar{A}B$ (валик «плюсовой», но не изготовлен в цехе № 1).

Событие $\bar{A}\bar{B}$ (валик не «плюсовой», но изготовлен в цехе № 1), т. е.

$$A+B = AB + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}.$$

Тогда на основании правила сложения вероятностей получим для несовместимых событий:

$$P(A + B) = P(AB) + P(\overline{AB}) + P(\overline{AB}). \quad (2.2.16)$$

Пользуясь соотношениями (2.2.11) и (2.2.13), найдем:

$$P(AB) + P(\overline{AB}) = P(A), \quad P(\overline{AB}) = P(B) - P(AB).$$

Поэтому из (2.2.16) следует:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (2.2.17)$$

Таким образом, имеем результат, обобщающий теорему сложения для двух событий: *вероятность суммы двух событий равна сумме их вероятностей минус вероятность совместного их появления в данном испытании.*

В частном случае при двух несовместимых событиях A и B $P(AB) = 0$ и поэтому результат по формуле (2.2.17) совпадает с результатом по формуле (2.2.8).

Ознакомимся теперь с понятием о независимости событий.

Событие A называется независимым от события B , если наступление события B не изменяет вероятности события A , т. е. если

$$P(A|B) = P(A). \quad (2.2.18)$$

Пример 2.2.5. В сборочном цехе имеется n_A втулок, из которых m_A «плюсовых» и n_B валиков, из которых m_B «плюсовых».

Обозначим через A событие, заключающееся в том, что взятая наугад из партии втулок втулка окажется «плюсовой», и через B , — что взятый наугад из партии валиков валик окажется «плюсовым». Очевидно, что

$$P(A) = \frac{m_A}{n_A} \quad \text{и} \quad P(B) = \frac{m_B}{n_B}.$$

По самому характеру данного испытания заранее очевидно, что события A и B будут независимы, так как, каков бы ни был исход испытания с партией втулок, вероятность появления валика будет одна и та же. Проверим тем не менее это обстоятельство, используя формулу условной вероятности (2.2.15).

Найдем вероятность совместного наступления двух событий A и B , т. е. события AB , заключающегося в том, что вынутые наугад из своих партий детали — втулка и валик — окажутся «плюсовыми».

Очевидно, что каждая вынутая втулка может оказаться вынутой совместно с каждым из валиков. Поэтому общее число возможных исходов данного испытания равно произведению $n_A n_B$.

Подсчитаем число благоприятствующих событию AB исходов. Так как каждая «плюсовая» втулка может быть вынута совместно с каждым плюсовым валиком, то число благоприятствующих исходов будет равно произведению $m_A m_B$.

Искомая вероятность будет равна

$$P(AB) = \frac{m_A m_B}{n_A n_B}.$$

По формуле (2.2.15) условная вероятность $P(A|B)$ будет равна

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{m_A m_B}{n_A n_B} : \frac{m_B}{n_B} = \frac{m_A}{n_A}.$$

Мы видим, что действительно

$$P(A|B) = \frac{m_A}{n_A} = P(A);$$

отсюда следует, что события A и B независимы в определенном выше смысле.

Пример 2.2.6. Из партии численностью в 100 валиков 15 валиков являются только эллиптическими, 50 — только конусными, 25 — одновременно эллиптическими и конусными и 10 валиков дефектов не имеют. Событие \mathcal{E} заключается в том, что взятый наудачу из партии валик окажется эллиптическим, а событие K в том, что валик окажется конусным. Тогда, пользуясь формулой непосредственного подсчета вероятностей, получим:

$$P(\mathcal{E}) = \frac{40}{100} = 0,4, \quad P(K) = \frac{75}{100} = 0,75 \quad \text{и} \quad P(\mathcal{E}K) = \frac{25}{100} = 0,25.$$

Подсчитаем теперь условную вероятность $P(\mathcal{E}|K)$ того, что вынутый валик окажется эллиптическим, если предположить, что он конусный.

По формуле (2.2.15) получим:

$$P(\mathcal{E}|K) = \frac{P(\mathcal{E}K)}{P(K)} = \frac{0,25}{0,75} = \frac{1}{3} \approx 0,33.$$

Эту вероятность можно было бы подсчитать и непосредственно. Если валик конусный, то это один из 75 конусных валиков и, следовательно, число всех элементарных исходов равно 75. Нас интересует вероятность того, что валик окажется эллиптическим. Таких валиков среди 75 валиков имеется 25. Следовательно, число благоприятствующих случаев равно 25. Отсюда

$$P(\mathcal{E}|K) = \frac{25}{75} = \frac{1}{3} \approx 0,33.$$

Аналогично

$$P(K|\mathcal{E}) = \frac{P(\mathcal{E}K)}{P(\mathcal{E})} = \frac{0,25}{0,4} = 0,625.$$

Мы видим, что в данном случае $P(\mathcal{E}|K) \neq P(\mathcal{E})$ и $P(K|\mathcal{E}) \neq P(K)$, откуда заключаем, что события \mathcal{E} и K зависимы.

Заметим, что если бы в данном случае общая доля эллиптических валиков среди всех валиков была равна доле эллиптических среди одних только конусных валиков, то события \mathcal{E} и K были независимыми. Так, например, если $P(\mathcal{E}) = 0,5$ и $P(K) = 0,5$, а $P(\mathcal{E}K) = 0,25$, то $P(\mathcal{E}|K) = \frac{0,25}{0,5} = 0,5$ и $P(K|\mathcal{E}) = \frac{0,25}{0,5} = 0,5$, т. е. $P(\mathcal{E}|K) = P(\mathcal{E})$ и $P(K|\mathcal{E}) = P(K)$.

2.2.6. Правило умножения вероятностей. Независимость событий в совокупности. Для двух событий может быть сформулировано следующее правило умножения вероятностей.

Вероятность совместного появления двух событий A и B в данном испытании равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность второго, вычисленную в предположении, что первое событие появилось, т. е.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B). \quad (2.2.19)$$

Правило это вытекает из формулы условной вероятности. В самом деле, если уравнение (2.2.15) решить относительно $P(AB)$, то мы получим соотношение (2.2.19).

Пример 2.2.7. В собираемый механизм входят две одинаковые шестерни. Технические условия нарушаются, если обе они окажутся с отклонением по толщине зуба в плюс (+) от среднего размера (заедание). У сборщика имеется 10 шестерен, из которых 3 «плюсовых» и 7 «минусовых». Требуется определить вероятность нарушения технических условий на сборке.

Обозначим через A событие, заключающееся в том, что первая шестерня, взятая наугад из партии, окажется «плюсовой», и через B событие, заключающееся в том, что вторая взятая наугад шестерня окажется «плюсовой».

Очевидно, интересующее нас событие заключается в совместном наступлении событий A и B .

На основании правила умножения вероятностей вероятность его будет равна

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Непосредственным подсчетом находим:

$$P(A) = \frac{3}{10} \quad \text{и} \quad P(B|A) = \frac{2}{9},$$

так как если первая вынутая шестерня окажется «плюсовой», то вероятность того, что вторая окажется «плюсовой», будет равна отношению числа оставшихся в партии «плюсовых» шестерен ($3 - 1 = 2$) к общему числу оставшихся в партии шестерен ($10 - 1 = 9$).

Окончательно получим:

$$P(AB) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15} \approx 0,07.$$

Из правила умножения для двух событий можно вывести важное следствие.

Если событие A независимо от B и, следовательно, $P(A|B) = P(A)$, то на основании соотношения (2.2.19) имеем:

$$P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A),$$

откуда

$$P(B|A) = P(B).$$

Таким образом, *свойство независимости событий взаимно*. Условие независимости двух событий A и B может быть записано в симметричной форме

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

— вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их безусловных вероятностей. Группируя события, правилу умножения легко придать следующий общий вид.

Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события наступили:

$$P(A_1 A_2 \dots A_s) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \dots P(A_s|A_1 A_2 \dots A_{s-1}), \quad (2.2.20)$$

где $P(A_s|A_1 A_2 \dots A_{s-1})$ есть вероятность появления события A_s , вычисленная в предположении, что события A_1, A_2, \dots, A_{s-1} наступили.

Так, например, для трех событий A_1, A_2 и A_3 мы, пользуясь (2.2.19), найдем, считая $A_1 A_2$ за одно событие,

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1 A_2) \cdot P(A_3|A_1 A_2)$$

и

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1).$$

Отсюда в соответствии с общей формулой

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2).$$

Если вероятность какого-либо из событий A_1, A_2, \dots, A_s равна нулю, то и вероятность совместного наступления этих событий также равна нулю, как это видно из (2.2.20).

Применим правило умножения к вычислению вероятности $P_{sK}(s, 0)$, задаваемой формулой (2.2.7), для случая неполучения ни одного предмета с признаком A в выборке из s .

Вероятность при первом извлечении не получить предмета с признаком A будет равна $\frac{S-K}{S}$, условная вероятность не получить его и при втором извлечении, если он не появился в первом, очевидно, будет $\frac{S-K-1}{S-1}$; аналогично

этому условная вероятность не получить A при третьем извлечении, если в первых двух он не появился, равна $\frac{s-K-2}{s-2}$ и т. д.

Таким образом, из правила умножения для s последовательных извлечений найдем:

$$P_{SK}(s, 0) = \frac{s-K}{s} \frac{s-K-1}{s-1} \dots \frac{(s-K-s+1)}{(s-s+1)},$$

что совпадает с (2.2.7).

События A_1, A_2, \dots, A_s называются *независимыми в совокупности*, когда условная вероятность появления любого события из их числа, вычисленная в предположении, что какие-либо другие события в группе (совокупности) произошли, равна безусловной вероятности события

$$P(A_p | A_k A_l A_m \dots) = P(A_p), \quad (2.2.21)$$

где A_k, A_l, A_m есть некоторые события рассматриваемой группы.

Для независимости нескольких событий в совокупности недостаточно их *парной независимости*, т. е. независимости любой пары событий, взятых из совокупности событий.

Убедимся в этом на примере.

Пример 2.2.8. У сборщика имеется четыре валика, из которых один конусный, второй с огранкой, третий эллиптический, а четвертый имеет одновременно все три указанных дефекта. Обозначим через K событие, заключающееся в том, что первый вынутый наугад валик окажется с конусностью, через O — с огранкой и через \mathcal{E} — с эллиптичностью.

Требуется проверить, имеется ли зависимость между тремя событиями K, O и \mathcal{E} . Вычислим сначала безусловные вероятности интересующих нас событий. Они равны

$$P(K) = P(O) = P(\mathcal{E}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Вычислим условную вероятность события K в предположении, что событие O произошло. Событие $K|O$ означает, что мы заранее предполагаем валик с огранкой и при этом интересуемся его конусностью. Искомая вероятность равна

$$P(K|O) = \frac{1}{2}.$$

Аналогично этому можно было бы подсчитать, что условные вероятности событий $K|\mathcal{E}, \mathcal{E}|K, \mathcal{E}|O, O|K$ и $O|\mathcal{E}$ равны:

$$P(K|\mathcal{E}) = P(\mathcal{E}|K) = P(\mathcal{E}|O) = P(O|K) = P(O|\mathcal{E}) = \frac{1}{2}.$$

Мы видим, что условные вероятности событий K, O и \mathcal{E} равны их безусловным вероятностям. Следовательно, эти события попарно независимы.

Вычислим теперь условную вероятность события K в предположении, что события O и \mathcal{E} наступили.

Событие $K|O\mathcal{E}$ означает, что мы заранее полагаем вынутый валик имеющим огранку и эллиптичность и при этом интересуемся его конусностью.

Искомая вероятность равна

$$P(K|O\mathcal{E}) = \frac{1}{1} = 1 \neq P(K) = \frac{1}{2}$$

потому что, предположив заранее наличие огранки и эллиптичности, мы свели число возможных случаев к одному (только один валик имеет одновременно огранку и эллиптичность), а число благоприятных случаев оказалось также равным единице (единственный валик, имеющий одновременно огранку и эллиптичность, имеет вместе с этим и конусность).

Аналогично этому можно было бы подсчитать, что условные вероятности событий $O|K\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}|KO$

$$P(O|K\mathcal{E}) = P(\mathcal{E}|KO) = 1 \neq P(O) = P(\mathcal{E}) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, хотя события K, O и \mathcal{E} попарно независимы, но они в то же время не являются независимыми в совокупности.

Из правила умножения в свою очередь следует, что если события A_1, A_2, \dots, A_s независимы в совокупности, то из формул (2.2.20) и (2.2.21) вытекает:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_s) = P\left(\prod_{i=1}^s A_i\right) = \prod_{i=1}^s P(A_i), \quad (2.2.22)$$

т. е. *вероятность совместного наступления нескольких независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей (безусловных) этих событий.*

Так как, вообще говоря, каждая из вероятностей $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_s)$ меньше единицы, то вероятность совместного наступления нескольких событий уменьшается с увеличением числа этих событий.

Пример 2.2.9. Пусть при испытании оптиметра на стабильность показаний вероятность получения отсчета в плюс от нулевого штриха при однократном арретировании наконечника равна 0,5. Требуется вычислить вероятность того, что при трехкратном арретировании два раза будет получен отсчет в плюс (событие M).

Обозначим через A событие, заключающееся в получении отсчета в плюс при первом арретировании, через B — в получении такого отсчета при втором и через C — при третьем арретировании.

Так как при любом порядковом номере арретирования вероятность «плюсового» отсчета равна 0,5 независимо от результатов остальных арретирований, то события A, B и C являются независимыми в совокупности.

Событие M подразделяется на три частных случая

$$M = ABC\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC.$$

Потому, применяя теорему сложения, получим:

$$P(M) = P(ABC\bar{C}) + P(A\bar{B}C) + P(\bar{A}BC).$$

С другой стороны, каждая тройка событий $ABC\bar{C}, A\bar{B}C$ и $\bar{A}BC$ состоит из событий, независимых в совокупности, так как относится к последовательным независимым испытаниям. Поэтому искомая вероятность $P(M)$ будет равна

$$P(M) = P(ABC\bar{C}) + P(A\bar{B}C) + P(\bar{A}BC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) + P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) + P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 3 \cdot 0,125 = 0,375.$$

2.2.7. Формула полной вероятности. Правила сложения и умножения вероятностей могут быть обобщены, и тогда мы получим формулу полной вероятности, которая относится к следующему случаю.

Если событие A может осуществиться лишь при условии, что произошло какое-нибудь событие B_i из числа несовместимых событий B_1, B_2, \dots, B_n , вероятности которых известны, и если, кроме того, известны условные вероятности

$$P(A | B_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то вероятность события A может быть подсчитана по следующей формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A | B_i). \quad (2.2.23)$$

Пример 2.2.10. Имеется шесть партий деталей следующего состава: две партии, имеющие по 2 детали с отклонениями в плюс от номинального размера и по 6 деталей в минус (состав B_1), три партии деталей, имеющие по 2 «плюсовых» и по 8 «минусовых» деталей (состав B_2), одна партия деталей, состоящая из 8 «плюсовых» и 2 «минусовых» деталей (состав B_3). Требуется определить

вероятность того, что из одной, выбранной наудачу партии будет вынута «плюсовая» деталь (событие A).

По формуле полной вероятности имеем:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3) = \\ &= \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{8} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{10} = \frac{19}{60}, \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} P(B_1) &= \frac{2}{6}, \quad P(B_2) = \frac{3}{6} \quad \text{и} \quad P(B_3) = \frac{1}{6}; \quad P(A|B_1) = \frac{2}{8}, \\ P(A|B_2) &= \frac{2}{10} \quad \text{и} \quad P(A|B_3) = \frac{8}{10}. \end{aligned}$$

Формула полной вероятности может быть выведена следующим образом. Так как по условию событие A может осуществиться, если только осуществится какое-нибудь одно из несовместимых событий B_1, B_2, \dots, B_n , то это значит, что событие A подразделяется на частные случаи AB_1, AB_2, \dots, AB_n (между собой несовместимые), т. е.

$$A = \sum_{i=1}^n AB_i.$$

На основании правила сложения получим:

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^n AB_i\right) = \sum_{i=1}^n P(AB_i).$$

Опираясь на правило умножения, каждое из слагаемых этой суммы можно представить в виде:

$$P(AB_i) = P(B_i) \cdot P(A|B_i).$$

Тогда окончательно получим:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A|B_i),$$

что и требовалось.

Часто события B_1, B_2, \dots, B_n , при которых только и может наступить событие A , называют *гипотезами* относительно A . Каждая гипотеза B_i сообщает A известную вероятность $P(A|B_i)$. В формуле полной вероятности учитывается возможность наступления события при любой из гипотез данного круга.

2.2.8. Формула вероятностей гипотез. Пусть, как и в 2.2.7, событие A может осуществиться тогда и только тогда, когда осуществляется какая-нибудь гипотеза B_i из числа n несовместимых гипотез B_1, B_2, \dots, B_n .

Тогда событие A подразделяется на частные случаи

$$A = \sum_{i=1}^n B_i A.$$

Безусловные вероятности гипотез B_1, B_2, \dots, B_n и условные вероятности $A|B_i$ предполагаются данными.

Если факт A наблюдался, то, естественно, возникает вопрос о том, как вероятна каждая из конкурирующих гипотез, при которых только и мог этот факт произойти.

Условная вероятность гипотезы B_i , вычисленная в предположении, что факт A имел место, определяется по формуле

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j) P(A|B_j)} \quad (2.2.24)$$

(мы применили в знаменателе правой части индекс j только потому, что индекс i нами уже использован в левой части и в числителе).

Эта формула называется *формулой вероятностей гипотез (Бейеса)*.

Пример 2.2.11. Имеется шесть партий деталей трех различных составов (B_1 , B_2 и B_3), как это указано в условии примера 2.2.10. Пусть теперь из одной, выбранной наудачу партии взята одна деталь и она оказалась «плюсовой», т. е. факт A сошелся. Требуется определить при этом условии вероятности того, что деталь вынута из партии первого состава — $P(B_1|A)$, второго состава — $P(B_2|A)$ и третьего состава — $P(B_3|A)$.

$$\begin{aligned}
 P(B_1|A) &= \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3)} = \\
 &= \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{8}}{\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{8} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{10}} = \frac{5}{19}, \\
 P(B_2|A) &= \frac{\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{10}}{\frac{5}{19}} = \frac{6}{19}
 \end{aligned}$$

и

$$P(B_3|A) = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{8}{10}}{\frac{5}{19}} = \frac{8}{19}.$$

Таким образом, произошла переоценка гипотез:

если $P(B_1) = \frac{1}{3}$, то $P(B_1|A) = \frac{5}{19}$,

если $P(B_2) = \frac{1}{2}$, то $P(B_2|A) = \frac{6}{19}$

и если $P(B_3) = \frac{1}{6}$, то $P(B_3|A) = \frac{8}{19}$.

Формула (2.2.24) выводится так: пусть событие A может осуществиться тогда и только тогда, когда осуществляется хотя бы одно какое-нибудь событие B_i из несовместимых событий B_1, B_2, \dots, B_n . Требуется найти вероятность B_i , если известно, что A произошло.

На основании определения условной вероятности имеем:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(A)}.$$

Используя формулу полной вероятности, находим:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j) P(A|B_j)},$$

что и требовалось.

§ 3. Общие принципы исчисления вероятностей

2.3.1. Ограниченность классического определения вероятности. Все изложенные нами до сих пор способы исчисления вероятностей были основаны на классическом определении вероятности.

Как уже указывалось в самом начале, классическое определение вероятности относится лишь к частному случаю, а именно к тому случаю, когда событие оказывается возможным подразделить на конечное число элементарных несовместимых исходов данного испытания.

Такая схема далеко не всегда имеет место на практике.

Более того, в большинстве практически важных случаев совсем не представляется возможным применить классическую схему равновероятных исходов в конечном числе и тем самым определить вероятность интересующих нас событий. Так дело обстоит во многих физических и естественно-научных приложениях теории вероятностей, в артиллерии, в технике и т. п. Например, не представляется возможным определенным образом наметить конечную группу элементарных равновероятных исходов при стрельбе по цели из орудия. Таким же образом обстоит дело при исследовании точности массового производства и осуществлении контроля качества продукции.

Уже простейший классический опыт с бросанием игральной кости не может быть исследован с точки зрения классического определения, если кость имеет неправильную форму — это не мешает, тем не менее, каждой из шести граней иметь определенную вероятность выпадать при бросании такой кости.

2.3.2. Общие принципы исчисления вероятностей. Классическое определение является явно неподходящим для тех случаев, когда возможные исходы испытания составляют бесконечное множество. Пусть, например, речь идет о возможных состояниях (принимаемых в результате испытания некоторой системой), которые описываются с помощью определенного числа параметров. Так, положение стрелки, вращающейся около некоторой оси, может быть охарактеризовано углом, который она образует с некоторым постоянным радиусом-вектором. Если в некотором опыте игла бросается на плоскость, разграфленную параллельными прямыми, то положение ее относительно параллелей определяется двумя параметрами: расстоянием от центра иглы до ближайшей параллели и углом θ , который игла образует с направлением параллелей (см. далее пример 2.3.2 и черт. 4). Если в другом опыте стержень ломается под действием удара в двух местах, то расстояния от левого конца стержня до точек излома его будут двумя параметрами, описывающими состояние стержня после испытания. Координаты точки попадания снаряда являются в артиллерии наиболее интересными параметрами, определяющими результат выстрела. Состояние массы газа из N молекул может быть описано, если известны $3N$ пространственных координат этих молекул и $3N$ составляющих скорости и т. д. Во всех этих случаях мы можем геометрически описывать состояния систем положением некоторой точки M , координатами которой являются значения параметров в «пространстве параметров данной системы».

Под пространством параметров здесь понимается «пространство» с числом измерений, равным числу параметров (которое, конечно, может быть больше трех).

Тогда область, в которой может в результате испытания находиться изображающая случайная точка, будет *областью возможных состояний системы*.

Если из области возможных состояний G выделить некоторую часть g , то попадание случайной точки в эту часть всей области G можно рассматривать как некоторое случайное событие — возможный результат испытания. Это случайное событие мы для простоты будем обозначать той же буквой g , а его вероятность $P(g)$.

Для того чтобы перейти к вероятности события, необходимо вероятностную меру связать с каждой частью g области G или по крайней мере с практически важными частями ее. Заметим, что, как ясно из предыдущего, вероятностную меру нельзя отождествлять с обычной геометрической мерой, совпадающей лишь в некоторых частных случаях, о которых будет сказано далее, с вероятностной мерой.

Вопрос о том, каким образом определяется вероятностная мера частей области G , не может быть решен в общем виде, так как всецело зависит от

физической природы явления. Тем не менее, вводимая мера, или вероятность, должна быть подчинена тем же принципам, которые мы установили, рассматривая классическое определение вероятности. Таких принципов в теории вероятностей не много: они сводятся к следующим трем положениям, характеризующим «вероятностную» меру:

1. Вероятность события (т. е. мера частных областей g , лежащих в пространстве параметров) есть неотрицательное число, $0 \leq P(g)$.

2. Вероятность достоверного события (т. е. мера всей области G) равна единице,

$$P(G) = 1.$$

3. Вероятность суммы несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий $P(\sum_{i=1}^s g_i) = \sum_{i=1}^s P(g_i)$ ($g_i g_k = V$):

$$P(g_1) + P(g_2) + \dots + P(g_s) + \dots = 1.$$

Этот последний принцип мы будем считать справедливым как для случая конечного числа, так и для счетного множества несовместимых событий.

Заметим, что *счетным множеством* называется такое множество, элементы которого могут быть занумерованы в некотором порядке и выписаны в последовательность $1, 2, 3, \dots$. В качестве примеров счетных множеств можно указать: множество четных чисел, множество полных квадратов и т. д.

Таковы аксиомы меры области в нашем пространстве параметров данной системы.

В частном случае, когда система может принимать конечное число равно-возможных состояний, т. е. в области G может иметь место конечное число равновероятных положений случайной точки M , мы приходим к классической схеме.

В самом деле, если всего в пространстве параметров имеется n равноправных положений E_1, E_2, \dots, E_n случайной точки, составляющих в этом случае всю область G возможных положений, то согласно 2-му принципу

$$P(G) = P(E_1 + E_2 + \dots + E_n) = 1.$$

С другой стороны, в силу 3-го принципа будем иметь:

$$P(E_1 + E_2 + \dots + E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n) = nP(E_1) = 1,$$

так как по условию все положения E_i случайной точки равновероятны.

Отсюда $P(E_1) = \frac{1}{n}$ и аналогично $P(E_i) = \frac{1}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Если интересующее нас событие A подразделяется на m исходов из числа всех n (т. е. мы рассматриваем часть всей области G , содержащую m определенных положений случайной точки), то

$$P(A) = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G} = \frac{m}{n},$$

где $\text{mes } g$ и $\text{mes } G$ — соответственно мера g и мера G .

В более сложном случае вероятностная мера может оказаться пропорциональной геометрической мере области.

Такой случай имеется во многих задачах на так называемые геометрические вероятности. В этих задачах рассматривается точка, брошенная так, что она может случайно совпасть с любой точкой данной области G в плоскости или пространстве.

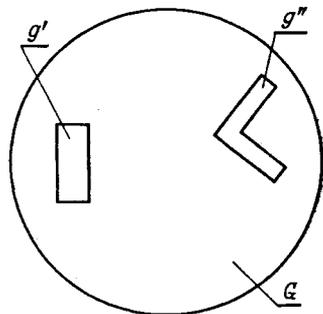
В области G выделяется ее часть g и спрашивается о вероятности попадания брошенной точки в g . При этом предполагается, что попадания брошенной точки в две части g' и g'' , имеющие одинаковую площадь (или объем), равновероятны независимо от положения и формы этих областей (черт. 2). Отсюда легко прийти к заключению, что вероятностная мера каждой части g пропорциональна ее площади (или объему). Поэтому мы можем написать в данном случае

$$P(g) = k \cdot \text{mes } g,$$

где под $\text{mes } g$ понимается мера объема, площади или длины, смотря по числу измерений рассматриваемой области, и k — коэффициент пропорциональности.

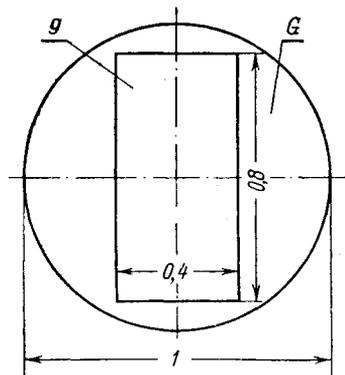
В частности, для всей области G мы должны иметь $1 = P(G) = k \cdot \text{mes } G$; отсюда $k = \frac{1}{\text{mes } G}$ и

$$P(g) = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G}. \quad (2.3.1) \quad \text{Черт. 2. Геометрические вероятности.}$$



Таким образом, в данном случае вероятность попадания в часть g определяется отношением геометрической меры (длины, площади или объема) этой части к геометрической мере всей области G .

Пример 2.3.1. Опытom установлено, что разметчик наносит точку в пределах круга диаметра 1 мм, причем все положения точки в пределах круга оказываются примерно равновероятными. Требуется найти вероятность события A , заключающегося в том, что точка окажется в пределах операционного допуска $\pm 0,2$ мм по горизонтали и $\pm 0,4$ мм по вертикали (черт. 3).



Черт. 3. Вероятность выполнения технических условий при разметке.

«Пространство параметров» в данном случае будет представлять собой координатную плоскость x, y . Случайная точка M здесь совпадает с точкой, наносимой разметчиком. Все возможные положения этой точки определяются кругом диаметра 1 мм, который и будет являться областью G , т. е. областью «возможных положений» точки.

Условия, при которых событие A совершается, в геометрической интерпретации сводятся к тому, чтобы точка оказалась в границах прямоугольника с основанием 0,4 мм и высотой 0,8 мм, который и будет являться частью g (области G), благоприятствующей появлению события A (черт. 3).

Поэтому, пользуясь формулой (2.3.1), находим:

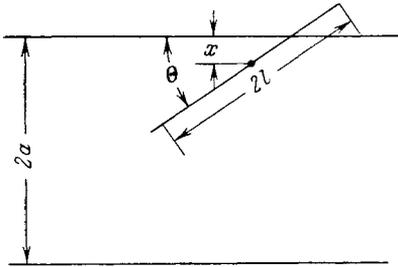
$$P(A) = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G} = \frac{\text{плоч. прямоуго.}}{\text{плоч. круга}} = 0,4 \cdot 0,8 : \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{0,32}{0,79} = 0,41.$$

Пример 2.3.2. Советскими инженерами предложен метод оценки зернистой структуры металла, основанный на использовании так называемой «задачи об игле» Бюффона.

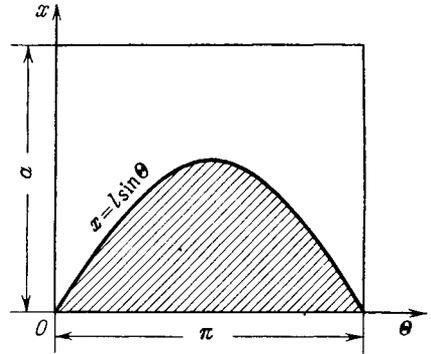
Задача эта заключается в следующем.

На плоскость нанесены параллельные прямые, отстоящие друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросается игла длиной $2l$ ($l < a$). Требуется найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь яму.

Обозначим через x расстояние от центра иглы до ближайшей параллели и через θ — угол, составленный иглой с направлением параллелей (черт. 4). У нас имеются два параметра x и θ . Пространство параметров будет представлять координатную плоскость $x\theta$. Случайной точкой M в данном случае будет центр иглы. Всевозможные положения иглы относительно параллели определяются точками прямоугольника со сторонами a и π , так как параллель может считаться ближайшей к точке нахождения центра иглы в том лишь случае, если $x \leq a$. С другой стороны, угол θ между иглой и параллелью, определяющий их пересечение, изменяется от 0 до π . Поэтому прямоугольник этот будет представлять область G возможных положений точки.



Черт. 4. Пересечение иглой, брошенной на плоскость, нанесенной на этой плоскости линии.



Черт. 5. Область возможных значений (прямоугольник) и область, благоприятствующая (заштрихованная) пересечению иглой линии.

Из черт. 4 видно, что для пересечения параллели иглой необходимо и достаточно, чтобы $x \leq l \sin \theta$. Поэтому в геометрической интерпретации условий, при которых событие A совершается, необходимо, чтобы точка попала в часть g всей области, ограниченную дугой синусоиды.

Искомая вероятность в силу сделанных предположений равна отношению площади, заштрихованной на черт. 5, к площади прямоугольника со сторонами a и π .

$$P(A) = \frac{1}{a\pi} \int_0^{\pi} l \sin \theta \, d\theta = \frac{2l}{a\pi}.$$

§ 4. Схема независимых испытаний и связанные с ней распределения вероятностей

2.4.1. Биномиальное распределение. Рассмотрим схему последовательных независимых испытаний, являющуюся одной из простейших и важнейших схем теории вероятностей.

Пусть производится серия последовательных испытаний, каждое из которых заканчивается одним из двух несовместимых между собой результатов: или событие A наступает или оно не наступает.

Вероятность события A не зависит от номера испытания, т. е. она остается постоянной во всей серии испытаний, причем, естественно, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Вместе с тем упомянутая выше независимость испытаний означает, что вероятность события A в каком-либо испытании данной серии не изменяется при условии, что результаты других испытаний становятся известными.

Эта схема впервые была рассмотрена Я. Бернулли. В этом случае в каждом испытании имеются два альтернативных исхода A и \bar{A} . В схеме Я. Бернулли обычно полагают

$$P(A) = P_1 = p \quad \text{и} \quad P(\bar{A}) = P_2 = q.$$

В данной схеме имеет место следующая закономерность.

Если вероятность события A постоянна в серии последовательных независимых испытаний и равна p , то вероятность $P(s, k)$ появления события A ровно k раз в этих s испытаниях будет

$$P(s, k) = C_s^k p^k q^{s-k} = \frac{s!}{k!(s-k)!} p^k q^{s-k}. \quad (2.4.1)$$

Поясним смысл формулы (2.4.1) на примере.

Пример 2.4.1. Пусть коэффициент использования некоторого станочного оборудования составляет 0,8. На производственном участке имеется пять таких станков. Требуется подсчитать вероятность того, что в некоторый произвольный момент времени в середине рабочей смены при нормальном ходе производства только два из них будут работать. Поскольку запуск одного станка в некоторый момент времени в этих условиях не зависит от работы других станков, причем каждый из работающих станков можно уподобить получению результата A при очередном последовательном испытании — проверке того, работает или не работает станок, то интересующая нас вероятность может быть подсчитана по формуле (2.4.1):

$$P(5, 2) = C_5^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^{5-2} = \frac{5!}{2!3!} 0,8^2 \cdot 0,2^3 \approx 0,05.$$

Отсюда следует, что при заданных условиях мы лишь с достаточно малой вероятностью можем встретить работу только двух станков, а, скажем, не четырех. Заметим, что действительное наблюдение событий, имеющих подобную или еще меньшую вероятность, может служить некоторым признаком отклонения от нормальных условий в самом интересующем нас процессе. Об этом будет подробно сказано в главе VI.

Выведем теперь формулу (2.4.1).

Рассмотрим серию из s независимых последовательных (повторных) испытаний, в результате каждого из которых может произойти некоторое событие A . Пусть известно, что в каждом испытании вероятность появления события A постоянна и равна p , т. е.

$$P(A) = p.$$

Требуется определить вероятность того, что в s испытаниях событие A произойдет ровно k раз и, следовательно, $s - k$ раз не произойдет.

Обозначим, как обычно, через \bar{A} событие, противоположное событию A , т. е. непоявление события A .

Возможные результаты испытания условимся записывать, ставя по порядку буквы A и \bar{A} , смотря по тому, появляется или не появляется событие A в последовательных испытаниях.

Таким образом, мы можем представить себе все возможные результаты последовательных s испытаний в виде серий чередующихся букв A и \bar{A} . Назовем благоприятными те серии букв A и \bar{A} , в которых буква A входит k раз, а буква \bar{A} $s - k$ раз.

В качестве первой серии можно рассмотреть ту благоприятную комбинацию, которая соответствует предположению, что сначала событие A происходит ровно k раз, а затем $s - k$ раз подряд не происходит. Обозначим ее через E_1 .

Остальные благоприятные комбинации — пусть их будет всего некоторое число l — назовем последующими и обозначим их через E_2, E_3, \dots, E_l .

Вычислим вероятность получения первой комбинации. Эту комбинацию можно рассматривать как совместное наступление независимых событий, заключающееся в том, что в $1, 2, 3, \dots, k$ -м испытании появляется событие A , а в $k + 1, k + 2, \dots, s$ -м испытании появляется событие \bar{A} .

Иными словами, событие

$$E_1 = \underbrace{AA \dots A}_{k \text{ раз}} \cdot \underbrace{\bar{A}\bar{A} \dots \bar{A}}_{s-k \text{ раз}}$$

Тогда вероятность первой комбинации в силу независимости испытаний на основании правила умножения вероятностей (2.2.22) будет равна

$$P(E_1) = \underbrace{pp \dots p}_{k \text{ раз}} \underbrace{qq \dots q}_{s-k \text{ раз}} = p^k q^{s-k}.$$

Так как в любой другой благоприятной комбинации событие A также встречается k раз и $s-k$ раз не встречается (хотя и в другом порядке), то и ее вероятность будет также равна $p^k q^{s-k}$ (произведение не меняется от изменения порядка сомножителей)

$$P(E_2) = P(E_3) = \dots = P(E_l) = \dots = p^k q^{s-k} = P(E_1).$$

Благоприятные комбинации (первая и все последующие) несовместимы, так как появление одной из них при s испытаниях исключает появление всех других при тех же s испытаниях. Поэтому на основании правила сложения (2.2.8) вероятность появления хотя бы одной из благоприятных комбинаций будет равна

$$P(s, k) = P(E_1 + E_2 + \dots + E_l) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_l).$$

Так как вероятности всех благоприятных комбинаций равны между собой и равны $p^k q^{s-k}$, то получим:

$$P(s, k) = l p^k q^{s-k}. \quad (2.4.1')$$

Каждая благоприятная комбинация вполне определяется указанием тех k номеров испытаний (из общего числа s), в которых происходит событие A . Эта группа k номеров, очевидно, составляет одно из возможных сочетаний из s различных номеров по k (порядок номеров не имеет значения). Следовательно, число l благоприятных комбинаций будет равно C_s^k . Подставив это значение в (2.4.1'), получим (2.4.1), что и требовалось.

Если считать число s испытаний постоянным, а числу появлений события A в серии из s испытаний придавать все возможные значения, которых, очевидно, $s+1$ ($k=0, 1, 2, \dots, s$), то вычисленные по формуле (2.4.1) вероятности для всех значений k будут равны последовательным членам разложения по формуле бинома Ньютона выражения $(p+q)^s$.

Так как $p+q=1$, то сумма этих членов разложения при любых значениях p и s будет всегда равна единице. Этот результат можно было предвидеть заранее потому, что события, заключающиеся в появлении возможных значений A , составляют полную группу.

Но такие события можно поставить в соответствие случайным величинам X_1 и X_2 , представляющим: X_1 — число появлений события A в серии s испытаний и X_2 — число неоявлений его в той же серии из s испытаний. Это один из примеров распределения вероятностей случайной величины, так называемое биномиальное распределение. О нем будет более подробно сказано в дальнейшем.

Происхождение этого названия ясно из предыдущего.

Распределение случайной величины и, в частности, биномиальное распределение изображают графически следующим образом.

По оси абсцисс откладывают значения, которые данная случайная величина может принять, и в полученных таким образом точках строят ординаты, высоты которых пропорциональны вероятностям получения случайной величиной соответствующих значений.

Пример 2.4.2. Требуется на основе условий примера 2.4.1 построить график распределения вероятностей числа работающих станков (из общего их числа в пять станков).

Наша случайная величина X представляет собой число работающих станков. Очевидно, что эта случайная величина может принять значения $X=0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Вероятность одного значения, а именно $X=2$, была вычислена в примере 2.4.1, она равна $P(X=2) \approx 0,05$.

Подсчитаем вероятности остальных значений по формуле (2.4.1):

$$P(X=0) \approx 0; \quad P(X=1) \approx 0,01;$$

$$P(X=3) \approx 0,20; \quad P(X=4) \approx 0,41$$

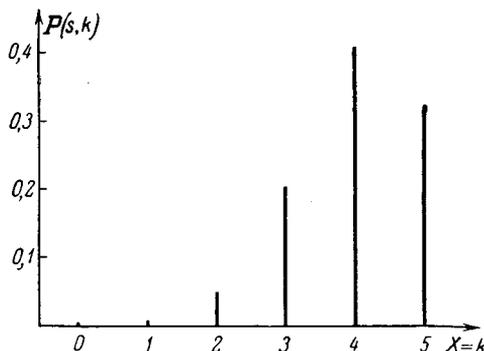
и

$$P(X=5) \approx 0,33.$$

Заносим их в табл. 2.4.1.

Таблица 2.4.1

X	0	1	2	3	4	5	Σ
$P(X=k)$	0	0,01	0,05	0,20	0,41	0,33	1,0



Черт. 6. График распределения вероятностей числа работающих станков из пяти станков участка (биномиальное распределение).

Теперь построим график распределения вероятностей (черт. 6).

2.4.2. Вероятнейшее число появлений события. *Вероятнейшим числом k_0* появлений события A при s последовательных независимых испытаниях называют такое число k (оно может быть не одно, их может быть два) появлений события A , которое при данном s имеет наибольшую вероятность. Это практически иногда важное число может быть найдено из таблицы вероятностей, подсчитанных по формуле (2.4.1) для данных условий, или по графику распределения вероятностей. Так, например, на черт. 6 наивероятнейшим числом k_0 работающих станков является число 4, так как оно имеет наибольшую вероятность $P(X=4) \approx 0,41$.

Для того чтобы определить вероятнейшее число, не прибегая к расчету таблицы распределения, и вместе с тем составить представление о характере изменения вероятности $P(s, k)$ при последовательных значениях k , проще всего найти отношение двух соседних членов $P(s, k)$ и $P(s, k-1)$. Для этого отношения получим:

$$\begin{aligned} \frac{P(s, k)}{P(s, k-1)} &= \frac{C_s^k p^k q^{s-k}}{C_s^{k-1} p^{k-1} q^{s-k+1}} = \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!} \frac{(k-1)!}{s(s-1)\dots(s-k+2)} \frac{p}{q} = \\ &= \frac{s-k+1}{k} \frac{p}{q} = \frac{p}{q} \left(\frac{s+1}{k} - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

При возрастании k это отношение убывает; его наибольшее значение получается при $k=1$ и равно $\frac{P(s, 1)}{P(s, 0)} = \frac{sp}{q}$, а наименьшее получается при $k=s$ и равно $\frac{P(s, s)}{P(s, s-1)} = \frac{p}{sq}$.

Если наибольшее значение $\frac{sp}{q}$ меньше единицы, т. е. $s < \frac{q}{p}$, то $P(s, k) < P(s, k-1)$ при любом k , т. е. члены биномиального распределения убывают

от начала к концу распределения. Обратная картина будет наблюдаться, когда наименьшее отношение $\frac{p}{sq}$ больше единицы, т. е. $s < \frac{p}{q}$; в этом случае $P(s, k) > P(s, k-1)$ при любом k и члены бинома возрастают вместе с k . В этих двух случаях вероятнейшие значения k будут отвечать соответственно крайним членам $k_0 = 0$ и $k_0 = s$; однако они могут реализоваться лишь при ограниченных значениях s . При $k = (s+1)p$ отношение (2.4.2) равно единице, при меньших k оно больше единицы, а при больших k меньше единицы.

Если произведение $(s+1)p$ не есть целое число, то $P(s, k)$ будут возрастать, когда k пробегает значения $0, 1, 2, \dots, k_0 = [(s+1)p]$, где символ $[(s+1)p]$ обозначает *целую часть* числа $(s+1)p$. При дальнейшем возрастании k от значения $k = k_0$ до $k = s$ вероятность $P(s, k)$ убывает. В этом случае вероятнейшее значение k отвечает значению

$$k_0 = [(s+1)p].$$

Наконец, если $(s+1)p$ равно целому числу k_0 , то $\frac{P(s, k_0)}{P(s, k_0-1)} = 1$; в этом случае в ряду вероятностей мы имеем два максимальных члена $P(s, k_0)$ и $P(s, k_0-1)$.

Заметим, что случай, когда $[(s+1)p] = 0$ реализуется при $(s+1)p < 1$, т. е. при $s < \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$, а случай $[(s+1)p] = s$ — при $s < \frac{p}{q}$, который мы исследовали раньше. Поэтому, резюмируя, мы можем сказать, что в биномиальном распределении вероятнейшее значение k отвечает одному значению $k_0 = [(s+1)p]$, если $(s+1)p$ — не целое число, или двум $k_0 = [(s+1)p]$ и k_0-1 , если $(s+1)p$ есть целое число. При значениях $k < (s+1)p$ вероятности $P(s, k)$ возрастают, а при $k > (s+1)p$ они убывают.

Возьмем два примера:

$$1) s = 4; p = \frac{2}{5} \text{ и } (s+1)p = 2.$$

Согласно предыдущему в этом случае мы имеем два вероятнейших числа: $k_0 = 2$ и $k_0 = 1$. В самом деле, пользуясь формулой (2.4.1), находим:

$$P(4, 0) = \frac{81}{625}; P(4, 1) = P(4, 2) = \frac{216}{625}; P(4, 3) = \frac{96}{625} \text{ и } P(4, 4) = \frac{16}{625}$$

Мы видим, что действительно наибольшие вероятности отвечают значениям $k = 1$ и $k = 2$.

$$2) s = 5; p = \frac{2}{5} \text{ и } (s+1)p = 2,4.$$

Согласно ранее сказанному $k_0 = 2$.

Пользуясь формулой (2.4.1), в этом случае получаем:

$$P(5, 0) = \frac{243}{3125}; P(5, 1) = \frac{810}{3125}; P(5, 2) = \frac{1080}{3125};$$

$$P(5, 3) = \frac{720}{3125}; P(5, 4) = \frac{240}{3125} \text{ и } P(5, 5) = \frac{32}{3125}.$$

Таким образом, на самом деле наибольшая вероятность отвечает значению $k = 2$.

2.4.3. Распределение Пуассона. Во многих важных случаях, когда имеют дело с редко наступающими событиями, оказывается применимым для описания массового явления еще одно распределение, могущее быть поставленным в определенную связь с рассматриваемой схемой независимых испытаний. К этому распределению мы подходим следующим образом. Пусть в некоторой области T , наиболее распространенным примером которой служит просто период времени, случайным образом и независимо друг от друга появляется M «точек», каждую

из которых мы ассоциируем с появлением некоторого события A . Обозначим через a среднее число точек, появляющихся в единицу времени; тогда, очевидно,

$$M = aT.$$

Нас интересует вероятность появления ровно m точек за промежуток времени t , представляющий часть периода T , причем мы имеем основания сделать следующие допущения.

Появление M точек мы будем рассматривать как M последовательных независимых испытаний, причем вероятность каждой точке появиться в промежутке времени t равна

$$p = \frac{t}{T}.$$

Тогда на основании (2.4.1) получим для любого числа m точек:

$$\begin{aligned} P(M, m) &= C_M^m p^m q^{M-m} = \frac{M!}{m!(M-m)!} p^m q^{M-m} = \\ &= \frac{M(M-1)\dots(M-m+1)}{m!} \left(\frac{t}{T}\right)^m \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{M-m}, \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

где $q = 1 - p$.

Заменяя M через aT , будем иметь:

$$\begin{aligned} P(M, m) &= \frac{aT(aT-1)(aT-2)\dots(aT-m+1)}{m!} \left(\frac{t}{T}\right)^m \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{aT-m} = \\ &= \frac{(aT)^m}{m!} \left(1 - \frac{1}{aT}\right) \left(1 - \frac{2}{aT}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{aT}\right) \left(\frac{t}{T}\right)^m \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{aT-m} = \\ &= \frac{(at)^m}{m!} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{aT-m} R_T, \end{aligned}$$

где

$$R_T = \left(1 - \frac{1}{aT}\right) \left(1 - \frac{2}{aT}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{aT}\right).$$

Если теперь T устремится к бесконечности, то R_T устремится к единице, тогда как пределом $\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{aT-m}$ при $T \rightarrow \infty$ будет e^{-at} .

Поэтому оказывается

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P(M, m) = \frac{(at)^m e^{-at}}{m!} = P(m). \quad (2.4.4)$$

Распределение величины X , принимающей целые значения ($m = 0, 1, 2, \dots$) с вероятностями $P(m)$ (2.4.4), называется *распределением Пуассона*.

Часто произведение at (среднее число появлений события A за время t) обозначают символом λ и тогда закону распределения Пуассона придается вид

$$P_\lambda(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}. \quad (2.4.5)$$

Заметим, что сумма вероятностей всех значений $X = m$ будет равна единице, каково бы ни было λ . В самом деле, как известно из анализа,

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^\lambda,$$

откуда

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = 1.$$

Вычисление вероятностей по формуле (2.4.5) представляет некоторые неудобства.

Для облегчения вычислений применяются таблицы вероятностей $P_\lambda(m)$.

Такой таблицей является, в частности, табл. I приложений. В ней приведены вероятности $P_\lambda(m)$ для значений λ от 0,1 до 20. Значения m табл. I доведены до таких пределов, вероятность превышения которых ничтожно мала. Поэтому сумма вероятностей чисел m , отвечающих приведенным в табл. I значениям m , практически равна единице. Табл. I будет нами использоваться далее при решении соответствующих примеров.

Часто при решении задач, наряду с вероятностью $P_\lambda(m)$, требуется определять еще интегральную вероятность

$$P_\lambda(m \geq k) = \sum_{m=k}^{m=\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad (2.4.6)$$

т. е. вероятность того, что событие A произойдет не менее k раз.

Эти вероятности приведены в табл. II приложений для значений λ от 0,1 до 20 и для таких значений k , для которых интегральные вероятности (2.4.6) не менее $1 \cdot 10^{-5}$. Примером явлений, следующих закону Пуассона, могут служить: радиоактивный распад, телефонные соединения, станки, требующие экстренного ремонта, и т. д.

Пусть, например, среднее число вызовов дежурной бригады ремонтников на некоторый производственный участок составляет 600 за год при двухсменной работе при 300 рабочих днях в году, причем условия распределения Пуассона предполагаются выполненными. Требуется подсчитать вероятность двух вызовов ремонтников на данный участок за одну и ту же смену.

Общая продолжительность работы участка за год (считая продолжительность смены $t = 8$ часов) составляет:

$$T = 300 \cdot 16 = 4800 \text{ часов.}$$

Среднее число вызовов в час равно

$$a = \frac{M}{T} = \frac{600}{4800} = \frac{1}{8}.$$

Тогда

$$\lambda = at = \frac{1}{8} \cdot 8 = 1,$$

и по формуле (2.4.5) мы получаем:

$$P_1(2) = \frac{1^2 \cdot e^{-1}}{2!} = \frac{1}{2 \cdot 2,72} \approx 0,184.$$

Приведем еще два примера.

Пример 2.4.3. Пусть требуется определить вероятность попадания за пределы контрольных границ не менее 2 деталей из пробы в 5 деталей, если автомат, из продукции которого берутся пробы, обрабатывает 2 детали в минуту и за смену в его продукции оказывается 38 деталей, выходящих по своим размерам за контрольные границы. Предполагается возможным использовать закон Пуассона.

В среднем в одну минуту за пределами контрольных границ оказывается

$$a = \frac{38}{480} \approx 0,08 \text{ детали.}$$

Промежуток времени, за который будет обработана на автомате проба, равен

$$t = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ мин., } \lambda = at = 0,08 \cdot 2,5 = 0,2.$$

Тогда по формуле (2.4.5) получаем:

$$P_{0,2}(m) = \frac{0,2^m e^{-0,2}}{m!}.$$

Искомая вероятность представляет собой интегральную вероятность, т. е. сумму вида

$$\sum_{m=2}^5 \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

По табл. II приложений при $\lambda = 0,2$ и $k = 2$ находим:

$$\sum_{m=2}^5 \frac{0,2^m e^{-0,2}}{m!} = 1,7523 \cdot 10^{-2} = 0,0175.$$

Формула Пуассона может быть использована как приближенная в условиях схемы независимых испытаний, как это видно из (2.4.3) и (2.4.4), когда точное распределение бывает биномиальным. Переход к распределению Пуассона в этом случае значительно упрощает вычисления. Такой переход бывает законным всякий раз, когда при большом числе испытаний s вероятность p появления события A бывает порядка малости $\frac{1}{s}$ или $p \ll 0,1$ (т. е. событие редко появляется), однако среднее число появлений за длинную серию испытаний, равное

$$\lambda = sp,$$

не мало, но и не велико. В табл. 2.4.2 даются сравнения значений вероятностей, вычисленных по формулам (2.4.5) при $\lambda = 1$ и (2.4.1) при $s = 100$ и $p = \frac{1}{100}$. Сравнение показывает, что приближение является достаточно хорошим.

Таблица 2.4.2

k	$P(100, k)$	$P_1(k)$
0	0,366032	0,367879
1	0,369730	0,367879
2	0,184865	0,183940
5	0,002898	0,003066
9	0,000001	0,000001

Пример 2.4.4. Пусть при приемочном контроле из партии в 1000 штук изделий производится безвозвратная выборка объема 50 штук и требуется определить вероятность того, что в выборке не окажется дефектных изделий, если во всей партии содержится 4 дефектных изделия. Точное значение этой вероятности определяется по формуле (2.2.7) в виде

$$P_{1000,4}(50, 0) = \frac{C_{996}^{50}}{C_{1000}^{50}} = \frac{996! 50! 950!}{50! 946! 1000!} = \frac{950 \cdot 949 \cdot 948 \cdot 947}{1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 997} = 0,814.$$

Вычисление по этой формуле довольно громоздко.

Приближенное значение искомой вероятности можно получить по формуле (2.4.5) Пуассона. Здесь $a = \frac{4}{1000} = 0,004$, $t = 50$ и $\lambda = 0,004 \cdot 50 = 0,2$, поэтому

$$P_{1000,4}(50, 0) \approx P_{\lambda}(0) = \frac{0,2^0 \cdot e^{-0,2}}{0!} = 0,819.$$

Вероятность эту мы берем по табл. I приложений при $\lambda = 0,2$ и $k = 0$.

Ошибка при пользовании асимптотической формулой (2.4.5) в нашем примере составила около 0,6%. Ошибка всегда получается небольшой, когда p одного порядка с $\frac{1}{s}$. В нашем примере $p = \frac{4}{1000} = 0,004$, а $\frac{1}{s} = \frac{1}{50} = 0,020$, т. е. являются величинами одного порядка.

При аналогичном условии ($\frac{K}{S} = p$ — мало, менее 0,1, sp — ни мало, ни велико) формула Пуассона может быть использована для приближенного вычисления вероятностей гипергеометрического распределения (см. пример 3.1.1).

Еще одна интерпретация закона Пуассона будет дана в специальной части этой книги в связи с теорией вероятностных процессов.

2.4.4. Уточнение формулы Пуассона. Формула (2.4.5) Пуассона в случае биномиального распределения, как мы указывали в 2.4.3, дает достаточно точные результаты при сравнительно больших s и малых p ; в противном случае вычисление по этой формуле приводит к значительной погрешности. Чтобы получить более точное приближение, можно использовать «уточненную» формулу Пуассона, предложенную А. Н. Колмогоровым. Вероятность $P_\lambda(m)$ появления события m раз ($m \geq 2$) в этом случае определяется следующим приближенным равенством:

$$P_\lambda(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} - \frac{b}{2} \frac{\lambda^{m-2} e^{-\lambda}}{(m-2)!} \left(\frac{\lambda^2}{(m-1)m} - \frac{2\lambda}{m-1} + 1 \right). \quad (2.4.7)$$

Эта формула применима и в тех случаях, когда вероятности появления события A в отдельных независимых между собой испытаниях различны, изменяясь по величине от испытания к испытанию. При этом, обозначая через p_i вероятность появления события A в i -м по порядку испытанию, полагаем:

$$\lambda = p_1 + p_2 + \dots + p_s,$$

$$b = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_s^2.$$

В частном случае, когда имеем:

$$p_1 = p_2 = \dots = p_s = p,$$

$$\lambda = sp \quad \text{и} \quad b = sp^2.$$

Вычисление вероятностей значительно упрощается при $m < 2$. Так, например, при $m = 1$ будем иметь:

$$P_\lambda(1) = e^{-\lambda} \left(\lambda - \frac{b(\lambda-2)}{2} \right)$$

и при $m = 0$

$$P_\lambda(0) = e^{-\lambda} \left(1 - \frac{b}{2} \right).$$

Пусть теперь для примера $s = 5$, $p = 0,3$. Тогда

$$\lambda = sp = 5 \cdot 0,3 = 1,5 \quad \text{и} \quad b = 5 \cdot 0,3^2 = 0,45.$$

Обозначим через P_m вероятность, вычисленную по формуле (2.4.1), через P'_m — вероятность, вычисленную по формуле (2.4.5), и через P''_m — вероятность, вычисленную по формуле (2.4.7).

Результаты вычислений сведены в табл. 2.4.3.

Таблица 2.4.3

m	P_m	P'_m	$P_m - P'_m$	$P_m - P'_m$ в % к P_m	P''_m	$P_m - P''_m$	$P_m - P''_m$ в % к P_m
0	0,16807	0,22313	-0,05506	- 32,8	0,17293	-0,00486	- 2,9
1	0,36015	0,33470	+ 0,02545	+ 7,1	0,35980	+ 0,00035	+ 0,1
2	0,30870	0,25102	+ 0,05768	+ 18,7	0,29495	+ 0,01375	+ 4,5
3	0,13230	0,12551	+ 0,00679	+ 5,1	0,13492	- 0,00267	- 2,0
4	0,02835	0,04707	- 0,01872	- 66,0	0,03648	- 0,00813	- 28,7
5	0,00243	0,01412	- 0,01169	- 481,1	0,00388	- 0,00145	- 59,7

Из табл. 2.4.3 видно, что при пользовании формулой (2.4.7) погрешность получается в 2,5–70 раз меньшей, чем при пользовании асимптотической формулой (2.4.5).

ГЛАВА III

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

§ 1. Законы распределения случайных величин

3.1.1. Распределение дискретной случайной величины. В начале II главы мы уже упоминали о случайной величине как о переменной, могущей принять в результате испытания то или иное числовое значение в зависимости от случайного исхода испытания. Теперь мы из различных типов случайных величин выделим:

- 1) дискретные случайные величины и
- 2) непрерывные случайные величины.

Дискретными случайными величинами называются такие, которые могут принимать лишь конечное или счетное множество значений. В машиностроении чаще всего встречаются простейшие из дискретных величин, могущие принимать лишь изолированные, большей частью целочисленные значения и не могущие принимать значения, промежуточные между ними.

Непрерывные случайные величины в отличие от дискретных величин могут принимать любые значения в границах известного интервала.

В качестве примеров дискретных случайных величин из области техники можно, в частности, привести следующие:

- 1) число деталей, выходящих по своим размерам за контрольные границы, в пробе из n штук при статистическом методе контроля качества продукции;
- 2) число испытаний с определенным эффектом при проведении эксперимента (разрушение образца и т. п.).

Весьма часто мы приходим к случайным величинам следующим образом. Пусть мы рассматриваем испытание с некоторой полной группой S' элементарных и несовместимых исходов E так, что каждое событие может быть представлено как сумма некоторых из этих исходов. Пусть теперь каждому элементарному исходу поставлено в соответствие число X , другими словами, на множестве S' определена функция $X(E)$ случайного события.

Эта функция и будет случайной величиной.

Так, например, если мы из партии деталей в S штук, среди которых K деталей имеют отклонения в плюс от номинального размера, производим безвозвратную выборку в s штук, то в каждом испытании у нас может быть C_s^k элементарных равновероятных и несовместимых исходов (C_s^k — число сочетаний из S элементов по s), как это мы видели при рассмотрении задачи о статистической безвозвратной выборке.

Если теперь каждому элементарному исходу E поставить в соответствие число X «плюсовых» деталей, оказавшихся в выборке, то, очевидно, мы получим функцию $X(E)$ от случайного события (исхода).

Заметим, что для каждого значения $X=0, 1, 2, \dots, s$ этой случайной величины мы ранее подсчитали вероятность его получения при условиях выборки.

$$\text{Именно } P(X=k) = \frac{C_K^k C_{S-K}^{s-k}}{C_S^s}.$$

Точно так же мы могли поставить в соответствие каждому элементарному исходу E не число X «плюсовых» деталей, а какое-нибудь другое число, например, число $Y = s - k$ «минусовых» деталей и т. п. Тогда мы имели бы другую случайную величину Y , также являющуюся функцией исходов нашего испытания.

Для того чтобы задать дискретную случайную величину, нужно задать последовательность всех ее возможных значений x_1, x_2, \dots, x_n и вероятности P_1, P_2, \dots, P_n того, что она будет принимать эти значения, т. е. вероятности событий $X = k$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Она может быть задана, например, таблицей распределения вероятностей в виде (табл. 3.1.1):

Таблица 3.1.1

X	x_1	x_2	...	x_n	
$P(X = x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$...	$P(x_n)$	$\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1$

Сумма вероятностей всех значений случайной величины равна 1, так как события $X = k$ представляют полную группу несовместимых событий, а сумма вероятностей всех событий, между которыми распределены элементарные исходы нашего основного множества, как мы видели ранее, равна единице. Мы можем представить сейчас наглядно распределение вероятностей случайной величины X как распределение некоторой массы, равной единице, в точках оси x с абсциссами x_1, x_2, \dots, x_n , причем в этих точках соответственно помещены массы, равные P_1, P_2, \dots, P_n , в сумме составляющие единицу.

Зная таблицу распределения, легко подсчитать, какова вероятность попадания величины в любые заданные границы, какова вероятность ее значений, не превышающих заданный предел, и т. п.

Обозначим, например, через X число появлений события A в s последовательных, независимых испытаниях, производимых по схеме Я. Бернулли, т. е. при постоянной в каждом испытании вероятности p .

Тогда X будет дискретной случайной величиной, принимающей значения $0, 1, 2, \dots, x, \dots, s$; при этом

$$P(X = x) = P(x) = P(s, x) = C_s^x p^x q^{s-x}.$$

При такой зависимости $P(x)$ от x говорят, что случайная величина имеет *биномиальное распределение*.

Легко убедиться, что сумма вероятностей всех возможных в каждом испытании значений случайной величины X равна единице. Например, если $s = 5$ и $p = \frac{1}{2}$, то может быть составлена следующая таблица распределения вероятностей (табл. 3.1.2):

Таблица 3.1.2

$X = x$	0	1	2	3	4	5	
$P(x)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\sum_{i=1}^n P(x_i) = \frac{32}{32} = 1$

График распределения вероятностей для данных условий будет иметь вид, показанный на черт. 7; s и p — параметры данного распределения, т. е. постоянные для данных условий величины; следовательно, биномиальное распределение является двухпараметрическим.

Пример 3.1.1. Обозначим теперь через X число «плюсовых» деталей в безвозвратной выборке объема (т. е. численностью) 10 штук из партии в 200 штук деталей, из которых 26 штук «плюсовых».

Тогда X будет дискретной случайной величиной, принимающей значения 0, 1, 2, ..., 10 с вероятностями, подсчитываемыми по формуле

$$P_{200, 26}(10, k) = \frac{C_{26}^k C_{174}^{10-k}}{C_{200}^1}$$

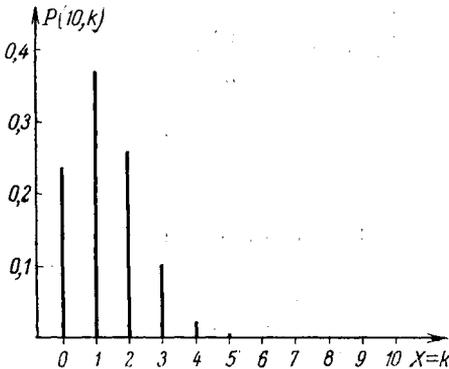
При такой зависимости $P(x)$ от $x = k$ говорят, что случайная величина имеет гипергеометрическое распределение.

Таблица распределения вероятностей для данных условий будет иметь вид (табл. 3.1.3):

Таблица 3.1.3

$X = k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(k)$	0,24	0,38	0,26	0,10	0,02	0	0	0	0	0	0

График распределения вероятностей для этих же условий будет иметь вид, показанный на черт. 8. s , p , S — параметры данного распределения. Следовательно, гипергеометрическое распределение зависит от трех параметров.



Черт. 8. График распределения вероятностей дискретной случайной величины, имеющей гипергеометрическое распределение ($p = 0,13$; $s = 10$; $S = 200$).

Черт. 7. График распределения вероятностей дискретной случайной величины, имеющей биномиальное распределение ($p = \frac{1}{2}$, $s = 5$).

Черт. 7. График распределения вероятностей дискретной случайной величины, имеющей биномиальное распределение

$$\left(p = \frac{1}{2}, s = 5\right).$$

Пример 3.1.2. Пусть случайная величина X принимает значения

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

с вероятностями $P(X = m)$

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

где λ — положительное число.

Распределение, задаваемое указанной формулой, носит название *распределения Пуассона или распределения редких событий*. Этому распределению следует, в частности, как мы уже упоминали, радиоактивный распад.

Пусть, например, нам требуется подсчитать в условиях примера 3.1.1 вероят-

ность того, что в выборке из 10 штук будет не больше двух «плюсовых» деталей. Эту вероятность мы легко находим, используя табл. 3.1.3 распределения; она равна $P(X \leq 2) = 0,24 + 0,38 + 0,26 = 0,88$.

Если произвести длинную серию из N независимых испытаний, в каждом из которых величина X принимает одно из возможных для нее значений, и подсчитать затем частоты $\omega_1 = \frac{k_1}{N}$, $\omega_2 = \frac{k_2}{N}$, ..., $\omega_n = \frac{k_n}{N}$ реализовавшихся при этих испытаниях значений x_1, x_2, \dots, x_n , то мы получим эмпирическую таблицу распределений частот, аналогичную табл. 3.1.1 распределения вероятностей. По свойству вероятностей таблица частот будет приближенно воспроизводить распределение вероятностей с тем большей точностью, чем большее число испытаний было произведено.

Так, например, в известном опыте Розерфорда, Чедвика и Эллиса радиоактивное вещество наблюдали в течение $N = 2608$ промежутков времени, каждый длиной в 7,5 сек., и для каждого интервала регистрировали число частиц, достигших счетчика. В табл. 3.1.4 приведены во втором столбце результаты этих наблюдений, в третьем столбце — отвечающие им частоты, а в четвертом — вероятности, подсчитанные по формуле Пуассона, причем параметр λ , представляющий среднее число частиц за промежуток времени $t = 7,5$ сек., был равен

$$\lambda = \frac{10\,094}{2608} = 3,870,$$

где 10 094 — общее число частиц. Мы видим, что, действительно, здесь частоты лишь незначительно отличаются от вероятностей; это становится понятным, если принять во внимание значительное число наблюдений (2608).

Таблица 3.1.4

Радиоактивный распад

Число частиц, достигших счетчика	Число наблюдений, в которых такое число частиц имело место	Частость данного числа частиц	Вероятность
0	57	0,022	0,021
1	203	0,078	0,081
2	383	0,147	0,156
3	525	0,201	0,201
4	532	0,204	0,195
5	408	0,156	0,151
6	273	0,105	0,097
7	139	0,053	0,054
8	45	0,017	0,026
9	27	0,010	0,011
$m \geq 10$	16	0,006	0,007
Итого	2608	0,999	1,000

3.1.2. Непрерывные случайные величины. Интегральная функция распределения и плотность вероятности. Квантили. Кроме рассмотренных нами дискретных случайных величин, определяемых таблицей распределения, на практике обычно встречаются еще такие случайные величины, которые могут принимать любые значения в некотором интервале. Эти величины, как мы уже упоминали, называются *непрерывными*.

К числу непрерывных случайных величин относятся, например, следующие:

- 1) отклонения размеров деталей от номинального размера;
- 2) высота микропрофиля в данной точке поверхности;
- 3) погрешности измерения и т. п.

При описании распределения всякой непрерывной случайной величины мы сталкиваемся прежде всего с тем затруднением, что выписать в последовательность и занумеровать все ее значения, хотя бы лежащие в весьма узком интер-

вале, мы не можем. В наблюдениях же на практике такой величины, вследствие ограниченной точности измерений, мы получаем результат, в сущности указывающий лишь границы некоторого более или менее узкого интервала, внутри которого содержится ее значение.

Таким образом, в задании самой величины всегда имеется доля неопределенности: так, например, вряд ли имеет реальный смысл различать отклонения от номинального размера $+0,05$ мм и $+0,050007$ мм.

Получаемые в результате многократных измерений непрерывной величины таблицы распределения обычно указывают частоты попадания величины в смежные интервалы, на которые мы разбиваем весь диапазон ее измерения. Примером такой таблицы может служить следующая сводка данных о размерах обработанных на токарном автомате втулок (табл. 3.1.5).

Таблица 3.1.5

Интервалы в мм	Частота	Частость
7,897—7,899	1	0,003
7,899—7,901	3	0,008
7,901—7,903	6	0,017
7,903—7,905	27	0,075
7,905—7,907	35	0,097
7,907—7,909	48	0,133
7,909—7,911	68	0,189
7,911—7,913	68	0,189
7,913—7,915	33	0,092
7,915—7,917	36	0,100
7,917—7,919	27	0,075
7,919—7,921	5	0,014
7,921—7,923	3	0,008
Итого	360	1,000

Подобный прием мы можем использовать при любом непрерывном распределении. Однако такое табличное описание предполагает уже выбор определенной системы интервалов, что в известной степени зависит от нашего усмотрения и от точности измерений. Для того чтобы избежать этих затруднений в описании случайных величин, при их теоретическом изучении, мы вводим новое понятие — понятие *функции распределения*. Пусть x — какое-нибудь действительное число, а X — случайная величина. Рассмотрим событие $X < x$. Пусть ему в нашем поле событий отвечает вероятность $P(X < x)$, являющаяся, очевидно, функцией x . Полагая

$$F(x) = P(X < x), \quad (3.1.1)$$

называют функцию $F(x)$ *функцией распределения* вероятностей случайной величины или *интегральной функцией распределения*.

Таким образом, *интегральная функция распределения определяет вероятность того, что случайная величина X при испытании примет значение, меньшее произвольно изменяемого действительного числа x ($-\infty < x < \infty$).*

Случайную величину мы будем считать заданной, если известна ее функция распределения.

Если величина дискретна и задана таблицей распределения вида 3.1.1, то функцию $P(X < x) = F(x)$ легко определить для каждого значения x , а именно $F(x)$ в этом случае представится суммой вероятностей тех значений X , которые лежат влево от точки x .

Рассмотрим свойства введенной нами функции распределения. Возьмем на оси абсцисс произвольную точку с абсциссой x_1 .

Ордината интегральной кривой распределения в данной точке x_1 представляет собой вероятность случайного события, заключающегося в том, что значение случайной величины X при испытании окажется меньше x_1 , т. е.

$$F(x_1) = P(X < x_1).$$

Отсюда следует, что ордината на графике интегральной кривой всегда неотрицательна (как всякая вероятность), т. е.

$$F(x) \geq 0. \quad (3.1.2)$$

Так как вероятность не может быть больше единицы, то

$$0 \leq F(x) \leq 1. \quad (3.1.3)$$

Возьмем теперь на оси абсцисс вторую точку с абсциссой $x_2 (x_2 > x_1)$. Ордината интегральной кривой в точке x_2 аналогично предыдущему будет

$$F(x_2) = P(X < x_2).$$

Найдем вероятность того, что случайная величина X при испытании окажется в границах от x_1 до x_2 (включая x_1 и исключая x_2), т. е. вероятность $P(x_1 \leq X < x_2)$.

Очевидно, что событие $X < x_2$ подразделяется на два частных случая: $X < x_1$ и $x_1 \leq X < x_2$.

Тогда на основании правила сложения вероятностей получим:

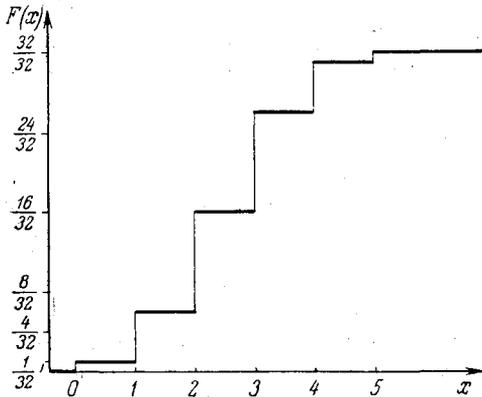
$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2),$$

откуда

$$P(x_1 \leq X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1), \quad (3.1.4)$$

т. е. вероятность того, что случайная величина X при испытании окажется в границах от x_1 до x_2 равна приращению интегральной функции распределения на этом участке, а так как вероятность неотрицательна, то $F(x)$ будет неубывающей функцией.

Заметим теперь, что в том случае, когда все возможные значения величины X лежат на каком-либо отрезке (a, b) , то мы будем иметь, очевидно,



Черт. 9. График интегральной функции распределения дискретной случайной величины, следующей биномиальному закону.

равенства $F(x) = 0$ при $x \leq a$ и $F(x) = 1$ при $x > b$, так как, с одной стороны, значения X , меньше a , невозможны и, с другой стороны, достоверно, что все значения X не больше b .

В общем случае, когда величина может быть неограниченной, мы будем иметь следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} F(-\infty) &= \lim_{n \rightarrow -\infty} F(-n) = 0, \\ F(+\infty) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.5)$$

Таким образом, предельное значение функции распределения при $x = -\infty$ равно нулю, а при $x = +\infty$ равно единице.

В случае дискретной величины вероятность $P(X < x) = F(x)$ увеличивается скачками всякий раз, когда x при своем изменении проходит через одно из возможных значений x_k величины X . Между двумя соседними значениями величины X функция $F(x)$ постоянна. Поэтому графиком функции $F(x)$ в этом случае будет ступенчатая кривая вида, указанного на черт. 9.

Этот график отвечает табл. 3.1.2 распределения вероятностей. Случайная величина X здесь может принимать шесть дискретных значений: 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Ординаты кривой функции $F(x)$ в этих точках скачками возрастают на величины соответствующих вероятностей, т. е. на $\frac{1}{32}, \frac{5}{32}, \frac{10}{32}, \frac{10}{32}, \frac{5}{32}$ и $\frac{1}{32}$.

В практически важных случаях интегральная функция распределения непрерывной величины будет дифференцируемой функцией. График интегральной функции в этом случае не будет иметь скачков и представляет монотонно возрастающую кривую, имеющую касательную в каждой точке (черт. 10).

Возьмем на оси произвольные точки x_0 и $x_0 + \Delta x$. Ординаты функции в этих точках будут $F(x_0)$ и $F(x_0 + \Delta x)$.

Для приращения функции $F(x)$ на участке от x_0 до $x_0 + \Delta x$ согласно (3.1.4) имеем:

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = P(x_0 \leq X < x_0 + \Delta x).$$

Если представим теперь, что Δx стремится к нулю, то разность $F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$ также будет стремиться к нулю ($F(x)$ непрерывна в точке x_0) и в силу очевидного неравенства

$$0 \leq P(X = x_0) < P(x_0 \leq X < x_0 + \Delta x)$$

будем иметь:

$$P(X = x_0) = 0. \quad (3.1.6)$$

Таким образом, вероятность того, что непрерывная случайная величина X при испытании окажется в точности равной произвольному действительному числу x_0 , равна нулю.

Это обстоятельство связано с тем, что при непрерывных распределениях, как мы видим, имеет физический смысл рассматривать вероятности не отдельных значений величины, а лишь вероятности попадания ее в любые заданные (хотя теоретически и сколь угодно узкие) границы.

На основании равенств (3.1.4) и (3.1.6) вероятность попадания в интервал будет

$$P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a). \quad (3.1.4')$$

Первая производная от интегральной функции называется *дифференциальной функцией распределения* или *плотностью вероятности*. Условимся обозначать ее через $\varphi(x)$.

По определению производной имеем:

$$\varphi(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

и на основании равенства (3.1.4') будем иметь:

$$\varphi(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x}. \quad (3.1.7)$$

Из (3.1.7) следует, что *плотность вероятности $\varphi(x)$ есть предел отношения вероятности того, что случайная величина X при испытании примет значение, лежащее в границах от x до $x + \Delta x$, к величине интервала Δx , когда величина Δx стремится к нулю.*

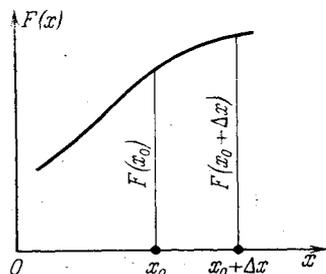
Происхождение термина «плотность вероятности» делается понятным, если учесть наглядное представление распределения вероятностей случайной величины X в виде массы, равной единице, расположенной некоторым непрерывным образом вдоль оси x .

Так как $F(x)$ является первообразной функцией по отношению к $\varphi(x)$, то по формуле Ньютона-Лейбница, принимая во внимание формулу (3.1.4'), будем иметь:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (3.1.8)$$

Таким образом, вероятность того, что случайная величина X при испытании примет значение, лежащее в границах от a до b , равна определенному интегралу в пределах от a до b от плотности вероятности.

Очевидно, что на графике дифференциальной кривой распределения (плотности вероятности) вероятность $P(a \leq X < b)$ будет представлять площадь



Черт. 10. График интегральной функции распределения непрерывной случайной величины.

криволинейной трапеции с основанием от a до b , ограниченную сверху дифференциальной кривой распределения, как это следует из геометрической интерпретации определенного интеграла.

Из формулы (3.1.7) следует также, что при малом Δx

$$\Delta F(x) \approx \varphi(x) dx = dF(x)$$

и

$$\varphi(x) dx \approx \mathbf{P}(x \leq X < x + \Delta x). \quad (3.1.9)$$

Заметим, что плотность вероятности $\varphi(x)$ вовсе не представляет вероятности значения x . Размерность плотности вероятности является обратной размерности самой случайной величины X . Например, если случайная величина X задана в мм, то плотность вероятности будет иметь размерность $\frac{1}{\text{мм}}$.

Но из формулы (3.1.9) следует, что произведение $\varphi(x)\Delta x$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно Δx представляет вероятность попадания величины X в интервал $(x, x + \Delta x)$.

Из формулы (3.1.7) следует, что плотность вероятности $\varphi(x)$ неотрицательна, так как она представляет предел отношения неотрицательной величины $\mathbf{P}(x \leq X < x + \Delta x)$ к существенно положительной величине Δx . Итак,

$$\varphi(x) \geq 0. \quad (3.1.10)$$

Из формул (3.1.8) и (3.1.5) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1, \quad (3.1.11)$$

т. е. на графике дифференциальной функции распределения вся площадь, ограниченная осью абсцисс и дифференциальной кривой распределения, равна единице.

Из формул (3.1.1) и (3.1.8) следует также, что

$$F(x) = \mathbf{P}(X < x) = \mathbf{P}(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx. \quad (3.1.12)$$

Другими словами, интегральная функция распределения равна определенному интегралу от $-\infty$ до x от плотности вероятности, т. е. площади под кривой $\varphi(x)$ на этом участке оси x . Таким образом, знание функции $\varphi(x)$ равносильно знанию самой интегральной функции распределения $F(x)$.

Заметим еще, что

$$\mathbf{P}(X \geq x_0) = 1 - F(x_0) = 1 - \int_{-\infty}^{x_0} \varphi(x) dx = \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) dx. \quad (3.1.13)$$

Таким образом, площадь под кривой $\varphi(x)$ справа от ординаты $y_0 = \varphi(x_0)$ изображает вероятность превзойти заданный предел x_0 .

Вообще для произвольного множества A (например, для совокупности интервалов оси x) вероятность попадания в это множество в результате испытания выразится как интеграл по этому множеству

$$\int_A \varphi(x) dx.$$

Всякий раз, когда вероятность попадания величины X на произвольное множество (из достаточно широкого класса) определена, говорят, что задан закон распределения этой величины.

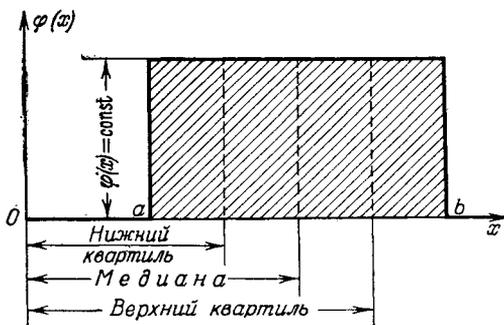
Для дискретной величины для задания закона распределения достаточно знать ее таблицу распределения. Для непрерывных величин закон распределения обычно задают с помощью плотности вероятности или функции распределения.

Поэтому плотность вероятности называют еще *дифференциальным законом распределения*, а функцию распределения — *интегральным законом распределения*.

При описании непрерывного распределения часто используют еще так называемые *квантили*. Квантилем, отвечающим заданному уровню вероятности p , называют такое значение $x = x_p$, при котором функция распределения принимает значение, равное p , т. е.

$$F(x_p) = p. \quad (3.1.14)$$

Некоторые квантили получили особые названия. Так, например, *медианой* распределения называют квантиль, отвечающий значению $p = \frac{1}{2}$; квантили, соответствующие значениям $p = \frac{1}{4}$ и $p = \frac{3}{4}$, называются *нижним и верхним квантилями*. Если положить $p = 0,90$; $0,95$ и т. д., то получим соответственно 90% , 95% и т. д. квантили. Эти квантили иногда называют также соответственно 10% , 5% и т. д. «верхними» точками данного распределения. Аналогично квантили, отвечающие значениям $p = 0,10$; $0,05$ и т. д., называют 10% , 5% и т. д. «нижними» точками распределения. Зная значения достаточного



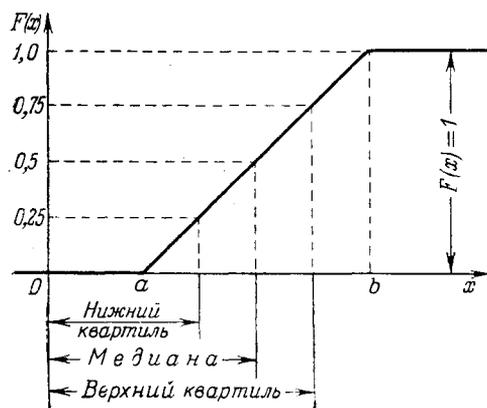
Черт. 11. График дифференциальной кривой распределения (плотности вероятности) величины, распределенной по закону равной вероятности.

числа квантилей, мы можем легко представить себе ход возрастания функции распределения.

Приведем несколько примеров.

Пример 3.1.3. Погрешности от округления до ближайшего целого деления при измерениях партии изделий подчиняются *закону равной вероятности* (равномерного распределения). Такое название носит закон распределения в том случае, когда плотность вероятности в данном отрезке (a, b) постоянна и равна нулю вне его.

График плотности вероятности для этого закона показан на черт. 11. Здесь случайная величина может принимать значения в пределах от a до b . Область, в которой возможны значения погрешности от округления, совпадает с интервалом — $0,5 \div +0,5$ цены деления измерительного инструмента. Постоянное значение плотности вероятности на отрезке (a, b) легко определить.



Черт. 12. График интегральной кривой равномерного распределения.

Из (3.1.11) следует, что площадь прямоугольника с основанием $b - a$ и высотой $\varphi(x) = c$ должна быть равна единице, т. е.

$$(b - a) \cdot c = 1,$$

$$\varphi(x) = c = \frac{1}{b - a}. \quad (3.1.15)$$

откуда

Кроме того,

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{при } x < a \text{ и при } x > b.$$

График интегральной кривой равномерного распределения имеет вид, показанный на черт. 12.

Медиана равномерного распределения равна

$$a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2},$$

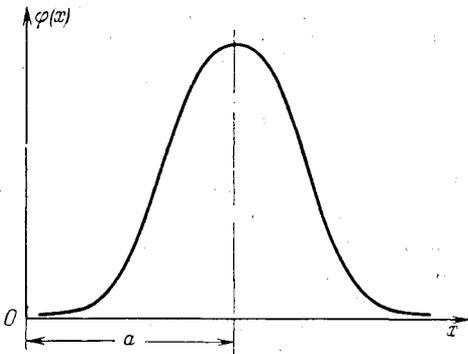
нижний квартиль $a + \frac{b-a}{4}$; верхний квартиль $a + \frac{3(b-a)}{4}$.

Пример 3.1.4. Погрешности обработки при работе по методу автоматического получения размеров в большинстве случаев следуют *нормальному закону распределения*, плотность вероятности для которого выражается формулой

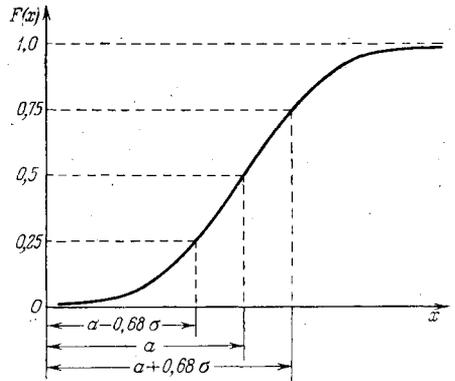
$$\varphi(x) = n(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.1.16)$$

где a и σ — постоянные числа (параметры).

График дифференциальной кривой (плотности вероятности) при нормальном законе распределения имеет вид, показанный на черт. 13.



Черт. 13. График дифференциальной кривой (плотности вероятности) нормального распределения.



Черт. 14. График интегральной функции нормального распределения.

График интегральной кривой нормального распределения представлен на черт. 14. Медиана его равна a ; нижний квартиль равен $a - 0,68\sigma$, верхний равен $a + 0,68\sigma$.

Этот закон будет подробно рассмотрен ниже.

§ 2. Двумерные случайные величины

3.2.1. Дискретная двумерная величина и ее условные законы распределения. До сих пор мы рассматривали одномерные случайные величины, т. е. такие величины, каждое значение которых определяется только одним числом, таковы диаметральный размер, высота микронеровностей и т. п.

В различных приложениях теории вероятностей, кроме одномерных случайных величин, рассматриваются еще двумерные, трехмерные и вообще многомерные величины, представляющие системы соответственно из двух, трех или многих случайных величин.

Простейшим примером двумерной величины может быть случайная точка на плоскости, скажем, наносимая при разметке; трехмерной величиной является, например, пространственная ошибка механизма.

Уже в простейшем случае, когда нас интересует одновременно несколько размеров детали, обрабатываемой на станке, мы встречаемся с многомерной величиной, число измерений которой равно числу контролируемых размеров

детали. Ниже будет дан пример, в котором двумерной величиной является система, образованная отклонением от номинального размера и овальностью туполок.

Каждую двумерную случайную величину (X, Y) можно рассматривать как случайный вектор с компонентами X и Y или точку плоскости со случайными координатами X и Y .

Дискретная двумерная величина в простейшем случае может быть задана в виде двумерной таблицы распределения (табл. 3.2.1).

Таблица 3.2.1

$X \backslash Y$	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots	x_n	
y_1	$P(x_1, y_1)$	$P(x_2, y_1)$	\dots	$P(x_i, y_1)$	\dots	$P(x_n, y_1)$	$P(y_1)$
y_2	$P(x_1, y_2)$	$P(x_2, y_2)$	\dots	$P(x_i, y_2)$	\dots	$P(x_n, y_2)$	$P(y_2)$
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots
y_j	$P(x_1, y_j)$	$P(x_2, y_j)$	\dots	$P(x_i, y_j)$	\dots	$P(x_n, y_j)$	$P(y_j)$
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots
y_m	$P(x_1, y_m)$	$P(x_2, y_m)$	\dots	$P(x_i, y_m)$	\dots	$P(x_n, y_m)$	$P(y_m)$
	$P(x_1)$	$P(x_2)$	\dots	$P(x_i)$	\dots	$P(x_n)$	

В табл. 3.2.1 вероятность $P(x_i, y_j)$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$) представляет вероятность того, что случайная величина X примет значение x_i и одновременно с этим случайная величина Y примет значение y_j . Эти вероятности определяют двумерное распределение величин X и Y или, как иногда говорят, двумерное рассеивание.

Из того, что все возможные комбинации

$$(X = x_i; Y = y_j)$$

составляют полную группу событий, следует, что

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) = 1. \quad (3.2.1)$$

Но в системе двух величин мы можем рассматривать каждую из них в отдельности, не учитывая одновременной вариации другой величины. Тогда нашему рассмотрению будут подвергнуты соответствующие одномерные распределения каждой из величин X и Y . При этом распределение величины X будет задаваться, как обычно, значениями x_1, x_2, \dots, x_n с соответствующими им вероятностями $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$, а распределение величины Y — значениями y_1, y_2, \dots, y_m с вероятностями $P(y_1), P(y_2), \dots, P(y_m)$. Здесь $P(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) представляет вероятность того, что случайная величина X примет значение x_i , каково бы ни было при этом значение величины Y . Легко заметить, что вероятность $P(x_i)$ может быть получена путем суммирования всех тех вероятностей двумерной таблицы, которые расположены в i -м столбце, т. е.

$$\sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) = P(x_i) \quad (3.2.2)$$

и аналогично

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(x_i, y_j) = \mathbf{P}(y_j).$$

В двумерных распределениях мы встречаемся еще с вероятностями вида $\mathbf{P}(x_i | y_j)$ — это есть условная вероятность события $X = x_i$, вычисленная в предположении, что событие $Y = y_j$ наступило.

Как мы видели в 2.2.5, условные вероятности $\mathbf{P}(x_i | y_j)$ и $\mathbf{P}(y_j | x_i)$ могут быть выражены следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}(x_i | y_j) &= \frac{\mathbf{P}(x_i, y_j)}{\mathbf{P}(y_j)}, \\ \mathbf{P}(y_j | x_i) &= \frac{\mathbf{P}(x_i, y_j)}{\mathbf{P}(x_i)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.3)$$

Совокупность условных вероятностей $\mathbf{P}(y_j | x_i)$, отвечающих всем возможным значениям случайной величины Y при данном значении величины $X = x_i$, называется *условным законом распределения величины Y* .

При этом мы всегда имеем равенство

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{P}(y_j | x_i) = 1, \quad (3.2.4)$$

так как достоверно, что при данном значении $X = x_i$ величина Y примет одно из возможных значений y_1, y_2, \dots, y_m .

Аналогично этому

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(x_i | y_j) = 1. \quad (3.2.5)$$

Таким образом, каждому значению величины $X = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) отвечает свой условный закон распределения величины Y . Существо зависимости между величинами X и Y находит отражение именно в изменении условных законов распределения величины Y с переходом от одного значения величины X к другому ее значению. Если условные законы распределения величины Y неизменны при всех значениях величины X , то они совпадают с безусловным распределением этой величины, таким образом, при любых i и j

$$\mathbf{P}(y_j | x_i) = \mathbf{P}(y_j).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}(x_i, y_j) = \mathbf{P}(x_i) \mathbf{P}(y_j | x_i) = \mathbf{P}(x_i) \mathbf{P}(y_j), \quad (3.2.6)$$

т. е. вероятности, стоящие в клетках двумерной табл. 3.2.1, при этом представляют произведения вероятностей соответствующих значений каждой из величин в отдельности.

Из (3.2.6), кроме того, имеем:

$$\mathbf{P}(x_i | y_j) = \frac{\mathbf{P}(x_i, y_j)}{\mathbf{P}(y_j)} = \mathbf{P}(x_i).$$

Таким образом, условный закон распределения величины X также оказывается независимым от Y . В этом случае величины X и Y являются *независимыми* друг от друга.

В общем случае из (3.2.3) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}(x_i, y_j) &= \mathbf{P}(y_j) \cdot \mathbf{P}(x_i | y_j), \\ \mathbf{P}(x_i, y_j) &= \mathbf{P}(x_i) \cdot \mathbf{P}(y_j | x_i). \end{aligned} \right\} \quad (3.2.7)$$

Суммируя $P(x_i, y_j)$ по всем значениям величины Y (т. е. производя суммирование по j при фиксированном значении i) и используя второе равенство (3.2.7), получим:

$$\sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) = P(x_i) \sum_{j=1}^m P(y_j | x_i) \quad (3.2.8)$$

и ввиду (3.2.4)

$$\sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) = P(x_i).$$

Аналогично этому

$$\sum_{i=1}^n P(x_i, y_j) = P(y_j).$$

т. е. мы пришли к (3.2.2).

Мы видим, что двумерное распределение, заданное табл. 3.2.1, однозначно определяет каждое из одномерных распределений рассматриваемых в отдельности величин X и Y .

Пример 3.2.1. Изготавливаемые в цехе втулки сортируются с помощью контрольно-сортировочных устройств по отклонению их внутреннего диаметра от номинального размера на четыре группы со значениями

$$0,01; 0,02; 0,03 \text{ и } 0,04 \text{ мм}$$

и по овальности на четыре группы со значениями

$$0,002; 0,004; 0,006 \text{ и } 0,008 \text{ мм.}$$

На основании длительного опыта установлено, что при настройке отделочного станка на середину допуска изготовленные втулки следующим образом распределяются по их отклонениям и овальности:

Таблица 3.2.2

Овальность	Отклонения				
	$x_1 = 0,01$	$x_2 = 0,02$	$x_3 = 0,03$	$x_4 = 0,04$	
$y_4 = 0,008$	$P(x_1, y_4) = 0,02$	$P(x_2, y_4) = 0,04$	$P(x_3, y_4) = 0,03$	$P(x_4, y_4) = 0,02$	$\sum_x P(x_i, y_4) =$ $= P(y_4) = 0,11$
$y_3 = 0,006$	$P(x_1, y_3) = 0,04$	$P(x_2, y_3) = 0,10$	$P(x_3, y_3) = 0,08$	$P(x_4, y_3) = 0,08$	$\sum_x P(x_i, y_3) =$ $= P(y_3) = 0,30$
$y_2 = 0,004$	$P(x_1, y_2) = 0,03$	$P(x_2, y_2) = 0,24$	$P(x_3, y_2) = 0,15$	$P(x_4, y_2) = 0,06$	$\sum_x P(x_i, y_2) =$ $= P(y_2) = 0,48$
$y_1 = 0,002$	$P(x_1, y_1) = 0,01$	$P(x_2, y_1) = 0,02$	$P(x_3, y_1) = 0,04$	$P(x_4, y_1) = 0,04$	$\sum_x P(x_i, y_1) =$ $= P(y_1) = 0,11$
	$\sum_y P(x_1, y_j) =$ $= P(x_1) = 0,10$	$\sum_y P(x_2, y_j) =$ $= P(x_2) = 0,40$	$\sum_y P(x_3, y_j) =$ $= P(x_3) = 0,30$	$\sum_y P(x_4, y_j) =$ $= P(x_4) = 0,20$	$\sum_x \sum_y P(x_i, y_j) =$ $= 1,00$

Из двумерной табл. 3.2.2 распределения величины X — отклонения от номинального размера — и Y — овальности деталей — можно непосредственно

получить каждое из одномерных распределений рассматриваемых в отдельности величин X и Y .

Так, беря нижнюю строчку двумерной табл. 3.2.2, мы получаем распределение величины X и, беря крайнюю правую колонку, получаем распределение величины Y .

Таблица 3.2.3

Отклонения X	0,01	0,02	0,03	0,04	Σ
Вероятность $P(x)$	0,1	0,4	0,3	0,2	1,0
Овальность Y	0,008	0,006	0,004	0,002	Σ
Вероятность $P(y)$	0,11	0,30	0,48	0,11	1,0

Зная вероятности $P(x, y)$ двумерного распределения и вероятности $P(x)$ и $P(y)$ одномерных распределений X и Y , легко по формулам (3.2.3) получить условные распределения величин X и Y .

Таблица 3.2.4

		$x_1 = 0,01$		$x_2 = 0,02$		$x_3 = 0,03$		$x_4 = 0,04$		$\sum_x P(x y)$
		$P(y x_1)$		$P(y x_2)$		$P(y x_3)$		$P(y x_4)$		
$y_4 = 0,008$	$P(x y_4)$	$\frac{2}{11}$		$\frac{4}{11}$		$\frac{3}{11}$		$\frac{2}{11}$		$\frac{11}{11} = 1$
			$\frac{2}{10}$		$\frac{4}{40}$		$\frac{3}{30}$		$\frac{2}{20}$	
$y_3 = 0,006$	$P(x y_3)$	$\frac{4}{30}$		$\frac{10}{30}$		$\frac{8}{30}$		$\frac{8}{30}$		$\frac{30}{20} = 1$
			$\frac{4}{10}$		$\frac{10}{40}$		$\frac{8}{30}$		$\frac{8}{20}$	
$y_2 = 0,004$	$P(x y_2)$	$\frac{3}{48}$		$\frac{24}{48}$		$\frac{15}{48}$		$\frac{6}{48}$		$\frac{48}{48} = 1$
			$\frac{3}{10}$		$\frac{24}{40}$		$\frac{15}{30}$		$\frac{6}{20}$	
$y_1 = 0,002$	$P(x y_1)$	$\frac{1}{11}$		$\frac{2}{11}$		$\frac{4}{11}$		$\frac{4}{11}$		$\frac{11}{11} = 1$
			$\frac{1}{10}$		$\frac{2}{40}$		$\frac{4}{30}$		$\frac{4}{20}$	
	$\sum_y P(y x)$	$\frac{10}{10} = 1$		$\frac{40}{40} = 1$		$\frac{30}{30} = 1$		$\frac{20}{20} = 1$		

В таблице условных вероятностей 3.2.4, например, $P(x_2|y_4)$ означает вероятность того, что втулка, имеющая овальность в 0,008 мм, будет иметь вместе с тем отклонение от номинального размера в 0,02 мм. Эта вероятность равна $\frac{4}{11}$. Следовательно, можно ожидать, что в достаточно большой партии $\frac{4}{11}$

от общего числа втулок, имеющих овальность в 0,008 мм, будет иметь отклонение в 0,02 мм.

Вероятность $P(x_2 | y_4)$ получена следующим образом:

$$P(x_2 | y_4) = \frac{P(x_2, y_4)}{P(y_4)} = \frac{0,04}{0,11} = \frac{4}{11}.$$

Соотношения (3.2.2), (3.2.6), (3.2.7) и (3.2.8) проверяются по числам двумерной табл. 3.2.2 и табл. 3.2.4 условных вероятностей.

В частности:

$$\sum_y P(x_2, y) = 0,4, \quad \sum_y P(y) P(x_2 | y) = 0,4 \quad \text{и} \quad P(x_2) = 0,4.$$

Случайные величины X и Y в данном случае мы не можем считать независимыми, потому что

$$P(X = x, Y = y) \neq P(X = x) \cdot P(Y = y).$$

Так, например, $P(x_2, y_3) = 0,1$; $P(x_2) = 0,4$ и $P(y_3) = 0,3$; $P(x_2) P(y_3) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$, откуда $0,1 = P(x_2, y_3) \neq P(x_2) \cdot P(y_3) = 0,12$.

Обнаруженная нами связь между случайными величинами X и Y по распределениям их вероятностей носит название *вероятностной* или *стохастической связи*. В дальнейшем мы рассмотрим способы оценки тесноты и формы этой связи.

3.2.2. Непрерывные двумерные величины, их функции распределения и плотности вероятности. Непрерывная двумерная случайная величина задается своей функцией распределения $F(x, y)$, которая по аналогии с одномерным случаем определяется равенством

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y). \quad (3.2.9)$$

Точно так же по аналогии с одномерным случаем вводится понятие о двумерной плотности вероятности.

Плотность вероятности непрерывного двумерного распределения $\varphi(x, y)$ представляет такую неотрицательную функцию, интегрируя которую по какой-либо области G в плоскости xu , мы найдем вероятность случайной точке $Q(X, Y)$, изображающей значение двумерной величины, попасть в эту область:

$$P[Q(X, Y) \subset G] = \int_G \int \varphi(x, y) dx dy. \quad (3.2.10)$$

Мы будем считать эту функцию определенной во всей плоскости xu , полагая ее равной нулю в тех частях плоскости, в которые случайная точка $Q(X, Y)$ попасть не может.

Интегральная функция распределения двумерной случайной величины может быть выражена через плотность вероятности этой величины совершенно аналогично тому, как это имеет место для одномерной случайной величины, а именно:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \varphi(x, y) dx dy. \quad (3.2.11)$$

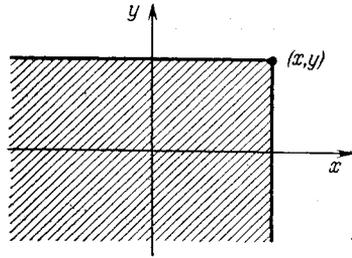
Таким образом, $F(x, y)$ есть вероятность того, что случайная точка $Q(X, Y)$ попадет на часть плоскости, заштрихованной на черт. 15.

Плотность вероятности $\varphi(x, y)$ при двумерном распределении определяет так называемую поверхность распределения $z = \varphi(x, y)$, имеющую аналогичный смысл с кривой распределения для одномерной случайной величины. Объем в пространстве (x, y, z) , ограниченный поверхностью распределения и координатами

натной плоскостью (x, y) , представляет вероятность нахождения случайной точки $Q(X, Y)$ в пределах всей координатной плоскости и поэтому равен единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dx dy = 1. \tag{3.2.12}$$

Если мы в формуле (3.2.11) положим $y = \infty$, т. е. проинтегрируем по всей оси y (что аналогично суммированию по всем значениям этой величины при дискретном распределении), то получим, естественно:



$$F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dy = P(X < x) = F_1(x) \tag{3.2.13}$$

и аналогично

$$F_2(y) = F(\infty, y) = P(Y < y),$$

где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ — функции одномерных распределений величин X и Y .

Черт. 15. Геометрическая интерпретация непрерывной двумерной случайной величины.

Понятие независимости случайных величин получает при этом простое и достаточно общее выражение.

Случайные величины X, Y и Z называются *независимыми*, если имеет место равенство

$$P(X < x; Y < y; Z < z) = P(X < x) \cdot P(Y < y) \cdot P(Z < z), \tag{3.2.14}$$

откуда следует

$$F(x, y, z) = F_1(x) \cdot F_2(y) \cdot F_3(z), \tag{3.2.15}$$

т. е. случайные величины X, Y и Z называются *независимыми* в том случае, когда функция распределения системы этих трех величин равна произведению функций распределения каждой из этих величин в отдельности.

Для плотности $\varphi(x, y, z)$ трехмерной величины в случае независимости имеем следующее равенство:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y) \cdot \varphi_3(z), \tag{3.2.16}$$

аналогичное (3.2.15).

Для непрерывных величин мы имеем соотношения, аналогичные тем, которые имеют место для дискретных величин, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dy &= \varphi_1(x), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dx &= \varphi_2(y), \end{aligned} \right\} \tag{3.2.17}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ — одномерные плотности вероятности соответственно величин X и Y .

При непрерывных распределениях величин X и Y , так же как и при дискретных, мы встречаемся с понятиями условных распределений, которые определяются совершенно аналогично. При этом мы используем вместо вероятности $P(x, y)$ двумерную плотность $\varphi(x, y)$.

Для условной плотности вероятности Y при данном x и аналогично условной плотности вероятности X при данном y по определению имеем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(y|x) &= \frac{\varphi(x,y)}{\varphi_1(x)}, \\ \varphi(x|y) &= \frac{\varphi(x,y)}{\varphi_2(y)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.18)$$

Эти формулы вполне аналогичны формулам (3.2.3) для дискретного случая; смысл их легко обнаружить, если записать, например, первое равенство (3.2.18) в следующем виде:

$$\varphi(y|x) dy = \frac{\varphi(x,y) dx dy}{\varphi_1(x) dx},$$

и заметить, что числитель в правой части эквивалентен при малых dx и dy вероятности

$$P\left(\begin{array}{l} x < X < x + dx \\ y < Y < y + dy \end{array}\right)$$

совместного выполнения неравенств $x < X < x + dx$ и $y < Y < y + dy$, а знаменатель эквивалентен вероятности

$$P(x < X < x + dx).$$

Таким образом, отношение, стоящее в правой части при малых dx и dy , действительно можно рассматривать как главную часть условной вероятности

$$P(y < Y < y + dy | x < X < x + dx).$$

Разделив это выражение на dy и переходя к пределу, мы и получим

$$\varphi(y|x),$$

которую естественно рассматривать как условную плотность распределения Y при фиксированном значении $X = x$. Из (3.2.18) легко видеть, что

$$\varphi(y|x) \geq 0 \quad (3.2.19)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y|x) dy = 1. \quad (3.2.20)$$

Следовательно, $\varphi(y|x)$ удовлетворяет всем обычным требованиям к функциям, описывающим плотность распределения.

Аналогичное утверждение справедливо и для $\varphi(x|y)$.

§ 3. Числовые характеристики положения центра группирования

3.3.1. Математическое ожидание (среднее значение). Рассмотренные в предыдущих параграфах законы распределения наиболее полно характеризуют случайные величины, так как указывают, какие значения (или из каких интервалов) может принимать соответствующая случайная величина и каковы вероятности этих значений. Однако в ряде случаев для выполнения инженерных расчетов о случайной величине требуется знать гораздо меньше, а именно:

1) Знать примерное расположение того сравнительно узкого интервала значений, в котором находится основная масса вероятности случайной величины, иначе говоря, знать некоторое «среднее» из значений случайной величины, вокруг которого группируются остальные значения, т. е. знать положение «центра группирования» на числовой оси.

Наличие такого «центра группирования» в распределении многих случайных величин вытекает из самого характера явления рассеивания. Так, например, отдельные результаты измерений, проведенных одним инструментом одного объекта

в одинаковых условиях, обнаруживают рассеивание под действием случайных погрешностей измерения, группируясь около истинного значения измеряемого объекта как центра.

Точки поражения выстрелами, естественно, будут группироваться около центра цели. Размеры отдельных деталей будут группироваться около того размера, на который настроен станок, и т. п.

2) Знать, как разбросана масса вероятности около центра группирования, иными словами, знать, каково рассеивание массы вероятности относительно некоторого центра, т. е. знать числовую характеристику рассеивания.

Из самого назначения числовой характеристики положения центра группирования следует, что она может быть построена различными способами. И действительно, существует не одна, а несколько более или менее равноправных таких числовых характеристик, имеющих одинаковое назначение, но различное построение и как следствие последнего различные свойства.

Наиболее часто употребляются в технике следующие числовые характеристики положения центра группирования:

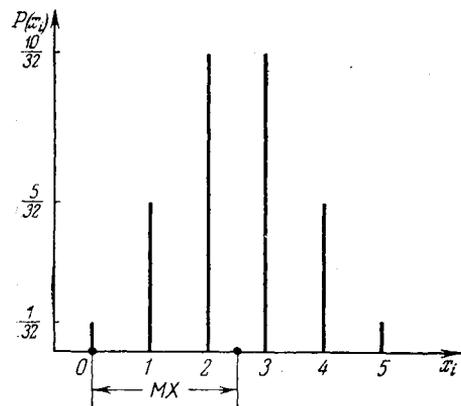
1) *математическое ожидание или среднее значение* случайной величины X , обозначаемое символом MX ,

2) *медиана* случайной величины X , обозначаемая символом $M_e X$, и

3) *мода* случайной величины X , обозначаемая символом $M_o X$.

Здесь у нас идет речь о теоретических или вероятностных (стохастических) числовых характеристиках, основанных на распределении массы вероятности случайной величины, которое мы будем считать установленным.

Заметим, что каждой теоретической (вероятностной) числовой характеристике может быть поставлена в соответствие аналогичная и иногда имеющая такое же название эмпирическая (статистическая) характеристика, представляющая приближенную оценку по данным наблюдения соответствующей теоретической характеристики, точное значение которой, вообще говоря, остается при этом неизвестным. Подобно тому, как для случайных событий вероятность $P(A)$ рассматривалась как постоянное число, около которого колеблются получаемые непосредственно из наблюдений частоты $W(A)$, так и теоретические числовые характеристики величин следует рассматривать как постоянные для данных условий числа (параметры), около которых колеблются надлежащим образом построенные статистические характеристики центра группирования (средняя арифметическая, эмпирическая медиана, эмпирическая мода).



Черт. 16. Математическое ожидание дискретной случайной величины.

Вопрос об оценке теоретических характеристик по данным наблюдения будет рассмотрен в дальнейшем. Сказанное относится в равной мере как к характеристикам положения центра группирования, так и к характеристикам рассеивания.

Перейдем теперь к рассмотрению *математического ожидания* или *среднего значения*.

Ранее мы указывали на возможность наглядного представления вероятности случайной величины в виде массы, равной единице, распределенной некоторым образом на числовой оси в тех местах, где случайная величина X может принимать при испытании свои значения.

На графике (черт. 16) показано распределение вероятностей дискретной случайной величины X , представляющей собой, например, число появлений отсче-

тов в плюс при пяти повторных арретированиях наконечника оптиметра. Эти вероятности были приведены в табл. 3.1.2.

Величина X принимает шесть дискретных значений 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Ординаты в этих точках на графике (черт. 16) пропорциональны сосредоточенным в них массам. Так, в точке $x_1 = 0$ сосредоточена $\frac{1}{32}$ всей массы вероятности, т. е. $P(0) = \frac{1}{32}$; в точке $x_2 = 1$ сосредоточено $\frac{5}{32}$, т. е. $P(1) = \frac{5}{32}$ и т. д. В таком случае естественно поставить вопрос о положении центра тяжести данного распределения массы по числовой оси.

Известно, что абсцисса центра тяжести в данном случае может быть найдена весьма просто путем подсчета средневзвешенного арифметического абсцисс данных точек (заметим, что «взвешивание» значений величины означает умножение каждого значения на его «вес» — вероятность с последующим делением суммы таких произведений на сумму «весов», т. е. сумму вероятностей).

$$MX = \frac{\frac{1}{32} \cdot 0 + \frac{5}{32} \cdot 1 + \frac{10}{32} \cdot 2 + \frac{10}{32} \cdot 3 + \frac{5}{32} \cdot 4 + \frac{1}{32} \cdot 5}{\frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32}} = \frac{\frac{80}{32}}{\frac{32}{32}} = 2,5.$$

Таким образом, центр тяжести данного распределения массы расположен в точке, абсцисса которой равна 2,5. Эта абсцисса и будет математическим ожиданием (средним значением) данной случайной величины X .

В общем виде математическое ожидание дискретной случайной величины X может быть выражено следующей формулой:

$$MX = \frac{P(x_1)x_1 + P(x_2)x_2 + \dots + P(x_n)x_n}{P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n)} = \frac{\sum_{i=1}^n P(x_i)x_i}{\sum_{i=1}^n P(x_i)}.$$

Так как сумма $\sum_{i=1}^n P(x_i)$ всегда равна единице (это есть сумма вероятностей событий, составляющих полную группу), то окончательно получим:

$$MX = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i). \quad (3.3.1)$$

Таким образом, *математическое ожидание (среднее значение) дискретной случайной величины X при конечном числе n ее возможных значений есть сумма произведений каждого из этих значений на его вероятность*. Оно представляет абсциссу центра тяжести распределения «масс» вероятностей отдельных значений случайной величины или взвешенную по вероятностям среднюю арифметическую из возможных значений случайной величины.

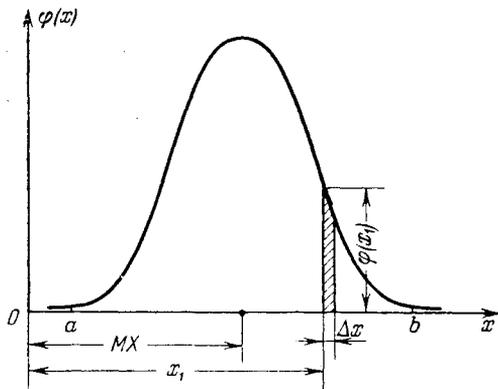
Если возможные значения дискретной случайной величины составляют счетное множество, т. е. множество это может быть выписано в последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, в которой каждый элемент получает свой номер (как это, например, имеет место в ранее приводившемся распределении Пуассона), то *математическое ожидание равно сумме*

$$MX = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n P(x_n), \quad (3.3.2)$$

причем предполагается, что этот ряд сходится абсолютно.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины определяется аналогично.

Обратимся к графику плотности вероятности случайной величины X (черт. 17). График этот наглядно выражает непрерывное распределение массы вероятности по числовой оси x . Разделим эту ось на элементарные отрезки $(x, x + \Delta x)$.



Черт. 17. Математическое ожидание непрерывной случайной величины.

Вероятность того, что случайная величина X примет значение из этого отрезка с точностью до бесконечно малых высшего порядка, равна $\varphi(x) \Delta x$. Мы можем считать, что этой «массой» нагружена точка x и тогда по аналогии с предыдущим случаем положение центра тяжести системы этих масс выразится отношением сумм

$$\frac{\sum x \varphi(x) \Delta x}{\sum \varphi(x) \Delta x}$$

Для получения точной абсциссы центра тяжести, которую и примем за математическое ожидание, перейдем к пределу, уменьшая длины промежутков деления. Тогда будем иметь:

$$MX = \frac{\int_a^b x \varphi(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx},$$

если величина распределена на участке (a, b) . В этом случае интеграл $\int_a^b \varphi(x) dx$ равен единице и потому

$$MX = \int_a^b x \varphi(x) dx.$$

В общем случае математическое ожидание определяется с помощью равенства

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x) dx, \tag{3.3.3}$$

где $\varphi(x)$ — плотность вероятности случайной величины. При этом мы предполагаем, что интеграл (3.3.3) сходится абсолютно, т. е. существует интеграл¹⁾

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \varphi(x) dx.$$

Формула (3.3.3) содержит предыдущую формулу как частный случай, получающийся тогда, когда $\varphi(x) = 0$ при $x < a$ и при всяком $x > b$.

Таким образом, математическое ожидание (среднее значение) непрерывной случайной величины есть определенный интеграл от произведения плотности

1) Если бы интеграл (3.3.3) сходился неабсолютно, то его значение как предела

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b x \varphi(x) dx$$

зависело бы от того, с какой быстротой мы стремим a и b в отдельности к $-\infty$ и к $+\infty$. Таким образом, значение этого интеграла не имело бы определенного физического смысла.

вероятности $\varphi(x)$ на действительное переменное x , взятый в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ (предполагается, что такой интеграл сходится).

Математическое ожидание совпадает также с абсциссой центра тяжести площади фигуры, ограниченной дифференциальной кривой распределения и осью x .

Математическое ожидание (среднее значение) представляет собой то постоянное для данных условий число (параметр распределения), около которого будут колебаться средние арифметические, подсчитанные по результатам многочисленных наблюдений. Так, например, при вполне устойчивом технологическом процессе математическим ожиданием действительного размера детали будет тот размер, на который настроен в данном случае станок. Известно, что размеры отдельных деталей при этом будут различны между собой. Но если взять во время работы станка большое число проб из некоторого числа n деталей, то окажется, что: 1) средние арифметические размеры деталей, подсчитанные по этим пробам, колеблются около постоянного числа MX , являющегося математическим ожиданием, и 2) с увеличением числа n деталей в пробе средняя арифметическая в пробе приближается к математическому ожиданию, т. е. случайные колебания как бы затухают при увеличении числа наблюдений. В этом заключается действие закона больших чисел, о котором мы подробнее скажем далее.

Рассмотрим примеры на вычисление математических ожиданий.

Пример 3.3.1. При обработке втулок на токарном автомате на основе анализа точности технологического процесса подсчитаны следующие вероятности получения в пробе из 10 штук числа втулок, выходящих по своим размерам из контрольной зоны с границами, отстоящими на $\pm \frac{1}{4} \delta$ (δ — допуск) от середины допуска (назовем такие втулки «внезональными»):

Таблица 3.3.1

Число x «внезональных» втулок в пробе из 10 штук	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Вероятность получения данного числа	0,24	0,38	0,26	0,10	0,02	~ 0	$\sum_{k=0}^{10} P(x_k) = 1,00$					

Пусть пробы по 10 штук отбирались 10 раз в день при двухсменной работе, т. е. примерно через каждые 1,5 часа.

Станок был настроен на середину допуска. Были получены по дням следующие распределения проб по числу «внезональных» втулок за 5 дней работы станка (табл. 3.3.2).

Таблица 3.3.2

	Число «внезональных» втулок в пробе											Число проб за день	Среднее число «внезональных» втулок в пробе
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
	Число проб, имеющих данное число «внезональных» втулок												
Дни работы станка	1	2	3	3	1	1	—	—	—	—	—	10	1,6
	2	1	5	2	2	—	—	—	—	—	—	10	1,5
	3	2	4	2	1	1	—	—	—	—	—	10	1,5
	4	3	4	2	1	—	—	—	—	—	—	10	1,1
	5	3	4	3	—	—	—	—	—	—	—	10	1,0
Сумма за пять дней	11	20	12	5	2	—	—	—	—	—	—	50	1,34

Вычислим среднее арифметическое число «внезональных» втулок за первый день работы станка. Вычисление это можно проделать следующими тремя эквивалентными способами:

$$1) \bar{x} = \frac{0+0+1+1+1+2+2+2+3+4}{10} = \frac{16}{10} = 1,6 \text{ шт.}$$

$$2) \bar{x} = \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{10} = \frac{16}{10} = 1,6 \text{ шт.}$$

$$3) \bar{x} = \frac{2}{10} \cdot 0 + \frac{3}{10} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 2 + \frac{1}{10} \cdot 3 + \frac{1}{10} \cdot 4 = 0,2 \cdot 0 + 0,3 \cdot 1 + 0,3 \cdot 2 + 0,1 \cdot 3 + 0,1 \cdot 4 = 1,6 \text{ шт.}$$

Вычислим теперь математическое ожидание числа «внезональных» втулок по формуле (3.3.1):

$$MX = 0,24 \cdot 0 + 0,38 \cdot 1 + 0,26 \cdot 2 + 0,10 \cdot 3 + 0,02 \cdot 4 = 1,28 \text{ шт.}$$

Легко заметить, что математическое ожидание MX вычисляется совершенно аналогично вычислению средней арифметической по третьему способу, только здесь вместо частот, полученных в конкретных наблюдениях, применяются вероятности, представляющие собой постоянные числа, около которых колеблются соответствующие частоты.

Если бы число наблюдений n было велико, то каждое значение частоты мало отличалось бы от соответствующей вероятности и тогда средняя арифметическая была бы близка к математическому ожиданию MX .

Подсчитаем, например, средние арифметические за остальные дни и потом общую (суммарную) среднюю арифметическую за все 5 дней. Применяя те же способы вычислений, получим:

$$\bar{x}_1 = 1,6, \quad \bar{x}_2 = 1,5, \quad \bar{x}_3 = 1,5, \quad \bar{x}_4 = 1,1, \quad \bar{x}_5 = 1,0 \quad \text{и} \quad \bar{x}_\Sigma = 1,34.$$

Из этих цифр видно, что средняя арифметическая за 5 дней ($\bar{x}_\Sigma = 1,34$ шт.) оказалась довольно близкой к математическому ожиданию ($MX = 1,28$ шт.).

Пример 3.3.2. Пусть непрерывная случайная величина X распределена равномерно в пределах от $x_n = -1$ до $x_k = +3$. Тогда $\varphi(x) = c = \frac{1}{4}$ и

$$MX = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+3} x dx = \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{+3} = 1.$$

Понятно без вычислений, что поскольку распределение представляет симметричную фигуру, то абсцисса ее центра тяжести находится в середине основания, причем середина совпадает со значением $x = 1$, и поэтому $MX = 1$.

При двумерном распределении, заданном плотностью вероятности, математическое ожидание можно рассматривать как центр тяжести массы, распределенной на плоскости xu с плотностью $\varphi(x, u)$. Это будет точка, координаты которой представляют математические ожидания каждой из величин X и Y . Мы можем также исходить из следующего определения: *математическим ожиданием двумерной случайной величины (X, Y) называется точка $M(X, Y)$ с координатами:*

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_i P(x_i, y_j), \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j P(x_i, y_j) \quad (3.3.4)$$

для дискретных случайных величин, или с координатами

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x, u) dx du; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u \varphi(x, u) dx du \quad (3.3.5)$$

для непрерывных случайных величин.

При рассмотрении двумерного рассеивания в § 2 настоящей главы мы видели, что

$$\sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) = P(x_i)$$

и аналогично

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dy = \varphi_1(x).$$

Поэтому формулам (3.3.4) и (3.3.5) может быть придан следующий простой вид:

$$\sum_{i=1}^n x_i P(x_i) = MX; \quad \sum_{j=1}^m y_j P(y_j) = MY \quad (3.3.6)$$

для дискретных случайных величин и

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \varphi_1(x) dx = MX; \quad \int_{-\infty}^{\infty} y \varphi_2(y) dy = MY \quad (3.3.7)$$

для непрерывных случайных величин.

Таким образом, оба определения математического ожидания двумерной случайной величины эквивалентны.

Пусть, например, требуется определить среднюю овальность втулок и их среднее отклонение от номинального размера по табл. 3.2.2.

Пользуясь формулой (3.3.6), находим:

$$MX = 0,01 \cdot 0,10 + 0,02 \cdot 0,40 + 0,03 \cdot 0,30 + 0,04 \cdot 0,20 = 0,026,$$

$$MY = 0,008 \cdot 0,11 + 0,006 \cdot 0,30 + 0,004 \cdot 0,48 + 0,002 \cdot 0,11 = 0,00482.$$

Таким образом, математическое ожидание отклонения и овальности втулки в данных производственных условиях может быть охарактеризовано точкой H с координатами $x = 0,026$ и $y = 0,00482$.

Наряду с математическими ожиданиями и дисперсиями случайных величин приходится часто рассматривать математические ожидания и дисперсии различных функций $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ этих величин.

Рассмотрим сначала одномерный случай. Пусть $Y = f(X)$.

Если величина X принимает какое-либо из возможных значений x , то величина Y принимает значение $f(x)$.

Пусть величина X дискретна и ее распределение задано табл. 3.3.3.

Таблица 3.3.3

X	x_1	x_2	\dots	x_n
$P(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	\dots	$P(x_n)$

Тогда величина $Y = f(X)$ также дискретна, ее распределение остается таким же и описывается табл. 3.3.4.

Таблица 3.3.4

Y	$f(x_1)$	$f(x_2)$	\dots	$f(x_n)$
$P(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	\dots	$P(x_n)$

Математическое ожидание такой величины выражается следующим образом:

$$M[f(X)] = \sum_{i=1}^n P(x_i) f(x_i). \quad (3.3.8)$$

Если величина X распределена непрерывно с плотностью $\varphi_X(x)$, то для математического ожидания $Y = f(X)$ будем иметь аналогичное выражение

$$M[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_X(x) dx \quad (3.3.9)$$

(при этом предполагается, что стоящий в правой части интеграл сходится абсолютно).

Аналогичным образом, рассматривая двумерное распределение, можно определить математическое ожидание $f(X, Y)$ — функцию двух случайных величин.

Пример 3.3.3. Пусть $Y = X^3$ и плотность вероятности величины X есть $\varphi_X(x)$.

Тогда по формуле (3.3.9) получим:

$$MY = MX^3 = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \varphi_X(x) dx.$$

Пусть теперь $Y = X^3$ и величина X распределена в пределах от 0 до 2 с плотностью $\frac{1}{2}$. Тогда

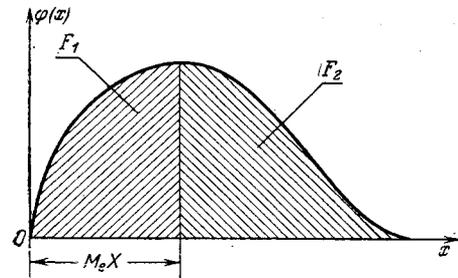
$$MY = M(X^3) = \int_0^2 x^3 \frac{1}{2} dx = 2.$$

3.3.2. Медиана. Теоретической медианой $M_e X$, как мы указывали, называется квантиль, отвечающий значению $F(x_p) = p = \frac{1}{2}$, т. е. такое значение, для которого функция распределения равна $\frac{1}{2}$. А это в свою очередь означает, что вероятность случайной величине X принять значение, меньшее $M_e X$, в точности равна вероятности принять значение, большее $M_e X$.

Медиана непрерывной случайной величины определяется, следовательно, из соотношения

$$\int_{-\infty}^{M_e X} \varphi(x) dx = \int_{M_e X}^{+\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{2}. \quad (3.3.10)$$

Геометрически (черт. 18) медиана есть абсцисса такой точки кривой плотности вероятности $\varphi(x)$, ордината которой делит площадь под кривой на две равновеликие части.



Черт. 18. Геометрическая интерпретация медианы $M_e X$ непрерывной случайной величины ($F_1 = F_2$).

Соотношение (3.3.10) не всегда однозначно определяет медиану. Если, например, кривая распределения $\varphi(x)$ имеет вид, показанный на черт. 19, то медианой может служить любое значение, взятое из промежутка (α, β) .

Легко заметить, что при симметричных законах распределения, т. е. при таких законах, которые образуют на графике плотности вероятности симметричную фигуру, медиана совпадает с абсциссой точки пересечения оси симметрии этой фигуры с осью абсцисс.

В случае дискретного закона распределения в качестве теоретической медианы может быть принято:

1) любое значение, промежуточное между x_{m-1} и x_m , если имеет место условие

$$\sum_{i=1}^{m-1} P(x_i) = \sum_{i=m}^n P(x_i),$$

2) любое значение, промежуточное между x_{m-1} и x_m , если имеют место условия:

$$\sum_{i=1}^{m-1} P(x_i) < \sum_{i=m}^n P(x_i)$$

и

$$\sum_{i=1}^m P(x_i) > \sum_{i=m+1}^n P(x_i),$$

при этом предполагается, что значения x_1, x_2, \dots, x_n расположены в порядке возрастания их величины.

Отсюда видно, что медиана дискретной величины не может быть определена однозначно. В обоих указанных случаях она (правда, без достаточных к тому оснований) определяется иногда путем линейного интерполирования.

Аналогичным образом строится эмпирическая медиана.

Пусть, например, мы имеем «пробу» из 5 штук обработанных на станке деталей с размерами в миллиметрах: 10,12; 10,01; 9,98; 10,07 и 10,03.

Если полученные размеры расположить в порядке возрастания (9,98; 10,01; 10,03; 10,07; 10,12) и считать, что каждому из них отвечает равная масса

$p(x_1) = p(x_2) = \dots = p(x_5) = \frac{1}{5}$, то согласно правилу 2) мы можем считать

медианой любое число, промежуточное между $x_2 = 10,01$ и $x_3 = 10,03$. Обычно при нечетном числе данных n берут в качестве медианы число, занимающее

срединное положение, т. е. $\frac{n+1}{2}$ — по порядку, в данном примере при $n = 5$ —

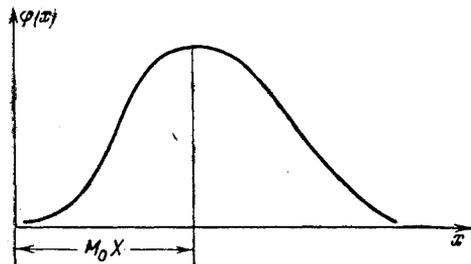
третье: $m_e = x_3 = 10,03$ мм. Если бы мы оперировали лишь с четырьмя первыми членами, то в качестве медианы брали бы среднее арифметическое из двух членов: $x_2 = 10,01$ и $x_3 = 10,03$, занимающих срединное положение

$$m_e = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{10,01 + 10,03}{2} = 10,02.$$

Аналогично этому поступают при любом четном n .

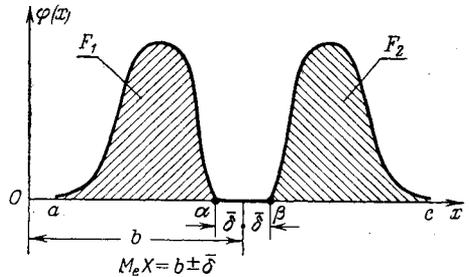
3.3.3. Мода. Теоретической модой

M_oX называется наиболее вероятное значение x_i случайной величины X , т. е. такое ее значение, для которого в случае дискретного распределения вероятность $P(x_i)$ или в случае непрерывного распределения плотности вероятности $\varphi(x)$ имеют наибольшее значение (черт. 20).



Черт. 20. Одномодальная кривая распределения.

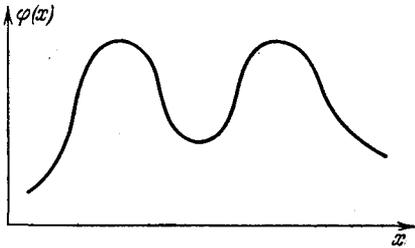
Если кривая распределения имеет два или несколько одинаковых максимумов, то она называется соответственно *двухмодальной* или *многомодальной* (черт. 21).



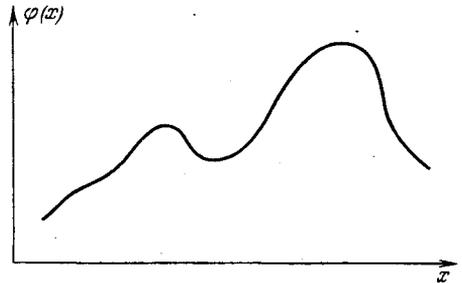
Черт. 19. Кривая плотности вероятности $\varphi(x)$, при которой медиана M_eX определяется неоднозначно ($F_1 = F_2$).

Если максимумы резко выражены, но различны по величине, то кривая называется *многовершинной* (черт. 22).

Если в центральной части кривой распределения имеется минимум, по обе стороны от которого происходит непрерывное возрастание кривой до границ



Черт. 21. Двухмодальная кривая распределения.



Черт. 22. Двухвершинная кривая распределения.

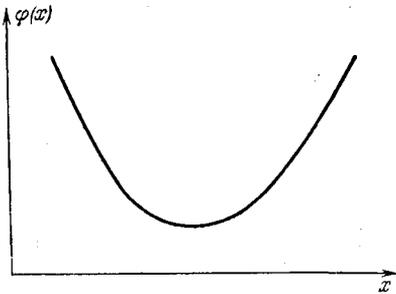
области значений случайной величины, то такая кривая называется *антимодальной* (черт. 23).

Между перечисленными характеристиками положения центра группирования нет определенных соотношений.

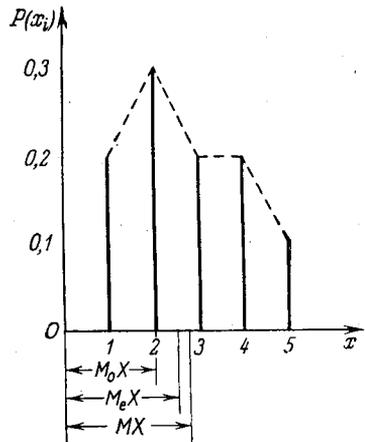
Это ясно в отношении M_X и M_oX без всяких пояснений.

Следует заметить, что, как легко сообразить, медиана не изменится, если мы будем изменять распределение массы вероятности вдоль числовой оси, сохраняя равенство масс справа и слева от медианы.

Медиана не поддается так легко, как математическое ожидание, аналитическим операциям.



Черт. 23. Антимодальная кривая распределения.



Черт. 24. График первоначального распределения вероятностей дискретной случайной величины.

При симметричных одномодальных распределениях, как легко понять из определений, все три характеристики положения центра группирования — математическое ожидание, медиана и мода — равны между собой.

Ясно также, что размерности всех их совпадают с размерностью случайной величины.

Пример 3.3.4. Возьмем распределение вероятностей (черт. 24).

Для данного распределения:

1) $M_oX = 2$ *мк*, так как значение 2 *мк* имеет наибольшую вероятность, а именно, $P(2) = 0,3$.

2) $M_e X = 2,5$, так как $\sum_{i=1}^2 P(x_i) = \sum_{i=2+1}^5 P(x_i) = \frac{1}{2}$ и медиана лежит между значениями 2 *мк* и 3 *мк*, а в этом случае условно принимают

$$M_e X = \frac{1}{2}(x_m + x_{m+1}) = \frac{1}{2}(2 + 3) = 2,5 \text{ мк},$$

3) $M X = \sum_{i=1}^5 x_i P(x_i) = 0,2 \cdot 1 + 0,3 \cdot 2 + 0,2 \cdot 3 + 0,2 \cdot 4 + 0,1 \cdot 5 = 0,2 + 0,6 + 0,6 + 0,8 + 0,5 = 2,7 \text{ мк}.$

Изменим график следующим образом:

1) примем, что вероятности значений 4 *мк* и 5 *мк* равны нулю:

$$P(4) = P(5) = 0,$$

2) примем также, что вероятность значения 9 *мк* равна 0,2 и вероятность значения 10 *мк* равна 0,1; $P(9) = 0,2$ и $P(10) = 0,1$.

Тогда график примет вид, показанный на черт. 25; в этом случае попрежнему

1) $M_o X = 2 \text{ мк},$

2) $M_e X = 2,5 \text{ мк},$ но $M X = 0,2 \cdot 1 + 0,3 \cdot 2 + 0,2 \cdot 3 + 0,2 \cdot 9 + 0,1 \cdot 10 = 4,2 \text{ мк}.$

3.3.4. Теоремы о математических ожиданиях (средних значениях). При вычислении математических ожиданий имеет важное значение ряд теорем.

Теорема 1. Математическое ожидание постоянной есть сама эта постоянная:

$$M(C) = C, \quad (3.3.11)$$

где C — постоянная.

Доказательство. Постоянную C можно рассматривать как дискретную случайную величину, которая может принять только одно значение C с вероятностью, равной единице $M(C) = C \cdot 1 = C$.

Теорема 2. Математическое ожидание произведения постоянной величины на случайную величину равно произведению постоянной на математическое ожидание случайной величины:

$$M(CX) = C \cdot M X. \quad (3.3.12)$$

Доказательство.

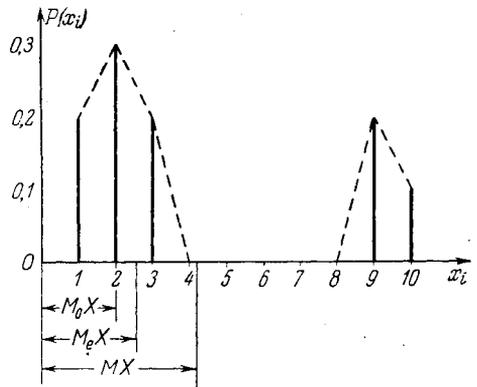
$$M(CX) = \sum_x x P(x \cdot C) = C \sum_x x P(x) = C \cdot M X \text{ (для дискретных случайных величин),}$$

$$M(CX) = \int_{-\infty}^{\infty} C x \varphi(x) dx = C \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx = C \cdot M X \text{ (для непрерывных случайных величин).}$$

Аналогичными свойствами обладают и средние арифметические из ряда наблюдений.

Теорема 3. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин X_i равно сумме математических ожиданий этих величин:

$$M\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i M X_i. \quad (3.3.13)$$



Черт. 25. График измененного распределения вероятностей дискретной случайной величины.

Доказательство. Докажем справедливость равенства

$$M(X + Y) = MX + MY.$$

Имеем:

$$M(X + Y) = \sum_x \sum_y (x + y) P(x, y) = \sum_x x [\sum_y P(x, y)] + \sum_y y [\sum_x P(x, y)]. \quad (3.3.14)$$

Здесь $P(x, y)$ — вероятность того, что случайные величины X и Y принимают определенные значения x и y ; следовательно, мы считаем заданным двумерное распределение величин X и Y . При рассмотрении двумерного рассеивания мы видели из (3.2.2), что в этом случае одномерные вероятности также определены, а именно:

$$\sum_y P(x, y) = P(x) \quad \text{и} \quad \sum_x P(x, y) = P(y).$$

Поэтому из (3.3.14) следует:

$$M(X + Y) = \sum_x x P(x) + \sum_y y P(y) = MX + MY.$$

Аналогично для непрерывных случайных величин имеем:

$$\begin{aligned} M(X + Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + y) \varphi(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} y dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx. \end{aligned}$$

При рассмотрении двумерных случайных величин мы видели, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy = \varphi_1(x) \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx = \varphi_2(y).$$

Поэтому

$$M(X + Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi_1(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y \varphi_2(y) dy = MX + MY.$$

С помощью метода полной индукции распространяем полученный результат на любое число слагаемых.

Теорема 3 о математических ожиданиях имеет чрезвычайно широкое применение благодаря тому, что она не накладывает каких-либо ограничительных условий на величины, входящие в сумму, — они могут, например, как угодно зависеть друг от друга.

Теорема 4. *Математическое ожидание суммы постоянной и случайной величин равно сумме постоянной величины и математического ожидания случайной величины:*

$$M(C + X) = C + MX. \quad (3.3.15)$$

Доказательство. На основании (3.3.11) и (3.3.13) получим:

$$M(C + X) = MC + MX = C + MX,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:*

$$M\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n MX_i. \quad (3.3.16)$$

Доказательство. Докажем сначала справедливость равенства

$$M(XY) = MXMY.$$

Имеем:

$$M(XY) = \sum_x \sum_y xyP(x, y).$$

Так как случайные величины независимы, то, как мы видели при рассмотрении двумерных случайных величин,

$$P(x, y) = P(x)P(y).$$

Поэтому

$$M(XY) = \sum_x \sum_y xyP(x)P(y) = \left[\sum_x xP(x) \right] \left[\sum_y yP(y) \right] = MXMY.$$

Теорема может быть расширена с помощью метода полной индукции. Для непрерывных случайных величин имеем:

$$\begin{aligned} M(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi_1(x)\varphi_2(y) dx dy = \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_1(x) dx \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi_2(y) dy \right] = MXMY. \end{aligned}$$

В противоположность теореме 3 теорема 5 о математических ожиданиях предполагает независимость множителей. Поэтому ее следует применять, проверив предварительно, что условие независимости выполнено.

Было бы, например, неверным такое преобразование $MX^2 = M(XX) = MXMX = (MX)^2$, так как оба множителя взаимно зависимы, и теорема умножения здесь неприменима. На самом деле, как мы увидим далее, $MX^2 \gg (MX)^2$.

Пример 3.3.5. Размерная цепь состоит из трех составляющих положительных звеньев X , Y и Z с математическими ожиданиями: $MX = 20,5$ мм, $MY = 30,2$ мм и $MZ = 50,1$ мм. Требуется определить математическое ожидание замыкающего звена K .

На основании теоремы о математическом ожидании суммы случайных величин находим:

$$MK = M(X + Y + Z) = MX + MY + MZ = 20,5 + 30,2 + 50,1 = 100,8 \text{ мм.}$$

Пример 3.3.6. Математическое ожидание отклонения X диаметра втулки от номинального размера равно $MX = +20$ мк. Математическое ожидание отклонения Y диаметра валика от номинального размера равно $MY = -10$ мк. Требуется найти математическое ожидание отклонения Δ зазора.

На основании теоремы о математическом ожидании суммы нескольких случайных величин находим:

$$M\Delta = M(X - Y) = MX - MY = 20 - (-10) = 30 \text{ мк.}$$

Пример 3.3.7. В примере 2.3.2 упоминалось о предложениях советских инженеров, относящихся к оценке зернистой структуры металлов с помощью так называемой «задачи Бюффона об игле», и было найдено, что вероятность $P(A)$ пересечения бросаемой на плоскость иглой длины $2l$ одной из параллельных, нагрфленных на плоскости на расстоянии $2a$ друг от друга прямых линий равна

$$P(A) = \frac{2l}{a\pi} \quad (l < a).$$

Для использования «задачи об игле» в указанных целях необходимо найти математическое ожидание числа пересечений полигонального контура с параллельными прямыми, нагрфленными на плоскости.

Найдем сначала математическое ожидание числа пересечений иглы длиной $2l$ ($l > a$), брошенной на разграфленную прямыми линиями плоскость. Пусть расстояние между прямыми равно $2a$. Разобьем длину $2l$ иглы на s частей $2l_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$) таких, что длина $2l_i$ каждой части меньше $2a$. Таким образом, $l_i < a$ ($i = 1, 2, \dots, s$) и $\sum_{i=1}^s l_i = l$. Обозначим через X_1, X_2, \dots, X_s дискретные

случайные величины, представляющие собой число пересечений с проведенными прямыми соответственно частей иглы $2l_1, 2l_2, \dots, 2l_s$.

При этом, очевидно, каждая из случайных величин X_1, X_2, \dots, X_s может принимать лишь два значения: 0 и 1. В нашей задаче требуется найти математическое ожидание суммы

$$X_0 = \sum_{i=1}^s X_i.$$

По теореме о математическом ожидании суммы нескольких случайных величин находим:

$$MX_0 = M\left(\sum_{i=1}^s X_i\right) = \sum_{i=1}^s MX_i.$$

Поскольку каждая из величин X_1, X_2, \dots, X_s может принимать лишь два значения 0 и 1 и при этом она принимает значение 1 с вероятностью $\frac{2l_i}{a\pi}$, то

$$MX_i = 1 \cdot \frac{2l_i}{a\pi} + 0 \left(1 - \frac{2l_i}{a\pi}\right) = \frac{2l_i}{a\pi}, \quad (3.3.17)$$

откуда

$$MX_0 = \sum_{i=1}^s \frac{2l_i}{a\pi} = \frac{2}{a\pi} \sum_{i=1}^s l_i = \frac{2l}{a\pi}. \quad (3.3.18)$$

Эта задача может быть распространена на полигональный контур. Пусть требуется найти математическое ожидание MX числа пересечений с проведенными на плоскости прямыми полигонального контура, составленного из s отрезков, длины которых равны $2l_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$), так, что $\sum_{i=1}^s 2l_i = 2l$. Обозначим через X_1, X_2, \dots, X_s числа пересечений прямых линий соответственно отрезками $2l_1, 2l_2, \dots, 2l_s$. Тогда на основании предыдущего получим:

$$MX = \sum_{i=1}^s MX_i = \sum_{i=1}^s \frac{2l_i}{a\pi} = \frac{1}{a\pi} \sum_{i=1}^s 2l_i = \frac{2l}{a\pi}. \quad (3.3.19)$$

§ 4. Характеристики рассеивания

3.4.1. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Для того чтобы охарактеризовать случайную величину, недостаточно одной только числовой характеристики положения центра группирования, так как она не характеризует того, как различные значения разбросаны около центра. Так, например, если мы имеем две равномерно распределенные непрерывные случайные величины и одна из них распределена по области от -1 до $+1$, а другая — от -100 до $+100$, то они имеют одинаковые математические ожидания, но резко различаются по характеру рассеивания. Первая из них во много раз компактнее распределена, чем вторая. Характеристика, показывающая насколько тесно сгруппированы возможные значения случайной величины около центра группирования, называется числовой характеристикой рассеивания. Очевидно, что таких характеристик с одинаковым назначением может быть несколько.

В технике наиболее часто употребляются следующие характеристики рассеивания:

- 1) *дисперсия*, обозначаемая символом DX ,
- 2) *среднее квадратическое отклонение*, обозначаемое через σ_X и
- 3) *коэффициент вариации*, обозначаемый символом v_X .

Здесь идет речь о теоретических (вероятностных) характеристиках рассеивания. Об эмпирических (статистических) характеристиках будет сказано в дальнейшем.

Во всех этих характеристиках за центр рассеивания принимается математическое ожидание величины.

Мы видели, что основная характеристика положения центра группирования — математическое ожидание представляет абсциссу центра «массы» вероятности. Как известно, в механике для характеристики расположения масс относительно их центра используют понятие момента инерции. Аналогичную характеристику рассеивания значений случайной величины около центра группирования называют *дисперсией*.

Рассмотрим сначала дискретную величину

$$X \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_n \\ P(x_1), & P(x_2), & \dots, & P(x_n) \end{pmatrix}.$$

Ее центр группирования будет лежать в точке $MX = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i)$. Вспомогательную величину $Y = X - MX$ называют *отклонением случайной величины X*. Эта величина будет иметь следующую таблицу распределения:

$$Y \begin{pmatrix} x_1 - MX, & x_2 - MX, & \dots, & x_n - MX \\ P(x_1), & P(x_2), & \dots, & P(x_n) \end{pmatrix}. \quad (3.4.1)$$

Заметим прежде всего, что центр группирования величины Y лежит в точке с координатой, равной нулю. В самом деле, так как MX — постоянная величина, то

$$MY = M(X - MX) = MX - MX = 0. \quad (3.4.2)$$

Таким образом, средняя величина отклонения равна нулю.

Естественно в качестве меры рассеивания, по аналогии с механикой, рассмотреть среднюю величину квадрата отклонений

$$MY^2 = M(X - MX)^2. \quad (3.4.3)$$

Эта величина получила название *дисперсии* величины X и обозначается через DX .

Ее можно рассматривать как момент инерции отдельных «масс вероятности» $P(x_i)$, помещенных в точках x_i , относительно оси, проходящей через центр тяжести этих масс

$$DX = M(X - MX)^2 = \sum_{i=1}^n P(x_i) (x_i - MX)^2. \quad (3.4.4)$$

Таким образом, *дисперсия дискретной случайной величины, имеющей конечное число значений, определяется так: квадрат отклонения каждого значения умножается на вероятность этого значения и все произведения складываются.*

Если дискретная случайная величина принимает счетное множество возможных значений, то дисперсия ее представляет сумму ряда

$$DX = \sum_{n=1}^{\infty} P(x_n) (x_n - MX)^2. \quad (3.4.5)$$

Дисперсия непрерывной случайной величины определяется совершенно аналогично. На графике плотности вероятности масса вероятности, как мы видели, изображается плоской фигурой, ограниченной числовой осью x и кривой $\varphi(x)$. Дисперсия представляет собой момент инерции этой плоской фигуры относительно оси $x = MX$, и потому

$$DX = M(X - MX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(x - MX)^2 dx. \quad (3.4.6)$$

Очевидно, что дисперсия уменьшается с уменьшением рассеивания случайной величины. Чем уже тот участок, на котором сосредоточены значения случайной величины, тем меньше ее дисперсия. Если величина всегда принимает одно единственное значение (с вероятностью, равной единице), т. е. является не случайной и ее рассеивание полностью отсутствует, то в этом случае дисперсия ее равна нулю. В случае дискретной величины, очевидно, верно и обратное предложение, если $DX = 0$, то величина неслучайная.

Иногда при вычислениях дисперсии пользуются не формулами (3.4.3), (3.4.5) и (3.4.6), а более удобной формулой

$$DX = MX^2 - (MX)^2. \quad (3.4.7)$$

Формула (3.4.7) выводится непосредственно из формул (3.4.4) и (3.4.6):

$$\begin{aligned} DX &= \sum_{i=1}^n P(x_i)(x_i - MX)^2 = \sum_{i=1}^n P(x_i)[x_i^2 - 2x_i MX + (MX)^2] = \\ &= \sum_{i=1}^n P(x_i)x_i^2 - 2MX \sum_{i=1}^n P(x_i)x_i + (MX)^2 \sum_{i=1}^n P(x_i). \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{i=1}^n P(x_i)x_i = MX \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n P(x_i) = 1,$$

то

$$DX = \sum_{i=1}^n P(x_i)x_i^2 - 2(MX)^2 + (MX)^2 = MX^2 - (MX)^2.$$

Аналогично этому для непрерывной величины

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)x^2 dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)x dx \right]^2.$$

Из формул (3.43), (3.45) и (3.46) видно, что дисперсия имеет размерность, представляющую квадрат размерности самой случайной величины, что не совсем удобно на практике.

Поэтому в технике чаще пользуются не самой дисперсией, а корнем квадратным из нее, взятым с положительным знаком, называемым *средним квадратическим отклонением* и обозначаемым символом σ_X .

Итак,

$$\sigma_X = +\sqrt{DX}. \quad (3.4.8)$$

Реже эту характеристику, а не ее квадрат, называют дисперсией.

Понятно, что размерность среднего квадратического отклонения совпадает с размерностью самой случайной величины X .

3.4.2. Коэффициент вариации. В качестве относительной характеристики рассеивания используется еще *коэффициент вариации*, обозначаемый через v_X , представляющий среднее квадратическое отклонение в процентах к математическому ожиданию.

Следовательно:

$$v_x = \frac{\sigma_x}{MX} 100. \quad (3.4.9)$$

Здесь предполагается, что $MX \neq 0$, а σ_x мало.

Коэффициент вариации показывает, насколько велико рассеивание, характеризующееся средним квадратическим отклонением, по сравнению со средним значением случайной величины.

Теоретическим числовым характеристикам рассеивания может быть дана приближенная оценка по выборочным данным с помощью эмпирических (статистических) числовых характеристик рассеивания (эмпирической дисперсии, эмпирического среднего квадратического отклонения, эмпирического коэффициента вариации, размаха варьирования, крайних значений), о которых подробнее будет сказано дальше.

Пример 3.4.1. Требуется вычислить числовые характеристики рассеивания — дисперсию, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации числа «внезональных» втулок в пробах из 10 штук по условиям примера 3.3.1.

Как было подсчитано в примере 3.3.1, математическое ожидание

$$MX = 1,28 \text{ штук.}$$

Вычисляем дисперсию по формуле (3.4.4):

$$\begin{aligned} DX &= 0,24(0 - 1,28)^2 + 0,38(1 - 1,28)^2 + 0,26(2 - 1,28)^2 + 0,10(3 - 1,28)^2 + \\ &+ 0,02(4 - 1,28)^2 = 0,24 \cdot 1,64 + 0,38 \cdot 0,08 + 0,26 \cdot 0,52 + \\ &+ 0,10 \cdot 2,96 + 0,02 \cdot 7,40 = 1,00 \text{ шт.}^2. \end{aligned}$$

Проще дисперсию вычислить по формуле (3.4.7):

$$\begin{aligned} DX &= 0,24 \cdot 0^2 + 0,38 \cdot 1^2 + 0,26 \cdot 2^2 + 0,10 \cdot 3^2 + 0,02 \cdot 4^2 - 1,28^2 = \\ &= 0,38 + 1,04 + 0,90 + 0,32 - 1,64 = 1,00 \text{ шт.}^2. \end{aligned}$$

Вычисляем среднее квадратическое отклонение по формуле (3.4.8):

$$\sigma_x = \sqrt{1} = 1 \text{ шт.}$$

Вычисляем коэффициент вариации по формуле (3.4.9):

$$v_x = \frac{1}{1,28} 100 = 78,1\%.$$

Пример 3.4.2. Требуется вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение равномерно распределенной непрерывной величины с областью значений от -1 до $+3$ мм.

В данном случае $\varphi(x) = c = \frac{1}{4} \frac{1}{\text{мм}}$ и ввиду симметрии распределения относительно середины промежутка $(-1, +3)$

$$MX = \frac{-1 + 3}{2} = 1.$$

Вычисляем дисперсию по формуле (3.4.6):

$$DX = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+3} (x - 1)^2 dx = \frac{1}{4} \left[\frac{(x - 1)^3}{3} \right]_{-1}^{+3} = \frac{4}{3} \text{ мм}^2.$$

Дисперсию можно вычислить также по формуле (3.4.7):

$$DX = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+3} x^2 dx - 1^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{+3} - 1 = \frac{4}{3} \text{ мм}^2.$$

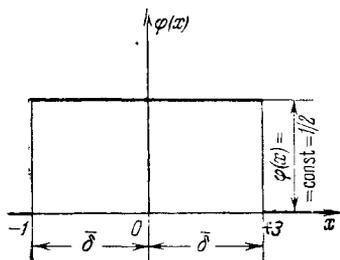
В данном случае дисперсию можно вычислить еще, воспользовавшись известной формулой для осевого момента инерции прямоугольника (черт. 26) относительно оси, проходящей через его центр тяжести:

$$J_{MX} = \frac{bh^3}{12}.$$

Здесь основанием прямоугольника будет $\varphi(x) = c = \frac{1}{4} \frac{1}{\text{мм}}$ и высотой — область значений, равная $R = x_{\text{нб}} - x_{\text{нм}} = 3 - (-1) = 4 \text{ мм}$. Тогда получим:

$$DX = J_{MX} = \frac{bh^3}{12} = \frac{\frac{1}{4} 4^3}{12} = \frac{4}{3} \text{ мм}^2.$$

Черт. 26. График непрерывной случайной величины, следующей закону равной вероятности.



Среднее квадратическое отклонение вычисляем по формуле (3.4.8):

$$\sigma_x = +\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{1,73} = 1,15 \text{ мм}.$$

Если выразить дисперсию и среднее квадратическое отклонение в долях половины $\bar{\delta}$ поля рассеивания, то получим:

$$DX = \frac{1}{2\bar{\delta}} \cdot \frac{(2\bar{\delta})^3}{12} = \frac{\bar{\delta}^2}{3}, \quad \sigma_x = \frac{\bar{\delta}}{\sqrt{3}},$$

откуда

$$\bar{\delta} = \sqrt{3} \sigma_x = 1,73 \sigma_x. \quad (3.4.10)$$

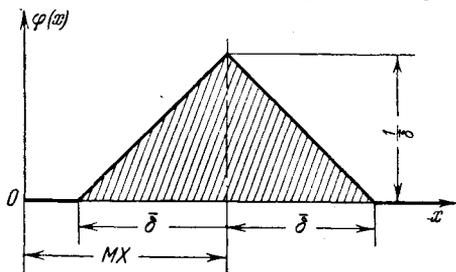
Пример 3.4.3. Возьмем распределение по закону равнобедренного треугольника (Симпсона) (черт. 27).

Как известно,

$$J_{MX} = J'_{MX} + J''_{MX},$$

где J'_{MX} — момент инерции левой половины фигуры относительно оси, проходящей через MX , J''_{MX} — момент инерции правой половины фигуры относительно той же оси.

Тогда, воспользовавшись тем, что дисперсия представляет момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через точку с абсциссой MX и известным соотношением для моментов инерции треугольника относительно его основания, получим:



Черт. 27. График распределения непрерывной случайной величины, следующей закону равнобедренного треугольника (Симпсона).

$$DX = J_{MX} = 2 \frac{bh^3}{12} = \frac{2 \frac{1}{\bar{\delta}} \bar{\delta}^3}{12} = \frac{\bar{\delta}^2}{6};$$

$$DX = \frac{\bar{\delta}^2}{6}, \quad (3.4.11)$$

$$\sigma_x = \sqrt{DX} = \frac{\bar{\delta}}{\sqrt{6}} = \frac{\bar{\delta}}{2,45}, \quad (3.4.12)$$

$$\bar{\delta} = 2,45 \sigma_x. \quad (3.4.13)$$

3.4.3. Теоремы о дисперсиях. Теорема 1. Дисперсия постоянной величины равна нулю

$$D(C) = 0. \quad (3.4.14)$$

Доказательство. Если величина $X = C$ постоянна, то ее математическое ожидание совпадает с единственным ее значением. Отклонение этой величины $Y = X - MX = C - C = 0$ тождественно, и потому

$$DX = MY^2 = 0.$$

Теорема 2. Дисперсия произведения постоянной величины C на случайную величину X равна произведению квадрата постоянной величины C на дисперсию случайной величины:

$$D(CX) = C^2DX. \quad (3.4.15)$$

Доказательство. На основании теоремы о математическом ожидании произведения постоянной C на случайную величину X (3.3.12) получим:

$$\begin{aligned} D(CX) &= M[CX - M(CX)]^2 = M[C(X - MX)]^2 = \\ &= M[C^2(X - MX)^2] = C^2M(X - MX)^2 = C^2DX. \end{aligned}$$

Теорема 3. Дисперсия суммы постоянной C и случайной величины X равна дисперсии случайной величины X :

$$D(C + X) = DX. \quad (3.4.16)$$

Доказательство. На основании определения дисперсии (3.4.4) и теоремы о математическом ожидании суммы постоянной и случайной величин (3.3.15) имеем:

$$D(C + X) = M[C + X - M(C + X)]^2 = M(C + X - C - MX)^2 = M(X - MX)^2 = DX.$$

Теорема 4. Дисперсия суммы нескольких независимых случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n равна сумме дисперсий этих величин:

$$D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n DX_i. \quad (3.4.17)$$

Доказательство. Докажем справедливость равенства

$$D(X + Y) = DX + DY.$$

Если величины X и Y независимы, то независимы, очевидно, и их отклонения от средних значений $X - MX$ и $Y - MY$. Следовательно, по теореме о математическом ожидании произведения независимых случайных величин (3.3.16) получим:

$$M[(X - MX)(Y - MY)] = M(X - MX)M(Y - MY) = 0,$$

так как ранее мы видели, что математическое ожидание отклонения величины от ее математического ожидания всегда равно нулю. Это обстоятельство часто упрощает выкладки. Учитывая, что дисперсия есть математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее среднего значения, получим:

$$D(X + Y) = M[(X + Y) - M(X + Y)]^2.$$

На основании теоремы о математическом ожидании суммы случайных величин (3.3.13) получим:

$$\begin{aligned} D(X + Y) &= M(X + Y - MX - MY)^2 = M[(X - MX) + (Y - MY)]^2 = \\ &= M[(X - MX)^2 + 2(X - MX)(Y - MY) + (Y - MY)^2] = \\ &= M(X - MX)^2 + 2M[(X - MX)(Y - MY)] + M(Y - MY)^2. \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Как мы упоминали, математическое ожидание произведения отклонений обращается в нуль и потому

$$D(X + Y) = M(X - MX)^2 + M(Y - MY)^2 = DX + DY.$$

Доказанная теорема может быть распространена на любое число слагаемых с помощью метода полной индукции.

Следствия из теоремы о дисперсии суммы нескольких независимых случайных величин:

1. Среднее квадратическое отклонение суммы нескольких независимых случайных величин равно корню квадратному из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин, т. е.

$$\sigma_{\sum_i X_i} = \sqrt{\sum_i \sigma_{X_i}^2}. \quad (3.4.19)$$

2. Теоретическая дисперсия среднего арифметического из n независимых одинаково распределенных (т. е. имеющих один и тот же закон распределения, а следовательно, одинаковые математические ожидания и дисперсии) величин равна дисперсии какой-либо из этих величин (они между собой равны), деленной на общее число величин:

$$D\bar{X} = D\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{DX}{n}. \quad (3.4.20)$$

Это вытекает из следующего:

$$\begin{aligned} D\bar{X} &= D\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = D\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)\right] = \\ &= \frac{1}{n^2} D(X_1 + X_2 + \dots + X_n). \end{aligned}$$

А так как величины X_1, X_2, \dots, X_n независимы и одинаково распределяются, то

$$\frac{1}{n^2} D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n}{n^2} = \frac{nDX}{n^2} = \frac{DX}{n}.$$

Здесь DX — значение дисперсии любой из величин X_i .

3. Среднее квадратическое отклонение средней арифметической из n независимых и одинаково распределенных случайных величин X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) равно среднему квадратическому отклонению каждой из величин (они имеют одинаковые средние квадратические отклонения), деленному на корень квадратный из числа величин, т. е.

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}. \quad (3.4.21)$$

Действительно, согласно следствию 2 имеем:

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{D\bar{X}} = \sqrt{\frac{DX}{n}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, дисперсия среднего арифметического из n одинаково распределенных независимых величин в n раз, а среднее квадратическое отклонение в \sqrt{n} раз меньше соответственно дисперсии и среднего квадратического отклонения каждого слагаемого.

Иными словами, при увеличении числа слагаемых дисперсия уменьшается, т. е. уменьшается рассеивание.

Такой случай мы имеем, когда, например, производим n измерений некоторого объекта. Если ошибки измерения считать независимыми, то последовательные измерения можно рассматривать как значения независимых и одинаково распределенных величин.

Средняя квадратическая ошибка выведенного на основании n измерений среднего арифметического будет выражаться формулой (3.4.21). При этом σ_X будет обозначать среднюю квадратическую ошибку одного измерения.

Пример 3.4.4. Размерная цепь имеет три составляющих положительных независимых звена X , Y и Z . При этом

$$DX = 100 \text{ мк}^2, DY = 144 \text{ мк}^2 \text{ и } DZ = 400 \text{ мк}^2.$$

Требуется определить дисперсию и среднее квадратическое отклонение замыкающего звена K .

По формуле (3.4.17) находим:

$$DK = DX + DY + DZ = 100 + 144 + 400 = 644 \text{ мк}^2.$$

По формуле (3.4.19) находим:

$$\sigma_K = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2} = \sqrt{100 + 144 + 400} = \sqrt{644} = 25,4 \text{ мк}.$$

Пример 3.4.5. При анализе технологического процесса установлено, что дисперсия наружного диаметра кольца, обрабатываемого на токарном автомате, $\sigma_X^2 = 0,36 \text{ мм}^2$.

Предполагается при текущем статистическом контроле качества продукции этого автомата за каждый час брать пробу объема 9 штук.

Требуется определить теоретические дисперсию и среднее квадратическое отклонение средней арифметической указанной пробы.

По формуле (3.4.20) находим:

$$D\bar{X} = \frac{DX}{n} = \frac{0,36}{9} = 0,04 \text{ мм}^2.$$

По формуле (3.4.21) определяем

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{0,36}}{\sqrt{9}} = 0,20 \text{ мм}.$$

3.4.4. Ковариация. Коэффициент корреляции. В общем случае дисперсия суммы двух величин может быть записана на основании (3.4.18) следующим образом:

$$D(X + Y) = DX + DY + 2M[(X - MX)(Y - MY)]$$

или при переходе к средним квадратическим отклонениям

$$\sigma_{(X+Y)}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\mu_{xy}, \quad (3.4.22)$$

где положено

$$\mu_{xy} = M[(X - MY)(Y - MY)]. \quad (3.4.23)$$

Эта последняя величина носит название *ковариации* или *смешанного второго момента величин X и Y* .

Ковариация μ_{xy} может быть преобразована так:

$$\begin{aligned} \mu_{xy} &= M[(X - MX)(Y - MY)] = M(XY - Y \cdot MX - X \cdot MY + MX \cdot MY) = \\ &= M(XY) - MX \cdot MY - MX \cdot MY + MX \cdot MY \end{aligned}$$

и окончательно

$$\mu_{xy} = \text{cov}(XY) = M(XY) - MX \cdot MY. \quad (3.4.24)$$

Введем теперь еще понятие *нормирования* случайных величин.

Нормирование заключается в переходе от случайной величины X к ее отклонению от центра группирования MX , деленному на среднее квадратическое отклонение σ_X , т. е. к

$$Z = \frac{X - a}{\sigma_X}, \quad (3.4.25)$$

где $a = MX$.

Нормирование приводит к тому, что новая величина будет иметь математическое ожидание, равное нулю, так как

$$MZ = M\left(\frac{X-a}{\sigma_X}\right) = \frac{M(X-a)}{\sigma_X} = \frac{MX - MX}{\sigma_X} = 0$$

и, кроме того, дисперсия DZ , а также среднее квадратическое отклонение σ_Z будут равны единице, т. е.

$$DZ = 1 \quad \text{и} \quad \sigma_Z = 1.$$

В самом деле, на основании (3.4.15) и (3.4.16)

$$DZ = \frac{1}{\sigma_X^2} D(X-a) = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1 \quad \text{и} \quad \sigma_Z = \sqrt{DZ} = 1.$$

Пусть теперь X и Y — случайные величины с математическими ожиданиями MX и MY и дисперсиями σ_X^2 и σ_Y^2 . Рассмотрим нормированные случайные величины X' и Y' , определяемые аналогично (3.4.25). Вычисляя по формуле (3.4.24) их ковариацию, получим:

$$\begin{aligned} \rho_{XY} = \text{cov}(X'Y') &= M\left(\frac{X-MX}{\sigma_X} \cdot \frac{Y-MY}{\sigma_Y}\right) = \\ &= \frac{M[(X-MX)(Y-MY)]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\text{cov}(XY)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\rho_{xy}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}. \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

Ковариация $\text{cov}(X'Y')$ нормированных величин X' и Y' называется *коэффициентом корреляции* величин X и Y .

Этот коэффициент по абсолютной величине всегда меньше единицы и достигает значения $+1$ или -1 лишь при наличии точной линейной зависимости между величинами X и Y .

Доказательство этому будет дано в главе VII, посвященной теории корреляции.

Если величины X и Y независимы, то, как видно из (3.4.24) и (3.3.16), их ковариация, а следовательно, и коэффициент корреляции равны нулю. Обратное заключение о независимости величин при условии $\rho_{XY} = 0$ несправедливо.

Теперь, используя коэффициент корреляции, мы можем дать расширенную формулировку двум ранее доказанным теоремам.

3.4.5. Теорема о математическом ожидании произведения двух случайных величин в общем случае. *Математическое ожидание произведения двух случайных величин равно сумме произведения их математических ожиданий и коэффициента корреляции, умноженного на произведение средних квадратических отклонений этих величин:*

$$M(XY) = MXMY + \rho_{xy} \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y. \quad (3.4.27)$$

Это положение непосредственно следует из (3.4.24) и (3.4.26).

3.4.6. Теорема о дисперсии суммы. *Дисперсия суммы нескольких случайных величин равна сумме их дисперсий и сумме произведений коэффициентов попарной корреляции величин на соответствующие пары средних квадратических отклонений:*

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n + \sum_{i \neq k} \rho_{x_i x_k} \sigma_{x_i} \sigma_{x_k}. \quad (3.4.28)$$

Для двух слагаемых X и Y формула (3.4.28) непосредственно следует из (3.4.22) и (3.4.26), так что

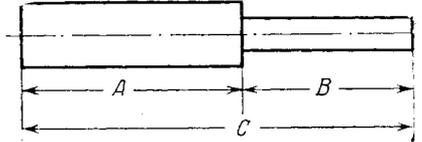
$$\left. \begin{aligned} \sigma_{(X+Y)}^2 &= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho_{xy}\sigma_X\sigma_Y, \\ \sigma_{(X-Y)}^2 &= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\rho_{xy}\sigma_X\sigma_Y. \end{aligned} \right\} \quad (3.4.29)$$

Точно так же эту формулу можно доказать для любого числа слагаемых с тем, однако, что в этом случае вместо равенства $(X+Y)^2 = X^2 + Y^2 + 2XY$ мы будем иметь равенство

$$\begin{aligned} (X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2 &= \\ &= X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 + \sum_{i \neq k} X_i X_k, \end{aligned}$$

что и приводит к (3.4.28).

Пример 3.4.6. Пусть мы имеем простейшую размерную цепь (см. 4.6.1), состоящую из двух независимых положительных составляющих звеньев A и B и замыкающего звена C , причем размер C получается в результате случайного сочетания звеньев A и B (черт. 28). Требуется определить дисперсию суммы $A+B$ и дисперсию разности $C-B$ для этой цепи.



Черт. 28. Размерная цепь с независимыми звеньями A и B .

Для суммы $A+B=C$ по формуле (3.4.29) находим:

$$\sigma_{(A+B)}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = \sigma_A^2 + \sigma_B^2,$$

так как ввиду независимости A и B $\rho_{AB} = 0$.

Для разности $C-B=A$ по той же формуле находим:

$$\sigma_{(C-B)}^2 = \sigma_C^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{CB}\sigma_C\sigma_B = \sigma_A^2 + 2\sigma_B^2 - 2 \frac{\sigma_B^2}{\sigma_C\sigma_B} \sigma_C\sigma_B = \sigma_A^2 + 2\sigma_B^2 - 2\sigma_B^2 = \sigma_A^2,$$

так как C и B зависимы и

$$\rho_{CB} = \frac{M(CB) - MC \cdot MB}{\sigma_C\sigma_B} = \frac{M(AB + B^2) - (MA + MB) MB}{\sigma_C \cdot \sigma_B} = \frac{MB^2 - (MB)^2}{\sigma_C\sigma_B} = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_C\sigma_B}.$$

3.4.7. Корреляция между двумя событиями. Рассмотрим еще один простой, но важный для практики случай применения коэффициента корреляции для оценки силы (тесноты) связи между величинами, когда исследуется связь между двумя признаками A и B , которые могут носить качественный характер. Это будет также случай связи между двумя событиями.

Таблица распределения при этом, подобно таблице 2.2.1, рассмотренной в 2.2.5, будет состоять из четырех клеток, отвечающих случаям появления комбинаций $AB, \bar{A}B, A\bar{B}$ и $\bar{A}\bar{B}$ (табл. 3.4.1):

Таблица 3.4.1

	B	\bar{B}	
A	$p_{11} = P(AB)$	$p_{10} = P(A\bar{B})$	$p_{11} + p_{10} = p_{1.} = P(A)$
\bar{A}	$p_{01} = P(\bar{A}B)$	$p_{00} = P(\bar{A}\bar{B})$	$p_{01} + p_{00} = p_{0.} = P(\bar{A})$
	$p_{11} + p_{01} = p_{.1} = P(B)$	$p_{10} + p_{00} = p_{.0} = P(\bar{B})$	

Мы можем связать с событием A величину X , принимающую два значения 1 и 0 соответственно тому, появляется ли в данном испытании A или не появляется.

Аналогичную величину Y свяжем с событием B . Закон распределения величины XY будет описываться табл. 3.4.2.

Таблица 3.4.2

$X \backslash Y$	1	0	Σ
1	p_{11}	p_{10}	$P(X=1) = p_{11} + p_{10} = p_{1\cdot}$
0	p_{01}	p_{00}	$P(X=0) = p_{01} + p_{00} = p_{0\cdot}$
Σ	$P(Y=1) = p_{11} + p_{01} = p_{\cdot 1}$	$P(Y=0) = p_{10} + p_{00} = p_{\cdot 0}$	$P(X=1) + P(X=0) =$ $= P(Y=1) + P(Y=0) = 1.$

Вероятности $p_{1\cdot}$ и $p_{0\cdot}$ значений 1 и 0 для величины X и вероятности $p_{\cdot 1}$ и $p_{\cdot 0}$ значений 1 и 0 для величины Y определяют законы распределения соответственно X и Y . При этом

$$p_{1\cdot} + p_{0\cdot} = 1$$

и

$$p_{\cdot 1} + p_{\cdot 0} = 1.$$

Математические ожидания и дисперсии будут определяться следующими формулами:

$$MX = p_{1\cdot} \cdot 1 + p_{0\cdot} \cdot 0 = p_{1\cdot},$$

$$MY = p_{\cdot 1} \cdot 1 + p_{\cdot 0} \cdot 0 = p_{\cdot 1}.$$

Далее

$$\sigma_X^2 = (1 - p_{1\cdot})^2 \cdot p_{1\cdot} + (0 - p_{1\cdot})^2 \cdot p_{0\cdot} = p_{0\cdot}^2 \cdot p_{1\cdot} + p_{1\cdot}^2 \cdot p_{0\cdot} = p_{0\cdot} \cdot p_{1\cdot}.$$

и

$$\sigma_X = \sqrt{p_{0\cdot} \cdot p_{1\cdot}} = \sqrt{(p_{01} + p_{00})(p_{11} + p_{10})}.$$

Аналогично

$$\sigma_Y = \sqrt{p_{\cdot 0} \cdot p_{\cdot 1}} = \sqrt{(p_{10} + p_{00})(p_{11} + p_{01})}.$$

Пользуясь (3.3.1), получим:

$$M(XY) = p_{11} \cdot 1 \cdot 1 + p_{10} \cdot 1 \cdot 0 + p_{01} \cdot 0 \cdot 1 + p_{00} \cdot 0 \cdot 0 = p_{11}$$

и

$$\begin{aligned} r_{xy} = \text{cov}(XY) &= M(XY) - MX \cdot MY = p_{11} - p_{1\cdot} \cdot p_{\cdot 1} = p_{11} - (p_{11} + p_{10})(p_{11} + p_{01}) = \\ &= p_{11}(p_{11} + p_{10} + p_{01} + p_{00}) - (p_{11} + p_{10})(p_{11} + p_{01}) = p_{11}p_{00} - p_{01}p_{10}. \end{aligned}$$

Поэтому коэффициент корреляции между X и Y , применяемый в качестве меры тесноты связи между событиями A и B , в данном случае оказывается равным

$$\rho = \frac{p_{11} - p_{1\cdot} \cdot p_{\cdot 1}}{\sqrt{p_{1\cdot} \cdot p_{0\cdot} \cdot p_{\cdot 1} \cdot p_{\cdot 0}}} = \frac{p_{11}p_{00} - p_{01}p_{10}}{\sqrt{(p_{11} + p_{10})(p_{01} + p_{00})(p_{11} + p_{01})(p_{10} + p_{00})}}. \quad (3.4.30)$$

При других указанных вначале обозначениях с учетом (2.2.15) будем иметь

$$\rho = \frac{P(AB) - P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(\bar{A})P(B)P(\bar{B})}} = [P(B|A) - P(B)] \sqrt{\frac{P(A)}{P(\bar{A})P(B)P(\bar{B})}}, \quad (3.4.31)$$

откуда следует:

$$\left. \begin{aligned} P(B|A) &= P(B) + \rho \sqrt{\frac{P(\bar{A})P(B)P(\bar{B})}{P(A)}} \\ P(B|\bar{A}) &= P(B) - \rho \sqrt{\frac{P(A)P(B)P(\bar{B})}{P(\bar{A})}} \end{aligned} \right\} \quad (3.4.32)$$

При выводе второго из равенств (3.4.32) использовано (2.2.13) и (2.2.15).

Отметим некоторые свойства коэффициента корреляции между событиями или качественными признаками.

Прежде всего из (3.4.31) непосредственно следует, что:

1. Коэффициент корреляции между A и \bar{B} равен по абсолютному значению и противоположен по знаку коэффициенту корреляции между A и B , так как $P(B|A) - P(B) = -[P(\bar{B}|A) - P(\bar{B})]$; коэффициент же корреляции между \bar{A} и \bar{B} совпадает с коэффициентом корреляции между A и B .

2. Коэффициент корреляции между двумя независимыми событиями равен нулю и в этом случае

$$\text{cov}(XY) = \rho_{xy} = 0.$$

3. Если $P(A)$ и $P(B)$ даны, то $P(B|A)$ возрастает вместе с алгебраическим возрастанием ρ ; в противоположном случае $P(B|A)$ уменьшается.

Кроме того, легко убедиться, что коэффициент корреляции никогда по абсолютному значению не бывает больше единицы. Если события A и B совпадают и, следовательно, $P(A) = P(B) = P(AB)$, то в этом и только в этом случае $\rho = 1$. Если же события A и B являются взаимными отрицаниями, т. е. совпадают события A и \bar{B} , то $\rho = -1$.

В самом деле, если $P(A) = P(B) = P(AB)$, то $P(A) - [P(A)]^2 = P(A) \cdot P(\bar{A})$ и, как видно из (3.4.31), $\rho = 1$. Обратно, пусть дано, что $\rho = 1$. Предположим теперь, что $P(A) \neq P(B)$, или для определенности $P(A) > P(B)$. Тогда $P(\bar{A}) < < P(\bar{B})$ и, записав (3.4.32) в виде

$$P(B|\bar{A}) = P(B) \left[1 - \rho \sqrt{\frac{P(A)P(\bar{B})}{P(\bar{A})P(B)}} \right], \quad (3.4.33)$$

мы получили бы под корнем величину больше единицы и при $\rho = 1$ вероятность $P(B|\bar{A})$ оказалась бы отрицательным числом, что невозможно, и следовательно, необходимо принять $P(A) = P(B)$, откуда в свою очередь следует, что $P(AB) = P(B) = P(A)$. Из соотношения (3.4.33) следует, что

$$\rho \leq \sqrt{\frac{P(\bar{A})P(B)}{P(A)P(\bar{B})}}, \quad (3.4.34)$$

причем знак равенства отвечает случаю, когда $P(B|\bar{A}) = 0$, т. е. $P(B) = P(AB)$, а это означает, что событие A является необходимым следствием события B . Если же при этом событие B не является также обязательным следствием события A и потому $P(A|\bar{B}) \neq 0$, т. е. $P(AB) \neq P(A)$, то из (3.4.34) видно, что, несмотря на то что событие A является следствием события B , коэффициент корреляции может оказаться значительно меньше единицы.

Так, например, обозначив при бросании игральной кости выпадение 4 очков через B и появление четного числа очков через A , мы получим по формуле (3.4.31):

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{5}} = 0,45,$$

хотя событие A является обязательным следствием события B .

Пример 3.4.7. Пусть мы располагаем полученными на основе обширных наблюдений данными о вероятностях распределения валиков по двум признакам — конусности и овальности в следующем виде (табл. 3.4.3):

Таблица 3.4.3

Конусность	Овальность		
	Имеется	Не имеется	Итого
Имеется	0,06	0,01	0,07
Не имеется	0,03	0,90	0,93
Итого	0,09	0,91	1,00

Требуется оценить тесноту связи между получаемой при данном технологическом процессе конусностью и овальностью валиков. Определяем коэффициент корреляции между конусностью и овальностью валиков по (3.4.30):

$$r = \frac{0,06 - 0,07 \cdot 0,09}{\sqrt{0,07 \cdot 0,93 \cdot 0,09 \cdot 0,91}} = 0,76.$$

Мы видим, что коэффициент корреляции получился довольно значительным, что указывает на существенную связь между конусностью и овальностью валиков, т. е. позволяет предполагать наличие таких производственных факторов, вызывающих конусность, которые вместе с тем способны вызвать и овальность.

Более подробно вопрос о тесноте и форме связи между величинами будет рассмотрен в главе VII.

§ 5. Приближенное определение случайных величин

3.5.1. Приближенное определение математического ожидания функции.

В тех случаях, когда известны математическое ожидание и дисперсия самой величины X , а функция $f(x)$ вблизи точки $x = MX$ является гладкой, оказывается достаточным приближенное вычисление математического ожидания и дисперсии функции $Y = f(X)$ непрерывной случайной величины X . Формулы для таких вычислений могут быть выведены следующим путем.

Как правило, обычно большая часть массы вероятности случайной величины X лежит внутри интервала

$$(MX - \gamma\sigma_X, MX + \gamma\sigma_X) \quad (3.5.1).$$

при надлежащим образом подобранном коэффициенте γ . Предположим, например, что γ является небольшим положительным числом. Так как вероятность значений случайной величины X , отклоняющихся от MX больше чем на $\gamma\sigma_X$, предполагается малой, то достаточно принять во внимание только значения X , лежащие внутри упомянутого интервала. Разлагая

$$Y = f(X) \quad (3.5.2)$$

по формуле Тейлора около точки $X = MX$, получим:

$$Y = f(X) = f(MX) + (X - MX)f'(MX) + \frac{(X - MX)^2}{2}f''(\xi), \quad (3.5.3)$$

где ξ — есть некоторое значение между MX и X .

Обычно внутри рассматриваемой узкой области Y является мало изменяющейся функцией, так что можно пренебречь членом второго порядка и написать

$$Y \approx f(MX) + (X - MX)f'(MX). \quad (3.5.4)$$

Из (3.5.4) получаем приближенные значения математического ожидания и дисперсии величины Y . Используя (3.5.4), на основании теорем 2, 3 и 4 о математических ожиданиях, получим:

$$\begin{aligned} MY &= M[f(X)] \approx M[f(MX) + (X - MX)f'(MX)] = \\ &= M[f(MX)] + M[(X - MX)f'(MX)] = f(MX) + f'(MX)M(X - MX), \end{aligned}$$

откуда окончательно получим:

$$MY = M[f(X)] \approx f(MX). \quad (3.5.5)$$

Таким образом, математическое ожидание функции непрерывной случайной величины X приближенно равно значению этой функции в точке MX .

3.5.2. Дисперсия функции случайной величины. На основании теорем 2 и 3 о дисперсиях из соотношения (3.5.4) получим:

$$\begin{aligned} DY &= D[f(X)] \approx D[f(MX) + (X - MX)f'(MX)] = \\ &= D[(X - MX)f'(MX)] = [f'(MX)]^2 D(X - MX) = [f'(MX)]^2 DX. \end{aligned}$$

Окончательно будем иметь:

$$DY = D[f(X)] \approx [f'(MX)]^2 DX. \quad (3.5.6)$$

Дисперсия функции случайной величины X приближенно равна произведению квадрата значения производной функции в точке MX на дисперсию X .

Из соотношений (3.5.6) и (3.4.7) легко найти среднее квадратическое отклонение функции случайной величины X :

$$\sigma_Y = \sigma_{f(X)} \approx |f'(MX)| \sigma_X, \quad (3.5.7)$$

т. е. среднее квадратическое отклонение функции случайной величины X равно произведению ее среднего квадратического отклонения на абсолютное значение производной функции в точке MX .

Пример 3.5.1. Пусть $Y = \frac{1}{X}$. Математическое ожидание величины X есть MX и ее среднее квадратическое отклонение есть σ_X .

Требуется определить математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации величины Y . По соотношению (3.5.5) находим:

$$MY \approx \frac{1}{MX}.$$

По формуле (3.5.7) получаем:

$$\sigma_Y \approx \frac{\sigma_X}{(MX)^2},$$

откуда

$$v_Y = \frac{\sigma_Y}{MY} 100 \approx \frac{\sigma_X}{MX} \cdot 100 = v_X.$$

Мы предполагаем, конечно, что $MX \neq 0$ и дисперсия величины сравнительно мала.

3.5.3. Математическое ожидание и дисперсия функции двух случайных величин. Пусть теперь $Z = f(X, Y)$ есть функция, мало изменяющаяся внутри той области, в которой сосредоточена большая часть массы вероятности, и поверхность $Z = f(X, Y)$ может быть аппроксимирована своей касательной плоскостью в точке (MX, MY) .

Тогда, обобщая соотношение (3.5.4) для некоторой достаточно малой окрестности точки (MX, MY) , будем иметь:

$$Z \approx f(MX, MY) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (X - MX) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (Y - MY), \quad (3.5.8)$$

где значок $(\cdot)_0$ указывает, что частные производные берутся в точке (MX, MY) .

Из (3.5.8) следует далее

$$MZ \approx f(MX, MY), \quad (3.5.9)$$

так как попережнему $M(X - MX) = M(Y - MY) = 0$;

$$\begin{aligned} DZ &\approx M[Z - f(MX, MY)]^2 \approx M \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 (X - MX) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 (Y - MY) \right]^2 = \\ &= M \left\{ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 (X - MX) \right]^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 (X - MX) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 (Y - MY) + \right. \\ &+ \left. \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 (Y - MY) \right]^2 \right\} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0^2 M(X - MX)^2 + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 M[(X - MX)(Y - MY)] + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0^2 M(Y - MY)^2 = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0^2 DX + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0^2 DY + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 \mu_{xy}, \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{xy} &= M[(X - MX)(Y - MY)] = \text{cov } XY, \\ \sigma_Z &\approx \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0^2 \sigma_X^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0^2 \sigma_Y^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 \mu_{xy}}. \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

Пример 3.5.2. Пусть $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ и MX и MY — математические ожидания соответственно величин X и Y , а DX , DY — их дисперсии. Требуется определить математическое ожидание и дисперсию величины Z , если между X и Y нет вероятностной связи.

На основании формулы (3.5.9) получим:

$$MZ \approx \sqrt{(MX)^2 + (MY)^2}.$$

По соотношению формулы (3.5.10) будем иметь:

$$DZ = \frac{(MX)^2}{(MX)^2 + (MY)^2} DX + \frac{(MY)^2}{(MX)^2 + (MY)^2} DY.$$

§ 6. Моменты высших порядков и производящая функция

3.6.1. Начальные и центральные моменты. В теории вероятностей широко используются моменты, введенные Чебышевым.

Моментом r -го порядка случайной величины называется математическое ожидание величины $(X - a)^r$ (где a — любое вещественное число):

$$\nu_r(a) = M(X - a)^r. \quad (3.6.1)$$

Если $a = 0$, то момент называется *начальным*. Таким образом, начальный момент r -го порядка ν_r определяется выражением

$$\nu_r = MX^r. \quad (3.6.2)$$

Если $a = MX$, то момент называется *центральным*; он определяется выражением

$$\mu_r = M(X - MX)^r. \quad (3.6.3)$$

Математическое ожидание (среднее значение) при таком обозначении является начальным моментом первого порядка, т. е.

$$MX = \nu_1. \quad (3.6.4)$$

Дисперсия является центральным моментом второго порядка, т. е.

$$DX = \mu_2. \quad (3.6.5)$$

Между центральными и начальными моментами существует простая связь, а именно для первых четырех моментов имеем:

$$\mu_1 = 0; \quad (3.6.6)$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2; \quad (3.6.7)$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3; \quad (3.6.8)$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4. \quad (3.6.9)$$

Соотношение (3.6.6) представляет собой записанное в форме моментов соотношение (3.4.2).

Соотношение (3.6.7) представляет собой записанное в форме моментов соотношение (3.4.7).

Соотношение (3.6.8) может быть просто выведено следующим образом:

$$\mu_3 = M(X - MX)^3 = M[X^3 - 3X^2MX + 3X(MX)^2 - (MX)^3].$$

На основании теоремы о математическом ожидании суммы нескольких случайных величин получим:

$$\begin{aligned} M[X^3 - 3X^2MX + 3X(MX)^2 - (MX)^3] &= MX^3 - 3MX^2MX + 3(MX)^3 - (MX)^3 = \\ &= MX^3 - 3MX^2MX + 2(MX)^3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3. \end{aligned}$$

Соотношение (3.6.9) может быть аналогичным образом выведено с помощью разложения по биному Ньютона:

$$\begin{aligned} \mu_4 &= M(X - MX)^4 = M[X^4 - 4X^3MX + 6X^2(MX)^2 - 4X(MX)^3 + (MX)^4] = \\ &= MX^4 - 4MX^3MX + 6MX^2(MX)^2 - 3(MX)^4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4. \end{aligned}$$

Пример 3.6.1. В примере 3.4.1 математическое ожидание числа «внезапных» втулок в пробе равнялось $MX = 1,28$ и дисперсия $DX = 2,64 - 1,64 = 1,00$, где $\nu_2 = 2,64$ и $\nu_1^2 = 1,28^2 = 1,64$.

Требуется вычислить центральный момент третьего порядка этой случайной величины.

Вычисляем начальный момент третьего порядка

$$\begin{aligned} \nu_3 &= 0,24 \cdot 0^3 + 0,38 \cdot 1^3 + 0,26 \cdot 2^3 + 0,10 \cdot 3^3 + 0,02 \cdot 4^3 = \\ &= 0,38 + 2,08 + 2,70 + 1,28 = 6,44. \end{aligned}$$

По формуле (3.6.8) находим:

$$\mu_3 = 6,44 - 3 \cdot 2,64 \cdot 1,28 + 2 \cdot 1,28^3 = 0,50.$$

3.6.2. Производящая функция. Если существуют моменты всех порядков, то часто бывает удобно характеризовать распределение с помощью так называемой производящей функции.

Производящей функцией величины X называется математическое ожидание e^{Xt} , где t является действительным числом (вспомогательным параметром).

Таким образом, обозначая производящую функцию через $m(t)$, по соотношениям (3.3.8) и (3.3.9) будем иметь:

$$m(t) = Me^{Xt} = \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) e^{x_i t} \quad (3.6.10)$$

для дискретных величин и

$$m(t) = Me^{Xt} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} \varphi(x) dx \quad (3.6.11)$$

для непрерывно распределенных величин с плотностью вероятности $\varphi(x)$.

Мы предполагаем, что ряд (3.6.10) и интеграл (3.6.11) сходятся по крайней мере для достаточно малых значений вспомогательного параметра t .

Все дальнейшие операции дифференцирования могут быть легко обоснованы при этом предположении.

Мы покажем, что знание производящей функции $m(t)$ равносильно знанию всех моментов целых порядков.

Для этого, продифференцировав r раз обе части равенств (3.6.10) и (3.6.11) по t , получим:

$$\frac{d^r}{dt^r} m(t) = \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) e^{x_i t} x_i^r$$

или

$$\frac{d^r}{dt^r} m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{xt} \varphi(x) dx$$

(законность этих операций при наших допущениях может быть строго обоснована). Положив $t=0$ как в том, так и в другом случае, найдем:

$$\frac{d^r}{dt^r} m(0) = M X^r = \nu_r, \quad (3.6.12)$$

где $\frac{d^r}{dt^r} m(0)$ представляет r -ю производную от производящей функции $m(t)$ при $t=0$.

Таким образом, начальный момент любого целого порядка может быть получен путем дифференцирования производящей функции.

Если в равенствах (3.6.10) и (3.6.11) разложить e^{Xt} в ряд и выполнить затем суммирование или интегрирование, то получится ряд выражений для $m(t)$ в виде степенного ряда с коэффициентами, зависящими от моментов распределения¹⁾.

Таким образом:

$$\begin{aligned} m(t) &= M e^{Xt} = M \left(1 + Xt + \frac{1}{2!} (Xt)^2 + \frac{1}{3!} (Xt)^3 + \dots \right) = \\ &= 1 + t M X + \frac{1}{2!} t^2 M X^2 + \frac{1}{3!} t^3 M X^3 + \dots = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} t^l M X^l = \\ &= 1 + t \nu_1 + \frac{t^2}{2!} \nu_2 + \frac{t^3}{3!} \nu_3 + \dots = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \nu_l t^l. \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

В силу известных формул Маклорена для коэффициентов степенного ряда получим снова:

$$\left(\frac{d^r}{dt^r} m(t) \right)_{t=0} = \nu_r,$$

что мы имели и раньше.

Пример 3.6.2. Пусть распределение случайной величины следует закону Пуассона:

$$P(X=n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

По формуле (3.6.10) находим:

$$m(t) = M e^{Xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nt} e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t},$$

¹⁾ Законность этих операций может быть оправдана при довольно широких условиях.

так как сумма ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda.$$

Первые две производные от $m(t)$ будут:

$$m'(t) = e^{-\lambda} \lambda e^t e^{\lambda e^t},$$

$$m''(t) = e^{-\lambda} (\lambda e^t \lambda e^t e^{\lambda e^t} + \lambda e^t e^{\lambda e^t}) = e^{-\lambda} \lambda e^t e^{\lambda e^t} (1 + \lambda e^t),$$

откуда

$$MX = \nu_1 = m'(0) = e^{-\lambda} \lambda e^\lambda = \lambda,$$

$$\nu_2 = MX^2 = m''(0) = e^{-\lambda} \lambda e^\lambda (1 + \lambda) = \lambda(1 + \lambda),$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \nu_2 = \lambda(1 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

Таким образом, если случайная величина следует закону Пуассона, то ее математическое ожидание равно дисперсии и равно параметру λ :

$$MX = DX = \lambda. \quad (3.6.14)$$

При вычислении моментов случайной величины часто используется следующее свойство производящей функции суммы независимых случайных величин. Пусть X и Y — независимые случайные величины $m_1(t)$, $m_2(t)$ и $m(t)$, соответственно производящие функции X , Y и $X + Y$.

Имеем:

$$m(t) = Me^{t(X+Y)} = M(e^{tX} e^{tY}).$$

На основании теоремы о математическом ожидании произведения независимых случайных величин будем иметь:

$$M(e^{tX} e^{tY}) = Me^{tX} \cdot Me^{tY} = m_1(t) m_2(t) = m(t).$$

Это соотношение непосредственно распространяется на случай произвольного конечного числа случайных величин: если X_1, X_2, \dots, X_n — независимые случайные величины с производящими функциями $m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t)$, то производящая функция $m(t)$ суммы $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ равна

$$m(t) = m_1(t) \cdot m_2(t) \dots m_n(t), \quad (3.6.15)$$

т. е. производящая функция суммы независимых случайных величин равна произведению производящих функций сомножителей.

Именно это свойство и делает применение производящих функций весьма полезным во многих вопросах, связанных с суммами независимых величин.

С другой стороны, производящая функция вполне определяет соответствующий ей закон распределения. Две различные производящие функции отвечают различным законам распределения. Это соответствие между законами распределения и производящими функциями обладает, кроме того, свойством непрерывности в следующем смысле; если какая-либо последовательность производящих функций $m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t), \dots$ случайных величин $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ сходится к производящей функции $m(t)$ некоторой случайной величины X с функцией распределения $F(x)$, то оказывается, что законы распределения $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x), \dots$ последовательности $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ сходятся в свою очередь к закону $F(x)$, так что в каждой точке непрерывности функции $F(x)$ будем иметь:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x).$$

Эти предложения мы не будем доказывать, но часто будем убеждаться в их справедливости.

Часто для вычислений центральных моментов используются производящие функции *нормированных* случайных величин, введенных в 3.4.4.

Найдем производящую функцию $\bar{m}(t)$ закона распределения величины, полученной нормированием X :

$$\bar{m}(t) = M e^{\frac{X-a}{\sigma} t} = M \left(e^{\frac{Xt}{\sigma}} e^{-\frac{at}{\sigma}} \right) = e^{-\frac{at}{\sigma}} M e^{\frac{Xt}{\sigma}} = e^{-\frac{at}{\sigma}} m\left(\frac{t}{\sigma}\right),$$

и окончательно

$$\bar{m}(t) = e^{-\frac{at}{\sigma}} m\left(\frac{t}{\sigma}\right), \quad (3.6.16)$$

т. е. производящая функция нормированного отклонения случайной величины, или, иначе, нормированная производящая функция равна произведению $e^{-\frac{at}{\sigma}}$ на производящую функцию от самой величины X , в которой параметр t следует заменить на $\frac{t}{\sigma}$ 1).

Продифференцировав нормированную производящую функцию r раз и приравняв $t=0$, мы получим, как и прежде, r -й начальный момент, но теперь это будет \bar{v}_r — начальный момент r -го порядка нормированного распределения, т. е. распределения $Z = \frac{X-a}{\sigma_X}$:

$$\frac{d^r}{dt^r} \bar{m}(0) = \bar{v}_r = M \left(\frac{X-a}{\sigma_X} \right)^r = \frac{1}{\sigma_X^r} M(X-a)^r = \frac{1}{\sigma_X^r} M(X-MX)^r. \quad (3.6.17)$$

Но $M(X-MX)^r = \mu_r$ и потому

$$\bar{v}_r = \frac{\mu_r}{\sigma_X^r}, \quad (3.6.18)$$

т. е. нормированный начальный момент \bar{v}_r представляет центральный момент μ_r распределения случайной величины X , выраженный в долях среднего квадратического отклонения σ_X в степени r .

§ 7. Закон больших чисел. Теорема Чебышева

3.7.1. Неравенство Чебышева. При обосновании статистических приемов существенную роль играют теоремы, связывающие определенным образом теоретические и эмпирические числовые характеристики случайных величин.

В разработке этих теорем ведущая роль принадлежит крупнейшим русским ученым П. Л. Чебышеву, А. А. Маркову и другим.

П. Л. Чебышев впервые доказал теорему, устанавливающую, что при определенных условиях средние арифметические случайных величин почти наверно будут близки к их математическим ожиданиям.

Ближайший ученик П. Л. Чебышева и продолжатель его работ академик А. А. Марков доказал эту теорему в еще более широких условиях.

Мы начнем с установления неравенства, введенного Чебышевым и играющего важную роль в доказательстве его теоремы.

Неравенство Чебышева (первая форма). *Какова бы ни была случайная величина X , которая может принимать только неотрицательные значения и имеет конечное математическое ожидание, всегда имеет место неравенство*

$$P(X \geq 1) \leq MX, \quad (3.7.1)$$

1) Вообще, рассматривая линейную функцию $Y = \alpha X + \beta$ величины X , найдем:

$$m_Y(t) = M [e^{(\alpha X + \beta)t}] = e^{\beta t} M e^{\alpha X t} = e^{\beta t} m(\alpha t).$$

т. е. вероятность того, что случайная величина X примет значение, не меньшее единицы, не больше ее математического ожидания.

Доказательство. Пусть закон распределения дискретной случайной величины X есть $P(x)$. Тогда

$$P(X \geq 1) = \sum_{x \geq 1} P(x) \leq \sum_{x \geq 1} xP(x) \leq \sum_x xP(x) = MX,$$

что можно пояснить шаг за шагом:

1) По правилу сложения вероятность того, что величина X примет значение, не меньшее единицы, складывается из вероятностей того, что она примет то или иное из своих возможных значений, не меньших единицы, т. е.

$$P(X \geq 1) = \sum_{x \geq 1} P(x). \quad (3.7.2)$$

2) Сумма, стоящая в правой части равенства (3.7.2), распространяется лишь на те значения X , которые не меньше единицы. Поэтому, если мы будем умножать члены $P(x)$ этой суммы на соответствующие значения x , то эти члены могут только увеличиваться; при этом и вся сумма может только увеличиваться:

$$\sum_{x \geq 1} P(x) \leq \sum_{x \geq 1} xP(x). \quad (3.7.3)$$

3) По условию величина X может принимать только неотрицательные значения x , поэтому и выражения вида $xP(x)$, где x — любое возможное значение величины X , а $P(x)$ — вероятность этого значения, могут быть только неотрицательными. Следовательно, заменяя сумму произведений $xP(x)$, где x — значения величины X , удовлетворяющие неравенству $x \geq 1$ суммой всех таких произведений $xP(x)$, распространенных как на значения $x \geq 1$, так и на значения, меньшие единицы, мы можем только увеличить сумму, стоящую в правой части неравенства (3.7.3), а поэтому

$$\sum_{x \geq 1} xP(x) \leq \sum_x xP(x). \quad (3.7.4)$$

4) Сумма, стоящая в правой части неравенства (3.7.4), представляет собой математическое ожидание случайной величины X , выражаемое формулой (3.3.1), т. е.

$$\sum_x xP(x) = MX.$$

Подобным же образом можно вывести это неравенство для непрерывных случайных величин.

Следствие. От доказанного нами неравенства можно перейти к несколько более общему. Пусть α — положительное число. Тогда, используя доказанное неравенство, получим для всякой величины, принимающей только неотрицательные значения:

$$P(X \geq \alpha) = P\left(\frac{X}{\alpha} \geq 1\right) \leq M\left(\frac{X}{\alpha}\right) = \frac{MX}{\alpha}$$

и, значит,

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{MX}{\alpha}. \quad (3.7.5)$$

Неравенство Чебышева (вторая формула). Какова бы ни была случайная величина X , которая имеет конечное математическое ожидание и конечную дисперсию, и какова бы ни была положительная постоянная величина ε , всегда имеет место неравенство

$$P(|X - MX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}. \quad (3.7.6)$$

Доказательство. Рассмотрим не самое интересующее нас неравенство $|X - \mathbf{M}X| < \varepsilon$, а противоположное ему неравенство

$$|X - \mathbf{M}X| \geq \varepsilon. \quad (3.7.7)$$

Возведя обе стороны неравенства в квадрат, получим равносильное неравенство

$$(X - \mathbf{M}X)^2 \geq \varepsilon^2.$$

Теперь применим неравенство Чебышева в форме (3.7.5) к неотрицательной величине $(X - \mathbf{M}X)^2$, полагая $\alpha = \varepsilon^2$; опираясь на соотношение (3.4.6), получим:

$$\mathbf{P}[(X - \mathbf{M}X)^2 \geq \varepsilon^2] = \mathbf{P}(|X - \mathbf{M}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2},$$

т. е.

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{M}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2}. \quad (3.7.8)$$

Из неравенства (3.7.8) следует:

$$1 - \mathbf{P}(|X - \mathbf{M}X| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2}. \quad (3.7.9)$$

В формуле (2.2.10) для противоположных событий $|X - \mathbf{M}X| \geq \varepsilon$ и $|X - \mathbf{M}X| < \varepsilon$ имеем:

$$1 - \mathbf{P}(|X - \mathbf{M}X| \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(|X - \mathbf{M}X| < \varepsilon). \quad (3.7.10)$$

Заменяя левую часть неравенства (3.7.9) согласно соотношению (3.7.10), получим:

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{M}X| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2},$$

что и требовалось доказать.

3.7.2. Теорема Чебышева. Сформулируем и докажем теперь теорему Чебышева.

Теорема Чебышева. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — серия попарно независимых случайных величин, удовлетворяющих следующим условиям:

1° Все величины $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ имеют одно и то же математическое ожидание $\mathbf{M}X_1 = \mathbf{M}X_2 = \dots = \mathbf{M}X_n = a$.

2° Дисперсии величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ конечны и равномерно ограничены, т. е. $\mathbf{D}X_k < C$ ($k = 1, 2, \dots, n$), где C — некоторая положительная постоянная. Тогда, какова бы ни была постоянная положительная величина ε , имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1. \quad (3.7.11)$$

Доказательство. В силу формул (3.3.12) и (3.3.13)

$$a = \frac{\mathbf{M}X_1 + \mathbf{M}X_2 + \dots + \mathbf{M}X_n}{n} = \mathbf{M}\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right).$$

Применим вторую форму неравенства Чебышева к случайной величине $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\mathbf{D}\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}.$$

Отсюда, опираясь на формулы (3.4.15) и (3.4.17), мы получим:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\mathbf{D}X_1 + \mathbf{D}X_2 + \dots + \mathbf{D}X_n}{n^2\varepsilon^2}. \quad (3.7.12)$$

Но в силу условия 2° теоремы $DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n \leq nC$, и потому из (3.7.12) следует

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} = 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

а так как вероятность не может быть больше единицы, то мы получаем:

$$1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} < P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) \leq 1,$$

откуда, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим (3.7.11).

Большое значение теоремы Чебышева можно пояснить на следующем примере.

Пусть нам предстоит измерить некоторую неизвестную физическую постоянную A .

Будем производить ряд независимых друг от друга измерений. Результаты каждого из измерений можно рассматривать как случайную величину. Пусть X_1, X_2, \dots, X_n — эти случайные величины. Допустим, что средние значения этих величин одинаковы, как это принимается в теории ошибок:

$$MX_1 = MX_2 = \dots = MX_n = a.$$

Практически это допущение означает, что наши измерения свободны от систематических ошибок.

Допустим далее, что дисперсии этих величин ограничены: $DX_k < C$ ($k = 1, 2, \dots, n$), где C — постоянная.

Практически это означает, что наши измерения производятся с гарантией какой-нибудь, хотя бы и небольшой точности.

Тогда, по теореме Чебышева, увеличивая число наблюдений, можно достичь практической уверенности в том, что среднее арифметическое из результатов наблюдений будет как угодно мало отличаться от истинного значения измеряемой физической постоянной.

3.7.3. Теорема Я. Бернулли. К числу теорем того же типа, что и теорема Чебышева, относится также теорема Якова Бернулли. Эту теорему можно рассматривать как частный случай теоремы Чебышева.

Теорема Якова Бернулли относится к повторению события при постоянной его вероятности в каждом из испытаний, равной p . Это именно тот случай, к которому относится выведенная ранее формула (2.4.1), т. е. случай, называемый схемой независимых последовательных испытаний.

Эту схему называют иногда также схемой Бернулли.

Теорема Бернулли. С вероятностью, как угодно близкой к достоверности, можно утверждать, что при достаточно большом числе испытаний частота появления события A , имеющего во всех испытаниях постоянную вероятность p , будет как угодно мало отличаться от этой вероятности.

Теорема Бернулли может быть записана в виде:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{k}{N} - p\right| < \varepsilon\right) = 1, \quad (3.7.13)$$

где N — число произведенных испытаний, k — число появлений событий A в N испытаниях, ε — как угодно малое положительное число.

Теорема Бернулли непосредственно следует из теоремы Чебышева.

Обозначим через X_1, X_2, \dots, X_N дискретные случайные величины, представляющие собой числа появлений события A в каждом из N испытаний; очевидно, любая из этих величин X_i ($i = 1, 2, \dots, N$) может принимать только

два значения: $x_1 = 1$ с вероятностью p , когда событие A в данном испытании появляется, и $x_2 = 0$ с вероятностью $q = 1 - p$, когда событие A не появляется.

Таблица 3.7.1

X_i	1	0
$P(x_i)$	p	q

Распределение вероятностей любой из этих дискретных случайных величин X_i будет иметь вид, приведенный в табл. 3.7.1.

Так как испытания независимы, то величины X_1, X_2, \dots, X_N также независимы между собой.

Очевидно, что сумма $X_1 + X_2 + \dots + X_N = k$, т. е. числу появлений со-

бытия A за все N испытаний потому, что когда событие A появляется в некоторых испытаниях, то величины X_i , отвечающие этим испытаниям, принимают значения, равные единице, а при непоявлении события A в других испытаниях отвечающие им величины X_i принимают значения, равные нулю.

Подсчитаем математическое ожидание и дисперсию каждой из рассматриваемых величин:

$$\left. \begin{aligned} MX_1 &= 1 \cdot p + 0 \cdot q = p, \\ MX_1^2 &= 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p; \end{aligned} \right\} \quad (3.7.14)$$

$$DX_1 = MX_1^2 - (MX_1)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq. \quad (3.7.15)$$

Все дисперсии в данном случае будут ограничены, так как каждая из них равна произведению pq и, следовательно, меньше p .

Таким образом, серия величин X_1, X_2, \dots, X_N удовлетворяет условиям теоремы Чебышева.

С другой стороны, как мы убедились,

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N} = \frac{k}{N} = w_N(A),$$

т. е. частости появления события A в N испытаниях, но

$$a = MX_1 = MX_2 = \dots = MX_N = p,$$

и потому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N} - a\right| < \varepsilon\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} P(|w_N(A) - p| < \varepsilon) = 1,$$

что и требовалось доказать.

Опираясь на неравенство Чебышева, мы можем приближенно определить, каково должно быть N , чтобы вероятность $P_N(\varepsilon)$ неравенства $|w_N(A) - p| < \varepsilon$ при данном ε (например, $\varepsilon = 0,01$) была не меньше заданной границы α (например, $\alpha = 0,99$).

Заметим, что в данном случае для дисперсии частости имеем:

$$D[w_N(A)] = D\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{N}\right) = \frac{\sum_{i=1}^N DX_i}{N^2} = \frac{Npq}{N^2} = \frac{pq}{N} \quad (3.7.16)$$

и

$$\sigma[w_N(A)] = \sqrt{\frac{pq}{N}}. \quad (3.7.17)$$

Поэтому вторая форма неравенства Чебышева (3.7.6), из которого и следует теорема Бернулли, запишется следующим образом:

$$P_N(A) = P(|w_N(A) - p| < \varepsilon) > 1 - \frac{pq}{N\varepsilon^2}. \quad (3.7.18)$$

Таким образом, $P_N(A) > 1 - \alpha$, если $\frac{pq}{N\varepsilon^2} < \alpha$ и, значит, если $N > \frac{pq}{\varepsilon^2\alpha}$. Произведение $pq = p(1-p)$ всегда меньше $\frac{1}{4}$; поэтому достаточно взять N при данных ε и α большими $\frac{1}{4\varepsilon^2\alpha}$; например, для $\varepsilon = 0,1$ и $\alpha = 0,95$ достаточно взять $N > \frac{100}{4 \cdot 0,95} = 26$.

В дальнейшем мы укажем более точные оценки для необходимого объема наблюдения, гарантирующего заданную точность и надежность.

Формулировку многих теорем, аналогичных теоремам Чебышева и Бернулли, можно значительно упростить, если использовать понятие о *сходимости случайных величин «по вероятности»*. Под этим мы будем понимать следующее соотношение. Пусть мы имеем последовательность некоторых случайных величин Z_1, Z_2, \dots, Z_n и некоторое постоянное число A . Мы будем говорить, что величины Z_n сходятся по вероятности к A , если при любом положительном ε

$$P(|Z_n - A| > \varepsilon) \rightarrow 0, \quad (3.7.19)$$

или, что равносильно этому,

$$P(|Z_n - A| \leq \varepsilon) \rightarrow 1.$$

Другими словами, величины Z_n почти наверное будут отклоняться меньше чем на ε от постоянной величины A (а вероятность уклонений $(Z_n - A)$ больших чем ε будет близка к нулю), если n будет достаточно велико.

В случае сходимости величин Z_n по вероятности к A мы кратко будем обозначать это обстоятельство в дальнейшем символом

$$Z_n \simeq A.$$

Используя понятие сходимости по вероятности, можно формулировать теорему Чебышева проще, а именно:

Средняя арифметическая независимых случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n сходится по вероятности к общему для этих величин математическому ожиданию.

Аналогично теорема Я. Бернулли состоит в том, что частость при независимых испытаниях сходится по вероятности к вероятности события.

Для того чтобы последовательность величин (Z_n) сходилась по вероятности к A , достаточно, чтобы выполнялось условие

$$M(Z_n - A)^2 \rightarrow 0. \quad (3.7.20)$$

В самом деле, если это условие выполнено, то из неравенства Чебышева (3.7.8) следует

$$0 \leq P(|Z_n - A| > \varepsilon) = P[(Z_n - A)^2 > \varepsilon^2] < \frac{M(Z_n - A)^2}{\varepsilon^2},$$

и потому вероятность в этом неравенстве также стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$, так как при этом $M(Z_n - A)^2 \rightarrow 0$ по условию.

Если A есть математическое ожидание величин Z_n , то для сходимости по вероятности к A достаточно, чтобы их дисперсии DZ_n стремились к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Практически это наиболее важный достаточный признак сходимости по вероятности последовательности величин. С этим признаком мы будем встречаться в дальнейшем.

3.7.4. Понятие о законе больших чисел. Теоремы типа теорем Чебышева и Бернулли носят общее название *закона больших чисел*.

Часто под законом больших чисел понимают даже еще более общий принцип, в силу которого совокупное действие большого числа случайных факторов приводит при некоторых, достаточно широких условиях к результату, почти не зависящему от случая.

При статистическом исследовании мы опираемся на массовое наблюдение результатов данного процесса, например технологического процесса, и стараемся охарактеризовать его с помощью различных средних, надлежаше выбранных величин, отражающих основные или существенные факторы этого процесса.

Если объем «выборки» (т. е. численность произведенных наблюдений) достаточно велик, то средние согласно закону больших чисел будут приближаться к соответствующим теоретическим характеристикам (вероятность, математическое ожидание и т. п.), которые и описывают основные закономерности изучаемого процесса. Случайность выборки при этом будет погашена или компенсирована именно в силу *массовости* произведенного наблюдения. Поэтому мы получаем объективную оценку нужных нам значений неизвестных параметров.

Закон больших чисел является одним из выражений диалектической связи между случайностью и необходимостью. Он составляет принципиальную основу применения математико-статистических методов к изучению закономерностей массовых явлений.

ГЛАВА IV

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1. Композиция законов распределения

4.1.1. Закон распределения суммы дискретных величин. Весьма часто приходится рассматривать распределения сумм независимых случайных величин. Достаточно указать на то, что, например, упоминавшееся ранее биномиальное распределение представляет распределение суммы случайных величин, каждая из которых есть число появлений события в одном испытании (т. е. принимает одно из двух возможных значений 0 или 1).

Нахождение закона распределения суммы по законам распределения независимых слагаемых называется *композицией* законов распределения слагаемых.

Последние называются в этом случае *компонентами*.

Рассмотрим вначале независимые дискретные случайные величины X и Y с законами распределения $P_X(x)$ и $P_Y(y)$, причем $P_X(x) = P(X=x)$ и $P_Y(y) = P(Y=y)$. В этом случае ввиду независимости величин полностью определен и двумерный закон распределения $P_{XY}(xy) = P(X=x; Y=y)$, причем $P_{XY}(xy) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$. Следовательно, мы можем считать определенными и распределения различных функций от величин X и Y , например их суммы, произведения и т. д.

Пусть $Z = X + Y$ есть сумма величин X и Y ; она, очевидно, также дискретная случайная величина. Заметим, что событие $Z = z$ (тождественное событию $X + Y = z$) подразделяется на частные несовместимые случаи $(X = x; Y = z - x)$, в каждом из которых одно из возможных значений величины X в сумме со значением $z - x$ величины Y дает значение Z .

Поэтому, используя правило сложения вероятностей, мы можем написать

$$P(Z = z) = \sum_x P(X = x; Y = z - x) \quad (4.1.1)$$

и аналогично

$$P(Z = z) = \sum_y P(Y = y; X = z - y).$$

Заметим, что если при каком-нибудь z и x значение $z - x$ не принадлежит к числу возможных для величины Y значений, мы соответственно считаем вероятность $P(X = x; Y = z - x)$ равной нулю; аналогичное соглашение мы примем и для вероятности $P(Y = y; X = z - y)$.

Так как величины X и Y независимы, то

$$P(X = x; Y = z - x) = P(X = x) \cdot P(Y = z - x) = P_X(x) \cdot P_Y(z - x)$$

и

$$P(Y = y; X = z - y) = P(Y = y) \cdot P(X = z - y) = P_Y(y) \cdot P_X(z - y),$$

а потому из (4.1.1) (при нашем соглашении) следует

$$P_Z(z) = \sum_x P_X(x) \cdot P_Y(z - x) = \sum_y P_Y(y) \cdot P_X(z - y), \quad (4.1.2)$$

где сумма \sum_x распространяется на все возможные значения x величины X , а сумма \sum_y распространяется на все возможные значения y величины Y .

Соотношение (4.1.2) решает вопрос о композиции дискретных случайных величин.

Пример 4.1.1. Детали обрабатываются на двухшпиндельном автомате. Вероятность p_1 детали, обработанной на первом шпинделе, оказаться по размеру вне некоторых границ равна $p_1 = \frac{2}{5}$, а вероятность p_2 детали, обработанной на втором шпинделе, оказаться вне тех же границ равна $\frac{1}{2}$. Через каждый час берется проба из четырех штук, в которую попадают две детали, обработанные на первом шпинделе и две детали, обработанные на втором шпинделе.

Обозначим через X число деталей с первого шпинделя в пробе, оказавшихся вне установленных границ. Очевидно, величина X может принимать значения $x = 0, 1, 2$. Через Y обозначим число деталей со второго шпинделя, оказавшихся вне установленных границ. Ясно, что величина Y также может принимать значения $y = 0, 1, 2$.

Предполагается, что величины X и Y независимы.

Учитывая сказанное в 2.4.1 и в 2.4.2, нетрудно убедиться в том, что законы распределения $P_X(x)$ и $P_Y(y)$ случайных величин X и Y будут выражаться соотношениями

$$P_X(k) = C_2^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{2-k},$$

$$P_Y(m) = C_2^m \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{2-m} = C_2^m \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

По этим законам распределения величин X и Y легко составить таблицы распределений вероятностей величин X и Y (табл. 4.1.1 и 4.1.2).

Таблица 4.1.1

X	0	1	2	
$P_X(x)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{25}{25}$

Таблица 4.1.2

Y	0	1	2	
$P_Y(y_j)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{4}$

Найдем теперь распределение числа Z деталей в пробе из четырех штук, оказавшихся по размерам вне установленных границ.

Из условия данного примера следует, что $Z = X + Y$.

Тогда с помощью соотношения (4.1.2) получим:

$$P_Z(z=0) = P_X(0) \cdot P_Y(0) = \frac{9}{25} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{100}.$$

В данном случае «сумма» \sum_x приводится к одному члену, так как значение $z=0$ может получиться при одном единственном возможном варианте, а именно,

когда $x = 0$ и $y = z - x = 0 - 0 = 0$.

$$\begin{aligned} P_Z(1) &= \sum_x P_X(x) \cdot P_Y(1-x) = P_X(0) \cdot P_Y(1-0) + P_X(1) \cdot P_Y(1-1) = \\ &= P_X(0) \cdot P_Y(1) + P_X(1) \cdot P_Y(0) = \frac{9}{25} \cdot \frac{2}{4} + \frac{12}{25} \cdot \frac{1}{4} = \frac{30}{100}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_Z(2) &= \sum_x P_X(x) \cdot P_Y(2-x) = P_X(0) \cdot P_Y(2-0) + P_X(1) \cdot P_Y(2-1) + \\ &+ P_X(2) \cdot P_Y(2-2) = P_X(0) \cdot P_Y(2) + P_X(1) \cdot P_Y(1) + P_X(2) \cdot P_Y(0) = \\ &= \frac{9}{25} \cdot \frac{1}{4} + \frac{12}{25} \cdot \frac{2}{4} + \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{4} = \frac{37}{100}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_Z(3) &= \sum_x P_X(x) \cdot P_Y(3-x) = P_X(1) \cdot P_Y(2) + P_X(2) \cdot P_Y(1) = \\ &= \frac{12}{25} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{25} \cdot \frac{2}{4} = \frac{20}{100}. \end{aligned}$$

Заметим, что при $Z = 3$ величина X не может принять значение $X = 0$, так как при этом должно быть $Y = 3$, что невозможно. Наконец,

$$P_Z(4) = P_X(2) \cdot P_Y(4-2) = P_X(2) \cdot P_Y(2) = \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{100}.$$

Составим таблицу распределения вероятностей величины Z (табл. 4.1.3).

Таблица 4.1.3

z	0	1	2	3	4	
$P_Z(z)$	$\frac{9}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{100}{100}$

Из табл. 4.1.3 видно, что величина Z не следует биномиальному закону; в самом деле, предполагая последнее, мы должны бы иметь для некоторых p и q ($p + q = 1$):

$$P(z=4) = C_4^4 p^4 q^0 = p^4 = \frac{4}{100}$$

и, значит,

$$p = \sqrt[4]{\frac{4}{100}} = \sqrt{\frac{2}{10}}.$$

С другой стороны,

$$P(z=0) = C_4^0 p^0 q^4 = \frac{9}{100},$$

откуда

$$q = \sqrt[4]{\frac{9}{100}} = \sqrt{\frac{3}{10}}.$$

Но в данном случае

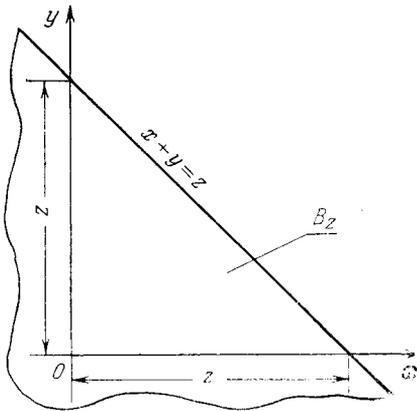
$$\sqrt{\frac{2}{10}} + \sqrt{\frac{3}{10}} \neq 1,$$

и потому распределение величины Z , заданное приведенной выше таблицей, не является в точности биномиальным, хотя и довольно близко приближается к нему.

4.1.2. Закон распределения суммы непрерывных величин. Перейдем теперь к непрерывным случайным величинам, когда система независимых величин X и Y имеет распределение с плотностью вероятности

$$\varphi_{X,Y}(x, y) = \varphi_X(x) \cdot \varphi_Y(y),$$

где $\varphi_X(x)$ и $\varphi_Y(y)$ — плотности вероятности величин X и Y в одномерном распределении.



Черт. 29. Полуплоскость B_Z , представляющая область возможных значений события $x + y < z$, ограниченная прямой $x + y = z$.

Вероятность $\mathbf{P}(Z < z) = \mathbf{P}(X + Y < z)$ можно рассматривать в этом случае как вероятность попасть случайной точке Q с координатами (X, Y) в ту область плоскости (x, y) , в которой координаты удовлетворяют неравенству

$$x + y < z.$$

Эта область образует полуплоскость B лежащую ниже прямой $x + y = z$ (черт. 29); таким образом,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbf{P}(Z < z) = \mathbf{P}(X + Y < z) = \\ &= \mathbf{P}(Q(X, Y) \in B_Z) \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

(знак \in означает принадлежность точки Q полуплоскости B_Z).

Но для подсчета вероятности попадания точки Q в заданную область, как мы знаем, следует проинтегрировать плотность $\varphi_{X,Y}(x, y)$ по этой области:

$$\mathbf{P}(Q(X, Y) \in B_Z) = \int \int_{B_Z} \varphi_{X,Y}(x, y) dx dy = \int \int_{B_Z} \varphi_X(x) \varphi_Y(y) dx dy. \quad (4.1.4)$$

Приведем теперь интеграл (4.1.4) к повторному интегралу, интегрируя сначала по y (при данном x) вдоль оси y , причем y при этом интегрировании будет изменяться от $-\infty$ до $z-x$, а затем проведем интегрирование по x от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\begin{aligned} \int \int_{B_Z} \varphi_X(x) \varphi_Y(y) dx dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(x) dx \int_{-\infty}^{z-x} \varphi_Y(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(x) F_Y(z-x) dx, \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

так как по определению интегральная функция распределения

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^t \varphi_Y(y) dy.$$

Таким образом, сопоставляя (4.1.5) и (4.1.3), приходим к выводу

$$F_Z(z) = \mathbf{P}(Z < z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(x) F_Y(z-x) dx.$$

Дифференцируя это равенство по z^1 , придем, принимая во внимание, что $\frac{dF_Y(z-x)}{dz} = \varphi_Y(z-x)$, к соотношению

$$\varphi_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(x) \varphi_Y(z-x) dx. \quad (4.1.6)$$

1) Законность этой операции под знаком интеграла может быть оправдана.

Аналогично можно получить равносильную формулу

$$\varphi_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_Y(y) \varphi_X(z-y) dy. \quad (4.1.7)$$

Вероятностный смысл формул композиции (4.1.6) и (4.1.7) прост. Левые части этих формул после умножения на dz дают вероятность попадания Z в дифференциально малый промежуток $(z, z+dz)$. Правые части после умножения на dz можно рассматривать как выражение той же величины по формуле полной вероятности. Один множитель под интегралом (заменяющим здесь знак суммы) выражает при этом вероятность предположения относительно возможного значения одного из слагаемых (например, $\varphi_X(x)dx$), а второй — $\varphi_Y(z-x)dz$ есть условная вероятность равенства $Z = X + Y = z + dz$ при сделанном предположении. Таким образом, (4.1.6) и (4.1.7) вполне аналогичны (4.1.2).

Пример 4.1.2. Пусть величины X подчиняется нормальному закону с параметрами a и σ (см. 3.1.2), а величина Y равномерно распределена в интервале $(-h, +h)$. В этом случае

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

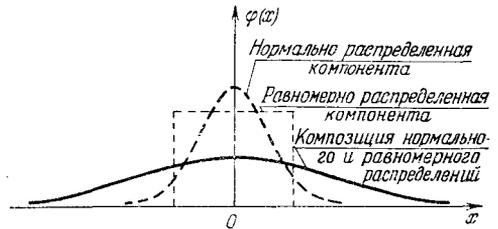
$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < -h, \\ \frac{1}{2h} & \text{при } -h \leq y \leq h, \\ 0 & \text{при } y > h. \end{cases}$$

Применяя (4.1.7) и замечая, что $\varphi_Y(y) \neq 0$ лишь в промежутке $-h, h$, получим для плотности композиции X и Y

$$\varphi_Z(z) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \frac{e^{-\frac{(z-y-a)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dy.$$

Если в интеграле сделать подстановку $y = z - a + t\sigma$ ($dy = \sigma dt$), то $\varphi_Z(z)$ выразится следующей формулой:

$$\varphi_Z(z) = \frac{1}{2h\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-h-z+a}{\sigma}}^{\frac{h-z+a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (4.1.8)$$



Черт. 30. Композиция нормального и равномерного распределений.

Полагая $a=0$ и $|h| < \sigma$, мы будем иметь график композиции X и Y вида, представленного на черт. 30.

В случае, когда величины X и Y ограничены так, что

$$a \leq X \leq b$$

и

$$c \leq Y \leq d,$$

следует при интегрировании в (4.1.6) принимать во внимание, что плотности $\varphi_X(x)$ и $\varphi_Y(y)$ обращаются в нуль соответственно вне пределов (a, b) и (c, d) . В этом случае возможные положения случайной точки $Q(X, Y)$ заполняют прямоугольник R , стороны которого образованы пересечением пар прямых $x = a$, $x = b$, $y = c$ и $y = d$, параллельных осям x и y (черт. 31). Для определения закона распределения Z теперь достаточно определить вероятность попадания в область B'_Z , лежащую внутри R под прямой $x + y = z$. При этом, очевидно,

для z нужно принять в расчет только те значения, которые отвечают прямым, действительно пересекающим прямоугольник R . Легко видеть, что такие значения лежат в промежутке $(a + c, b + d)$, вне которого $\varphi_Z(z) = 0$.

Если распределения X и Y равномерны в промежутках (a, b) и (c, d) , то при $a \leq x \leq b$ и $c \leq y \leq d$

$$\varphi_X(x) \varphi_Y(y) \cdot dx dy = \frac{dx}{b-a} \frac{dy}{d-c}$$

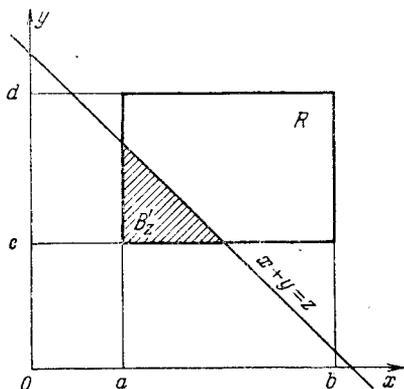
и

$$P(Z < z) = \iint_{B'_Z} \varphi_X(x) \varphi_Y(y) dx dy = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \iint_{B'_Z} dx dy = \frac{S_Z}{S_R}, \quad (4.1.9)$$

где S_Z — площадь области B'_Z ; S_R — площадь прямоугольника R .

В зависимости от положения прямой $x + y = z$ относительно сторон R мы будем иметь различные виды областей B'_Z , но площади их вычисляются элементарно.

Пример 4.1.3. В гладком цилиндрическом сопряжении, заданном размером $5 \frac{A_{20}}{П_{2a}}$ (т. е. при номинальном размере сопряжения, равном 5 мм, при плотной посадке 2а класса



Черт. 31. Геометрическая интерпретация закона распределения композиции Z двух случайных величин X и Y .

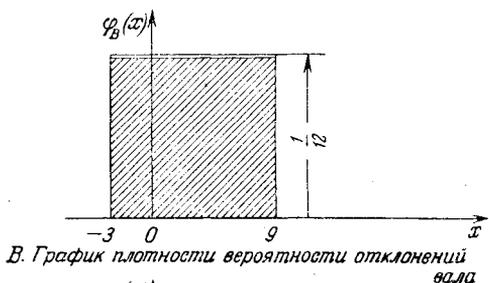
точности в системе отверстия), отклонения вала (B) и отверстия (A) от номинального размера следуют закону равной вероятности. Требуется определить плотность вероятности зазора.

Из соотношения (3.1.11) следует, что каждая из заштрихованных площадей прямоугольников на графиках плотностей вероятности отклонений вала и отверстия (черт. 32) равна единице.

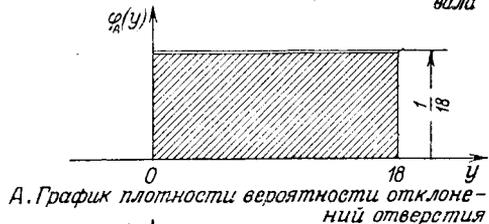
Поэтому при размерах вала и отверстия, равных соответственно

$$5^{+0,009}_{-0,003} \text{ мм} \text{ и } 5^{+0,018} \text{ мм},$$

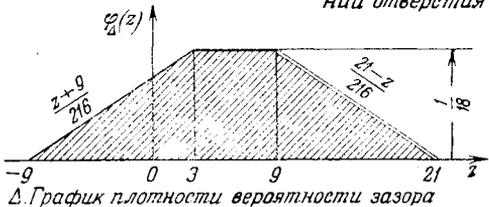
плотности вероятности отклонений этих величин от номинального размера



В. График плотности вероятности отклонений вала



А. График плотности вероятности отклонений отверстия



Д. График плотности вероятности зазора

Черт. 32. Плотность вероятности зазора (Δ) при равномерно распределенных отклонениях отверстия (A) и вала (B).

в микронах (*мк*) будут:

$$\varphi_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -3 \text{ и } x > 9, \\ \frac{1}{12} & \text{при } -3 \leq x \leq 9; \end{cases} \quad (4.1.10)$$

$$\varphi_A(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < 0 \text{ и } y > 18, \\ \frac{1}{18} & \text{при } 0 \leq y \leq 18. \end{cases} \quad (4.1.11)$$

Известно, что зазор Δ равен

$$\Delta = A - B = A + (-B),$$

где A , B — соответственно отклонения размеров отверстия и вала от номинального размера, которые предполагаются независимыми.

Плотность вероятности $\varphi_{-B}(x)$ величины B связана с $\varphi_B(x)$ следующим соотношением:

$$\varphi_{-B}(x) = \varphi_B(-x), \quad (4.1.12)$$

носящим вполне общий характер.

В самом деле, очевидно, $P(-B < x) = P(B > -x)$ или $F_{-B}(x) = 1 - F_B(-x)$.

Дифференцируя это тождество по x , получим (4.1.12).

Задача определения плотности Δ в нашем случае сводится, таким образом, к компонованию величины A с плотностью (4.1.10) с величиной $-B$ с плотностью

$$\varphi_{-B}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ лежит вне промежутка } (-9, 3), \\ \frac{1}{12}, & \text{если } x \text{ лежит внутри этого промежутка.} \end{cases}$$

В данном примере прямоугольник R имеет вид, показанный на черт. 33. Очевидно, промежуток, в котором варьирует величина z , будет $(-9, 21)$.

Если $-9 \leq z \leq 3$, то прямая $x + y = z$ отсекает равнобедренный треугольник aN_1b с катетами, равными $z + 9$ (катеты эти легко находятся хотя бы из того условия, что длина вертикального катета может быть приравнена ординате точки его пересечения с прямой $x + y = 3$, причем абсциссы этой точки будут равны -9); поэтому

$$S_Z = \frac{(z+9)^2}{2},$$

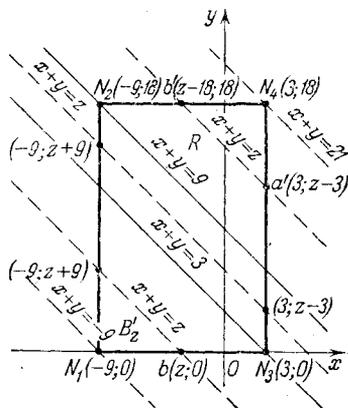
$$P(Z < z) = \frac{S_Z}{S_R} = \frac{(z+9)^2}{2 \cdot 216} = \frac{(z+9)^2}{432}. \quad (4.1.13)$$

Если $3 \leq z \leq 9$, то B'_Z будет иметь вид трапеции, площадь которой $S'_Z = \frac{z-3+9+z}{2} \cdot 12 = 12(z+3)$ и, следовательно,

$$P(Z < z) = \frac{S'_Z}{S_R} = \frac{(z+3)}{18}. \quad (4.1.14)$$

Наконец, если z лежит в промежутке $(9, 21)$, то прямая $x + y = z$ отсекает от R треугольник $a'N_4b'$ с площадью

$$S''_Z = \frac{(18-z+3)^2}{2} = \frac{(21-z)^2}{2},$$



Черт. 33. Геометрический способ нахождения плотности вероятности зазора Δ при равномерных распределениях отклонений отверстия (A) и вала (B).

и потому

$$P(Z < z) = 1 - \frac{S_Z''}{S_R} = 1 - \frac{(21-z)^2}{432}. \quad (4.1.15)$$

Дифференцируя (4.1.13), (4.1.14) и (4.1.15), найдем выражение плотности вероятности зазора Δ в виде

$$\varphi_{\Delta}(z) = \begin{cases} \frac{z+9}{216} & \text{при } -9 \leq z \leq 3, \\ \frac{1}{18} & \text{при } 3 \leq z \leq 9, \\ \frac{21-z}{216} & \text{при } 9 \leq z \leq 21. \end{cases} \quad (4.1.16)$$

§ 2. Моменты некоторых дискретных распределений

4.2.1. Моменты биномиального распределения. Как уже указывалось в 2.4.1, биномиальное распределение относится к схеме независимых последовательных испытаний, производимых при постоянной для данной серии этих испытаний вероятности p появления определенного исхода (события).

При рассмотрении числа таких исходов в серии из s последовательных испытаний мы приходим к дискретной случайной величине x , могущей принимать значения $0, 1, 2, \dots, s$. Вероятность случайной величине x принять каждое из таких значений определяется формулой

$$P_s(x = k) = C_s^k p^k q^{s-k}.$$

Основное приложение биномиального закона составляет так называемая возвратная или *повторная* статистическая выборка; в этом случае взятый наудачу объект после фиксации его признаков возвращается обратно в партию объектов, из которых производится выборка; таким образом, перед каждым выбором, независимо от результатов предшествующих выборов, мы имеем дело с одной и той же совокупностью объектов.

Вычислим с помощью производящей функции начальные моменты биномиального распределения.

Найдем сначала производящую функцию распределения

$$m(t) = M e^{Xt} = \sum_{k=0}^s e^{kt} C_s^k p^k q^{s-k} = \sum_{k=0}^s C_s^k (pe^t)^k q^{s-k} = (pe^t + q)^s, \quad (4.2.1)$$

так как сумма $\sum_{k=0}^s C_s^k (pe^t)^k q^{s-k}$ представляет собой сумму членов разложения по формуле Ньютона бинома вида $(pe^t + q)^s$.

К этому выражению мы могли бы прийти и другим путем.

Найдем сначала производящую функцию $m_1(t)$ случайной величины X , представляющей число появлений интересующего нас исхода (события A) в одном испытании.

Эта величина может, очевидно, принять только два значения: 1 (при появлении события A) с вероятностью p и 0 (при неоявлении события A) с вероятностью q . Поэтому

$$m_1(t) = M e^{t x_1} = pe^{t \cdot 1} + qe^{t \cdot 0} = pe^t + q.$$

Случайная величина X — число появлений события A в s последовательных испытаниях — представляет сумму одинаково распределенных случайных величин $X_1 + X_2 + \dots + X_s$.

Производящие функции $m_1(t), m_2(t), \dots, m_s(t)$ равны по только что доказанному $pe^t + q$.

Так как производящая функция суммы нескольких независимых случайных величин, как мы видели в 3.6.2, равна произведению производящих функций слагаемых, то

$$m(t) = m_1(t) m_2(t) \dots m_s(t) = (pe^t + q)^s.$$

Продифференцировав производящую функцию $m(t)$, получим:

$$m'(t) = s(pe^t + q)^{s-1} pe^t. \quad (4.2.2)$$

Полагая в (4.2.2) $t=0$ и принимая во внимание (3.6.12), найдем выражение для первого момента (математического ожидания)

$$MX = \nu_1 = m'(0) = sp(p+q)^{s-1} = sp \quad (p+q=1). \quad (4.2.3)$$

Отсюда следует, что среднее значение частоты $\frac{X}{s}$ появления события равно вероятности p события

$$M\left(\frac{X}{s}\right) = \frac{sp}{s} = p. \quad (4.2.4)$$

Формулы (4.2.3) и (4.2.4) отвечают нашему непосредственному представлению о вероятности; заметим, что вероятнейшее число появлений события отличается от $\nu_1 = sp$ менее чем на единицу, как это мы видели в 2.4.2.

Аналогичным образом найдем:

$$m''(t) = s(s-1)(pe^t + q)^{s-2} p^2 e^{2t} + sp(pe^t + q)^{s-1} e^t \quad (4.2.5)$$

и, полагая $t=0$,

$$\nu_2 = m''(0) = s(s-1)p^2 + sp = s^2 p^2 + spq. \quad (4.2.6)$$

Таким же путем найдем:

$$\nu_3 = (sp)^3 + 3q(sp)^2 + spq(q-p), \quad (4.2.7)$$

$$\nu_4 = (sp)^4 + 6s^3 p^3 q + s^2 p^2 q(7q-4p) + spq(1-6pq). \quad (4.2.8)$$

В силу (3.6.5) и (3.6.7) получаем важную формулу для дисперсии

$$DX = \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = (sp)^2 + spq - (sp)^2 = spq. \quad (4.2.9)$$

Для дисперсии частоты $\frac{X}{s}$ найдем:

$$D\left(\frac{X}{s}\right) = \frac{1}{s^2} spq = \frac{pq}{s}, \quad (4.2.10)$$

что было получено другим путем в 3.7.3 (при $s=N$). Среднее квадратическое отклонение при биномиальном распределении будет равно:

$$\sigma_x = +\sqrt{DX} = +\sqrt{spq} \quad (4.2.11)$$

и

$$\sigma_{\frac{x}{s}} = \sqrt{\frac{pq}{s}}. \quad (4.2.12)$$

Из формул видно, что частость по вероятности стремится к ее математическому ожиданию, т. е. вероятности события p , так как

$$D\left(\frac{X}{s}\right) \rightarrow 0, \quad M\left(\frac{X}{s} - p\right) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0,$$

Пусть X и Y — две независимые случайные величины, имеющие обе биномиальные распределения с одним и тем же значением параметра p в каждом из них и со значениями s_1 и s_2 параметра s .

Случайными величинами X и Y могут, например, быть числа появлений исхода A в двух независимых рядах s_1 и s_2 последовательных испытаний. Тогда

сумма $X + Y$ будет равна числу появлений исхода A в объединенном ряде $s_1 + s_2$ последовательных испытаний.

На основании соотношения (3.6.15) производящая функция случайной величины $X + Y$ будет:

$$m(t) = Me^{t(X+Y)} = Me^{tX} \cdot Me^{tY} = (pe^t + q)^{s_1} \cdot (pe^t + q)^{s_2} = (pe^t + q)^{s_1 + s_2}. \quad (4.2.13)$$

Мы пришли к производящей функции биномиального распределения того же типа, что и производящая функция (4.2.1), но с параметрами p и $s_1 + s_2$, откуда следует, что величина $X + Y$ при сделанных предположениях будет подчиняться биномиальному закону.

Пример 4.2.1. Случайная величина представляет число деталей, выходящих по своим размерам за контрольные границы, из пробы в 10 штук деталей.

Вероятность того, что одна деталь выйдет по размерам за контрольные границы, равна $p = 0,2$.

Требуется найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

По формуле (4.2.3) находим математическое ожидание:

$$MX = sp = 10 \cdot 0,2 = 2 \text{ штуки.}$$

Определяем по формуле (4.2.9) дисперсию:

$$DX = spq = 10 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 1,6.$$

Вычисляем среднее квадратическое отклонение по формуле (4.2.11):

$$\sigma_x = \sqrt{spq} = \sqrt{1,6} = 1,26.$$

4.2.2. Моменты гипергеометрического распределения. Гипергеометрическое распределение возникает при исследовании безвозвратной статистической выборки (см. 2.2.3), характеризующейся тем, что взятый объект обратно в совокупность не возвращается. Случайной величиной X является число объектов, имеющих признак A из общего числа s объектов, попавших в выборку. Совокупность, из которой отбирается выборка, состоит из S объектов, из которых K объектов обладают признаком A . Вероятность случайной величине X принять какое-либо значение x ($x = 0, 1, 2, \dots, s$) определяется по одной из формул

$$\begin{aligned} P_{S,K}(X=x) &= \frac{C_K^x \cdot C_{S-K}^{s-x}}{C_S^s} = \frac{K!}{x!(K-x)!} \cdot \frac{(S-K)!}{(s-x)!} \cdot \frac{s!}{S!} \cdot \frac{(S-s)!}{(S-K-s+x)!} = \\ &= \frac{K(K-1)\dots(K-x+1)}{x!} \cdot \frac{(S-K)\dots(S-K-s+x+1)}{(s-x)!} \cdot \frac{s!}{S(S-1)\dots(S-s+1)}. \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Так как события $X=x$ образуют полную группу, то

$$\sum_{x=0}^s P_{S,K}(X=x) = 1, \quad (4.2.15)$$

откуда, принимая во внимание (4.2.14), получим такое тождество:

$$\sum_{x=0}^s C_K^x C_{S-K}^{s-x} = C_S^s. \quad (4.2.16)$$

Гипергеометрический закон имеет три параметра: объем выборки s , объем всей совокупности S и вероятность $p = \frac{K}{S}$ того, что первая отобранная деталь будет иметь признак A . Найдем математическое ожидание случайной величины $X=x$, следующей гипергеометрическому закону.

По соотношению (3.3.2) имеем:

$$MX = \sum_{x=0}^s x P_{S, K}(X=x) = 0 \cdot P_{S, K}(X=0) + \sum_{x=1}^s x P_{S, K}(X=x) = \sum_{x=1}^s x P_{S, K}(X=x).$$

С другой стороны, для $x \geq 1$ имеем:

$$x P_{S, K}(X=x) = \frac{x C_K^x C_{S-K}^{s-x}}{C_S^s}. \quad (4.2.17)$$

Но

$$x C_K^x = \frac{K! x}{x! (K-x)!} = \frac{K!}{(x-1)! (K-x)!} = K C_{K-1}^{x-1}$$

и потому из (4.2.17) следует:

$$x P_{S, K}(X=x) = \frac{K C_{K-1}^{x-1} C_{S-K}^{s-x}}{C_S^s}$$

и

$$MX = \frac{K}{C_S^s} \sum_{x=1}^s C_{K-1}^{x-1} C_{S-K}^{s-x}$$

или при замене индекса суммирования x на $x' = x - 1$

$$MX = \frac{K}{C_S^s} \sum_{x'=0}^{s-1} C_{K-1}^{x'} C_{S-K}^{s-1-x'}$$

Согласно тождеству (4.2.16) последняя сумма равна C_{S-1}^{s-1} и потому

$$MX = \frac{K C_{S-1}^{s-1}}{C_S^s} = \frac{K(S-1)!}{(s-1)!(S-s)!} \frac{s!(S-s)!}{S!} = s \frac{K}{S}.$$

Итак,

$$MX = sp. \quad (4.2.18)$$

Найдем теперь дисперсию случайной величины X , следующей гипергеометрическому закону. Для этого найдем сначала математическое ожидание $M[X(X-1)]$ произведения $X(X-1)$, где X следует гипергеометрическому закону.

Заметив, что $X(X-1)$ обращается в нуль для $X=0$ и $X=1$, будем иметь:

$$M[X(X-1)] = \frac{1}{C_S^s} \sum_{x=2}^s x(x-1) C_K^x C_{S-K}^{s-x}.$$

Но при $x \geq 2$

$$x(x-1) C_K^x = \frac{K! x(x-1)}{x! (K-x)!} = K(K-1) C_{K-2}^{x-2}$$

и потому

$$M[X(X-1)] = \frac{K(K-1)}{C_S^s} \sum_{x=2}^s C_{K-2}^{x-2} C_{S-K}^{s-x} = \frac{K(K-1)}{C_S^s} \sum_{x''=0}^{s-2} C_{K-2}^{x''} C_{S-K}^{s-2-x''},$$

где $x'' = x - 2$.

Принимая снова во внимание тождество (4.2.16), найдем:

$$M[X(X-1)] = \frac{K(K-1)}{C_S^s} C_{S-2}^{s-2} = \frac{K(K-1)(S-2)! s!(S-s)!}{(s-2)!(S-s)! S!} = \frac{K(K-1)}{S(S-1)} s(s-1).$$

Сделаем преобразование

$$M[X(X-1)] = M(X^2 - X) = MX^2 - MX,$$

откуда

$$MX^2 = M[X(X-1)] + MX = \frac{s(s-1)K(K-1)}{S(S-1)} + s \frac{K}{S}.$$

По соотношению (3.4.7) находим:

$$\begin{aligned} DX &= MX^2 - (MX)^2 = \frac{s(s-1)K(K-1)}{S(S-1)} + \frac{sK}{S} - \frac{s^2K^2}{S^2} = \\ &= \frac{sK}{S} \left[\frac{(s-1)(K-1)}{S-1} + 1 - \frac{sK}{S} \right] = \frac{sK}{S} \left[\frac{(s-1)(K-1)S + (S-1) \cdot S - sK(S-1)}{S(S-1)} \right] = \\ &= \frac{sK}{S} \left(\frac{sKS - SK - sS + S + S^2 - S - sKS + sK}{S(S-1)} \right) = \frac{sK(S-K)(S-s)}{S^2(S-1)} \end{aligned}$$

и окончательно

$$DX = \frac{sK(S-K) \cdot (S-s)}{S^2(S-1)} = spq \frac{1 - \frac{s}{S}}{1 - \frac{1}{S}}, \quad (4.2.19)$$

где

$$p = \frac{K}{S} \quad \text{и} \quad q = \frac{S-K}{S}.$$

Определим среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{sK(S-K) \cdot (S-s)}{S^2(S-1)}}. \quad (4.2.20)$$

Отметим, что при $S \rightarrow \infty$ правая часть соотношения (4.2.19) стремится к значению spq , выражающему дисперсию биномиального распределения (4.2.9) величины X .

Вообще, при малых отношениях $\frac{s}{S}$ гипергеометрическое распределение мало отличается от биномиального. При $s = S$, когда безвозвратной выборкой охвачена вся совокупность, будем иметь случай сплошного обследования; в этом случае (4.2.19) дает $D(X) = 0$ при $MX = Sp = K$. Это значение X достоверно.

Пример 4.2.2. Пусть из партии в 1000 штук деталей, из которых 200 «плюсовых», берется безвозвратная выборка в количестве 50 штук. Требуется определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа «плюсовых» деталей в выборке

По формулам (4.2.18), (4.2.19) и (4.2.20) получим:

$$\begin{aligned} MX &= sp = 50 \frac{200}{1000} = 10 \text{ штук,} \\ DX &= \frac{sK(S-K)(S-s)}{S^2(S-1)} = \frac{50 \cdot 200(1000-200)(1000-50)}{1000^2(1000-1)} = 7,6 \text{ шт}^2, \\ \sigma_X &= \sqrt{7,6} = 2,76 \text{ штуки.} \end{aligned}$$

Заметим, что вычисление дисперсии по приближенной формуле

$$DX \approx spq$$

приведет к довольно близкому результату

$$DX \approx 50 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 8.$$

Гипергеометрическое распределение практически близко к биномиальному с параметрами $p = \frac{K}{S}$ и $q = \frac{S-K}{S}$, если объем совокупности S достаточно велик.

4.2.3. Моменты распределения Пуассона. Возьмем производящую функцию распределения Пуассона, выведенную нами в примере 3.6.2:

$$m(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}. \quad (4.2.21)$$

Дифференцируя производящую функцию последовательно и вычисляя затем значения производных в точке $t = 0$, найдем:

$$\nu_1 = m^I(0) = \lambda, \quad (4.2.22)$$

$$\nu_2 = m^{II}(0) = \lambda^2 + \lambda, \quad (4.2.23)$$

$$\nu_3 = m^{III}(0) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda, \quad (4.2.24)$$

$$\nu_4 = m^{IV}(0) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda. \quad (4.2.25)$$

Из соотношения (3.6.4) следует, что

$$MX = \nu_1 = \lambda, \quad (4.2.26)$$

т. е. математическое ожидание случайной величины, следующей закону Пуассона, равно параметру λ этого закона.

Из соотношений (3.6.4) и (3.6.7) выводим далее:

$$DX = \nu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda, \quad (4.2.27)$$

т. е. дисперсия случайной величины, следующей закону Пуассона, как уже указывалось, равна параметру этого закона и численно равна математическому ожиданию случайной величины (хотя имеет другую размерность).

Среднее квадратическое отклонение при распределении Пуассона будет:

$$\sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{\lambda}. \quad (4.2.28)$$

Если случайная величина представляет сумму $X + Y$ двух независимых случайных величин X и Y , следующих каждая закону Пуассона, то она также следует закону Пуассона.

В самом деле, пусть случайная величина X следует закону

$$P_1^k(X = k) = \frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!}$$

и случайная величина Y — закону

$$P(Y = k) = \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!}.$$

На основании соотношения (3.6.15) производящая функция суммы $X + Y$ будет равна произведению производящих функций X и Y :

$$m(t) = Me^{t(x+y)} = Me^{tx} Me^{ty} = m_1(t) \cdot m_2(t) = e^{\lambda_1(e^t - 1)} e^{\lambda_2(e^t - 1)} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^t - 1)}. \quad (4.2.29)$$

Мы пришли к производящей функции распределения того же типа, что производящая функция (4.2.21), но с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$, откуда следует, что величина $X + Y$ будет подчиняться закону Пуассона.

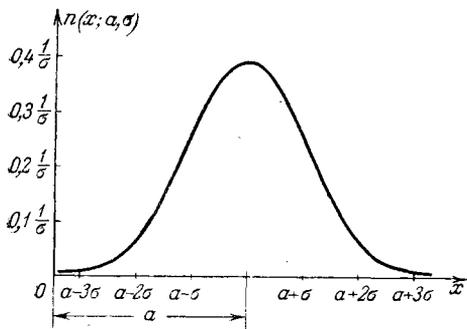
§ 3. Нормальное распределение

4.3.1. Нормальная плотность вероятности и нормальная функция распределения. *Нормальной плотностью* вероятности называется плотность, определяемая равенством

$$n(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.3.1)$$

где a и σ — постоянные числа — параметры распределения.

Соответствующая этой плотности дифференциальная кривая распределения имеет вид, показанный на черт. 34.



Нормальная функция распределения по соотношению (3.1.12) определяется из (4.3.1) в виде

$$N(x; a, \sigma) = \int_{-\infty}^x n(u; a, \sigma) du. \quad (4.3.2)$$

Чтобы оправдать эти определения, нужно еще проверить, что функция $N(x; a, \sigma)$ обладает всеми свойствами функции распределения и, следовательно,

$$n(x; a, \sigma) = \frac{dN(x; a, \sigma)}{dx}$$

Черт. 34. Дифференциальная кривая нормального распределения.

является плотностью вероятности при всех возможных значениях параметров a ($-\infty < a < +\infty$) и σ ($0 < \sigma < \infty$).

Из (4.3.2) следует, что $N(x; a, \sigma)$ есть возрастающая и неотрицательная функция, причем

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} N(x; a, \sigma) = 0.$$

В самом деле, подинтегральная функция в (4.3.2), определенная равенством (4.3.1), неотрицательна и потому с возрастанием x функция $N(x; a, \sigma)$ может только возрастать. Тем самым эта функция обладает свойствами (3.1.2) и (3.1.4) функции распределения.

Остается теперь показать, что она обладает и свойством (3.1.5) функции распределения, т. е. что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} N(x; a, \sigma) = 1$$

или что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du = 1$$

при всех значениях параметров a и σ .

Сделав подстановку $\frac{u-a}{\sigma} = t$, $du = \sigma dt$, мы получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Справа мы получили интеграл, совсем не зависящий от параметров. Этот интеграл равен единице, т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1. \quad (4.3.3)$$

В самом деле, в силу симметрии кривой около оси y достаточно показать, что площадь под кривой над положительной полуосью x равна $1/2$, т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}.$$

Для доказательства мы рассмотрим вспомогательную функцию

$$z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

и возьмем от нее двойные интегралы по трем областям (черт. 35): 1) по квадрату D со стороной a , ограниченному осями координат и прямыми $x=a$ и $y=a$, 2) по четверти круга (s) $x^2 + y^2 = a^2$ радиуса a , лежащей в первом квадранте, и, наконец, 3) по четверти круга (S) $x^2 + y^2 = 2a^2$ радиуса $\sqrt{2}a$, тоже расположенной в первом квадранте. Так как функция z положительна, то

$$\iint_{(s)} z dx dy < \iint_D z dx dy < \iint_{(S)} z dx dy. \quad (4.3.4)$$

Но интеграл по квадрату D легко привести к произведению однократных интегралов, а именно

$$\begin{aligned} & \iint_D \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi} dx dy = \\ &= \int_0^a \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \cdot \int_0^a \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy = \Phi(a) \Phi(a) = [\Phi(a)]^2, \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

где

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Для вычисления интеграла по (S) введем полярные координаты

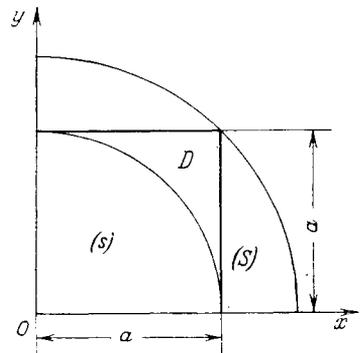
$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, \\ x^2 + y^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Вспоминая, что дифференциал площади в полярных координатах равен $r dr d\varphi$, получим:

$$\begin{aligned} \iint_{(s)} z dx dy &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^a d(-e^{-\frac{r^2}{2}}) = \\ &= \frac{1}{4} \left[-e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^a = \frac{1}{4} (1 - e^{-\frac{a^2}{2}}). \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Аналогичным образом, заменяя в предшествующем равенстве область (s) на (S) и a на $\sqrt{2}a$, получим:

$$\iint_{(S)} z dx dy = \frac{1}{4} (1 - e^{-a^2}). \quad (4.3.7)$$



Черт. 35. Доказательство равенства

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

Подставляя (4.3.5), (4.3.6) и (4.3.7) в (4.3.4) и извлекая квадратный корень, получим:

$$\frac{1}{2} \sqrt{1 - e^{-\frac{a^2}{2}}} < \Phi(a) < \frac{1}{2} \sqrt{1 + e^{-a^2}}. \quad (4.3.8)$$

Будем теперь неограниченно увеличивать a и, замечая, что

$$\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-\frac{a^2}{2}} = \lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a^2} = 0,$$

найдем, что левая и правая части неравенства (4.3.8) стремятся к $1/2$. Отсюда следует, что

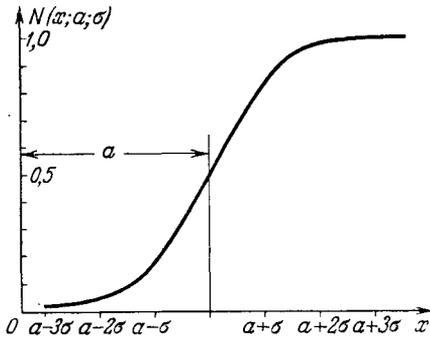
$$\lim_{a \rightarrow \infty} \Phi(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{2},$$

т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, функция $N(x; a, \sigma)$ обладает всеми тремя свойствами функции распределения. Соответствующая этой функции интегральная кривая распределения показана на черт. 36.



Черт. 36. Интегральная кривая нормального распределения.

Из равенства (4.3.1) и черт. 34 видно, что нормальное распределение симметрично относительно ординаты, отвечающей значению x , равному a . Это значение является поэтому центром группирования (математическим ожиданием) распределения. Если изменить a , то кривая $y = n(x; a, \sigma)$ будет перемещаться вдоль оси x , сохраняя свою форму. С возрастанием абсолютной величины отклонения $(x - a)$, т. е. по мере удаления от точки a оси x , ордината кривой $n(x; a, \sigma)$ быстро убывает; наибольшая ордината, отвечающая значению $x = a$, имеет величину

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} = n(a; a, \sigma). \text{ Эта ордината и является}$$

осью симметрии кривой. При $a = 0$ имеем семейство «центрированных» нормальных кривых

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = n(x; 0, \sigma). \quad (4.3.9)$$

Когда параметр σ уменьшается, начальная ордината кривой растет. Подъем кривой в центральной части компенсируется более резким спадом ее к оси x , так что общая величина площади остается неизменной и равной единице. При очень малых значениях σ кривая становится похожей на тонкую иглу, направленную вдоль оси y . Почти вся площадь под кривой сконцентрирована на небольшом интервале с центром в нуле.

При возрастании σ , наоборот, происходит «сплющивание» кривой, принимающей все более плосковершинную форму (черт. 37).

Чаще всего, однако, нормальный закон применяется не в исходном (4.3.1) и не в центрированном (4.3.9) виде, а в виде *нормированного распределения*. Нормирование распределения, как уже указывалось в 3.4.4, вообще говоря, за-

ключается в переходе от величины X (распределенной в данном случае согласно закону $N(x; a, \sigma)$) к вспомогательной линейной функции

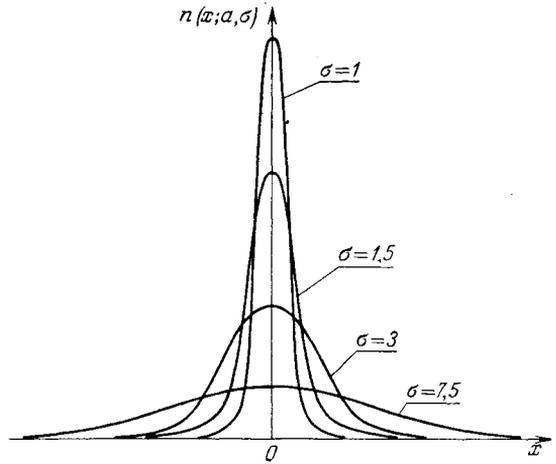
$$Z = \frac{X - a}{\sigma},$$

для которой

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z < z) = \\ &= P\left(\frac{X - a}{\sigma} < z\right) = \\ &= P(X < a + z\sigma). \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

При нормальном распределении из (4.3.10) и (4.3.2) будем иметь:

$$\begin{aligned} P(X < a + z\sigma) &= \\ &= N(a + z\sigma; a, \sigma) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{a+z\sigma} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du, \end{aligned}$$



Черт. 37. Семейство «центрированных» нормальных кривых распределения с $\sigma = 1; 1,5; 3; 7,5$.

откуда (заменяя переменное интегрирования u на новое v , пользуясь подстановкой $v = \frac{u - a}{\sigma}$ и $dv = \frac{du}{\sigma}$) получим:

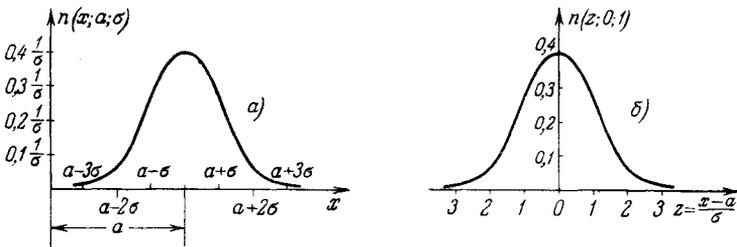
$$P(Z < z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{v^2}{2}} dv = N(z; 0, 1). \quad (4.3.11)$$

Дифференцируя (4.3.11) по верхнему пределу, получим:

$$\frac{dN(z; 0, 1)}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = n(z; 0, 1). \quad (4.3.12)$$

Таким образом, если произвести нормирование распределения $N(x; a, \sigma)$, т. е. осуществить переход от величины X к величине Z , то нормированная плотность вероятности выразится равенством (4.3.12), в котором уже отсутствуют неизвестные параметры. Ординаты кривой, заданной (4.3.12), табулированы. В табл. III приложений приведены значения этих ординат для значений z от 0 до 4,99.

Функция распределения нормированной величины X определяется формулой (4.3.11).



Черт. 38. Последствия нормирования нормальных кривых распределения: а) нормальная кривая, б) нормированная нормальная кривая.

Все вопросы, связанные с нормальным распределением величины X , обычно решают, переходя к вспомогательной величине Z , т. е. нормируя это распределение. Нормирование распределения, как нетрудно понять, ведет к перенесению начала координат в центр группирования (черт. 38), т. е. к центрированию рас-

пределения, и к выражению абсциссы в долях σ , которое, как мы дальше увидим, представляет среднее квадратическое отклонение величины X , т. е. $\sigma = \sigma_X$.

Следовательно, нормированное распределение является таким центрированным распределением, в котором абсцисса выражена в долях σ .

Заметим, что любую кривую $n(x; a, \sigma)$, определяемую равенством (4.3.1), можно получить из кривой $n(z; 0, 1)$, определяемой равенством (4.3.12), путем элементарного преобразования аргумента

$$z = a + x\sigma, \quad (4.3.13)$$

состоящего из параллельного переноса вдоль оси абсцисс и преобразования масштаба.

Пример 4.3.1. Для построения графика плотности вероятности по точкам нормально распределенного диаметра втулки $60^{+0,06}$ при $\sigma_X = 10$ мк требуется найти ординаты кривой при значениях отклонений от номинального размера

$$X = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60 \text{ мк.}$$

Находим $z = \frac{x-a}{\sigma}$ и для полученных значений z по табл. III приложений находим плотности вероятности.

Таблица 4.3.1

$x, \text{мк}$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
z	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$n(z; 0, 1)$	0,0044	0,0175	0,0540	0,1295	0,2420	0,3521	0,3989	0,3521	0,2420	0,1295	0,0540	0,0175	0,0044

4.3.2. Моменты нормального распределения. Найдем теперь моменты нормального распределения. Для этого сначала определим производящую функцию нормального распределения; она может быть получена из соотношения (3.6.11) и равенства (4.3.1)

$$m_n(t) = M e^{tX} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} e^{xt} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Сделаем подстановку $z = \frac{x-a}{\sigma}$, $x = z\sigma + a$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sigma}$, $dx = \sigma dz$ и

$$m_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(z\sigma+a)t - \frac{z^2}{2}} dz.$$

Так как

$$(z\sigma + a)t - \frac{z^2}{2} = at - \frac{1}{2}(z^2 - 2tz\sigma) = at + \frac{t^2\sigma^2}{2} - \frac{1}{2}(z - t\sigma)^2,$$

то

$$m_n(t) = e^{at + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-t\sigma)^2} dz.$$

С другой стороны, интеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-t\sigma)^2}{2}} dz$ после подстановки $z-t\sigma=u$ приводится к виду

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1,$$

как это следует из соотношения (4.3.3), и потому

$$m_n(t) = e^{at + \frac{t^2\sigma^2}{2}}. \quad (4.3.14)$$

Продифференцировав два раза производящую функцию (4.3.14) нормального распределения, получим:

$$m'_n(t) = e^{\frac{t^2\sigma^2}{2} + at} (a + t\sigma^2), \quad (4.3.15)$$

$$m''_n(t) = e^{at + \frac{t^2\sigma^2}{2}} (t^2\sigma^4 + 2at\sigma^2 + a^2 + \sigma^2). \quad (4.3.16)$$

Теперь на основании соотношения (3.6.13) при $t=0$ найдем *начальные моменты нормального распределения*:

$$\nu_1 = m'_n(0) = a, \quad (4.3.17)$$

$$\nu_2 = m''_n(0) = a^2 + \sigma^2. \quad (4.3.18)$$

Из соотношения (3.6.4) следует, что

$$MX = \nu_1 = a, \quad (4.3.19)$$

т. е., как мы это видели и ранее, математическое ожидание случайной величины, следующей нормальному закону, равно параметру a этого закона.

Из соотношений (3.6.5) и (4.6.7) выводим:

$$DX = \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = a^2 + \sigma^2 - a^2 = \sigma^2, \quad (4.3.20)$$

т. е. дисперсия случайной величины, следующей нормальному закону, равна квадрату параметра σ этого закона.

Среднее квадратическое отклонение при нормальном распределении получается при помощи соотношения (4.3.20)

$$\sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma, \quad (4.3.21)$$

т. е. параметр σ нормального закона распределения представляет среднее квадратическое отклонение σ_X случайной величины X , следующей этому закону.

Вычислим третий и четвертый центральные моменты μ_3 и μ_4 нормального распределения.

Заметим, что, по определению,

$$\mu_s = M(X-a)^s,$$

и, обозначая через $\bar{\nu}_s$ момент s порядка нормированного отклонения $z = \frac{X-a}{\sigma}$, найдем:

$$\bar{\nu}_s = M\left(\frac{X-a}{\sigma}\right)^s \approx \frac{M(X-a)^s}{\sigma^s} = \frac{\mu_s}{\sigma^s}.$$

Таким образом,

$$\mu_s = \bar{\nu}_s \sigma^s. \quad (4.3.22)$$

С другой стороны, производящую функцию величины Z (распределенной нормально с плотностью $n(z; 0, 1)$) получим из (4.3.14), полагая $a = 0$ и $\sigma = 1$:

$$\overline{m}_n(t) = e^{\frac{t^2}{2}}. \quad (4.3.23)$$

Разлагая $e^{\frac{t^2}{2}}$ в ряд, получим:

$$e^{\frac{t^2}{2}} = 1 + \frac{t^2}{2 \cdot 1!} + \frac{(t^2)^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{(t^2)^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{(t^2)^4}{2^4 \cdot 4!} + \dots, \quad (4.3.24)$$

т. е. ряд будет содержать только члены с четными степенями. Сопоставляя это с соотношением (3.6.13), приходим к выводу, что все нечетные начальные моменты нормированного нормального распределения равны нулю, т. е.

$$\overline{v}_1 = \overline{v}_3 = \overline{v}_5 = \dots = 0. \quad (4.3.25)$$

И поэтому нечетные центральные моменты величин X ввиду (4.3.22) также равны нулю.

С другой стороны, коэффициент при четной степени t^{2s} разложения $\overline{m}_n(t)$ в (4.3.24) равен

$$\frac{1}{2^s s!}.$$

Он отличается от производной $\left. \frac{d^{2s} m(t)}{dt^{2s}} \right|_{t=0}$ лишь множителем $\frac{1}{2s!}$, так как по известной формуле Маклорена коэффициент при t^{2s} равен $\frac{m^{(2s)}(0)}{(2s)!}$. Поэтому

$$\frac{d^{2s}}{dt^{2s}} \overline{m}_n(0) = \frac{(2s)!}{2^s s!} = \overline{v}_{2s} = \frac{\mu_{2s}}{\sigma^{2s}}. \quad (4.3.26)$$

В частности, при $s = 1$ будем иметь $\frac{\mu_2}{\sigma^2} = \frac{2!}{2^1 \cdot 1!} = 1$ и $\mu_2 = \sigma^2$, т. е., как мы видели и раньше, центральный момент второго порядка случайной величины X , следующей нормальному закону, равен σ^2 .

При $s = 2$ по соотношению (4.3.26) получим:

$$\frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{4!}{2^2 \cdot 2!} = 3, \quad (4.3.27)$$

т. е. отношение центрального момента четвертого порядка к среднему квадратическому отклонению в четвертой степени при нормальном законе распределения равно трем.

Пример 4.3.2. Случайная величина X задана нормальной плотностью вероятности $n(x; 50, 6)$ со значениями параметров $a = 50$ мк и $\sigma = 60$ мк.

Требуется определить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий и четвертый центральные моменты распределения.

По соотношениям (4.3.1) и (4.3.19) устанавливаем, что

$$MX = a = 50 \text{ мк.}$$

По соотношениям (4.3.1) и (4.3.20) определяем:

$$DX = \sigma^2 = 36 \text{ мк}^2.$$

На основании (4.3.21) среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma_X = \sigma = 6 \text{ мк.}$$

По соотношению (4.3.25) устанавливаем, что

$$\mu_3 = 0.$$

По соотношению (4.3.27) находим:

$$\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3, \quad \mu_4 = 3 \cdot 6^4 = 3 \cdot 1296 = 3888 \text{ мк}^4.$$

Нормальное распределение обладает следующим очень важным свойством: если случайная величина представляет сумму $X + Y$ двух независимых случайных величин X и Y , следующих каждая нормальному закону, то она также следует нормальному закону.

В самом деле, пусть случайная величина X следует закону

$$n_1(x; a_1, \sigma_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

и случайная величина Y закону

$$n_2(x; a_2, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Тогда производящие функции величин X и Y будут равны

$$m_1(t) = e^{a_1 t + \frac{t^2 \sigma_1^2}{2}}$$

и

$$m_2(t) = e^{a_2 t + \frac{t^2 \sigma_2^2}{2}}.$$

На основании соотношения (3.6.15) производящая функция суммы $X + Y$ будет равна произведению производящих функций величин X и Y , т. е.

$$m(t) = m_1(t) \cdot m_2(t) = e^{a_1 t + \frac{t^2 \sigma_1^2}{2}} \cdot e^{a_2 t + \frac{t^2 \sigma_2^2}{2}} = e^{(a_1 + a_2)t + \frac{t^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2}}. \quad (4.3.28)$$

Мы пришли к производящей функции (4.3.28) того же типа, что и функции величин X и Y , т. е. к производящей функции нормального распределения (4.3.14), но с параметрами $a = a_1 + a_2$ и $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Отсюда следует, что случайная величина $X + Y$ будет подчиняться нормальному закону

$$n(x; a_1 + a_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}).$$

Полученный результат можно легко распространить на любое число величин X_1, X_2, \dots, X_n , каждая из которых следует нормальному закону. Сумма любого числа нормально распределенных независимых величин нормально распределена; при этом центр распределения суммы равен сумме центров слагаемых, а дисперсия суммы равна сумме дисперсий. Композиция нормальных законов приводит, следовательно, к закону того же типа. Это свойство носит название *устойчивости* нормального закона.

Пример 4.3.3. Независимые случайные величины X и Y заданы плотностями вероятностей $n_1(x; 50, 6)$ и $n_2(x; 40, 5)$. Требуется найти плотность вероятности случайной величины

$$U = X + Y.$$

По соотношению (4.3.28) находим:

$$MU = MX + MY = 40 + 50 = 90 \text{ мк},$$

$$DU = DX + DY = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 6^2 + 5^2 = 61 \text{ мк}^2,$$

$$\sigma_U = \sqrt{61} = 7,8,$$

откуда искомая плотность случайной величины U будет:

$$n(x; 90; 7,8).$$

4.3.3. Функция Лапласа. Для определения вероятности $P(x_1 < X < x_2)$ нахождения в интервале (x_1, x_2) случайной величины X , следующей нормальному закону, приходится вычислять определенный интеграл вида

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x_1-a}{\sigma}}^{\frac{x_2-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (4.3.29)$$

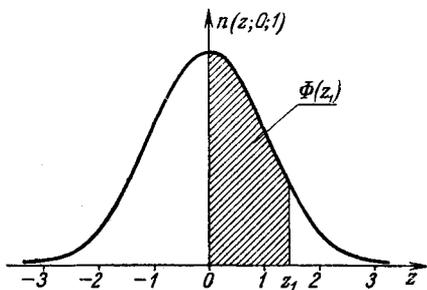
Однако неопределенный интеграл

$$\int e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

не выражается через известные элементарные функции. Но определенный интеграл в некоторых пределах может быть теми или иными приемами вычислен с какой угодно степенью точности. Вычисления его могут быть, например, произведены посредством интегрирования степенного ряда или посредством механических квадратур.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом вида

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{v^2}{2}} dv, \quad (4.3.30)$$



Черт. 39. Геометрическая интерпретация функции Лапласа.

выражающий площадь под кривой $n(z; 0, 1)$ в промежутке от 0 до z (черт. 39), носит название *нормированной функции Лапласа* или просто *функции Лапласа*. Для него существуют таблицы значений, вычисленные вышеуказанным путем. В табл. IV приложений приведены значения функции Лапласа для значений z от 0 до 5 через 0,01.

Заметим, что

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(-\infty) = -\frac{1}{2}, \quad \Phi(+\infty) = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \Phi(-z) = -\Phi(z),$$

т. е. площадь в промежутке $(0, -z)$ равна площади в промежутке $(0, z)$, но считается отрицательной.

Интегральную функцию нормального распределения можно выразить через функцию Лапласа следующим образом:

$$\int_{-\infty}^0 n(z; 0; 1) dz + \int_0^z n(z; 0; 1) dz = N(z; 0; 1) = 0,5 + \Phi(z). \quad (4.3.31)$$

Если теперь воспользоваться функцией Лапласа, то формула (4.3.29) примет вид

$$\begin{aligned} P(x_1 < X < x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x_2-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x_1-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &= \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right). \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

Вообще

$$P(-\infty < X < x_1) = N(x; a, \sigma) = \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right) - \Phi(-\infty) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right). \quad (4.3.33)$$

Пример 4.3.4. Втулка диаметра $60^{+0,06}$ входит в узел, собираемый по методу группового подбора, причем допуски сопрягаемых деталей подразделяются на четыре равные части (группы).

Требуется определить вероятность того, что диаметры втулок будут находиться в пределах второй группы, если известно, что окончательная обработка производится на станке, настраиваемом на середину поля допуска и обеспечивающем $\sigma_x = 10$ мк при нормальном распределении диаметра втулок.

В нашем случае $x_1 = +15$ мк и $x_2 = +30$ мк. При настройке станка на середину поля допуска будем иметь:

$$MX = +30 \text{ мк}$$

и потому по формуле (4.3.32) получим:

$$P(15 \leq X \leq 30) = \Phi\left(\frac{30-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{15-30}{10}\right) = \Phi(0) - \Phi(-1,5) = \Phi(1,5) = 0,4332.$$

Значение $\Phi(1,5)$ при $z = 1,5$ берем по табл. IV приложений. Иногда при вычислениях удобнее пользоваться удвоенной функцией Лапласа, т. е.

$$2\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{+z} e^{-\frac{v^2}{2}} dv. \quad (4.3.34)$$

Графически этот интеграл представляет площадь под нормальной кривой в промежутке от $-z$ до $+z$.

В табл. V приложений приведены значения удвоенной функции Лапласа для значений z от 0 до 3,99 через 0,01.

Пример 4.3.5. Математическое ожидание отклонения x нормально распределенного диаметра втулки равно $MX = +30$ мк. Среднее квадратическое отклонение $\sigma_x = 10$ мк.

Требуется определить вероятность того, что диаметр втулки будет иметь отклонения от $+10$ до $+50$.

Определяем сначала нормированные значения абсцисс

$$z_1 = \frac{10-30}{10} = -2, \quad z_2 = \frac{50-30}{10} = +2.$$

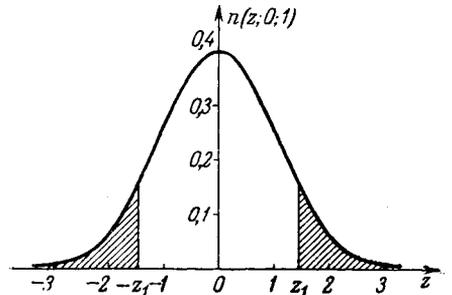
По табл. V приложений при $z = 2$ находим:

$$P(+10 < X < +50) = P(-2 < Z < +2) = 2\Phi(2) = 0,95450.$$

Часто бывает нужно знать вероятность Q_z того, что случайная величина X будет отличаться от ее среднего значения $a = MX$ больше, чем на взятое z раз среднее квадратическое отклонение σ_x . Эта вероятность равна

$$Q_z = P(|X - MX| > z \cdot \sigma_x) = P(|Z| > z) = 1 - 2\Phi(z) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{+z} e^{-\frac{v^2}{2}} dv. \quad (4.3.35)$$

Графически вероятность Q_z представляет сумму двух крайних площадей на графике плотности вероятности, заштрихованных на черт. 40.



Черт. 40. Крайние площади на графике плотности вероятности нормированного нормального распределения.

Значение $z = z_q$, соответствующее $Q = \frac{q}{100}$, называется q -процентным значением нормального отклонения.

Для $z = 3$ $Q_z = 0,0027$; таким образом, вероятность превзойти утроенное среднее квадратическое отклонение менее $0,27\%$. Поэтому во многих вопросах практически допустимыми пределами отклонения считают пределы $a \pm 3\sigma$.

В табл. VI приложений приведены значения вероятности Q_z того, что случайная величина X будет отличаться от ее среднего значения MX больше, чем на взятое q раз среднее квадратическое отклонение при значениях z_q от 0,0 до 30.

В табл. VII приложений приведены q -процентные значения нормальных отклонений q при значениях вероятности $q = 100Q$ от 100 до $0,01\%$ и значения вероятности q в процентах при значениях z_q от 0,0 до 4,0.

Пример 4.3.6. Требуется определить вероятность того, что нормально распределенный диаметр $60_{-0,06}$ валика выйдет за границы поля допуска, если известно, что $\sigma_X = 12$ мк и настройка производится на середину допуска. По формуле (4.3.19) находим математическое ожидание $MX = a = \frac{-60}{2} = -30$ мк.

Находим:

$$z_q = \frac{0 - 30}{12} = -2,5.$$

По табл. VI приложений при $z_q = 2,5$ находим:

$$P(|X + 30| > 30) = P(|Z| > 2,5) = 0,0124.$$

Пример 4.3.7. По условиям примера 4.3.6 требуется определить: 1) при каких допускаемых отклонениях диаметра валика вероятность выхода за границы поля допуска будет $0,1\%$ и 2) вероятность выхода диаметра валика за границу $- + 0,018$ мм?

1) По табл. VII приложений для $q = 0,1$ находим $z_q = 3,2905$, откуда

$$z_q \sigma = 3,29 \cdot 12 = 39,48 \text{ мк} \approx 40 \text{ мк}.$$

Поэтому

$$P(|X + 30| > 40) \approx 0,001 = 0,1\%.$$

Следовательно, искомые наименьшие и наибольшие допустимые отклонения будут:

$$x_{\text{нм}} = -30 - 40 = -70 \text{ мк} = -0,07 \text{ мм}, \quad x_{\text{вб}} = -30 + 40 = +10 \text{ мк} = +0,01 \text{ мм}.$$

2) Находим $z_q = \frac{18 - (-30)}{12} = 4$. По табл. VII приложений при $z_q = 4$ находим:

$$q = 0,006\%.$$

4.3.4. Обоснование нормального распределения в трудах П. Л. Чебышева, А. А. Маркова и А. М. Ляпунова. В обосновании статистической теории кривых распределения наметились два диаметрально противоположных пути.

Первый путь — это путь русской классической школы теории вероятностей (П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов) — путь глубокого теоретического исследования условий возникновения рассеивания, отображающих существенные черты реальных процессов.

Второй путь — это путь английской школы математической статистики, основоположник которой Карл Пирсон предложил особую систему «интерполяционных» кривых для чисто внешнего описания картины эмпирического распределения. Этот формальный подход, характерный для идеалистической установки английской школы, был связан вместе с тем с отказом от анализа реальных условий рассеивания. Он, естественно, оказался в целом бесплодным, так как

не уяснял, а скорее затушевывал внутренние закономерности исследуемых процессов.

Теоретико-вероятностное обоснование некоторых из типов распределений, предложенных Пирсоном, было получено позднее на совершенно другом пути и обязано работам А. А. Маркова, С. Н. Бернштейна, А. Н. Колмогорова и других советских ученых. Именно этот — первый путь — соответствует основным положениям марксистско-ленинской теории познания.

Наиболее распространенными теоретическими схемами условий возникновения рассеивания значений случайных величин, схемами, приводящими к определенным теоретическим кривым распределения, являются такие, когда случайная величина является суммой большого числа независимых и относительно малых слагаемых (схема суммы).

Эта схема была впервые исчерпывающим образом исследована в трудах П. Л. Чебышева, А. А. Маркова и А. М. Ляпунова. Основная закономерность, установленная ими, обычно формулируется в виде так называемой «центральной предельной теоремы». Оказалось, что в достаточно широких условиях схема суммы приводит к нормальному распределению.

Остановимся на предельной теореме А. М. Ляпунова. Эта теорема относится к распределению суммы независимых случайных величин.

В несколько упрощенном виде *теорема Ляпунова* может быть сформулирована следующим образом.

Пусть

$$S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n,$$

где Y_1, Y_2, \dots, Y_n — независимые случайные величины, число которых n неограниченно возрастает.

Рассмотрим нормированное отклонение суммы S_n , т. е. величину

$$Z_n = \frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}}$$

и функцию распределения Z_n обозначим

$$F_n(z) = P(Z_n < z).$$

Тогда, если при $n \rightarrow \infty$ выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n M | Y_i - MY_i |^3}{(DS_n)^{3/2}} \rightarrow 0, \quad (4.3.36)$$

то для любых действительных чисел z

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) = N(z; 0; 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi(z). \quad (4.3.37)$$

Таким образом, при выполнении условия (4.3.36) сумма большого числа независимых слагаемых будет приближенно следовать нормальному закону распределения. Смысл условия (4.3.36) сводится к тому, что в сумме S должны отсутствовать слагаемые, могущие принимать значения, сравнимые по своему порядку со всей суммой; другими словами, роль отдельных слагаемых в образовании суммы должна быть исчезающе мала при большом n .

Заметим, что условие Ляпунова (4.3.36) всегда выполняется, если сумма состоит из одинаково распределенных слагаемых, обладающих каждое конечной дисперсией и третьим абсолютным моментом. В самом деле, в этом случае

$$\sum_{i=1}^n M | Y_i - MY_i |^3 = nM | Y_1 - MY_1 |^3 = nb, \quad (4.3.38)$$

так как все слагаемые имеют равные значения. В то же время на основании теоремы о дисперсии суммы независимых случайных величин

$$DS_n = n \cdot \sigma^2,$$

где σ^2 — дисперсия каждого из n независимых одинаково распределенных слагаемых и потому

$$\frac{\sum_{i=1}^n M |Y_i - MY_i|^3}{(DS_n)^{3/2}} = \frac{n \cdot b}{(n \cdot \sigma^2)^{3/2}} = \frac{b}{\sqrt{n} \sigma^3}.$$

Эта величина стремится к нулю при возрастании n (b и σ — постоянные).

Таким образом, нормированная сумма одинаково распределенных независимых слагаемых будет на основании теоремы Ляпунова при большом n распределена приближенно нормально.

То, что условие (4.3.36) соблюдается при отсутствии слагаемых, которые могут принимать значения, большие, чем сумма большинства остальных слагаемых, видно из следующего. Пусть все величины Y_i ограничены, так что их значения (а следовательно, и математические ожидания) лежат в некотором интервале $(-L; L)$, где L — положительное постоянное число. Тогда для любого из слагаемых

$$M |Y_i - MY_i|^3 \leq 2LM (Y_i - MY_i)^2 = 2LDY_i,$$

откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^n M |Y_i - MY_i|^3 \leq 2L \sum_{i=1}^n DY_i = 2LD(S_n). \quad (4.3.39)$$

Разделим обе части неравенства (4.3.39) на $(\sum_{i=1}^n DY_i)^{3/2} = (DS_n)^{3/2}$:

$$\frac{\sum_{i=1}^n M |Y_i - MY_i|^3}{(DS_n)^{3/2}} \leq \frac{2L}{\sqrt{DS_n}}. \quad (4.3.40)$$

Если теперь $n \rightarrow \infty$, то и $\sqrt{DS_n} \rightarrow \infty$, если нет такого Y_i , которое было бы больше большинства остальных (ибо если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} DY_i$ сходится, то первый его член будет больше суммы членов, взятых начиная с некоторого номера), и правая часть неравенства (4.3.40) стремится к нулю так, что условие (4.3.36) будет выполняться.

То, что условие (4.3.36) может не соблюдаться, если отдельные слагаемые слишком велики, видно из следующего: предположим, что среди слагаемых Y_i есть такое, которое может принимать только два значения (с вероятностью $\frac{1}{2}$ каждое), очень далеко друг от друга отстоящие (по сравнению со средним квадратическим суммы остальных), а именно:

$$Y_k = MY_k \pm \frac{1}{2} \sqrt{DS_n}$$

(тогда $DY_k = \frac{1}{4} DS_n$, т. е. велико по сравнению с суммой остальных слагаемых); тогда

$$M |Y_k - MY_k|^3 = \left(\frac{1}{2} \sqrt{DS_n}\right)^3. \quad (4.3.41)$$

Если теперь левую часть (4.3.36) разложить на отдельные слагаемые, то в число этих слагаемых будет входить одно вида

$$\frac{M |Y_k - MY_k|^3}{(DS_n)^{3/2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 (DS_n)^{3/2}}{(DS_n)^{3/2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3. \quad (4.3.42)$$

Очевидно, если при возрастании n среди слагаемых в сумме (4.3.36) найдутся члены, подобные (4.3.42), то условие (4.3.36) не может выполняться.

Нормальное распределение появилось впервые в исследованиях Муавра (1733) в связи с рассмотрением частного случая биномиального распределения при боль-

ших числа испытаний. Но тогда оно осталось незамеченным. Впоследствии нормальное распределение было снова открыто Гауссом (1809) и Лапласом (1812).

Гаусс и Лаплас пришли к нормальному закону в связи со своей работой по теории ошибок наблюдений.

Под влиянием работ Гаусса и Лапласа долгое время считалось, что практически все статистические распределения должны приближаться к нормальному распределению.

Отклонение случайной величины от ее среднего рассматривалось как «ошибка», подчиненная нормальному закону.

Такая точка зрения является преувеличением роли нормального закона; практика показывает, однако, что в довольно большом числе важных случаев встречаются распределения приблизительно нормальные.

Картина нормального распределения наблюдается на опыте всякий раз, когда варьирование рассматриваемого признака (величины) происходит под действием большого числа суммирующихся друг с другом, почти независимых и малых по сравнению со всей суммой воздействий. Такое суммирование обычно накладывается на основную закономерность, определяющую средний уровень признака, и приводит к «нормальной» кривой распределения. Нормальный закон обнаруживается, например, в распределении компонент скорости газовых молекул, в рассеивании координат частиц, подверженных брауновскому движению, в изменчивости организмов растений. Приблизительно этому закону следует также рассеивание по дальности точек поражения при артиллерийской стрельбе и т. д. При устойчивом и отлаженном режиме работы станков, однородности обрабатываемого материала варьирование качества продукции массового производства также принимает часто форму нормального распределения в силу того, что производственная погрешность, возникающая при изготовлении детали, представляет результат суммарного эффекта погрешностей станка, инструмента, приспособлений, заготовок и т. д.

Центральная предельная теорема дает теоретическое объяснение этим фактам. Разумеется, что в каждом конкретном случае общая закономерность приобретает свои специфические особенности, сказывающиеся в положении «центра» и амплитуде рассеивания.

4.3.5. Применение нормального закона для вычисления вероятностей при биномиальном распределении. Теорема Лапласа. Нормальное распределение часто получается как предельный вид других распределений. В частности, мы покажем, что оно является предельным для биномиального (соответственным образом нормированного) распределения, если число испытаний s неограниченно возрастает. Пусть случайная величина подчиняется биномиальному закону так, что

$$P(X = k) = P_s(k) = C_s^k p^k q^{s-k}.$$

Мы знаем из 4.2.1, что первые моменты распределения X в этом случае выражаются следующим образом:

$$MX = sp,$$

$$DX = spq,$$

$$\sigma_X = \sqrt{spq};$$

они неограниченно возрастают вместе с s . Для того чтобы иметь дело с величиной, дисперсия которой ограничена, мы от величины X перейдем к ее нормированному отклонению, введя в рассмотрение величину

$$Y = \frac{X - MX}{\sigma_X} = \frac{X - sp}{\sqrt{spq}}. \quad (4.3.43)$$

Величина Y принимает значения $t_k = \frac{k-sp}{\sqrt{spq}}$, когда $X = k$ с вероятностью $P_s(k)$.

Значения t_k и t_{k+1} , отвечающие двум последовательным значениям k и $k+1$ величины X , отличаются на величину

$$\Delta t = t_{k+1} - t_k = \frac{1}{\sqrt{spq}} \quad (4.3.44)$$

— шага новой шкалы t , на которой мы условимся изображать значения переменной t . Заметим, что шаг шкалы k , на которой изображались значения переменной k , был равен единице, так как $\Delta k = (k+1) - k = 1$. Шаг Δt будет тем меньше, чем больше значение s при данном p .

Пусть t' и t'' ($t'' > t'$) — два значения нормированного уклонения. Займемся вопросом о том, как можно вычислить приближенную вероятность того, что величина Y попадает в интервал (t', t'') .

Заметим, прежде всего, что

$$\begin{aligned} P(t' \leq Y \leq t'') &= P\left(t' \leq \frac{X-sp}{\sqrt{spq}} < t''\right) = \\ &= P(sp + t' \sqrt{spq} \leq X < sp + t'' \sqrt{spq}) = P_s(t', t''). \end{aligned} \quad (4.3.45)$$

Обозначим через $a(t')$ и $a(t'')$ крайние возможные значения для величины X такие, что

$$\left. \begin{aligned} a(t') &= sp + t' \sqrt{spq}, \\ a(t'') &= sp + t'' \sqrt{spq}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.46)$$

Мы найдем по правилу сложения

$$P_s(t', t'') = \sum_{m=a(t')}^{a(t'')} P_s(m). \quad (4.3.47)$$

Таким образом, задача вычисления вероятности $P_s(t', t'')$ приводится к вычислению суммы (4.3.47). Эту сумму можно приближенно определить при больших значениях s , когда непосредственное вычисление вероятности делается затруднительным.

Для ее вычисления в этих условиях служит приближенная формула Лапласа

$$P_s(t', t'') \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t'}^{t''} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(t'') - \Phi(t'). \quad (4.3.48)$$

Погрешность этой формулы стремится к нулю с ростом s . Это обстоятельство показывает, что *нормированное уклонение величины X , следующей биномиальному закону, приближенно при больших s подчиняется нормальному закону и тем точнее, чем больше s* . Это предложение называется *теоремой Лапласа*.

Перейдем к ее доказательству. Мы начнем с вывода приближенной формулы для вероятности $P_s(m)$ — общего члена суммы.

Заметим, что в 2.4.2 мы имели:

$$\frac{P_s(k+1)}{P_s(k)} = \frac{(s-k)p}{(k+1)q}.$$

Так как согласно (4.3.46)

$$k = sp + t_k \sqrt{spq}$$

и

$$s - k = s - sp - t_k \sqrt{spq} = sq - t_k \sqrt{spq},$$

то наше равенство можно записать так:

$$\frac{P_s(k+1)}{P_s(k)} = \frac{spq - t_k p \sqrt{spq}}{spq + q + t_k q \sqrt{spq}} = \frac{1 - \frac{t_k p}{\sqrt{spq}}}{1 + \frac{t_k q}{\sqrt{spq}} + \frac{1}{sp}}. \quad (4.3.49)$$

Беря натуральный логарифм каждой части (4.3.49), найдем:

$$\ln P_s(k+1) - \ln P_s(k) = \ln \left(1 - \frac{t_k p}{\sqrt{spq}} \right) - \ln \left(1 + \frac{t_k q}{\sqrt{spq}} + \frac{1}{sp} \right). \quad (4.3.50)$$

Заметим теперь, что при малых значениях x

$$\ln(1+x) \approx x;$$

ошибка этого приближенного равенства будет малой величиной порядка x^2 . Это вытекает из известного разложения по степеням x в ряд Маклорена:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Таким образом, мы можем написать:

$$\ln(1+x) = x + O(x^2), \quad (4.3.51)$$

где остаточный член $O(x^2)$ приближенной формулы имеет порядок x^2 . Пользуясь равенством (4.3.51), будем иметь:

$$\ln \left(1 - \frac{t_k p}{\sqrt{spq}} \right) \approx - \frac{t_k p}{\sqrt{spq}} = -t_k p \cdot \Delta t, \quad (4.3.52)$$

пренебрегая членами порядка малости первой и более высоких степеней относительно $\frac{1}{s}$.

Аналогично, с точностью до членов того же порядка будем иметь:

$$\ln \left(1 + \frac{t_k q}{\sqrt{spq}} + \frac{1}{sp} \right) \approx \frac{t_k q}{\sqrt{spq}} = t_k q \cdot \Delta t. \quad (4.3.53)$$

Из (4.3.50), (4.3.52) и (4.3.53) следует:

$$\ln P_s(k+1) - \ln P_s(k) \approx -t_k \Delta t \quad (4.3.54)$$

с точностью до членов более высокого порядка малости. Рассмотрим теперь отношение

$$\frac{P_s(m)}{P_s(k_0)} = \frac{P_s(k_0+1)}{P_s(k_0)} \cdot \frac{P_s(k_0+2)}{P_s(k_0+1)} \cdots \frac{P_s(m)}{P_s(m-1)},$$

считая $m > k_0$, где k_0 — вероятнейшее значение для данного биномиального распределения. Логарифмируя и принимая во внимание (4.3.54), получим:

$$\ln \left[\frac{P_s(m)}{P_s(k_0)} \right] = \sum_{k=k_0}^{m-1} [\ln P_s(k+1) - \ln P_s(k)] \approx - \sum_{k=k_0}^m t_k \Delta t. \quad (4.3.55)$$

Но последнюю сумму можно рассматривать как интегральную для интеграла

$$- \int_{t_{k_0}}^{t_m} t dt = - \left[\frac{t_m^2}{2} - \frac{t_{k_0}^2}{2} \right] = - \frac{t_m^2}{2} + \frac{\theta^2}{2spq},$$

так как $t_{k_0} = \frac{k_0 - sp}{\sqrt{spq}} = \theta \Delta t$ ($0 < \theta < 1$). Пренебрегая последним членом, мы можем

с точностью до величины порядка $(\Delta t)^2 = \frac{1}{spq}$ положить

$$- \sum_{k=k_0}^m t_k \Delta t \approx - \frac{t_m^2}{2}, \quad (4.3.56)$$

и потому из (4.3.55) и (4.3.56) следует:

$$\ln \left[\frac{P_s(m)}{P_s(k_0)} \right] \approx -\frac{t_m^2}{2},$$

откуда, потенцируя, получим:

$$\frac{P_s(m)}{P_s(k_0)} \approx e^{-\frac{t_m^2}{2}}$$

и

$$P_s(m) \approx P_s(k_0) e^{-\frac{t_m^2}{2}}. \quad (4.3.57)$$

Здесь $P_s(k_0)$ — вероятность, отвечающая наибольшему члену в биномиальном распределении. Умножая правую часть приближенного равенства (4.3.57) на

$$\frac{\sqrt{2\pi spq}}{\sqrt{2\pi spq}} = \frac{\sqrt{2\pi spq}}{\sqrt{2\pi}} \Delta t,$$

получим:

$$P_s(m) \approx \sqrt{2\pi spq} P_s(k_0) \frac{e^{-\frac{t_m^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Delta t = C_s \frac{e^{-\frac{t_m^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \Delta t, \quad (4.3.58)$$

где $C_s = \sqrt{2\pi spq} P_s(k_0)$ не зависит от m . Из (4.3.47) и (4.3.58) для вероятности $P_s(t', t'')$ мы будем иметь теперь следующее приближенное выражение:

$$P_s(t', t'') \approx C_s \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=a(t')}^{a(t'')} e^{-\frac{t_m^2}{2}} \Delta t; \quad (4.3.59)$$

при этом, когда m пробегает все целые числа между $a(t')$ и $a(t'')$, то t_m пробегает все значения нормированных абсцисс в промежутке от t' до t'' , отделенные друг от друга шагом Δt . Поэтому при достаточно большом s и при малости Δt мы можем написать:

$$P_s(t', t'') \approx C_s \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t'}^{t''} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (4.3.60)$$

Этой формулой, в которой t' и t'' могут принимать любые значения нормированных отклонений, мы воспользуемся прежде всего для того, чтобы определить значение C_s .

Если выбрать $t' < -T$ и $t'' > +T$, где T взять достаточно большим, то левая часть (4.3.60) будет как угодно близка к единице при любом s .

В самом деле,

$$P_s(t', t'') = P\left(t' \leq \frac{X-sp}{\sqrt{spq}} \leq t''\right) \geq P\left\{-T \leq \frac{X-sp}{\sqrt{spq}} \leq T\right\} \geq 1 - P\left(\left|\frac{X-sp}{\sqrt{spq}}\right| \geq T\right),$$

и, применяя неравенство Чебышева, мы будем иметь:

$$P_s(t', t'') \geq 1 - \frac{1}{T^2},$$

так как $D\left(\frac{X-sp}{\sqrt{spq}}\right) = 1$ и потому

$$P\left(\left|\frac{X-sp}{\sqrt{spq}}\right| \geq T\right) \leq \frac{1}{T^2}.$$

С другой стороны, T можно взять также настолько большим, чтобы при $t' < -T$ и $t'' > T$ интеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t'}^{t''} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ отличался от полного интеграла $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$ также как угодно мало.

Для того чтобы формула (4.3.60) была справедлива при этих значениях t' и t'' , необходимо для больших s иметь:

$$C_s \approx 1. \tag{4.3.61}$$

Таким образом, на основании (4.3.58) и (4.3.61) для вероятности $P_s(t', t'')$ мы имеем приближенную формулу

$$P_s(m) \approx \frac{e^{-\frac{t_m^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Delta t, \tag{4.3.62}$$

где

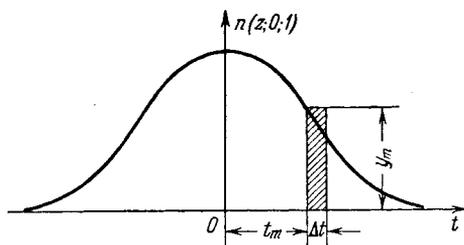
$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{spq}}, \quad t_m = \frac{m - sp}{\sqrt{spq}}.$$

Рассматривая нормальную кривую (черт. 41), мы видим, что

$$P_s(m) \approx y_m \Delta t, \tag{4.3.63}$$

где y_m — ордината нормальной кривой в точке

$$t = t_m = \frac{m - sp}{\sqrt{spq}}. \tag{4.3.64}$$



Черт. 41. Геометрическая интерпретация вероятности $P_s(m)$ при биномиальном распределении для большого s .

Приближенная формула (4.3.62) говорит, что вероятность $P_s(m)$ при больших s эквивалентна площади прямоугольника, построенного на ординате y_m нормальной кривой в точке $t = t_m$ с основанием $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{spq}}$.

Это геометрическое истолкование делает очевидной другую интегральную формулу для вероятности $P_s(t', t'')$. В самом деле, эта вероятность приближенно выражается суммой прямоугольников, построенных на ординатах нормальной кривой в точках t_m , причем t_m пробегает нормированные абсциссы в промежутке от t' до t'' с шагом Δt . Сумму площадей этих прямоугольников мы заменяем площадью под нормальной кривой в том же интервале (t' , t''). Таким образом,

$$P_s(t', t'') = \sum_{m=a(t')}^{a(t'')} P_s(m) \approx \sum_{t' \leq t \leq t''} e^{-\frac{t^2}{2}} \Delta t \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t'}^{t''} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(t'') - \Phi(t'),$$

что и требовалось доказать.

Чтобы применить доказанное свойство величины X к вычислению вероятности неравенства

$$a \leq X \leq b, \tag{4.3.65}$$

где a и b — два целых числа, следует сначала вычислить пределы (нижний и верхний)

$$t' = \frac{a - sp}{\sqrt{spq}} \quad \text{и} \quad t'' = \frac{b - sp}{\sqrt{spq}}$$

для нормированного уклонения t .

Неравенство (4.3.65) равносильно неравенству

$$t' \leq t \leq t'' \tag{4.3.66}$$

и потому

$$P(a \leq X \leq b) = P(t' \leq t \leq t'') \approx \Phi(t'') - \Phi(t'), \tag{4.3.67}$$

или

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - sp}{\sqrt{spq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - sp}{\sqrt{spq}}\right). \tag{4.3.67'}$$

Можно уменьшить погрешность приближенной формулы (4.3.67), если начало t' интервала интеграции (t' , t'') сдвинуть на половину основания Δt элементарного прямоугольника влево вдоль оси t , а конец t'' этого интервала сдвинуть на такую же величину вправо.

Другими словами, в формулы (4.3.67) и (4.3.67') следует подставить

$$t' = \frac{a - \frac{1}{2} - sp}{\sqrt{spq}} \quad \text{и} \quad t'' = \frac{b + \frac{1}{2} - sp}{\sqrt{spq}}, \quad (4.3.68)$$

так что

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - sp}{\sqrt{spq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - sp}{\sqrt{spq}}\right).$$

В частности, полагая $a = -\infty$ и $b = x$, найдем:

$$P(X \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x + \frac{1}{2} - sp}{\sqrt{spq}}\right). \quad (4.3.69)$$

Отсюда квантиль $x_{\bar{p}}$ биномиального распределения, для которого $P(X \leq x_{\bar{p}}) = \bar{p}$, можно приближенно определить, полагая

$$\frac{x_{\bar{p}} + \frac{1}{2} - sp}{\sqrt{spq}} = u_{\bar{p}}, \quad (4.3.70)$$

где $u_{\bar{p}}$ — соответствующий квантиль нормального закона распределения $\Phi(u_{\bar{p}}) = \bar{p}$; из (4.3.70) следует:

$$x_{\bar{p}} = sp - \frac{1}{2} + u_{\bar{p}} \cdot \sqrt{sp(1-p)}. \quad (4.3.71)$$

Пример 4.3.8. Известно, что вероятность обработанной детали оказаться по своим размерам вне контрольной зоны постоянна и равна $p = 0,2$. Отбирается выборка объема 400 штук. Распределение полагается биномиальным, и требуется определить вероятность того, что вне контрольной зоны окажется от 70 до 100 деталей.

Математическое ожидание равно

$$MX = sp = 400 \cdot 0,2 = 80 \text{ штук.}$$

Среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma_X = \sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = \sqrt{64} = 8 \text{ штук.}$$

Находим отклонения от математического ожидания:

$$t' = \frac{70 - 80}{8} = -1,25, \quad t'' = \frac{100 - 80}{8} = 2,5.$$

По формуле (4.3.67) находим:

$$\begin{aligned} P\left(-1,25 < \frac{X - 80}{8} < +2,5\right) &= \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \\ &= \Phi(2,5) + \Phi(1,25) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882. \end{aligned}$$

Значения функции Лапласа при $t'' = z_1 = 2,5$ и $t' = z_2 = -1,25$ берем по табл. IV приложений.

Более точный результат получим, если по формуле (4.3.68) возьмем:

$$t' = \frac{70 - \frac{1}{2} - 80}{8} = \frac{-10,5}{8} = -1,31$$

и

$$t'' = \frac{100 + \frac{1}{2} - 80}{8} = \frac{20,5}{8} = 2,56.$$

Тогда

$$P\left(-1,31 < \frac{X-80}{8} < 2,56\right) = \Phi(2,56) - \Phi(-1,31) = \\ = \Phi(2,56) + \Phi(1,31) = 0,4948 + 0,4049 = 0,8997.$$

Уточнение составляет 1,30%.

4.3.6. Характеристики уклонения от нормального закона: асимметрия и эксцесс. Как видно из 4.3.4, нормальное распределение в теории вероятностей и в математической статистике занимает особое место. Поэтому при рассмотрении распределений, отличающихся от нормального, стремятся дать количественную оценку этого отличия.

Очевидно, что такая оценка может быть сделана по крайней мере в двух направлениях: 1) в отношении асимметричности распределения, поскольку нормальное распределение является симметричным, и 2) в отношении крутости или точнее острровершинности кривой распределения, поскольку нормальная кривая имеет определенную «куполообразную» форму вершины.

В симметричном, в том числе в нормальном, распределении каждый центральный момент нечетного порядка равен нулю (если он вообще существует), как это мы видели, в частности, в 4.3.2. Любой нечетный момент, не равный нулю, можно, таким образом, рассматривать как характеристику асимметричности данного распределения. Простейшая из этих характеристик — центральный момент третьего порядка μ_3 — выражается в единицах измерения самой случайной величины в третьей степени.

Чтобы иметь дело с безразмерной характеристикой, не зависящей от выбора единиц измерения, момент третьего порядка делят на куб среднего квадратического отклонения.

Полученная таким образом характеристика асимметричности распределения носит название *асимметрии*

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \quad (4.3.72)$$

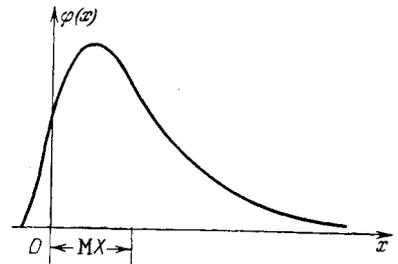
Таким образом, *асимметрией* называется отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратического отклонения. Показатель асимметрии для нормального распределения равен нулю.

В приложениях к статистике часто встречаются одномодальные распределения типа, изображенного на черт. 42. Здесь кривая плотности вероятности такова, что по одну сторону от математического ожидания расположена «длинная часть», а по другую сторону «короткая часть». Когда «длинная часть» расположена справа от математического ожидания, тогда, естественно, μ_3 , а вместе с ним и S_k будут положительными, так как сумма кубов положительных отклонений превысит сумму кубов отрицательных отклонений. Такова именно кривая плотности вероятности, изображенная на черт. 42. Если «длинная часть» будет лежать слева от математического ожидания, то μ_3 и, следовательно, S_k будут отрицательными.

В качестве характеристики сглаженности кривой плотности вероятности около ее центра используют безразмерный показатель «эксцесс»:

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (4.3.73)$$

Из соотношения (4.3.27) следует, что центральный момент четвертого порядка нормального распределения (отнесенный к среднему квадратическому отклонению в четвертой степени) равен трем.



Черт. 42. Кривая плотности вероятности распределения с положительной асимметрией.

Из сопоставления соотношений (4.3.73) и (4.3.27) следует, что эксцесс нормального распределения равен нулю.

Таким образом, эксцесс характеризует уклонение данного распределения от нормального распределения.

Для кривых, близких к нормальной кривой, положительное значение эксцесса обычно указывает на то, что кривая плотности вероятности в окрестности моды имеет более высокую и более острую вершину, чем нормальная кривая с тем же



Черт. 43. Кривые плотности вероятности с отрицательным и положительным эксцессами.

центром и дисперсией. Отрицательное значение эксцесса указывает на более низкий и более плоский характер вершины по сравнению с соответствующей нормальной кривой (черт. 43).

Следует, однако, заметить, что подобное расположение кривой по отношению к нормальной кривой не является общим правилом, как иногда утверждают некоторые авторы популярных книг (Ритц, Юл и др.). Приведем уравнения четырех симметричных около центра $x = 0$ кривых распределения. Для каждой из них дисперсия равна единице. Все они сравниваются с нормальной кривой, имеющей тот же центр и дисперсию. Ордината нормальной кривой в центре, как можно видеть из табл. III приложений, равна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0,399.$$

В табл. 4.3.2 приведены уравнения кривых, соответствующие значения эксцесса и ординаты кривых в центре.

Таблица 4.3.2

№№ п/п	Уравнение кривой	Эксцесс	Ордината в начале координат	Разность между орди- натой дан- ной кривой и нормаль- ной кривой
1	$n(x; 0; 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	0	0,399	0
2	$P(x) = \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{9}{4} + x^4 \right) e^{-x^2}$	-0,25	0,423	+0,024
3	$Q(x) = \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left(\frac{9}{4} + x^4 \right) e^{-x^2}$	+0,125	0,387	-0,012
4	$R(x) = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{4}} + 4e^{-x^2} \right)$	+1,5	0,470	+0,071
5	$S(x) = \frac{3\sqrt{3}}{16\sqrt{\pi}} (2 + x^2) e^{-\frac{3x^2}{4}}$	-0,333	0,366	-0,033

Мы видим, что возможны любые комбинации «вершинности» кривой в центре и знака эксцесса.

Пример 4.3.9. Определим асимметрию и эксцесс биномиального распределения. Сначала найдем асимметрию. Из соотношения (3.6.8) видно, что

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3,$$

поэтому из (4.2.3), (4.2.6) и (4.2.7) имеем:

$$\mu_3 = (sp)^3 + 3q(sp)^2 - 2sp^2q + spq - 3[(sp)^2 + spq]sp + 2(sp)^3 = spq(1 - 2p) = spq(q - p)$$

и окончательно

$$\mu_3 = spq(1 - 2p) = spq(q - p). \quad (4.3.74)$$

Находим асимметрию для биномиального распределения по соотношению (4.3.72)

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{spq(q - p)}{spq \sqrt{spq}} = \frac{q - p}{\sqrt{spq}} = \frac{1 - 2p}{\sqrt{spq}}. \quad (4.3.75)$$

Таким образом, асимметрия, положительная при $p < \frac{1}{2}$, отрицательна при $p > \frac{1}{2}$ и равна нулю при $p = \frac{1}{2}$.

Найдем теперь эксцесс.

Из соотношений (4.2.3), (4.2.6), (4.2.7) и (3.6.8) следует, что

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4,$$

и поэтому из (4.2.8) будем иметь:

$$\mu_4 = 3(spq)^2 + spq(1 - 6pq). \quad (4.3.76)$$

Следовательно, эксцесс на основании соотношения (4.3.73) будет равен

$$E_k = \frac{3(spq)^2 + spq(1 - 6pq)}{(\sqrt{spq})^4} - 3 = \frac{1 - 6pq}{spq}. \quad (4.3.77)$$

Из соотношения (4.3.77) видно, что эксцесс будет положительным при $pq < \frac{1}{6}$, отрицательным при $pq > \frac{1}{6}$. Из соотношений (4.3.75) и (4.3.77) видно, что асимметрия и эксцесс биномиального распределения стремятся к нулю при устремлении s к бесконечности.

Это связано с тем, что биномиальное распределение в этом предположении приближается к нормальному.

Пример 4.3.10. Определим асимметрию и эксцесс распределения редких событий (Пуассона).

Сначала найдем асимметрию.

Для этого найдем центральный момент третьего порядка.

Из соотношений (4.2.22), (4.2.23), (4.2.24) и (3.6.8) получим:

$$\mu_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3(\lambda^2 + \lambda)\lambda + 2\lambda^3 = \lambda. \quad (4.3.78)$$

Из соотношения (4.3.72) найдем асимметрию распределения редких событий

$$S_k = \frac{\lambda}{(\sqrt{\lambda})^3} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (4.3.79)$$

Таким образом, асимметрия распределения всегда положительна, так как положительно λ .

Найдем теперь эксцесс.

Для этого найдем центральный момент четвертого порядка.

Из соотношений (4.2.22), (4.2.23), (4.2.24), (4.2.25) и (3.6.9) получим:

$$\mu_4 = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda - 4(\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda)\lambda + 6(\lambda^2 + \lambda)\lambda^2 - 3\lambda^4 = 3\lambda^2 + \lambda. \quad (4.3.80)$$

На основании соотношения (4.3.73) получим эксцесс

$$E_k = \frac{3\lambda^2 + \lambda}{(\sqrt{\lambda})^4} - 3 = \frac{1}{\lambda}. \quad (4.3.81)$$

Из соотношения (4.3.81) следует, что эксцесс распределения всегда положителен, так как λ всегда положительно.

Из соотношений (4.3.79) и (4.3.81) можно заключить, что при устремлении λ к бесконечности асимметрия и эксцесс распределения стремятся к нулю.

Это обстоятельство так же, как и при биномиальном распределении, связано с приближением нормированного распределения Пуассона к нормальному при $\lambda \rightarrow \infty$.

§ 4. Преобразование случайных величин

4.4.1. Плотность вероятности монотонной функции случайной величины.

Во многих задачах математической статистики наряду с данной случайной величиной X приходится рассматривать различные функции этой величины. При этом, помимо вопроса о математических ожиданиях и дисперсиях таких функций, рассмотренного в главе III, § 5, естественно, возникает еще вопрос о законе распределения случайной величины $U = u(X)$, в которую преобразуется величина X с помощью функции $u = u(x)$. Функцию распределения $G(u)$ величины U мы можем определить, рассуждая следующим образом. Предположим, что величина X распределена непрерывно с плотностью вероятности $\varphi(x)$ и $F(x)$ — ее функция распределения

$$P(X < x) = F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx.$$

Пусть, далее, функция $u(x)$ будет монотонной на всей оси x и непрерывной в каждой точке функции, например

$$U = u(X) = X^3.$$

При заданном числе u неравенство

$$U < u$$

или $X^3 < u$ равносильно неравенству $-\infty < X < \sqrt[3]{u}$. В этом случае

$$G(u) = P[u(X) < u] = P[X < \sqrt[3]{u}] < \int_{-\infty}^{\sqrt[3]{u}} \varphi(x) dx = F(\sqrt[3]{u}).$$

Вообще, если функция $u(x)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция на всей оси x и $x(u)$ — функция, обратная функции $u(x)$, то неравенство

$$u(X) < u$$

равносильно неравенству

$$X < x(u)$$

и

$$G(u) = P[u(X) < u] = P[X < x(u)] = F[x(u)]. \quad (4.4.1)$$

Несколько иная картина получится, если функция $u(x)$ будет убывающей непрерывной функцией на всей оси x , какова, например, функция

$$u = \frac{1}{x^3} \quad (\text{при } x > 0)$$

(черт. 44).

В этом случае неравенство

$$u(X) < u$$

равносильно, очевидно, неравенству

$$X > x(u),$$

где $x(u)$ — обратная также убывающая функция по отношению к функции $u(x)$. В этом случае

$$G(u) = P[u(X) < u] = P[X > x(u)] = \int_{x(u)}^{\infty} \varphi(x) dx = 1 - F[x(u)]. \quad (4.4.2)$$

Предположим, кроме того, что функция $u(x)$ дифференцируема. В этом случае функция $G(u)$ будет также дифференцируемой, и плотность вероятности $g(u)$ величины U мы найдем, беря производные по u от правых частей равенств (4.4.1) и (4.4.2). В первом случае, применяя правило дифференцирования сложной функции, получим:

$$g(u) = G'(u) = F'(x) \frac{dx}{du}$$

или

$$g(u) = \varphi(x) \frac{dx}{du} \Big|_{x=x(u)}, \quad (4.4.3)$$

причем x заменяется его выражением через u с помощью обратной функции $x(u)$.

Во втором случае аналогично получим:

$$g(u) = -F'(x) \frac{dx}{du}, \quad (4.4.4)$$

при этом $\frac{dx}{du}$ отрицательна

как производная убывающей функции в противо-

положность случаю (4.4.3), где $\frac{dx}{du}$ была положительна. Так как в случае (4.4.4)

$-\frac{dx}{du} = \left| \frac{dx}{du} \right|$, то мы можем написать более общее равенство, пригодное для обоих случаев монотонной функции. Именно:

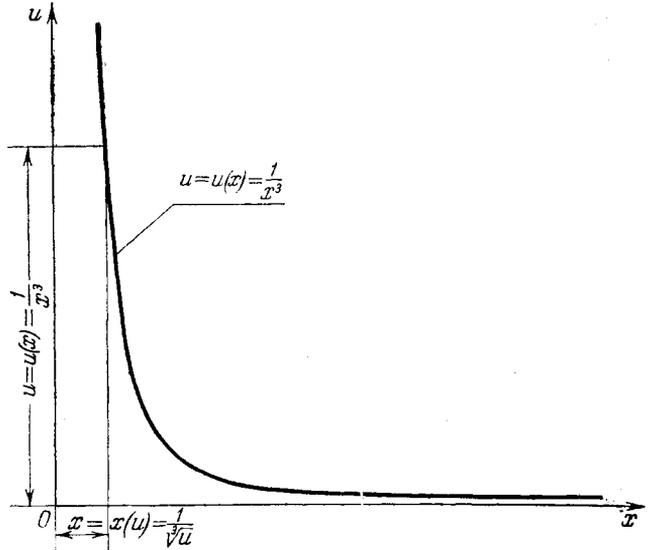
$$g(u) = \varphi(x) \left| \frac{dx}{du} \right|, \quad (4.4.5)$$

где $x = x(u)$, или

$$g(u) du = \varphi(x) \left| \frac{dx}{du} \right| du = \varphi(x(u)) |x'(u)| du. \quad (4.4.6)$$

Таким образом, мы можем сформулировать следующее правило преобразования плотности вероятности при непрерывном и монотонном преобразовании самой величины.

Пусть X — непрерывная случайная величина с плотностью вероятности $\varphi(x)$ и элементом вероятности $\varphi(x) dx$, $U = u(X)$ — преобразование величины X с помощью дифференцируемой монотонной функции $u(x)$ и $x(u)$ — обратная функция, преобразующая U в X . Тогда элемент вероятности $g(u) du$ величины U получается из элемента вероятности $\varphi(x) dx$ величины X по обычному правилу



Черт. 44. График монотонно убывающей функции $u = u(x) = \frac{1}{x^3}$ (при $x > 0$).

замены переменных: аргумент x в функции $\varphi(x)$ заменяем на $x(u)$, dx заменяем $|x'(u)| du$ так, что

$$g(u) du = \varphi(x(u)) |x'(u)| du$$

и

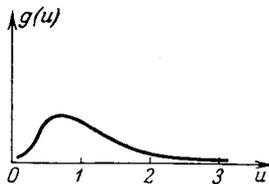
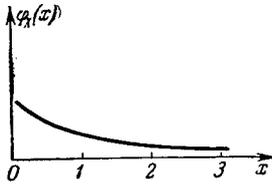
$$g(u) = \varphi(x(u)) \cdot |x'(u)|. \quad (4.4.7)$$

Пусть случайная величина X распределена с плотностью

$$\varphi_X(x) = e^{-x} \quad (x \geq 0);$$

функция этой случайной величины имеет вид

$$U = u(X) = \sqrt{X}$$



Черт. 45. Графики плотностей вероятности $\varphi_X(x) = e^{-x}$ и обратная функция величины X и $g(u) = 2ue^{-u^2}$ величины $U = \sqrt{X}$.

$$x(U) = U^2.$$

Тогда плотность вероятности $g(u)$ случайной величины U будет:

$$g(u) = e^{-u^2} \left| \frac{dx}{du} \right| = 2ue^{-u^2}. \quad (4.4.8)$$

Графики плотностей вероятности $\varphi_X(x)$ и $g(u)$ для этого случая показаны на черт. 45.

Пользуясь соотношением (4.4.1), получим:

$$\mathbf{P}(x_1 < X < x_2) = \mathbf{P}(u_1 < U < u_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi_X(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} \varphi_X(x(u)) \left| \frac{dx}{du} \right| du, \quad (4.4.9)$$

где u_1 и u_2 — значения переменной u , соответствующие значениям x_1 и x_2 переменной x .

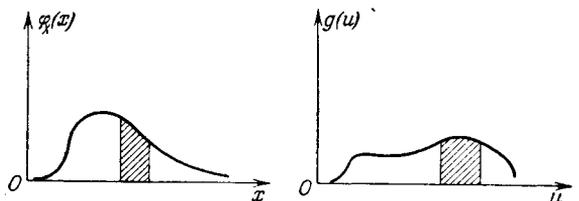
Соотношение (4.4.9) может быть проиллюстрировано графиками, изображенными на черт. 46.

Заштрихованная площадка на левом графике плотности вероятности $\varphi_X(x)$ представляет левый интеграл соотношения (4.4.9) и заштрихованная площадка на правом графике плотности вероятности $g(u) = \varphi_X(x(u)) \left| \frac{dx}{du} \right|$ представляет

правый интеграл того же соотношения. Равенство (4.4.7) имеет простой геометрический смысл.

Левая часть его представляет с точностью до бесконечно малых высшего порядка вероятность величине $U = u(X)$ лежать в интервале от u до $u + du$, т. е. вероятность

$$\mathbf{P}[u < u(X) < u + du].$$



Черт. 46. Графики плотностей вероятности $\varphi_X(x)$ случайной величины X и $g(u)$ величины $U = u(X)$.

При монотонном и дифференцируемом преобразовании интервала $(u, u + du)$ на оси u (черт. 47) соответствует интервал $I_u[x(u), x(u + du)]$ на оси x длины

$$|dx| \cong |x(u + du) - x(u)| \approx |x'(u)| du.$$

Правая часть (4.4.7) как раз и выражает вероятность попадания величины X в этот интервал, т. е. она выражает вероятность

$$P(X \text{ лежит в } I_u) \approx \varphi_X[x(u)] \left| \frac{dx}{du} \right| du.$$

Таким образом, левая и правая части (4.4.7) выражают вероятности эквивалентных событий.

4.4.2. Плотность вероятности немонотонной функции случайной величины. Последние рассуждения можно обобщить на более сложный случай немонотонной дифференцируемой функции с конечным числом максимумов и минимумов. На черт. 48 приведен случай, когда обратная функция $x(u)$ для функции $u = u(x)$ может иметь два значения (т. е. она двузначна). Каждому значению U в этом случае отвечает два значения X

$$X = X_1 = x_1(U)$$

и

$$X = X_2 = x_2(U).$$

Интервалу $(u, u + du)$ отвечают в этом случае два интервала:

$$(x_1 + \Delta x_1, x_1)$$

и

$$(x_2, x_2 + \Delta x_2).$$

Рассуждая, как и в предыдущем случае, найдем, что длина интервала $(x_1 + \Delta x_1, x_1)$ будет:

$$|\Delta x_1| = |x_1(u + du) - x_1(u)| = \left| \frac{dx_1}{du} \right| du$$

и длина интервала $(x_2, x_2 + \Delta x_2)$

$$|\Delta x_2| = \left| \frac{dx_2}{du} \right| du.$$

Поэтому

$$g(u) du = P(u < U < u + du) \approx$$

$$\approx \left[\varphi(x_1) \left| \frac{dx_1}{du} \right| + \varphi(x_2) \left| \frac{dx_2}{du} \right| \right] du.$$

Общая процедура нахождения плотности вероятности функции $u(X)$ случайной величины X заключается в следующем.

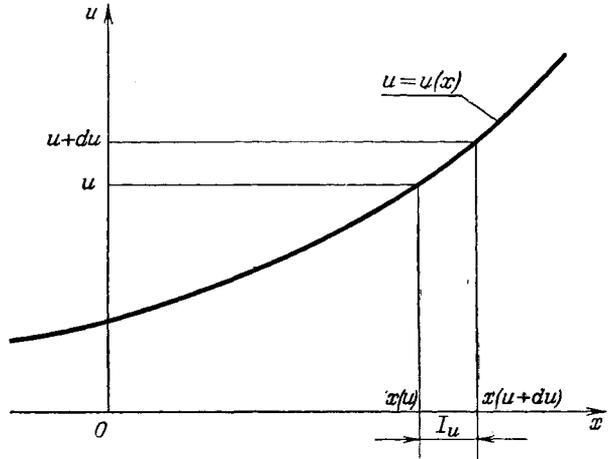
Для каждого u решаем уравнение $u(x) = u$ и находим все «ветви» обратной вообще многозначной функции $x = x(u)$

$$x_1 = x_1(u), \quad x_2 = x_2(u), \quad \dots, \quad x_i = x_i(u), \quad \dots$$

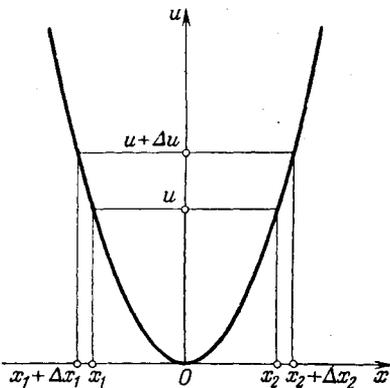
в данной области изменения переменной x .

Плотность вероятности величины U , обозначавшаяся через $g(u)$, выразится тогда в виде суммы

$$g(u) = \sum_i \varphi[x_i(u)] \left| \frac{dx_i}{du} \right|. \tag{4.4.10}$$



Черт. 47. Интервал $(u, u + du)$ на оси u и соответствующий ему интервал $[x(u), x(u + du)]$ на оси x .



Черт. 48. График функции $u = u(x) = x^2$, когда обратная функция $x(u)$ имеет два значения: $x_1(u) = +\sqrt{u}$ и $x_2(u) = -\sqrt{u}$.

Случай многозначности обратной функции мы имеем, например, при нахождении распределения квадрата величины X : $U = u(X) = X^2$ (см. черт. 48).

В этом случае обратная функция имеет две ветви

$$x_1(u) = +\sqrt{u} \quad \text{и} \quad x_2(u) = -\sqrt{u}$$

для каждого $u > 0$. Плотность вероятности $g(u)$ величины X^2 выразится формулой (4.4.10):

$$g(u) = \varphi(\sqrt{u}) \frac{1}{2\sqrt{u}} + \varphi(-\sqrt{u}) \frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

Если, например, величина X нормально распределена с плотностью вероятности

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

то

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} (e^{-\frac{u}{2}} + e^{-\frac{u}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-\frac{u}{2}} \quad (u \geq 0), \quad g(u) = 0 \quad (u < 0). \quad (4.4.11)$$

§ 5. Некоторые встречающиеся в приложениях распределения

4.5.1. Гамма-распределение. *Гамма-распределением* называется распределение, задаваемое плотностью вероятности

$$\varphi_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1) \beta^{\alpha+1}} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (4.5.1)$$

Действительные числа $\alpha > -1$ и $\beta > 0$ представляют параметры этого распределения.

$\Gamma(\alpha+1)$ есть символ, обозначающий так называемую «гамма»-функцию, определяемую с помощью интеграла, введенного Эйлером¹⁾:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^\alpha dt. \quad (4.5.2)$$

Эту функцию можно рассматривать как обобщение факториала натурального числа. В самом деле, можно показать, что в том случае, когда α — целое положительное число, то

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha! = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots 2 \cdot 1.$$

Для этой цели проинтегрируем интеграл, представляющий $\Gamma(\alpha+1)$, по частям:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^\alpha dt = \int_0^{\infty} t^\alpha d(-e^{-t}) = -[e^{-t} t^\alpha]_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (4.5.3)$$

Предполагая $\alpha > 0$, найдем

$$e^{-t} t^\alpha |_{t=0} = 1 \cdot 0 = 0$$

и

$$e^{-t} t^\alpha |_{t=+\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^\alpha}{e^t} = 0$$

в силу известного свойства показательной функции e^t , растущей при $t \rightarrow \infty$ скорее любой положительной степени t^α .

Поэтому из (4.5.2) получим:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^\alpha dt = \alpha \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (4.5.4)$$

¹⁾ В курсах анализа доказывается, что при всяком $\alpha > -1$ несобственный интеграл (4.5.2) существует. См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, изд. 5-е, Гостехиздат, М.—Л., 1951, стр. 260.

Но интеграл (4.5.4) отличается от интеграла, стоящего в правой части (4.5.3), тем, что α заменено на $\alpha - 1$. Поэтому последнее соотношение можно записать в виде

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha). \tag{4.5.5}$$

Оно доказано нами для всех $\alpha > 0$; предположим, что теперь $(\alpha + 1)$ — натуральное число, тогда $\alpha, \alpha - 1, \alpha - 2$ и т. д. будут натуральными числами. Мы можем написать последовательно ряд соотношений

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= \alpha \Gamma(\alpha) \\ \Gamma(\alpha) &= (\alpha - 1) \Gamma(\alpha - 1) \\ \Gamma(\alpha - 1) &= (\alpha - 2) \Gamma(\alpha - 2) \\ &\dots \dots \dots \\ \Gamma(2) &= 1 \cdot \Gamma(1). \end{aligned}$$

При этом

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -[e^{-t}]_0^{\infty} = 1.$$

Перемножая эти равенства и сокращая общие множители в левой и правой частях, получим:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots 1 = \alpha! \tag{4.5.6}$$

Легко видеть, что правая часть (4.5.1) при $x > 0$ положительна.

Для того, чтобы показать, что соотношение (4.5.1) представляет плотность вероятности, вычислим интеграл

$$A(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}} dx. \tag{4.5.7}$$

Произведем замену x на $y = \frac{x}{\beta}$; при этом $x = y\beta$ и $dx = \beta dy$.

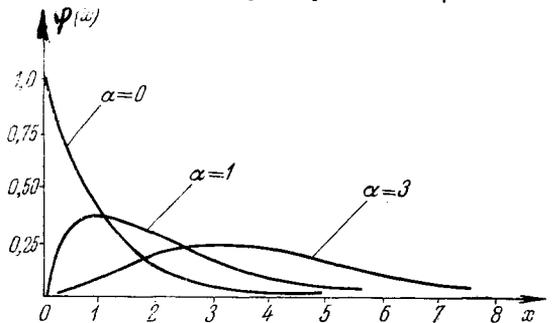
Тогда получим:

$$A(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{(y\beta)^{\alpha}}{\beta^{\alpha+1}} e^{-y} \cdot \beta dy = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha} dy = \Gamma(\alpha + 1). \tag{4.5.8}$$

Таким образом, при всех допустимых значениях параметров α и β

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1) \beta^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\beta}} x^{\alpha} dx &= \\ &= \frac{A(\alpha)}{\Gamma(\alpha + 1)} = 1. \end{aligned} \tag{4.5.9}$$

Отсюда следует, что $\varphi_{\alpha, \beta}(x)$, заданная соотношением (4.5.1), при любых значениях параметров α и β ($\beta > 0$ и $\alpha \geq -1$) представляет плотность распределения случайной величины X . График плотности вероятности гамма-распределения при $\beta = 1$ и при значениях $\alpha = 0, 1, 3$ представлен на черт. 49. Функция распределения этой величины определяется соотношением



Черт. 49. График плотности вероятности гамма-распределения при $\beta = 1$ и $\alpha = 0, 1, 3$.

$$F_{\alpha, \beta}(x) = \int_0^x \varphi_{\alpha, \beta}(x) dx. \tag{4.5.10}$$

Особый интерес представляют целые положительные значения параметра α и значения, кратные $\frac{1}{2}$.

При $\alpha = \frac{1}{2}$, в силу соотношения (4.5.5)

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{-\frac{1}{2}} dy. \quad (4.5.11)$$

Положим $y = \frac{z^2}{2}$, мы будем иметь $dy = z \cdot dz$ и

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{z^2}{2}}} z \cdot dz = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \sqrt{2} dz. \quad (4.5.12)$$

Умножив теперь полученный интеграл на $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}$ и произведя сокращения, будем иметь:

$$\sqrt{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

так как под интегралом у нас теперь стоит нормальная плотность вероятности $n(z; 0, 1)$, определяемая соотношением (4.3.12), а интеграл от 0 до ∞ от нормальной плотности вероятности равен $1/2$.

Таким образом, обозначая $A\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)!$ и применяя (4.5.5), получим:

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (4.5.13)$$

и

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (4.5.14)$$

Эти равенства часто используются в различных приложениях гамма-функции.

С помощью соотношений (4.5.5) и (4.5.14) легко можно определить гамма-функцию при любом α , кратном $1/2$.

Так, например, на основании (4.5.5) и (4.5.14)

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{5}{2} + 1\right) &= \frac{5}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{15}{8} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Интегральная функция гамма-распределения имеет вид

$$F_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1) \beta^{\alpha+1}} e^{-\frac{t}{\beta}} t^{\alpha} dt & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (4.5.15)$$

Эта функция распределения может быть вычислена при помощи различных приемов, в частности, когда α — положительное целое число, имеем¹⁾:

$$F_{\alpha, \beta}(x) = 1 - \left[1 + \frac{x}{\beta} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{\beta}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{x}{\beta}\right)^3 + \dots + \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} \right] e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad (4.5.16)$$

где $x > 0$.

1) Легко проверить также, что производная по x функции, стоящей в правой части (4.5.16), равна в точности $\frac{1}{\alpha! \beta^{\alpha+1}} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} \cdot x^{\alpha} = \varphi_{\alpha, \beta}(x)$. Так как эта функция обращается в нуль при $x = 0$, то она должна совпадать с $F_{\alpha, \beta}(x)$.

Это соотношение легко устанавливается последовательным применением интегрирования по частям к интегралу

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{t}{\beta}} t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} dt, \quad (4.5.17)$$

представляющему

$$1 - F_{\alpha, \beta}(x).$$

Формула (4.5.10) может быть записана в виде

$$F_{\alpha, \beta}(x) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{t}{\beta}} \cdot \frac{dt}{\beta} = \int_0^{\frac{x}{\beta}} \frac{e^{-z}}{\Gamma(\alpha+1)} z^{\alpha} dz = \gamma_{\alpha}\left(\frac{x}{\beta}\right).$$

Функция

$$\gamma_{\alpha}(z) = \int_0^z \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} z^{\alpha} e^{-z} dz \quad (4.5.18)$$

носит название *неполной гамма-функции*. Она табулирована в довольно широких пределах.

Найдем теперь производящую функцию гамма-распределения

$$m(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \int_0^{\infty} e^{\beta ty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} y^{\alpha} e^{-y} dy,$$

где $y = \frac{x}{\beta}$.

Мы будем считать t удовлетворяющим неравенству $t < \frac{1}{\beta}$, так что $1 - \beta t > 0$.

Делая дальнейшие преобразования, получим:

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{1}{(1 - \beta t)^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} \frac{(1 - \beta t)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-y(1 - \beta t)} y^{\alpha} dy = \\ &= \frac{1}{(1 - \beta t)^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1) \left(\frac{1}{1 - \beta t}\right)^{\alpha+1}} e^{-\frac{y}{(1 - \beta t)}} \cdot y^{\alpha} dy = \\ &= \frac{1}{(1 - \beta t)^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta_1^{\alpha+1}} e^{-\frac{y}{\beta_1}} \cdot y^{\alpha} dy, \end{aligned}$$

где $\beta_1 = \frac{1}{1 - \beta t}$.

Этот последний интеграл представляет интеграл по всей области значений от плотности гамма-распределения (4.5.1) с параметрами α и β_1 .

Но при всех значениях параметров выполняется соотношение (3.1.11) и потому наш интеграл равен единице. Окончательно

$$m(t) = \frac{1}{(1 - \beta t)^{\alpha+1}} \quad (4.5.19)$$

или, применяя разложение в степенной ряд, получим:

$$m(t) = 1 + \frac{\beta(\alpha+1)}{1} t + \frac{\beta^2(\alpha+1)(\alpha+2)}{2!} t^2 + \frac{\beta^3(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{3!} t^3 + \dots \quad (4.5.20)$$

Согласно (3.6.12) найдем начальные моменты гамма-распределения. Так как в (4.5.20) коэффициентом при t^s служит $\frac{\nu_s}{s!}$, то

$$\nu_s = \beta^s (\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+s) \quad (4.5.21)$$

и, в частности,

$$\nu_1 = \beta(\alpha + 1) = MX. \quad (4.5.22)$$

Найдем центральные моменты распределения по формулам (3.6.7), (3.6.8) и (3.6.9):

$$\begin{aligned} \mu_2 = DX = \sigma_X^2 = \beta^2(\alpha + 1)(\alpha + 2) - [\beta(\alpha + 1)]^2 = \\ = \beta^2(\alpha + 1)(\alpha + 2 - \alpha - 1) = \beta^2(\alpha + 1), \end{aligned} \quad (4.5.23)$$

$$\begin{aligned} \mu_3 = \beta^3(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3) - 3\beta^2(\alpha + 1)(\alpha + 2)\beta(\alpha + 1) + 2[\beta(\alpha + 1)]^3 = \\ = 2\beta^3(\alpha + 1), \end{aligned} \quad (4.5.24)$$

$$\begin{aligned} \mu_4 = \beta^4(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)(\alpha + 4) - 4\beta^3(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)\beta(\alpha + 1) + \\ + 6\beta^2(\alpha + 1)(\alpha + 2)\beta^2(\alpha + 1)^2 - 3\beta^4(\alpha + 1)^4 = 3\beta^4(\alpha + 1)(\alpha + 3), \end{aligned} \quad (4.5.25)$$

$$\sigma_X = \sqrt{\mu_2} = \beta\sqrt{\alpha + 1}. \quad (4.5.26)$$

По соотношениям (4.3.72) и (4.3.73) найдем асимметрию и эксцесс гамма-распределения

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{2\beta^3(\alpha + 1)}{\beta^3(\alpha + 1)\sqrt{\alpha + 1}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha + 1}}, \quad (4.5.27)$$

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{3\beta^4(\alpha + 1)(\alpha + 3) - 3\beta^4(\alpha + 1)^2}{\beta^4(\alpha + 1)^2} = \frac{6}{\alpha + 1}. \quad (4.5.28)$$

Мы видим, что S_k и E_k зависят только от параметра α .

Из соотношения (4.5.27) следует, что асимметрия распределения всегда положительна, т. е. «длинная часть» кривой всегда расположена справа от математического ожидания.

Как видно из соотношения (4.5.28), эксцесс кривой также всегда положителен, т. е. вблизи своего центра кривая распределения всегда круче нормальной кривой. Из вида производящей функции (4.5.19) при целом α можно вывести еще одно интересное следствие: полагая в (4.5.19) $\alpha = 0$, получим:

$$m_0(t) = \frac{1}{1 - \beta t} \quad (4.5.29)$$

производящую функцию закона

$$F_{0,\beta}(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}. \quad (4.5.30)$$

С другой стороны, очевидно,

$$m(t) = [m_0(t)]^{\alpha+1}.$$

Это показывает, что величину X с законом $F_{\alpha,\beta}(t)$ можно рассматривать как сумму $(\alpha + 1)$ независимых величин $x_1 + x_2 + \dots + x_{\alpha+1}$, распределенных согласно (4.5.30), при этом согласно (4.5.22) и (4.5.23)

$$M(x_1) = \dots = M(x_{\alpha+1}) = \beta, \quad (4.5.31)$$

$$D(x_1) = \dots = D(x_{\alpha+1}) = \beta^2. \quad (4.5.32)$$

Если α велико, то мы можем применить теорему Ляпунова

$$P\left\{\frac{(x_1 + \dots + x_{\alpha+1}) - (\alpha + 1)\beta}{\beta\sqrt{\alpha + 1}} < t\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2} + \Phi(t). \quad (4.5.33)$$

Следовательно, нормированная величина X с законом $F_{\alpha,\beta}(x)$ при большом α приближенно следует нормальному закону распределения. Это заключение имеет силу и при не целых значениях α .

Другое следствие из формулы (4.5.16) также заслуживает внимания. Рассмотрим в случае закона Пуассона вероятность

$$P_\lambda(X \geq k) = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = 1 - \left(1 + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right) e^{-\lambda}.$$

Полагая в (4.5.16) $\beta = 1$, $\alpha = k - 1$, $x = \lambda$, получим:

$$P_\lambda(X \geq k) = F_{k-1, 1}(\lambda)$$

и отсюда

$$P_\lambda(X < k) = 1 - F_{k-1, 1}(\lambda).$$

Таким образом, закон Пуассона может быть выражен через интегральную функцию гамма-распределения. Отсюда в связи с (4.5.33) можно вывести, что нормированное уклонение величины X , следующей закону Пуассона при возрастании среднего значения λ , стремится к нормальному закону; это соотношение приводит к приближенной формуле

$$P_{\lambda}(X \leq k) \approx \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad (4.5.34)$$

для больших λ .

4.5.2. Бэ́та-распределение. Наряду с гамма-функцией в различных приложениях встречается другая функция от двух аргументов, получившая название «бэ́та»-функции. Эта функция выражается определенным интегралом

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx. \quad (4.5.35)$$

Аргументы a и b являются положительными действительными числами. Бэ́та-функция может быть выражена через гамма-функцию, именно имеет место следующее важное соотношение, которое доказывать здесь мы не будем¹⁾:

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (4.5.36)$$

Если a и b —целые числа, то $B(a, b)$ может быть выражена через факториалы, так как $\Gamma(a) = (a-1)!$,

$$\Gamma(b) = (b-1)! \quad \text{и} \quad \Gamma(a+b) = (a+b-1)!.$$

Из (4.5.36) следует далее симметричность функции B относительно аргументов a и b :

$$B(a, b) = B(b, a), \quad (4.5.37)$$

в которой можно убедиться также, произведя в (4.5.35) замену переменной x на $1-x$. Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} & \text{для } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{для } x < 0 \text{ и } x > 1. \end{cases}$$

Эта функция неотрицательна, обращается в нуль на концах интервала $(0, 1)$, если $a > 1$ и $b > 1$; если же $0 < a < 1$ или $0 < b < 1$, то $\varphi(x)$ обращается в бесконечность на левом или соответственно на правом конце этого интервала. Если $a-1 > 0$ и $b-1 > 0$, то $\varphi(x)$ имеет внутри промежутка $(0, 1)$ один максимум в точке $x_0 = \frac{a-1}{a+b-2}$. При $a-1 < 0$, $b > 1$ функция $\varphi(x)$ убывает от $+\infty$ до 0, а при $a-1 > 0$, $b < 1$ функция $\varphi(x)$ возрастает от 0 до $+\infty$ при возрастании x от 0 до 1. При $a-1 < 0$ и $b-1 < 0$ функция $\varphi(x)$ имеет U-образный график; минимум функции $\varphi(x)$ достигается в точке

$$x_0 = \frac{1-a}{(1-a) + (1-b)}.$$

Площадь под кривой $\varphi(x)$ равна единице, так как

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = \frac{B(a, b)}{B(a, b)} = 1;$$

функция $\varphi(x)$ определяет бэ́та-распределение, появляющееся в различных вопросах математической статистики и теории вероятности.

Интегральная функция бэ́та-распределения обозначается через $I_x(a, b)$:

$$\int_0^x \varphi(x) dx = I_x(a, b) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (4.5.38)$$

$$I_x(a, b) = 0 \quad \text{при} \quad x \leq 0,$$

$$I_x(a, b) = 1 \quad \text{при} \quad x \geq 1.$$

¹⁾ В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, изд. 5-е, Гостехиздат, М.—Л., 1951, стр. 265—266.

$I_x(a, b)$ называется *неполной бэ́та-функцией*. Одно из важных соотношений, которому она удовлетворяет, записывается следующим образом:

$$I_{(1-x)}(a, b) = 1 - I_x(b, a). \quad (4.5.39)$$

Для доказательства в интеграле

$$I_{(1-x)}(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{1-x} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$$

сделаем замену t на $1-t'$; тогда получим, пользуясь (4.5.37):

$$\begin{aligned} I_{(1-x)}^{(a, b)} &= -\frac{1}{B(a, b)} \int_1^x t'^{b-1} (1-t')^{a-1} dt' = \frac{1}{B(a, b)} \int_x^1 t'^{b-1} (1-t')^{a-1} dt' = \\ &= \frac{1}{B(b, a)} \left\{ \int_0^1 t'^{b-1} (1-t')^{a-1} dt' - \int_0^x t'^{b-1} (1-t')^{a-1} dt' \right\} = 1 - I_x(b, a), \end{aligned}$$

что и доказывает (4.5.39).

Моменты бэ́та-распределения легко определяются:

$$\nu_r = M(X^r) = \int_0^1 \varphi(x) x^r dx = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 x^{a+r-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{B(a+r, b)}{B(a, b)};$$

используя (4.5.36), мы получим:

$$\nu_r = \frac{\Gamma(a+r) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+r+b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+r)} \cdot \frac{\Gamma(a+r)}{\Gamma(a)}. \quad (4.5.40)$$

Но согласно (4.5.5) при r целом

$$\begin{aligned} \Gamma(a+r) &= (a+r-1)\Gamma(a+r-1) = (a+r-1)(a+r-2)\Gamma(a+r-2) = \\ &= (a+r-1)(a+r-2)\dots(a+r-r)\Gamma(a) = a(a+1)\dots(a+r-1)\Gamma(a) \end{aligned}$$

и аналогично

$$\Gamma(a+b+r) = (a+b)(a+b+1)\dots(a+b+r-1)\Gamma(a+b).$$

Поэтому (4.5.40) может быть записан окончательно в очень простой форме

$$\nu_r = \frac{a(a+1)\dots(a+r-1)}{(a+b)(a+b+1)\dots(a+b+r-1)}. \quad (4.5.41)$$

В частности, для математического ожидания и дисперсии имеем:

$$MX = \nu_1 = \frac{a}{a+b},$$

$$\sigma_X^2 = DX = \nu_2 - \nu_1^2 = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

Из бэ́та-распределения путем предельного перехода по параметрам можно получить другие распределения. Если один из параметров, например b , неограниченно возрастает, кривая становится асимметричной — ее максимум передвигается к началу координат. Величина X становится бесконечно малой. Рассмотрим вспомогательную величину $bX = Z$; плотность этой величины будет:

$$\varphi_Z(x) = \varphi\left(\frac{x}{b}\right) \frac{1}{b} = \frac{x^{a-1} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{b-1}}{b^a B(a, b)} \quad (0 < x < 1).$$

Так как

$$\left(1 - \frac{x}{b}\right)^{b-1} \rightarrow e^{-x}$$

и, с другой стороны,

$$\frac{b^a \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \rightarrow 1,$$

то

$$\varphi_z(x) \rightarrow \frac{x^{a-1}e^{-x}}{\Gamma(a)},$$

откуда легко можно заключить, что

$$P(Z < x) = P\left(X < \frac{x}{b}\right) = I_{\left(\frac{x}{b}\right)}(a, b) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x e^{-x} x^{a-1} dx.$$

Таким образом, из неполной бета-функции мы получим неполную гамма-функцию предельным переходом по b . Точно так же при $a \rightarrow \infty$, пользуясь (4.5.39), найдем:

$$I_{\left(1-\frac{x}{b}\right)}(a, b) = 1 - I_{\left(\frac{x}{b}\right)}(b, a) \rightarrow 1 - \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^x e^{-x} x^{b-1} dx.$$

Если оба параметра a и b неограниченно возрастают, то можно обнаружить, что нормированное отклонение величины X , т. е.

$$Z = \frac{X - \nu_1}{\sigma_X}$$

будет приближаться к нормальному распределению $N(z; 0, 1)$.

Это обстоятельство приводит для любого z при больших a и b к такой асимптотической формуле:

$$I_{\nu_1 + z\sigma}(a, b) \approx N(z; 0, 1) = \frac{1}{2} + \Phi(z),$$

где

$$\nu_1 = \frac{a}{a+b} \quad \text{и} \quad \sigma = \sqrt{\frac{ab}{(a+b)^3}}.$$

В качестве одного из приложений неполной бета-функции выведем формулу, выражающую «хвост» биномиального распределения.

Пусть

$$\psi(p) = P_{m, n} + P_{m+1, n} + \dots + P_{n, n} = \sum_{k=m}^n P_{k, n},$$

где

$$P_{k, n} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (4.5.42)$$

Рассматривая p как независимое переменное и дифференцируя $\psi(p)$ по p , найдем:

$$\psi'(p) = \sum_{k=m}^n P'_{k, n},$$

где согласно (4.5.42) при $k < n$

$$\begin{aligned} P'_{k, n} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} [kp^{k-1}(1-p)^{n-k} - p^k(n-k)(1-p)^{n-k-1}] = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1}(1-p)^{n-k} - \frac{n!}{k!(n-k-1)!} p^k(1-p)^{n-k-1} = \\ &= n [P_{k-1, n-1} - P_{k, n-1}], \end{aligned}$$

а при $k = n$

$$P'_{nn} = nP_{n-1, n-1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \psi'(p) &= n \sum_{k=m}^n (P_{k-1, n-1} - P_{k, n-1}) = n \{ (P_{m-1, n-1} - P_{m, n-1}) + (P_{m, n-1} - P_{m+1, n-1}) + \\ &+ \dots + P_{n-1, n-1} \} = nP_{m-1, n-1} = \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} p^{m-1}(1-p)^{n-m}. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая еще во внимание, что $\psi(0) = 0$, получим:

$$\psi(p) = \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} \int_0^p x^{m-1} (1-x)^{n-m} dx$$

или

$$\sum_{k=m}^n P_k, n = \frac{\int_0^p x^{m-1} (1-x)^{n-m} dx}{\beta(m, n-m+1)} = I_p(m, n-m+1). \quad (4.5.43)$$

Функция $I_x(a, b)$ табулирована в довольно широком диапазоне аргументов x , a и b . Поэтому указанную формулу можно использовать для подсчета вероятности получения численности данного рода предметов, превышающей заданное целое число в бесповторной выборке, если вероятность извлечения предмета данного рода в единичном опыте равна p .

4.5.3. χ^2 -распределение. В этом параграфе мы познакомимся с одним распределением, которое будет играть большую роль при решении многих важных задач математической статистики. Оно носит название χ^2 -распределения и относится к распределениям сумм квадратов нормально распределенных случайных величин.

Рассмотрим вначале распределение квадрата одной нормально распределенной случайной величины.

Пусть случайная величина X нормально распределена ($N(z; 0, 1)$), а величина Y представляет квадрат величины X , т. е.

$$Y = X^2.$$

Величина Y всегда неотрицательна, и при $y > 0$ соотношение $Y < y$ эквивалентно соотношению $-\sqrt{y} < X < +\sqrt{y}$. Поэтому Y имеет функцию распределения

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq 0, \\ F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) & \text{при } y > 0, \end{cases} \quad (4.5.44)$$

где $F_X(x)$ — функция распределения величины X .

Соотношение (4.5.44) справедливо только тогда, когда $-\sqrt{y}$ есть точка непрерывности функции $F_X(x)$.

Плотность вероятности величины Y получим, дифференцируя соотношение (4.5.44),

$$\begin{aligned} \varphi_Y(y) = F'_Y(y) &= F'_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} - F'_X(-\sqrt{y}) \left(-\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}\right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} [\varphi_X(\sqrt{y}) + \varphi_X(-\sqrt{y})] \end{aligned}$$

и окончательно

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} [\varphi_X(\sqrt{y}) + \varphi_X(-\sqrt{y})] & \text{при } y > 0, \end{cases} \quad (4.5.45)$$

где $\varphi_X(x)$, плотность вероятности величины X .

Поскольку мы предположили, что величина X нормально распределена, плотность вероятности величины Y будет:

$$\begin{aligned} \varphi_Y(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y\sqrt{y})^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-y\sqrt{y})^2}{2}} \right] = \\ &= \frac{2}{2\sqrt{y}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, \end{aligned} \quad (4.5.46)$$

где $y > 0$. При $y \leq 0$ плотность вероятности $\varphi_Y(y)$ равна нулю.

Легко видеть, что соотношение (4.5.46) представляет частный случай гамма-распределения (4.5.1) с параметрами $\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\beta = 2$.

В самом деле, подставив эти значения в (4.1.30), получим:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right) 2^{-\frac{1}{2} + 1}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}.$$

Так как согласно (4.5.14) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, то $\varphi(x)$ можно переписать в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}.$$

Таким образом, $\varphi_Y(y)$ действительно представляет рассматриваемый частный случай гамма-распределения.

Найдем теперь производящую функцию распределения квадрата нормально распределенной величины с параметрами 0 и 1.

Так как это распределение согласно доказанному представляет частный случай гамма-распределения, когда $\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\beta = 2$, то производящую функцию найдем из соотношения (4.5.19):

$$m(t) = \frac{1}{(1-2t)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.5.47)$$

Пусть теперь имеется k независимых нормально распределенных случайных величин Z_1, Z_2, \dots, Z_k с параметрами 0 и 1.

Рассмотрим сумму квадратов этих величин

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k Z_i^2.$$

Каждая из величин Z_i^2 имеет производящую функцию $(1-2t)^{-\frac{1}{2}}$.

Согласно соотношению (3.6.15) производящая функция величины χ^2 будет равна произведению производящих функций квадратов величин Z_1, Z_2, \dots, Z_k :

$$m_{\chi^2}(t) = m_1(t) \cdot m_2(t) \dots m_k(t) = (1-2t)^{-\frac{k}{2}}, \quad (4.5.48)$$

т. е. производящая функция суммы квадратов есть также производящая функция некоторого гамма-распределения со значениями параметров $\beta = 2$ и $\alpha + 1 = \frac{k}{2}$,

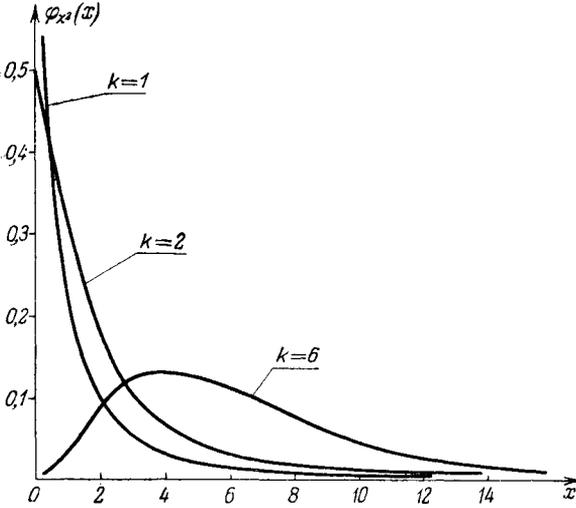
т. е. $\alpha = \frac{k}{2} - 1$.

Поэтому плотность вероятности величины χ^2 будет иметь вид

$$\varphi_{\chi^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (4.5.49)$$

Распределение, заданное соотношением (4.5.49), носит название χ^2 -распределения.

Приложения этого важного распределения к статистике будут рассмотрены в дальнейшем.



Черт. 50. График плотности вероятности χ^2 -распределения при числе степеней свободы $k = 1, 2$ и 6 .

При $k < 2$ плотность вероятности постоянно убывает при $x > 0$, а при $k > 2$ имеет максимум в точке $x = k - 2$.

График плотности вероятности χ^2 -распределения при $k = 1, 2$ и 6 представлен на черт. 50.

Параметр k , т. е. число квадратов независимых величин, часто называется *числом степеней свободы* данного распределения. Смысл этого термина разъясним позже.

Найдем математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, асимметрию и эксцесс χ^2 -распределения.

Учитывая, что χ^2 -распределение является частным слу-

чаем гамма-распределения при $\beta = 2$ и $\alpha = \frac{k}{2} - 1$, из соотношений (4.5.22), (4.5.23), (4.5.26), (4.5.27) и (4.5.28) получим:

$$M\chi^2 = \mu_1 = \beta(\alpha + 1) = 2\left(\frac{k}{2} - 1 + 1\right) = k, \quad (4.5.50)$$

$$D\chi^2 = \mu_2 = \beta^2(\alpha + 1) = 2^2 \frac{k}{2} = 2k, \quad (4.5.51)$$

$$\sigma_{\chi^2} = \sqrt{DX^2} = \sqrt{2k}, \quad (4.5.52)$$

$$S_k = \frac{2}{\sqrt{\alpha + 1}} = \sqrt{\frac{8}{k}}, \quad (4.5.53)$$

$$E_k = \frac{6}{\alpha + 1} = \frac{12}{k}. \quad (4.5.54)$$

Легко показать, что сумма двух или нескольких независимых случайных величин, обладающих χ^2 -распределением, имеет также χ^2 -распределение с числом степеней свободы, равным сумме чисел свободы слагаемых. В самом деле, пусть χ_1^2 и χ_2^2 — независимые случайные величины, имеющие каждая χ^2 -распределение с числами степеней свободы соответственно k_1 и k_2 . Тогда производящие функции этих величин согласно (4.5.48) будут соответственно:

$$m_{\chi_1^2}(t) = (1 - 2t)^{-\frac{k_1}{2}} \quad \text{и} \quad m_{\chi_2^2}(t) = (1 - 2t)^{-\frac{k_2}{2}}.$$

Найдем производящую функцию суммы $\chi_1^2 + \chi_2^2$ этих величин. Согласно (3.6.15) будем иметь:

$$m_{\chi_1^2 + \chi_2^2}(t) = m_{\chi_1^2}(t) m_{\chi_2^2}(t) = (1 - 2t)^{-\frac{k_1}{2}} \cdot (1 - 2t)^{-\frac{k_2}{2}} = (1 - 2t)^{-\frac{k_1 + k_2}{2}}. \quad (4.5.55)$$

Мы пришли к производящей функции того же вида, что и производящие функции слагаемых величин, но с показателем степени, равным сумме показателей степени в выражениях для производящих функций слагаемых.

Отсюда следует на основании 3.6.2, что если χ_1^2 и χ_2^2 имеют независимые χ^2 -распределения с числами степеней свободы, равными соответственно k_1 и k_2 , то сумма $\chi_1^2 + \chi_2^2$ имеет также χ^2 -распределение с числом степеней свободы, равным $k_1 + k_2$.

Из теоремы (4.3.37) Ляпунова следует, что с устремлением к бесконечности числа k степеней свободы, т. е. числа суммируемых квадратов случайных нормальных величин, распределение величины χ^2 устремляется к нормальному с центром в точке k (так как математическое ожидание каждой случайной величины равно единице) и средним квадратическим отклонением, равным приблизительно $\sqrt{2k}$. Еще лучшее приближение можно получить, рассматривая при $k \geq 30$ величину $\sqrt{2\chi^2}$ как нормально распределенную величину с центром в точке $\sqrt{2k} - 1$ и средним квадратическим отклонением, равным единице. Доказательства этого предложения мы приводить здесь не будем. Таким образом, при больших числах k степеней свободы (больших 30) вероятности нахождения случайной величины χ^2 практически вычисляются с помощью формулы (4.5.67) и табл. IV приложений.

4.5.4. Преобразования χ^2 -распределения. Распределение существенно положительных величин. В технических приложениях часто встречаются распределения, получающиеся из χ^2 -распределения путем его преобразования.

Рассмотрим некоторые из этих простых преобразований χ^2 -распределения.

Пусть случайные величины X_1, X_2, \dots, X_k нормально распределены и имеют параметры 0 и σ , где σ — какая угодно положительная постоянная.

Тогда величины $\frac{X_1}{\sigma}, \frac{X_2}{\sigma}, \dots, \frac{X_k}{\sigma}$ также независимы, нормальны и имеют параметры 0 и 1.

Согласно изложенному выше плотность вероятности суммы квадратов отношений величины X_1, X_2, \dots, X_k к их общему среднему квадратическому отклонению σ , т. е. $\eta = \sum_{i=1}^k \left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2$, определяется соотношением (4.5.49).

Тогда плотность вероятности суммы квадратов величин X_1, X_2, \dots, X_k , т. е. $\sum_{i=1}^k X_i^2 = \eta \sigma^2$, может быть найдена согласно правилу (4.4.7). Заменяя переменное x в (4.5.49) на $\frac{x}{\sigma^2}$ и умножая результат на $\frac{1}{\sigma^2}$, мы получим:

$$\varphi_{\Sigma X_i^2}(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{k/2}} \left(\frac{x}{\sigma^2}\right)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{k/2} \sigma^k} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}. \quad (4.5.56)$$

Теперь по тому же правилу (4.4.1) можно найти распределение средней арифметической $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i^2$ квадратов случайных величин. Для этого заменим в (4.5.56) x на kx и результат умножим на k . Это приведет нас к следующему

закону распределения среднего арифметического k квадратов случайных величин

$$\varphi_{\frac{1}{k} \sum X_i^2}(x) = \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \sigma^k} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{kx}{2\sigma^2}}. \tag{4.5.57}$$

Наконец, используя 4.4.2 и соотношение (4.5.56), можно найти распределение квадратного корня из суммы квадратов случайных величин, т. е.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^k X_i^2} = \sqrt{\eta}.$$

В данном случае $y = f(x) = \sqrt{x}$, $x = \psi(y) = y^2$, а потому в элементарной вероятности (4.5.56) $\varphi_{\sum X_i^2}(x) dx$, заменяя x на y^2 и dx на $2y dy$, найдем:

$$\varphi_{\sqrt{\sum X_i^2}}(y) dy = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \sigma^k} (y^2)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} 2y dy,$$

откуда, заменяя y снова на x для плотности $\varphi_{\sqrt{\sum X_i^2}}(x)$, получим:

$$\varphi_{\sqrt{\sum X_i^2}}(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}} \sigma^k} (x^2)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} 2x = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}} \sigma^k} x^{k-1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \tag{4.5.58}$$

Если в соотношении (4.5.58) положить $k = 1$, то, учитывая, что согласно (4.5.14) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, получим:

$$\varphi_{\sqrt{\sum X_i^2}}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi} 2^{1/2} \sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = 2n(x; 0, \sigma), \tag{4.5.59}$$

где $x > 0$.

Таким образом, мы пришли к удвоенной нормальной плотности при параметрах 0 и σ . Это вполне естественно потому, что соотношение (4.5.58) относится к распределению только неотрицательных квадратных корней из суммы квадратов.

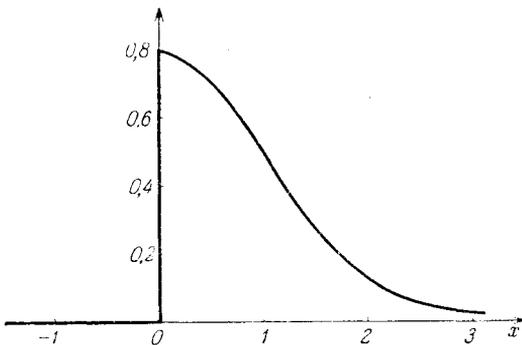
При $k = 1$ мы, следовательно, придем к величине

$$Y = +\sqrt{X^2} = |X|.$$

Функция (4.5.59) и дает плотность вероятности этой величины при $x > 0$.

Для $x < 0$ эту же функцию нужно считать равной нулю, так как величина $|X|$ отрицательных значений не принимает.

Геометрически распределение величины $|X|$ описывается кривой, получающейся из соответствующей нормальной плотности вероятности



Черт. 51. График плотности вероятности $Y = +\sqrt{X^2} = |X|$, причем X следует нормальному закону $n(x; 0, 1)$.

путем удвоения ее ординат в «положительной» ветви, тогда как при отрицательных значениях x график плотности вероятности совпадает с осью x (черт. 51).

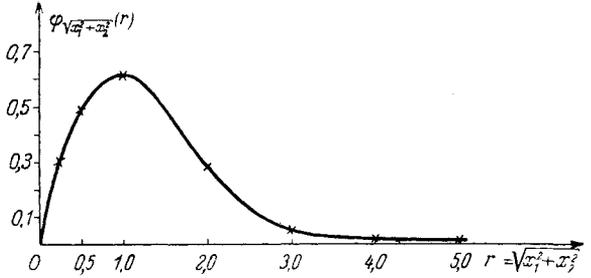
Если в соотношении (4.5.58) положить $k = 2$, то, учитывая, что согласно соотношению (4.5.6)

$$\Gamma(1) = \Gamma(0 + 1) = 1,$$

получим:

$$\varphi_{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}(x) = \frac{2}{\Gamma(1)2\sigma^2} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^2} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.5.60)$$

Эту функцию можно рассматривать как плотность вероятности распределения расстояния $\sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ некоторой случайной точки $Q(X_1, X_2)$ от начала координат. При этом предполагается, что координаты одинаково распределены по нормальному закону $n(x; 0, \sigma)$.



Черт. 52. График плотности вероятности распределения эксцентриситетов при $a = 0$ и $\sigma = 1$.

Иногда в технических приложениях этот закон называют законом «эксцентриситета», т. е. смещения, так как ему подчиняется распределение величины эксцентриситета $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ оси центрального отверстия относительно геометрической оси цилиндрической поверхности валика, если координаты X и Y оси центрального отверстия, отсчитываемые от этой оси, в торцевой плоскости распределены нормально.

Кривая плотности вероятности распределения эксцентриситетов имеет вид, показанный на черт. 52.

Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение указанного распределения.

По определению (3.3.3) математического ожидания, учитывая (4.5.60), будем иметь:

$$M(\sqrt{X_1^2 + X_2^2}) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Умножим интеграл в правой части на $\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}$ и перейдем к пределам от $-\infty$ до $+\infty$ (вследствие чего интеграл удвоится) и в то же время умножим его на $\frac{1}{2}$, тогда получим:

$$\begin{aligned} M(\sqrt{X_1^2 + X_2^2}) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma \sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} x^2 dx = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 n(x; 0, \sigma) dx. \end{aligned}$$

Последний интеграл, как видно из (3.4.6), представляет дисперсию нормального закона $n(x; 0, \sigma)$, равную σ^2 согласно соотношению (4.3.20).

Учитывая это, окончательно получим:

$$M(\sqrt{X_1^2 + X_2^2}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma} \sigma^2 = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (4.5.61)$$

Найдем теперь дисперсию распределения «эксцентриситетов» с помощью соотношения (3.4.7):

$$\begin{aligned} D(\sqrt{X_1^2 + X_2^2}) &= M(\sqrt{X_1^2 + X_2^2})^2 - [M(\sqrt{X_1^2 + X_2^2})]^2 = M(X_1^2 + X_2^2) - \sigma^2 \frac{\pi}{2} = \\ &= MX_1^2 + MX_2^2 - \sigma^2 \frac{\pi}{2} = \sigma^2 + \sigma^2 - \sigma^2 \frac{\pi}{2} = 2\sigma^2 - \sigma^2 \frac{\pi}{2} = \sigma^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (4.5.62)$$

так как при нормальном законе $n(x; 0, \sigma)$ имеем:

$$MX^2 = M(X-0)^2 = DX = \sigma^2.$$

Среднее квадратическое отклонение распределения «эксцентриситетов» определяем по соотношению (3.4.8):

$$\sigma \sqrt{\frac{\sigma^2}{X_1^2 + X_2^2}} = \sqrt{\sigma^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)} = \sigma \cdot \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}. \quad (4.5.63)$$

Возвратимся к рассмотрению преобразований χ^2 -распределения.

Если в соотношении (4.5.58) положить $k=3$, то, учитывая, что $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, получим закон *распределения Максвелла* скорости молекулы в пространстве или закон распределения «существенно положительных» величин при трехмерном исходном нормальном распределении

$$\varphi \sqrt{\frac{2}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}}(x) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) 2^{3/2} \sigma^3} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} 2 \sqrt{2} \sigma^3} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{\sigma^3} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.5.64)$$

Наконец, можно найти распределение неотрицательного квадратного корня из средней арифметической квадратов нормальных случайных величин.

$$U = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i^2}.$$

Плотность величины $X = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i^2$ задается (4.5.57). Используя правило нахождения плотности распределения функции $U = \sqrt{X}$ (4.4.7), найдем $X = U^2$ и, следовательно,

$$g(u) = \varphi_X(u^2) 2u = \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \sigma^k} (u^2)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{ku^2}{2\sigma^2}} 2u.$$

Заменяя u в найденном выражении плотности на x , получим:

$$g(x) = \varphi \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i^2}(x) = \frac{2 \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \sigma^k} x^{k-1} e^{-\frac{kx^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.5.65)$$

С целью облегчения вычислений вероятностей при χ^2 -распределении случайной величины составлены таблицы двоякого рода.

В одних таблицах (см. табл. VIII приложений) приводятся вероятности $P(\chi^2 > \chi_q^2)$ того, что сумма квадратов $\chi^2 = \sum_{i=1}^k Z_i^2$ случайных величин Z_1, \dots, Z_k

Z_2, \dots, Z_k , следующих нормальному закону $n(z; 0, 1)$, примет значение, не меньшее, чем взятое χ_q^2 раз среднее квадратическое отклонение при заданном числе k степеней свободы.

Эта вероятность может быть подсчитана по формуле, получающейся из соотношений (3.1.8) и (4.5.56):

$$P(\chi^2 > \chi_q^2) = P(\chi_q^2 < \chi^2 < \infty) = \int_{\chi_q^2}^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{k/2}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx. \quad (4.5.66)$$

На графике плотности вероятности величины χ^2 , следующей χ^2 -распределению (черт. 53), эта вероятность изображается заштрихованной площадкой.

Табл. VIII приложений построена для чисел степеней свободы до 30. При большем числе степеней свободы нужные значения могут быть вычислены с помощью табл. IV приложений функции Лапласа по формуле

$$P(\chi^2 > \chi_q^2) \approx 0,5 - \Phi(z), \quad (4.5.67)$$

где z по χ_q^2 определяется соотношением

$$\chi_q^2 = \frac{(z + \sqrt{2k-1})^2}{2}. \quad (4.5.67')$$

а k — число степеней свободы; при вероятностях $P(\chi^2 > \chi_q^2)$ от 0 до 0,5 z имеет знак плюс, а при вероятностях от 0,5 до 1 — минус.

В других таблицах (табл. IX приложений) приводятся значения абсциссы χ_q^2 (черт. 53), вероятность $P(\chi^2 > \chi_q^2)$ превышения которой при заданном числе k степеней свободы вычисляется по той же формуле (4.5.66).

Абсцисса χ_q^2 называется иногда «*доверительной границей*», а вероятность $P(\chi^2 > \chi_q^2)$ называют «*доверительной вероятностью*».

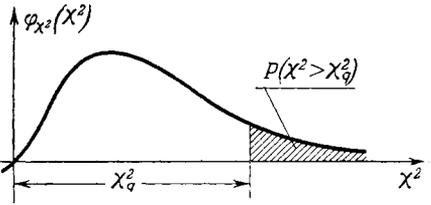
Так как

$$P(\chi^2 > \chi_q^2) = P(\chi > \chi_q),$$

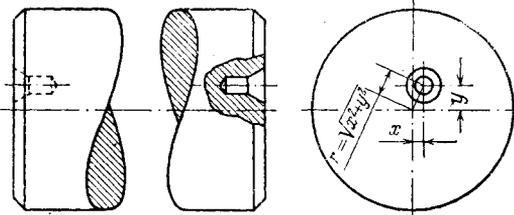
то табл. VIII и IX приложений пригодны также для вычисления вероятностей, отвечающих распределениям (4.5.58), (4.5.59), (4.5.60), (4.5.65) и, конечно, (4.5.57) при $\sigma = 1$.

При вычислении вероятностей по табл. IX приложений необходимо значения границ y для $x, r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ предварительно возводить в квадрат, а затем брать по табл. IX приложений вероятности $P(\chi^2 > \chi_q^2)$. При пользовании же табл. VIII приложений необходимо из найденного значения χ_q^2 по заданному $P(\chi^2 > \chi_q^2)$ и k извлекать квадратный корень.

Пример 4.5.1. Эксцентриситет $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ оси центровых отверстий относительно геометрической оси цилиндрической поверхности валика определяется одинаково распределенными по нормальному закону с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 0,02$ мм координатами x и y (черт. 54). Если $a = 0$, то это означает, что величины x и y представляют собой отклонения от соответствующих математических



Черт. 53. График плотности χ^2 -распределения с «доверительной границей» χ_q^2 и «доверительной вероятностью» $P(\chi^2 > \chi_q^2)$.



Черт. 54. Эксцентриситет оси центровых отверстий относительно геометрической оси цилиндрической поверхности валика.

ожиданий MX и MY . Требуется определить вероятность того, что величина эксцентриситета r превысит 0,06 мм,

$$\chi_q = \frac{0,06}{0,02} = 3, \quad \chi_q^2 = 3^2 = 9, \quad k = 2.$$

По табл. IX приложений находим:

$$P(\chi > 3) = P(\chi^2 > 9) = 0,0111 = 1,11\%.$$

4.5.5. Уклонения от нормального закона в производственных условиях.

До сих пор мы рассматривали распределения случайных величин в некоторых неизменных условиях.

Однако реальные случайные явления протекают во времени, причем с течением времени в распределениях случайных величин часто происходят существенные изменения.

Рассмотрению случайных величин, зависящих от времени и вообще от одного или нескольких непрерывно изменяющихся параметров, посвящена теория случайных (стохастических) процессов.

Мы не будем здесь сколько-нибудь подробно останавливаться на этой теории в целом и на ее основных положениях, затронем лишь отдельные вопросы, относящиеся к уклонениям от нормального закона распределений некоторых случайных величин в производственных условиях.

Одно из наиболее часто встречающихся в практике уклонений от нормальной формы кривой бывает связано с неоднородностью рассматриваемых данных, представляющих как бы смесь двух или большего числа распределений с нормальными плотностями $n_1(x; a_1, \sigma_1)$, $n_2(x; a_2, \sigma_2)$. Такого рода неоднородность возникает, например, если смешиваются изделия с нескольких станков или изготовленные на одном станке, но при различных настройках или из неоднородных материалов и т. д.

«Смешение» изделий приводит к тому, что наудачу взятый объект (например, изделие) может с некоторой вероятностью p_1 принадлежать к распределению, имеющему плотность $n_1(x; a_1, \sigma_1)$, с вероятностью p_2 — к распределению, имеющему плотность $n_2(x; a_2, \sigma_2)$, и т. д. Сумма «весов» вероятностей p_i смешиваемых распределений равна единице.

Для элементарной вероятности $\varphi(x)dx$ результирующего смешанного распределения по формуле полной вероятности найдем:

$$\varphi(x)dx = \sum_{i=1}^s p_i n_i(x; a_i, \sigma_i) dx,$$

так что

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^s p_i n_i(x; a_i, \sigma_i)$$

и

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^s p_i \int_{-\infty}^x n_i(x; a_i, \sigma_i) dx = \sum_{i=1}^s p_i N_i(x; a_i, \sigma_i),$$

где $F(x)$ и $N_i(x; a_i, \sigma_i)$ ($i = 1, 2, \dots, s$) — интегральные функции распределения.

Если «смешиваются» два нормальных распределения, то результирующее распределение получается, как правило, асимметричным, а иногда и двухвершинным (черт. 55): форма кривой $\varphi(x)$ существенно зависит от отношения весов $p_1 : p_2$, от разности центров и дисперсий.

Когда мы обнаруживаем в эмпирически наблюдаемой картине две или более вершины, вполне естественно возникает вопрос о причинах неоднородности и о выделении собственных однородных компонент наблюдаемой смеси. Эта задача,

разумеется, может быть решена лишь при тщательном анализе данного статистического материала, позволяющего иногда уловить существенные качественные различия среди наблюдаемых объектов и затем подразделить его на качественно однородные группы.

Из сказанного нельзя, конечно, сделать обратное заключение: однородность распределения далеко не всегда свидетельствует об однородности.

К своеобразной схеме «смешивания» распределений приводит задача о распределении суммарной продукции станка (например, партии изготовленных деталей) при значительном износе инструмента за все время работы или при переменном температурном режиме, влияющем на средний размер изготавливаемых деталей. Центр рассеивания в этом случае будет изменяться со временем

$$MX = a(t),$$

где $a(t)$ — некоторая функция времени. Пусть мы подразделили рассматриваемый промежуток времени T на большое число малых промежутков $(t_0, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{s-1}, t_s)$ длины

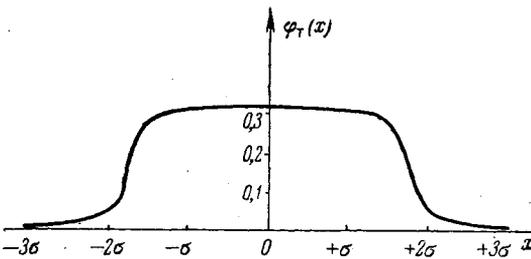
$$\Delta t = \frac{T}{s}.$$

Допустим, что распределение изделий, изготовленных в промежутке (t_k, t_{k+1}) по интересующему нас признаку следует нормальному закону с плотностью $n(x; a(t_k), \sigma)$, где $a(t_k)$ значение функции $MX = a(t)$ в момент $t = t_k$. Распределение суммарной продукции за весь период T будет следовать закону, получающемуся по рассмотренному нами выше правилу смешения с равными весами

$$P_k = \frac{1}{s}$$

(так как мы считаем, что числа изделий, производимых в равные промежутки времени, равны):

$$\begin{aligned} \varphi_T(x) &= \frac{1}{s} \sum_0^{s-1} n[x; a(t_k), \sigma] = \\ &= \frac{1}{T} \sum_0^{s-1} n[x; a(t_k), \sigma] \Delta t. \end{aligned}$$



Черт. 56. График плотности вероятности $\varphi_T(x)$ при равномерном смещении центра группирования величины x в зависимости от времени.

Предполагая $a(t)$ непрерывно изменяющимся во времени и $\Delta t = \frac{T}{s}$ малыми, мы можем заменить сумму интегралом

$$\varphi_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T n[x; a(t), \sigma] dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{e^{-\frac{[x-a(t)]^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma}} dt. \quad (4.5.68)$$

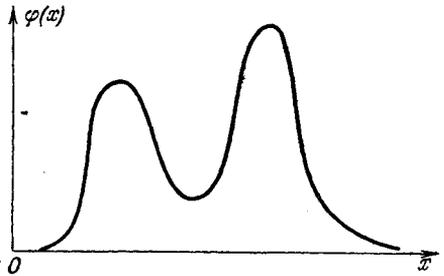
В более общем случае параметр σ может также изменяться во времени. Плотность $n[x; a(t), \sigma(t)]$, осреднением которой по промежутку T получается результирующая плотность смешанного распределения, носит название «мгновенной» плотности.

В частном важном случае можно считать

$$\sigma = \text{const} \text{ и } a(t) = a_0 + \lambda t$$

линейной функцией времени в промежутке $(0, T)$. В этом случае из (4.5.68) получим:

$$\varphi_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-a_0-\lambda t)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\lambda T} \int_0^{\lambda T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{[(x-a_0)-u]^2}{2\sigma^2}} du.$$



Черт. 55. Схема результирующего двухвершинного распределения, получающегося при «смешении» двух нормальных распределений с разными параметрами.

Правую часть этого равенства можно рассматривать как результат композиции по формуле (4.1.6) плотностей нормального закона $n(x; a_0, \sigma)$ и равномерного закона в промежутке $(0, T)$. После подстановки

$$\begin{aligned}x - a_0 - u &= z\sigma \\ -du &= \sigma dz\end{aligned}$$

получаем далее:

$$\varphi_T(x) = \frac{1}{\lambda T \sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-a_0-\lambda T}{\sigma}}^{\frac{x-a_0}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\lambda T} \left[\Phi\left(\frac{x-a_0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x-a_0-\lambda T}{\sigma}\right) \right]. \quad (4.5.69)$$

Вид кривой $\varphi_T(x)$ показан на черт. 56¹⁾.

§ 6. Приложение теории кривых распределения к решению размерных цепей.

4.6.1. Понятие о размерных цепях. Одним из важных для практики приложений к технике изложенных в предыдущих параграфах положений теории кривых распределения является приложение их к расчету размерных цепей.

Ввиду существенных преимуществ, которые дает на практике это приложение, остановимся на данном вопросе более подробно.

Размерной цепью называют замкнутый контур, образованный взаимно связанными размерами.

По производственно-конструктивным признакам размерные цепи подразделяются на:

- 1) *сборочные*, — выражающие взаимную связь размеров деталей механизма;
- 2) *подетальные*, — выражающие взаимную связь окончательных (чистовых) размеров одной и той же детали;
- 3) *операционные*, — выражающие взаимную связь операционных и окончательного размеров детали.

По взаимному расположению звеньев размерные цепи подразделяются на:

- 1) *линейные*, если составляющие размеры расположены параллельно друг другу в одной плоскости или в параллельных плоскостях (т. е. если они коллинеарны);
- 2) *плоскостные*, если составляющие размеры не параллельны друг другу, но расположены в параллельных плоскостях (т. е. если они компланарны);
- 3) *пространственные*, если составляющие размеры расположены в непараллельных плоскостях;
- 4) *угловые*, — образованные угловыми размерами, связанными общей вершиной.

Размеры деталей, составляющие размерную цепь, принято называть *звеньями*.

Зазор или натяг в сборочных цепях рассматривают как самостоятельное звено размерной цепи; в отличие от других звеньев оно может иметь номинальный размер, равный нулю.

Из числа звеньев цепи обычно выделяют одно звено, по которому ведут расчет. Это звено практически обычно получается в результате суммирования размеров всех остальных звеньев; поэтому его называют *закрывающим* или *конечным* (а иногда *исходным*). По отношению к конечному звену остальные звенья данной цепи будут составляющими.

Составляющие звенья в свою очередь подразделяются на:

- 1) *увеличивающие* (или *положительные*) и
- 2) *уменьшающие* (или *отрицательные*).

¹⁾ Более подробное изложение данного вопроса см. в книге Н. А. Бородачева, Основные вопросы теории точности производства, Издательство Академии наук СССР, М.—Л., 1950.

Увеличивающим (положительным) звеном называется такое, с увеличением которого (при постоянстве остальных составляющих звеньев) конечное звено увеличивается.

Уменьшающим (отрицательным) звеном называется такое, с увеличением которого (при постоянстве остальных составляющих звеньев) конечное звено уменьшается.

Любое звено размерной цепи может быть выбрано в качестве конечного звена. Однако практический интерес представляет только такое «конечное» звено, которое действительно на практике получается в результате суммирования остальных звеньев цепи.

Примером сборочной линейной цепи может служить замкнутый контур, образованный размерами A , B , C , L , S и K узла коробки передач, показанного на черт. 57.

Здесь зазор K является, естественно, конечным звеном. Размеры A и B представляют увеличивающие, а размеры C , L и S — уменьшающие звенья. Из чертежа ясно, что

$$K = (A + B) - (C + L + S). \quad (4.6.1)$$

Если обозначить увеличивающие звенья через P_i ($i = 1, 2, \dots, m$), а уменьшающие через N_j ($j = 1, 2, \dots, n$), то, используя известную теорему о проекциях составляющих и замыкающей на некоторую ось, вообще будем иметь:

$$K = \sum_{i=1}^m P_i - \sum_{j=1}^n N_j. \quad (4.6.2)$$

Это соотношение называют основным уравнением размерной цепи. Из него видно, что увеличивающие звенья являются в правой части положительными членами, а уменьшающие — отрицательными, что и поясняет ранее отмечавшиеся вторые названия таких звеньев: «положительные» звенья и «отрицательные» звенья.

4.6.2. Расчет размерных цепей. Под расчетом размерной цепи обычно понимают взаимную расчетную увязку размеров ее звеньев, при которой решаются обычно две задачи:

1) по заданным составляющим звеньям находят конечное звено (поверочный расчет);

2) по заданному конечному звену, которое в этом случае называют исходным, находят составляющие звенья (проектный расчет).

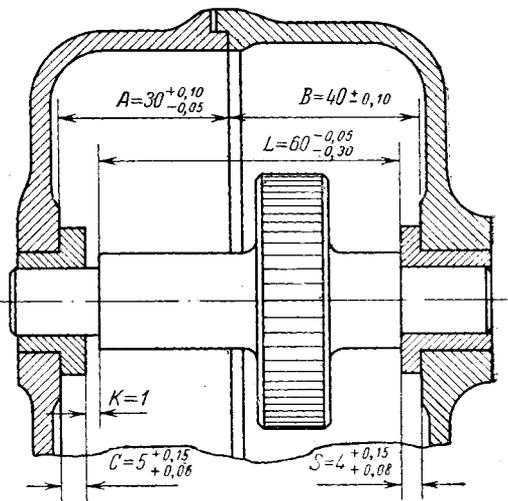
Первая задача — однозначная и более простая.

Для решения второй задачи требуются дополнительные условия.

В качестве такого дополнительного условия при решении второй задачи иногда служат: равные трудности при выполнении звеньев в производстве — это условие мало удобно, так как приводит к довольно громоздкому подбору отклонений и к субъективному решению.

Лучше применять вместо него другое условие, а именно, примерно один класс точности для всех составляющих звеньев.

В последнем случае определяют среднюю точность всех составляющих звеньев в единицах допуска.



Черт. 57. Эскиз механизма и схематическое изображение размерной цепи.

По числу единиц допуска определяют единый класс точности для всех составляющих звеньев, а по нему берут допуски из таблиц ОСТ. Часто по таблицам ОСТ берут скользящие посадки (полученного при расчете класса точности) для всех составляющих звеньев, кроме одного, — регулирующего звена. Для последнего вычисляют нестандартные отклонения, исходя из выбранных по таблицам ОСТ отклонений остальных звеньев и из заданного размера конечного звена.

Следует заметить, что подбираемые для составляющих звеньев посадки во многих случаях, например, в таком, как приведено в разбираемых ниже примерах, носят условный характер, так как в системе ОСТ посадки установлены для гладких цилиндрических сопряжений, а в данном случае мы имеем линейные сопряжения и имели бы право пользоваться существующими более широкими нормами допусков линейных размеров.

Тем не менее, применение посадок и в этих примерах оправдано хотя бы тем, что имеется возможность использования стандартных предельных калибров для контроля размеров тех или иных звеньев. Последнее же ведет к снижению затрат на измерения.

Формулы для решения обеих задач при определении размерных цепей зависят от принятого метода расчета.

На практике применяют:

1) метод «максимума-минимума», называемый иногда также методом полной взаимозаменяемости,

2) теоретико-вероятностный метод, называемый иногда также методом неполной взаимозаменяемости.

Метод «максимума-минимума» основан на определении крайних отклонений конечного звена по крайним же отклонениям составляющих звеньев путем простого суммирования (при решении первой задачи).

Введем обозначения:

$K_{\text{ср}}$ — средний размер конечного звена;

$P_{\text{ср}i}$ — средний размер i -го положительного звена;

$N_{\text{ср}j}$ — средний размер отрицательного j -го звена;

m и n — числа соответственно положительных и отрицательных звеньев;

δ_K — допуск конечного звена K ;

$\bar{\delta}_K$ — половина этого допуска, т. е.

$$\bar{\delta}_K = \frac{\delta_K}{2};$$

$\bar{\delta}_i$ — половина допуска i -го составляющего звена (положительного или отрицательного);

a — число единиц допуска $0,5 \sqrt[3]{\bar{a}_{\text{ср}}}$ в допуске каждого из составляющих звеньев;

$d_{\text{ср}i}$ — средний диаметр для того интервала диаметров по ОСТ, в который попадает размер i -го составляющего звена;

α_i и α_j — коэффициенты относительной асимметрии соответственно i -го положительного звена и j -го отрицательного звена;

k_i — коэффициент относительного рассеивания i -го составляющего звена.

Расчетные формулы для поверочного расчета в этом случае имеют вид:

$$K_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^m P_{\text{ср}i} - \sum_{j=1}^n N_{\text{ср}j}, \quad (4.6.3)$$

$$\bar{\delta}_K = \sum_{i=1}^{m+n} \bar{\delta}_i; \quad (4.6.4)$$

и для проектного расчета вид:

$$a = \frac{2\delta_K}{\sum_{i=1}^{m+n} \sqrt[3]{d_{cp\ i}}}, \quad (4.6.5)$$

где δ_K берется выраженным в *мк*, а $d_{cp\ i}$ — в *мм*.

При теоретико-вероятностном методе аналогичные расчетные формулы несколько усложняются, принимая вид

$$K_{cp} = \sum_{i=1}^m (P_{cp\ i} + \alpha_i \bar{\delta}_i) - \sum_{j=1}^n (N_{cp\ j} + \alpha_j \bar{\delta}_j), \quad (4.6.6)$$

$$\bar{\delta}_K = \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} k_i^2 \bar{\delta}_i^2}; \quad (4.6.7)$$

$$a = \frac{2\delta_K}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} k_i^2 d_{cp\ i}^{2/3}}}. \quad (4.6.8)$$

Коэффициент относительной асимметрии α_i , относящийся к i -му составляющему звену, применяется при расчете размерных цепей для характеристики несимметричности распределения отклонений случайной величины относительно середины заданного поля (например, относительно середины поля допуска размеров детали):

$$\alpha_i = \frac{MX_i - \Delta_{0i}}{\bar{\delta}_i}, \quad (4.6.9)$$

где Δ_{0i} — координата середины заданного поля (черт. 58),

$\bar{\delta}_i$ — половина заданного поля,

MX_i — математическое ожидание. Здесь

$$\Delta_{0i} = \frac{x_{нб\ i} + x_{нм\ i}}{2}, \quad (4.6.10)$$

$x_{нб\ i}$ — верхний предел звена,

$x_{нм\ i}$ — нижний предел звена.

Решая уравнение (4.6.9) относительно MX , получаем:

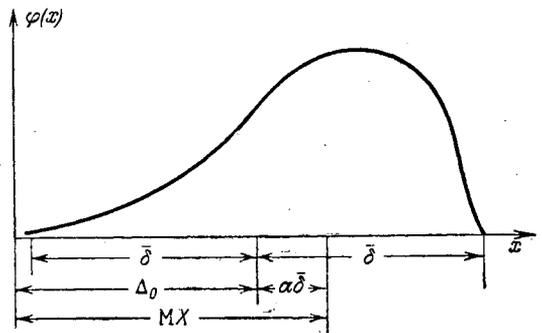
$$MX_i = \Delta_{0i} + \alpha_i \bar{\delta}_i. \quad (4.6.11)$$

Коэффициент относительного рассеивания k_i , относящийся к i -му составляющему звену, служит при расчете размерных цепей для сопоставления величины рассеивания данного звена с рассеиванием при нормальном распределении

$$k_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_n}, \quad (4.6.12)$$

где λ_i — относительное среднее квадратическое отклонение i -го составляющего звена,

λ_n — относительное среднее квадратическое отклонение при нормальном распределении.



Черт. 58. Графическая интерпретация коэффициента относительной асимметрии α .

Относительное среднее квадратическое отклонение λ_i представляет отношение среднего квадратического отклонения σ_i к половине поля рассеивания $\bar{\delta}_i$.

$$\lambda_i = \frac{\sigma_i}{\bar{\delta}_i}, \quad (4.6.13)$$

откуда

$$\sigma_i = \lambda_i \bar{\delta}_i. \quad (4.6.14)$$

Значения α_i и k_i для различных законов распределения берутся по табл. X приложений. Примеры вычислений α_i и k_i по формулам (4.6.9) и (4.6.12) будут даны далее.

Формула (4.6.3) непосредственно следует из уравнения (4.6.2).

Формула (4.6.4) очень просто получается на основе упомянутого выше принципа максимума-минимума.

В самом деле, обозначив через $K_{нб}$ и $K_{нм}$ наибольший и наименьший предельные размеры конечного звена, из определения допуска будем иметь:

$$\delta_K = K_{нб} - K_{нм}. \quad (4.6.15)$$

Но по принципу максимума-минимума

$$K_{нб} = \sum_{i=1}^m P_{нб_i} - \sum_{j=1}^n N_{нм_j}, \quad (4.6.16)$$

где $P_{нб_i}$ — наибольший размер i -го положительного звена;

$N_{нм_j}$ — наименьший размер j -го отрицательного звена.

Аналогично

$$K_{нм} = \sum_{i=1}^m P_{нм_i} - \sum_{j=1}^n N_{нб_j}. \quad (4.6.17)$$

Подставляя (4.6.16) и (4.6.17) в (4.6.15), получим:

$$\delta_K = \sum_{i=1}^m P_{нб_i} - \sum_{j=1}^n N_{нм_j} - \sum_{i=1}^m P_{нм_i} + \sum_{j=1}^n N_{нб_j} = \sum_{i=1}^m (P_{нб_i} - P_{нм_i}) + \sum_{j=1}^n (N_{нб_j} - N_{нм_j}).$$

Учитывая, что из определения допуска

$$\delta_i = P_{нб_i} - P_{нм_i} \quad \text{и} \quad \delta_j = N_{нб_j} - N_{нм_j},$$

получим:

$$\delta_K = \sum_{i=1}^m \delta_i + \sum_{j=1}^n \delta_j = \sum_{i=1}^{m+n} \delta_i, \quad (4.6.18)$$

Разделив правую и левую части (4.6.18) на 2, приходим к (4.6.4).

Формула (4.6.5) получается из (4.6.18), если принять единый класс точности для всех составляющих звеньев. Учитывая, что по ОСТ единица допуска равна $0,5 \sqrt[3]{d_{ср}}$, перепишем (4.6.18) в виде

$$\delta_K = \sum_{i=1}^{m+n} a_i 0,5 \sqrt[3]{d_{ср_i}},$$

но так как при едином классе точности для всех составляющих звеньев

$$a_i = \text{const} = a,$$

получим:

$$\delta_K = 0,5 a \sum_{i=1}^{m+n} \sqrt[3]{d_{ср_i}},$$

откуда

$$a = \frac{2\delta_K}{\sum_{i=1}^{m+n} \sqrt{d_{cp i}}},$$

что и требовалось.

Перейдем теперь к доказательству формул (4.6.6), (4.6.7) и (4.6.8), применяющихся при теоретико-вероятностном способе расчета размерных цепей.

Доказательство формулы (4.6.6). Из (4.6.2) видно, что размер конечного звена как случайная величина представляет сумму размеров составляющих звеньев. Поэтому его математическое ожидание представляет математическое ожидание суммы размеров составляющих звеньев

$$MK = M \left(\sum_{i=1}^m P_i - \sum_{j=1}^n N_j \right). \quad (4.6.19)$$

На основании теоремы (3.3.13) о математическом ожидании суммы выражение (4.6.19) может быть приведено к виду:

$$MK = \sum_{i=1}^m MP_i - \sum_{j=1}^n MN_j. \quad (4.6.20)$$

Отсюда на основании соотношения (4.6.11)

$$MK = (\Delta_{0K} + \alpha_K \bar{\delta}_K) = \sum_{i=1}^m (\Delta_{0i} + \alpha_i \bar{\delta}_i) - \sum_{j=1}^n (\Delta_{0j} + \alpha_j \bar{\delta}_j), \quad (4.6.21)$$

где Δ_{0K} , Δ_{0i} и Δ_{0j} — координаты середин полей допусков соответственно конечного, положительных и отрицательных составляющих звеньев.

Начало координат для каждого звена помещаем в начало этого звена, т. е. в точки, где размеры соответствующих звеньев равны нулю, так что

$$\Delta_{0K} = K_{cp}; \quad \Delta_{0i} = P_{cp i}; \quad \Delta_{0j} = N_{cp j}.$$

Тогда формула (4.6.21) примет вид

$$MK = K_{cp} + \alpha_K \bar{\delta}_K = \sum_{i=1}^m (P_{cp i} + \alpha_i \bar{\delta}_i) - \sum_{j=1}^n (N_{cp j} + \alpha_j \bar{\delta}_j). \quad (4.6.22)$$

На основании теоремы Ляпунова распределение размеров конечного звена при достаточном числе составляющих звеньев и при независимости их в совокупности будет подчиняться закону распределения, достаточно близкому к нормальному и, следовательно, математическое ожидание MK размеров конечного звена будет совпадать с серединой поля допуска, а коэффициент его относительной асимметрии будет равен нулю, т. е.

$$MK = \Delta_{0K} = K_{cp}.$$

Тогда окончательно получим:

$$K_{cp} = \sum_{i=1}^m (P_{cp i} + \alpha_i \bar{\delta}_i) - \sum_{j=1}^n (N_{cp j} + \alpha_j \bar{\delta}_j),$$

т. е. мы пришли к формуле (4.6.6).

Доказательство формулы (4.6.7). Так как размер конечного звена K как случайная величина представляет сумму составляющих звеньев, то, следовательно, его дисперсия является дисперсией суммы составляющих звеньев

$$DK = D \left(\sum_{i=1}^m P_i - \sum_{j=1}^n N_j \right). \quad (4.6.23)$$

Так как размеры звеньев при сборке механизма можно считать независимыми в совокупности, то на основании теоремы (3.4.17) о дисперсии суммы выражению (4.6.23) может быть придан вид:

$$\begin{aligned} DK &= D\left(\sum_{i=1}^m P_i - \sum_{j=1}^n N_j\right) = D\left(\sum_{i=1}^m P_i\right) + D\left(\sum_{j=1}^n N_j\right) = \sum_{i=1}^m DP_i + \sum_{j=1}^n DN_j = \\ &= \sum_{i=1}^m \sigma_{P_i}^2 + \sum_{j=1}^n \sigma_{N_j}^2 = \sum_{i=1}^{m+n} \sigma_i^2, \end{aligned} \quad (4.6.24)$$

откуда, используя (4.6.14), получим:

$$\sigma_K = \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} \lambda_i \bar{\delta}_i^2}$$

и далее

$$\lambda_K \bar{\delta}_K = \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} \lambda_i^2 \bar{\delta}_i^2},$$

откуда

$$\bar{\delta}_K = \frac{1}{\lambda_K} \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} \lambda_i^2 \bar{\delta}_i^2}, \quad (4.6.25)$$

где λ_i и $\bar{\delta}_i$ — соответственно относительное среднее квадратическое отклонение и половина поля рассеивания (здесь — поля допуска) положительных и отрицательных составляющих звеньев;

λ_K и σ_K — то же для конечного звена.

Умножая правую часть равенства (4.6.25) на $1 = \frac{\lambda_n}{\lambda_n}$ (где λ_n — относительное среднее квадратическое отклонение при нормальном законе распределения), получим:

$$\bar{\delta}_K = \frac{\lambda_n}{\lambda_K} \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^2 \bar{\delta}_i^2},$$

откуда

$$\bar{\delta}_K = \frac{\lambda_n}{\lambda_K} \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} k_i^2 \bar{\delta}_i^2}. \quad (4.6.26)$$

На основании теоремы Ляпунова можно утверждать, что при достаточно большом числе звеньев в размерной цепи при их независимости в совокупности, распределение конечного звена будет подчинено закону, достаточно близкому к нормальному.

Для этого случая можно считать, что $\lambda_K = \lambda_n$ и, следовательно, формула (4.6.26) примет вид

$$\bar{\delta}_K = \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} k_i^2 \bar{\delta}_i^2},$$

т. е. мы пришли к соотношению (4.6.7).

В тех случаях, когда закон распределения вероятностей размеров конечного звена заведомо не может быть признан нормальным или мы хотим в качестве половины поля рассеивания (практически предельного отклонения) при нормальном законе принять не величину 3σ , а большую или меньшую величину, то можно для расчетов воспользоваться формулой (4.6.26).

Доказательство соотношения (4.6.8). Умножив обе части равенства (4.6.7) на 2, будем иметь:

$$\delta_K = \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} k_i^2 \delta_i^2} \quad (4.6.27)$$

Выражая допуски составляющих звеньев через произведение единиц допусков $0,5 \sqrt[3]{d_{\text{ср } i}}$ на соответствующее число a_i таких единиц в допуске, получим:

$$\delta_K = \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} k_i^2 \cdot a_i^2 d_{\text{ср } i}^{2/3} 0,5^2}$$

Приняв единый класс точности для всех составляющих звеньев, будем иметь:

$$a_i = \text{const} = a$$

и, следовательно,

$$\delta_K = 0,5a \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} k_i^2 \cdot d_{\text{ср } i}^{2/3}}$$

откуда

$$a = \frac{2\delta_K}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} k_i^2 \cdot d_{\text{ср } i}^{2/3}}}$$

Таким образом, мы пришли к соотношению (4.6.8).

Заметим еще, что при вычислении по формулам (4.6.5) и (4.6.8) числа a единиц допуска класс точности составляющих звеньев, а в случае необходимости и посадка определяются с помощью табл. XI и XII приложений, а отклонения размеров по выбранному классу и посадке берутся из любого справочника по допускам и посадкам на гладкие сопряжения¹⁾.

Рассмотрим теперь несколько простых примеров.

Пример 4.6.1. Пусть требуется определить по методу «максимума-минимума» размер конечного звена K узла, показанного на черт. 57. Средние размеры звеньев определяем из показанных на чертеже отклонений по формуле

$$P_{\text{ср}} = \frac{P_{\text{нб}} - P_{\text{нм}}}{2},$$

$$P_{\text{ср } A} = 30,025; \quad P_{\text{ср } B} = 40,000; \quad N_{\text{ср } C} = 5,105; \quad N_{\text{ср } S} = 4,115, \quad N_{\text{ср } L} = 59,825.$$

По формуле (4.6.3) находим:

$$K_{\text{ср}} = (30,025 + 40,000) - (5,105 + 4,115 + 59,825) = 70,025 - 69,045 = 0,98 \text{ мм.}$$

По формуле (4.6.4) находим:

$$\bar{\delta}_k = 0,075 + 0,100 + 0,045 + 0,125 + 0,035 = 0,38 \text{ мм.}$$

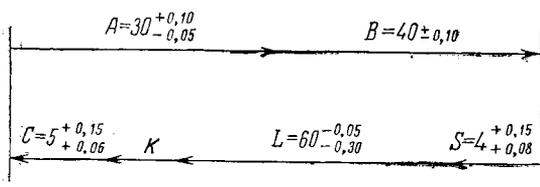
Предельные размеры конечного звена равны:

$$K_{\text{нб}} = 0,98 + 0,38 = 1,36 \text{ мм,}$$

$$K_{\text{нм}} = 0,98 - 0,38 = 0,60 \text{ мм.}$$

¹⁾ См., например, Энциклопедический справочник — Машиностроение, т. V, стр. 7—18, 1947 (в дальнейшем обозначаемый ЭСМ).

Примем за номинальный размер конечного звена 1 мм по аналогии с ближайшим нормальным диаметром по ОСТ 6270 и тогда будем иметь:



$$K = 1^{+0,36}_{-0,40}, \quad \delta_k = 2\bar{\delta}_k = 0,76 \text{ мм.}$$

Схематическое изображение данной размерной цепи показано на черт. 59.

Пример 4.6.2. Пусть требуется определить методом максимума-минимума класс точности и отклонения составляющих звеньев примера 4.6.1, если отклонения конечного звена, определенные из условий работы механизма, должны быть $\pm 0,05$ мм.

Находим по таблицам ОСТ средние размеры для интервалов диаметров, в которые попадают номинальные размеры составляющих звеньев. Так, например, номинальный размер звена равен 30. Этот размер попадает в интервал диаметров по ОСТ от 18 до 30. Следовательно, для него средний размер интервала по ОСТ:

$$d_{\text{ср } A} = \frac{18 + 30}{2} = 24.$$

Подобно этому находим:

$$d_{\text{ср } B} = 40, \quad d_{\text{ср } C} = 4,5, \quad d_{\text{ср } L} = 65, \quad d_{\text{ср } S} = 4,5.$$

По формуле (4.6.5) находим число единиц допуска:

$$a = \frac{2 \cdot 100}{\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{4,5} + \sqrt[3]{65} + \sqrt[3]{4,5}} = \frac{200}{2,88 + 3,42 + 1,65 + 4,02 + 1,65} = \frac{200}{13,62} = 14,68.$$

По табл. XI приложений находим, что $a = 14,68$ соответствует примерно 2 классу точности для основного отверстия ($a = 16$) и 2а классу точности для основного вала ($a = 16$).

Пусть теперь регулирующим звеном будет звено B . По ЭСМ, т. V, стр. 10, берем для звеньев A, C, L и S отклонения по скользящей посадке 2а класса точности в «системе отверстия». Тогда

$$A = 30_{-0,021}; \quad C = 5_{-0,012}; \quad L = 60_{-0,03}; \quad S = 4_{-0,012}.$$

Заданные размеры конечного звена $K = 1 \pm 0,05$.

Определяем средний размер звена

$$\begin{aligned} B_{\text{ср}} &= K_{\text{ср}} - A_{\text{ср}} - C_{\text{ср}} + L_{\text{ср}} + S_{\text{ср}} = \\ &= 1 - 29,9895 + 4,994 + 59,985 + 3,994 = 39,9835. \end{aligned}$$

Вычисляем половину допуска звена

$$\bar{\delta}_B = \bar{\delta}_K - \bar{\delta}_A - \bar{\delta}_C - \bar{\delta}_L - \bar{\delta}_S = 50 - 10,5 - 6 - 15 - 6 = 12,5 \text{ мк.}$$

Определяем предельные размеры звена B :

$$\begin{aligned} B_{\text{нб}} &= 39,9835 + 0,0125 = 39,996, \\ B_{\text{нм}} &= 39,9835 - 0,0125 = 39,971. \end{aligned}$$

Таким образом, звено B будет иметь размер

$$B = 40^{+0,004}_{-0,029}.$$

Пример 4.6.3. Требуется определить λ и k для распределений по:

- 1) нормальному закону,
- 2) закону равной вероятности,
- 3) закону равнобедренного треугольника (Симпсона).

1) Нормальный закон. При нормальном распределении обычно принимается $\delta_n = 3\sigma_n$ и потому

$$\lambda_n = \frac{\sigma_n}{\delta_n} = \frac{\sigma_n}{3\sigma_n} = \frac{1}{3}, \tag{4.6.28}$$

$$k_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 1} = 1. \tag{4.6.29}$$

2. Закон равной вероятности. Используя (3.4.10), находим:

$$\lambda_{p.v} = \frac{\sigma_{p.v}}{\delta_{p.v}} = \frac{\sigma_{p.v}}{\sqrt{3}\sigma_{p.v}} = 0,577, \tag{4.6.30}$$

$$k_{p.v} = \frac{\lambda_{p.v}}{\lambda_n} = \frac{1 \cdot 3}{\sqrt{3} \cdot 1} = 1,73. \tag{4.6.31}$$

3. Закон равнобедренного треугольника. Учитывая (3.4.13), находим:

Таблица 4.6.1

$$\lambda_\tau = \frac{\sigma_\tau}{\delta_\tau} = \frac{\sigma_\tau}{\sqrt{6}\sigma_\tau} = 0,408, \tag{4.6.32}$$

$$k_\tau = \frac{\lambda_\tau}{\lambda_n} = \frac{1 \cdot 3}{\sqrt{6} \cdot 1} = 1,22. \tag{4.6.33}$$

Звенья	α_i	k_i
A	0	1
B	0	1,26
C	-0,28	1,14
L	+0,63	0,75
S	+0,33	1,41

Пример 4.6.4. Пусть требуется определить теоретико-вероятностным методом размер конечного звена цепи по примеру 4.6.1, если коэффициенты относительной асимметрии α_i и коэффициенты относительного рассеивания k_i составляющих звеньев заданы табл. 4.6.1 (они взяты по табл. X приложений).

По формуле (4.6.6) находим средний размер конечного звена:

$$K_{cp} = [(30,025 + 0 \cdot 0,075) + (40,000 + 0 \cdot 0,10)] - [(5,105 - 0,28 \cdot 0,045) + (59,825 + 0,63 \cdot 0,125) + (4,115 + 0,33 \cdot 0,035)] = 70,025 - 69,123 = 0,902.$$

По формуле (4.6.7) находим половину поля рассеивания (здесь — поля допуска):

$$\delta_K = \sqrt{1^2 \cdot 0,075^2 + 1,26^2 \cdot 0,10^2 + 1,14^2 \cdot 0,045^2 + 0,75^2 \cdot 0,125^2 + 1,41^2 \cdot 0,035^2} = \sqrt{0,035357} = 0,1880,$$

$$K_{нб} = 0,902 + 0,188 = 1,090, \quad K_{нм} = 0,902 - 0,188 = 0,714.$$

Выбираем номинальный размер равным единице по таблице нормальных диаметров.

Тогда окончательно

$$K = 1_{-0,286}^{+0,090}, \quad \delta_K = 0,376.$$

Пример 4.6.5. Требуется по условиям примера 4.6.4 определить размеры конечного звена K при условии, что $\delta_K = 4\sigma_K$ и определить изменение процента риска выхода конечного звена за границы поля допуска по сравнению со случаем, когда $\delta_K = 3\sigma_K$.

С помощью формулы (4.6.26) находим:

$$\lambda_{\bar{K}} = \frac{1}{3}, \quad \lambda'_{\bar{K}} = \frac{\sigma_{\bar{K}}}{\bar{\delta}_{\bar{K}}} = \frac{\sigma_{\bar{K}}}{4\sigma_{\bar{K}}} = \frac{1}{4};$$

$$\bar{\delta}_{\bar{K}} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 1} \sqrt{0,035357} = \frac{4}{3} \cdot 0,1880 = 0,251; \quad \delta_{\bar{K}} = 0,502.$$

Определим процент риска q_1 выхода из поля допуска при $\bar{\delta}_{\bar{K}} = 3\sigma_{\bar{K}}$. На основании формулы (4.3.35)

$$q_1\% = [1 - 2\Phi(3)] 100 = (1 - 0,9973) \cdot 100 = 0,0027 \cdot 100 = 0,27\%.$$

Определим процент риска q_2 выхода из поля допуска при $\bar{\delta}_{\bar{K}} = 4\sigma_{\bar{K}}$.

$$q_2\% = (1 - 0,99994) \cdot 100 = 0,00006 \cdot 100 = 0,006\%.$$

Пример 4.6.6. Требуется определить теоретико-вероятностным методом класс точности и отклонения составляющих звеньев по условиям примера 4.6.3, если отклонения конечного звена, определенные из условий работы механизма, составляют $\pm 0,05$ мм.

В примере 4.6.2 мы имеем:

$$d_{\text{ср}A} = 24, \quad d_{\text{ср}B} = 40, \quad d_{\text{ср}C} = 4,5, \quad d_{\text{ср}L} = 65, \quad d_{\text{ср}S} = 4,5.$$

По формуле (4.6.8) определяем число единиц допуска, используя таблицу 4.6.1:

$$a = \frac{2 \cdot 100}{\sqrt{1^2 \cdot 24^{2/3} + 1,26^2 \cdot 40^{2/3} + 1,14^2 \cdot 4,5^{2/3} + 0,75^2 \cdot 65^{2/3} + 1,41^2 \cdot 4,5^{2/3}}}$$

$$= \frac{200}{\sqrt{1 \cdot 8,320 + 1,587 \cdot 11,696 + 1,300 \cdot 2,726 + 0,5625 \cdot 16,166 + 1,988 \cdot 2,726}}$$

$$= \frac{200}{\sqrt{44,94}} = \frac{200}{6,703} = 29,8.$$

По табл. XI приложений находим, что $a = 29,8$ соответствует 3 классу для основного отверстия и основного вала.

Пусть, как и в примере 4.6.2, регулирующим звеном будет звено B . По ЭСМ, т. V, стр. 10, берем для звеньев A , C , L и S отклонения по скользкой посадке 3 класса точности в «системе отверстия», т. е.

$$A = 30_{-0,045}; \quad C = 5_{-0,025}; \quad L = 60_{-0,06}; \quad S = 4_{-0,025}.$$

Определяем средний размер звена B :

$$B_{\text{ср}} = K_{\text{ср}} - (A_{\text{ср}} + \alpha_A \bar{\delta}_A) + (C_{\text{ср}} + \alpha_C \bar{\delta}_C) + (L_{\text{ср}} + \alpha_L \bar{\delta}_L) + (S_{\text{ср}} + \alpha_S \bar{\delta}_S) =$$

$$= 1 - (29,9775 + 0) + (4,9875 - 0,28 \cdot 0,0125) + (59,970 + 0,63 \cdot 0,030) +$$

$$+ (3,9875 + 0,33 \cdot 0,0125) = 39,987 \text{ мм.}$$

Вычисляем половину допуска звена B :

$$k_B \bar{\delta}_B^2 = \bar{\delta}_K^2 - k_A^2 \bar{\delta}_A^2 - k_C^2 \bar{\delta}_C^2 - k_L^2 \bar{\delta}_L^2 - k_S^2 \bar{\delta}_S^2 =$$

$$= 50^2 - 1^2 \cdot 22,5^2 - 1,14^2 \cdot 12,5^2 - 0,75^2 \cdot 30^2 - 1,41^2 \cdot 12,5^2 = 974;$$

$$k_B \bar{\delta}_B = \sqrt{974} = 31,2 \text{ мк}, \quad \bar{\delta}_B = 24,8 \text{ мк.}$$

Определяем предельные размеры звена B :

$$B_{\text{нб}} = 39,987 + 0,0248 = 40,0118 \text{ мм.}$$

$$B_{\text{нм}} = 39,987 - 0,0248 = 39,9622 \text{ мм.}$$

Таким образом, размер звена B будет:

$$B = 40^{+0,012}_{-0,038}.$$

Сравнивая результаты решения примеров 4.6.2 и 4.6.6, заключаем, что при одинаковых условиях при расчете размерной цепи по теоретико-вероятностному методу допуски размеров составляющих звеньев оказались на один класс точности свободнее, чем при расчете по методу «максимума-минимума».

4.6.3. О выборе метода расчета. Представляется целесообразным рассмотреть теперь вопрос о том, как выбрать метод расчета размерной цепи для каждого данного случая.

Если считать, что действительные размеры каждого составляющего звена и конечного звена в теоретико-вероятностном смысле являются случайными величинами, то метод «максимума-минимума» представляется расчетом на такое положение, когда при сборке механизма размер конечного звена будет получен или путем суммирования наименьших размеров всех составляющих звеньев или путем суммирования всех наибольших их размеров.

Такое совпадение можно рассматривать как сложное событие A , заключающееся в наступлении или события A_{\min} (совпадение наименьших размеров составляющих звеньев) или события A_{\max} (совпадение наибольших размеров всех составляющих звеньев).

Так как события A_{\min} и A_{\max} несовместимы и входят в одну полную группу событий (это есть крайние отклонения размера конечного звена, а все его отклонения составляют полную группу событий), то на основании правила (2.2.8) сложения вероятностей имеет место соотношение

$$P(A) = P(A_{\min}) + P(A_{\max}). \quad (4.6.34)$$

В свою очередь событие A_{\min} заключается в совместном наступлении n независимых событий, каждое из которых заключается в том, что при сборке механизма сборщик возьмет данную деталь (размер которой представляет собой звено в размерной цепи) с минимальным размером.

В данном случае для упрощения рассуждений мы полагаем, что размерная цепь состоит из одних только положительных звеньев, число которых равно n .

В общем случае при решении задачи по методу «максимума-минимума» размер конечного звена A_{\min} получился бы при минимальных размерах положительных звеньев и при максимальных размерах отрицательных звеньев.

На основании следствия (2.2.22) из правила умножения вероятностей получим:

$$P(A_{\min}) = P(A_{\min_1}) \cdot P(A_{\min_2}) \dots P(A_{\min_n}), \quad (4.6.35)$$

где $P(A_{\min_1})$, $P(A_{\min_2})$, ..., $P(A_{\min_n})$ вероятности того, что сборщику попадутся детали с минимальными размерами, относящимися соответственно к первому, второму, ..., n -му звену размерной цепи.

Аналогично этому

$$P(A_{\max}) = P(A_{\max_1}) P(A_{\max_2}) \dots P(A_{\max_n}). \quad (4.6.36)$$

Для приближенной оценки вероятности $P(A)$ можно принять, что:

1) $P(A_{\min}) = P(A_{\max})$,

2) $P(A_{\min_1}) = P(A_{\min_2}) = \dots = P(A_{\min_n})$,

3) «Типичное» звено размерной цепи может принимать такое число S дискретных значений, которое равно

$$S = \frac{\delta_r}{j},$$

где δ_T — допуск «типичного» звена, j — цена деления универсального измерительного инструмента, с помощью которого измеряются на производстве соответствующие размеры (обычно $j = \left(\frac{1}{8} \div \frac{1}{10}\right) \delta_T$).

Строго говоря, следовало бы считать число дискретных значений S равным $S = \frac{\delta_T}{j} + 1$, но при проведении упрощенного расчета мы считаем возможным приписать дискретные значения серединам участков, на которые разбивается допуск «типичного» звена, если каждый из участков полагать равным цене деления j измерительного инструмента.

В качестве «типичного» звена выбирают такое звено, для которого S оказывается наименьшим.

При этом допустимость применения для измерений размера звена измерительного инструмента с той или иной ценой деления поверяется по допускаемым ОСТ переходам за предельные размеры изделий при проверке их предельными калибрами.

Тогда, принимая распределение вероятностей отклонений конечного звена по закону равной вероятности, получим:

$$P(A_{\min} T) = P(A_{\max} T) = \frac{1}{S}. \quad (4.6.37)$$

На основании (4.6.34), (4.6.35), (4.6.36) и (4.6.37) получим:

$$P(A) = 2 [P(A T)]^n = 2 \left(\frac{1}{S}\right)^n. \quad (4.6.38)$$

Продолжая вычисления дальше и находя с применением комбинаторики вероятности совпадения предкрайних значений отклонений составляющих звеньев и т. д., получим распределение вероятностей отклонений конечного звена, подсчитанных по способу «максимума-минимума».

Задавшись теперь некоторым процентом риска не обеспечить взаимозаменяемость на сборке, найдем отклонения конечного звена, которыми можно пренебречь, сравнивая сумму вероятностей их получения с выбранным процентом риска.

Для упрощенной и вместе с тем приближенной ориентировки в выборе метода расчета можно ограничиться вероятностью получения крайних отклонений конечного звена, но сравнивать эту вероятность со значительно более низким процентом риска, чем это обычно принимается для расчетов. Например, можно принять, что если $P(A) < 0,003\%$, то следует предпочесть теоретико-вероятностный способ расчета.

Пример 4.6.7. Размерная цепь состоит из пяти положительных составляющих звеньев, выполняемых в производстве независимо одно от другого.

Звено с наибольшим абсолютным размером допуска имеет размер $60Ш_3 = 60_{-0,195}^{-0,095}$, с наименьшим абсолютным размером допуска $5С_3 = 5_{-0,25}$.

Требуется определить вероятность совпадения в собранном узле или всех минимальных размеров составляющих звеньев или всех максимальных их размеров и выбрать по ней метод расчета данной размерной цепи.

Для простоты принимаем:

1) Допуски всех составляющих звеньев равными по абсолютной величине тому допуску одного из составляющих звеньев, расчет по которому дает наибольшую вероятность совпадения крайних отклонений.

2) Отклонения размеров от наименьшего предельного размера примем дискретным и подчиняющимися закону равной вероятности, что также приводит в общем к наибольшей вероятности совпадения крайних отклонений.

Определим сначала допуск, дающий наибольшую вероятность совпадения крайних звеньев.

$$\text{Наибольший допуск } \delta_{\text{нб}} = -0,095 - (-0,195) = 0,100.$$

$$\text{Наименьший допуск } \delta_{\text{нм}} = 0 - (-0,025) = 0,025.$$

При допуске в 0,100 мы будем производить измерения с помощью микрометра с ценой деления 0,010 мм, что дает нам 10 дискретных отклонений размера от наименьшего предельного размера с интервалами между ними, равными 0,010 мм.

При допуске в 0,025 мм измерения будем производить с помощью микрометра с ценой деления 0,002 мм, что дает 12 дискретных отклонений размера от наименьшего предельного размера с интервалами между ними, равными 0,002 мм.

Так как при 10 дискретных отклонениях получается большая вероятность совпадения крайних отклонений, чем при 12 дискретных отклонениях, то допуск каждого из пяти составляющих звеньев размерной цепи принимаем равным 0,100 мм.

Исходим из применения для измерений микрометра с ценой деления 0,01 мм.

График распределения вероятностей дискретных отклонений размеров от наименьшего предельного размера, согласно сделанному нами допущению о наличии закона равной вероятности, будет иметь вид, показанный на черт. 60.

Так как всех дискретных значений $S = 10$ и вероятности получения каждого из них равны одна другой, то вероятность получения каждого из дискретных отклонений равна

$$P(x_i) = \frac{1}{S} = \frac{1}{10}.$$

Наименьшее отклонение $x_{\text{нм}}^{(K)}$ конечного звена может быть получено только при одной возможной комбинации: при минимальном отклонении размеров всех пяти составляющих звеньев, равном одной сотой миллиметра. Таким образом,

$$x_{\text{нм}}^{(K)} = 5 \cdot 1 = \text{пяти сотым долям миллиметра.}$$

Вероятность $P(A = 5)$ отклонения конечного звена, равного 0,05 мм, представляет собой вероятность совместного получения (совпадения) минимальных отклонений $x_{\text{нм}} = 0,01$ мм у всех пяти составляющих звеньев.

На основании правила умножения она равна:

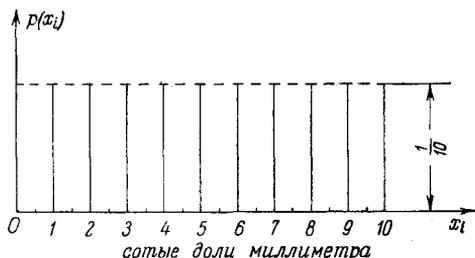
$$\begin{aligned} P(A = 5) &= P(\text{и } A_{\text{min } A} \text{ и } A_{\text{min } B} \text{ и } A_{\text{min } C} \text{ и } A_{\text{min } L} \text{ и } A_{\text{min } S}) = \\ &= \prod_{i=1}^5 P(A_{\text{min } i}) = \frac{1}{10^5} = 0,00001. \end{aligned}$$

Аналогично этому

$$x_{\text{нб}}^{(K)} = 5 \cdot 10 = 50 \quad \text{и} \quad P(A = 50) = 0,00001.$$

Вероятность совпадения или всех минимальных размеров составляющих звеньев, или всех максимальных их размеров на основании теоремы сложения равна:

$$P(\text{или } A_{\text{min}}, \text{ или } A_{\text{max}}) = P(A_{\text{min}} = 5) + P(A_{\text{max}} = 50) = 0,00002 = 0,002\%.$$



Черт. 60. График распределения вероятностей отклонений «типичного звена» от наименьшего предельного размера.

Допустимый процент риска принимается равным $0,0027\%$.

Полученная нами вероятность мала, так как $0,002\% < 0,0027\%$.

Отсюда делаем вывод о том, что в данном случае следует предпочесть теоретико-вероятностный метод.

Говоря более строго, теоретический риск не обеспечить взаимозаменяемость на сборке при применении теоретико-вероятностного метода расчета размерной цепи при определенных условиях вообще не зависит от числа звеньев цепи, а зависит от типов законов распределения их размеров; от числа звеньев же зависит соотношение между полученными при расчетах по одному и другому методам допусками размера конечного звена.

Пример 4.6.8. Рассмотрим три размерные цепи с числами составляющих звеньев: в первой равным 2, во второй 5 и в третьей 10.

Пусть законы распределения размеров всех составляющих звеньев будут нормальными с математическими ожиданиями, расположенными в серединах соответствующих полей допусков. Допуски δ равны 12 мм и средние квадратические σ равны 2 мм.

Требуется определить для каждой из цепей допуски δ_m и δ_r размера конечного звена соответственно по методу «максимума-минимума» и по теоретико-вероятностному методу, соотношение ψ между этими допусками и риск q не обеспечить взаимозаменяемость на сборке.

Цепь I. Примем ориентировочно, что число интервалов разбиения поля допуска при измерениях $S = 10$;

$$\delta_{m,2} = 12 + 12 = 2 \cdot 12 = 24 \text{ мм};$$

$$\delta_{r,2} = 2 \sqrt{6^2 + 6^2} = 2 \sqrt{2 \cdot 6^2} = 2 \sqrt{72} = 17 \text{ мм};$$

$$\psi_2 = \frac{\delta_{m,2}}{\delta_{r,2}} = \frac{24}{17} = \sqrt{2} = 1,41; \quad \bar{\delta}_{r,2} = \frac{\delta_{r,2}}{2} = \frac{17}{2} = 8,5 \text{ мм};$$

$$\sigma_{k,2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2 \cdot 2^2} = \sqrt{8} = 2,83;$$

$$q_2 = 1 - 2\Phi\left(\frac{\bar{\delta}_{r,2}}{\sigma_{k,2}}\right) = 1 - 2\Phi\left(\frac{8,5}{2,83}\right) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0,9973 = 0,0027 = 0,27\%;$$

$$P(A_2) = 2 \left(\frac{1}{S}\right)^2 = 2 \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{2}{10^2} = 0,02 = 2\%.$$

Цепь II.

$$\delta_{m,5} = 5 \cdot 12 = 60 \text{ мм}; \quad \delta_{r,5} = 2 \sqrt{5 \cdot 6^2} = 2 \sqrt{180} = 26,8 \text{ мм};$$

$$\psi_5 = \frac{60}{26,8} = \sqrt{5} = 2,24; \quad \bar{\delta}_{r,5} = \frac{26,8}{2} = 13,4 \text{ мм};$$

$$\sigma_{k,5} = \sqrt{5 \cdot 2^2} = \sqrt{20} = 4,47;$$

$$q_5 = 1 - 2\Phi\left(\frac{13,4}{4,47}\right) = 1 - 2\Phi(3) = 1 - 0,9973 = 0,0027 = 0,27\%;$$

$$P(A_5) = 2 \left(\frac{1}{10}\right)^5 = 0,00002 = 0,002\%.$$

Цепь III.

$$\delta_{m,10} = 10 \cdot 12 = 120; \quad \delta_{r,10} = 2 \sqrt{10 \cdot 6^2} = 2 \sqrt{360} = 38;$$

$$\psi_{10} = \frac{120}{38} = \sqrt{10} = 3,16; \quad \bar{\delta}_{r,10} = \frac{38}{2} = 19;$$

$$\sigma_{k,10} = \sqrt{10 \cdot 2^2} = \sqrt{40} = 6,32;$$

$$q_{10} = 1 - 2\Phi\left(\frac{19}{6,32}\right) = 1 - 2\Phi(3) = 1 - 0,9973 = 0,0027 = 0,27\%;$$

$$P(A_{10}) = 2 \left(\frac{1}{10}\right)^{10} = 0,000000002 = 0,00000002\%.$$

Обозначения в этом примере следующие:

$\delta_{м, 2}, \delta_{м, 5}, \delta_{м, 10}$ — допуски размера конечного звена, подсчитанные по методу «максимума-минимума», соответственно для цепей с числом составляющих звеньев 2, 5 и 10;

$\delta_{т, 2}, \delta_{т, 5}, \delta_{т, 10}$ — допуски размера конечного звена, подсчитанные по теоретико-вероятностному методу, для тех же цепей;

$\psi_2, \psi_5, \psi_{10}$ — отношения между предыдущими величинами;

$\bar{\delta}_{т, 2}, \bar{\delta}_{т, 5}, \bar{\delta}_{т, 10}$ — половины допусков;

$\sigma_{к, 2}, \sigma_{к, 5}, \sigma_{к, 10}$ — средние квадратические отклонения размеров конечного звена для тех же цепей;

q_2, q_5, q_{10} — риск не обеспечить взаимозаменяемость на сборке для тех же цепей при расчете их по теоретико-вероятностному методу.

Таким образом, для всех трех цепей риск q оказался одинаковым и равным 0,27%, отношения ψ между допусками составляющих звеньев, подсчитанными по методу «максимума-минимума» и по теоретико-вероятностному методу, оказались соответственно равными 1,41; 2,24 и 3,16.

ГЛАВА V

ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД И ПОЛУЧЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

§ 1. Основные понятия выборочного метода и задачи математической статистики

5.1.1. Общие понятия о выборке. Основной задачей математической статистики, как мы видели, является разработка методов получения научно обоснованных выводов о массовых явлениях и процессах из данных наблюдения или эксперимента. Эти выводы и заключения относятся не к отдельным испытаниям, из повторений которых складывается данное массовое явление, а представляют утверждения об общих вероятностных характеристиках данного процесса, т. е. о вероятностях, законах распределения, математических ожиданиях и т. д. Такое использование фактических данных как раз и является отличительной чертой статистического метода.

Пусть мы располагаем некоторым материалом (обычно довольно ограниченным), например, о числе дефектных изделий в изготовленной в определенных производственных условиях продукции или о результатах испытаний материала на разрушение и т. п. Собранные нами данные могут представлять непосредственный интерес в смысле информации о качестве той или иной продукции в той или иной конкретной партии, изготовленной в определенное время в определенном месте. Но статистические проблемы возникают обычно тогда, когда мы на основе той же информации пожелаем сделать выводы относительно более широкого круга явлений. Так, например, нас может интересовать качество не одной только наблюдаемой конкретной партии изделий, а среднее качество всех тех изделий, которые производятся или могут производиться при одних и тех же условиях: другими словами, мы хотим охарактеризовать качество самого технологического процесса, оценивая, скажем, вероятность получения при нем дефектного изделия, среднюю продолжительность службы изделия, те или иные характеристики распределения прочности и т. д. В этом последнем случае мы рассматриваем собранный материал не ради него самого, а лишь как некоторую пробную группу или выборку, представляющую только один из возможных результатов, которые мы могли бы встретить при наблюдениях массового процесса в данной обстановке. Разумеется, мы должны отдавать себе отчет в том, что выводы и оценки, основанные на ограниченном материале наблюдения, отражают случайный состав нашей пробной группы и потому должны считаться лишь приближенными оценками вероятностного характера. Теория указывает, однако, во многих случаях, как наилучшим способом использовать имеющуюся у нас информацию для получения по возможности более точных и надежных характеристик, указывая при этом и степень надежности наших выводов, объясняющуюся ограниченностью запаса сведений. Возможность такого рода оценок и придает нашим заключениям научную ценность.

В наиболее простом виде соотношения между данными выборки и вероятностными характеристиками процесса выступают в той схеме независимых испытаний, которую мы рассмотрели в 2. 4. 1.

Пусть имеется многочисленная совокупность однородных элементов (объектов), каждый из которых может обладать или не обладать каким-либо признаком; неизвестная нам доля тех из них, которые обладают этим признаком, и подлежит определению. Наше испытание заключается в том, что мы выбираем наугад один элемент из множества элементов, отмечаем, обладает или нет этот элемент данным признаком и возвращаем его обратно в совокупность. При выборе элемента из совокупности принимаются меры к тому, чтобы вероятность быть выбранным была одинакова для всех элементов. Тогда имеющееся множество элементов называется *генеральной совокупностью*. Группа из n элементов, наблюдаемых при повторных испытаниях, называется *случайной выборкой*, число отобранных элементов — *объемом выборки*, а описанный процесс отбора элементов — *простым случайным выбором*. Определив частоту признака среди отобранных в выборке объектов, мы можем по ней, опираясь на теорему Лапласа, приблизительно оценить долю признака в генеральной совокупности: в самом деле, эта доля в данных условиях играет роль неизменной вероятности появления объекта, обладающего интересующим нас признаком, при каждом из тиражей, а отклонения частоты от вероятности приблизительно следуют нормальному закону. При правильной организации отбора выборки мы должны обеспечить каждому объекту генеральной совокупности равную вероятность попадания в выборку.

На практике выбор из генеральной совокупности производится различными способами, в частности, выбор подразделяется на следующие разновидности:

1) *Выбор с возвратом или повторением*, или, иначе говоря, простой случайный выбор, о котором говорилось выше.

2) *Выбор без возврата или без повторения*, когда каждый отобранный индивидум перед выбором следующего индивидуума обратно в генеральную совокупность не возвращается.

Полученная выборка называется *репрезентативной (представительной)*, если она достаточно хорошо представляет пропорции генеральной совокупности.

Репрезентативность выборки обычно достигается *случайностью* выбора, когда каждому элементу обеспечивается равная со всеми остальными элементами вероятность попасть в выборку. Это в свою очередь обеспечивается тщательным перемешиванием (если это возможно) объектов генеральной совокупности перед отбором каждого объекта, использованием таблиц «случайных чисел»¹⁾, в которых числа расположены в случайном порядке, и другими специальными приемами.

Именно такая организация случайного процесса выборки, основанная на точном знании законов его протекания, дает существенный практический эффект, позволяя вместо сплошного обследования всех объектов генеральной совокупности ограничиться выборочным обследованием некоторой ее части.

Выбираемые образцы, конечно, могут подвергаться и более сложной классификации: по одному признаку мы можем различать несколько вариантов, можно классифицировать объекты по нескольким признакам одновременно и т. д.

Наконец, мы можем производить выбор из некоторой совокупности, объекты которой обладают количественным признаком, варьирующим от одного экземпляра к другому, таким, например, как размеры деталей в некоторой партии. Задачами выборки в этом случае могут являться оценка доли деталей, признак которых (скажем, размер) лежит в определенных границах, оценка среднего значения признака в партии, его дисперсии и т. д. В этих примерах выборка берется из определенной генеральной совокупности, которая каждый раз точно фиксируется и содержит конечное число объектов. Понятия вероятности, закона распределения и др. здесь играют вспомогательную роль, позволяя приблизительно определить нужные нам характеристики генеральной совокупности путем специально организованного процесса случайной выборки.

¹⁾ См., например, книгу В. И. Романовского, *Применение математической статистики в опытном деле*, Гостехиздат, М.—Л., 1947, гл. I.

В других случаях, когда исследуем массовое явление, в котором интересующие нас величины претерпевают случайные колебания, мы в большинстве случаев также располагаем лишь ограниченным материалом наблюдений; наши же выводы хотим отнести к всему протеканию процесса в целом при неизменных основных условиях, а не к той его части, которая попала в орбиту нашего наблюдения. Такая экстраполяция наших выводов может быть оправдана далеко не всегда. Мы рассмотрим здесь только те случаи, когда данные наблюдения можно уподобить рассмотренной выше случайной выборке из некоторой «генеральной» совокупности. К этим случаям, правда, нередко оказывается возможным отнести различные физические и производственные эксперименты, наблюдения за ходом работы станков, за протеканием различных технологических процессов. Особенность последних случаев заключается в том, что здесь обычно не представляется возможным точно наперед очертить объем «генеральной» совокупности.

5.1.2. Распределение выборки, ее характеристики и их распределения.

Рассмотрим исследование точности станка и приспособлений, связанное с величиной X отклонений размеров обрабатываемых деталей от номинала. Последовательность x_1, x_2, \dots, x_n наблюдаемых значений мы здесь будем рассматривать как некоторую «выборку», по которой мы хотим оценивать распределение вероятностей, размеров деталей в данных условиях, отвлекаясь от случайных обстоятельств, которые могли иметь место в процессе отбора пробных деталей из текущей продукции работающего станка. Обобщая использованную ранее терминологию, мы и здесь будем условно говорить о «выборке» из «генеральной совокупности» размеров деталей. Это будет означать, что в каждом случае отбора мы наблюдаем значение некоторой величины X , следующей определенному закону распределения. Мы предполагаем, следовательно, что основные условия, в которых протекает процесс изготовления деталей, остаются неизменными, а вероятностные законы, регулирующие поведение величины, также сохраняют свою силу неопределенно долго. Так понимаемая генеральная совокупность имеет, конечно, вполне определенный и реальный смысл, хотя и иной, чем это было в разобранных ранее примерах выборки из конечной совокупности. Последовательность наблюдаемых значений x_1, x_2, \dots, x_n есть совокупность значений, принятых n одинаково распределенными независимыми величинами X_1, X_2, \dots, X_n (представляющими n экземпляров одной и той же величины X , с которыми мы встречаемся в последовательных и независимых наблюдениях).

Если величина X следует закону распределения $F(x)$, то мы будем говорить, что *распределение «генеральной совокупности»* следует закону $F(x)$.

Пусть x — некоторая точка оси x ; обозначим через n_x число выборочных значений, расположенных левее x на той же оси; следовательно, $\frac{n_x}{n}$ представляет частоту наблюдаемых в выборке значений нашей случайной величины X , меньших x . Эта частота, очевидно, является функцией от x . Мы обозначим ее $\bar{F}_n(x)$ и назовем *функцией распределения выборки* или *эмпирической функцией распределения*. Таким образом,

$$\bar{F}_n(x) = \frac{n_x}{n}. \quad (5.1.1)$$

$\bar{F}_n(x)$ является оценкой вероятности неравенства $X < x$, т. е. теоретической функции распределения $F(x) = P(X < x)$ величины X или, иными словами, *функции распределения генеральной совокупности*.

Исследуя $\bar{F}_n(x)$, мы по ней можем приближенно оценивать функцию $F(x)$, так же как по частоте в выборке мы оцениваем вероятность события.

Формально функция $\bar{F}_n(x)$ обладает всеми свойствами функции распределения; значения ее, однако, дают не вероятности, а частоты неравенства $X < x$ в данной выборке. Для x , меньших (и равных) минимального члена выборки,

$$\bar{F}_n(x) = 0,$$

а для x , больших максимального члена выборки,

$$\bar{F}_n(x) = 1.$$

Если мы расположим члены выборки в порядке возрастания их величины, то в промежутке между двумя соседними членами $\bar{F}_n(x)$ сохраняет постоянное значение, равное целому кратному $\frac{1}{n}$ (т. е. дроби вида $\frac{k}{n}$). При переходе через точки оси x , отвечающие членам выборки, $\bar{F}_n(x)$ претерпевает разрыв, скачком изменяясь от одного своего значения к другому.

Заметим, что распределение это зависит лишь от положения выборочных значений на оси x , а не от порядка их в выборке так, что две выборки с одинаковым составом членов, но с разным их порядком будут иметь одну и ту же функцию распределения $\bar{F}_n(x)$.

Для распределения выборки можно вычислить все характеристики положения центра группирования, характеристики рассеивания, асимметрию, эксцесс и т. п. Эти характеристики будут *эмпирическими* или *выборочными характеристиками*, полученными из наблюдений. Так как $\bar{F}_n(x)$ мы считаем оценкой по выборке функции $F(x)$ генеральной совокупности, то естественно считать выборочные характеристики оценками соответствующих характеристик $F(x)$. Так, например, *среднее значение (среднюю арифметическую) выборки*

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

мы будем считать оценкой математического ожидания MX величины X .

Аналогично этому *медиану выборочного* распределения можно считать оценкой теоретической медианы и т. д. Конечно, эти выборочные характеристики будут отличаться от соответствующих характеристик случайной величины X , которые представляют *теоретические или генеральные характеристики*. Определение точности и надежности оценок будет рассматриваться нами далее.

Введенные определения непосредственно распространяются также на выборки из многомерных генеральных совокупностей, т. е. таких, в которых случайная величина является многомерной, имеющей больше одного измерения. Такими многомерными величинами будут, например, обработанные на станке детали с несколькими регистрируемыми размерами (диаметр, длина, высота микронеровностей и т. п.).

Значения x_1, x_2, \dots, x_n , наблюдаемые в фактически осуществленной выборке, образуют наблюдаемое «значение» n -мерной случайной величины (X_1, X_2, \dots, X_n) , где каждая величина X_i представляет как бы один из экземпляров величины X , с которым мы встречаемся в i -м по порядку наблюдении.

Таким образом, мы рассматриваем выборку как испытание, в котором реализуется значение сложной величины (X_1, X_2, \dots, X_n) . Повторяя выборки, мы, естественно, будем получать различные значения этой величины, распределение которой следует определенным (хотя иногда нам и не известным) вероятностным законам.

Каждую характеристику, получаемую нами на основании данных выборки, также следует рассматривать как значение некоторой случайной величины, варьирующей от выборки к выборке. Так, например, вычисляя среднюю арифметическую из наблюдаемых данных, мы получаем характеристику

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Если наблюдаемые значения x_1, x_2, \dots, x_n рассматривать как реализованные значения величин X_1, X_2, \dots, X_n , то величина \bar{x} будет являться реализовавшимся в выборке значением величины

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

В теоретических рассуждениях мы будем чаще всего говорить о средней арифметической \bar{x} именно как о случайной величине \bar{X} (не прибегая к специальному обозначению для подчеркивания этого обстоятельства). Аналогичное замечание относится и ко всем другим выборочным характеристикам: в дальнейшем они будут по преимуществу рассматриваться как случайные величины, а не как конкретные значения этих величин, полученные в данной выборке.

Распределение каждой величины X_i определяется одной и той же функцией $F(x)$. А так как величины X_1, X_2, \dots, X_n считаются независимыми, то закон распределения многомерной случайной величины

$$(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

полностью определяется этой же функцией. Для каждой системы чисел x_1, x_2, \dots, x_n мы имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1 < x_1; X_2 < x_2; \dots; X_n < x_n) &= \mathbf{P}(X_1 < x_1) \mathbf{P}(X_2 < x_2) \dots \mathbf{P}(X_n < x_n) = \\ &= F(x_1) \cdot F(x_2) \dots F(x_n). \end{aligned}$$

Таким образом, любая выборочная характеристика как функция величин X_1, X_2, \dots, X_n представляет случайную величину с законом распределения, однозначно определяемым функцией распределения $F(x)$.

Изучение законов распределения выборочных характеристик составляет существенную задачу математической статистики потому, что только на основании этого изучения можно охарактеризовать точность и надежность оценки генеральной совокупности по данным выборки.

5.1.3. Задача получения статистических оценок распределения. Итак, *первая задача*, которая подлежит решению с помощью математической статистики, заключается в получении *статистических оценок законов распределения и их характеристик*. Заметим, что в статистической литературе один и тот же термин «оценка» употребляется как для процесса получения оценки некоторой величины, так и для результата этого процесса.

Простейшим примером оценки может служить частость некоторого события A , используемая в качестве приближенного значения вероятности $\mathbf{P}(A)$. В качестве другого, более сложного примера можно привести задачу из теории ошибок по отысканию «истинного значения» нескольких неизвестных физических констант, входящих в формулу, по результатам произведенных наблюдений. В обоих случаях, помимо самих оценок, требуется еще указать *точность полученных оценок при определенном уровне надежности*.

Точность и надежность произведенной оценки характеризуются вероятностью того, что действительное отклонение найденного нами приближения от оцениваемой «истинной» величины не превзойдет заданного предела. Так, например, если принять уровень надежности 0,9973 и предположить, что отклонение оценки от истинной величины следует нормальному закону $N(z; 0, \sigma)$, то точность оценки будет характеризоваться верхней границей отклонений, равной 3σ .

Таким образом, точность и надежность оценки неразрывно между собой связаны, и мы можем сравнивать точности двух различных оценок только при одинаковой их надежности.

Если нам дана выборка наблюдаемых значений и по ним требуется получить оценки для параметров генерального распределения и определить точности этих оценок, то существует бесчисленное множество возможных решений, так как

может быть предложено бесчисленное множество различных функций от выборочных значений, могущих быть использованными в качестве оценок.

Поэтому важно не только уметь находить оценки, но и сравнивать их свойства в целях получения оценок максимально возможной точности при данном уровне надежности. Этому вопросу в основном и посвящена настоящая глава.

Второй задачей, решаемой с помощью математической статистики, которая будет подробнее рассмотрена в главе VI, является *статистическая проверка гипотез*.

§ 2. Распределение выборки и его характеристики

5.2.1. Вариационный ряд (упорядоченная выборка). Размах варьирования (широта распределения). На практике при проведении всякого статистического исследования приходится иметь дело с *совокупностями объектов*. Обычно нас интересуют определенные признаки объектов, чаще всего могущие получать количественное выражение в некоторых единицах. Приведем пример.

Пример 5.2.1. 12 марта 1951 г. была взята «проба» из продукции горизонтально-ковочной машины в количестве 20 штук, т. е. были отобраны последовательно отштампованные на этой машине штамповки внутренних колец шарикоподшипников. Взятые кольца были охлаждены до температуры помещения, после чего была измерена их высота, которая оказалась следующей (табл. 5.2.1):

Таблица 5.2.1

№ колец в порядке обработки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Высота в мм	32,17	32,61	32,68	32,29	32,36	32,25	32,28	31,74	32,46	32,48
№ колец в порядке обработки	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Высота в мм	31,70	32,30	31,73	32,28	31,60	32,47	32,74	32,26	32,92	32,63

Кольца, отштампованные на одной машине в одном и том же штампе с одной наладки машины, представляют однородные индивидуумы, обладающие качественной общностью.

Интересующим нас качественным признаком является в данном случае высота кольца. При ближайшем рассмотрении данных наблюдения мы замечаем, что высота последовательно обработанных колец меняется от кольца к кольцу, т. е. является варьирующим признаком.

Расположим теперь нашу пробу в порядке возрастания значений варьирующего признака (табл. 5.2.2).

Таблица 5.2.2

№ колец в порядке возрастания высоты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Высота в мм	31,60	31,70	31,73	31,74	32,17	32,25	32,26	32,28	32,28	32,29
№ колец в порядке возрастания высоты	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Высота в мм	32,30	32,36	32,46	32,47	32,48	32,61	32,63	32,68	32,74	32,92

В таком расположении рассматриваемая проба представляет *вариационный ряд, т. е. ряд данных, расположенных в порядке возрастания значений варьирующего признака*. Вариационный ряд называют еще «упорядоченной выборкой».

Проба составляет лишь небольшую часть всех колец данного типо-размера, так как за смену их штампуются около 2500, а численность партии, подряд штампующей на одной машине, достигает нескольких десятков тысяч.

Беря пробу, мы обычно интересуемся не теми несколькими деталями, которые в нее попадут, а хотим иметь суждение о всей продукции данного станка, представляющей для нас *генеральную совокупность*. Таким образом, взятая нами проба представляет частный случай *выборочной совокупности, или выборки*.

При рассмотрении всякой статистической совокупности нас обычно интересует *доля* тех или иных индивидуумов в ней.

Так, например, нас может интересовать доля в пробе штамповок с размерами, лежащими в некоторых границах.

Доля колец с размерами, лежащими в границах от 31 до 32 мм, в вышеупомянутой выборке, как нетрудно видеть из приведенного вариационного ряда, составляет

$$W(31 < X < 32) = \frac{4}{20} = 0,2.$$

Таким образом, *доля* или *частота* объектов с определенным признаком представляет отношение числа таких объектов к объему совокупности, т. е. определяется соотношением (2.1.1).

В 5.1.2 мы указывали на удобство рассмотрения генеральной совокупности, как состоящей не из объектов, а из значений случайной величины X с функцией распределения $F(x)$, например из значений высоты кольца в продукции горизонтально-ковочной машины.

Тогда выборка будет также состоять из попавших в нее значений случайной величины X .

Функция распределения выборки определится соотношением (5.1.1).

В нашем примере с кольцами эта функция будет принимать такие значения:

$$\bar{F}_{20}(31) = 0; \quad \bar{F}_{20}(32) = \frac{4}{20} = 0,2;$$

$$\bar{F}_{20}(32,5) = \frac{15}{20} = 0,75 \text{ и т. д.}$$

Эмпирическая функция распределения может быть задана таблицей частостей вида (табл. 5.2.3):

Таблица 5.2.3

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n	
$W(x_i)$	$W(x_1)$	$W(x_2)$	$W(x_3)$...	$W(x_n)$	$\sum_{i=1}^n W(x_i) = 1$

Очевидно, что поскольку частота некоторого i -го значения величины X в выборке представляет долю этого значения в ней, то сумма частостей всех значений, т. е. всех долей целого, всегда равна единице.

Для вышеприведенного случая с кольцами такая таблица имеет вид (табл. 5.2.4):

Таблица 5.2.4

X	31,60	31,70	31,73	31,74	32,17	32,25	32,26	32,28	32,29	32,30	
$W(x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$							
X	32,36	32,46	32,47	32,48	32,61	32,63	32,68	32,74	32,92	Σ	
$W(x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{20}{20} = 1$									

Разность между экстремальными или крайними (наибольшим и наименьшим) значениями в выборке называется *размахом варьирования* или *широтой распределения* выборки. Размах варьирования R , следовательно, определяется соотношением

$$R = x_{\text{нб}} - x_{\text{нм}}. \quad (5.2.1)$$

В нашем примере размах варьирования равен

$$R = 32,92 - 31,60 = 1,32 \text{ мм.}$$

5.2.2. Группировка значений выборки. При большом объеме n выборки и при большом числе различных значений величины X , встречающихся в выборке, приходится иногда прибегать к разбивке распределения на интервалы (разряды) значений и затем рассматривать не отдельные значения, а эти интервалы (разряды).

Число таких интервалов при объеме выборки, превышающем 200—300 штук, рекомендуется брать в пределах от 10 до 20.

При предполагаемом нормальном распределении часто берут число интервалов (разрядов), равное 12.

Пример 5.2.2. Был произведен выбор 200 штук деталей (валиков) из текущей продукции прецизионного токарного автомата. Диаметры валиков были измерены с помощью миниметра с ценой деления в 1 микрон, причем округления производились до $\frac{1}{2}$ цены деления. В протоколе измерений отмечались отклонения от номинального размера.

Протокол измерений деталей имел следующий вид (табл. 5.2.5):

Таблица 5.2.5

Протокол измерения деталей
(отклонения в микронах)

№ детали	Отклоне- ние												
1	+ 1,0	11	+ 2,0	21	+ 4,5	31	+14,0	41	+19,0	51	+19,5	61	+ 7,5
2	+ 1,5	12	+ 3,0	22	+ 3,5	32	+11,0	42	+23,5	52	+22,0	62	+ 8,5
3	- 2,5	13	+11,0	23	+ 9,5	33	+11,0	43	+22,0	53	+13,5	63	+ 6,5
4	0,0	14	- 1,0	24	+12,0	34	+13,0	44	+18,5	54	+18,5	64	+ 8,5
5	- 1,5	15	+ 5,0	25	+ 7,5	35	+16,0	45	+19,5	55	+21,5	65	+ 5,5
6	+ 1,0	16	+ 4,5	26	+ 7,5	36	+14,5	46	+17,5	56	+30,5	66	+26,0
7	+ 1,0	17	+ 0,5	27	+10,0	37	+19,0	47	+18,0	57	+21,0	67	+12,5
8	+15,0	18	+ 3,5	28	+ 8,5	38	+14,0	48	+19,5	58	+13,5	68	+ 6,5
9	- 1,0	19	+ 8,0	29	+10,0	39	+18,0	49	+17,5	59	+11,5	69	+ 8,5
10	+ 2,0	20	+ 5,0	30	+11,0	40	+19,0	50	+25,5	60	+10,0	70	+ 7,5
												71	+ 2,5
												72	+ 7,0
												73	+ 4,5
												74	- 0,5
												75	+ 4,0
												76	+ 5,5
												77	+ 1,0
												78	+ 4,0
												79	+ 6,5
												80	+ 5,0

№ детали	Отклоне- ние														
81	+ 4,5	96	-12,5	111	- 8,5	126	-15,0	141	+21,0	156	+ 4,5	171	+ 1,0	186	- 9,5
82	+ 5,0	97	+ 8,5	112	- 3,5	127	- 3,0	142	+10,5	157	- 1,0	172	+25,0	187	- 8,0
83	+ 7,5	98	+12,0	113	-11,5	128	- 8,0	143	+ 5,0	158	+11,0	173	+ 0,5	188	- 4,5
84	+ 5,0	99	+ 6,0	114	-11,5	129	- 1,0	144	+ 0,5	159	+ 4,0	174	+ 3,0	189	+ 7,5
85	+15,5	100	+ 8,5	115	- 7,5	130	- 6,5	145	+ 4,0	160	+ 9,0	175	- 4,5	190	- 4,0
86	+ 6,0	101	0,0	116	-11,5	131	- 8,0	146	+ 0,0	161	+ 4,5	176	+ 6,0	191	- 9,0
87	+ 6,5	102	+ 7,0	117	- 6,5	132	-13,5	147	+ 0,5	162	+11,5	177	+ 9,5	192	- 9,0
88	- 3,0	103	- 1,0	118	+ 2,0	133	-12,0	148	+ 0,5	163	+14,0	178	+12,5	193	+ 2,0
89	+ 5,0	104	- 3,0	119	-11,0	134	-17,0	149	+ 9,0	164	+10,0	179	+19,0	194	- 0,5
90	+ 3,5	105	+ 0,5	120	-17,5	135	-10,5	150	+ 2,5	165	+20,0	180	+13,0	195	+ 3,5
91	- 3,0	106	0,0	121	-15,0	136	+14,5	151	+ 2,0	166	+13,0	181	+ 1,5	196	+10,5
92	-14,0	107	- 2,0	122	-15,5	137	+10,0	152	+ 7,0	167	+ 7,0	182	+ 0,5	197	- 5,5
93	+17,0	108	- 4,5	123	+ 1,5	138	+ 9,5	153	+ 7,5	168	+12,0	183	+12,0	198	- 6,0
94	- 9,0	109	+ 2,0	124	-18,0	139	+ 7,0	154	+ 3,5	169	+ 7,5	184	+ 4,0	199	- 6,5
95	-13,0	110	-10,0	125	-20,0	140	+ 0,5	155	+ 7,0	170	+ 2,0	185	+ 6,5	200	- 8,0

Если подробно просмотреть протокол измерений, то можно обнаружить, что в нем встречается 78 различных значений отклонения от номинального размера, наименьшее из которых составляет -20 , а наибольшее $+30,5$ мк. Соответствующая этому протоколу таблица частотей была бы слишком громоздкой. Поэтому ширина распределения R (размах варьирования) выборки была разбита на $l=10$ одинаковых интервалов (разрядов). Ширина каждого интервала (разряда), следовательно, была равна

$$\Delta x = \frac{R}{l} = \frac{30,5 - (-20)}{10} = \frac{50,5}{10} = 5,05 \approx 5.$$

Распределение отклонений по интервалам было произведено следующим образом.

Были последовательно выписаны интервалы в порядке возрастания отклонений. Для каждого интервала были указаны границы таким образом, чтобы они не перекрывались. Например, первый интервал включал отклонения от -20 до -15 , второй интервал от -15 до -10 и т. д.

Затем каждое наблюдаемое отклонение, начиная с 1-го до 200-го, было занесено в таблицу подсчета частот (т. е. чисел наблюдений) по интервалам в виде одной вертикальной черточки в строке, предназначенной для соответствующего интервала (табл. 5.2.6).

В такую таблицу вместо графы (2) «Границы интервалов» иногда включают графу «начало (представитель) интервала (разряда)». В этом случае в графе (2) стояли бы обозначения $-20-$, $-15-$, $-10-$, $-5-$, $0-$, $5-$ и т. д.

Смысл этих обозначений тот же, что и обозначений «от -20 до -15 », «от -15 до -10 », «от -10 до -5 » и т. д.

Записи в таблице подсчета частот делались следующим образом.

Первая по порядку деталь в протоколе измерений имеет отклонение $+1,0$, поэтому первая вертикальная черточка ставится в строке пятого интервала, который включает отклонения от 0 до 5. Вторая деталь имеет отклонение $+1,5$, поэтому вторая черточка ставится также в строке пятого интервала, третья $-2,5$, так что третья черточка ставится в четвертом интервале, четвертая деталь 0,0, так что четвертая черточка — в четвертом интервале (но не в пятом) и т. д. Сумма

Таблица 5.2.6

№ интервалов	Границы интервалов (разрядов)	Подсчет частот	Частота k_j в интервале	Середина интервала x_j
1	2	3	4	5
1	от -20 до -15	= 7	7	-17,5
2	от -15 до -10	= 11	11	-12,5
3	от -10 до -5	= 15	15	-7,5
4	от -5 до -0	= 24	24	-2,5
5	от 0 до +5	= 49	49	+2,5
6	от 5 до 10	= 41	41	+7,5
7	от 10 до 15	= 26	26	+12,5
8	от 15 до 20	= 17	17	+17,5
9	от 20 до 25	= 7	7	+22,5
10	от 25 до 30	= 3	3	+27,5
Итого			200	

Примечание. Единственный размер $-30,5$ отнесен условно к интервалу 10. черточек, оказавшихся в данном интервале по окончании «распределения» по интервалам всех деталей выборки, является частотой в данном интервале.

Иногда вместо вертикальных черточек в таблице подсчета частот по интервалам ставятся точки и черточки в виде:



совокупность четырех точек и шести черточек в данном случае соответствует десяти значениям, оказавшимся в данном интервале. Каждому интервалу естественно приписать значение, соответствующее его середине.

Таким образом, в нашем примере получается следующая таблица частостей (табл. 5.2.7).

Таблица 5.2.7

Граница	от -20 до -15	от -15 до -10	от -10 до -5	от -5 до 0	от 0 до 5	от 5 до 10	от 10 до 15	от 15 до 20	от 20 до 25	от 25 до 30	Σ
Середина интервала	-17,5	-12,5	-7,5	-2,5	+2,5	+7,5	+12,5	+17,5	+22,5	+27,5	
Частота	7	11	15	24	49	41	26	17	7	3	200
Частость	0,035	0,055	0,075	0,120	0,245	0,205	0,130	0,085	0,035	0,015	1,000

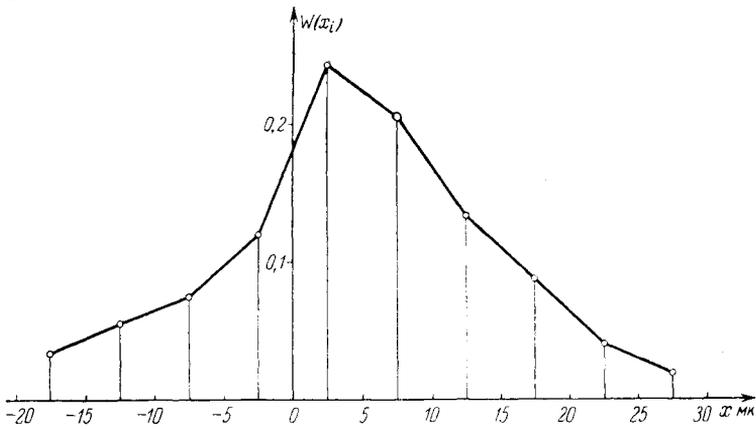
Очевидно, что разбивка на интервалы, облегчая исследование распределения, вместе с тем делает более грубыми все последующие выкладки, причем выкладки тем грубее, чем меньшее число интервалов выбрано по сравнению с числом различных значений в протоколе измерений (см. 5.2.11).

5.2.3. Графики статистических распределений: полигон, гистограмма, ступенчатая кривая. Для наглядности выборочное распределение изображают графически несколькими различными способами.

Наиболее распространенными графиками выборочных распределений являются следующие три: 1) полигон, 2) гистограмма, 3) ступенчатая кривая.

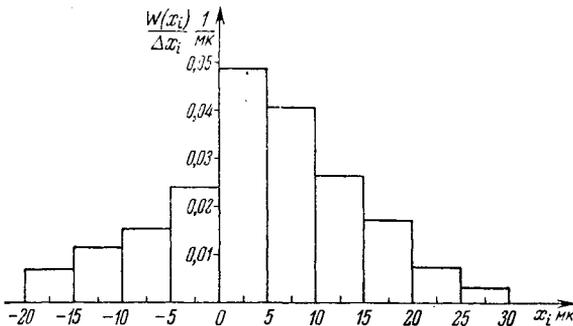
Полигон строится следующим образом: на оси абсцисс откладываются интервалы значений величины X , в серединах интервалов строятся ординаты, пропорциональные частотам или частостям, и концы ординат соединяются отрезками прямой.

На черт. 61 показан полигон распределения, описанного в примере 5.2.2.



Черт. 61. Полигон распределения валиков по наружным диаметрам в выборке объема 200 штук.

Гистограмма получается так: над каждым отрезком оси абсцисс, изображающим интервал значений X , строится прямоугольник, площадь которого пропорциональна частоте или частоте в данном интервале. Если ширина всех интервалов постоянна (что обычно и бывает), то высоты прямоугольников пропорциональны также частостям или частотам.



Черт. 62. Гистограмма распределения валиков по диаметрам в выборке объема 200 штук.

На чертеже 62 показана гистограмма распределения, описанного в примере 5.2.2.

Ступенчатая кривая

строится следующим образом: над каждым отрезком оси абсцисс, изображающим расстояние между серединами интервалов значений X , проводится отрезок горизонтальной прямой

на высоте, пропорциональной *накопленной частоте* или *накопленной частоте* в данном интервале. Концы отрезков соединяются вертикальными прямыми.

Накопленной частотой в данном интервале называется сумма всех частостей, начиная с первого интервала до данного интервала включительно. Так,

в примере 5.2.2 в первом интервале накопленная частота равна 0,035; во втором — 0,090; в третьем — 0,165 и т. д. Аналогичный смысл имеет *накопленная частота*.

На черт. 63 показана ступенчатая кривая распределения, описанного в примере 5.2.2. Ступенчатая кривая, построенная для выборочного распределения, не разбитого на интервалы, представляет вместе с тем график эмпирической функции распределения. Вид подобного графика выборочного распределения существенно зависит от выбранного способа группировки наблюдений.

5.2.4. Характеристики центра группирования и рассеивания выборки. Остановимся теперь на характеристиках выборки.

Как уже указывалось в 5.1.2, каждой *теоретической* (вероятностной) числовой характеристике может быть поставлена в соответствие аналогичная, иногда имеющая такое же название и всегда имеющая точно такую же структуру *эмпирическая* (статистическая) характеристика.

При проведении статистических исследований истинными или теоретическими характеристиками являются

характеристики генеральной совокупности, интерпретируемые как характеристики случайной величины X , а эмпирическими характеристиками служат характеристики выборки, вычисленные по наблюдаемым значениям этой величины.

Таким образом, эмпирические числовые характеристики случайных величин подобно теоретическим характеристикам можно подразделить на:

- 1) характеристики положения центра группирования и
- 2) характеристики рассеивания.

В 3.3.1 указывалось, что в технике наиболее часто употребляются следующие числовые характеристики положения центра группирования:

1) *среднее значение*, называемое, когда речь идет о выборке, т. е. эмпирическом распределении, *средней арифметической* и обозначаемое в этом случае \bar{x} ,

2) *медиана*, которую в случае эмпирического распределения мы будем обозначать через m_e ,

3) *мода*, которую мы в этом случае будем обозначать через m_o .

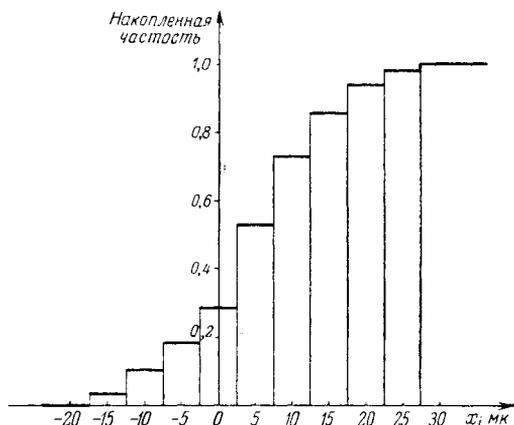
Средняя арифметическая \bar{x} выборки определяется уже приводившимся в главе III соотношением

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (5.2.2)$$

где x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — все наблюдаемые значения случайной величины X , вошедшие в выборку объема n .

Это основное соотношение редко применяется на практике. Вместо него при больших n применяются другие более удобные для вычислений формулы, о которых будет сказано в дальнейшем.

Медиана m_e выборки на практике чаще всего используется тогда, когда объем n выборки невелик и представляет нечетное число. В этом случае, составив



Черт. 63. Ступенчатая кривая распределения валиков по диаметрам в выборке объема 200 штук.

вариационный ряд, за медиану принимают то значение величины X , которое оказалось посредине распределения.

Если n четное, то за медиану принимают среднюю арифметическую из двух значений, лежащих в середине распределения.

Пример 5.2.3. Пусть требуется найти медиану выборки по условиям примера 5.2.1. Обратившись к вариационному ряду, находим, что десятый и одиннадцатый члены, лежащие в середине, равны 32,29 и 32,30. Таким образом,

$$m_e = \frac{32,29 + 32,30}{2} = 32,295 \text{ мм.}$$

Мода m_o выборки представляет значение, имеющее наибольшую частоту или частость.

Пример 5.2.4. Пусть требуется найти моду выборки по условиям примера 5.2.2. По таблице частостей обнаруживаем, что наибольшую частоту и частость имеет значение, равное $+2,5$. Следовательно, $m_o = 2,5$ *мк*.

Наиболее употребительными эмпирическими характеристиками рассеивания являются:

- 1) *дисперсия*, обозначаемая через s^2 ,
- 2) *среднее квадратическое отклонение*, или *стандарт*, обозначаемое через s ,
- 3) *коэффициент вариации* $v = \frac{s}{\bar{x}}$. (5.2.3)

Кроме того, на практике в качестве характеристики рассеивания используют еще *размах варьирования* R и положения крайних (экстремальных) членов выборки.

Крайние члены $x_{\text{нм}}$ и $x_{\text{нб}}$ берутся непосредственно из вариационного ряда и никаких вычислений не требуют. Так, в примере 5.2.1 крайними членами являются значения 31,60 и 32,92 *мм*, а в примере 5.2.2 — значения —20 и $+30,5$ *мк*.

Размах варьирования, как мы уже видели в примере 5.2.2, очень просто вычисляется по соотношению (5.2.1).

Некоторые затруднения представляет вычисление дисперсии s^2 , представляющей центральный момент второго порядка:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}. \quad (5.2.4)$$

5.2.5. Статистические (эмпирические) моменты и их упрощенные вычисления. Так как на практике часто приходится вычислять первые четыре момента эмпирического распределения, по которым в свою очередь легко определяются средняя арифметическая, дисперсия, асимметрия и эксцесс эмпирического распределения (выборки), то мы теперь непосредственно и перейдем к рациональным методам вычисления моментов.

Статистические (эмпирические) моменты выборки по своей структуре полностью отвечают теоретическим моментам распределения, описанным в 3.6.1.

Обычный момент r -го порядка b_r выборки определяется соотношением

$$b_r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - c)^r}{n}, \quad (5.2.5)$$

где x_i — то же, что в соотношении (5.2.2), а c — начальное значение или «ложный нуль» — произвольное число, выбираемое наиболее близким к предполагаемому среднему арифметическому \bar{x} в целях упрощения вычислений.

Начальным моментом r -го порядка a_r будем называть обычный момент того же порядка при начальном значении («ложном нуле») $c = 0$. Таким образом:

$$a_r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^r}{n}, \quad (5.2.6)$$

где обозначения те же, что в соотношении (5.2.5).

Центральный момент r -го порядка m_r определяется соотношением

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^r}{n}, \quad (5.2.7)$$

где x_i — то же, что в соотношении (5.2.5), \bar{x} — средняя арифметическая.

Моменты выборки связаны с характеристиками выборки и между собой соотношениями, вполне аналогичными тем, которыми связаны теоретические моменты (см. 3.6.1). В частности, по аналогии с соотношениями (3.6.4) и (3.6.5) имеют место тождества

$$\bar{x} = a_1, \quad (5.2.8)$$

$$s^2 = m_2. \quad (5.2.9)$$

К эмпирическим моментам в силу их одинаковой с теоретическими моментами структуры соответственно применимы также соотношения, полученные из теорем о математических ожиданиях и дисперсиях. Последнее обстоятельство широко используется для упрощения вычислений моментов. Эти упрощения идут в двух направлениях:

во-первых, переносят начало отсчета, выбирая начальное значение c таким образом, чтобы свести к минимуму числа, которыми приходится оперировать;

во-вторых, при разбивке большого выборочного распределения на интервалы значения середин интервалов x_j выражают в долях ширины интервала (шага разбиения) Δx , тем самым сводя эти значения к значениям u_j , представляющим целые числа $\dots -2, -1, 0, +1, +2, \dots$

5.2.6. Вычисление статистических моментов с помощью произвольного начального значения («ложного нуля»). Из соотношений (5.2.2) и (5.2.5) имеем:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + c - c = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - c)}{n} + c = b_1 + c;$$

окончательно

$$\bar{x} = b_1 + c, \quad (5.2.10)$$

откуда

$$b_1 = \bar{x} - c. \quad (5.2.11)$$

Из соотношений (5.2.4) и (5.2.6) получаем:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + \bar{x}^2 = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = a_2 - a_1^2; \end{aligned}$$

окончательно

$$s^2 = a_2 - a_1^2. \quad (5.2.12)$$

С другой стороны, используя (5.2.11), имеем:

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - c + c - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - c) - (\bar{x} - c)]^2}{n} = \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - c)^2 - 2(x_i - c)(\bar{x} - c) + (\bar{x} - c)^2]}{n} = \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - c)^2}{n} - 2(\bar{x} - c) \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - c)}{n} + (\bar{x} - c)^2 = \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - c)^2}{n} - 2(\bar{x} - c)^2 + (\bar{x} - c)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - c)^2}{n} - (\bar{x} - c)^2 = b_2 - b_1^2;
 \end{aligned}$$

окончательно

$$s^2 = b_2 - b_1^2. \quad (5.2.13)$$

Таким образом, дисперсия не зависит от выбранного начала отсчета.

Эти результаты можно было бы получить также, применяя теоремы (3.3.12), (3.3.15), (3.4.15) и (3.4.16) о математических ожиданиях и дисперсиях.

Заметим еще, что

$$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0;$$

окончательно

$$m_1 = 0. \quad (5.2.14)$$

Покажем на простом примере пользу данного упрощения.

Пример 5.2.5. Пусть требуется вычислить среднюю арифметическую выборки, описанной в примере 5.2.1.

При вычислении по формуле (5.2.2) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{1}{20} (31,60 + 31,70 + 31,73 + 31,74 + 32,17 + 32,25 + 32,26 + 32,28 + \\
 &+ 32,28 + 32,29 + 32,30 + 32,36 + 32,46 + 32,47 + 32,48 + 32,61 + 32,63 + \\
 &+ 32,68 + 32,74 + 32,92) = \frac{1}{20} \cdot 645,95 = 32,298 \text{ мм.}
 \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь формулой (5.2.10).

Выберем c , стремясь его приблизить к ожидаемой средней арифметической. Такому условию отвечает медиана m_e , которая в данном случае равна

$$m_e = \frac{32,29 + 32,30}{2} = 32,295 \text{ мм.}$$

Округлив, примем:

$$c = 32,30 \text{ мм.}$$

Тогда по формуле (5.2.10), учитывая (5.2.5), получим:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{1}{20} (-0,70 - 0,60 - 0,57 - 0,56 - 0,13 - 0,05 - 0,04 - 0,02 - 0,02 - 0,01 + 0 + \\
 &+ 0,06 + 0,16 + 0,17 + 0,18 + 0,31 + 0,33 + 0,38 + 0,44 + 0,62) + 32,300 = \\
 &= \frac{1}{20} (2,65 - 2,70) + 32,300 = 32,300 - \frac{0,05}{20} = 32,300 - 0,0025 = 32,298 \text{ мм.}
 \end{aligned}$$

Таким образом, при вычислениях по формуле (5.2.10) нам пришлось оперировать малыми числами (—0,70; —0,60 и т. д.), а не большими (31,60; 31,70 и т. д.), как это было при пользовании формулой (5.2.2).

Формулы (5.2.10) и (5.2.13) приводят к наиболее простым выкладкам при вычислениях средней арифметической и дисперсии малой выборки ($n \leq 20$).

Легко убедиться в том, что в качестве c целесообразно принимать число, возможно близкое к \bar{x} .

Из соотношения (5.2.11) имеем:

$$b_1 = \bar{x} - c,$$

т. е. чем ближе c и \bar{x} , тем меньше по абсолютной величине момент b_1 и, следовательно, меньше числа, из которых он составлен, а потому вычисления проще.

Перейдем теперь ко второму упрощению.

5.2.7. Вычисление статистических моментов с помощью выражения значений по интервалам в долях ширины интервала. В этом случае мы заменяем значения, соответствующие серединам x_j интервалов, на которые разбито распределение, *относительными отклонениями* от начального значения

$$y_j = \frac{x_j - c}{\Delta x}, \quad (5.2.15)$$

где x_j ($j = 1, 2, \dots, l$) — значения, соответствующие серединам l интервалов, на которые разбито распределение; Δx — ширина интервала (шаг разбиения); c — то же, что в соотношении (5.2.5).

Тогда от обычных моментов b_r мы переходим к относительным моментам \bar{b}_r . *Относительными моментами* мы будем называть моменты, определяемые соотношением

$$\bar{b}_r = \frac{\sum_{j=1}^l k_j y_j^r}{n}, \quad (5.2.16)$$

где k_j — частота значения x_j , полученная из «таблицы подсчета частот по интервалам» (см. пример 5.2.2); y_j определяется соотношением (5.2.15). Из (5.2.5) (5.2.15) следует, что

$$b_r = (\Delta x)^r \bar{b}_r. \quad (5.2.17)$$

В свою очередь из соотношений (5.2.10), (5.2.13), (3.6.8), (3.6.9) и (5.2.17) вытекает следующее:

$$\bar{x} = \Delta x \bar{b}_1 + c, \quad (5.2.18)$$

$$s^2 = (\Delta x)^2 (\bar{b}_2 - \bar{b}_1^2), \quad (5.2.19)$$

$$m_3 = (\Delta x)^3 (\bar{b}_3 - 3\bar{b}_2 \bar{b}_1 + 2\bar{b}_1^3), \quad (5.2.20)$$

$$m_4 = (\Delta x)^4 (\bar{b}_4 - 4\bar{b}_3 \bar{b}_1 + 6\bar{b}_2 \bar{b}_1^2 - 3\bar{b}_1^4), \quad (5.2.21)$$

где обозначения — те же, что в соотношениях (5.2.15), (5.2.17) и (5.2.7).

В целях уменьшения ошибок от округления при вычислении **центральных** моментов второго и более высоких порядков рекомендуется пользоваться

следующими формулами:

$$m_2 = s^2 = (\Delta x)^2 \frac{h_2 - \frac{h_1^2}{n}}{n} = \frac{nh_2 - h_1^2}{n^2} (\Delta x)^2, \quad (5.2.22)$$

$$m_3 = (\Delta x)^3 \frac{h_3 - \frac{3h_1h_2}{n} + \frac{2h_1^3}{n^2}}{n}, \quad (5.2.23)$$

$$m_4 = (\Delta x)^4 \frac{h_4 - \frac{4h_1h_3}{n} + \frac{6h_1^2h_2}{n^2} - \frac{3h_1^4}{n^3}}{n}, \quad (5.2.24)$$

где

$$h_r = \sum_{j=1}^l k_j y_j^r, \quad (5.2.25)$$

остальные обозначения — те же, что в формуле (5.2.21).

Зная центральные моменты третьего и четвертого порядков, легко вычислить *асимметрию* и *эксцесс* выборки по соотношениям, аналогичным формулам, приведенным в 4.3.6, а именно:

$$\bar{S}_k = \frac{m_3}{s^3}, \quad (5.2.26)$$

$$\bar{E}_k = \frac{m_4}{s^4} - 3. \quad (5.2.27)$$

Остановимся на упрощенных способах вычисления статистических моментов выборки.

Моменты больших выборок ($n > 100$) вычисляются двумя способами: способом произведений и способом сумм.

5.2.8. Вычисление статистических моментов по способу произведений. Вычисления по способу произведений упрощаются при применении расчетной таблицы, приводимой в примере 5.2.6.

Пример 5.2.6. Пусть для выборки, описанной в примере 5.2.2, требуется вычислить моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков и по ним подсчитать среднюю арифметическую, дисперсию, асимметрию и эксцесс.

Пусть $c = +2,5$.

Пользуясь «таблицей подсчета частот по интервалам» (пример 5.2.2), составим таблицу подсчета моментов по способу произведений (табл. 5.2.8).

В графу (1) «таблицы подсчета моментов по способу произведений» заносим абсолютные значения отклонений, подсчитанных по формуле (5.2.15), причем за c принимаем $+2,5$ мк. Заметим, что ширина интервала $\Delta x = 5$. Таким образом, абсолютные значения отклонений $|y_j| = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

В графы (2) и (3) заносим из «таблицы подсчета частот по интервалам» (пример 5.2.2) частоты соответствующих положительных и отрицательных отклонений.

Так, например, отклонение, равное нулю, получится в пятом интервале, так как $x_5 = +2,5$ мк и потому $y_5 = \frac{+2,5 - 2,5}{5} = 0$. Частота этого отклонения равна 49. Отклонение, равное $+1$, получится в шестом интервале, так как $x_6 = +7,5$ и $y_6 = \frac{7,5 - 2,5}{5} = +1$. Частота этого отклонения равна 41. Отклонение, равное -1 , получится в четвертом интервале, так как $x_4 = -2,5$ и $y_4 = \frac{-2,5 - 2,5}{5} = -1$. Частота этого отклонения равна 24. Таким образом, в первой строке в графе (2) ставим число 49, а во второй строке в графе (2) ставим 41 и в графе (3) ставим 24.

Таблица 5.2.8

Таблица подсчета моментов по способу произведений

№ интервалов (а)	Значения границ интервалов (б)	x_j (в)	Абсолютное значение разности $ x_j - c $ (г)	Абсолютное отклонение $ y_j $ от начального значения c в долях Δx (1)	Частоты k_j , соответствующие		Проверка										
					положительному отклонению y_j^+ (2)	отрицательному отклонению y_j^- (3)	(4) + (3)	(2) - (3)	$k_j y_j = (5) \times (1)$ (6)	$k_j y_j^2 = (4) \times (1)^2$ (7)	$k_j y_j^3 = (6) \times (1)^2$ (8)	$k_j y_j^4 = (7) \times (1)^2$ (9)	положительные (10)	отрицательные (11)	(2) \times (10) [*] (12)	(3) \times (11) [*] (13)	(12) + (13) (14)
5	от 0 до 5	+ 2,5	0	0	49	—	49	49	0	0	0	0	+1	—	49	—	49
4 6	от - 5 до 0 от 5 до 10	- 2,5 + 7,5	5	1	41	24	65	17	17	65	17	65	+2	0	656	0	656
3 7	от -10 до -5 от 10 до 15	- 7,5 +12,5	10	2	26	15	41	11	22	164	88	656	+3	-1	2106	15	2121
2 8	от -15 до -10 от 15 до 20	-12,5 +17,5	15	3	17	11	28	6	18	252	162	2268	+4	-2	4352	176	4528
1 9	от -20 до -15 от 20 до 25	-17,5 +22,5	20	4	7	7	14	0	0	224	0	3584	+5	-3	4375	567	4942
10	от 25 до 30	+27,5	25	5	3	—	3	3	15	75	375	1875	+6	—	3888	—	3888
				Итого	—	—	200	—	72	780	642	8448	—	—	15426	758	16184
							n		h_1	h_2	h_3	h_4					

В графу (4) заносим сумму чисел, стоящих в графах (2) и (3), а в графу (5)— разность этих чисел. Заметим, что в графе (5) могут оказаться как положительные, так и отрицательные числа.

В графу (6) заносим произведение частоты k_j на отклонение y_j , т. е. $k_j y_j$, получающееся путем перемножения чисел, стоящих в графах (5) и (1).

В графу (7) заносим произведение вида $k_j y_j^2$, получающееся умножением числа, стоящего в графе (4), на квадрат отклонения, стоящего в графе (1).

В графу (8) заносим произведение вида $k_j y_j^3$, получающееся умножением числа, стоящего в графе (6), на квадрат отклонения, записанного в графу (1). В графу (9) заносим произведение вида $k_j y_j^4$, получающееся путем умножения числа, стоящего в графе (7), на квадрат отклонения, стоящего в графе (1).

Просуммировав числа по графам (6), (7), (8) и (9), мы получаем соответственно суммы

$$\sum_{j=1}^l k_j y_j = h_1, \quad \sum_{j=1}^l k_j y_j^2 = h_2, \quad \sum_{j=1}^l k_j y_j^3 = h_3 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^l k_j y_j^4 = h_4.$$

Если каждую из полученных сумм поделить на объем n выборки, то получатся относительные моменты $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ и \bar{b}_4 , определяемые соотношением (5. 2.16

В нашем примере имеем:

$$\bar{b}_1 = \frac{72}{200} = + 0,36, \quad \bar{b}_2 = \frac{780}{200} = 3,9, \quad \bar{b}_3 = \frac{642}{200} = + 3,21, \quad \bar{b}_4 = \frac{8448}{200} = 42,24.$$

По этим же суммам могут быть найдены характеристики выборки. Так, среднюю арифметическую находим по формуле (5.2.18):

$$\bar{x} = 5 \cdot \frac{72}{200} + 2,5 = 4,3 \text{ мк.}$$

Дисперсию выборки находим по формуле (5.2.22):

$$s^2 = 5^2 \cdot \frac{72^2}{200} = 94,26 \text{ мк}^2.$$

Третий и четвертый центральные моменты находим по формулам (5.2.23) и (5.2.24):

$$m_3 = \frac{642 - \frac{3 \cdot 72 \cdot 780}{200} + \frac{2 \cdot 72^3}{200^2}}{200} \cdot 5^3 = \frac{642 - 842,4 + 18,66}{200} \cdot 125 = -113,59 \text{ мк}^3,$$

$$m_4 = \frac{8448 - \frac{4 \cdot 72 \cdot 642}{200} + \frac{6 \cdot 72^2 \cdot 780}{200^2} - \frac{3 \cdot 72^4}{200^3}}{200} \cdot 5^4 =$$

$$= \frac{8488 - 924,48 + 606,53 - 10,08}{200} \cdot 625 = \frac{8059,97}{200} \cdot 625 = 25 \, 187 \text{ мк}^4.$$

Асимметрию и эксцесс подсчитываем по соотношениям (5.2.26) и (5.2.27):

$$\bar{S}_k = \frac{-113,59}{(\sqrt{94,26})^3} = -0,12,$$

$$E_k = \frac{25 \, 187}{94,26^2} = -0,15.$$

Графы (10)—(14) «таблицы подсчета моментов по способу произведений» предназначены для проверки произведенных вычислений.

В графу (10) мы заносим положительные отклонения из графы (1), увеличенные на единицу.

Таким образом, прибавив к нулю единицу, мы получаем в первой строке $+1$, а во второй строке пишем $+2$, так как $1+1=+2$, в третьей строке $+3$, так как $2+1=+3$ и т. д.

В графу (11) мы заносим отрицательные отклонения из графы (1), увеличенные на единицу. Таким образом, во второй строке мы получаем $-1+1=0$, в третьей строке $-2+1=-1$ и т. д.

В графу (12) записываем произведение частоты, стоящей в графе (2), на четвертую степень положительного отклонения, стоящего в графе (10). Так, например, во второй строке мы получим $41 \cdot 2^4 = 656$.

В графу (13) мы заносим произведение частоты, проставленной в графе (3), на четвертую степень отклонения, проставленного в графе (11). Так, мы в четвертой строке получим $11 \cdot (-2)^4 = 176$. Графа (14) содержит сумму цифр, проставленных в графах (12) и (13).

Проверку наших вычислений мы производим с помощью тождества

$$\bar{b}'_4 = \bar{b}_4 + 4\bar{b}_3 + 6\bar{b}_2 + 4\bar{b}_1 + \bar{b}_0, \quad (5.2.28)$$

где

$$\bar{b}'_4 = \frac{\sum_{j=1}^l k_j (y_j + 1)^4}{n}, \quad (5.2.29)$$

$\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ и \bar{b}_4 — относительные моменты, определяемые соотношением (5.2.16) (заметим, что относительный момент нулевого порядка $\bar{b}_0 = 1$).

В нашем примере

$$\bar{b}'_4 = \frac{16 \cdot 184}{200} = 80,92; \quad \bar{b}_4 = 42,24$$

$$4\bar{b}_3 = 12,84$$

$$6\bar{b}_2 = 23,40$$

$$4\bar{b}_1 = 1,44$$

$$\bar{b}_0 = 1,00$$

$$80,92$$

Тождество (5.2.28) выполнено. Следовательно, вычисления сделаны правильно.

Тождество (5.2.28) легко получается из (5.2.29) по формуле Ньютона

$$\begin{aligned} \bar{b}'_4 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^l k_j (y_j + 1)^4 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^l k_j (y_j^4 + 4y_j^3 + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} y_j^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} y_j + 1) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^l k_j y_j^4 + \frac{4}{n} \sum_{j=1}^l k_j y_j^3 + \frac{6}{n} \sum_{j=1}^l k_j y_j^2 + \frac{4}{n} \sum_{j=1}^l k_j y_j + \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^l k_j y_j^0 = \bar{b}_4 + 4\bar{b}_3 + 6\bar{b}_2 + 4\bar{b}_1 + \bar{b}_0. \end{aligned}$$

5.2.9. Вычисление статистических моментов по способу сумм. Перейдем к вычислению моментов больших выборок *по способу сумм*. Этот способ отличается исключительной простотой. Рассмотрим применение способа сумм на примере.

Пример 5.2.7. Пусть для выборки, описанной в примере 5.2.2, требуется вычислить относительные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков и по ним подсчитать среднюю арифметическую, дисперсию, асимметрию и эксцесс выборки.

Пусть, как и раньше, $c = +2,5$.

Составим следующую расчетную таблицу (табл. 5.2.9).

Таблица 5.2.9

Таблица подсчета моментов по способу сумм

№ п/п	x_j	k_j (0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	-17,5	7	7	7	7	7	
2	-12,5	11	18	25	32		
3	-7,5	15	33	58			
4	-2,5	24	57				
5	+2,5	49					
6	+7,5	41	94				
7	+12,5	26	53	93			
8	+17,5	17	27	40	56		
9	+22,5	7	10	13	16	19	
10	+27,5	3	3	3	3	3	3
11		$n = 200$	115	90	39	7	—
12			187	149	75	22	3
13		$e =$	302	239	114	29	3
14		$d =$	+72	+59	+36	+15	+3

В графу x_j «таблицы подсчета моментов по способу сумм» вносятся из «таблицы подсчета частот по интервалам» (пример 5.2.2) значения, соответствующие срединам интервалов. Такими значениями являются —17,5, —12,5, —7,5 и т. д.

В графу (0) вносятся частоты тех же значений из той же таблицы. Строка, отвечающая начальному значению $c = +2,5$, прочеркивается по графам (1)—(5). В графе (1) проставляются накопленные частоты сверху до черты и снизу до той же черты. Так, например, в первой строке этой графы проставлена частота 7 значения $-17,5$, а во второй строке — сумма $7 + 11 = 18$, где 11 есть частота значения $-12,5$. В третьей строке стоит сумма $18 + 15 = 33$, где 15 есть частота значения $-7,5$ и т. д. до черты, проведенной в пятой строке, отвечающей значению $c = +2,5$.

Аналогично этому, идя снизу, в десятой строке графы (1) мы проставляем частоту 3 значения $+27,5$. В девятой строке этой графы мы ставим сумму $3 + 7 = 10$, где 7 есть частота значения $+22,5$. В восьмой строке мы ставим сумму $10 + 17 = 27$, где 17 есть частота значения $+17,5$ и т. д. до черты, проведенной в пятой строке.

В графах (2), (3), (4) и (5) мы записываем накопленные числа предыдущей графы сверху по направлению к черте (пятая строка в нашем примере) и снизу к черте.

В графе (2), идя сверху и снизу, мы не доходим на одну строку до черты, в графе (3) — на две строки, в графе (4) — на три строки и т. д.

В первой строке графы (2) ставим число, стоящее в первой же строке графы (1), т. е. ставим число 7. Во второй строке графы (2) мы ставим сумму $7 + 18 = 25$, где 18 есть число, стоящее во второй строке графы (1). В третьей строке графы (2) мы ставим сумму $25 + 33 = 58$, где 33 есть число, стоящее в третьей строке графы (1). На этом мы в графе (2) записи прекращаем, так как мы уже дошли до третьей строки, которая на одну строку не доходит до черты.

Аналогично этому, идя снизу вверх в строке десятой графы (2), мы ставим число 3, стоящее в той же строке графы (1). В девятой строке графы (2) мы ставим сумму $3 + 10 = 13$, где 10 есть число, стоящее в девятой строке графы (1), и т. д.

Совершенно таким же способом в графе (3) мы проставляем накопленные числа из графы (2), сверху и снизу, не доходя на две строки до черты; в графе (4) ставим накопленные числа из графы (3), не доходя сверху и снизу на три строки до черты, и т. д. Пятая графа вычисляется для целей проверки. Последовательность заполнения граф указана в табл. 5.2.9. После строки, отведенной для последнего интервала значений (в нашем случае после десятой строки), идут четыре строки итогов (в нашем случае 11-я, 12-я, 13-я и 14-я строки).

В первой строке итогов (одиннадцатая строка), начиная с графы (1), ставим сумму чисел, стоящих в данной графе сверху черты. Так, в первой строке итогов в графе (1) мы ставим сумму $7 + 18 + 33 + 57 = 115$; в той же строке в графе (2) мы ставим сумму $7 + 25 + 58 = 90$ и т. д.

Во второй строке итогов (двенадцатая строка) мы ставим, начиная с графы (1), сумму чисел, расположенных в данной графе снизу от черты.

Так, во второй строке итогов в графе (1) мы ставим сумму $94 + 53 + 27 + 10 + 3 = 187$, в той же строке в графе (2) мы ставим сумму $93 + 40 + 13 + 3 = 149$ и т. д.

В третьей строке итогов (тринадцатая строка), которую обозначаем буквой e , мы ставим сумму чисел, стоящих в данной графе в первой и второй строках итогов. Так, в третьей строке итогов в графе (1) мы ставим сумму $115 + 187 = 302$, в той же строке в графе (2) мы ставим сумму $90 + 149 = 239$ и т. д.

В четвертой строке итогов (четырнадцатая строка), которую обозначаем буквой d , мы ставим разность чисел, стоящих во второй и первой строках итогов (в двенадцатой и одиннадцатой строках). Так, в четвертой строке итогов в графе (1) мы ставим разность $187 - 115 = +72$, в той же строке в графе (2) ставим разность $149 - 90 = +59$ и т. д. Разности приписываем соответствующий знак $+$ или $-$. В нашем случае все разности оказались положительными.

Заполняя указанным способом таблицу, мы тут же, попутно, производим проверку.

Графа (1) проверяется путем сложения трех чисел — двух примыкающих к черте чисел графы (1) и числа, стоящего против черты в графе (0); в нашем примере такими числами будут

$$57 + 94 + 49 = 200.$$

Сумма этих трех чисел должна быть равна итогу по графе (0), который равен в свою очередь объему n выборки.

Графа (2) и все последующие проверяются путем сложения ближайшего к черте числа с ближайшим к черте числом предыдущей графы. В нашем примере такой суммой в нижней части графы (2) будут

$$93 + 94 = 187.$$

Эта сумма должна быть равна сумме чисел предыдущей графы, расположенных с той же стороны черты. Заметим, что в нашем примере во втором итоге (двенадцатая строка) по графе (1) стоит как раз число 187. Таким образом, подсчет сделан правильно.

Для проверки, например, верхней части графы (4) складываем числа

$$7 + 32 = 39.$$

Полученная сумма равна числу 39, стоящему в первом итоге (одиннадцатая строка) по графе (3). Таким образом, и здесь подсчет сделан верно.

После заполнения «таблицы подсчета моментов по способу сумм» находим интересующие нас суммы по формулам

$$h_1 = d_1, \quad (5.2.30)$$

$$h_2 = e_1 + 2e_2, \quad (5.2.31)$$

$$h_3 = d_1 + 6d_2 + 6d_3, \quad (5.2.32)$$

$$h_4 = e_1 + 14e_2 + 36e_3 + 24e_4, \quad (5.2.33)$$

где h_1 , h_2 , h_3 и h_4 — суммы, определяемые соотношением (5.2.25)¹⁾.

d_1 , d_2 и d_3 — четвертые итоги по «таблице подсчета моментов по способу сумм» (в нашем примере стоящие в четырнадцатой строке) соответственно по графам (1), (2) и (3);

e_1 , e_2 , e_3 и e_4 — третьи итоги по той же таблице (в нашем примере стоящие в тринадцатой строке) соответственно по графам (1), (2), (3) и (4).

По формулам (5.2.30), (5.2.31), (5.2.32) и (5.2.33) находим:

$$h_1 = +72,$$

$$h_2 = 302 + 2 \cdot 239 = 780,$$

$$h_3 = 72 + 6 \cdot 59 + 6 \cdot 36 = 642,$$

$$h_4 = 302 + 14 \cdot 239 + 36 \cdot 114 + 24 \cdot 29 = 8448.$$

Таким образом, мы получим тот же результат, что в примере 5.2.6. По полученным суммам h_1 , h_2 , h_3 и h_4 легко найдем \bar{x} , s^2 , \bar{S}_k и \bar{E}_k , пользуясь ранее приведенными формулами. Соответствующие вычисления для данного случая уже сделаны в конце примера 5.2.6.

5.2.10. Другие формулы для вычисления статистических моментов. В литературе иногда встречаются формулы для вычисления средней арифметической и дисперсии, отличающиеся от вышеприведенных формул (5.2.10) и (5.2.13), рекомендуемых при малых выборках, и формул (5.2.18) и (5.2.22), рекомендуемых при больших выборках.

¹⁾ Вывод формул (5.2.30), (5.2.31), (5.2.32) и (5.2.33) имеется в книге: Л. К. Л а х т и н, Кривые распределения, Гостехиздат, М.

К таким формулам относятся:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^l k_j x_j}{n}, \quad (5.2.34)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^l k_j (x_j - c)}{n} + c; \quad (5.2.35)$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}, \quad (5.2.36)$$

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^l k_j (x_j - \bar{x})^2}{n}, \quad (5.2.37)$$

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^l k_j x_j^2}{n} - \bar{x}^2, \quad (5.2.38)$$

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^l k_j (x_j - c)^2}{n} - (\bar{x} - c)^2, \quad (5.2.39)$$

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^l k_j (x_j - c)^2 - \frac{[\sum_{j=1}^l k_j (x_j - c)]^2}{n}}{n}. \quad (5.2.40)$$

Легко убедиться, что эти формулы приводят к тем же результатам, что и формулы (5.2.10), (5.2.13), (5.2.18) и (5.2.22), но менее удобны для пользования.

5.2.11. Поправки к группировке (Шеппарда). Как уже указывалось в 5.2.2, при обработке обширного материала, полученного в выборке, на практике часто прибегают к группировке, разбивая шкалу рассматриваемого признака на некоторое число (10—20) равных интервалов (разрядов), и подсчитывают затем численности групп наблюдений, попавших в последовательные интервалы. При дальнейших расчетах, например при вычислении моментов различных порядков, наблюдения, попавшие в некоторый интервал подразделения, приурочивают к середине этого интервала, считая, таким образом, что все эти наблюдения обладают одним и тем же округленным значением признака, соответствующим середине данного интервала.

Пусть x_0 — середина одного из интервалов, длины которых мы обозначим через h . Середина ближайшего справа интервала будет $x_1 = x_0 + h$, а ближайшего слева будет $x_{-1} = x_0 - h$. Аналогичным образом занумеруем следующие друг за другом по порядку интервалы:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h, & x_2 &= x_0 + 2h, & \dots, & x_k &= x_0 + kh; \\ x_{-1} &= x_0 - h, & x_{-2} &= x_0 - 2h, & \dots, & x_{-k} &= x_0 - kh. \end{aligned}$$

Округленному значению x_i ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$) отвечает интервал

$$\Delta_i = \left(x_i - \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} \right)$$

с центром в точке x_i .

Любому наблюдению, попавшему в этот интервал, приписывается округленное значение x_i . При таком округлении, очевидно, совершается погрешность, не превосходящая, впрочем, половины длины интервала, т. е. $\frac{h}{2}$.

Поступая таким образом с каждым наблюдением величины X , которую мы будем предполагать непрерывно распределенной с некоторой плотностью $\varphi(x)$, мы, в сущности, заменяем ее дискретной величиной X_0 , могущей принимать лишь округленные значения x_i с вероятностью

$$P(X_0 = x_i) = p_i = \int_{x_i - \frac{h}{2}}^{x_i + \frac{h}{2}} \varphi(x) dx.$$

С этой же вероятностью мы можем ожидать попадания величины X в интервал Δ_i . Выгода, которую мы получаем при переходе от непрерывной величины X к дискретной величине X_0 , заключается в большой простоте последующих вычислений с округленными значениями и в более простой и удобообозримой картине распределения выборочных значений, сведенных в небольшое число интервалов. Однако эта выгода достигается за счет некоторой потери информации, которая дается первоначальными измерениями до их округления и приводит к систематической ошибке при оценке моментов ν_r распределения X по эмпирическим моментам a_r .

В самом деле, эти последние теперь уже определяются по округленным значениям с помощью равенств

$$\bar{a}_r = \sum_i W_{0i} x_i^r = \sum_i \frac{k_i}{n} x_i^r,$$

где $W_{0i} = \frac{k_i}{n}$ есть частота наблюдений, попавших в интервал Δ_i и отвечающих округленному значению x_i .

Так как согласно (4.2.4)

$$M\left(\frac{k_i}{n}\right) = p_i,$$

то

$$M\bar{a}_r = \sum_i M\left(\frac{k_i}{n}\right) x_i^r = \sum_i p_i x_i^r = M X_0^r = \nu_{0r}.$$

Таким образом, округленные выборочные моменты \bar{a}_r будут оценивать не моменты

$$\nu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \varphi(x) dx \quad (5.2.41)$$

величины X , а моменты

$$\nu_{0r} = \sum_i x_i^r \int_{x_i - \frac{h}{2}}^{x_i + \frac{h}{2}} \varphi(x) dx \quad (5.2.42)$$

вспомогательной величины X_0 .

Другими словами, \bar{a}_r не будут на языке современной статистики «состоятельными» и «несмещенными» оценками величин ν_r , т. е. расхождение между (5.2.41) и (5.2.42) будет иметь систематический характер; величина его зависит от степени грубости округления, иными словами, от длины h интервалов Δ_i и от аналитических свойств функции $\varphi(x)$.

Делая некоторые добавочные допущения о плотности $\varphi(x)$, которые на практике выполняются всякий раз, когда график функции $\varphi(x)$ на концах распределения имеет соприкосновение с осью x достаточно высокого порядка (т. е. когда сама функция $\varphi(x)$ и ее производные до некоторого порядка включительно обращаются на концах в нуль), можно дать приближенные формулы для определения систематического расхождения между ν_r и ν_{0r} . После этого легко определить поправки к моментам \bar{a}_r для того, чтобы их сделать доброкачественными оценками интересующих нас моментов ν_r величины X .

Эти поправки мы приведем, не давая их вывода, который можно найти в полных курсах ¹⁾.

Оказывается, что между моментами ν_r и ν_{0r} можно установить следующее приближенное соотношение:

$$\nu_{0r} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} C_{r+1}^{2i+1} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i} \nu_{r-2i}, \quad (5.2.43)$$

где $r = 1, 2, \dots$ есть порядок момента, $\left[\frac{r}{2}\right]$ представляет наибольшее целое число, содержащееся в дроби $\frac{r}{2}$, и C_{r+1}^{2i+1} — число сочетаний из $r+1$ по $2i+1$.

Из линейных соотношений (5.2.43) можно выразить истинные моменты ν_r через «групповые» моменты ν_{0r} . Мы получим тогда следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= \nu_{01}, \\ \nu_2 &= \nu_{02} - \frac{h^2}{12}, \\ \nu_3 &= \nu_{03} - \frac{1}{4} \nu_{01} h^2, \\ \nu_4 &= \nu_{04} - \frac{1}{2} \nu_{02} h^2 + \frac{7}{240} h^4. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.44)$$

Если поместить начало отсчета в среднюю точку распределения, то $\nu_1 = \nu_{01} = 0$ и получаются поправки для центральных моментов:

$$\left. \begin{aligned} \mu_2 &= \mu_{02} - \frac{1}{12} h^2, \\ \mu_3 &= \mu_{03}, \\ \mu_4 &= \mu_{04} - \frac{1}{2} \mu_{02} h^2 + \frac{7}{240} h^4. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.45)$$

Эти поправки известны под названием *поправок Шеппарда*.

Определив по округленным данным групповые моменты \bar{a}_r и по ним соответствующие центральные моменты \bar{m}_r , мы вносим далее поправки Шеппарда, руководствуясь формулами (5.2.45), и получаем исправленные моменты m_r :

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \bar{a}_1, \\ m_1 &= \bar{m}_1 = 0, \\ m_2 &= \bar{m}_2 - \frac{1}{12} h^2, \\ m_3 &= \bar{m}_3, \\ m_4 &= \bar{m}_4 - \frac{1}{2} \bar{m}_2 h^2 + \frac{7}{240} h^4. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.46)$$

¹⁾ См., например, В. И. Романовский, Математическая статистика, ГОНТИ, М.—Л., 1938, стр. 157—165.

Фактически, как мы видим, исправлению подлежат лишь моменты второго и четвертого порядков.

Смысл поправок Шеппарда можно уяснить с несколько иной точки зрения. Прделанное нами округление наблюдений является как бы источником вносимой при этом добавочной случайной погрешности η , которая прибавляется к величине X . Полученная нами величина $X_0 = X + \eta$ оказывается суммой двух величин: изучаемой нами величины X и независимой от нее и притом равномерно распределенной по интервалу $\left(-\frac{h}{2}, +\frac{h}{2}\right)$ величины η , представляющей погрешность от округления. Между моментами величин X_0 и X теперь легко установить соотношение, принимая во внимание, что $M\eta = 0$,

$$M\eta^s = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} x^s ds = \begin{cases} 0 & \text{при } s \text{ нечетном,} \\ \frac{h^s}{2^s(s+1)} & \text{при } s \text{ четном.} \end{cases} \quad (5.2.47)$$

Например, $MX_0^4 = \nu_{04} = M(X + \eta)^4 = M(X^4 + 4X^3\eta + 6X^2\eta^2 + 4X\eta^3 + \eta^4) =$
 $= \nu_4 + 6\nu_2 \frac{h^2}{12} - \frac{h^4}{80}$, что совпадает с тем, что дает формула (5.2.43).

Разумеется, поправки Шеппарда следует вносить лишь в том случае, когда величина их сравнима со случайной погрешностью, которой обладают выборочные моменты. Если h составляет небольшую долю среднего квадратического отклонения, то, как правило, вносить их нецелесообразно.

Пример 5.2.8. Пусть требуется скорректировать статистические моменты, вычисленные в примере 5.2.6, с помощью поправок Шеппарда.

По формулам (5.2.46) получим:

$$\begin{aligned} \overline{x'} &= \overline{x} = a_1 = 4,3 \text{ мк,} \\ m_2 &= \overline{m_2} - \frac{1}{12} h^2 = 94,26 - \frac{1}{12} \cdot 5^2 = 92,18 \text{ мк}^2, \\ m_3 &= \overline{m_3} = -113,59 \text{ мк}^3, \\ m_4 &= \overline{m_4} - \frac{1}{2} \overline{m_2} h^2 + \frac{7}{240} h^4 = 25\,187 - 94,26 \cdot \frac{25}{2} + \frac{7}{240} 5^4 = \\ &= 25\,187 - 1178 + 18 = 24\,027 \text{ мк}^4. \end{aligned}$$

В данном случае поправка к $s' = \sqrt{\overline{m_2}}$ составляет всего лишь немногим больше 1%, что видно из следующего:

$$\begin{aligned} s' &= \sqrt{94,26} = 9,709, \\ s &= \sqrt{92,18} = 9,601, \\ \frac{s' - s}{s'} 100 &= \frac{0,108 \cdot 100}{9,709} = 1,11\%. \end{aligned}$$

§ 3. Статистические оценки параметров распределения

5.3.1. Проблема оценки параметров. Требования к оценкам: состоятельность, несмещенность и эффективность. Достаточные оценки (статистики). В § 1 настоящей главы уже указывалось на то, что применение статистических методов к данным наблюдения связано с рассмотрением этих последних как случайной выборки из некоторой генеральной совокупности. При этом распре-

деление частостей, полученное в выборке, рассматривается как эмпирическое приближение к теоретическому распределению вероятностей в генеральной совокупности. Выяснение или оценка закона распределения по данным выборки (*так называемая параметризация*) и составляет существенную проблему математической статистики: только овладев законами распределения изучаемых величин, мы можем решать возникающие на практике задачи по анализу, сравнению и предсказанию результатов массового процесса. На практике во многих задачах вид или, иначе говоря, форма теоретического распределения может считаться известной. Так, например, при обработке деталей на металлорежущих станках по методу автоматического получения размера, при устойчивом технологическом процессе можно считать, что распределение погрешностей деталей подчиняется нормальному закону распределения. Точно так же на практике очень часто исходят из того, что нормальному закону следуют и погрешности измерений. Суммарную погрешность измерения можно рассматривать как результат действия большого числа независимых или слабо зависимых причин и поэтому наблюдаемую ошибку можно представлять как сумму «элементарных ошибок»; последние же в свою очередь вследствие теоремы (4.3.37) Ляпунова позволяют с высокой степенью приближения считать наблюдаемую ошибку нормально распределенной. В артиллерийских расчетах обычно, опираясь на обширный опытный материал, полагают, что распределение точек поражения на плоскости следует двумерному нормальному закону распределения. В ряде физических и биологических схем теоретическим законом распределения является несомненно закон Пуассона или показательный закон $\lambda e^{-\lambda x}$ и т. д.

Такое положение наблюдается всегда, когда рассматриваемый процесс может быть с некоторым приближением подведен под теоретическую схему, анализируемую средствами теории вероятностей.

Во всех этих случаях мы можем считать, что теоретический закон распределения принадлежит к некоторому семейству, зависящему от одного или нескольких параметров. Если бы точные значения параметров, таких, как, например, a и σ при нормальном законе (3.3.1) или λ при законе Пуассона (2.4.5), были известны — закон распределения для данного случая был бы полностью определен. Иными словами, здесь задача нахождения закона распределения изучаемой величины (или величин) сводится к нахождению неизвестных значений параметров, т. е. к параметризации. Именно ради определения этих параметров весьма часто и производится само статистическое исследование. Так, знание параметров a и σ в вышеуказанных случаях, связанных с нормальным распределением, дает возможность решать инженерные задачи из области точности обработки и точности измерений.

Мы видели, например, в 3.7.2, что, образуя средние арифметические из значений случайных величин, представляющих результаты выборочного наблюдения интересующего нас признака, можно, основываясь на законе больших чисел, приближенно оценить математическое ожидание или параметр a нормального закона; аналогично можно рассматривать дисперсию выборки s^2 как оценку теоретической (генеральной) дисперсии σ^2 . Тем самым будет с некоторым приближением найдена и теоретическая функция нормального закона распределения вероятностей данной задачи.

В общем случае задача оценки параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ распределения сводится к нахождению таких функций $\bar{\theta}_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \bar{\theta}_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \bar{\theta}_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от выборочных значений x_1, x_2, \dots, x_n , которые могли бы быть использованы для приближенного определения значений параметров. При этом мы должны быть уверены, что, по крайней мере, при больших n распределения случайных величин $\bar{\theta}_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \bar{\theta}_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ так тесно сконцентрированы около значений неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, что

можно без существенной ошибки приближенно полагать на практике, что почти наверно

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\approx \theta_1, \\ \bar{\theta}_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\approx \theta_2, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \bar{\theta}_k(x_1, x_2, \dots, x_n) &\approx \theta_k.\end{aligned}$$

Эта концентрация распределений статистических оценок около оцениваемых параметров, как легко понять, характеризует точность и надежность производимых оценок.

Можно и более точно сформулировать требования, предъявляемые к выбору функций $\bar{\theta}_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \bar{\theta}_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называемых «*статистическими оценками параметров*». Но для этого надо обратиться к выборочным законам распределения этих оценок.

Понятно, что для каждой функции распределения $F_X(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ интересующего нас семейства закон распределения каждой из возможных статистических оценок $\bar{\theta}_i(X_1, X_2, \dots, X_n)$ вполне определен. В самом деле, функции $\bar{\theta}_i(X_1, X_2, \dots, X_n)$ образуют систему случайных величин, непосредственно определяемых по возможным или случайным результатам X_1, X_2, \dots, X_n выборки.

В свою очередь закон распределения этих последних полностью определяется законом распределения исходной случайной величины X с функцией $F_X(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$. Ибо X_1, X_2, \dots, X_n являются, как мы знаем, независимыми величинами, представляющими как бы n экземпляров одной и той же величины X , и каждая из них в отдельности распределена по закону $F_X(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$.

Очевидно, что закон распределения каждой оценки $\bar{\theta}_i (i = 1, 2, \dots, k)$ зависит поэтому от значений параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, от которых зависит функция $F_X(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$. Эта зависимость для разумно выбранной оценки должна быть такого рода, чтобы облегчить по возможности саму задачу приближенного определения параметров.

Знание выборочного закона распределения той или иной статистической оценки позволяет вычислять вероятность ее отклонений от оцениваемого параметра, ее математическое ожидание и ее дисперсию. А с помощью этих последних как раз и могут быть более точно сформулированы требования к статистическим оценкам.

В качестве *первого требования*, которому должна удовлетворять рационально построенная оценка $\bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ для некоторого параметра θ , можно поставить требование *сходимости по вероятности оценки к оцениваемому параметру* при неограниченном возрастании объема наблюдения, т. е. (по вероятности)

$$\bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta. \quad (5.3.1)$$

Другими словами, при любом $\varepsilon > 0$

$$P \{ |\bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) - \theta| < \varepsilon \} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1, \quad (5.3.2)$$

т. е. вероятность отклонения статистической оценки $\bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ от оцениваемого параметра θ на величину, меньшую как угодно малого положительного числа ε , должна стремиться к единице при неограниченном увеличении числа n произведенных наблюдений.

В 3.7.2 мы видели из теоремы (3.7.11) Чебышева, что этому требованию удовлетворяет средняя арифметическая, рассматриваемая как статистическая

оценка математического ожидания, т. е. центра группирования данной случайной величины.

Оценки, удовлетворяющие требованию (5.3.2), называются *состоятельными*.

С помощью неравенства (3.7.10) Чебышева и выведенного из него соотношения (3.7.20) легко обнаружить, что для состоятельности оценки достаточно, чтобы

$$M[\bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) - \theta]^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (5.3.3)$$

Состоятельность статистической оценки как раз и обеспечивает ее практическую близость, по крайней мере при больших значениях n , к оцениваемому параметру. Однако при малых значениях n из состоятельности оценки еще нельзя сделать никаких выводов о ее пригодности для приближенного определения соответствующего параметра.

Вторым из естественных требований, которые часто (хотя и не всегда) предъявляются к статистическим оценкам (характеристикам), является требование *несмещенности*, т. е. *отсутствия в ней систематической погрешности*.

Для *несмещенной оценки* при любом конечном n (в том числе и при малом) должно быть выполнено равенство

$$M[\bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \theta, \quad (5.3.4)$$

т. е. *математическое ожидание несмещенной оценки должно быть равно оцениваемому параметру*. Оценка называется *положительно смещенной*, если $M[\bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)] > \theta$, и *отрицательно смещенной*, если $M[\bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)] < \theta$.

Таким образом, центр рассеивания несмещенной оценки совпадает как раз с искомым значением параметра. Вообще говоря, не всякая состоятельная оценка будет несмещенной: ее математическое ожидание может, например, не быть равным θ , а лишь неограниченно приближаться к нему при возрастании n . При конечном же числе n такая оценка может быть смещена в ту или другую сторону.

Требование несмещенности особенно важно при *малом объеме* наблюдений. В распоряжении наблюдателя часто имеются данные по большому числу малочисленных серий наблюдений. Для того чтобы использовать оценки, относящиеся к отдельным сериям, для получения путем осреднения более точной общей оценки, нужно быть уверенным в отсутствии систематической ошибки у каждой частной оценки. Это будет лишь тогда, когда частная оценка является несмещенной.

Примером несмещенной оценки для центра рассеивания является среднее арифметическое значение, так как на основании теоремы (3.3.13) имеем:

$$M\bar{x} = M\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i = \frac{nMX}{n} = MX = a, \quad (5.3.5)$$

где $\bar{x} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ — средняя арифметическая из n некоторых, естественно, одинаково распределенных выборочных значений X_1, X_2, \dots, X_n (из того, что X_1, X_2, \dots, X_n одинаково распределены, следует, что $MX_1 = MX_2 = \dots = MX_n = MX = a$), a — центр рассеивания исследуемого распределения, определяемый его математическим ожиданием MX .

Примером смещенной оценки может служить эмпирическая дисперсия, или, что то же самое, эмпирический центральный момент второго порядка

$$s^2 = m_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

Этот момент представляет, как мы скоро увидим, состоятельную, но смещенную оценку теоретической дисперсии σ^2 . Дело в том, что m_2 сходится по вероятности к σ^2 при $n \rightarrow \infty$ (поэтому-то он и будет состоятельной оценкой σ^2), но математическое ожидание его Mm_2 не равно σ^2 и при конечном n дает преуменьшенное значение оцениваемого параметра σ^2 . В 5.3.4 мы покажем, что

$$Mm_2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2,$$

и потому, оценивая σ^2 по m_2 , мы допускаем благодаря отрицательному смещению систематическую ошибку, равную $\frac{\sigma^2}{n}$, при больших n она пренебрежимо мала.

Аналогичным образом при оценке величины σ с помощью характеристики $s = \sqrt{m_2}$ получим состоятельную, но при малом n довольно значительно смещенную оценку σ .

Состоятельные несмещенные оценки могут быть иногда построены различными способами. Так, для оценки центра рассеивания нормального закона может быть взята наряду со средней арифметической \bar{x} также эмпирическая медиана m_e (по крайней мере, для нечетных значений n объема выборки). Из дальнейшего будет видно, что медиана m_e подобно \bar{x} представляет несмещенную состоятельную оценку центра группирования. Из двух состоятельных несмещенных оценок $\bar{\theta}'$ и $\bar{\theta}''$ для одного и того же параметра θ естественно отдать предпочтение той, в распределении которой (см. 5.1.2) масса вероятностей более тесно сконцентрирована около параметра θ (черт. 64). В качестве обычной меры рассеивания той или иной статистической оценки $\bar{\theta}$ около оцениваемого параметра θ чаще всего рассматривается дисперсия

$$D\bar{\theta} = \sigma_{\bar{\theta}}^2 = M(\bar{\theta} - \theta)^2, \quad (5.3.6)$$

где $M\bar{\theta} = \theta$ в силу несмещенности оценки.

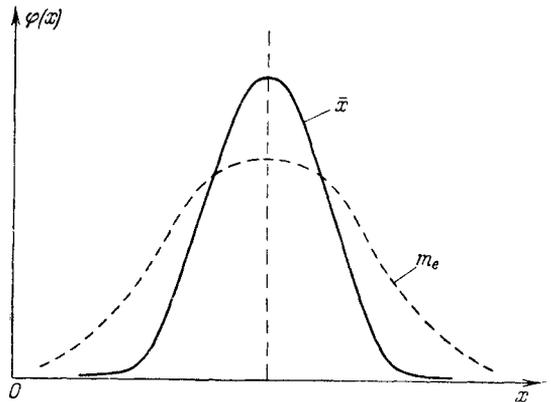
Практически можно часто считать из двух оценок $\bar{\theta}'$ и $\bar{\theta}''$ одного и того же параметра θ лучшей ту, у которой дисперсия меньше. Тогда можно поставить вопрос о разыскании несмещенной состоятельной оценки с наименьшей дисперсией. При весьма общих предположениях можно показать, что дисперсия оценок, построенных на основе выборки объема n , не меньше некоторой нижней границы. Так, для случая одного параметра для дисперсии любой несмещенной оценки выполняется неравенство

$$\sigma_{\bar{\theta}}^2 \geq \frac{1}{nA(\theta)}. \quad (5.3.7)$$

Для неотрицательной величины $A(\theta)$ можно дать два равносильных выражения:

$$A(\theta) = M \left\{ \left[\frac{\partial \ln \varphi(x, \theta)}{\partial \theta} \right]^2 \right\} = -M \left[\frac{\partial^2 \ln \varphi(x, \theta)}{\partial \theta^2} \right], \quad (5.3.8)$$

где n — объем выборки, $\varphi(x, \theta)$ — плотность вероятности случайной величины при непрерывном ее распределении; в случае дискретного распределения $\varphi(x, \theta)$



Черт. 64. Кривые плотностей выборочных распределений средней арифметической \bar{x} и медианы m_e .

означает вероятность значения x величины X

$$\varphi(x, \theta) = P(X = x; \theta).$$

В (5.3.8) стоят математические ожидания величин, которые получим, если в функциях

$$\left[\frac{\partial \ln \varphi(x, \theta)}{\partial \theta} \right]^2 \text{ и } \frac{\partial^2 \ln \varphi(x, \theta)}{\partial \theta^2}$$

заменяем первый аргумент случайной величиной X .

Если существует такая несмещенная оценка $\bar{\theta}$, для которой дисперсия $\sigma_{\bar{\theta}}^2$ достигает нижней границы, равной правой части в неравенстве (5.3.7), то она называется *эффективной оценкой*. Эффективная оценка всегда состоятельна. Если мы имеем какую-либо другую несмещенную оценку $\bar{\theta}$, то «сравнительную эффективность» этой оценки (по сравнению с наилучшей оценкой — эффективной) естественно измерять отношением дисперсий

$$\varepsilon(\bar{\theta}) = \frac{\sigma_{\bar{\theta}}^2}{\sigma_{\bar{\theta}}^2}, \quad (5.3.9)$$

где $\sigma_{\bar{\theta}}^2$ есть дисперсия эффективной оценки, а $\sigma_{\bar{\theta}}^2$ — дисперсия сравниваемой оценки. Сравнительная эффективность $\varepsilon(\bar{\theta})$ всякой несмещенной оценки не больше единицы. Так, для простой случайной выборки из нормальной совокупности эффективной оценкой параметра a является средняя арифметическая \bar{x} , а сравнительная эффективность медианы m_e при выборке большого объема будет приближенно равна

$$\frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{\sigma_{m_e}^2} = \frac{2}{\pi} = 0,6366, \quad (5.3.10)$$

как это будет показано далее (см. 5.3.8).

Практически это означает, что центр распределения a определяется по медиане m_e с той же точностью при n наблюдениях, как при $\frac{2}{\pi} n = 0,6366n$ наблюдениям по средней арифметической \bar{x} .

Пример 5.3.1. Пусть случайная величина X представляет частоту появления события A при возвратной (повторной) выборке объема s . Таким образом, sX следует биномиальному закону (2.4.1), параметр s которого считается известным. Требуется найти эффективную оценку параметра p этого же закона, т. е. вероятности появления события A в единичном испытании, если известны результаты n выборок объема s . Пусть i -я из произведенных n выборок объема s дает частоту $\frac{k_i}{s}$, которую можно считать приближенной оценкой для p .

Мы должны использовать n независимо от наблюдаемых частот $\frac{k_1}{s}, \frac{k_2}{s}, \dots, \frac{k_n}{s}$ для более точной оценки p .

По формуле (5.3.8) находим:

$$\begin{aligned} nA(\theta) &= -nM \left[\frac{\partial^2 \ln \varphi(x, \theta)}{\partial \theta^2} \right] = -nM \left[\frac{\partial^2 \ln \varphi(x, p)}{\partial p^2} \right] = -nM \left[\frac{\partial^2 \ln C_s^x p^x q^{s-x}}{\partial p^2} \right] = \\ &= -nM \left[-\left(\frac{x}{p^2} + \frac{s-x}{q^2} \right) \right] = n \left(\frac{MX}{p^2} + \frac{s-MX}{q^2} \right) = n \left[\frac{s(q+p)}{pq} \right] = \frac{ns}{pq}, \end{aligned}$$

так как

$$\frac{\partial \ln C_s^x p^x q^{s-x}}{\partial p} = \frac{x}{p} - \frac{s-x}{1-p} \text{ и } \frac{\partial^2 \ln C_s^x p^x q^{s-x}}{\partial p^2} = -\left(\frac{x}{p^2} + \frac{s-x}{q^2} \right),$$

а по (4.2.3) при биномиальном законе $MX = sp$.

Таким образом, при биномиальном законе согласно (5.3.7) имеем:

$$\sigma_p^2 \gg \frac{pq}{ns}, \quad (5.3.11)$$

т. е. нижней границей дисперсий для возможных статистических оценок параметра p при известном s является

$$\frac{pq}{ns}.$$

Проверим, является ли эффективной несмещенной оценкой следующая статистическая оценка вероятности p :

$$t = \frac{\bar{x}}{s} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{sn}, \quad (5.3.12)$$

где X_1, X_2, \dots, X_n — числа появлений события A в n возвратных выборках объема s .

Используя теоремы (3.3.12) и (3.3.13), находим:

$$M\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{sn}\right) = \frac{1}{sn} M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{nMX}{sn} = \frac{MX}{s},$$

так как X_1, X_2, \dots, X_n — n одинаково распределенных по биномиальному закону экземпляров величины X .

Но из (4.2.3) следует:

$$MX = sp,$$

а потому

$$\frac{MX}{s} = \frac{sp}{s} = p.$$

Это и доказывает, что статистическая оценка t является несмещенной оценкой p .
Найдем теперь дисперсию оценки t :

$$\sigma_t^2 = \frac{\sigma_{X_1 + X_2 + \dots + X_n}^2}{s^2 n^2} = \frac{1}{s^2 n^2} \sigma_{X_1 + X_2 + \dots + X_n}^2 = \frac{n\sigma_X^2}{s^2 n^2} = \frac{\sigma_X^2}{s^2 n}.$$

Но из (4.2.9) имеем:

$$\sigma_X^2 = spq,$$

а потому

$$\frac{\sigma_X^2}{s^2 n} = \frac{spq}{s^2 n} = \frac{pq}{sn}.$$

Мы пришли как раз к выражению, стоящему в правой части (5.3.11), а это и означает, что статистическая оценка $t = \frac{x}{s}$ является эффективной несмещенной оценкой параметра p при известном s .

Пример 5.3.2. Пусть случайная величина X следует закону Пуассона. Требуется проверить, является ли эмпирический первый начальный момент $a_1 = \bar{x}$ несмещенной эффективной оценкой для параметра λ этого закона.

По формуле (5.3.7) находим:

$$\frac{1}{nM\left[\frac{\partial^2 \ln \varphi(x, \theta)}{\partial \theta^2}\right]} = \frac{1}{nM\left[\frac{\partial^2 \ln \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}{\partial \lambda^2}\right]} = \frac{1}{nM\left[-\frac{k}{\lambda^2}\right]} = \frac{\lambda^2}{nMk} = \frac{\lambda^2}{n\lambda} = \frac{\lambda}{n},$$

так как

$$\frac{\partial \ln \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}{\partial \lambda} = \frac{k}{\lambda} - 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \ln \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}{\partial \lambda^2} = -\frac{k}{\lambda^2},$$

но по соотношению (4.2.26) при законе Пуассона $Mk = \lambda$.

Таким образом, при законе Пуассона

$$\sigma_{\bar{x}}^2 \geq \frac{\lambda}{n}, \quad (5.3.13)$$

т. е. $\frac{\lambda}{n}$ представляет нижнюю границу дисперсий для возможных статистических оценок параметра λ .

Найдем теперь дисперсию величины

$$a_1 = \bar{x} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n},$$

где X_1, X_2, \dots, X_n представляют числа появлений интересующего события в n независимых сериях испытаний

$$\left(\frac{\sigma_{X_1 + X_2 + \dots + X_n}}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \sigma_{X_1 + X_2 + \dots + X_n}^2 = \frac{n \sigma_X^2}{n^2} = \frac{\sigma_X^2}{n} = \frac{\lambda}{n},$$

так как независимые случайные переменные X_1, X_2, \dots, X_n одинаково распределены по закону Пуассона, а при этом законе из соотношения (4.2.27) следует, что $\sigma_X^2 = DX = \lambda$.

Мы в итоге пришли к тому выражению, которое стоит в правой части соотношения (5.3.13), а это и означает, что $a_1 = \bar{x}$ является несмещенной эффективной оценкой параметра λ закона Пуассона.

Введем еще одно важное понятие *достаточной* оценки, играющей большую роль в современной математической статистике. Пусть плотность распределения $\varphi(x, \theta)$ величины X зависит от параметра θ ; X_1, X_2, \dots, X_n есть n независимых экземпляров этой величины и x_1, x_2, \dots, x_n — возможные их значения, с которыми мы встречаемся в выборке O_n объема n . Плотность многомерной величины (X_1, X_2, \dots, X_n) представляется произведением значений плотностей $\varphi(x, \theta)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n (так как X_i независимы)

$$P(O_n, \theta) = \varphi(x_1, \theta) \varphi(x_2, \theta) \dots \varphi(x_n, \theta) \quad (5.3.14)$$

и при данных x_1, x_2, \dots, x_n может рассматриваться как функция параметра θ . Эта функция называется *функцией правдоподобия*.

Если величина X дискретна, а x_1, x_2, \dots, x_n представляют какие-либо из ее возможных значений, то функция правдоподобия определяется аналогичным выражением

$$P(O_n, \theta) = p(x_1, \theta) p(x_2, \theta) \dots p(x_n, \theta), \quad (5.3.15)$$

где $p(x_i, \theta)$ — вероятность равенства $X_i = x_i$.

Предположим теперь, что мы располагаем такой оценкой θ с помощью характеристики $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, что условное распределение величин X_1, X_2, \dots, X_n при известных значениях характеристики $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не зависит от параметра θ . Это обстоятельство аналитически выражается в том, что функцию правдоподобия можно представить в виде произведения двух множителей

$$P(O_n, \theta) = \varphi_1[\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n); \theta] \cdot \varphi_2(x_1, x_2, \dots, \bar{\theta}), \quad (5.3.16)$$

где первый множитель дает плотность распределения характеристики $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при данном значении параметра θ , а второй множитель представляет условную плотность совокупности наших величин X_1, X_2, \dots, X_n при фиксированном значении параметра $\bar{\theta}$. Этот второй множитель совсем не зависит от параметра θ , который входит только в первый множитель. Если характеристика $\bar{\theta}$ обладает указанным свойством, то она называется *достаточной оценкой* (или *достаточной статистикой*) для параметра θ .

Замечательное свойство достаточных оценок заключается в том, что они как бы вбирают в себя всю информацию, которая дается выборкой относительно параметра θ .

Пусть мы, кроме достаточной статистики $\bar{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, располагаем другой оценкой $\bar{\theta}'(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда распределение $\bar{\theta}'(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при данном значении $\bar{\theta}$ не зависит от θ , так как при этом условии распределение системы X_1, X_2, \dots, X_n не зависит от θ . Это определение может быть легко распространено на любое число параметров. Система оценок $\bar{\theta}_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \bar{\theta}_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \bar{\theta}_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$

называется достаточной для системы параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, если функция правдоподобия выборки $P(O_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ может быть представлена в виде произведения

$$\varphi_1[\bar{\theta}_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \dots \bar{\theta}_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k] \times \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_k). \quad (5.3.17)$$

Аналогичное определение можно дать и для случая дискретного распределения. Поясним сказанное несколькими примерами.

Пусть мы имеем нормально распределенную величину X с плотностью $n(x; a, \sigma)$. Функция правдоподобия выборки представлена в этом случае следующим образом:

$$P(O_n; a, \sigma) = n(x_1; a, \sigma) \cdot n(x_2; a, \sigma) \dots n(x_n; a, \sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_1-a)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(x_2-a)^2 - \dots - \frac{1}{2\sigma^2}(x_n-a)^2} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-a)^2}.$$

Но, полагая

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

будем, как мы видели в (5.2.13), иметь:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - a)^2.$$

Далее, полагая

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

можем записать:

$$P(O_n; a, \sigma) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} [ns^2 + n(\bar{x}-a)^2]} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}} e^{-n \frac{(\bar{x}-a)^2}{2\sigma^2}};$$

откуда можно легко заключить, что в данном случае функция правдоподобия полностью определена, если известны характеристики s^2 и \bar{x} . Кроме того, условие (5.3.17), очевидно, выполняется для a и σ . Следовательно, \bar{x} и s являются достаточными оценками для a и σ .

В качестве другого примера рассмотрим величину X , принимающую целые значения $(0, 1, 2, \dots)$ и распределенную по закону Пуассона:

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}.$$

Функция правдоподобия выборки здесь может быть записана в следующем виде:

$$P(O_n, \lambda) = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{x_1+x_2+\dots+x_n}}{x_1! x_2! \dots x_n!}$$

или, полагая

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \bar{x},$$

запишем:

$$P(O_n, \lambda) = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{n\bar{x}}}{(n\bar{x})!} \cdot \frac{(n\bar{x})!}{x_1! x_2! \dots x_n!}.$$

Первый множитель есть вероятность равенства

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = n\bar{x}, \quad (5.3.18)$$

определяемая по закону Пуассона, которому согласно (4.2.29) следует сумма величин. Второй множитель представляет условную вероятность при выполнении условия (5.3.18) получить значения x_1, x_2, \dots, x_n . Параметр λ входит лишь в первый множитель и условие (5.3.16) выполняется. Следовательно, средняя арифметическая \bar{x} будет достаточной оценкой λ .

Достаточные оценки в том случае, когда они существуют (что, к сожалению, бывает в довольно специальном классе случаев), представляют наилучшие оценки для параметров.

Заслуга точной формулировки тех требований, которым должны удовлетворять статистические характеристики, служащие для оценки неизвестных параметров, принад-

лежит выдающемуся русскому математику академику А. А. Маркову, впервые применившему понятия несмещенности и эффективности для обоснования метода наименьших квадратов. Дальнейшее развитие этой теории применительно к задачам математической статистики связано с именем Р. Фишера.

5.3.2. Оценка средней и дисперсии по выборке из конечной совокупности. Дисперсия выборочной средней арифметической в этом случае. Здесь мы рассмотрим одну из простейших задач выборочного метода: оценку средней некоторой конечной (т. е. конечного объема N) совокупности по данным выборки. Частным случаем этой задачи будет являться классическая проблема оценки вероятности по наблюдаемой частоте. Случай конечной совокупности представляет некоторые специфические трудности, если выборка производится без возвращения. В этом случае теоретически приходится учитывать зависимость между наблюдениями, так как вероятность появления объекта с рассматриваемым признаком при данном тираже в этом случае зависит от исходов предшествующих тиражей. Зависимость эта сказывается на конечных формулах, по крайней мере, в тех случаях, когда отношение $\frac{n}{N}$ объема выборки к объему всей совокупности достигает заметной величины (например, $\frac{n}{N} > 0,2$). Далее мы подробно исследуем, каким образом указанная зависимость влияет на точность и надежность оценки генеральных параметров.

Предположим, что генеральная совокупность имеет конечное число N объектов, которые характеризуются некоторым количественным признаком X . Пусть x_1, x_2, \dots, x_N — различные значения признака у объектов генеральной совокупности, причем для простоты мы предположим, что никакие два объекта не имеют равных значений признака. Пусть среднее значение признака в генеральной совокупности будет

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}, \quad (5.3.19)$$

а дисперсия признака будет равна

$$\mu_2 = \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - a)^2. \quad (5.3.20)$$

Пусть мы отобрали n объектов из нашей генеральной совокупности и желаем по этой выборке (бесповторной) оценить параметр a — среднюю генеральной совокупности. Пусть \bar{x} есть средняя арифметическая из наблюдаемых в выборке значений X . Посмотрим, с какой точностью \bar{x} оценивает величину a . Мы предполагаем, что любое из C_N^n сочетаний, которое можно образовать из N возможных значений по n , имеет равные шансы попасть в выборку. Равным образом любое из значений x_1, x_2, \dots, x_N с равной вероятностью p может попасть (и с вероятностью $1-p$ не попасть) в выборку. Эту вероятность p легко подсчитать. В самом деле, число таких сочетаний по n , которые содержат некоторое фиксированное значение, например x_j , будет равно C_{N-1}^{n-1} , так как, отбрасывая x_j от каждого сочетания по n , мы получим некоторое сочетание по $(n-1)$, составленное из $(N-1)$ остальных значений $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_N$.

Поэтому

$$p = \frac{C_{N-1}^{n-1}}{C_N^n} = \frac{(N-1)!n!(N-n)!}{(n-1)!(N-n)!N!} = \frac{n}{N}. \quad (5.3.21)$$

К этому же результату мы, естественно, пришли бы, если бы воспользовались формулой (2.2.5), положив $k=K=1$, $S=N$ и $s=n$.

Аналогичным образом легко подсчитать вероятность попадания какой-либо пары (x_i, x_j) $i \neq j$ фиксированных значений X в нашу выборку. Для этого достаточно заметить, что число сочетаний по n , в которые входит рассматриваемая пара, будет равно C_{N-2}^{n-2} и, следовательно,

$$p' = \frac{C_{N-2}^{n-2}}{C_N^n} = \frac{(N-2)!n!(N-n)!}{(n-2)!(N-n)!N!} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}. \quad (5.3.22)$$

Точно так же (5.3.22) мы могли бы получить из (2.2.5), положив $k=K=2$, $S=N$ и $s=n$.

Поставим теперь в соответствие каждому значению x_i случайную величину l_i , принимающую только два значения: 1 и 0; при этом $l_i = 1$, когда x_i попадает в выборку, и $l_i = 0$ в противном случае. Следовательно,

$$P(l_i = 1) = p = \frac{n}{N} \quad \text{и} \quad P(l_i = 0) = 1 - p = 1 - \frac{n}{N}. \quad (5.3.23)$$

Заметим, что величины l_i ($i = 1, 2, \dots, N$) зависимы: они связаны соотношением

$$l_1 + l_2 + \dots + l_N = n, \quad (5.3.24)$$

выражающим тот очевидный факт, что ровно n величин l_i должны получить значение 1 и $N-n$ величин — значение 0, так как ровно n значений X из общего числа N значений попадает в выборку.

Мы можем представить теперь среднюю арифметическую \bar{x} (рассматриваемую как случайную величину) в следующем виде:

$$\bar{x} = \frac{x_1 l_1 + x_2 l_2 + \dots + x_N l_N}{n}. \quad (5.3.25)$$

Если выборка реализована и вышли значения X с номерами i_1, i_2, \dots, i_n , то это значит, что $l_{i_1} = l_{i_2} = \dots = l_{i_n} = 1$, тогда как все остальные величины l_k равны нулю и средняя арифметическая в выборке получила значение

$$\bar{x} = \frac{x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_n}}{n}.$$

Таким образом, числитель (5.3.25) представляет сумму тех значений X , которые попали в выборку.

Найдем теперь математическое ожидание и дисперсию величины \bar{x} .

Прежде всего из (5.3.25), (3.3.12) и (3.3.13) следует:

$$M\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N M(x_i l_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x_i M l_i,$$

так как x_i здесь постоянные величины — значения признака в генеральной совокупности.

Но из (3.3.1) и (5.3.21) следует:

$$M l_i = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p = \frac{n}{N} \quad (5.3.26)$$

и потому

$$M\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = a. \quad (5.3.27)$$

Таким образом, *средняя арифметическая \bar{x} является несмещенной оценкой для a .*

Вычислим теперь дисперсию величины \bar{x} .

Так как на основании (5.3.24) и (5.3.25) мы можем написать:

$$\bar{x} - a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x_i l_i - a \frac{\sum_{i=1}^N l_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (x_i - a) l_i,$$

то

$$\begin{aligned} D\bar{x} &= M(\bar{x} - a)^2 = M \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (x_i - a) l_i \right]^2 = \frac{1}{n^2} M \left[\sum_{i=1}^N (x_i - a) l_i \right]^2 = \\ &= \frac{1}{n^2} M \left[\sum_{i=1}^N (x_i - a)^2 l_i^2 + \sum_{i \neq j} (x_i - a)(x_j - a) l_i l_j \right] = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^N (x_i - a)^2 M l_i^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} (x_i - a)(x_j - a) M(l_i l_j). \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

Но из (3.3.1) и (5.3.21) имеем:

$$M l_i^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1 - p) = p = \frac{n}{N}, \quad (5.3.29)$$

а из (3.3.1) и (5.3.22)

$$M(l_i l_j) = 1 \cdot 1 \cdot p' + (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)(1 - p') = 1^2 \cdot p' = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}; \quad (5.3.29')$$

из (5.3.28), (5.3.29), (5.3.29') и (5.3.20) следует:

$$\begin{aligned} D\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} (x_i - a)^2 + \frac{n-1}{N(N-1)n} \sum_{i \neq j} (x_i - a)(x_j - a) = \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{n-1}{N(N-1)n} \sum_{i=1}^N \left[(x_i - a) \sum_{j \neq i} (x_j - a) \right], \end{aligned} \quad (5.3.30)$$

но из (5.2.10)

$$\sum_{j=1}^N (x_j - a) = \sum_{j=1}^N x_j - Na = Na - Na = 0$$

и потому при каждом фиксированном i , естественно,

$$\sum_{j \neq i} (x_j - a) = \sum_{j=1}^N (x_j - a) - (x_i - a) = 0 - (x_i - a) = -(x_i - a).$$

Отсюда и из (5.3.20) следует:

$$\sum_{i=1}^N [(x_i - a) \sum_{j \neq i} (x_j - a)] = - \sum_{i=1}^N (x_i - a)^2 = -N\sigma^2;$$

подставляя это значение в (5.3.30), получим:

$$D\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{n-1}{N-1} \frac{\sigma^2}{n},$$

откуда

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = D\bar{x} = \frac{N-n}{N-1} \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1 - \frac{n}{N}}{1 - \frac{1}{N}} \frac{\sigma^2}{n} \quad (5.3.31)$$

и

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1 - \frac{n}{N}}{1 - \frac{1}{N}}}. \quad (5.3.32)$$

Если признак X имеет лишь качественный характер и каждый объект генеральной совокупности может только обладать или не обладать им, то подлежит оценке доля объектов, обладающая признаком X в генеральной совокупности. Мы можем и этот случай привести к только что рассмотренной схеме, приписывая объектам выборки значения 1 и 0, смотря по тому, обладают они или не обладают данным признаком.

Пусть $x_1 = x_2 = \dots = x_\mu = 1$ и $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \dots, x_N = 0$, так что

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{\mu \cdot 1 + 0 \cdot (N - \mu)}{N} = \frac{\mu}{N} = p \quad (5.3.33)$$

будет долей признака в генеральной совокупности.

Далее

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(x_i - \frac{\mu}{N}\right)^2 = \frac{\mu}{N} \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^2 + \frac{N - \mu}{N} \cdot \frac{\mu^2}{N^2} = \frac{\mu}{N} \left(1 - \frac{\mu}{N}\right) = p(1 - p). \quad (5.3.34)$$

Подставляя (5.3.34) в (5.3.32) и замечая, что в данном случае среднее арифметическое \bar{x} совпадает с частотой $\frac{m}{n}$ признака в выборке, получим:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{n}{N}}{1 - \frac{1}{N}}}. \quad (5.3.35)$$

Точность и надежность определения a (или p) по выборке данного объема в первую очередь характеризуется величиной среднего квадратического отклонения $\sigma_{\bar{x}}$ (или $\sigma_{\frac{m}{n}}$).

Мы видим, что величины $\sigma_{\bar{x}}$ и $\sigma_{\frac{m}{n}}$ отличаются в бесповторной выборке от соответствующих им значений (3.4.21) и (3.7.16) в повторной лишь множителем

$$C = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{n}{N}}{1 - \frac{1}{N}}},$$

который меньше единицы. Однако это различие в большинстве случаев не имеет практического значения, так как обычно отношение $\frac{n}{N}$ объема n выборки к объему N генеральной совокупности мало, и множитель C близок к единице.

Так, при 10%-ной выборке $\frac{n}{N} = 0,1$, $0,95 = \sqrt{0,9} < C < 1$ и поэтому $\sigma_{\bar{x}}$ составляет от 0,95 до 1 своего значения в повторной выборке.

Вообще точность оценки a по \bar{x} , как следует из (5.3.32), мало зависит от объема N совокупности и гораздо больше зависит от абсолютного значения объема n выборки.

При возрастании n точность выборки возрастает примерно в \sqrt{n} раз так, как в этом отношении (приблизительно) уменьшается среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\bar{x}}$.

Такая зависимость $\sigma_{\bar{x}}$ от n приводит к тому, что применяемые на практике объемы выборок обычно бывают сравнительно невелики, так как небольшое их дальнейшее увеличение очень мало влияет на точность оценки, а значительное дальнейшее повышение точности требует уже несоразмерно больших объемов выборки.

Пример 5.3.3. Из партии деталей в 2000 штук отобрана проба объема в 140 штук.

Средняя высота детали оказалась равной $\bar{x} = 32,46$ мм и эмпирическое среднее квадратическое отклонение $s = 0,31$ мм. Требуется сравнить средние квадратические отклонения $\sigma_{\bar{x}}$ средней арифметической для возвратной и безвозвратной выборки.

Для возвратной выборки по соотношению (3.4.21) будем иметь:

$$\sigma_{\bar{x}} \cong \frac{0,31}{\sqrt{140}} = 0,026 \text{ мм.}$$

Для безвозвратной выборки, учитывая конечный объем генеральной совокупности $N = 2000$, мы с помощью соотношения (5.3.32) получим:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{0,31}{\sqrt{140}} \sqrt{\frac{1 - \frac{140}{2000}}{1 - \frac{1}{2000}}} = 0,025 \text{ мм.}$$

В данном примере разница между двумя приближенными значениями $\sigma_{\bar{x}}$ составила 4%.

Пример 5.3.4. Пусть требуется сравнить средние квадратические отклонения с учетом и без учета объема совокупности частоты поковок с окалиной в партии из 2000 штук деталей, если в выборке из 140 штук оказалось 7 штук поковок с окалиной.

Принимая частоту признака в выборке $\frac{7}{140} = 0,05 = 5\%$ за приближенное значение доли p в генеральной совокупности по формулам (3.7.15) и (5.3.35), получим:

$$\sigma_{\frac{m}{n}} \approx \sqrt{\frac{0,05(1-0,05)}{140}} = 0,0185 = 1,85\%.$$

$$\sigma'_{\frac{m}{n}} \approx \sqrt{\frac{0,05(1-0,05)}{140}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{140}{2000}}{1 - \frac{1}{2000}}} = 0,0178 = 1,78\%.$$

Так же как и в примере 5.33, здесь разница получилась около 4%.

Остановимся еще на оценке дисперсии конечной генеральной совокупности.

Выше мы представили случайную величину \bar{X} с помощью случайных величин l_i равенством (5.3.25).

Рассмотрим теперь величину

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N l_k (x_k - \bar{X})^2, \quad (5.3.36)$$

где x_k представляет, так же как в (5.3.25), возможные значения величины X в совокупности. Если в выборке реализовались значения величины X с номерами i_1, i_2, \dots, i_n , то средняя арифметическая \bar{X} примет значение

$$\frac{x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_n}}{n} = \bar{x} \quad \text{и} \quad l_{i_1} = l_{i_2} = \dots = l_{i_n} = 1,$$

тогда как все остальные значения l_k (при $k \neq i_1, i_2, \dots, i_n$) равны нулю. Поэтому возможным значением величины s^2 будет

$$s^2 = \frac{(x_{i_1} - \bar{x})^2 + (x_{i_2} - \bar{x})^2 + \dots + (x_{i_n} - \bar{x})^2}{n},$$

т. е. выборочная дисперсия, определяемая (5.2.4).

Случайную величину s^2 можно записать в несколько ином виде

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N l_k (x_k - a + a - \bar{X})^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N l_k (x_k - a)^2 + \frac{2(a - \bar{X})}{n} \sum_{k=1}^N l_k (x_k - a) + \frac{(\bar{X} - a)^2}{n} \sum_{k=1}^N l_k. \end{aligned}$$

Но так как

$$\sum_{k=1}^N l_k = n \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^N l_k (x_k - a) = \sum_{k=1}^N l_k x_k - a \sum_{k=1}^N l_k = n\bar{X} - na = n(\bar{X} - a),$$

то

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N l_k (x_k - a)^2 - 2(\bar{X} - a) + (\bar{X} - a)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N l_k (x_k - a)^2 - (\bar{X} - a)^2.$$

Таким образом,

$$Ms^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N (x_k - a)^2 Ml_k - M(\bar{X} - a)^2.$$

Но, принимая во внимание (5.3.26) и (5.3.31), найдем:

$$\begin{aligned} Ms^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N (x_k - a)^2 \frac{n}{N} - D\bar{X} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} (x_k - a)^2 - D\bar{X} = DX - D\bar{X} = \\ &= \sigma^2 - \sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right)}{1 - \frac{1}{N}} = \sigma^2 \left[1 - \frac{N-n}{n(N-1)}\right] = \\ &= \sigma^2 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{N}{N-1} = \sigma^2 \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{N}}. \end{aligned} \quad (5.3.37)$$

Отсюда следует, что величина

$$s^{*2} = \frac{n}{n-1} \frac{N-1}{N} s^2 = \frac{N-1}{N} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (5.3.38)$$

будет несмещенной оценкой дисперсии σ^2 в безвозвратной (бесповторной) выборке. Переход от s^2 к s^{*2} в большинстве случаев не является целесообразным, так как множитель $\frac{n}{n-1} \frac{N-1}{N}$ несущественно отличается от единицы.

Пример 5.3.5. Требуется по условиям примера 5.3.3 сравнить эмпирическую дисперсию s^2 с несмещенной оценкой s^{*2} дисперсии.

По формуле (5.3.38) получаем:

$$s^{*2} = \frac{2000-1}{2000} \cdot \frac{140 \cdot 0,31^2}{140-1} = \frac{1999}{2000} \cdot \frac{140}{139} \cdot 0,0961 = 0,0967.$$

Эмпирическая дисперсия s^2 будет равна

$$s^2 = 0,31^2 = 0,0961.$$

Разница между эмпирической дисперсией и несмещенной оценкой дисперсии составила в данном случае только 0,6%.

5.3.3. Оценка средней при выборке по группам («типическая выборка»). Сравнительное уменьшение дисперсии средней арифметической. Иногда на практике обследуемая совокупность по имеющимся заранее данным может быть разбита на группы известного объема, обладающие (по отношению к интересующему нас признаку) большей однородностью, чем вся совокупность; в этом случае выбор производится из отдельных групп, причем назначение числа единиц из каждой группы, включаемых в выборку, производится не случайным, а заранее обдуманном способом. Такая выборка приводит при одном и том же суммарном объеме к значительно лучшему результату. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть мы имеем совокупность ω , разбитую на k групп ω_j ($j = 1, 2, \dots, k$), каждая с функцией распределения $F_j(x)$, так что $F_j(x) = P(X < x | X \in \omega_j)$ — вероятности неравенства $X < x$ при условии, что объект берется из группы ω_j .

Обозначим через

$$p_j = P(X \in \omega_j)$$

вероятность наудачу взятому объекту совокупности принадлежать группе ω_j .

Тогда, очевидно,

$$\sum_{j=1}^k p_j = 1.$$

Чтобы найти функцию распределения X , мы можем применить формулу (2.2.23) полной вероятности

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{j=1}^k P(X \in \omega_j) P(X < x | X \in \omega_j) = \sum_{j=1}^k p_j F_j(x). \quad (5.3.39)$$

Таким образом, $F(x)$ является средним взвешенным из условных функций распределения $F_j(x)$. Отсюда легко вывести, что начальный момент ν_s величины X выражается как взвешенное среднее начальных моментов ν_{sj} условных распределений с весами p_j ($j = 1, 2, \dots, k$). В частности, обозначая математическое ожидание величины X через a и ее дисперсию через σ^2 , мы будем иметь:

$$\nu_1 = a = \sum_{j=1}^k p_j a_j, \quad (5.3.40)$$

где $a_j = \nu_{1j}$ представляет первый начальный момент группы ω_j .

Аналогично

$$\nu_2 = \sum_{j=1}^k p_j \nu_{2j}. \quad (5.3.41)$$

Используя соотношение $\sigma^2 = \nu_2 - a^2$, получим:

$$\sigma^2 + a^2 = \sum_{j=1}^k p_j (\sigma_j^2 + a_j^2),$$

где σ_j^2 представляет дисперсию распределения, соответствующего $F_j(x)$, откуда

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^k p_j (\sigma_j^2 + a_j^2) - a^2 = \sum_{j=1}^k p_j \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^k p_j a_j^2 - a^2 = \sum_{j=1}^k p_j \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^k p_j (a_j - a)^2 \quad (5.3.42)$$

или

$$\sigma^2 = \bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2, \quad (5.3.43)$$

где $\bar{\sigma}^2$ есть *средняя взвешенная дисперсий* в отдельных группах (ее называют также остаточной дисперсией «внутри групп»), и величина $\sigma_a^2 = \sum_{j=1}^k p_j (a_j - a)^2$ характеризует рассеивание групповых средних a_j около генеральной средней, т. е. степень неоднородности совокупности (она часто называется «дисперсией между группами»).

Если производится возвратная выборка объема n , то, как мы знаем из (3.4.20), дисперсия средней арифметической \bar{x} как оценка неизвестной генеральной средней a определяется величиной $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$, где σ^2 задается выражением (5.3.42). Мы покажем теперь, что в некоторых случаях возможно оценивать a более точным образом при том же объеме n выборки. Предположим, например, что вероятности p_j известны; это будет всякий раз так, когда известны численности N_1, N_2, \dots, N_k отдельных групп $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$. Тогда при случайном отборе

$$p_j = \frac{N_j}{N}. \quad (5.3.44)$$

Пусть выборка O_n отбирается теперь по следующему правилу: из группы ω_1 отбирается часть $O^{(1)}$ объема n_1 , из группы ω_2 , независимо от первой, отбирается часть $O^{(2)}$ объема n_2 , ..., из группы ω_k — часть $O^{(k)}$ объема n_k . Числами n_j ($j = 1, 2, \dots, k$) мы можем располагать по своему усмотрению, лишь бы удовлетворялось соотношение

$$\sum_{j=1}^k n_j = n.$$

Обозначим через \bar{x}_R среднюю арифметическую всей выборки O_n и через \bar{x}_j среднюю арифметическую выборки $O^{(j)}$ из группы ω_j .

Тогда, очевидно,

$$\bar{x}_R = \sum_{j=1}^k \bar{x}_j \frac{n_j}{n}, \quad (5.3.45)$$

$$M\bar{x}_R = \sum_{j=1}^k M\bar{x}_j \frac{n_j}{n} = \sum_{j=1}^k a_j \frac{n_j}{n}, \quad (5.3.46)$$

так как $M\bar{x}_j = a_j$.

Если мы хотим использовать \bar{x}_R в качестве несмещенной оценки математического ожидания a , согласно (5.3.40) равного

$$a = \sum_{j=1}^k a_j p_j,$$

то мы вводим требование

$$\sum_{j=1}^k a_j p_j = \sum_{j=1}^k a_j \frac{n_j}{n} \quad \text{при любых } a_j.$$

Ясно, что такое требование равносильно тому, чтобы n_j было равно $p_j n$. Если

$$n_j = n p_j = n \frac{N_j}{N}, \quad (5.3.47)$$

то выборку O_n называют «типической выборкой».

Преимущество «типической выборки» по группам заключается в том, что при одинаковых объемах выборки выполняется неравенство

$$\sigma_{x_R}^2 \leq \sigma_x^2, \tag{5.3.48}$$

т. е. дисперсия $\sigma_{x_R}^2$ средней арифметической типической выборки не больше дисперсии σ_x^2 простой выборки того же объема, причем знак равенства имеет место лишь в том весьма редком случае, когда все a_j равны между собой. Докажем неравенство (5.3.48).

Заметим, что при $\frac{n_j}{n} = p_j$ (5.3.45) дает:

$$\bar{x}_R = \sum_{j=1}^k p_j \bar{x}_j. \tag{5.3.49}$$

Другими словами, в качестве оценки a мы берем среднее взвешенное из средних арифметических отдельных выборок из групп ω_j с весами, равными $p_j = \frac{N_j}{N}$. Учитывая независимость x_j , мы с помощью теоремы (3.4.17) и соотношения (5.3.28) найдем:

$$\sigma_{x_R}^2 = \sum_{j=1}^k \sigma_{x_j}^2 p_j^2,$$

но согласно (5.3.31)

$$\sigma_{x_j}^2 = \frac{1 - \frac{n_j}{N_j}}{1 - \frac{1}{N_j}} \frac{\sigma_j^2}{n_j},$$

а потому

$$\sigma_{x_R}^2 = \sum_{j=1}^k p_j^2 \frac{1 - \frac{n_j}{N_j}}{1 - \frac{1}{N_j}} \frac{\sigma_j^2}{n_j}. \tag{5.3.50}$$

С другой стороны, нетрудно усмотреть неравенство

$$\sigma_{x_j}^2 \leq \frac{\sigma_j^2}{n_j}, \tag{5.3.51}$$

выражающее то обстоятельство, что дисперсия средней арифметической при безвозвратной выборке не превосходит дисперсию при возвратной выборке. Ввиду этого

$$\sigma_{x_R}^2 \leq \sum_{j=1}^k \frac{\sigma_j^2}{n_j} p_j^2 = \sum_{j=1}^k p_j \frac{n_j}{n} \frac{\sigma_j^2}{n_j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k p_j \sigma_j^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{n}. \tag{5.3.52}$$

В правой части (5.3.52) стоит остаточная дисперсия, которую мы в (5.3.43) обозначили через σ^2 .

Так как согласно (5.3.43)

$$\sigma^2 = \bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2,$$

то

$$\sigma_{x_R}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}{n} > \frac{\bar{\sigma}^2}{n}$$

и, значит,

$$\sigma_{x_R}^2 < \sigma_x^2.$$

Тем самым (5.3.48) доказано.

Таким образом, на практике дисперсия $\sigma_{x_R}^2$ средней арифметической при «типической выборке» бывает меньше дисперсии σ_x^2 средней арифметической при простой выборке того же объема n на величину

$$\sim \frac{\sigma_a^2}{n} \quad (5.3.53)$$

и, следовательно, приводит к значительно лучшим результатам, особенно в том случае, когда дисперсия σ_a^2 между группами (т. е. неоднородность) значительна по сравнению с суммарной дисперсией σ^2 .

Не вдаваясь в подробности, заметим, что в том случае, когда, кроме объемов N_j группы, известны также (хотя бы приближенно) дисперсии σ_j^2 каждой группы, можно еще более уточнить оценку величины a , определяя численность выборки из каждой группы следующим равенством:

$$n_j = \frac{n p_j \sigma_j}{\sum_{i=1}^k p_i \sigma_i}. \quad (5.3.54)$$

В этом случае дисперсия характеристики

$$y = \sum_{i=1}^k x_i p_i = \sum_{i=1}^k x_i \frac{N_i}{N}$$

будет меньше, чем у величины \bar{x}_R , определенной ранее.

Отметим еще два важных частных случая выборки по группам.

В первом случае, когда все группы имеют одинаковый объем, т. е.

$$N_1 = N_2 = \dots = N_k = \frac{N}{k},$$

и объем выборок из групп постоянен, т. е.

$$n_1 = n_2 = \dots = n_k = \frac{n}{k}.$$

Так как

$$p_j = \frac{1}{k}, \quad p_j^2 = p_j \frac{1}{k} \quad \text{и} \quad \frac{1 - \frac{n_j}{N_j}}{1 - \frac{1}{N_j}} \cdot \frac{1}{n_j} = \frac{1 - \frac{n}{N}}{1 - \frac{k}{N}} \frac{k}{n},$$

то по аналогии с выводом (5.3.48)

$$\sigma_{x_R}^2 = \frac{1 - \frac{n}{N}}{1 - \frac{k}{N}} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_j \sigma_j^2 = \frac{1 - \frac{n}{N}}{1 - \frac{k}{N}} \frac{\sigma^2}{n}. \quad (5.3.55)$$

Во втором случае, когда все группы также имеют одинаковый объем, т. е.

$$N_1 = N_2 = \dots = N_k = \frac{N}{k},$$

а объем выборок из групп равен единице, т. е.

$$n_1 = n_2 = \dots = n_k = 1 \Rightarrow \frac{n}{n} \quad \text{и} \quad k = n,$$

то из (5.3.55) вытекает, что

$$\sigma_{x_R}^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{n}. \quad (5.3.56)$$

Выборка такого рода называется «механической» выборкой.

Пример 5.3.6. Имеется партия штамповок одного типа, полученных за 7 смен работы горизонтально-ковочной машины, в следующих количествах:

смена № 1	500
» № 2	400
» № 3	300
» № 4	400
» № 5	400
» № 6	500
» № 7	500

Итого . . . 3000 штук

Из продукции за каждую смену работы машины были отобраны выборки в объеме 50% от числа штамповок, выработанных за данную смену.

Отобранные штамповки были измерены по высоте, и для каждой выборки были вычислены средние арифметические и несмещенные оценки дисперсий σ_j^2 в следующем виде.

Таблица 5.3.1

№ смен	1	2	3	4	5	6	7	Итого
\bar{x}_j	32,49	32,74	32,54	32,45	32,30	32,35	32,31	—
s_j^2	0,067	0,136	0,168	0,068	0,066	0,102	0,137	—
Объем вы- борки n_j	25	20	15	20	20	25	25	150

Требуется по выборочным данным определить среднюю арифметическую и оценку ее среднего квадратического отклонения при «типической» выборке.

По формуле (5.3.45) находим:

$$\begin{aligned} \bar{x}_R = & 32,49 \cdot \frac{25}{150} + 32,74 \cdot \frac{20}{150} + 32,54 \cdot \frac{15}{150} + 32,45 \cdot \frac{20}{150} + 32,30 \cdot \frac{20}{150} + \\ & + 32,35 \cdot \frac{25}{150} + 32,31 \cdot \frac{25}{150} = 32,44 \text{ мм.} \end{aligned}$$

По формуле (5.3.50), полагая $p_j = \frac{N_j}{N}$ и заменяя теоретические дисперсии σ_j^2 их приближенными значениями, получаем:

$$\begin{aligned} \bar{s}_{x_R}^2 = & \frac{1}{3000^2} \left(500^2 \cdot \frac{1 - \frac{25}{500}}{1 - \frac{1}{500}} \cdot \frac{0,067}{25} + 400^2 \cdot \frac{1 - \frac{20}{400}}{1 - \frac{1}{400}} \cdot \frac{0,136}{20} + 300^2 \cdot \frac{1 - \frac{15}{300}}{1 - \frac{1}{300}} \cdot \frac{0,168}{15} + \right. \\ & + 400^2 \cdot \frac{1 - \frac{20}{400}}{1 - \frac{1}{400}} \cdot \frac{0,068}{20} + 400 \cdot \frac{1 - \frac{20}{400}}{1 - \frac{1}{400}} \cdot \frac{0,066}{20} + 500^2 \cdot \frac{1 - \frac{25}{500}}{1 - \frac{1}{500}} \cdot \frac{0,102}{25} + \\ & \left. + 500^2 \cdot \frac{1 - \frac{25}{500}}{1 - \frac{1}{500}} \cdot \frac{0,137}{25} \right) = 0,00066 \text{ мм}^2; \end{aligned}$$

$$\bar{s}_{x_R} = 0,026.$$

Пример 5.3.7. Пусть продукция горизонтально-ковочной машины за 7 смен составила 2800 штук колец по 400 колец в каждую смену. Из продукции за каждую смену берется по 20 колец. Средняя арифметическая высота кольца и несмещенные оценки дисперсий в выборках по сменам пусть остаются такими же, как это было показано в примере 5.3.6.

Теперь требуется оценить среднее квадратическое отклонение общей по сменам средней высоты кольца.

Находим:

$$\bar{x}_R = \frac{32,49 + 32,74 + \dots + 32,31}{7} = 32,45 \text{ мм},$$

$$\bar{s}_j^2 = \frac{0,067 + 0,136 + \dots + 0,137}{7} = 0,106 \text{ мм}^2,$$

По формуле (5.3.55) находим:

$$\bar{s}_{xR}^2 = \frac{1 - \frac{140}{2800}}{1 - \frac{7}{2800}} \cdot \frac{0,106}{140} = 0,00072 \text{ мм}^2,$$

$$\bar{s}_{xR} = \sqrt{0,00072} = 0,027 \text{ мм}.$$

5.3.4. Случай большой выборки из совокупности неограниченного объема
Метод моментов. Оценки центра распределения и дисперсии. Здесь мы рассмотрим случай большого числа наблюдений, когда n достаточно велико, чтобы иметь право с хорошим приближением пользоваться асимптотическими формулами; генеральную совокупность мы предположим для простоты неограниченно большой.

Как уже указывалось в 5.3.1, в этом случае достаточно, чтобы статистическая оценка того или иного неизвестного параметра удовлетворяла лишь первому из трех вышеописанных требований, а именно, чтобы она была состоятельной. Здесь можно не требовать, чтобы оценка была строго несмещенной и эффективной, если при большом числе наблюдений систематическая ошибка будет пренебрежимо мала, а дисперсия выборочного распределения оценки будет так или иначе обеспечивать достаточно хорошую концентрацию ее значений около оцениваемого параметра. При большом числе наблюдений в качестве оценок неизвестных параметров теоретического распределения могут быть непосредственно использованы эмпирические моменты, подсчитываемые по значениям выборки с помощью формул (5.2.5)–(5.2.40). Такой способ получения оценок носит название *метода моментов*.

Состоятельность этого метода проще всего обнаружить, применяя теорему А. Я. Хинчина, утверждающую, что ко всякой последовательности одинаково распределенных независимых величин Z_1, Z_2, \dots, Z_n , математическое ожидание которых имеет определенное конечное значение

$$M Z_1 = M Z_2 = \dots = M Z_n = a,$$

применим закон больших чисел или, другими словами, средняя арифметическая $\frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n}$ этих величин сходится по вероятности к a при $n \rightarrow \infty$.

В самом деле, момент r -го порядка $a_r = \frac{X_1^r + X_2^r + \dots + X_n^r}{n}$ является средней арифметической из величин $Z_k = X_k^r$, одинаково распределенных и обладающих одним и тем же математическим ожиданием $M Z_k = M X_k^r = \nu_r$. Таким образом, если существует момент ν_r теоретического распределения, т. е. если ряд для дискретной величины или интеграл для непрерывной величины, определяющие момент ν_r в соотношении (3.6.2), сходятся абсолютно (см. соот-

ношение (3.3.3)), то эмпирический начальный момент a_r порядка r сходится по вероятности к теоретическому начальному моменту ν_r того же порядка. Аналогично этому эмпирические центральные моменты m_r сходятся по вероятности к теоретическим центральным моментам μ_r . Это и означает, что *эмпирические моменты являются состоятельными оценками соответствующих теоретических моментов*.

Чтобы получить по методу моментов статистические оценки для параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, заметим, что теоретические моменты μ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) являются определенными функциями от параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, от которых зависит закон распределения рассматриваемой величины X . Обратно, зная моменты $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$, можно через них выразить параметры θ_i так, что в этом случае параметры

$$\theta_i = \theta_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) \quad (5.3.57)$$

будут определенными функциями моментов μ_i . Заменяя теперь в (5.3.57) значения $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_k$ по данным выборки их приближенными статистическими оценками m_1, m_2, \dots, m_k и принимая во внимание, что моменты μ_i зависят от наблюдаемых значений x_1, x_2, \dots, x_n , будем иметь:

$$\begin{aligned} \theta_i &= \theta_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) \approx \theta_i(m_1, m_2, \dots, m_k) = \\ &= \theta_i[m_1(x_1, x_2, \dots, x_n), m_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, m_k(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \\ &= \bar{\theta}_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (5.3.58)$$

Полученные таким образом функции $\bar{\theta}_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и будут служить приближенными оценками параметров θ_i . В самом деле, ввиду сходимости по вероятности моментов m_i к моментам μ_i функции $\bar{\theta}_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \theta_i(m_1, m_2, \dots, m_k)$ будут (при некоторых добавочных ограничениях) состоятельными оценками функций $\theta_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$, т. е. параметров θ_i .

Точность соотношений (5.3.58) зависит от степени приближения эмпирических моментов к оцениваемым теоретическим¹⁾.

Согласно теореме (4.3.37) Ляпунова при достаточно большом числе наблюдений выборочные распределения эмпирических моментов, представляющих средние арифметические независимых величин вида X_k^r ($k = 1, 2, \dots, n$), и будут близки к нормальному распределению с центром $MX_k^r = \mu_r$ и дисперсией $D\left(\frac{\sum X_k^r}{n}\right)$ (выражающейся в свою очередь через моменты более высоких порядков).

Обратимся теперь к средней арифметической \bar{x} как к оценке первого начального момента ν_1 распределения, т. е. его математического ожидания.

Ранее мы уже видели (соотношение (5.2.45)), что $M\bar{x} = \nu_1$, т. е. что *средняя арифметическая \bar{x} является несмещенной оценкой первого начального момента ν_1 распределения* (вместе с тем она является, конечно, и состоятельной оценкой).

Выборочное распределение средней арифметической \bar{x} , полученной из (практической) любой генеральной совокупности, при большом объеме n выборки достаточно близко к нормальному. Параметры этого нормального распределения, как мы уже видели в 3.4.3, определяются соотношениями

$$M\bar{x} = \nu_1 = a, \quad D\bar{x} = \sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{n}, \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

В этом последнем случае теоретическая или генеральная дисперсия σ^2 также является неизвестной и ее приходится оценивать в свою очередь по *эмпириче-*

1) См., например, книгу Г. Крамер, Математические методы статистики, ИЛ, М., 1948, § 24.4.

ской дисперсии, т. е. по эмпирическому центральному моменту второго порядка $m_2 = s^2$. Заметим прежде всего, что на основании (5.2.4), выбрав «ложный нуль» в точке $c = \nu_1$, будем иметь тождество

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \nu_1)^2 - (\bar{X} - \nu_1)^2.$$

Поэтому

$$M s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M (X_i - \nu_1)^2 - M (\bar{X} - \nu_1)^2. \quad (5.3.59)$$

Но X_1, X_2, \dots, X_n мы рассматриваем как n экземпляров одной и той же величины X и

$$M (X_1 - \nu_1)^2 = \dots = M (X_n - \nu_1)^2 = M (X - \nu_1)^2 = DX = \sigma^2$$

и согласно (3.4.21)

$$M (\bar{X} - \nu_1)^2 = D\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n},$$

а потому из (5.3.59) следует:

$$M s^2 = \frac{1}{n} n \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

т. е.

$$M m_2 = M s^2 = \sigma^2 \frac{n-1}{n}. \quad (5.3.60)$$

Отсюда видно, что эмпирическая дисперсия не является несмещенной оценкой теоретической дисперсии.

Чтобы получить несмещенную оценку \bar{s}^2 теоретической дисперсии $DX = \mu_2$, необходимо эмпирическую дисперсию $s^2 = m_2$ умножить на $\frac{n}{n-1}$, т. е.

$$\bar{s}^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \quad (5.3.61)$$

Таким образом, несмещенная оценка теоретической дисперсии отличается от эмпирической дисперсии только тем, что при ее вычислении сумму квадратов вида $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ делят не на n , а на $n-1$. Практически эту поправку вносят при вычислении оценок дисперсии лишь в тех случаях, когда n меньше 30—40.

Легко убедиться в том, что \bar{s}^2 действительно является несмещенной оценкой параметра μ_2 . В самом деле, из (5.3.60) и (5.3.61) получаем:

$$M \bar{s}^2 = M \left(\frac{n}{n-1} s^2 \right) = \frac{n}{n-1} M s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \mu_2 = \mu_2.$$

Окончательно

$$M \bar{s}^2 = \mu_2 = D\bar{x} = \sigma_{\bar{x}}^2, \quad (5.3.62)$$

а это и означает, что \bar{s}^2 является несмещенной оценкой теоретического второго центрального момента, или, что то же самое, теоретической дисперсии.

Для третьего и четвертого теоретических центральных моментов μ_3 и μ_4 несмещенными оценками будут¹⁾:

$$\bar{m}_3 = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} m_3, \quad (5.3.63)$$

$$\bar{m}_4 = \frac{n(n^2-2n+3)}{(n-1)(n-2)(n-3)} m_4 - \frac{3n(2n-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)} m_2^2, \quad (5.3.64)$$

¹⁾ См., например, книгу В. И. Романовского, Математическая статистика, ГОНТИ, М.—Л., 1938, § 49.

где n — объем выборки, m_2 , m_3 и m_4 — соответственно второй, третий и четвертый эмпирические центральные моменты, вычисляемые по данным выборки с помощью формул (5.2.4) ÷ (5.2.40).

Найдем теперь дисперсию $Dm_2 = Ds^2$ эмпирической дисперсии $m_2 = s^2$. Для этого возьмем квадрат эмпирической дисперсии, который согласно (5.2.12) и (5.2.13) может быть представлен в виде

$$m_2^2 = (a_2 - a_1^2)^2 = (a_2 - \bar{x}^2)^2 = a_2^2 - 2a_2\bar{x}^2 + \bar{x}^4. \quad (5.3.65)$$

Полагая всюду $v_1 = 0$, получим:

$$Ma_2^2 = M \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2 = \frac{1}{n^2} M \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2.$$

Так как

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2 = x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + \dots + 2x_{n-1}^2x_n^2,$$

то, беря математическое ожидание и замечая, что ввиду равноправности отдельных наблюдений

$$Mx_1^4 = Mx_2^4 = \dots = Mx_n^4 = \mu_4;$$

$$M(x_1^2x_2^2) = Mx_1^2 \cdot Mx_2^2 = \mu_2\mu_2 = \mu_2^2$$

и аналогично

$$M(x_1^2x_3^2) = \dots = M(x_{n-1}^2x_n^2) = \mu_2^2,$$

мы получим:

$$Ma_2^2 = \frac{1}{n^2} M \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2 = \frac{n\mu_4 + 2 \frac{n(n-1)}{2} \mu_2^2}{n^2} = \frac{\mu_4 + (n-1)\mu_2^2}{n}. \quad (5.3.66)$$

Далее точно так же

$$M(\bar{x}^2 \cdot a_2) = \frac{1}{n^3} M \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \right] = \frac{\mu_4 + (n-1)\mu_2^2}{n^2}. \quad (5.3.67)$$

Таким же образом

$$M\bar{x}^4 = \frac{1}{n^4} M \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4 = \frac{\mu_4 + 3(n-1)\mu_2^2}{n^3}. \quad (5.3.68)$$

Принимая во внимание (5.3.65), (5.3.66), (5.3.67) и (5.3.68), будем иметь:

$$\begin{aligned} Mm_2^2 &= M(a_2^2 - 2a_2\bar{x}^2 + \bar{x}^4) = Ma_2^2 - 2M(a_2\bar{x}^2) + M\bar{x}^4 = \\ &= \frac{\mu_4 + (n-1)\mu_2^2}{n} - 2 \frac{\mu_4 + (n-1)\mu_2^2}{n^2} + \frac{\mu_4 + 3(n-1)\mu_2^2}{n^3} = \\ &= \mu_2^2 + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n} - \frac{2\mu_4 - 5\mu_2^2}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^3}. \end{aligned} \quad (5.3.69)$$

Теперь дисперсия эмпирической дисперсии s^2 может быть получена из соотношений (3.4.7), (5.3.69) и (5.3.60) в следующем виде:

$$\begin{aligned} Ds^2 = Dm_2 &= Mm_2^2 - (Mm_2)^2 = \mu_2^2 + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n} - \frac{2\mu_4 - 5\mu_2^2}{n^2} + \\ &+ \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^3} - \left(\frac{n-1}{n} \mu_2 \right)^2 = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n} - \frac{2(\mu_4 - 2\mu_2^2)}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^3}. \end{aligned} \quad (5.3.70)$$

На основании (5.3.70) приближенным выражением для дисперсии s^2 можно считать следующее:

$$Ds^2 \approx \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n} \quad (5.3.71)$$

и

$$\sigma_{s^2} \approx \sqrt{\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n}}. \quad (5.3.72)$$

Из (5.3.70) или (5.3.71) следует, что $Ds^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а это и означает, что оценка s^2 является состоятельной оценкой σ^2 .

Если выборка взята из нормальной генеральной совокупности, то с помощью соотношений (4.3.20) и (4.3.27) мы можем соотношения (5.3.60) и (5.3.70) привести к виду

$$Ms^2 = Mm_2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \approx \sigma^2, \quad (5.3.73)$$

$$Ds^2 = Dm_2 = \frac{3\sigma^4 - \sigma^4}{n} - \frac{2(3\sigma^4 - 2\sigma^4)}{n^2} + \frac{3\sigma^4 - 3\sigma^4}{n^3} = \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4 \approx \frac{2\sigma^4}{n} \quad (5.3.74)$$

и

$$\sigma_{s^2} \approx \sqrt{\frac{2}{n}} \sigma^2. \quad (5.3.75)$$

Если хотят оценить дисперсию или среднее квадратическое отклонение величины s^2 , то при большом значении величины n , используя метод моментов, заменяют в правой части формул (5.3.71) и (5.3.72) моменты μ_4 и μ_2 величинами m_4 и $m_2 = s^2$. Таким образом, получают:

$$Ds^2 \approx \frac{m_4 - m_2^2}{n} \quad (5.3.76)$$

и

$$\sigma_{s^2} \approx \sqrt{\frac{m_4 - m_2^2}{n}}. \quad (5.3.77)$$

Используя (3.5.7) для среднего квадратического отклонения функции случайной величины, получим из (5.3.77) с помощью (5.3.60) и (5.3.72), рассматривая функцию $s = \sqrt{X}$, где $X = s^2$,

$$\sigma_s = \sigma_{\sqrt{X}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{Ms^2}} \right) \sigma_{s^2} \approx \frac{1}{2\sqrt{\sigma^2}} \sigma_{s^2} = \frac{\sqrt{\mu_4 - \mu_2^2}}{2\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\mu_4 - \sigma^4}}{2\sigma\sqrt{n}}. \quad (5.3.78)$$

В случае нормального закона распределения с помощью (4.3.27) из (5.3.78) получаем:

$$\sigma_s \approx \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}. \quad (5.3.79)$$

Из (5.3.78) следует, что s является в общем случае состоятельной, но вообще говоря, смещенной оценкой σ . Если распределение нормально, то это смещение легко учитывается (см. 5.4.2).

Пример 5.3.8. Пусть по условиям примера 5.2.6 требуется оценить среднее квадратическое отклонение эмпирической дисперсии s^2 .

В примере 5.2.6 мы нашли, что

$$m_2 = 94,26 \text{ мк}^2, \quad m_4 = 25 \, 187 \text{ мк}^4 \quad \text{и} \quad n = 200.$$

По формуле (5.3.77) получаем:

$$\sigma_{s^2} \approx \sqrt{\frac{25 \, 187 - 94,26^2}{200}} \approx \sqrt{81,5} = 9,03 \text{ мк}^2.$$

Для вывода математических ожиданий и дисперсий различных функций от моментов часто приходится применять приближенные формулы, которые мы вывели в § 5 главы III. Рассмотрим для примера коэффициент вариации, который мы определим как частное

$$v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{m_2}}{\bar{x}}.$$

Примем m_2 и \bar{x} за аргументы, от которых зависит функция v ; при этом согласно (5.3.60), (5.3.71) и (5.3.5) мы имеем:

$$\begin{aligned} Mm_2 &\approx \sigma^2, & Dm_2 &\approx \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n}, \\ M\bar{x} &= \nu_1, & D\bar{x} &= \frac{\mu_2}{n}. \end{aligned}$$

Кроме того, для математического ожидания произведения $\bar{x} \cdot m_2$ имеет место приближенное равенство

$$M(\bar{x} m_2) \approx \frac{\mu_3}{n}.$$

Согласно (3.5.11)

$$\sigma_v \approx \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial m_2}\right)^2 Dm_2 + 2M(\bar{x} \cdot m_2) \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{x}}\right)_0 \left(\frac{\partial v}{\partial m_2}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{x}}\right)_0^2 D\bar{x}}. \quad (5.3.80)$$

При этом частные производные в $()_0$ берутся при значениях аргументов, совпадающих с их средними значениями (μ_2 и ν_1). Но

$$\frac{\partial v}{\partial m_2} = \frac{1}{2\sqrt{m_2}\bar{x}}, \quad \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} = -\frac{\sqrt{m_2}}{\bar{x}^2},$$

поэтому

$$\left(\frac{\partial v}{\partial m_2}\right)_0 = \frac{1}{2\sqrt{\mu_2}\nu_1}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{x}}\right)_0 = -\frac{\sqrt{\mu_2}}{\nu_1^2}$$

и, наконец,

$$\sigma_v \approx \sqrt{\frac{\nu_1^2(\mu_4 - \mu_2^2) - 4\nu_1\mu_2\mu_3 + 4\mu_2^3}{4\nu_1^4\mu_2 n}}.$$

5.3.5. Применение теоремы Ляпунова при оценке генеральных средней и дисперсии. Выбор числа наблюдений. Рассмотрим теперь применение предельного нормального распределения при оценке генеральной средней $a = \nu_1 = MX$ и дисперсии $\sigma^2 = \mu_2 = DX$ по средней арифметической \bar{x} и эмпирической дисперсии $s^2 = m_2$ выборки большого объема. Предположим, например, что мы располагаем выборкой объема n из конечной генеральной совокупности, содержащей N объектов, распределенных по некоторому количественному признаку.

Пусть для определенности среди объектов нет двух с одинаковыми значениями признака. Имея в виду, что на практике отношение $\frac{n}{N}$ бывает чаще всего достаточно мало, мы можем принять для упрощения, что выборка является возвратной. Тогда результатом выборки является n независимых величин X_1, X_2, \dots, X_n ; каждая из этих величин в выборке может получить любое из N возможных значений x_1, x_2, \dots, x_N с вероятностью $\frac{1}{N}$, так что

$$P(X_i = x_j) = \frac{1}{N}; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Мы имеем, таким образом, n экземпляров (независимых и одинаково распределенных) одной и той же величины X , распределенной в нашей совокупности, все N возможных значений x_j которой равновозможны.

Таким образом:

$$MX = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \bar{x} = a,$$

$$\sigma_x^2 = DX = \frac{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \dots + (x_N - a)^2}{N}.$$

Средняя арифметическая

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

и среднее квадратическое отклонение

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2}$$

являются функциями величин X_i .

Применяя к последовательности величин X_i теорему (4.3.37) Ляпунова, получим, что вероятность неравенства

$$\frac{\bar{x} - a}{\sigma_x / \sqrt{n}} < z_1$$

имеет пределом нормальной функцию распределения

$$N(z_1; 0; 1) = \frac{1}{2} + \Phi(z_1),$$

где $\Phi(z_1)$ — функция (4.3.30) Лапласа, значения которой приведены в табл. IV приложений.

Мы можем утверждать также¹⁾, что величина

$$\frac{\bar{x} - a}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

также будет при больших n следовать закону $N(z; 0; 1)$, так как отношение $\frac{s}{\sigma_x}$ по вероятности стремится к единице при $n \rightarrow \infty$ (ввиду того, что σ при этом стремится к нулю, как это видно из (5.3.79)).

Таким образом, для достаточно больших n будем иметь:

$$P \left\{ |\bar{x} - a| < z \frac{s}{\sqrt{n}} \right\} \approx 2\Phi(z).$$

При заданной вероятности α (например, $\alpha = 0,95$, $\alpha = 0,99$ и т. д.) мы можем по таблицам функции $\Phi(z)$ определить z_α так, чтобы $\Phi(z_\alpha) = \alpha$. Тогда с вероятностью α мы можем утверждать, что неизвестный параметр a заключен (при достаточно большом n) в границах

$$\bar{x} - z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (5.3.81)$$

Определим теперь погрешность эмпирического среднего квадратического отклонения s как приближенной оценки для σ_x . Так как независимые величины $(X_1 - a)^2$, $(X_2 - a)^2$, ..., $(X_n - a)^2$ имеют общее математическое ожидание

$$M(X - a)^2 = DX = \sigma_x^2$$

¹⁾ Строгое доказательство можно найти в книге С. Н. Бернштейна, Теория вероятностей, 4-е изд., М.—Л., Гостехиздат, 1946, стр. 301—302.

и равные дисперсии

$$\sigma_2^2 = D(X - a)^2 = M(X - a)^4 - [M(X - a)^2]^2 = \mu_4 - \mu_2^2, \quad (5.3.82)$$

то, полагая $\bar{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2$ опять-таки на основании теоремы Ляпунова, утверждаем, что вероятность неравенства

$$z_0 < \frac{\bar{S}_n^2 - \sigma_x^2}{\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}} < z_1 \quad (5.3.83)$$

при неограниченном возрастании n имеет пределом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{z_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(z_1) - \Phi(z_0). \quad (5.3.84)$$

Другими словами, величина

$$\frac{(\bar{S}_n^2 - \sigma_x^2) \sqrt{n}}{\sigma_2}$$

распределена при большом n приблизительно нормально.

Но на основании соотношений (5.2.10) и (5.2.13), приняв за начало отсчета $c = v_1 = a$, мы можем записать:

$$\bar{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - a)^2 = s^2 + (\bar{x} - a)^2,$$

и потому

$$\sqrt{n} (\bar{S}_n^2 - s^2) = \sqrt{n} (\bar{x} - a)^2. \quad (5.3.85)$$

С другой стороны, как бы ни было мало ε , вероятность неравенства $\sqrt{n} (\bar{x} - a)^2 > \varepsilon^2$ равносильного неравенству $|\bar{x} - a| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, с возрастанием n стремится к нулю, так как

на основании неравенства (3.7.8) Чебышева

$$\left(|\bar{x} - a| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \right) < \frac{D\bar{x} \cdot \sqrt{n}}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{n} \varepsilon^2} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, величина $\sqrt{n} |\bar{x} - a|$ и ее квадрат $\sqrt{n} (\bar{x} - a)^2$ по вероятности стремятся к нулю, а потому величины $\sqrt{n} \bar{S}_n^2$ и $\sqrt{n} s^2$ подчиняются асимптотически при большом n одному и тому же закону распределения.

Иначе говоря, вероятность неравенства

$$z_0 < \frac{s^2 - \sigma_x^2}{\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}} < z_1, \quad (5.3.86)$$

так же как в случае (5.3.83), имеет своим пределом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{z_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Итак, эмпирическая дисперсия s^2 следует нормальному закону с центром в точке σ_x^2 и средним квадратическим отклонением, равным $\sigma_{s^2} = \frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}$, что, как видно из (5.3.82), согласуется с оценкой, полученной в (5.3.72).

Заметим, что неравенство (5.3.86) равносильно неравенству

$$z_0 < \frac{s - \sigma_x}{\frac{\sigma_2}{(s + \sigma_x) \sqrt{n}}} < z_1. \quad (5.3.87)$$

Учитывая, что отношение $\frac{s}{\sigma_x}$ стремится по вероятности к единице, мы можем заметить неравенство (5.3.87) неравенством

$$z_0 < \frac{s - \sigma_x}{\frac{\sigma_2}{2\sigma_x \sqrt{n}}} < z_1, \quad (5.3.88)$$

имеющим ту же предельную вероятность.

Этот результат согласуется с (5.3.78).

Таким образом, величина s при большом n следует нормальному закону с центром в точке σ_x и со средним квадратическим отклонением

$$\sigma_s = \frac{\sigma_2}{2\sigma_x \sqrt{n}}. \quad (5.3.89)$$

На практике неизвестное σ_2 может быть заменено его приближенным значением s_2 , полученным из (5.3.82) в виде

$$s_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{n} - s^4} \quad (5.3.90)$$

заменой теоретических центральных моментов μ_4 и μ_2 их выборочными оценками m_4 и $m_2 = s^2$.

Аналогично этому σ_x оценивается приближенно величиной s .

При нормальном распределении мы с помощью соотношений (5.3.82), (4.3.20) и (4.3.27) можем записать:

$$\sigma_2 \approx \sqrt{3\sigma^4 - \sigma^4} = \sigma^2 \sqrt{2},$$

откуда получается приближенная формула для σ_s , используемая в случае нормального распределения,

$$\sigma_s = \frac{\sigma_2}{2\sigma \sqrt{n}} \approx \frac{\sigma^2 \sqrt{2}}{2\sigma \sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}. \quad (5.3.91)$$

Остановимся теперь на выборе числа n наблюдений, обеспечивающего нужную точность и надежность оценок a с помощью \bar{x} и аналогично σ с помощью s .

Согласно теореме Ляпунова мы имеем:

$$P\left(-z_\alpha \leq \frac{\bar{x} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < +z_\alpha\right) \approx 2\Phi(z_\alpha) = \alpha.$$

Пусть задана требуемая надежность α и желаемая точность результатов наблюдений, т. е. верхний предел ошибки в определении a по \bar{x} , так что мы требуем, чтобы неравенство

$$|\bar{x} - a| < \Delta_a$$

выполнялось с вероятностью, не меньшей α .

По данному α находим z_α из уравнения $2\Phi(z_\alpha) = \alpha$, пользуясь табл. V, VI или VII приложений. Решая относительно n неравенство

$$z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \Delta_a,$$

получим:

$$n \geq \frac{z_\alpha^2 \sigma^2}{\Delta_a^2} \quad (5.3.92)$$

или

$$n \geq \frac{z_\alpha^2}{q_\alpha}, \quad (5.3.93)$$

где $q_\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\sigma}$ представляет предельную ошибку оценки a , выраженную в долях σ .

Если величина σ или, по крайней мере, верхняя граница ее известна (например, по предварительной выборке), то с помощью формул (5.3.92) или (5.3.93) легко определить потребное число $n = n_\alpha$ наблюдений, гарантирующее заданную надежность определения величины a .

Иногда задают предельную относительную погрешность $\left| \frac{\Delta_\alpha}{a} \right|$, требуя, например, чтобы она с надежностью α не превышала заданного предела γ . Тогда формулу (5.3.92), разделив числителя и знаменателя на a^2 , можно переписать следующим образом:

$$n \geq \frac{z_\alpha^2 v_X^2}{\gamma^2}, \quad (5.3.94)$$

где $v_X = \frac{\sigma}{a}$ представляет коэффициент вариации.

Аналогичным образом из формул (5.3.88) и (5.3.91) получаем:

$$P\left(-z_\alpha < \frac{s - \sigma}{\sigma} < +z_\alpha\right) = 2\Phi(z_\alpha) = \alpha$$

$$\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

и

$$n \geq \frac{z_\alpha^2 \sigma^2}{2\Delta_\alpha^2}, \quad (5.3.95)$$

или

$$n = n_\sigma \geq \frac{z_\alpha^2}{2q_\alpha^2}, \quad (5.3.96)$$

где $q_\sigma = \frac{\Delta_\sigma}{\sigma}$ представляет предельную ошибку оценки σ , выраженную в долях от самого же σ .

Само собой разумеется, что α , Δ и q выбираются исходя из конкретных требований, предъявляемых к предполагаемым наблюдениям; в математической статистике не рассматриваются какие бы то ни было рекомендации по их выбору.

Пример 5.3.9. Пусть требуется определить числа n_α и n_σ наблюдений, если задано $\alpha = 0,95$ и $q_\alpha = q_\sigma = 0,2$.

По табл. V приложений находим $z_\alpha = 1,96$.

По соотношениям (5.3.93) и (5.3.96) находим:

$$n_\alpha \geq \frac{1,96^2}{0,2^2} = 96 \quad \text{и} \quad n_\sigma \geq \frac{1,96^2}{2 \cdot 0,2^2} = 48.$$

Пример 5.3.10. По данным примера 5.2.2 требуется произвести оценку первых четырех теоретических моментов распределения с помощью метода моментов.

Пользуясь вычислениями, проделанными в примере 5.2.6, на основании соотношения (5.3.58) находим:

$$\begin{aligned} \nu_1 &\approx \bar{x} = 4,3 \text{ мк}, \\ \mu_2 &\approx m_2 = 94,26 \text{ мк}^2, \\ \mu_3 &\approx m_3 = -113,59 \text{ мк}^3, \\ \mu_4 &\approx m_4 = 25187 \text{ мк}^4, \\ \sqrt{\mu_2} &\approx \sqrt{m_2} = s = 9,71 \text{ мк}. \end{aligned}$$

По соотношениям (5.3.61), (5.3.63) и (5.3.64) находим несмещенные оценки второго, третьего и четвертого центральных теоретических моментов:

$$\bar{s}^2 = \frac{200}{200-1} \cdot 94,26 = 94,73 \text{ мк}^2,$$

$$\bar{m}_3 = \frac{200^2}{199 \cdot 198} (-113,59) = -115,31 \text{ мк}^3,$$

$$\bar{m}_4 = \frac{200(200^2 - 2 \cdot 200 + 3)}{199 \cdot 198 \cdot 197} \cdot 25\,187 - \frac{3 \cdot 200(2 \cdot 200 - 3)}{199 \cdot 198 \cdot 197} \cdot (-113,59)^2 = 25\,305 \text{ мк}^4;$$

$$s = 9,73 \text{ мк}.$$

Из этих данных видно, что при объеме выборки $n = 200$ несмещенные оценки больше соответствующих эмпирических моментов:

а) второго порядка на $0,5\%$,

б) третьего порядка на $1,5\%$,

в) четвертого порядка на $0,5\%$,

г) среднего квадратического отклонения на $0,2\%$.

Определим теперь точность полученных оценок. Заданная надежность, например, в 99% .

Тогда из соотношения (5.3.84) получим:

$$\Phi(+z_1) - \Phi(-z_1) = 2\Phi(z_1) = 0,99.$$

По табл. V приложений находим:

$$z_1 = 2,58.$$

По (5.3.81) определяем:

$$\begin{aligned} -2,58 \frac{9,73}{\sqrt{200}} < 4,3 - v_1 < +2,58 \cdot \frac{9,73}{\sqrt{200}}, \\ -1,8 < 4,3 - v_1 < +1,8. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$v_1 \approx 4,3 \pm 1,8 \text{ мк}.$$

Точно таким же образом, при той же надежности в 99% , по соотношениям (5.3.88) и (5.3.90) находим:

$$s_2 = \sqrt{25\,187 - 9,71^4} = \sqrt{16\,298} = 127,7,$$

$$\sigma_s = \frac{127,7}{2 \cdot 9,71 \sqrt{200}} = 0,46 \text{ мк};$$

$$-\frac{2,58 \cdot 127,7}{2 \cdot 9,71 \sqrt{200}} < 9,71 - \sigma_x < +\frac{2,58 \cdot 127,7}{2 \cdot 9,71 \sqrt{200}},$$

$$-1,20 < 9,71 - \sigma_x < +1,20,$$

откуда

$$\sigma_x = 9,71 \pm 1,20 \text{ мк}.$$

Если бы выборка была взята из заведомо нормальной совокупности, то мы имели бы из соотношения (5.3.91)

$$\sigma_s = \frac{9,71}{\sqrt{2 \cdot 200}} = 0,486 \text{ мк}, \quad 2,58\sigma_s = 2,58 \cdot 0,486 = 1,25 \text{ мк}$$

и

$$\sigma_x = 9,71 \pm 1,25.$$

При сопоставлении результатов вычисления по формулам (5.3.90) и (5.3.91) следует учитывать, что при отсутствии сведений о действительном законе распре-

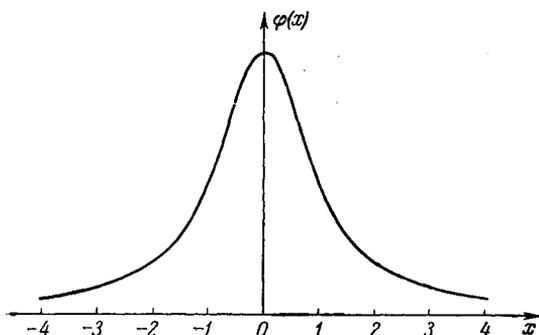
деления точность оценок мы определяем лишь приближенно. Этим и объясняется тот факт, что при одинаковой надежности (0,99) мы при более полной информации о законе распределения получим несколько меньшую точность оценки σ_x .

5.3.6. Общие понятия о порядковых (ранговых) характеристиках. Задача оценки параметров распределения допускает различные решения. Мы видели уже, как можно решить эту задачу, используя моменты эмпирического (выборочного) распределения. Однако применение моментов для оценки параметров может оказаться не всегда удобным и выгодным с точки зрения точности и надежности оценки. Получение моментов (особенно высших порядков) связано с довольно большим вычислительным трудом, который отнимает значительное время; в некоторых же вопросах (например, текущего статистического контроля) весьма существенно найти более простые, быстро получаемые характеристики положения центра рассеивания и т. д. С другой стороны, сколько-нибудь надежная оценка моментов высших порядков, например, третьего и четвертого порядка, не говоря уже о более высоких, требует настолько значительного объема наблюдений, которым мы на практике располагаем в редких случаях. К тому же,

теоретически рассуждая, мы убеждаемся, что далеко не всякое распределение обладает моментами: в качестве примера распределения, которое не имеет совсем моментов целых порядков, ν_s при $s \geq 1$ может быть приведено распределение Коши. Кривая распределения этого закона, задаваемого плотностью

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}, \quad (5.3.97)$$

настолько медленно приближается к оси x , когда $|x| \rightarrow \infty$, что интегралы, выражающие моменты, не имеют определенного смысла (черт. 65). Все



Черт. 65. Закон Коши $\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}$.

эти соображения заставляют часто искать других путей для решения задачи параметризации. Один из этих путей заключается в применении *порядковых (ранговых) характеристик*.

Пусть мы имеем случайную величину X , непрерывно распределенную с плотностью вероятности $\varphi(x)$, представляющей также непрерывную функцию x , и с интегральным законом

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx.$$

Функция $F(x)$, как мы видели в 3.1.2, представляет монотонно неубывающую функцию, изменяющуюся от 0 до 1, когда x пробегает весь промежуток изменения величины X . Если $F(x)$ или $\varphi(x)$ зависит от параметров, то знание надлежащего числа квантилей (см. 3.1.2) можно использовать для определения этих параметров точно так же, как ранее были использованы для этой цели моменты. Квантиль, отвечающий уровню вероятности p , мы будем обозначать ξ_p . Мы оставим в стороне те, практически не имеющие большого значения случаи, когда квантиль ξ_p для данного p остается неопределенным; для того чтобы избежать таких случаев, достаточно предположить, что плотность вероятности $\varphi(x)$ не обращается в нуль внутри интервала изменения величины X ; функция $F(x)$ будет тогда строго возрастающей, а уравнение $F(x) = p$ будет иметь только один корень. Например, в случае нормального распределения

положение медианы определяет центр рассеивания, половина разности между верхней и нижней квантилями

$$L = \frac{\xi_{3/4} - \xi_{1/4}}{2}, \quad (5.3.98)$$

называемая *интерквартильной шириной*, связана с характеристикой рассеивания σ нормального распределения и т. д. Таким образом, для решения задачи параметризации достаточно в большинстве случаев хотя бы с некоторым приближением оценить по данным выборки определенное число неизвестных квантилей теоретического распределения. Для этой цели используется «упорядоченная выборка» или «вариационный ряд», о котором мы говорили в § 2 настоящей главы.

Пусть мы расположим выборочные значения величины X в порядке возрастания, образовав вариационный ряд

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n.$$

При непрерывном распределении величины X мы можем пренебречь случаями совпадения нескольких значений случайной величины в выборке, так как этот факт будет иметь нулевую вероятность.

Рассмотрим график эмпирической функции распределения $\bar{F}_n(x)$, построенный по данному вариационному ряду. Как уже указывалось в 5.1.2, график этой функции изобразится

ступенчатой или лестничной кривой; в каждой точке x_i функция $\bar{F}_n(x)$ испытывает скачок, переходя от значения $\frac{i-1}{n}$ в ближайшем участке слева от x_i к значению $\frac{i}{n}$ справа от x_i .

Пусть p будет числом, лежащим между 0 и 1. Проводим прямую $y=p$, параллельную оси x . Если p не есть дробь вида $\frac{s}{n}$ ($s = 1, 2, \dots, n$), то np — не целое число и потому прямая $y=p$ пересечет кривую $\bar{F}_n(x)$ только в одной точке, лежащей на одной из вертикальных ступеней кривой. Абсцисса этой точки будет равна некоторому члену вариационного ряда x_s — он и будет p -квантилем $u_{p,n}$ эмпирического распределения (черт. 66).

Номер s этого члена удовлетворяет неравенству

$$\frac{s-1}{n} < p < \frac{s}{n}, \quad (5.3.99)$$

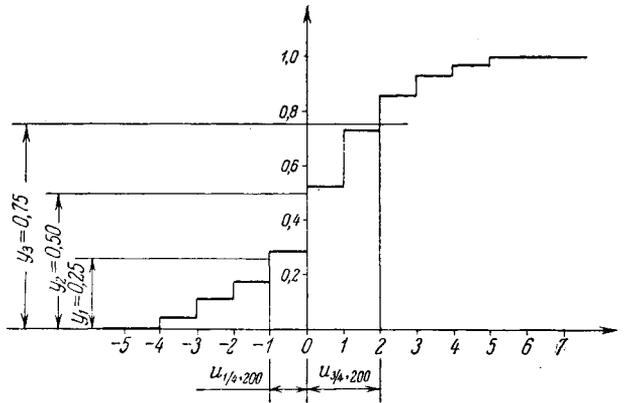
откуда легко вывести, что s должно быть на единицу больше, чем наибольшее целое число, содержащееся в np ; обозначая его через $[np]$, будем иметь:

$$s = [np] + 1; \quad (5.3.100)$$

например, если $p = \frac{1}{2}$ и $n = 385$, то

$$s = \left[\frac{385}{2} \right] + 1 = [192,5] + 1 = 193;$$

x_{193} будет медианой данного вариационного ряда.



Черт. 66. Нижний $u_{1/2, 200}$ и верхний $u_{3/4, 200}$ квантили эмпирического распределения совокупности объема $n = 200$ штук.

Будем обозначать эмпирический квантиль, отвечающий p , через $u_{p, n}$, полагая, следовательно, $u_{p, n} = x_{[np]+1}$. Мы исключим из рассмотрения как не имеющий большого практического значения случай, когда np — целое число, в этом случае p -квантиль в выборке не является вполне определенным.

Пример 5.3.11. Пусть требуется определить квартили вариационного ряда, приведенного в примере 5.2.1.

С помощью (5.3.100) найдем порядковые номера верхнего и нижнего квартилей:

$$s_{3/4} = \left[20 \cdot \frac{3}{4} \right] + 1 = 16,$$

$$s_{1/4} = \left[20 \cdot \frac{1}{4} \right] + 1 = 6.$$

Таким образом, для данного вариационного ряда верхним и нижним квартилями будут:

$$u_{\frac{3}{4}, 20} = 32,61 \text{ мм} \quad \text{и} \quad u_{\frac{1}{4}, 20} = 32,25 \text{ мм}.$$

5.3.7. Распределение членов вариационного ряда. Для того чтобы выяснить вопрос о том, можно ли выборочные квантили рассматривать как надежное приближение к теоретическим квантилям и оценить точность и надежность этого приближения при данном объеме выборки, мы должны найти сначала распределение вероятностей для членов вариационного ряда. Начнем этот вывод с частного случая, предполагая, что величина Y равномерно распределена на отрезке $(0, 1)$ так, что

$$\left. \begin{aligned} \varphi(y) &= 0 \quad \text{для } y < 0 \text{ и } y > 1, \\ \varphi(y) &= 1 \quad \text{для } 0 \leq y \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.3.101)$$

и потому из (3.1.12) имеем:

$$\left. \begin{aligned} F(y) &= 0 \quad \text{для } y < 0, \\ F(y) &= y \quad \text{для } 0 \leq y \leq 1, \\ F(y) &= 1 \quad \text{для } y > 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.102)$$

Пусть произведено n независимых наблюдений; рассмотрим k -й по величине член вариационного ряда y_k . Обозначим через $\omega_{k, n}(y)$ плотность распределения этого члена. Тогда $\omega_{k, n}(y) dy$ представляет вероятность попадания в дифференциальный промежуток $(y, y + dy)$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно dy .

Очевидно, $\omega_{k, n}(y) = 0$ для $y < 0$ и $y > 1$.

Если же y лежит в отрезке от 0 до 1, то вероятность $\omega_{k, n}(y) dy$ можно получить следующим рассуждением.

Для того чтобы k -й по величине член выборки находился в промежутке от y до $y + dy$ ($0 \leq y \leq 1$), необходимо и достаточно, чтобы, во-первых, одно из n наблюдаемых значений расположилось в этом промежутке и, во-вторых, чтобы ровно $k - 1$ из прочих $n - 1$ наблюдений попало в промежуток $(0, y)$ так, что в то же время ровно $n - k$ остальных наблюдений разместилось между $y + dy$ и 1.

Подсчитаем сначала вероятность одного варианта расположения n наблюдений, удовлетворяющего этим трем условиям. Вероятность того, что при первом из n наблюдений мы получим значение, лежащее между y и $y + dy$, равна dy — длине интервала — ввиду равномерного распределения величины Y при широте распределения, равной 1. Вероятность того, что $k - 1$ следующих наблюдений разместится между 0 и y , будет в силу независимости наблюдений на основании (2.2.22) равна y^{k-1} , так как вероятность попадания в интервал $(0, y)$ одного из этих наблюдений равна $F(y) = y$. Наконец, вероятность того, что $n - k$ остальных наблюдений займут положение в промежутке от $y + dy$ до 1, будет

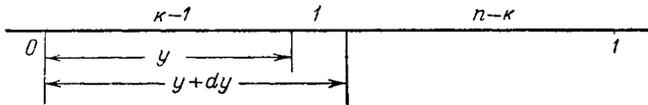
на основании (2.2.10) и (2.2.22) равна $(1 - y - dy)^{n-k}$ (черт. 67). Таким образом, вероятность одного варианта интересующего нас расположения n наблюдений будет равна

$$\begin{aligned} y^{k-1}(1 - y - dy)^{n-k} dy = \\ = y^{k-1}(1 - y)^{n-k} dy + (n - k)y^{k-1}(1 - y)^{n-k-1}(-1)(dy)^2 + \dots \\ \dots + y^{k-1}(-1)^{n-k}(dy)^{n-k+1}. \end{aligned}$$

Отбрасывая члены второго и высших порядков малости, мы найдем для интересующей нас вероятности приближенное выражение

$$y^{k-1}(1 - y)^{n-k} dy.$$

Но, очевидно, ввиду равноправия отдельных наблюдений мы будем иметь такую же вероятность любого из возможных вариантов, отличающихся друг от



Черт. 67. Распределение по числовой оси членов вариационного ряда, если величина Y равномерно распределена на отрезке $(0; 1)$.

друга только порядком расположения наблюдений, в котором получаются группы наблюдений, попадающие в последовательные интервалы $(0, y)$, $(y, y + dy)$ и $(y + dy, 1)$ и состоящие соответственно из $k - 1$, одного и $n - k$ наблюдений. Число этих вариантов равно числу способов, какими n элементов можно подразделить на три группы из $k - 1$, одного и $n - k$ наблюдений. Это число мы можем подсчитать следующим образом.

Пусть требуется подразделить n элементов на три группы по m_1 , m_2 и m_3 элементов в каждой, так что

$$m_1 + m_2 + m_3 = n.$$

Мы можем эту операцию провести последовательно: подразделим сначала n на две группы из m_1 и $(m_2 + m_3)$ элементов; это можно сделать $C_n^{m_1} = C_n^{m_2 + m_3}$ способами; затем мы подразделим каждую группу из $(m_2 + m_3)$ элементов опять-таки на две по m_2 и m_3 в каждой, что возможно в свою очередь произвести $C_{m_2 + m_3}^{m_2} = C_{m_2 + m_3}^{m_3}$ способами.

В результате мы получим всего различных комбинаций групп по m_1 , m_2 и m_3 элементов

$$P_{m_1, m_2, m_3} = C_n^{m_1} C_{m_2 + m_3}^{m_2} = \frac{n!}{m_1! (n - m_1)!} \cdot \frac{(m_2 + m_3)!}{m_2! m_3!}. \quad (5.3.103)$$

Так как $a - m_1 = m_2 + m_3$, то (5.3.103) можно переписать так:

$$P_{m_1, m_2, m_3} = \frac{n!}{m_1! m_2! m_3!}. \quad (5.3.104)$$

Очевидно, что тот же способ рассуждения применим при любом числе групп.

Число способов подразделения n элементов на k групп соответственно по m_1, m_2, \dots, m_k элементов будет равно

$$P_{m_1, m_2, \dots, m_k} = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} = \bar{P}_n^{m_1, m_2, \dots, m_k}, \quad (5.3.105)$$

где $\bar{P}_n^{m_1, m_2, \dots, m_k}$ — число перестановок с повторениями из n экземпляров k различных элементов, из которых элемент a_1 содержится в количестве m_1 экземпляров, элемент a_2 — m_2 экземпляров, ..., элемент a_k — m_k экземпляров.

Возвращаясь к числу вариантов возможных результатов наблюдений, мы согласно формуле (5.3.105) получим:

$$\frac{n!}{(k-1)! \Pi(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!}.$$

Вероятность расположения k -го члена вариационного ряда в интервале от y до $y + dy$ будет, следовательно, с точностью до членов высшего порядка малости относительно dy равна

$$\omega_{k,n}(y) dy = n C_{n-1}^{k-1} y^{k-1} (1-y)^{n-k} dy. \quad (5.3.106)$$

Отсюда для интегральной функции распределения будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{k,n}(y) = P(Y_k < y) &= n C_{n-1}^{k-1} \int_0^y y^{k-1} (1-y)^{n-k} dy; \text{ при } 0 \leq y \leq 1; \\ \Omega_{k,n}(y) &= 0 \text{ при } y < 0; \\ \Omega_{k,n}(y) &= 1 \text{ при } y > 1. \end{aligned} \right\} (5.3.107)$$

Распределение $\Omega_{k,n}(y)$ принадлежит к типу В-распределений (бета-распределений), задаваемых функцией вида

$$\frac{1}{B(a,b)} \int_0^y y^{a-1} (1-y)^{b-1} dy = I_y(a,b), \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (5.3.108)$$

(см. 4.5.2). При этом

$$\Omega_{k,n}(y) = I_y(k, n-k+1). \quad (5.3.109)$$

Отметим еще некоторые частные случаи.

Для наименьшего члена из формулы (5.3.107) имеем:

$$\Omega_{1,n}(y) = \int_0^y n(1-y)^{n-1} dy = -(1-y)^n \Big|_0^y = 1 - (1-y)^n. \quad (5.3.110)$$

Этот результат можно получить и непосредственно замечая, что для выполнения неравенства $Y_1 > y$ нужно, чтобы все наблюдения были больше y , вероятность чего равна $(1-y)^n$ и $P(Y_1 < y)$ имеет потому значение (5.3.110).

Для наибольшего члена из формулы (5.3.107) следует:

$$\Omega_{n,n}(y) = P(Y_n < y) = \int_0^y n \cdot y^{n-1} dy = y^n. \quad (5.3.111)$$

Это также может быть получено непосредственно из (5.3.105), так как для выполнения неравенства $Y_n < y$ необходимо, чтобы все наблюдения были меньше y . Но это равносильно совместному наступлению n независимых событий $Y_k < y$, каждое из которых согласно (5.3.109) имеет вероятность $P(Y_k < y) = F(y) = y$ и потому на основании (2.2.22) мы получаем (5.3.111).

Докажем теперь одно вспомогательное предложение, позволяющее свести общий случай к рассмотренному случаю.

Лемма. Если величина X подчиняется непрерывному закону $F(x)$, то распределение случайной величины $Y = F(X)$ является равномерным в интервале $(0, 1)$.

В самом деле, пусть $F_1(y) = P(Y < y)$.

Для $y < 0$ будем иметь $F_1(y) = 0$, так как величина $Y = F(X)$ не может принимать отрицательные значения. С другой стороны, по свойству функции $F(x)$ величина Y всегда не больше единицы и потому $F_1(y) = 1$ для $y \geq 1$.

Предположим для простоты, что функция $F(X)$ является строго возрастающей. Тогда очевидно для всякого промежутка (y_1, y_2) , где $0 < y_1 < y_2 \leq 1$, неравенство $y_1 \leq Y = F(X) \leq y_2$ равносильно неравенству $x_1 \leq X \leq x_2$ (где $F(x_1) = y_1$ и $F(x_2) = y_2$), вероятность которого равна

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = y_2 - y_1,$$

с другой стороны,

$$P(y_1 < Y < y_2) = F_1(y_2) - F_1(y_1).$$

Следовательно,

$$F_1(y_2) - F_1(y_1) = y_2 - y_1.$$

Полагая $y_1 = 0$ и $y_2 = 1$, получим:

$$F_1(y) = y \quad \text{при} \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Это и доказывает нашу лемму в данном случае. Можно доказать также ее справедливость в общем случае при любой интегральной функции $F(x)$.

Таким образом, путем указанной трансформации мы переходим от величины X , распределенной практически по любому непрерывному закону $F(x)$, к величине $Y = F(X)$, имеющей стандартное распределение весьма простого типа; этот прием часто используется в различных задачах математической статистики.

Примененное нами преобразование величины X непрерывно и монотонно; оно не меняет порядковых соотношений между соответствующими значениями величин X и Y , что особенно важно в тех случаях, где существенно лишь взаимное расположение наблюдаемых значений в выборке.

Пусть теперь

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \quad (5.3.112)$$

— вариационный ряд величины X с непрерывным законом $F(X)$. Введем вспомогательную величину $Y = F(X)$. При $X = x_k$ $Y = y_k$; таким образом, мы будем наряду с вариационным рядом (5.3.112) иметь вариационный ряд

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n \quad (5.3.113)$$

для величины Y , всегда равномерно распределенной.

Покажем теперь, как будет выражаться закон распределения k -го члена вариационного ряда любой непрерывной случайной величины X . Пусть $F(x)$ — непрерывная функция распределения величины X . Ввиду монотонности $F(x)$ неравенства

$$x_k < x \quad \text{и} \quad F(x_k) < F(x)$$

эквивалентны и потому

$$P(x_k < x) = P[F(x_k) < F(x)] = P[y_k < y = F(x)].$$

Но для последней вероятности согласно лемме справедлива формула (5.3.107), так что

$$\begin{aligned} P(x_k < x) &= \Omega_{k, n}[F(x)] = \int_0^{F(x)} \omega_{k, n}(y) dy = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^{F(x)} y^{k-1} (1-y)^{n-k} dy. \quad (5.3.114) \end{aligned}$$

В частности, для распределения крайних членов мы, пользуясь (5.3.110) и (5.3.111), будем иметь

$$P(x_1 < x) = 1 - [1 - F(x)]^n, \quad (5.3.115)$$

$$P(x_n < x) = [F(x)]^n. \quad (5.3.116)$$

Предположим, что n — нечетное число. Медиана m_e совпадает в этом случае с $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ -м членом вариационного ряда.

Поэтому

$$P(m_e < x) = \Omega_{\frac{n+1}{2}, n} [F(x)] = \frac{n!}{\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2} \int_0^{F(x)} [y(1-y)]^{\frac{n-1}{2}} dy. \quad (5.3.117)$$

Аналогичным образом выразятся функции распределения квартилей, децилей и т. п.

5.3.8. Предельные распределения квантилей выборки. Опираясь на полученные нами законы распределения членов вариационного ряда, можно показать, что квантили, полученные из эмпирического распределения, действительно представляют по крайней мере состоятельные оценки соответствующих квантилей неизвестного закона распределения. Для этой цели устанавливают прежде всего, что распределение эмпирических квантилей при всяком p ($0 < p < 1$) для больших n будет близко к нормальному с центром ξ_p и бесконечно малой дисперсией. Отсюда будет следовать, что эмпирический квантиль $u_{p, n} = x_{[np]+1}$ по вероятности сходится к теоретическому квантилю ξ_p . Соответствующее предложение формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть плотность $\varphi(x)$ величины X непрерывна и отлична от нуля в точке ξ_p ($F(\xi_p) = p$).

Тогда для любого t при $n \rightarrow \infty$ имеем:

$$P_n(t) = P\left(u_{pn} < \xi_p + t \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx = N(t; 0, 1), \quad (5.3.118)$$

где

$$\sigma_p = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varphi(\xi_p)}.$$

Мы не будем приводить доказательства этой теоремы.

Заметим только, что для случая равномерного распределения в отрезке $(0, 1)$

$$\Phi(\xi_p) = 1 \text{ и } \sigma_p = \sqrt{p(1-p)}.$$

Эта теорема вытекает из асимптотической формулы для бэта-распределения, которому, как мы видели, следует величина u_p . В самом деле, применяя сначала (5.3.109), найдем:

$$\begin{aligned} P_n(t) &= P\left(u_{pn} < \xi_p + t \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}\right) = \Omega_{[np]+1}\left(\xi_p + t \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}\right) = \\ &= I_{\xi_p + t \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}}([np] + 1, n - [np]). \end{aligned} \quad (5.3.119)$$

Так как оба аргумента: $a = [np] + 1$ и $b = n - [np]$ неполной бэта-функции велики при большом числе n , то мы будем иметь:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{a}{a+b} = \frac{[np]+1}{n+1} \approx p, \\ \sigma &= \sqrt{\frac{a \cdot b}{(a+b)^3}} \approx \sqrt{\frac{([np]+1)(n-[np])}{(n+1)^3}} \approx \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что, как мы видели в 4.5.2, при возрастании a и b $I_k(a, b)$ устремляется к $N(z; 0, 1)$, с указанными значениями v_1 , σ и $z = t$ найдем:

$$I_{\xi_p + t \frac{\sigma p}{\sqrt{n}}}([np] + 1, n - [np]) \approx N(t; 0, 1).$$

Следовательно, для больших n имеем:

$$P_n(t) = P\left(u_{pn} < \xi_p + t \frac{\sigma p}{\sqrt{n}}\right) \approx N(t; 0; 1) = \frac{1}{2} + \Phi(t).$$

Эту теорему можно использовать для различных оценок.

Отметим некоторые приложения этой теоремы. Если объем выборки представляет нечетное число n , то, как видно из (5.3.100), эмпирическая медиана m_e будет совпадать с членом $x_{\frac{n+1}{2}}$ вариационного ряда.

Этот член при большом n будет приближенно оценивать теоретическую медиану $M_e X = \xi_{1/2}$, при этом $x_{\frac{n+1}{2}}$ можно считать распределенным нормально с центром $M_e X$ и дисперсией

$$\sigma_{u_{1/2}} = \frac{\sigma_{1/2}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}{\varphi(\xi_{1/2}) \sqrt{n}} = \frac{1}{2\varphi(\xi_{1/2}) \sqrt{n}}. \quad (5.3.120)$$

Если распределение величины X нормально, медиана $\xi_{1/2}$ совпадает с центром $\xi_{1/2} = a$ и из (4.3.1)

$$\varphi(\xi_{1/2}) = \varphi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

Поэтому

$$\frac{\sigma_{1/2}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma}{2\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,2533 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (5.3.121)$$

Как уже было видно из (5.3.10), средняя арифметическая \bar{x} из тех же n наблюдений имеет теоретическое среднее квадратическое отклонение, равное $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, т. е. меньшее в 1,2533 раза, чем эмпирическая медиана m_e . Чтобы достигнуть той же точности оценки с помощью медианы, какую обеспечивает средняя арифметическая, следует увеличить число наблюдений в $\frac{\pi}{2} = 1,57$ раза. То же самое положение формулируют еще иначе, говоря, что эффективность медианы составляет только $\frac{2}{\pi} 100\% = 64\%$ от эффективности средней арифметической. Однако при законах распределения, отличающихся от нормального, эффективность медианы может оказаться почти равной или даже большей эффективности средней арифметической. Так, для *показательного закона распределения* вида

$$\varphi(x) = \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}}, \quad (5.3.122)$$

которому подчиняется, например, длительность промежутков между двумя последовательными наступлениями события в схеме, приводящей к закону Пуассона

(см. 2.4.3 и 4.2.3), мы будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} MX &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\alpha}} x dx = \alpha \int_0^{\infty} e^{-t} t dt = \alpha \Gamma(2) = \alpha, \\ MX^2 &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\alpha}} x^2 dx = \alpha^2 \int_0^{\infty} e^{-t} t^2 dt = \alpha^2 \Gamma(3) = 2\alpha^2, \end{aligned} \right\} \quad (5.3.123)$$

$$DX = \sigma_X^2 = 2\alpha^2 - \alpha^2 = \alpha^2, \quad (5.3.124)$$

$$\sigma_X = \alpha. \quad (5.3.125)$$

Поэтому среднее квадратическое отклонение средней из наблюдений равно

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\alpha}{\sqrt{n}}. \quad (3.126)$$

С другой стороны, теоретическая медиана получится, если мы определим согласно (3.3.8) величину $\xi_{1/2}$ из уравнения

$$F_X(\xi_{1/2}) = \frac{1}{2}, \quad (5.3.127)$$

но

$$F_X(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x e^{-\frac{x}{\alpha}} dx = 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}}, \quad (5.3.128)$$

и поэтому будем иметь:

$$e^{-\frac{\xi_{1/2}}{\alpha}} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$\xi_{1/2} = \alpha \ln 2 \quad \text{и} \quad \varphi(\xi_{1/2}) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\xi_{1/2}}{\alpha}} = \frac{1}{2\alpha},$$

следовательно, согласно (5.3.120) будем иметь:

$$\sigma_{m_e} = \frac{1}{2\varphi(\xi_{1/2})\sqrt{n}} = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} = \sigma_{\bar{x}}. \quad (5.3.129)$$

Мы видим, что в данном случае средняя арифметическая и медиана одинаково эффективны.

Различные квантили не представляют независимых между собой характеристик: можно показать, например, что при большом n два квантиля $u_{p_1, n}$ и $u_{p_2, n}$ следует приближенно считать распределенными по нормальному двумерному закону с центрами в точках ξ_{p_1} и ξ_{p_2} и центральными моментами второго порядка

$$\left. \begin{aligned} Du_{p_1} &\approx \frac{p_1(1-p_1)}{n\varphi^2(\xi_{p_1})}, \\ \text{cov}(u_{p_1, n}, u_{p_2, n}) &\approx \frac{p_1(1-p_2)}{n\varphi(\xi_{p_1})\varphi(\xi_{p_2})}, \\ Du_{p_2} &\approx \frac{p_2(1-p_2)}{n\varphi^2(\xi_{p_2})}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.130)$$

Равенство (5.3.130) показывает, что нормированные уклонения

$$\frac{u_{p_1, n} - \xi_{p_1}}{\sqrt{D\xi_{p_1}}} \quad \text{и} \quad \frac{u_{p_2, n} - \xi_{p_2}}{\sqrt{D\xi_{p_2}}}$$

связаны между собой. Коэффициент корреляции между ними с ростом n приближается к пределу

$$r_{p_1, p_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_2)}{(1-p_1)p_2}}.$$

В качестве примера характеристики, построенной с помощью двух квантилей, можно привести эмпирическую «интерквартильную широту» l , определяемую аналогично соотношению (5.3.98) в виде

$$l = \frac{1}{2}(u_{3/4, n} - u_{1/4, n}). \quad (5.3.131)$$

Эта величина служит так же, как и эмпирическая дисперсия, мерой рассеивания данного эмпирического распределения; она приближенно оценивает половину длины интервала, заключающегося между $\xi_{3/4}$ и $\xi_{1/4}$, т. е. теоретическую интерквартильную широту L , определяемую соотношением (5.3.98), вероятность попадания в которой равна 0,5. Поэтому показатель l часто называют также «вероятным отклонением». В случае нормального распределения математическое ожидание l , т. е. центр рассеивания этой величины, имеет значение, равное

$$Ml = 0,6745\sigma, \quad (5.3.132)$$

а среднее квадратическое отклонение величины l равно

$$\sigma_l = 0,7867 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (5.3.133)$$

Пусть, например, требуется определить объем n выборки, необходимый для оценки по медиане параметра $a = \nu_1$, т. е. генеральной средней нормальной совокупности, с ошибкой не более 20% от среднего квадратического отклонения σ при надежности 0,95, т. е. при вероятности одностороннего отклонения эмпирической медианы от теоретической, равной 0,975.

С помощью (5.3.118) находим:

$$P\left(u_{1/2, n} < \xi_{1/2} + t \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}\right) = 0,975 = \frac{1}{2} + \Phi(t).$$

По табл. IV приложений получаем $t = 1,96$. Но по условию данного примера $t \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}} = 0,2\sigma$ или с учетом (5.3.121)

$$t \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,2\sigma,$$

откуда

$$n = \frac{t^2 \pi}{2 \cdot 0,2^2} = \frac{1,96^2 \pi}{0,2^2 \cdot 2} = 3,84 \cdot 3,14 \cdot 25 \cdot \frac{1}{2} = 151.$$

Сравнивая это с результатом, полученным в примере 5.3.9, убеждаемся, что для оценки генеральной средней по медиане требуется в 1,57 раза больше наблюдений, чем при оценке ее по средней арифметической с той же точностью и надежностью.

Пример 5.3.12. Пусть требуется по данным примера 5.2.2 оценить теоретическую интерквартильную широту L с надежностью в 0,95. Для нахождения эмпирических верхнего $u_{3/4, 290}$ и нижнего $u_{1/4, 290}$ квантилей составляем по протоколу измерения деталей примера 5.2.2 вариационный ряд (табл. 5.3.2).

Таблица 5.3.2

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	-20,0	-18,0	-17,5	-17,0	-15,5	-15,0	-15,0	-14,0	-13,5	-13,0	-12,5	-12,0	-11,5	-11,5	-11,5	-11,0	-10,5	-10,0	-9,5	-9,0
№ п/п	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	-9,0	-9,0	-8,5	-8,0	-8,0	-8,0	-8,0	-7,5	-6,5	-6,5	-6,5	-6,0	-5,5	-4,5	-4,5	-4,5	-4,0	-3,5	-3,0	-3,0
№ п/п	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	-3,0	-3,0	-3,0	-2,5	-2,0	-1,5	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	-0,5	-0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,5	0,5
№ п/п	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
	0,5	0,5	0,5	0,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,5	1,5	1,5	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,5
№ п/п	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
	2,5	3,0	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	5,0
№ п/п	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,5	5,5	6,0	6,0	6,0	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	7,0	7,0	7,0	7,0
№ п/п	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
	7,0	7,0	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	8,0	8,5	8,5	8,5	8,5	8,5	8,5	9,0	9,0	9,5
№ п/п	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
	9,5	9,5	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,5	10,5	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,5	11,5	12,0	12,0	12,0	12,0
№ п/п	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
	12,5	12,5	13,0	13,0	13,0	13,5	13,5	14,0	14,0	14,0	14,5	14,5	15,0	15,5	16,0	17,0	17,5	17,5	18,0	18,0
№ п/п	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
	18,5	18,5	19,0	19,0	19,0	19,0	19,5	19,5	19,5	20,0	21,0	21,0	21,5	22,0	22,0	23,5	25,0	25,5	26,0	30,5

Отсюда видно, что согласно (5.3.100) квартили будут равны

$$u_{3/4, 200} = 11,0 \quad \text{и} \quad u_{1/4, 200} = -1,0.$$

По формуле (5.3.131) находим значение l эмпирической интерквартильной широты

$$l = \frac{1}{2} [11,0 - (-1,0)] = \frac{12,0}{2} = 6,0 \text{ мк.}$$

С помощью (5.3.118) и (5.3.133) получим:

$$P \left(|l - L| < z \cdot 0,7867 \frac{\sigma}{\sqrt{200}} \right) = 2\Phi(z).$$

По табл. V приложений для $2\Phi(z) = 0,95$ найдем $z = 1,96$. Несмещенную оценку \bar{s}^2 дисперсии находим с помощью (5.3.61) из данных примера 5.2.6

$$\bar{s}^2 = 5^2 \frac{780 - \frac{72^2}{200}}{199} = 94,73,$$

откуда

$$\bar{s} = \sqrt{94,73} = 9,73.$$

Принимаем, что $\sigma \approx 9,73$. Тогда

$$z \cdot 0,7867 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot 0,7867 \frac{9,73}{\sqrt{200}} = 1,1 \text{ мк.}$$

Таким образом, в данном случае

$$L \approx 6,0 \pm 1,1 \text{ мк.}$$

5.3.9. Доверительные пределы для теоретических квантилей. Теорема о нормальном предельном законе распределения эмпирических квартилей, рассмотренная в 5.3.8, практически может быть использована лишь при больших объемах выборки. Другая трудность в приложении этой теоремы заключается в том, что в выражение дисперсии входит неизвестное нам значение плотности $\varphi(\xi_p)$. Эта вторая трудность может быть преодолена, если для величины $\varphi(\xi_p)$ можно получить надлежащую оценку по данным выборки, что при некоторых предположениях (например, нормальной плотности $\varphi(x)$ и т. п.) действительно может быть сделано. Однако можно оказывается указать оценки для теоретических квантилей, не связанные какими-либо специальными допущениями о характере закона распределения: конечно, при этом мы получаем, особенно при малом объеме выборки, лишь очень грубые и ориентировочные пределы для оцениваемых величин.

Пусть мы хотим получить оценку для квантиля ξ_p ($0 < p < 1$), используя вариационный ряд $u_{1, n}, u_{2, n}, u_{3, n}, \dots, u_{n, n}$. Вероятность того, что наблюдение даст значение, меньшее ξ_p , равна $F(\xi_p) = p$. Противоположный результат имеет вероятность $1 - p$. Вероятность того, что ровно k из n наблюдений будет меньше ξ_p , равна, как мы знаем из (2.4.1),

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = p_{n, k} \quad (5.3.134)$$

Следовательно, на основании правила сложения вероятность того, что менее r наблюдений будет меньше ξ_p , выражается суммой членов вида (5.3.134), где k пробегает все значения от 0 до $r-1$

$$\sum_{k=0}^{r-1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = P_1.$$

Но эта вероятность будет вместе с тем, очевидно, вероятностью неравенства

$$u_{r, n} \geq \xi_p,$$

так как для осуществления этого неравенства необходимо и достаточно, чтобы менее r наблюдений оказалось на числовой оси левее ξ_p . Рассуждая аналогично, мы придем к тому, что вероятность неравенства

$$u_{s, n} \leq \xi_p,$$

равная вероятности того, что левее ξ_p будет не менее s наблюдений, выразится суммой

$$p_2 = \sum_{k=s}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Таким образом, двойное неравенство

$$u_{r, n} \leq \xi_p \leq u_{s, n}$$

при $s > r$ будет иметь вероятность

$$\begin{aligned} P(u_{r, n} \leq \xi_p \leq u_{s, n}) &= 1 - P(\xi_p \geq u_{s, n}) - P(\xi_p \leq u_{r, n}) = 1 - p_1 - p_2 = \\ &= \sum_{k=r}^{s-1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

Интервал $(u_{r, n}, u_{s, n})$ с варьирующими от выборки к выборке концами обладает, следовательно, тем свойством, что с вероятностью

$$p_{r, s}^{(n)} = \sum_{k=r}^{s-1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (5.3.135)$$

он заключает внутри себя неизвестную нам точку ξ_p . Варьируя r и s , мы можем величину вероятности $p_{r, s}^{(n)}$ или, иными словами, «*доверительную*» вероятность интервала $(u_{r, n}, u_{s, n})$ сделать достаточно близкой к единице, повысив тем самым надежность нашей оценки до практически нужного уровня. В случае, например, медианы $\xi_{1,2} = M_e X$, $p = \frac{1}{2}$, и мы будем иметь:

$$P(u_{r, n} < M_e X < u_{s, n}) = \sum_{k=r}^{s-1} C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Так, например, при $n = 10$, беря $r = 2$ и $s = 8$ и учитывая, что $p = 1 - p = \frac{1}{2}$, найдем:

$$\begin{aligned} P(u_{2, 10} < M_e X < u_{8, 10}) &= \sum_{k=2}^7 p_{10, k} = 1 - p_{10, 0} - p_{10, 1} - p_{10, 10} - p_{10, 9} - p_{10, 8} = \\ &= 1 - 2 \cdot p_{10, 0} - 2p_{10, 1} - p_{10, 8} = 1 - 0,002 - 0,020 - 0,044 = 0,934. \end{aligned}$$

Беря более узкий интервал $(u_{3, 10}, u_{7, 10})$ и поступая аналогично, получим доверительную вероятность

$$P(u_{3, 10} < M_e X < u_{7, 10}) = \sum_{k=3}^6 p_{10, k} = p_{10, 5} + 2p_{10, 4} + p_{10, 3} = 0,246 + 0,410 + 0,117 = 0,773.$$

Эта вероятность значительно меньше, чем в предыдущем случае.

При больших значениях n для вычисления вероятности $P(u_{r, n} \leq \xi_p \leq u_{s, n})$, представляющей сумму биномиальных членов, можно применить приближенную формулу Лапласа (см. 4.3.5).

5.3.10. Распределение крайних членов. Размах (широта) выборки. Случай оценки центра распределения с помощью крайних членов. В некоторых приложениях математической статистики существенный интерес для исследователя представляют крайние члены вариационного ряда. Для расчета мощности электростанции, снабжающей обширный круг потребителей, важно предвидеть максимально возможное одновременное потребление электроэнергии. Теория распределения крайних членов вариационного ряда в последние годы нашла себе также ряд приложений в вопросах испытания усталостной прочности металлов, при испытаниях крепости волоконистых веществ в зависимости от длины образцов и т. д. В некоторых распространенных методах текущего контроля крайние члены выборки, взятой контролером, служат основой для заключения о надежности станка в данный момент времени.

Распределение этих членов определяется с помощью выведенных нами формул (5.3.110) и (5.3.111), если известно распределение признака (например, размера) в самой генеральной совокупности. Общий характер поведения крайних членов при возрастании объема наблюдений существенно зависит от характера распределения (т. е. функции $F(x)$) данной величины X .

Согласно (5.3.116) $\Omega_{nn}(x) = [F(x)]^n$ будет законом распределения максимального члена в выборке из n наблюдений. Если x фиксировано и $F(x) < 1$, то при возрастании n $[F(x)]^n$ убывает, стремясь к нулю. Следовательно, вся масса вероятности распределения максимального члена концентрируется при больших n в области, в которой функция $F(x)$ принимает значения, очень близкие к единице. Если распределение X ограничено справа, т. е. $F(x) = 1$ при $x \geq b$, тогда как $F(x) < 1$ при $x < b$, то при достаточно больших n возможные значения максимального члена будут в основном сконцентрированы в соседстве с точкой b в интервале $(b - \varepsilon, b)$ при любом $\varepsilon > 0$.

Поведение максимального члена при больших n описывается следующей теоремой.

Теорема. Пусть функция распределения $F(x)$ величины X удовлетворяет следующим условиям:

1. Для некоторого $x = b$ функция $F(x) = 1$, тогда как $F(x) < 1$ при $x < b$.

2. Для достаточно малых $h > 0$ выполняется соотношение $1 - F(b - h) \approx ch^\alpha$, где α и c — два положительных числа; более точно:

$$\frac{1 - F(b - h)}{h^\alpha} \rightarrow c \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (5.3.136)$$

Тогда, полагая $h_n = (cn)^{-\frac{1}{\alpha}}$, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}_n(t) &= \mathbf{P}(u_{nn} < b + h_n t) \rightarrow e^{-|t|^\alpha} \quad \text{при } t < 0, \\ \mathbf{P}(u_{nn} < b + h_n t) &= 1 \quad \text{при } t \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.137)$$

Второе соотношение (5.3.137) вытекает из очевидного замечания, что функция $\Omega_{n,n}(x) = F^n(x)$ равна в наших условиях единице при $x \geq b$ и $b + h_n t \geq b$ при $t \geq 0$. Для $t < 0$, конечно, $t = -|t|$ и

$$\mathbf{P}_n(t) = \Omega_{n,n}(b + h_n t) = F^n(b + h_n t) = F^n(b - h_n |t|).$$

Так как $h_n = (cn)^{-\frac{1}{\alpha}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $F(b - h_n |t|) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.
Далее, используя равенство (4.3.51),

$$\ln(1 + x) = x + O(x^2) = x(1 + \varepsilon_x),$$

где $\varepsilon_x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, мы можем написать:

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{P}_n(t) &= n \ln F(b - h_n |t|) = n \ln [1 - (1 - F(b - h_n |t|))] = \\ &= -n [1 - F(b - h_n |t|)] \cdot [1 + \varepsilon_n], \end{aligned} \quad (5.3.138)$$

причем $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

На основании (5.3.136) и определения h_n имеем далее:

$$n(1 - F(b - h_n |t|)) = nch_n^\alpha |t|^\alpha (1 + \varepsilon'_n) = |t|^\alpha (1 + \varepsilon'_n), \quad (5.3.139)$$

где $\varepsilon'_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Из (5.3.138) и (5.3.139) следует

$$\ln \mathbf{P}_n(t) = -|t|^\alpha (1 + \varepsilon_n) (1 + \varepsilon'_n)$$

и, значит,

$$\ln \mathbf{P}_n(t) \rightarrow -|t|^\alpha \quad \text{при } t < 0. \quad (5.3.140)$$

Из (5.3.140) следует первое соотношение (5.3.137), и тем самым теорема доказана.

Условие теоремы (5.3.136) выполняется, в частности, тогда, когда в точке b функция $F(x)$ имеет производную $F'(b) = \varphi(b)$, так что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - F(b-h)}{(-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(b-h) - F(b)}{h} = -\varphi(b)$$

и (5.3.136) выполнено, если положить $\alpha = 1$ и $c = \varphi(b)$.

Пусть, например, величина X подчинена равномерному закону в некотором интервале $(-l, l)$ так, что

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 && \text{при } x < -l, \\ F(x) &= \frac{x+l}{2l} && \text{при } -l < x < l, \\ F(x) &= 1 && \text{при } x \geq l. \end{aligned}$$

В этом случае $b = l$ и условия теоремы (5.3.137) выполнены, так как функция $F(x)$ в точке l имеет производную $\varphi(l) = \frac{1}{2l}$ и, значит, $\alpha = 1$, $c = \frac{1}{2l}$ и $h_n = \frac{2l}{n}$.

Предельный закон распределения $P(t)$ для величины

$$t = \frac{u_n, n - l}{h_n} \quad (5.3.141)$$

будет иметь следующий вид:

$$P(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} [F(l + h_n t)]^n = e^{-|t|} \quad \text{при } t < 0 \quad (5.3.142)$$

$$P(t) = 1 \quad \text{при } t > 0.$$

Таким образом, при больших n мы будем иметь приближенно:

$$P \left[l \left(1 - \frac{2}{n} t \right) < u_n, n < l \right] = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{для } t > 0, \\ 0 & \text{для } t < 0. \end{cases}$$

Если произведено, например, 100 измерений, в каждом из которых показания измерительного прибора округлялись так, что результат выражался целым числом микронов и можно предполагать, что ошибка округления распределена в отрезке $(-0,5 \text{ мк}, +0,5 \text{ мк})$ равномерно, то, полагая $l = 0,5 \text{ мк}$ и $t = 2,996$, мы будем иметь:

$$P(0,47 \text{ мк} < u_{100, 100} < 0,5 \text{ мк}) \approx 1 - e^{2,996} = 0,95.$$

Аналогичная теорема имеет место и для предельного распределения *минимального* члена, если интервал, в котором распределена величина, ограничен слева и вблизи его левой границы удовлетворяется условие

$$F(a+h) = ch^\alpha (1 + \varepsilon_n). \quad (5.3.143)$$

Тогда при $t > 0$ для достаточно больших n

$$P(a < u_{1, n} < a + a_n t) \approx 1 - e^{-|t|^\alpha}, \quad (5.3.144)$$

где a_n удовлетворяет уравнению

$$F(a + a_n) = \frac{1}{n}.$$

Пусть мы рассматриваем вариационный ряд абсолютных величин случайных погрешностей измерений Δ :

$$|\Delta_1| < |\Delta_2| < \dots < |\Delta_n|,$$

полагая, что эти погрешности подчиняются нормальному закону с центром в нуле $M\Delta = 0$ и дисперсией $M\Delta^2 = \sigma^2$.

Тогда абсолютная величина погрешности измерения распределена по закону

$$F(x) = \mathbf{P}(|\Delta| < x) = \mathbf{P}(-x < \Delta < x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$

и, кроме того, $F(x) = 0$ при $x < 0$.

В этом случае для минимальной ошибки $|\Delta_1|$ имеем $a = 0$ и условие (5.3.143) выполнено, причем $\alpha = 1$, так как при малых x

$$2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{\sigma}.$$

Мы имеем, следовательно,

$$\mathbf{P}\left(0 < |\Delta_1| < t \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{n}\right) \approx 1 - e^{-t}. \quad (5.3.145)$$

Приближенно для математического ожидания минимальной погрешности измерения будем иметь:

$$\mathbf{M}(|\Delta_1|) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{n}. \quad (5.3.146)$$

Если X не ограничена справа, то поведение максимального члена представляет более сложную картину, во всяком случае *максимальный* член почти наверное превзойдет наперед заданное число при $n \rightarrow \infty$. Если функция $F(x)$ достаточно быстро приближается к 1 при $x \rightarrow \infty$, то при больших n распределение максимального члена будет тесно концентрироваться около некоторого центра, в свою очередь неограниченно возрастающего вместе с объемом выборки. Аналогично будет обстоять дело и с *минимальным* членом, если $F(x)$ будет быстро приближаться к нулю при $x \rightarrow -\infty$. Такую картину «асимптотической устойчивости» крайних членов можно наблюдать у крайних членов вариационного ряда при выборке из нормальной совокупности. В этом случае рост крайних членов происходит сколько-нибудь быстро только при малых значениях n . Далее рост этот сильно замедляется. Исследование показывает, что математическое ожидание крайних членов будет приближенно выражаться следующим равенством:

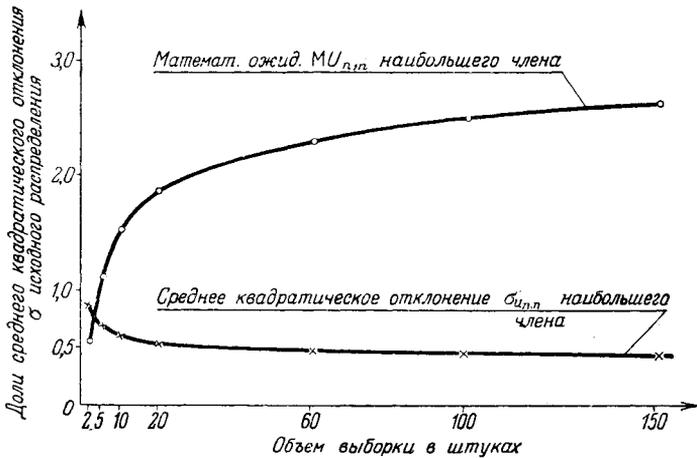
$$\mathbf{M}u_{1,n} = a - \sigma \sqrt{\ln n} + \sigma \frac{\ln \ln n + \ln 4\pi}{2 \sqrt{2 \ln n}}. \quad (5.3.147)$$

Таким образом, «раздвигание краев» выборочного распределения с возрастанием объема выборки происходит крайне медленно: пропорционально $\sqrt{\ln n}$; при этом дисперсия крайних членов с ростом n стремится к нулю (хотя также очень медленно). Таким образом, можно гарантировать с любой вероятностью, сколь угодно близкой к единице, малость отклонений $|u_{1,n} - \mathbf{M}u_{1,n}|$ и $|u_{n,n} - \mathbf{M}u_{n,n}|$ при возрастании n . Асимптотически при больших n можно положить:

$$\mathbf{D}u_{n,n} = \mathbf{D}u_{1,n} = \frac{\sigma^2}{\ln n} \frac{\pi^2}{6}. \quad (5.3.148)$$

Рост средних значений и убывание дисперсии наибольшего члена при нормальном распределении можно иллюстрировать данными табл. 5.3.3 и черт. 68.

Для максимального и минимального членов предельные распределения выражаются в случае выборки из нормальной совокупности так называемым «двойным



Черт. 68. Рост математического ожидания $MU_{n,n}$ и уменьшение среднего квадратического отклонения $\sigma_{U_{n,n}}$ наибольшего члена $U_{n,n}$ выборки с возрастанием объема n выборки.

показательным» законом, имеющим, как показал Б. В. Гнеденко, довольно широкую область приложения; при $n \rightarrow \infty$ мы имеем для любого t :

$$P(u_{n,n} - Mu_{n,n} < t \sqrt{Du_{n,n}}) \rightarrow e^{-e^{-t}}, \quad (5.3.149)$$

и аналогично

$$P(u_{1,n} - Mu_{1,n} < t \sqrt{Du_{1,n}}) \rightarrow 1 - e^{-e^t}. \quad (5.3.150)$$

При небольших n приведенные асимптотические формулы применять нельзя. Для оценки крайних членов в этом случае следует использовать точное выражение закона распределения с помощью формул (5.3.115) и (5.3.116) и произвести необходимые расчеты. Если величина X распределена нормально, то для оценки крайних членов при малых значениях n можно использовать табл. XIII приложений. В этой таблице указаны для некоторых значений вероятности $\frac{p}{100}$ p — процентные пределы t_p для отклонения $\frac{u_{n,n} - a}{\sigma}$ максимального члена $u_{n,n}$ от центра распределения a ; иными словами, в таблице указаны отнесенные к параметру σ исходного распределения квантили распределения этого отклонения, отвечающие уровню вероятности p (см. (3.1.14)).

Таблица 5.3.3

Объем выборки	Среднее значение $Mu_{n,n}$ наибольшего члена	Среднее квадратическое отклонение $\sigma_{u_{n,n}}$ наибольшего члена
2	0,56419	0,8257
5	1,16297	0,6690
10	1,53875	0,5868
20	1,86747	0,5251
60	2,31928	0,4545
100	2,50759	0,4294
200	2,74604	0,4009
500	3,03670	0,3704
1000	3,24144	0,3514

Среднее значение $Mu_{n,n}$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_{u_{n,n}}$ наибольшего члена выражены в долях среднего квадратического отклонения σ признака в генеральной совокупности.

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} P(u_{n,n} < a + t_p \sigma) &= \frac{p}{100}, \\ P(u_{n,n} > a - t_p \sigma) &= \frac{p}{100}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.151)$$

Пример 5.3.13. Пусть требуется с надежностью в 99% оценить максимальный член предполагаемых выборок численностью по 6 штук, если распределение приблизительно нормально $N(x; a, \sigma)$, причем $a = 4,3$ мк и $\sigma = 9,73$ мк.

По табл. XIII при $p = 99\%$ находим $t_p = 2,935$, откуда с помощью (5.3.151) получаем:

$$u_{6,6} = 4,3 + 2,94 \cdot 9,73 = 4,3 + 28,6 = 32,9 \text{ мк.}$$

В вопросах статистического контроля качества продукции часто используется характеристика, называемая «размахом», или «широтой» распределения и выражаемая соотношением (5.2.1) или в обозначениях, принятых в данном параграфе,

$$R_n = u_{n,n} - u_{n,1}. \quad (5.3.152)$$

Таким образом, размах распределения равен разности между крайними членами.

Закон распределения R_n легко может быть установлен в общем виде. Допустим, что $\varphi(x)$ является плотностью вероятности величины X . Тогда при любом $t > 0$

$$\mathbf{P}(R_n < t) = n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) [F(x+t) - F(x)]^{n-1} dx. \quad (5.3.153)$$

В самом деле, для того чтобы осуществилось неравенство $R_n < t$, необходимо и достаточно, во-первых, чтобы одно из n наблюдений (первое, или второе, ..., или n -е) заняло положение в промежутке от x до $x+t$, вероятность чего на основании теоремы сложения приближенно равняется $n\varphi(x) dx$, так как мы считаем попадание двух и более наблюдений в малый интервал $(x, x+dx)$ событием, практически невозможным, во-вторых, нужно, чтобы остальные $n-1$ независимых наблюдений разместились между x и $x+t$ (вероятность чего равна $[F(x+t) - F(x)]^{n-1}$), вероятностью указанного расположения всех n наблюдений будет, следовательно, при фиксированном n равна

$$n\varphi(x) dx [F(x+t) - F(x)]^{n-1}. \quad (5.3.144)$$

Применяя формулу (2.2.23) полной вероятности и переходя к пределу, мы интегрируем функцию (5.3.154) по всем возможным значениям x и получаем (5.3.153).

В случае нормального распределения мы можем, не нарушая общности, считать центр распределения в нулевой точке.

Далее, рассматривая вместо величины X нормированную величину $X' = \frac{X}{\sigma}$ с плот-

ностью $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, найдем с помощью (5.3.102):

$$\mathbf{P}\left(\frac{u_{n,n} - u_{1,n}}{\sigma} < t\right) = \mathbf{P}(R < \sigma t) = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} [\Phi(x+t) - \Phi(x)]^{n-1} dx, \quad (5.3.155)$$

причем

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Для различных значений вероятности $P = \frac{p}{100}$ в табл. XIV приложений указаны p -процентные пределы [см. (5.3.154)] для отношения $\frac{R_n}{\sigma}$ при объемах выборки из нормальной совокупности от 2 до 20. В начале таблицы указаны также значения

$$\alpha_n = \mathbf{M}\left(\frac{R_n}{\sigma}\right), \quad \beta_n = \sigma \frac{R_n}{\sigma} \quad \text{и} \quad \gamma_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n}. \quad (5.3.156)$$

Из (5.3.156) следует, что

$$\mathbf{M}\left(\frac{R_n}{\alpha_n}\right) = \frac{\sigma}{\alpha_n} \mathbf{M}\left(\frac{R_n}{\sigma}\right) = \frac{\sigma}{\alpha_n} \alpha_n = \sigma.$$

Таким образом, частное $\frac{R_n}{\alpha_n}$ представляет несмещенную оценку среднего квадратического отклонения σ .

Поэтому размах используется, как мы увидим далее, при оценке σ по данным малой выборки. При выборках объема, большего чем $n = 10$, использование размаха в качестве оценки σ уже мало эффективно. Для сравнения приводим табл. 5.3.4.

Таблица 5.3.4

Объем выборки n	2	3	4	5	6	10	15	20	50	
Средние квадратические отклонения в долях параметра σ исходного распределения	\bar{s}	0,603	0,463	0,389	0,341	0,308	0,232	0,187	0,161	0,101
	R_n	0,756	0,525	0,427	0,371	0,335	0,259	0,217	0,195	0,145

Пусть, например, при статистическом методе контроля предполагается использовать размах варьирования в качестве характеристики рассеивания при объеме пробы, равном 7 штукам. Требуется определить в долях генерального среднего квадратического отклонения математическое ожидание $M\left(\frac{R_n}{\sigma}\right)$ размаха, его среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\frac{R_n}{\sigma}}$ и коэффициент вариации $v_{\frac{R_n}{\sigma}}$, а также определить с надежностью в 99% верхнюю границу размаха R_n в долях σ , т. е. отношение $\frac{R_n}{\sigma}$. По табл. XIV приложений для $n = 7$ находим:

$$M\left(\frac{R_7}{\sigma}\right) = 2,704; \quad \sigma_{\frac{R_7}{\sigma}} = 0,833; \quad v_{\frac{R_7}{\sigma}} = \frac{\sigma_{\frac{R_7}{\sigma}}}{M\left(\frac{R_7}{\sigma}\right)} = 30,8\%.$$

Верхнюю границу размаха с надежностью 99% находим по таблице в виде: $P\left(\frac{R_7}{\sigma} < 4,88\right) = 0,99$, т. е. для размаха R_7 она составляет 4,88 σ .

Сделаем еще одно замечание относительно задачи оценки параметров распределения (параметризации).

Описанные нами в 5.3.4 приемы определения центра рассеивания и других характеристик генеральной совокупности носят достаточно общий характер и часто используются на практике. Следует отметить, однако, что, во-первых, они не всегда достаточно эффективны, так как бывает трудно указать в каждом конкретном случае, какой степенью обладают наши оценки по асимптотическим формулам. Во вторых, метод моментов и, в частности, использование средней арифметической в качестве оценки центра распределения вовсе не всегда дают нам лучший результат. Выбор надлежащей оценки для центра распределения существенно зависит от особенностей данного распределения. В самом деле, например, для закона Коши (5.3.97) медиана является состоятельной оценкой теоретической медианы, в то время как средняя арифметическая не будет обладать этим свойством, так как средних арифметических в этом случае не существует.

Мы рассмотрим здесь еще один поучительный пример по оценке центра рассеивания. Пусть требуется оценить неизвестный параметр a в равномерном распределении величины X на отрезке $(a-l, a+l)$ длины $2l$ (l — данное число), причем положение a на оси x неизвестно. Плотность вероятности в этом случае задается, как известно из

3.1.2, формулами $\varphi(x) = \frac{1}{2l}$ на отрезке $(a-l, a+l)$ и $\varphi(x) = 0$ вне этого отрезка.

Значение a , очевидно, отвечает математическому ожиданию $MX = a$. Подсчет даст: $\sigma_x = \frac{l}{\sqrt{3}}$, и потому $\sigma_{\bar{x}} = \frac{l}{\sqrt{3n}}$. Таким образом, при достаточно большом n с вероятностью, близкой к 0,997, мы можем утверждать, что \bar{x} будет отклоняться от a не более

чем на $3\sigma_{\bar{x}} = \frac{3l}{\sqrt{3n}}$, т. е.

$$P\left(-\frac{3l}{\sqrt{3n}} < \bar{x} - a < \frac{3l}{\sqrt{3n}}\right) \approx 0,997. \quad (5.3.157)$$

Однако в данном случае можно указать значительно более точную оценку для a . В самом деле, расположим в выборке объема n значения величины X в порядке их возрастания и обозначим через $u_{1, n}$ минимальное из них, т. е. ближайшее к левому концу ($a - l$) интервала распределения, и через $u_{n, n}$ — максимальное из наблюдаемых значений, ближайшее к правому концу ($a + l$).

Так как

$$u_{1, n} > a - l, \text{ то } a < u_{1, n} + l$$

и

$$u_{n, n} < a + l, \text{ то } a > u_{n, n} - l,$$

т. е.

$$u_{n, n} - l < a < u_{1, n} + l. \quad (5.3.158)$$

Эти неравенства выполняются при любом a .

Из теоремы, доказанной в 5.3.10, следует, что при больших n разности

$$[u_{1, n} - (a - l)] \text{ и } [(a + l) - u_{n, n}]$$

не превосходят величины

$$\delta_n(t) = \frac{2l}{n} t \quad (t > 0)$$

с вероятностью

$$1 - e^{-t}.$$

Таким образом, при достаточно больших t и n можно почти наверно утверждать, что правый и левый концы интервала, определяемого неравенством (5.3.158), отстоят от точки a меньше чем на $\frac{2l}{n} t$.

Ранее найденный с помощью средней арифметической \bar{x} интервал (5.3.157) имел длину (порядка $\frac{1}{\sqrt{n}}$), значительно большую, чем длина интервала (5.3.158).

Заметим еще, что если l неизвестно, то в качестве оценки для a может быть использована средняя из крайних членов

$$\lambda_n = \frac{u_{1, n} + u_{n, n}}{2}. \quad (5.3.159)$$

Опять-таки более точно и надежно оценивающая a по сравнению с оценкой его по \bar{x} .

5.3.11. Оценка параметра σ по размахам нескольких выборок. В некоторых случаях для оценки σ мы имеем возможность использовать данные о размахах, полученных в независимых выборках (из одной и той же генеральной совокупности) одного и того же (обычно небольшого) объема n .

Пусть наблюдаемые значения размахов будут:

$$R_1, R_2, \dots, R_m.$$

Строя по ним несмещенные оценки для параметра σ генеральной совокупности, найдем:

$$\frac{R_1}{\alpha_n}, \frac{R_2}{\alpha_n}, \dots, \frac{R_m}{\alpha_n}.$$

Беря среднюю арифметическую из этих оценок, получим:

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^m R_i}{m \alpha_n}. \quad (5.3.160)$$

Это будет несмещенная оценка для σ по данным всех выборок, так как

$$\left. \begin{aligned} M\left(\frac{\bar{R}}{\alpha_n}\right) &= \sigma, \\ D(\bar{R}) &= D\left(\frac{\sum_{i=1}^m R_i}{m}\right) = \frac{DR}{m} = \frac{\beta_n^2 \sigma^2}{m}, \\ D\left(\frac{\bar{R}}{\alpha_n}\right) &= \frac{\beta_n^2 \sigma^2}{m \alpha_n^2} = \frac{\sigma^2 \gamma_n^2}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.161)$$

Если m достаточно велико, отношение $\frac{\bar{R}}{x_n}$ будет приближенно следовать нормальному закону $N\left(x; \sigma, \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\right)$, т. е. с центром в точке σ и средним квадратическим отклонением, равным $\frac{\sqrt{n}\sigma}{\sqrt{m}}$. Более точное исследование показывает, что нормальный закон применим и для сравнительно небольших m , если объем n каждой выборки лежит между 5 и 10.

5.3.12. Допустимые (толерантные) пределы. Мы изложим теперь некоторые приложения порядковых (ранговых) характеристик к определению так называемых допустимых (толерантных) пределов. Во многих случаях о качестве выпускаемой продукции в отношении некоторого признака X судят по проценту изделий, заключающемуся в интервале между двумя пределами, которые и составляют как бы пределы интервала изменчивости, допустимой без существенного ущерба для использования изделий. Разумеется, при этом предполагается, что все систематические причины, влияющие на величину признака, остаются неизменными, и вариация происходит лишь под влиянием неучитываемых изменчивых обстоятельств, сопровождающих процесс выборки. Таким образом, мы можем рассматривать обследованную партию продукции как выборку из некоторой генеральной совокупности. Мы будем предполагать, что распределение признака X в генеральной совокупности задается некоторой функцией плотности $\varphi(x)$. В некоторых случаях мы можем даже утверждать, что функция $\varphi(x)$ принадлежит к тому или другому семейству функций (например, будет нормальной плотностью и т. п.), в других случаях вид функции $\varphi(x)$ полностью неизвестен. Мы увидим сейчас, что даже и в этом последнем случае, вычисляя два предела по указанному ниже правилу, мы можем с заданной наперед надежностью γ гарантировать, что «доля» всей генеральной совокупности (т. е. вероятность попадания будущего наблюдения в указываемые допустимыми пределами границы) будет не меньше заданного числа P .

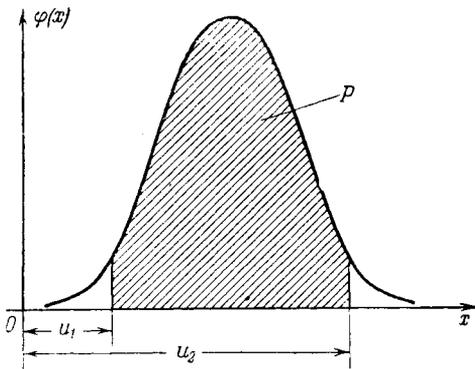
Получение допустимых пределов при произвольной функции распределения может быть осуществлено следующим образом. Пусть P и γ — заданные уровни вероятности. Искомые допустимые пределы должны быть выбраны такими функциями $u_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $u_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ наблюдений, чтобы неравенство

$$\int_{u_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}^{u_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} \varphi(x) dx \geq P \quad (5.3.162)$$

имело бы вероятность, равную γ .

Очевидно, $u_1 < u_2$. Функции u_1 и u_2 будут называться *допустимыми (толерантными) пределами*, отвечающими заданному коэффициенту доверия γ и данным наблюдениям.

Более наглядно ту же задачу можно сформулировать так: построить по данным выборки интервал (u_1, u_2) , над которым с вероятностью γ лежала бы доля P всей площади под кривой $\varphi(x)$ (черт. 69). Покажем, что при данных P и γ можно подобрать такой объем выборки, что крайние члены вариационного ряда, т. е. наименьшего $u_{1, n}$ и наибольшего $u_{n, n}$ из наблюдений,



Черт. 69. Допустимые (толерантные) пределы u_1 и u_2 , в которых с вероятностью γ заключена доля P всей совокупности.

была бы доля P всей площади под кривой $\varphi(x)$ (черт. 69). Покажем, что при данных P и γ можно подобрать такой объем выборки, что крайние члены вариационного ряда, т. е. наименьшего $u_{1, n}$ и наибольшего $u_{n, n}$ из наблюдений,

могут быть приняты в качестве допустимых пределов

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= u_{1, n}, \\ u_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= u_{n, n}; \end{aligned}$$

другими словами, что вероятность неравенства

$$\int_{u_{1, n}}^{u_{n, n}} \varphi(x) dx \geq P \quad (5.3.163).$$

при достаточно большом n будет (приблизленно) равна γ . В самом деле, пусть

$$R = \int_{u_{1, n}}^{u_{n, n}} \varphi(x) dx = F(u_{n, n}) - F(u_{1, n}), \quad (5.3.164).$$

где $F(x)$ — интегральная функция распределения.

Мы видели (лемма из 5.3.7), что величина $Y = F(X)$ имеет всегда равномерное распределение, какова бы ни была непрерывная функция $F(x)$. Но $F(u_{1, n}) = y_{1, n}$ и $F(u_{n, n}) = y_{n, n}$ — два крайних члена вариационного ряда $y_1 < y_2 < \dots < y_n$ величины Y . Следовательно, величина $R = y_{n, n} - y_{1, n}$ имеет закон распределения, не зависящий от вида функции $F(x)$. Чтобы найти выражение этого закона, достаточно использовать установленное нами распределение (5.3.153) для размаха $R = y_{n, n} - y_{1, n}$, полагая $\varphi(y) = 1$ при $0 \leq y \leq 1$ и $\varphi(y) = 0$ при $y < 0$ и $y > 1$.

Так как в данном случае плотность $\varphi(y)$ отлична от нуля лишь в интервале $(0, 1)$ и согласно (5.3.102)

$$F(y) = y \quad (0 < y < 1),$$

$$F(y+t) = y+t \quad \text{при } 0 < y < 1-t \quad (0 < t \leq 1),$$

$$\text{и} \quad F(y+t) = 1 \quad \text{при } 1 \geq y > 1-t \quad (0 < t < 1),$$

то, применяя (5.3.153), получим для $0 \leq t \leq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(R \leq t) &= n \int_0^1 [F(y+t) - F(y)]^{n-1} dy = \\ &= n \int_0^{1-t} [y+t - y]^{n-1} dy + n \int_{1-t}^1 (1-y)^{n-1} dy = n(1-t)t^{n-1} + t^n. \end{aligned} \quad (5.3.165)$$

Отсюда при $0 < P < 1$

$$\mathbf{P}(R > P) = 1 - n(1-P)P^{n-1} - P^n. \quad (5.3.166)$$

Приравнявая полученное выражение вероятности неравенства $R > P$ заданной границе γ , мы получим для определения минимального объема выборки уравнение

$$n(1-P)P^{n-1} + P^n = 1 - \gamma,$$

или

$$nP^{n-1} - (n-1)P^n = 1 - \gamma. \quad (5.3.167)$$

Например, для $\gamma = 0,95$ и $P = 0,99$ мы из уравнения (5.3.167) найдем приближенное значение $n = 130$. Таким образом, имея выборку объема 130, взятую из произвольной совокупности с непрерывным распределением признака X , мы можем с вероятностью 0,95 утверждать, что между крайними членами ее лежит не менее 0,99 всей совокупности.

Когда закон распределения $F(x)$ известен, то оказывается возможно значительно уточнить допустимые пределы при тех же вероятностях γ и P . Так, например, при нормальном распределении признака X в генеральной совокупности мы можем по данным выборочным характеристикам найти такие пределы

$$u_1 = \bar{x} - ks \quad \text{и} \quad u_2 = \bar{x} + ks,$$

то с вероятностью γ мы можем гарантировать попадания в них доли совокупности, не меньшей заданного предела P . Значение k , являющееся функцией n , P и γ , приближенно выражается формулой

$$k = k_\infty \left(1 + \frac{x_\gamma}{\sqrt{2n}} + \frac{5x_\gamma^2 + 10}{12n} \right), \quad (5.3.168)$$

где k_∞ (значение k , которое мы использовали бы, зная истинные значения центра распределения a и среднего квадратического отклонения σ) определяется соотношением

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k_\infty}^{k_\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi(k_\infty) = P \quad (5.3.169)$$

и x_γ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_\gamma}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0,5 - \Phi(x_\gamma) = 1 - \gamma$$

или

$$\Phi(x_\gamma) = \gamma - 0,5. \quad (5.3.170)$$

Пусть, например, произведена выборка объема $n = 1449$, причем для отклонения диаметра от номинального размера было получено:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= +670,40 \text{ мк}, \\ s &= 37,45 \text{ мк}. \end{aligned}$$

Принимая $\gamma = 0,99$ и $P = 0,90$, получим из (5.3.170)

$$\Phi(x_\gamma) = 0,99 - 0,5 = 0,49,$$

из (5.3.169)

$$0,90 = 2\Phi(k_\infty).$$

С помощью табл. IV и V приложений находим:

$$x_\gamma = 2,33 \quad \text{и} \quad k_\infty = 1,645.$$

Далее, применяя (5.3.168), получаем:

$$k = 1,645 \left(1 + \frac{2,33}{\sqrt{2 \cdot 1449}} + \frac{5 \cdot 2,33^2 + 10}{12 \cdot 1449} \right) = 1,718.$$

Отсюда допустимые пределы будут равны:

$$\begin{aligned} u_2 &= 670,40 + 1,718 \cdot 37,45 = 734,7 \text{ мк}, \\ u_1 &= 670,40 - 1,718 \cdot 37,45 = 606,1 \text{ мк}. \end{aligned}$$

Следовательно, с вероятностью 0,99 мы можем утверждать, что не менее 90% будущих наблюдений окажутся в пределах 606,1 до 734,7.

§ 4. Оценки с помощью доверительных интервалов

5.4.1. Общее понятие о доверительных интервалах. Всякая статистическая оценка параметра, определенная по данным выборки с помощью надлежаще выбранной статистической характеристики, может быть, как мы уже видели в § 3 настоящей главы, только приближенной. Поэтому она может иметь определенный смысл лишь в том случае, когда указываются границы возможной погрешности оценки или, иначе говоря, указывается интервал, про который с известной вероятностью (или, как говорят, *надежностью*) можно утверждать, что он *покрывает оцениваемое нами*, вообще говоря, постоянное значение параметра. Предположим, например, что мы желаем по данным выборки оценить характеристику a центра группирования нормальной генеральной совокупности, среднее квадратическое отклонение σ которой мы считаем известным. В качестве приближенной оценки неизвестной постоянной величины мы, подобно тому как это делалось в § 3 настоящей главы, можем использовать среднюю арифметическую \bar{x} , вычисляемую по данным выборки. Случайная величина \bar{x} , как уже указывалось в 5.3.2, подчинена в рассматриваемом случае нормальному закону с центром $M\bar{x} = a$ и дисперсией $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ (см. соотношения (5.1.47) и (3.4.20)).

Как видно из (4.3.12) и (3.4.25), нормированное отклонение нормально распределенной случайной величины \bar{x} от ее центра группирования

$$U = \frac{\bar{x} - a}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (5.4.1)$$

имеет распределение, вовсе не зависящее от каких-либо параметров: плотность этого распределения будет

$$n(u; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Поэтому мы можем легко определить вероятность попадания величины U в любой заданный интервал. В частности, выбрав интервал (α, β) , мы из (4.3.32) будем иметь:

$$P(\alpha < U < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} n(u; 0, 1) du = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \gamma. \quad (5.4.2)$$

Вероятность γ , называемую «*доверительной вероятностью*», обычно задают как требуемый уровень надежности. Но, принимая во внимание (5.4.1), мы можем равенство (5.4.2) переписать следующим образом:

$$P\left(\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - a < \beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma. \quad (5.4.3)$$

Мы видим, что интервал $\left(a + \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, a + \beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ представляет область, для которой попадание в нее \bar{x} гарантируется с заданным уровнем вероятности. Мы можем эту область назвать областью *практически возможных* при данном a значений \bar{x} (с данным уровнем надежности).

Далее, заметив, что неравенство

$$\bar{x} - a < \beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

равносильно неравенству

$$x - \beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a,$$

а неравенство

$$\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - a$$

равносильно неравенству

$$a < \bar{x} - \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

мы можем теперь вместо (5.4.3) написать:

$$P\left(\bar{x} - \beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} - \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma. \quad (5.4.4)$$

Для истолкования вероятности (5.4.4) рассмотрим интервал

$$\bar{I}\left(\bar{x} - \beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Пусть $\alpha = -\beta$; тогда длина этого интервала

$$\left(\bar{x} - \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\bar{x} - \beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

будет зависеть только от выбранной нами «доверительной вероятности» γ и известных нам значений параметра σ генерального распределения и объема n выборки. Значение величины \bar{x} , центра интервала, а вместе с этим и самое положение интервала \bar{I} на оси \bar{x} является случайным, меняющимся от выборки к выборке.

Равенство (5.4.4) говорит о том, что если мы будем повторять выбор и для каждой из выборок определять границы интервала \bar{I} с помощью соответствующей \bar{x} , то при большом числе повторений опыта определяемые нами на оси \bar{x} интервалы, каждый длиной $2\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, будут в 100 $\gamma\%$ случаев покрывать неизвестное нам значение параметра a .

Такое заключение есть прямое следствие теоремы (3.7.13) Бернулли. Мерой надежности, которую мы связываем с «доверительным интервалом»

$$\bar{I}\left(\bar{x} - \beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

является, как мы уже говорили, «доверительная вероятность» γ , назначаемая до производства выборки и вовсе не учитывающая какие-либо конкретные данные, полученные в опыте. Эта вероятность относится, как мы видим, только к возможным результатам всех выборок, проведенных в условиях, аналогичных тем, которые осуществляются в нашем опыте.

Если в нашем случае принять $\gamma = 0,95$, $\sigma = 2$ и $n = 9$, то по табл. VII приложений мы найдем для $P_z = 1 - \gamma = 1 - 0,95 = 0,05$, т. е. $p = 5$, что $z_p = \beta = 1,96$. Тогда для интервала \bar{I} мы будем иметь границы $\bar{x} - 1,31$ и $\bar{x} + 1,31$, где $1,31 = 1,96 \frac{2}{\sqrt{9}}$. С доверительной вероятностью 0,95 мы будем иметь:

$$\bar{x} - 1,31 < a < \bar{x} + 1,31. \quad (5.4.5)$$

Вероятность мы связываем при этом с границами интервала \bar{I} , которые определяются случайностями выборки, а не со значением параметра a , который, вообще говоря, от случая не зависит. Поэтому было бы грубой принципиальной ошибкой подставлять вместо \bar{x} величину, найденную по данным выборки, например $\bar{x} = 4,12$, и утверждать, что «вероятность неравенства

$$2,81 < a < 5,43 \quad (5.4.6)$$

равна 0,95».

На самом деле, если a — постоянная величина, то неравенство (5.4.6) или достоверно, т. е. имеет вероятность 1, если a действительно лежит в указанном

интервале, или невозможно, и, значит, имеет вероятность 0, если a лежит вне интервала (5.4.6); никакой другой вероятности мы с неравенством (5.4.6) связать не можем. Мы должны, следовательно, проводить строгое различие между доверительным интервалом со случайными границами и его конкретным представителем, полученным в данной выборке. Каждому значению параметра a мы отнесли интервал $(a + \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, a + \beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ «практически возможных» при данном a значений \bar{x} . Для краткости будем обозначать эти интервалы Δ_a . Если в выборке мы получили определенное значение \bar{x} , то все значения a можно будет разделить на две категории: в первую из них мы отнесем такие a , для которых соответствующие интервалы Δ_a покрывают полученное значение \bar{x} , так что для этих a

$$a + \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < a + \beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (5.4.7)$$

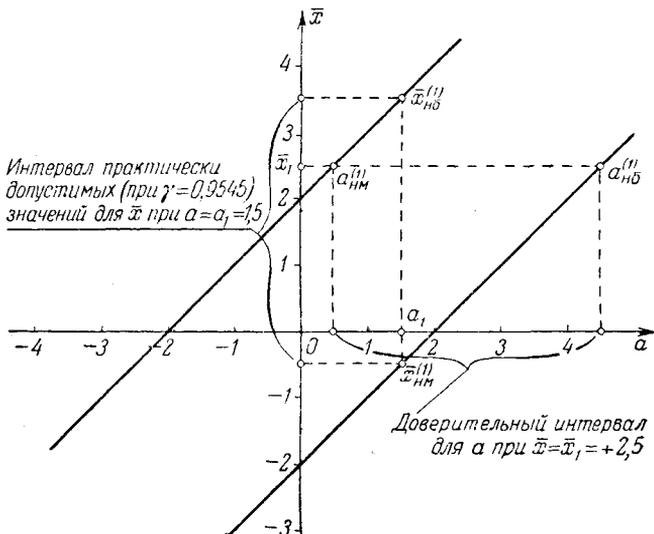
Во вторую категорию мы отнесем те значения a , для которых интервалы Δ_a не содержат \bar{x} .

Значения a первой категории можно назвать согласующимися с данными выборки, тогда как значения a второй категории не согласуются с этими данными.

Из неравенства (5.4.7) следует, что значения первой категории образуют интервал на оси a

$$\bar{x} - \beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} - \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (5.4.8)$$

Следовательно, полученные на опыте доверительные границы, образующие доверительный интервал, можно истолковать как границы значений a , «согласующихся»



Черт. 70. Доверительный интервал для a при оценке по \bar{x} (при $\bar{x} = \bar{x}_1 = +2,5$). Интервал практически допустимых (при $\gamma = 0,9545$) значений для \bar{x} при $a = a_1 = +1,5$.

с опытными данными, в то время как не попавшие в данный интервал значения a можно рассматривать как «не согласующиеся» с опытными данными в указанном выше смысле.

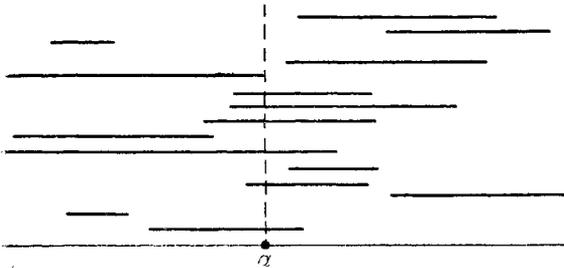
На черт. 70 изображен доверительный интервал для параметра a (центра группирования), оцениваемого по средней арифметической \bar{x} , причем доверитель-

ная вероятность выбрана равной 0,9545, $\sigma = 2$ и $n = 4$. Тогда при $\beta = -\alpha$ мы из табл. V приложений имеем при $2\Phi(\beta) = 0,9545$ $\beta = 2$ и $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$. По оси абсцисс откладываются значения параметра a в долях $\sigma_{\bar{x}}$, а по оси ординат — значения статистической характеристики \bar{x} в тех же единицах. В данном случае доверительный интервал получен из равенства

$$P(\bar{x} - 2 < a < \bar{x} + 2) = 0,9545.$$

Возьмем на оси абсцисс некоторую точку $a_1 = 1,5$. Этому значению параметра a на оси ординат соответствуют границы $\bar{x}_{\text{нм}}^{(1)} = -0,5$ и $\bar{x}_{\text{вб}}^{(1)} = +3,5$. Таким образом, интервал $(-0,5; +3,5)$ представляет интервал практически допустимых (при $\gamma = 0,9545$) значений для \bar{x} при $a = a_1 = +1,5$.

Пусть теперь мы получим из опыта значение $\bar{x}_1 = +2,5$. Мы видим, что этому значению \bar{x} на оси абсцисс соответствует доверительный интервал $(0,5; 4,5)$. Получив в результате наблюдений значение $\bar{x} = \bar{x}_1 = 2,5$, мы можем лишь считать, что с полученными нами опытными данными согласуются значения параметра a от $+0,5$ до $+4,5$.



Черт. 71. Доверительные интервалы для параметра a , полученные по 15 выборкам при доверительной вероятности $\gamma = 0,5$.

На черт. 71 показаны 15 доверительных интервалов для параметра a , полученных по 15 выборкам при доверительной вероятности $\gamma = 0,5$. Из чертежа видно, что как длины, так и положения интервалов случайным образом изменяются от выборки к выборке. Вместе с тем примерно половина всех интервалов, а именно 7 из 15, покрывает оцениваемый параметр.

Далее мы поясним (см. 5.4.4.), при каких обстоятельствах случайными оказываются не только положения интервалов, получаемых по отдельным выборкам, но также и их длины.

Заметим, что, зная плотность распределения $\varphi(u)$ величины U , мы можем различными способами выбрать интервал (α, β) так, чтобы $P(\alpha < U < \beta) = \gamma$. В соответствии с этим длина $(\beta - \alpha) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ полученного нами для параметра a доверительного интервала вида

$$\bar{x} - \beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} - \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

будет иметь различные значения. В первом из рассмотренных числовых примеров мы имели $\alpha = -\beta = -1,96$ и $\beta = 1,96$. Длина интервала \bar{l} была равна

$$(\beta - \alpha) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = [1,96 - (-1,96)] \frac{2}{\sqrt{n}} = 2,62.$$

Пусть теперь $\alpha = -1,7$. Тогда при тех же прочих данных с помощью равенства (5.4.4) запишем:

$$\begin{aligned} P\left(\bar{x} - \beta_1 \frac{2}{3} < a < \bar{x} + 1,7 \frac{2}{3}\right) &= P\left(-1,7 < \frac{\bar{x} - a}{\frac{2}{3}} < \beta_1\right) = 0,95 = \\ &= \Phi(\beta_1) - \Phi(-1,7) = \Phi(\beta_1) + \Phi(1,7), \end{aligned}$$

откуда с помощью табл. IV приложений находим:

$$\Phi(\beta_1) = 0,95 - \Phi(1,7) = 0,95 - 0,4554 = 0,4946.$$

Далее, используя ту же таблицу, получаем:

$$\beta_1 = 2,55.$$

В этом последнем случае длина интервала равна

$$(\beta_1 - \alpha_1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = [2,55 - (-1,7)] \frac{2}{3} = 2,83,$$

т. е. она оказалась *больше*, чем в первом случае (черт. 72).

Естественно выбрать числа α и β так, чтобы длина интервала $(\beta - \alpha)$ была *минимальной*. Геометрически очевидно, что наиболее узкий доверительный интервал будет иметь центром a , т. е. абсциссу вершины кривой $n(u; 0, 1)$, другими словами, следует взять $\alpha = -\beta$, что и было сделано в самом начале и в первом числовом примере. Наиболее короткий 95%-ный доверительный интервал совпадает таким образом с интервалом $\bar{I}\left(\bar{x} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Если теперь мы возьмем другую доверительную вероятность $\gamma = 0,99$, то опять-таки с помощью табл. VII приложений найдем другой доверительный интервал, наиболее короткий из интервалов, отвечающих этому значению доверительной вероятности, в виде

$$\bar{I}\left(\bar{x} - 2,58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2,58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Идея разобранного здесь построения доверительных интервалов может быть в общем виде сформулирована следующим образом.

Пусть мы знаем некоторую функцию u , зависящую от данных выборки и оцениваемого параметра θ . Положим, что функция зависит от θ непрерывно и монотонно. Предположим далее, что распределение $u(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ не зависит от оцениваемого параметра или от других неизвестных параметров. В разобранном нами примере такой функцией была разность $\bar{x} - a$, распределение которой независимо от параметра a . Если эти предположения выполнены, то для каждого уровня доверительной вероятности γ мы можем, пользуясь известным нам распределением величины U , найти такие пределы α_γ и β_γ (не зависящие от данных выборки), что

$$P(\alpha_\gamma < U < \beta_\gamma) = \gamma.$$

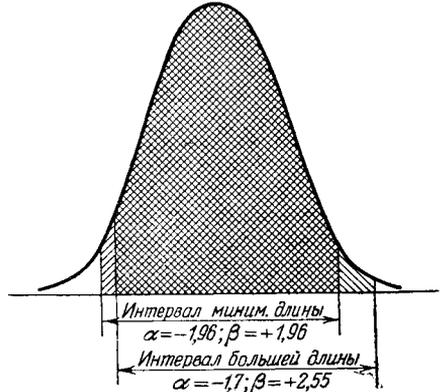
Выбор этих пределов при данном γ вообще не определяется однозначно, но неравенства

$$\alpha_\gamma < u(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) < \beta_\gamma$$

можно в силу монотонности и непрерывности по аргументу θ разрешить относительно θ и записать их в равносильном виде

$$\underline{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n) < \theta < \bar{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

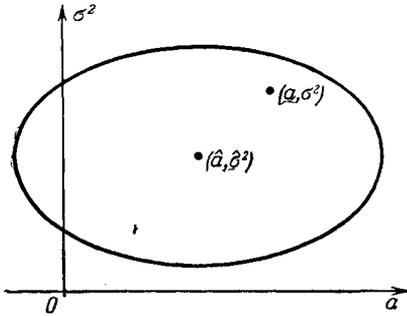
где $\underline{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\bar{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — две функции наблюдений (зависящие также от α_γ и β_γ).



Черт. 72. Различное расположение доверительных интервалов $(-1,96\sigma_{\bar{x}}, +1,96\sigma_{\bar{x}})$ и $(-1,7\sigma_{\bar{x}}, +2,55\sigma_{\bar{x}})$ при одной и той же доверительной вероятности $\gamma = 0,95$.

Интервал $\bar{I}(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ и будет доверительным интервалом с данной доверительной вероятностью γ .

Метод доверительных интервалов может быть обобщен на случай одновременной оценки нескольких параметров, когда «пространство параметров», т. е. совокупность всевозможных допустимых комбинаций их значений, уже не будет одномерным. Так, в случае одновременной оценки двух параметров a и σ^2 нормальной совокупности «пространство параметров» будет некоторой областью в полуплоскости (a и σ^2).



Черт. 73. Доверительная плоская область при одновременной оценке параметров a и σ^2 . Точка $(\hat{a}, \hat{\sigma}^2)$ — центр области — получена по данным выборки. Точка (a, σ^2) — оцениваемое значение параметров a и σ^2 .

В этом случае решением проблемы оценки будет являться построение по данным выборки такой «доверительной плоской области», которая с данной вероятностью будет покрывать точку, отвечающую неизвестным значениям $a = a_0$ и $\sigma^2 = \sigma_0^2$ — параметров генеральной совокупности (черт. 73).

Пример 5.4.1. Пусть требуется определить при доверительной вероятности $\gamma = 0,95$ доверительные границы генеральной средней высоты a штамповок внутренних колец подшипников, если распределение штамповок по высоте предполагается нормальным со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,4$ мм.

Путем выборочного обследования определена средняя арифметическая высота 20 колец. Она равна $\bar{x}_1 = 32,3$ мм.

По табл. VII приложений при $p_z = 1 - \gamma = 1 - 0,95 = 0,05$ и $p = 5$ находим, что

$$z_p = \beta = 1,96, \quad \alpha = -\beta = -1,96.$$

Тогда с помощью равенства (5.4.8) находим:

$$32,3 - 1,96 \frac{0,4}{\sqrt{20}} < a < 32,3 + 1,96 \frac{0,4}{\sqrt{20}},$$

что равносильно неравенству

$$32,12 < a < 32,48.$$

Этот интервал и будет в данном случае искомым доверительным интервалом.

5.4.2. Распределение выборочной дисперсии s^2 и среднего квадратического отклонения s . Доверительные интервалы для оценки генеральной дисперсии σ^2 и среднего квадратического отклонения σ . Начнем с вопроса об оценке параметра σ^2 (т. е. дисперсии) при нормальном законе распределения. Как мы уже видели, для этого нужно найти такую функцию, зависящую от данных выборки и оцениваемого параметра, распределение которой не зависит ни от каких неизвестных параметров. Естественнее всего с этой целью рассмотреть эмпирическую дисперсию s^2 . Она зависит от выборочных данных, а ее отношение к теоретической дисперсии σ^2 зависит вместе с тем от оцениваемого параметра. Остается рассмотреть распределение s^2 , к которому мы и перейдем.

Мы видели в 4.5.3, что сумма квадратов независимых нормированных нормально распределенных с плотностью $n(z; 0, 1)$ случайных величин следует закону распределения χ^2 , плотность которого задается соотношением (4.5.49).

Пусть теперь X представляет случайную величину, распределенную нормально с плотностью $n(x; a, \sigma)$, а \bar{x} и s^2 — средняя арифметическая и дисперсия, полученные из выборочных значений x_1, x_2, \dots, x_n случайной величины X .

Будем исходить из того, что \bar{x} и s^2 оказываются в данном случае независимыми величинами. Доказательства этого важного положения мы не даем¹⁾. Преобразуем s^2 , выражаемую соотношением (5.2.36), следующим образом:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(x_i - a) - (\bar{x} - a)]^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 - (\bar{x} - a)^2. \quad (5.4.9)$$

Из этого равенства, разрешая его относительно первого члена правой части и разделив после этого обе части полученного равенства на $\frac{\sigma^2}{n}$, получим:

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\bar{x} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - a}{\sigma} \right)^2. \quad (5.4.10)$$

Обозначим члены последнего равенства буквами

$$E + H = L, \quad (5.4.11)$$

а производящие функции обеих частей этого равенства через

$$m_{E+H}(t) = m_L(t). \quad (5.4.12)$$

Из ранее принятого положения о независимости распределений \bar{x} и s^2 следует, что E и H также независимо распределены. Поэтому с помощью (3.6.15) равенство (5.4.12) может быть приведено к виду

$$m_E(t)m_H(t) = m_L(t). \quad (5.4.13)$$

Так как L представляет сумму n квадратов независимых между собой нормально распределенных и нормированных величин, то производящую функцию L мы найдем согласно 4.5.3 как производящую функцию величины χ^2 с n степенями свободы

$$m_L(t) = m_{\chi^2}(t) = (1 - 2t)^{-\frac{n}{2}}.$$

Точно так же производящая функция величины H , представляющей квадрат одной нормально распределенной и нормированной случайной величины, будет иметь вид

$$m_H = (1 - 2t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Поэтому, принимая во внимание (5.4.13), получим:

$$m_E(t) = m_{\frac{ns^2}{\sigma^2}}(t) = \frac{(1 - 2t)^{-\frac{n}{2}}}{(1 - 2t)^{-\frac{1}{2}}} = (1 - 2t)^{-\frac{n-1}{2}}. \quad (5.4.14)$$

Отсюда следует, что если выборка производится из нормальной совокупности с плотностью $n(x; a, \sigma)$, то величина $E = \frac{ns^2}{\sigma^2}$ имеет χ^2 -распределение с числом степеней свободы $k = n - 1$. Сумма $ns^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2$ в данном случае представляет сумму квадратов n зависимых величин $y_i = x_i - \bar{x}$; эта зависимость выражается в том, что y_i удовлетворяют уравнению линейной связи

$$\sum y_i = \sum (x_i - \bar{x}) = 0.$$

¹⁾ См., например, Г. Крамер, Математические методы статистики, ИЛ, М., 1948, стр. 421.

Наличие этой связи и уменьшает на единицу число степеней свободы в законе распределения по сравнению с тем случаем, когда n величин были независимы друг от друга.

Плотность самой величины $s^2 = \frac{\sigma^2 E}{n}$ можно получить, используя правило (4.4.2) преобразования законов распределения, рассмотренное в 4.4.1. При этом в плотности вероятности (4.5.49) величины χ^2 с $n - 1$ степенями свободы переменное x надо заменить на $\frac{n}{\sigma^2} x$ и умножить все выражение на $\frac{n}{\sigma^2}$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} \varphi_{s^2}(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}} \left(\frac{n}{\sigma^2} x\right)^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{nx}{2\sigma^2}} \frac{n}{\sigma^2} = \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-3}{2}} \cdot e^{-\frac{nx}{2\sigma^2}}. \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

Отсюда легко получить моменты различных порядков для величины s^2 . Впрочем, зная, что при k степенях свободы согласно (4.5.50) и (4.5.51)

$$M\chi^2 = k \quad \text{и} \quad \sigma_{\chi^2}^2 = D\chi^2 = 2k$$

и, следовательно, при $n - 1$ степенях свободы

$$M(E) = n - 1 \quad \text{и} \quad \sigma_E^2 = 2(n - 1),$$

мы на основании теорем (3.3.12) и (3.4.15) найдем:

$$Ms^2 = \frac{\sigma^2}{n} M(E) = \frac{n-1}{n} \sigma^2,$$

$$\sigma_{s^2}^2 = \frac{\sigma^4}{n^2} \sigma_E^2 = \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4,$$

$$\sigma_{s^2} = \frac{\sqrt{2(n-1)}}{n} \sigma^2,$$

что совпадает с ранее полученными соотношениями (5.3.60), (5.3.74) и (5.3.75).

Мы видели, что функция $E = \frac{ns^2}{\sigma^2}$, с одной стороны, как это следует из (5.4.10), зависит от данных выборки (x_1, x_2, \dots, x_n) и от оцениваемого параметра σ^2 , а с другой стороны, единственный параметр, от которого зависит распределение (4.5.49), есть известное нам число степеней свободы $k = n - 1$. Зависимость E от σ^2 является монотонной и непрерывной. Отсюда следует, что согласно сказанному в 5.4.1 эту функцию можно использовать для построения доверительных интервалов для оценки σ^2 , к которой и перейдем.

Пусть случайная величина X будет нормально распределена с дисперсией σ^2 и пусть s^2 представляет эмпирическую дисперсию, образованную по n выборочным значениям этой случайной величины. Тогда *доверительные границы для σ^2* , например, с 95%-ной надежностью, т. е. при $\gamma = 0,95$, могут быть построены следующим образом.

Из табл. VIII приложений для числа $n - 1$ степеней свободы находим два значения χ^2 (которые обозначим через χ_1^2 и χ_2^2) таких, что вероятность $\chi^2 < \chi_1^2$ и вероятность $\chi^2 > \chi_2^2$ будут каждая равны 0,025. Из (5.4.14) следует, что тогда вероятность того, что величина $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ окажется в границах от χ_1^2 до χ_2^2 , равна 0,95, т. е.

$$P\left(\chi_1^2 < \frac{ns^2}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) = 0,95,$$

или, что с той же вероятностью можно ожидать выполнения следующих неравенств:

$$\frac{ns^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{\chi_1^2}. \quad (5.4.16)$$

Два числа $\frac{ns^2}{\chi_2^2}$ и $\frac{ns^2}{\chi_1^2}$ определяют доверительные границы для σ^2 .

Заметим, что в данном случае в противоположность случаям, рассмотренным в 5.4.1, не только положение центра доверительного интервала \bar{I} , но и длина его будут меняться от выборки к выборке.

На черт. 74 показаны доверительные границы χ_1^2 и χ_2^2 и соответствующие им вероятности, причем вероятность $P(\chi^2 < \chi_1^2)$ заштрихована обычной штриховкой, а вероятность $P(\chi^2 > \chi_2^2)$ — двойной штриховкой. Промежуток $\bar{I}(\chi_1^2, \chi_2^2)$ между доверительными границами представляет 95%-ный доверительный интервал для оценки σ^2 .

Пример 5.4.2. Пусть требуется определить при доверительной вероятности в 0,96 доверительные границы дисперсии высоты штамповок внутренних колец подшипников по данным пробы объема 20 штук, приведенной в примере 5.2.1, если распределение штамповок по высоте предполагается нормальным.

В примере 5.2.5 найдена средняя арифметическая высота 20 колец. Она равна $\bar{x} = 32,2975$ мм.

По формуле (5.2.39), положив $c = 32,30$ мк, находим:

$$\begin{aligned} 20s^2 &= 0,4900 + 0,3600 + 0,3249 + 0,3136 + 0,0169 + 0,0025 + 0,0016 + \\ &+ 0,0004 + 0,0004 + 0,0001 + 0,0000 + 0,0036 + 0,0256 + 0,0289 + 0,0324 + \\ &+ 0,0961 + 0,1089 + 0,1444 + 0,1936 + 0,3844 - 20(32,2975 - 32,30)^2 = \\ &= 2,5283 - 0,0001 = 2,5282 \text{ мм}^2. \end{aligned}$$

По табл. VIII приложений при числе степеней свободы $k = 20 - 1 = 19$ находим при $p = 0,02$ значение $\chi_1^2 = 33,7$ и при $p = 0,98$ значение $\chi_2^2 = 8,6$.

Неравенство (5.4.16) для данного случая можно записать в виде

$$\frac{2,5282}{33,7} < \sigma^2 < \frac{2,5282}{8,6},$$

что равносильно следующему неравенству:

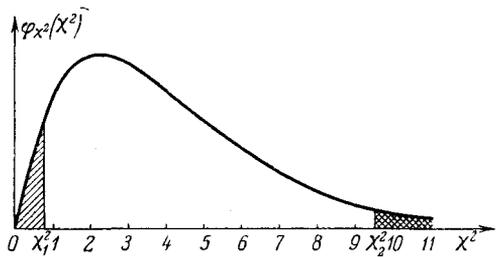
$$0,0750 \text{ мм}^2 < \sigma^2 < 0,294 \text{ мм}^2.$$

Таким образом, совместимые с данным опытом значения σ^2 лежат в пределах интервала от 0,0750 до 0,294.

Оценка для параметра σ^2 с помощью доверительного интервала $\left(\frac{ns^2}{\chi_2^2}, \frac{ns^2}{\chi_1^2}\right)$

дает в то же время доверительный интервал $\left(\frac{\sqrt{ns}}{\chi_2}, \frac{\sqrt{ns}}{\chi_1}\right)$ для оценки параметра σ с той же доверительной вероятностью. Обозначая последнюю через $p = 1 - \alpha$, будем иметь:

$$P(z_1 s < \sigma < z_2 s) = p = 1 - \alpha, \quad (5.4.17)$$



Черт. 74. Построение доверительных границ для оценки параметра σ^2 по эмпирической дисперсии s^2 .

где $z_1 = \frac{\sqrt{n}}{\chi_2}$ и $z_2 = \frac{\sqrt{n}}{\chi_1}$; мы определяем χ_1 и χ_2 таким образом, чтобы

$$P\left(\frac{\sigma}{s} > z_2\right) = P\left(\frac{ns^2}{\sigma^2} < \chi_1^2\right) = \frac{1-p}{2} = \frac{\alpha}{2}, \quad (5.4.18)$$

так что

$$P\left(\frac{ns^2}{\sigma^2} > \chi_1^2\right) = \frac{1+p}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

и

$$P\left(\frac{\sigma}{s} \leq z_1\right) = P\left(\frac{\sigma^2}{s^2} < \frac{n}{\chi_2^2}\right) = P\left(\frac{ns^2}{\sigma^2} > \chi_2^2\right) = \frac{1-p}{2} = \frac{\alpha}{2}. \quad (5.4.19)$$

Для определения z_1 и z_2 по данной доверительной вероятности p без предварительного вычисления величин χ_1 и χ_2 можно использовать табл. XV приложений.

В этой таблице для значений объемов выборки n от 2 до 200 и доверительной вероятности p 0,999; 0,998; 0,99; 0,98; 0,95 и 0,90 даны нижние z_1 и верхние z_2 границы интервала $z_1 s < \sigma < z_2 s$.

Пример 5.4.3. Пусть теперь требуется по условиям того же примера 5.2.1 определить при доверительной вероятности 0,98 доверительные границы среднего квадратического отклонения высоты штамповок внутренних колец подшипников по данным пробы объема 20 штук, предполагая попрежнему распределение штамповок по высоте нормальным.

Как мы видели в примере 5.4.2,

$$\bar{x} = 32,2975, \quad s^2 = 0,1264 \quad \text{и} \quad s = 0,36.$$

Из (5.4.17) в нашем случае имеем:

$$p = 1 - \alpha = 0,98,$$

откуда

$$\alpha = 0,02.$$

По табл. XV приложений при $n = 20$ находим:

$$z_1 = 0,725, \quad z_2 = 1,578.$$

Таким образом, совместимые с данными наблюдения значения σ лежат в пределах от $0,725 \cdot 0,36 = 0,26$ до $1,578 \cdot 0,36 = 0,57$.

Отметим, что для небольших значений $k = n - 1$ наблюдается резкая асимметрия в расположении верхней и нижней доверительных границ. Так, при $n = 4$, $k = 3$ и $p = 0,98$ имеем $z_1 = 0,514$, тогда как $z_2 = 5,110$. Это указывает на резкую несимметричность в самом законе распределения величины $s = \sqrt{s^2}$, в силу которой значения s , меньшие более чем в пять раз σ , имеют такую же вероятность (равную 0,01), как и значения s , большие σ в два и более раз.

Плотность величины $s = \sqrt{s^2}$ мы получим из плотности (5.4.15) величины s^2 , производя в ней опять-таки с помощью (4.4.2) замену x на x^2 и умножая на $2x$ (в данном случае $u = \sqrt{x}$ и $x(u) = u^2$). Таким образом, мы получим:

$$\varphi_s(x) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{n}{2s^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} x^{n-2} e^{-\frac{nx^2}{2s^2}}. \quad (5.4.20)$$

Отсюда можно получить точные выражения для моментов из соотношения

$$Ms^r = \int_0^\infty \varphi_s(x) x^r dx. \quad (5.4.21)$$

Интеграл (5.4.21) выражается через гамма-функцию

$$Ms^r = \left(\frac{2\sigma^2}{n}\right)^{\frac{r}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+r-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}. \quad (5.4.22)$$

В частности,

$$Ms = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}} = H_n \sigma, \quad (5.4.23)$$

где

$$H_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sqrt{\frac{2}{n}} = 1 - \frac{3}{4n} - \frac{7}{32n^2} + \dots \quad (5.4.24)$$

Далее

$$Ms^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{2\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

и потому

$$Ds = \sigma_s^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2 - H_n^2 \sigma^2 = \sigma^2 \left(\frac{n-1}{n} - H_n^2\right). \quad (5.4.25)$$

Мы видим, что характеристика s дает смещенную, несколько преуменьшенную оценку для параметра σ , так как множитель H_n будет меньше единицы, как это видно из табл. 5.4.1.

Таблица 5.4.1

n	H_n	n	H_n	n	H_n	n	H_n
4	0,7979	13	0,9410	30	0,9748	75	0,9900
5	0,8407	14	0,9453	35	0,9784	80	0,9906
6	0,8686	15	0,9490	40	0,9811	85	0,9911
7	0,8882	16	0,9523	45	0,9832	90	0,9916
8	0,9027	17	0,9551	50	0,9849	95	0,9921
9	0,9139	18	0,9576	55	0,9863	100	0,9925
10	0,9227	19	0,9599	60	0,9874		
11	0,9300	20	0,9619	65	0,9884		
12	0,9359	25	0,9696	70	0,9892		

Из табл. 5.4.1, в частности, следует, что при $n > 19$ это смещение меньше $\frac{1}{25} \sigma$.

При небольших n следует корректировать оценку s , деля ее на множитель H_n , другими словами, беря вместо s оценку

$$s^* = \frac{s}{H_n}. \quad (5.4.26)$$

Впрочем, при малых n доверительный интервал, оценивающий σ , будет, как правило, настолько широк, что переход от s к s^* вряд ли можно оправдать.

Укажем еще на другой случай нахождения доверительных границ для σ^2 , когда по нескольким выборкам, средние арифметические которых могут значительно отличаться друг от друга, но дисперсии которых имеется основание считать различающимися несущественно (лишь в силу случайности выборки), представляется необходимым дать оценку дисперсии генеральной совокупности. Такая задача возникает в том случае, когда, например, по двум выборкам, сделанным при различных уровнях настройки станка, необходимо оценить рассеивание размеров, вызываемое данным технологическим процессом. Вычисление

дисперсии по объединенным данным в этом случае повлекло бы за собой существенную ошибку.

Пример 5.4.4. 6 марта 1951 г. была взята «проба» из продукции той же горизонтально-ковочной машины, что и в примере 5.2.1, в количестве 20 штук, т. е. были отобраны последовательно отштампованные на этой машине штамповки внутренних колец шарикоподшипников того же типа, что в примере 5.2.1. Кольца были охлаждены до температуры помещения, после чего была измерена их высота, которая оказалась следующей:

Т а б л и ц а 5.4.2

№ колец в порядке обработки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Высота в мм	31,44	32,22	31,98	31,88	31,44	31,17	31,68	31,28	31,72	31,58
№ колец в порядке возрастания размера	4	20	18	16	5	2	10	3	11	8
№ колец в порядке обработки	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Высота в мм	31,87	32,12	31,04	31,87	31,62	31,73	31,48	31,88	31,96	31,49
№ колец в порядке возрастания размера	14	19	1	13	9	12	6	15	17	7

Из табл. 5.4.2 видно, что медиана m_e эмпирического распределения равна

$$m_e = \frac{31,68 + 31,72}{2} = 31,70 \text{ мм},$$

где 31,68 и 31,72 — кольца, имеющие соответственно № 10 и № 11 при расположении их в порядке возрастания размеров.

Найдем среднюю арифметическую высоту колец выборки по формуле (5.2.35), приняв за «ложный нуль» медиану так, что

$$c = m_e = 31,7 \text{ мм},$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 = \frac{1}{20} & (-0,26 + 0,52 + 0,28 + 0,18 - 0,26 - 0,53 - 0,02 - 0,42 + \\ & + 0,02 - 0,12 + 0,17 + 0,42 - 0,66 + 0,17 - 0,08 + 0,03 - 0,22 + 0,18 + \\ & + 0,26 - 0,21) + 31,70 = -\frac{0,55}{20} + 31,70 = 31,672 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Средняя арифметическая в этой выборке значительно отличается от средней арифметической в выборке, приведенной в примере 5.2.1, а именно на

$$\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 32,298 - 31,672 = 0,626 \text{ мм}.$$

Требуется при доверительной вероятности 0,96 найти доверительные границы для дисперсии σ^2 по обеим выборкам. Распределение колец по высоте предполагается нормальным.

В данном случае выборки существенно различаются по средним арифметическим, и нельзя просто объединить данные обеих выборок. Поэтому придется отдельно вычислить эмпирическую дисперсию данной выборки и, затем, используя результат, полученный в примере 5.4.3, решить поставленную задачу.

Эмпирическую дисперсию данной выборки найдем по формуле (5.2.39):

$$s_1^2 = \frac{1}{20} (0,0676 + 0,2704 + 0,0784 + 0,0324 + 0,0676 + 0,2809 + 0,0004 + 0,1764 + 0,0004 + 0,0144 + 0,0289 + 0,1764 + 0,4356 + 0,0289 + 0,0064 + 0,0909 + 0,0484 + 0,0324 + 0,0676 + 0,0441) - (31,6725 - 31,7)^2 = \\ = \frac{1,8585 - 0,0151}{20} = \frac{1,8434}{20} = 0,0922 \text{ мм}^2.$$

Таким образом,

$$n_1 s_1^2 = 1,8434 \text{ мм}^2,$$

$$n_2 s_2^2 = 2,5282 \text{ мм}^2 \text{ (из примера 5.4.2),}$$

$$n \cdot S^2 = \sum_{i=1}^n n_i s_i^2 = 4,3716 \text{ мм}^2.$$

Неравенство (5.4.16) для этого примера будет иметь вид

$$\frac{4,3716}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{4,3716}{\chi_1^2}.$$

Так как в нашем случае суммарное число степеней свободы $n_1 - 1 + n_2 - 1 = n - 2 = 40 - 2 = 38$, т. е. больше 30, то значения χ_1^2 и χ_2^2 найдем по формуле (4.5.67) с помощью табл. IV функции Лапласа. Для доверительной вероятности 0,96 будем иметь:

$$\chi_1^2 = \frac{(z_1 + \sqrt{2k_\Sigma - 1})^2}{2} = \frac{(-2,06 + \sqrt{2 \cdot 38 - 1})^2}{2} = \frac{6,60^2}{2} = \frac{43,56}{2} = 21,78,$$

$$\chi_2^2 = \frac{(z_2 + \sqrt{2k_\Sigma - 1})^2}{2} = \frac{(2,06 + \sqrt{2 \cdot 38 - 1})^2}{2} = \frac{10,72^2}{2} = \frac{114,92}{2} = 57,46.$$

Таким образом, мы получим:

$$\frac{4,3716}{57,46} < \sigma^2 < \frac{4,3716}{21,78},$$

что равносильно неравенству

$$0,0761 \text{ мм}^2 < \sigma^2 < 0,2007 \text{ мм}^2.$$

Таким образом, совместное рассмотрение двух «проб», взятых из одинаковой продукции одной и той же машины, позволило значительно сузить доверительные границы для теоретической дисперсии высоты штамповок колец.

Аналогично нужно поступать и при любом числе выборок, объединяя их для оценки параметра σ^2 , если гипотеза постоянства дисперсии может считаться согласующейся с опытными данными. В дальнейшем мы укажем способ проверки этой гипотезы.

5.4.3. Построение доверительных интервалов для σ с помощью выборочного размаха R_n . Другой более грубый, но связанный с меньшими вычислениями способ построения доверительных интервалов для σ основан на законе распределения отношения $\frac{R_n}{\sigma}$, выведенном нами в 5.3.10 (см. (5.3.155)).

Мы видели, что для двух положительных чисел t_1 и t_2

$$P(t_1, t_2) = P\left(t_1 < \frac{R_n}{\sigma} < t_2\right) = P_n(t_2) - P_n(t_1), \quad (5.4.27)$$

где через $P_n(t)$ мы обозначили функцию, стоящую в правой части (5.3.155).

Написанное выражение вероятности $P_n(t_1, t_2)$ можно записать в другом виде:

$$P_n(t_1, t_2) = P\left(\frac{R_n}{t_2} < \sigma < \frac{R_n}{t_1}\right). \quad (5.4.28)$$

Если мы подберем t_1 и t_2 так, чтобы

$$P_n(t_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

и

$$P_n(t_1) = \frac{\alpha}{2},$$

где α — малое положительное число, то интервал

$$\left(\frac{R_n}{t_2}, \frac{R_n}{t_1}\right)$$

будет доверительным интервалом для σ с доверительной вероятностью $1 - \alpha$. Например, беря $\alpha = 0,02$ (2%) при $n = 7$ по табл. XIV приложений, учитывая, что $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,99$ и $\frac{\alpha}{2} = 0,01$, находим:

$$P\left(\frac{R_n}{4,88} < \sigma < \frac{R_n}{1,05}\right) = P(0,20R < \sigma < 0,95R).$$

Найденный интервал отвечает доверительной вероятности 98% (99 — 1 = 98).

Если мы располагаем измеренными размахами в m выборках объема n , то, как мы видели в 5.3.11, средняя арифметическая из размахов приближенно следует (при достаточно больших m) нормальному закону так, что (см. (5.3.161))

$$P\left(z_1 < \frac{\bar{R} - \sigma}{\frac{\gamma_n}{\sigma \gamma_n} \sqrt{m}} < z_2\right) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1).$$

Написанное в скобках неравенство может быть разрешено относительно σ и записано в следующем виде:

$$a_n = \frac{\bar{R}}{\alpha_n} \cdot \frac{1}{1 + z_2 \frac{\gamma_n}{\sqrt{m}}} < \sigma < \frac{\bar{R}}{\alpha_n} \cdot \frac{1}{1 + z_1 \frac{\gamma_n}{\sqrt{m}}} = b_n. \quad (5.4.29)$$

Выбирая z_1 и z_2 так, чтобы

$$\frac{1}{2} + \Phi(z_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

и

$$z_1 = -z_2 \quad (z_1 \text{ — отрицательно}),$$

мы получим, следовательно, доверительный интервал (a_n, b_n) для σ , отвечающий доверительной вероятности $1 - \alpha$.

Например, для $n = 3$, $m = 20$ и $\alpha = 0,05$ (5%) будем иметь такие уравнения:

$$\Phi(z_2) = \frac{1 - 0,05}{2} = 0,425,$$

откуда по табл. IV приложений находим:

$$z_2 = 1,44 \quad \text{и} \quad z_1 = -1,44.$$

По табл. XIV приложений для $n = 3$

$$\gamma_n = \frac{\frac{\sigma R_n}{\sigma}}{M\left(\frac{R_n}{\sigma}\right)} = 0,525,$$

$$1 + z_2 \frac{\gamma_n}{\sqrt{m}} = 1 + 1,44 \frac{0,525}{\sqrt{20}} = 1,17,$$

$$1 + z_1 \frac{\gamma_n}{\sqrt{m}} = 1 - 1,44 \frac{0,525}{\sqrt{20}} = 0,83.$$

Следовательно,

$$P\left(\frac{R}{a_n} \frac{1}{1,17} < \sigma < \frac{R}{a_n} \cdot \frac{1}{0,83}\right) = P\left(0,85 \frac{R}{a_n} < \sigma < 1,20 \frac{R}{a_n}\right) = 0,95.$$

5.4.4. Распределение Стьюдента и доверительные интервалы для оценки генеральной средней a . Метод получения доверительных интервалов для оценки генеральной средней a нормальной совокупности, рассмотренный в 5.4.1, может быть использован лишь в том случае, когда параметр σ генеральной совокупности нам известен (например, на основе других выборок). В других случаях функция

$$u = \frac{\bar{x} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \quad (5.4.30)$$

которой мы пользовались в 5.4.1, зависит, кроме оцениваемого параметра a , еще также от неизвестного параметра σ , а потому не может быть использована для построения доверительного интервала для оценки a . Заменяя же в (5.4.30) теоретический параметр σ выборочной оценкой \bar{s} или s , мы перейдем уже к другой функции

$$t = \frac{\bar{x} - a}{\frac{s}{\sqrt{n}}}, \quad (5.4.31)$$

закон распределения которой, особенно при малых значениях n ($n < 30$), довольно существенно отличается от нормального закона распределения величины u . Мы увидим, что введенная таким образом функция t действительно может быть использована для оценки a . Мало того, можно показать, что получаемая этим путем оценка в некотором смысле будет наилучшей, так как она исчерпывает всю информацию о величине параметра a , которая дается выборкой. Это последнее обстоятельство будет подробно рассмотрено далее.

Использование величины t для оценки среднего было предложено первоначально в другой форме) английским статистиком В. Госсетом, более известным под псевдонимом «Стьюдент». Он получил для величины t закон распределения, носящий теперь его имя.

При выводе распределения Стьюдента мы воспользуемся следующей теоремой, которая будет нами использована неоднократно.

Теорема. Пусть случайная величина t представляет частное

$$t = \frac{Z \sqrt{k}}{V}, \quad (5.4.32)$$

где Z — нормально распределенная величина с законом $N(z; 0, 1)$, V — независимая от Z величина и V^2 распределена по закону χ^2 с k степенями свободы.

При этих условиях плотность распределения t имеет вид

$$s_k(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \sqrt{k\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} = B_k \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty, \quad (5.4.33)$$

где

$$B_k = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \sqrt{k\pi}}.$$

Закон распределения (5.4.33) и называется *законом распределения Стьюдента с k степенями свободы*. Следовательно, функция распределения Стьюдента имеет вид

$$S_k(t_1) = P(t < t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} s_k(t) dt. \quad (5.4.34)$$

Доказательство этой теоремы разобьем на несколько этапов: 1) плотность величины Z будет:

$$\varphi_1(z) = n(z; 0; 1) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}; \quad (5.4.35)$$

2) плотность $\psi(u)$ величины $U = \frac{V}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{V^2}{k}}$ запишется согласно сделанному предположению как плотность величины $\sqrt{\frac{\chi^2}{k}}$; поэтому, используя (4.5.65), мы будем иметь:

$$\psi(u) = \frac{2\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} u^{k-1} e^{-\frac{ku^2}{2}} \quad (5.4.36)$$

(в (4.5.65) мы заменили x на u и положили $\sigma = 1$); 3) так как величины Z и $\sqrt{\frac{V^2}{k}}$ независимы, то их совместная плотность $\varphi(z, u)$ равна произведению плотностей (5.4.35) и (5.4.36):

$$\varphi(z, u) = \varphi_1(z)\psi(u) = C_k e^{-\frac{z^2}{2} - \frac{ku^2}{2}} u^{k-1}, \quad \begin{matrix} -\infty < z < \infty \\ 0 < u < \infty \end{matrix} \quad (5.4.37)$$

где

$$C_k = \frac{2\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \sqrt{2\pi}}; \quad (5.4.38)$$

4) найдем теперь вероятность

$$S_k(t_1) = P(t < t_1) = P\left(\frac{Z}{U} < t_1\right) = P(Z < t_1 U).$$

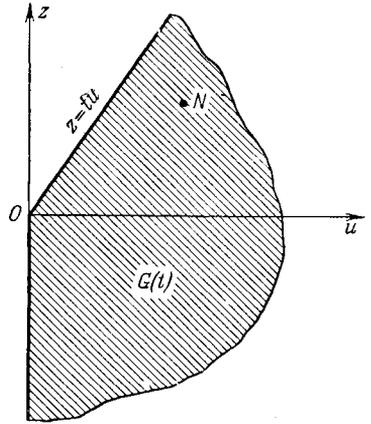
Эту вероятность можно рассматривать как вероятность случайной точке N с координатами Z и U , распределенными по плоскости с плотностью $\varphi(z, u)$, попадать в область $G(t_1)$, определяемую неравенством

$$z < t_1 u.$$

Область $G(t_1)$ представляет часть плоскости, ограниченной отрицательной полуосью оси z и лучом $z = t_1 u$, выходящим из начала координат (черт. 75).

Таким образом,

$$\begin{aligned} S_k(t_1) &= P[N \subset G(t_1)] = \iint_{G(t_1)} \varphi(z, u) dz du = \\ &= C_k \int_0^\infty du \int_{-\infty}^{t_1 u} \varphi(z, u) dz = \\ &= C_k \int_0^\infty e^{-\frac{ku^2}{2}} u^{k-1} du \int_{-\infty}^{t_1 u} e^{-\frac{z^2}{2}} dz; \end{aligned} \quad (5.4.39)$$



5) найдем далее $s_k(t_1) = S'_k(t_1)$, дифференцируя по t_1 справа (5.4.39) под знаком интеграла (что, как можно убедиться, представляет законную операцию).

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} s_k(t_1) &= S'_k(t_1) = C_k \int_0^\infty e^{-\frac{ku^2}{2}} u^{k-1} \frac{d}{dt_1} \int_{-\infty}^{t_1 u} e^{-\frac{z^2}{2}} dz du = \\ &= C_k \int_0^\infty e^{-\frac{ku^2}{2}} u^{k-1} e^{-\frac{t_1^2 u^2}{2}} u du = C_k \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}(k+t_1^2)} u^{k-1} u du. \end{aligned} \quad (5.4.40)$$

Черт. 75. Геометрическая интерпретация функции $S_k(t)$ распределения Стьюдента: $S_k(t) = P[N \subset G(t)]$.

Сделав подстановку

$$\frac{u^2}{2}(k+t_1^2) = \xi, \quad u = \left(\frac{2\xi}{k+t_1^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

откуда $u du = \frac{d\xi}{k+t_1^2}$, получим из (5.4.40):

$$s_k(t_1) = C_k \int_0^\infty e^{-\xi} \left(\frac{2\xi}{k+t_1^2}\right)^{\frac{k-1}{2}} \frac{d\xi}{k+t_1^2} = \frac{2^{\frac{k-1}{2}} C_k}{(k+t_1^2)^{\frac{k+1}{2}}} \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{\frac{k+1}{2}} d\xi. \quad (5.4.41)$$

Но

$$\int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{\frac{k-1}{2}} d\xi = \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{\frac{k+1}{2}-1} d\xi = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)$$

и потому из (5.4.41) и (5.4.38) следует:

$$\begin{aligned} s_k(t_1) &= \frac{2^{\frac{k-1}{2}} C_k}{(k+t_1^2)^{\frac{k+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) = \frac{2^{\frac{k+1}{2}} \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \sqrt{2\pi} (k+t_1^2)^{\frac{k+1}{2}}} = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \left(1 + \frac{t_1^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}} = B_k \left(1 + \frac{t_1^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь распределение величины t —отношения (5.4.31) Стьюдента.

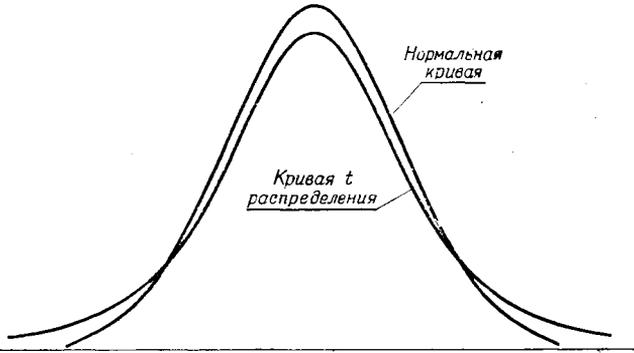
Эту величину можно преобразовать следующим образом:

$$t = \frac{\frac{\bar{x} - a}{s}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}} = \frac{\frac{\bar{x} - a}{\sigma} \sqrt{n}}{\frac{\sqrt{ns}}{\sigma}} \sqrt{\frac{n-1}{n}} = \frac{Z \sqrt{n-1}}{V},$$

где $Z = \frac{\bar{x} - a}{\sigma} \sqrt{n}$ —нормированное отклонение \bar{x} —подчиняется нормальному закону $N(z; 0, 1)$, а $V^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2}$, как мы знаем из (5.4.14), имеет χ^2 -распределение с $(n - 1)$ степенями свободы. Применяя доказанную теорему (5.4.33), мы найдем, что t подчиняется закону $s_{n-1}(t_1)$ и

$$P(t < t_1) = S_{n-1}(t_1).$$

Плотности закона Стьюдента $s_k(t_1)$ имеют симметричную относительно оси форму (черт. 76) и внешним видом напоминают нормальные кривые. Однако



Черт. 76. Кривая t -распределения и нормальная кривая распределения.

они значительно медленнее спадают к оси t при $|t| \rightarrow \infty$, особенно при малых значениях k .

При $k = 1$

$$s_1(t_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} (1 + t_1^2)^{-1} = \frac{1}{\pi(1 + t_1^2)}, \tag{5.4.42}$$

и мы получаем закон (5.3.97) Коши.

При $k \rightarrow \infty$ функция $\left(1 + \frac{t_1^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$ имеет пределом $e^{-\frac{t_1^2}{2}}$, а множитель B_k стремится к $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Поэтому при $k \rightarrow \infty$

$$S_k(t_1) \rightarrow N(t_1, 0, 1)$$

и, как видно из табл. XVI, XVII и XVIII приложений, при $n > 30$ практически не отличается от $N(t_1; 0; 1)$ в очень широкой области значений t_1 .

В табл. XVI приложений приводятся значения функции $S_k(t) = P_t$ для значений $k = 1, 2, 3, \dots, 19$ и $k = \infty$ в интервале изменения t от 0 до 6. Эти значения соответствуют площади под кривой $s_k(t)$, простирающейся над проме-

жутком $(-\infty, t)$ оси t (черт. 77). Для получения значений $S_k(t)$ при отрицательных t можно воспользоваться вытекающим из симметричности кривой соотношением

$$S_k(t) = 1 - S_k(-t). \quad (5.4.43)$$

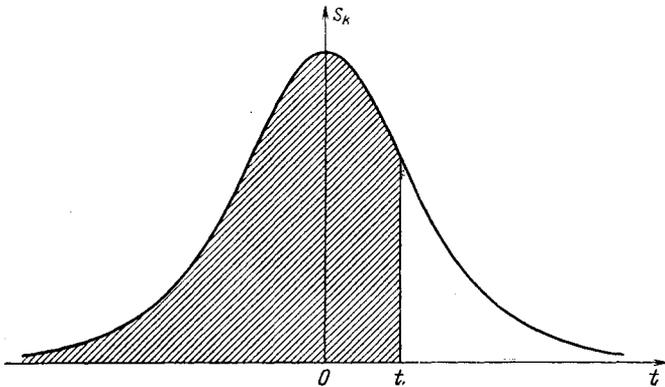
Например,

$$S_5(-3) = 1 - S_5(3) = 1 - 0,985 = 0,015.$$

В табл. XVII приложений даны для тех же, что в табл. XVI приложений, значений k и t вероятности

$$\frac{q}{100} = 1 - 2B_k \int_0^t \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt.$$

Большое значение для приложений имеют так называемые q -процентные пределы для t , т. е. такие, что при $t_{q,k} > 0$ за пределами промежутка



Черт. 77. Площадь под кривой $s_k(t)$ распределения Стьюдента, отвечающая функции $S_k(t)$ распределения.

$(-t_{q,k}, +t_{q,k})$ остается лишь q процентов всей площади кривой $s_k(t)$, или, другими словами, имеет место неравенство

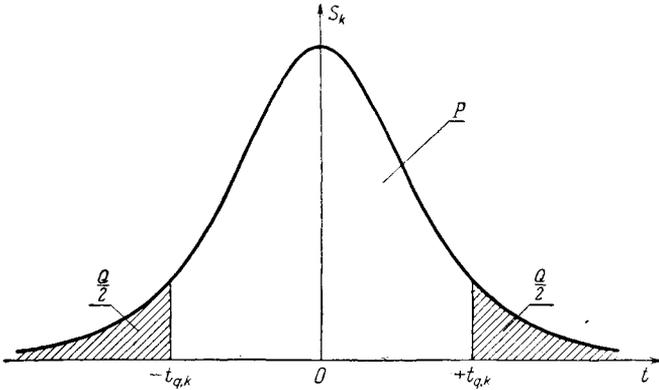
$$\begin{aligned} P(|t| > t_{q,k}) &= \frac{q}{100} = Q = \int_{-\infty}^{-t_{q,k}} s_k(t) dt + \int_{t_{q,k}}^{\infty} s_k(t) dt = \\ &= 2 \int_{t_{q,k}}^{\infty} s_k(t) dt = 2 \left(1 - \int_{-\infty}^{t_{q,k}} s_k(t) dt\right) = 2[1 - S_k(t_{q,k})]. \end{aligned}$$

Очевидно (черт. 78),

$$P(-t_{q,k} < t < t_{q,k}) = 1 - Q = P = 2S_k(t_{q,k}) - 1. \quad (5.4.44)$$

В табл. XVIII приложений даны q -процентные пределы $t_{q,k}$, определяемые соотношением (5.4.44), для значений $q = 10; 5; 2,5; 2; 1; 0,5; 0,3; 0,2; 0,1$ и охватывающие весь диапазон изменений k (от 1 до ∞). В последней строке этой таблицы (строка для значения $k = \infty$) помещены q -процентные пределы, отвечающие нормальному закону распределения. Рассматривая таблицу, видим, что значения $t_{q,k}$ для малых значений k значительно больше соответствующих $t_{q,\infty}$

(особенно при малых q), что связано с указанной выше особенностью кривых $s_k(t)$ медленнее приближаться к оси t при $t \rightarrow \infty$, чем нормальная кривая.



Черт. 78. Доверительный интервал $(-t_{q,k}, +t_{q,k})$ для оценки нормированного отклонения $\frac{\bar{x} - a}{\bar{s}/\sqrt{n}}$ по методу Стьюдента и соответствующая ему доверительная вероятность P ($k = n - 1$).

Перейдем к тому, как применяется распределение Стьюдента для оценки параметра a нормального распределения. Заметим, что неравенство

$$|t| < t_{q,n-1}$$

или, что все равно,

$$\left| \frac{\bar{x} - a}{\bar{s}} \sqrt{n} \right| < t_{q,n-1},$$

равносильное неравенству

$$-\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} t_{q,n-1} < \bar{x} - a < \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} t_{q,n-1},$$

или, наконец,

$$\bar{x} - t_{q,n-1} \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_{q,n-1} \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}, \tag{5.4.45}$$

осуществляется, как мы видели, с вероятностью

$$P = 2S_{n-1}(t_{q,n-1}) - 1 = 1 - Q = 1 - \frac{q}{100} = \frac{100 - q}{100}. \tag{5.4.46}$$

Если пользоваться вместо \bar{s} оценкой s , доверительным интервалом будет:

$$\bar{x} - t_{q,n-1} \frac{s}{\sqrt{n-1}} < a < \bar{x} + t_{q,n-1} \frac{s}{\sqrt{n-1}}. \tag{5.4.47}$$

Таким образом, задавшись доверительной вероятностью $P = 1 - \frac{q}{100}$, мы находим по табл. XVIII значения $t_{q,n-1}$, отвечающие заданному уровню вероятности и числу степеней свободы $k = n - 1$, так что

$$P \left(\bar{x} - t_{q,n-1} \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_{q,n-1} \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} \right) = P.$$

В силу симметрии распределения около начала координат полученный нами интервал $I \left(\bar{x} - t_{q,n-1} \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{q,n-1} \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} \right)$ будет наиболее коротким из всех доверительных интервалов при том же уровне P вероятности.

При небольших значениях n объема выборки длины $2t_{q, n-1}$ доверительных интервалов значительно больше, чем длины $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ «классических» интервалов, получающихся при известном параметре σ . Замена σ на s приводит к большей дисперсии переменной t , определяемой соотношением (5.4.31), по сравнению с переменной u , определяемой из (5.4.30). При больших значениях k -числа степеней свободы (практически можно считать при $k > 30$) закон распределения Стьюдента настолько близок к нормальному, что q -процентные пределы $t_{q, n-1}$, найденные при $k > 30$ по табл. XVIII приложений, практически совпадают с q -процентными пределами z_q , найденными по табл. VII. Доверительная вероятность P , как и прежде, будет в силу теоремы Бернулли приблизительно представлять долю тех построенных по различным выборкам (из длинной серии выборок) доверительных интервалов, которые будут действительно содержать оцениваемое постоянное значение параметра a .

Пример 5.4.5. Пусть требуется построить 99%-ный доверительный интервал для оценки генерального среднего диаметра a валика по «пробе» из 10 деталей, сработанных на токарном автомате, если отклонения размеров этих деталей от середины поля допуска оказались следующими (табл. 5.4.3):

Таблица 5.4.3

№ деталей по порядку	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Отклонения размеров в мк	+2	+1	-2	+3	+2	+4	-2	+5	+3	+4

По формулам (5.2.2) и (5.2.36) находим, что $\bar{x} = +2$ мк, $s = 2,3$ мк. Из (5.4.45) и (5.4.46) имеем:

$$P\left(\bar{x} - t_{1;9} \frac{2,3}{\sqrt{10-1}} < a < \bar{x} + t_{1;9} \frac{2,3}{\sqrt{10-1}}\right) = 0,99,$$

откуда

$$1 - P = Q = 1 - 0,99 = 0,01 = 1\%.$$

По табл. XVIII приложений при $q = 1\%$ и $k = n - 1 = 10 - 1 = 9$ находим $t_{1;9} = 3,25$.

Далее

$$t_{1;9} \frac{s}{\sqrt{n-1}} = 3,25 \cdot \frac{2,28}{3} = 2,49 \text{ мк},$$

откуда

$$2 - 2,49 < a < 2 + 2,49$$

или

$$-0,49 < a < 4,49. \quad (5.4.48)$$

Таким образом, согласующиеся с нашими опытными данными или, иными словами, «допустимые» (с надежностью в 99%) значения параметра a лежат в интервале $(-0,49; 4,49)$.

Заметим, что если бы мы приняли найденное значение $s = 2,3$ мк за значение параметра σ и исходили бы из нормального закона при оценке, то «классические» 99%-ные доверительные границы были бы значительно уже. В самом деле, вместо $t_{1;9} = 3,25$ мы имели бы по табл. VII приложений $Z_1 = 2,576$ и $Z_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,58 \frac{2,28}{3,16} = 1,88$ и вместо неравенства (5.4.48) получили бы:

$$+0,12 < a < 3,88. \quad (5.4.49)$$

Таким образом, мы значительно преувеличили бы действительную точность нашей оценки.

Следует хорошо уяснить себе, что некоторая неопределенность и расплывчатость оценки при малых числах наблюдений является не недостатком метода, а связана с существом дела: мы ведь предположили, что никакой информации относительно величины параметра σ , кроме той, которую дает выборка, мы не имеем. Если бы мы могли опираться при оценке дисперсии на более широкий круг наблюдений, то доверительные границы для a значительно уточнились бы. Пусть, например, мы имеем две независимые выборки объемов n_1 и n_2 из нормальных совокупностей соответственно $N(x; a_1, \sigma)$ и $N(x; a_2, \sigma)$. Мы видели (см. пример 5.4.4), как в этом случае можно уточнить доверительную оценку для σ^2 , используя характеристику s^2 , определяемую равенством

$$s^2 = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2}.$$

Рассмотрим теперь отношение

$$\hat{t} = \frac{\bar{x} - a_1}{s} \sqrt{\frac{(n_1 + n_2 - 2) n_1}{n_1 + n_2}} = \frac{\frac{\bar{x} - a_1}{\sigma} \sqrt{n_1}}{\frac{s}{\sigma} \sqrt{n_1 + n_2}} \sqrt{n_1 + n_2 - 2} = \frac{Z}{V} \sqrt{n_1 + n_2 - 2},$$

где $Z = \frac{\bar{x} - a_1}{\sigma} \sqrt{n_1}$ и подчиняется закону $N(x; 0, 1)$, $V^2 = \frac{s^2}{\sigma^2} (n_1 + n_2) = \frac{n_1 s_1^2}{\sigma^2} + \frac{n_2 s_2^2}{\sigma^2} = \chi_1^2 + \chi_2^2$ и имеет согласно (4.5.55) закон распределения χ^2 с числом степеней свободы, равным $n_1 - 1 + n_2 - 1 = n_1 + n_2 - 2$.

Применяя теорему, доказанную в настоящем параграфе, найдем, что распределение величины \hat{t} подчиняется закону Стьюдента с $(n_1 + n_2 - 2)$ степенями свободы. Отсюда получаем q -процентные доверительные границы

$$\bar{x}_1 - t_{q; n_1+n_2-2} \frac{s}{\sqrt{n_1 \cdot \frac{n_1 + n_2 - 2}{n_1 + n_2}}} < a_1 < \bar{x}_1 + t_{q; n_1+n_2-2} \frac{s}{\sqrt{n_1 \cdot \frac{n_1 + n_2 - 2}{n_1 + n_2}}},$$

более узкие, чем те, которые получились по данным одной выборки. Аналогичным образом можно оценить и a_2 . Более точную оценку для $(\bar{x}_1 - a_1)$ и $(\bar{x}_2 - a_2)$ можно получить, используя F -распределение, как будет указано далее.

Заметим еще, что в некоторых случаях экспериментатор хотя и не располагает точным значением σ , однако может с уверенностью гарантировать некоторую верхнюю границу для этого параметра. Несмотря на грубость такой границы, все же получаемый с помощью ее «классическим приемом» доверительный интервал для a при малом числе наблюдений иногда оказывается более узким, чем по методу Стьюдента.

5.4.5. Общий метод получения доверительных интервалов. Метод, примененный в предшествующих пунктах настоящего параграфа, как мы видели, предполагает, что найдется такая функция оцениваемого параметра и данных наблюдения, распределение которой не зависит от каких-либо неизвестных параметров.

Мы увидим несколько ниже, что такое предположение может быть оправдано при довольно общих условиях, если объем выборки достаточно велик. Однако существует также и более прямой путь к построению доверительных интервалов, который в ряде случаев может скорее привести к поставленной цели. Пусть мы имеем генеральную совокупность, соответствующую распределению случайной величины X с плотностью вероятности $\varphi(x, \theta)$, зависящей для простоты от одного параметра θ , причем $\theta_1 < \theta < \theta_2$, где θ_1 и θ_2 — известные пределы возможных значений параметра θ . Допустим, что для оценки параметра θ мы можем использовать некоторую статистическую характеристику $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$, построенную по данным выборки объема n . Закон распределения T может быть всегда найден, если известна плотность $\varphi(x, \theta)$: допустим, что плотность величины T будет выражаться некоторой функцией $g(t, \theta)$, зависящей от аргумента t и параметра θ . Область изменения вспомогательной переменной t пусть для определенности представляет некоторый интервал (a, b) , вне которого $g(t, \theta) = 0$ (в отдельных слу-

чаях a может быть равно $-\infty$, а b равно $+\infty$). Пусть нужно определить доверительный интервал, отвечающий вероятности $P = \frac{p}{100}$. Возьмем какое-нибудь фиксированное значение параметра $\theta = \theta_0$ в интервале (θ_1, θ_2) . Для этого значения плотность распределения случайной величины T будет $g(t, \theta_0)$ — вполне определенной функцией одного аргумента t , и мы можем вполне обоснованно вычислять вероятности нахождения величины T в любых интересующих нас интервалах. В частности, нетрудно установить $p^{0/0}$ -ый интервал «допустимых» значений T для значения θ_0 параметра θ : для этого определим два числа t_1 и t_2 таких, что

$$\left. \begin{aligned} \int_a^{t_1} g(t, \theta_0) dt &= \frac{1-P}{2} = \frac{q}{2}, \\ \int_{t_2}^b g(t, \theta_0) dt &= \frac{1-P}{2} = \frac{q}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.50)$$

Эти числа t_1 и t_2 при данном P зависят от взятого значения θ_0 . Поступая таким образом для каждого θ , мы определим две функции:

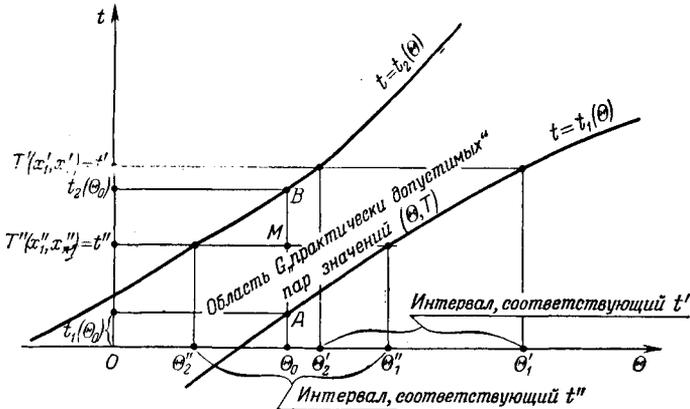
$$t = t_1(\theta) \quad \text{и} \quad t = t_2(\theta)$$

в интервале (θ_1, θ_2) .

Ввиду того, что $g(t, \theta)$ есть плотность вероятности величины T , мы будем иметь для каждого θ ($\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$):

$$\begin{aligned} P[t_1(\theta) < T(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq t_2(\theta)] &= \int_{t_1(\theta)}^{t_2(\theta)} g(t, \theta) dt = \\ &= 1 - \int_a^{t_1(\theta)} g(t, \theta) dt - \int_{t_2(\theta)}^b g(t, \theta) dt = 1 - q = P = \frac{p^{0/0}}{100}. \end{aligned} \quad (5.4.51)$$

На черт. 79 мы схематически построили графики функций $t = t_1(\theta)$ и $t = t_2(\theta)$. Ордината в точке θ_0 пересекается с этими кривыми в точках A и B , проекции которых на



Черт. 79. Построение доверительного интервала для оценки параметра θ с помощью статистической характеристики T .

ось t определяют интервал для T , отвечающий $p^{0/0}$ -ному уровню вероятности. Мы можем рассматривать интервал $[t_1(\theta), t_2(\theta)]$, или, что то же самое, интервал (A, B) как интервал «практически возможных» значений случайной величины T (при данном θ и с заданным уровнем вероятности $P = \frac{p^{0/0}}{100}$). Совокупность интервалов, подобных (A, B) , построенных для всевозможных значений θ , образует некоторую область G плоскости (θ, T) , ограниченную кривыми $t_1(\theta)$ и $t_2(\theta)$. Эту область можно рассматривать как область «практически допустимых» или совместимых пар значений (θ, T) .

Если кривые $t_1(\theta)$ и $t_2(\theta)$ построены, то мы можем получать по данным выборки доверительные интервалы для θ с уровнем доверительной вероятности P следующим образом.

Пусть произведенной выборке отвечает какое-либо вычисленное значение $t' = T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ характеристики T . Горизонтальная прямая $t = t'$ пересекает кривые $t_1(\theta)$ и $t_2(\theta)$ в точках, абсциссы которых θ'_2 и θ'_1 меняются с положением точки t' , изображающей значение статистической характеристики T , вычисленное по данным (x_1, x_2, \dots, x_n) выборки. Следовательно, $\theta'_2 = \theta'_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\theta'_1 = \theta'_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $\theta'_2 < \theta'_1$, представляют две случайные величины — функции данных наблюдения. Нетрудно убедиться теперь, что интервал $[\theta'_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta'_1(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ будет доверительным интервалом с уровнем вероятности $\frac{P}{100}$ для оценки параметра θ . В самом деле, предположим, что истинное (неизвестное нам) значение параметра θ равно θ_0 . Мы видели, что вероятность того, что характеристика T окажется между $t_1(\theta_0)$ и $t_2(\theta_0)$, т. е. будет иметь одно из «практически возможных» значений при $\theta = \theta_0$, равна P . Если $T = t''$ попадает в действительности в эти пределы, то горизонтальная прямая $t = t''$ пересекает ординату $\theta = \theta_0$ в некоторой точке M , лежащей между точками A и B , в которых ордината $\theta = \theta_0$ пересекает кривые $t_1(\theta)$ и $t_2(\theta)$. Следовательно, соответствующий интервал (θ''_2, θ''_1) покрывает истинное значение θ_0 параметра θ с вероятностью P . Если же значение характеристики T не попадет в интервал $[t_1(\theta_0), t_2(\theta_0)]$, как это и имеет место при $T = t'$, то горизонтальная прямая $t = t'$ не пересечет вертикаль $\theta = \theta_0$ в области G между кривыми $t_1(\theta)$ и $t_2(\theta)$, а потому интервал (θ'_2, θ'_1) не покрывает значение θ_0 параметра θ . Вероятность этого последнего обстоятельства равна в точности $1 - P = Q$. Можно также сказать, что доверительный интервал $[\theta'_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta'_1(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ закрывает такие значения θ , при каждом из которых наблюденное значение характеристики T принадлежит к числу «практически возможных»; вместе с тем он не содержит таких, при которых наблюдаемое значение T принадлежит к области практически невозможных. Мы не имеем права говорить, что вероятность неравенства $\theta'_2 < \theta < \theta'_1$ при фиксированных значениях $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, полученных в выборке (а не случайных), равна P . Это неравенство определяет все же область таких значений θ , которые «совместимы» как раз с данными в выборке. Под этим, говоря более строго, следует понимать значения θ , для которых интервал «практически возможных» T содержит наблюдаемое значение $T = t'$.

В рассмотренном случае функции $t_1(\theta)$ и $t_2(\theta)$ — монотонные. Если это не соблюдено, т. е. функции — немонотонные, то горизонтальные прямые могут пересекать каждую из кривых в нескольких точках. Тогда истинное значение параметра θ будет покрываться с данной доверительной вероятностью P некоторой системой доверительных интервалов.

При некоторых условиях доверительные границы θ_2 и θ_1 для параметра θ можно определять, не находя в явной форме вспомогательных функций $t_1(\theta)$ и $t_2(\theta)$. Так, для случая, представленного на черт. 79, мы видим, что при заданном значении $T = t'$ для оценки θ нужно определить две точки θ'_2 и θ'_1 такие, что

$$t_2(\theta'_2) = t_1(\theta'_1) = t', \tag{5.4.52}$$

но по определению функций $t_1(\theta)$ и $t_2(\theta)$ в (5.4.50)

$$\int_a^{\theta'_1} g(t, \theta'_1) dt = \frac{1-P}{2},$$

$$\int_{t_2(\theta'_2)}^b g(t, \theta'_2) dt = \frac{1-P}{2}.$$

Принимая во внимание (5.4.52), мы получаем следующие уравнения для определения θ'_1 и θ'_2 по P (или q) и данному t' :

$$\left. \begin{aligned} \int_a^{t'} g(t, \theta'_1) dt &= \frac{1-P}{2}, \\ \int_{t'}^b g(t, \theta'_2) dt &= \frac{1-P}{2}. \end{aligned} \right\} \tag{5.4.53}$$

Тот же метод применим, разумеется, и в случае дискретного распределения; при этом интегралы, стоящие в (5.4.53), заменяются соответствующими суммами вероятностей.

Метод построения доверительных интервалов может быть обобщен на случай оценки двух и большего числа параметров по данным выборки. Пусть, например, мы рассматриваем случай двух параметров θ_1 и θ_2 распределения, оцениваемых с помощью статистических характеристик T_1 и T_2 по данной выборке. Для каждой пары значений параметров θ_1 и θ_2 в «пространстве» параметров данной задачи закон распределения характеристик T_1 и T_2 полностью определен, если известен закон распределения генеральной совокупности. Поэтому при заданном значении вероятности $P = \frac{P}{100}$ мы можем (вообще говоря, различным образом) определить область S допустимых значений T_1 и T_2 такую, что

$$P(T_1 \text{ и } T_2 \text{ попадают в } S) = \int_S \int g(t_1, t_2, \theta_1, \theta_2) dt_1 dt_2 = \frac{P}{100}, \quad (5.4.54)$$

причем $g(t_1, t_2, \theta_1, \theta_2)$ есть плотность совместного распределения характеристик T_1 и T_2 для заданных значений параметров θ_1 и θ_2 . Если теперь выборка дала значения $T_1 = T_1^0$ и $T_2 = T_2^0$, мы будем считать доверительной областью (двумерной) с заданным коэффициентом доверия $P = \frac{P}{100}$ множество всех тех значений параметров θ_1 и θ_2 , для которых построенная нами область «допустимых» значений содержит точку (T_1^0, T_2^0) .

5.4.6. Оценка вероятности по частоте. Мы поясним теперь метод построения доверительных интервалов на примере оценки вероятности p некоторого события A , или, что то же самое, на примере оценки единственного параметра p распределения случайной величины X , принимающей только два значения: 0 и 1, причем $P(X=1) = p$ и $P(X=0) = q$. Пусть данные выборки, т. е. число s испытаний и число x появления события A , дают частоту $w = \frac{x}{s}$ появления события A , которую естественно рассматривать как оценку параметра p . Как мы видели в 3.7.3, частота следует биномиальному закону, зависящему от постоянного в каждом данном случае параметра p и от объема s выборки. Ввиду дискретности биномиального распределения и, значит, разрывности функции распределения характеристики $\frac{x}{s} = w$ нельзя, вообще говоря, для любого значения доверительной вероятности P построить область допустимых значений $\frac{x}{s}$ такую, чтобы попадание в эту область имело вероятность, в точности равную P при всех значениях параметра p . Поэтому в данном случае можно дать лишь приближенное решение, а именно для каждого p указать область, вероятность попадания в которую будет не менее, чем P . Совокупность таких интервалов «практически возможных» значений может быть использована для определения доверительного интервала для параметра p . В данном случае мы будем говорить, что этим интервалам отвечает «коэффициент доверия» P .

Для нахождения доверительного интервала вида $p_2(x, s) < p < p_1(x, s)$ (где $x = ws$ — число появлений события A) при заданном коэффициенте доверия P проще всего применить процедуру, определяемую формулами (5.4.53). При данном $x = ws$ верхняя граница $p_1(x, s) = p_1$ доверительного интервала определится (иногда только приближенно) из уравнения

$$\sum_{m=0}^x C_s^m p_1^m (1 - p_1)^{s-m} = \frac{1-P}{2} \quad (5.4.55)$$

(точнее говоря, следует определить при данном x наибольшее значение p , при котором

$$\sum_{m=0}^x C_s^m p^m (1-p)^{s-m} \leq \frac{1-P}{2}.$$

Точно так же для определения нижней границы $p_2(x, s) = p_2$ следует решить уравнение

$$\sum_{m=x}^s C_s^m p_2^m (1 - p_2)^{s-m} = \frac{1-P}{2}. \tag{5.4.56}$$

Используя выражение (4.5.43) для «хвостов» биномиального распределения, мы можем уравнения (5.4.55) и (5.4.56) записать в более сжатом виде:

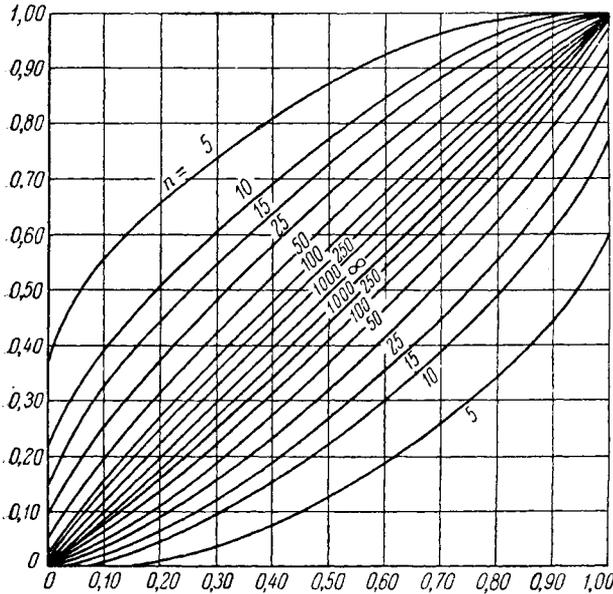
$$\left. \begin{aligned} I_{p_1}(x+1, s-x) &= \frac{1-P}{2}, \\ I_{p_2}(x, s-x+1) &= \frac{1-P}{2}. \end{aligned} \right\} \tag{5.4.57}$$

Уравнения (5.4.57) решаются приближенно с помощью таблиц неполной бета-функции. Для двух значений доверительной вероятности $P = 0,95$ и $P = 0,99$

и для различных x и s (или x и $s-x$) в табл. XIX приложений приведены соответствующие значения верхнего и нижнего доверительных пределов.

Для примера найдем 95%-ный доверительный интервал для вероятности p по частоте $\frac{24}{50} = 0,48$, полученной при 50 наблюдениях. Здесь $x = 24$, $s = 50$, $s-x = 26$. На пересечении строки $x = 24$ и столбца $s-x = 26$ в табл. XIX приложений для 95%-ных доверительных пределов находим два числа $\binom{626}{337}$. 95%-ный доверительный интервал для вероятности p , совместимый с данными опыта, будет:

$$0,337 < p < 0,626.$$



Черт. 80. 90%-ные доверительные области для вероятности P .

Для уровней значимости $p = 0,90$ и $p = 0,80$ построены кривые, показанные на черт. 80 и 81, позволяющие приближенно находить соответствующие доверительные интервалы.

Для больших значений s мы можем на основании 4.3.5 считать распределение частоты $w = \frac{x}{s}$ приближенно нормальным $n(x; p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{s}})$. Следовательно, мы можем доверительный интервал для p с доверительной вероятностью P получить, исходя из приближенного равенства

$$P \left(-t_p < \frac{w-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{s}}} < t_p \right) = P, \tag{5.4.58}$$

в котором t_p определяют из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t_p}^{t_p} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi(t_p) = P.$$

Если неравенства

$$-t_P \sqrt{\frac{p(1-p)}{s}} < \omega - p < t_P \sqrt{\frac{p(1-p)}{s}} \quad (5.4.59)$$

разрешить относительно p , то мы получим:

$$\frac{2s\omega + t_P^2 - t_P \sqrt{D}}{2(s + t_P^2)} < p < \frac{2s\omega + t_P^2 + t_P \sqrt{D}}{2(s + t_P^2)}, \quad (5.4.60)$$

где

$$D = \sqrt{4s\omega(1-\omega) + t_P^2}.$$

Неравенства (5.4.59) и (5.4.60) эквивалентны и, следовательно, (5.4.60) осуществляются с вероятностью P , определяя искомый доверительный интервал. Легко показать, что, пренебрегая в правых и левых частях (5.4.60) членами t_P^2 , мы изменим эти выражения лишь на величины порядка $\frac{1}{s}$, что не может существенно повлиять на вероятность осуществления этих неравенств при больших s .

Поэтому неравенства (5.4.60) при больших s эквивалентны значительно более простым

$$\omega - t_P \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{s}} < p < \omega + t_P \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{s}}, \quad (5.4.61)$$

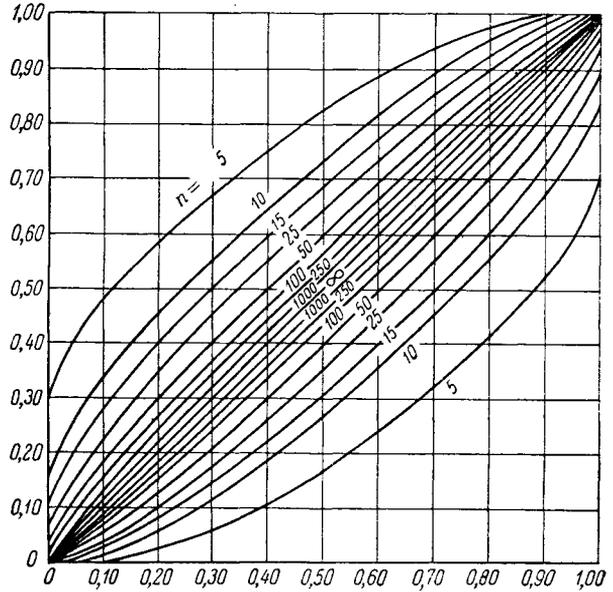
которые и определяют доверительный интервал. Например, 95%-ный доверительный интервал получаем, беря $t_P = 1,96$, так как $2\Phi(1,96) = 0,95$. Кривые

$$p = \omega \pm t_P \sqrt{\omega(1-\omega)}$$

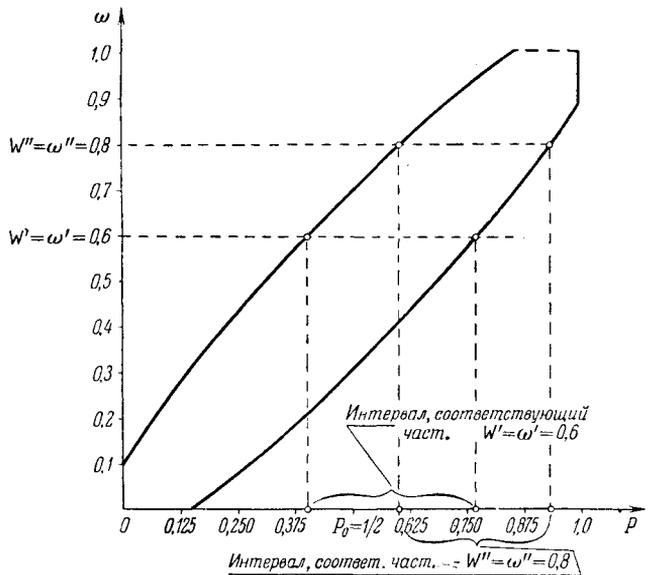
представляют две половины эллипса, изображенного на черт. 82.

5. 4. 7. Получение доверительных границ при большом числе наблюдений. До

сих пор мы при построении доверительных интервалов для оцениваемого параметра исходили из статистических характеристик, которые более или менее естественно отвечали постановке задачи; однако мы не руководствовались при отборе этих характе-



Черт. 81. 80%-ные доверительные области для вероятности P .



Черт. 82. Доверительный интервал для оценки вероятности P по частости ω при доверительной вероятности $P = 0,95$.

ристик каким-либо общим правилом, дающим конструкцию этих оценок. Мы покажем теперь, что при известных условиях такое правило выбора характеристик дать можно. Для формулировки этого правила мы используем понятие о «функции правдоподобия», введенное нами в 5.3.1.

Покажем теперь, как использовать эту функцию для получения доверительных интервалов оцениваемого параметра θ при больших n ; мы покажем, что при известных условиях будет существовать такая функция от данных выборки и параметра θ , распределение которой будет нормально $N(x; 0; 1)$. Это будет вытекать из следующей теоремы.

Теорема. Если

$$M \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \varphi(x, \theta) \right] = 0$$

и

$$A^2 = M \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \varphi(x, \theta) \right]^2$$

конечно, то распределение случайной величины

$$\frac{1}{\sqrt{n} A} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln P(O_n, \theta)$$

при $n \rightarrow \infty$ стремится к нормальному $N(x; 0, 1)$.

Рассмотрим величину $\frac{\partial}{\partial \theta} P(O_n, \theta)$ для фиксированного θ . Так как

$$\ln P(O_n, \theta) = \sum_{i=1}^n \ln \varphi(x_i, \theta),$$

то

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln P(O_n, \theta) = \sum_{i=1}^n \xi_i,$$

где

$$\xi_i = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \varphi(x_i, \theta) = \frac{\varphi'_\theta(x_i, \theta)}{\varphi(x_i, \theta)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

можно рассматривать как n одинаково распределенных независимых экземпляров одной и той же величины

$$\xi = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \varphi(X, \theta);$$

здесь аргумент X — случайная величина — результат наблюдения.

Чтобы применить теорему Лапласа-Ляпунова, мы должны только рассмотреть математическое ожидание и дисперсию каждого слагаемого. Прежде всего согласно (3.5.2) вычислим математическое ожидание:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \varphi(x, \theta) \cdot \varphi(x, \theta) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi'_\theta(x, \theta)}{\varphi(x, \theta)} \cdot \varphi(x, \theta) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi(x, \theta)}{\partial \theta} dx. \quad (5.4.62)$$

При довольно широких условиях мы можем в (5.4.62) поменять местами операции дифференцирования и интегрирования (использовав теорему о дифференцировании по параметру под знаком интеграла); в этих условиях

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi(x, \theta)}{\partial \theta} dx = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, \theta) dx,$$

но $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, \theta) dx = 1$ по определению плотности вероятности; поэтому

$$M\xi = 0. \quad (5.4.63)$$

Таким образом, это равенство, естественно, будет выполняться в широком классе случаев. Допустив (по условию теоремы), что оно имеет место, мы будем иметь:

$$D\xi = \sigma_\xi^2 = M\xi^2 = M \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \varphi(X, \theta) \right]^2 = A^2.$$

Так как величины ξ имеют конечную дисперсию, независимы и одинаково распределены, то согласно теореме Ляпунова при больших n нормированное среднее арифметическое

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i}{\sqrt{D \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \right)}} = \frac{\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln P(O_n, \theta)}{\frac{\sigma \xi}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n} A} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln P(O_n, \theta)$$

будет иметь нормальное распределение $N(x; 0, 1)$.

Таким образом, при больших n

$$P \left[-t_\gamma < \frac{1}{\sqrt{n} A} \frac{\partial \ln P(O_n, \theta)}{\partial \theta} < t_\gamma \right] \approx \gamma, \quad (5.4.64)$$

где t_γ выбрано так, что

$$2\Phi(t_\gamma) = \gamma.$$

Если допустить, что функция $\frac{1}{\sqrt{n} A} \frac{\partial \ln P(O_n, \theta)}{\partial \theta}$ монотонна относительно θ , то, разрешая неравенство относительно θ , можно записать (5.4.64) в таком виде:

$$P(\hat{\theta} < \theta < \check{\theta}) \cong \gamma, \quad (5.4.65)$$

где $\hat{\theta}$ и $\check{\theta}$ — две функции выборочных значений x_1, x_2, \dots, x_n и объема выборки n .

Дополнительное исследование, которое мы не будем приводить, показывает, что доверительный интервал $(\hat{\theta}; \check{\theta})$, полученный по методу правдоподобия, будет в некотором смысле более коротким при больших n , чем построенный другими способами.

Рассмотрим для примера случай нормального распределения с известной дисперсией, когда оценке подлежит центр a . В этом случае $\theta = a$,

$$\ln \varphi(x, \theta) = -\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{\sigma^2},$$

$$\xi = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \varphi(X, \theta) = \frac{X-a}{\sigma^2}$$

и, наконец,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln P(O_n, \theta) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma^2} - \frac{na}{\sigma^2};$$

отсюда

$$M\xi = 0, \quad D\xi = A^2 = \frac{1}{\sigma^2}$$

и потому

$$\frac{1}{\sqrt{n} A} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln P(O_n, \theta) = \frac{\bar{x} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

и мы приходим к доверительному интервалу

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

который мы ранее рассматривали и убедились, что он наиболее узкий из всех интервалов с той же доверительной вероятностью.

5.4.8. Метод максимума правдоподобия. Функция правдоподобия (см. (5.3.14) и (5.3.15)), которой мы пользовались для получения доверительных границ, может быть использована также для получения статистических характеристик для оценки параметров особым приемом, получившим название метода максимума правдоподобия. Сущность этого метода заключается в утверждении, что при данных x_1, x_2, \dots, x_n наилучшая оценка соответствует такому значению аргумента θ в функции правдоподобия $P[O_n(x_1, x_2, \dots, x_n); \theta]$, при

котором эта функция достигает максимального значения. Этот же принцип применяется в тех случаях, когда оценке подвергаются несколько неизвестных параметров $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k; k < n)$, от которых зависит исходное распределение величины X , а следовательно, и функция правдоподобия $P(O_n(x_1, x_2, \dots, x_n); \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$. Отыскивая такие значения аргументов $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, при которых функция $P(O_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, или, что равносильно, функция $\ln P = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, достигает максимума (при данных x_1, x_2, \dots, x_n), мы получаем наилучшие (в смысле указанного принципа) оценки параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$.

Оправданием этого принципа могут служить следующие простые соображения. Допустим, что мы рассматриваем случай дискретной величины. Тогда $P(O_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ представляет просто вероятность появления значений x_1, x_2, \dots, x_n в выборке. По методу максимума правдоподобия мы подбираем такие значения $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, при которых система значений x_1, \dots, x_n имеет наибольшую вероятность того, что таким путем определенные θ_i находятся в лучшем согласии с данными опыта.

Это рассуждение не является, конечно, достаточным оправданием принципа наибольшего правдоподобия. Для обращения функции $L(O_n, \theta)$ или $P(O_n, \theta)$ в максимум мы можем использовать хорошо известные правила дифференциального исчисления: искомые значения $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ должны удовлетворять необходимым условиям экстремума функции L (которая предполагается дифференцируемой):

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_k} = 0. \quad (5.4.66)$$

Таким образом, оценки наибольшего правдоподобия (мы их будем обозначать как $\tilde{\theta}_{np}$) получаются как решения определенной системы уравнений (5.4.66). Это дает вполне регулярный прием для нахождения оценок, который позволяет разыскивать их в ряде важнейших задач. Конечно, в других случаях этот прием может привести и к весьма громоздким и неудобным для практики соотношениям.

Проиллюстрируем технику применения метода на нескольких простых примерах.

Рассмотрим сначала выборку из совокупности, в которой признак может принимать лишь два значения: $X=0$ и $X=1$ с вероятностями p и q . Нетрудно видеть, что закон распределения в данном случае можно представить в следующем виде:

$$P(X=x) = \varphi(x, p) = p^x q^{1-x} \quad (x=0, 1).$$

Если выборка дает значения x_1, x_2, \dots, x_n величины X , то функция правдоподобия выражается так:

$$P(O_n, p) = (p^{x_1} q^{1-x_1})(p^{x_2} q^{1-x_2}) \dots (p^{x_n} q^{1-x_n}) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} q^{n - \sum_{i=1}^n x_i} = p^\xi q^{n-\xi},$$

где $\xi = \sum_{i=1}^n x_i$. Далее

$$L = \ln P(O_n, p) = \xi \ln p + (n - \xi) \ln(1 - p), \quad (5.4.67)$$

$$\frac{dL}{dp} = \frac{\xi}{p} - \frac{n - \xi}{1 - p}.$$

Приравняв $\frac{dL}{dp} = 0$, мы получим:

$$\tilde{p}_{np} = \frac{\xi}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}, \quad (5.4.68)$$

т. е. наилучшей оценкой параметра p с точки зрения данного метода является средняя арифметическая \bar{x} , что и следовало ожидать.

Пример 5.4.6. Пусть требуется оценить параметр λ в распределении Пуассона $P(X=x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$, пользуясь выборкой, которая дала значения x_1, x_2, \dots, x_n для величины X .

В этом случае

$$P(O_n, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_1}}{x_1!} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_2}}{x_2!} \dots \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_n}}{x_n!} = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{x_1+x_2+\dots+x_n}}{x_1! x_2! \dots x_n!} = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^y}{x_1! x_2! \dots x_n!},$$

где $y = \sum_{i=1}^n x_i$;

$$L = \ln P(O_n, \lambda) = -\lambda n + y \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!). \quad (5.4.69)$$

Уравнение для определения λ будет:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -n + \frac{y}{\lambda} = 0,$$

откуда

$$\tilde{\lambda}_{\text{пр}} = \frac{y}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}. \quad (5.4.70)$$

И в данном случае наилучшей оценкой для параметра λ оказалась средняя арифметическая \bar{x} .

Пример 5.4.7. Оценка двух параметров нормального закона распределения. Пусть мы по данным x_1, x_2, \dots, x_n значениям нормально распределенной величины X должны оценить неизвестные параметры a и σ этого закона. В этом случае

$$P(O_n, a, \sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2},$$

$$L = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{\pi}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2. \quad (5.4.71)$$

Уравнения для определения оценок для a и σ будут:

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = 0.$$

Из первого уравнения следует:

$$\tilde{a}_{\text{пр}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x} \quad (5.4.72)$$

и тогда второе даст:

$$\tilde{\sigma}_{\text{пр}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = s^2. \quad (5.4.73)$$

Первая оценка не смещена, но вторая, как мы знаем из 5.3.4, будет немного смещенной.

В качестве главного достоинства метода максимума правдоподобия следует указать на то, что величины $\tilde{\theta}_{\text{пр}}$ максимального правдоподобия обладают рядом свойств, делающих их весьма пригодными для оценки параметров. Для случая оценки одного параметра оценка $\tilde{\theta}_{\text{пр}}$ наибольшего правдоподобия оказывается всегда состоятельной; далее при больших n ее распределение можно приближенно считать нормальным с центром в точке θ и дисперсией

$$\sigma_{\text{мин}}^2 = - \frac{1}{nM \left(\frac{\partial^2 \ln \varphi(x, \theta)}{\partial \theta^2} \right)}. \quad (5.4.74)$$

Это свойство иначе выражают, говоря, что оценка $\tilde{\theta}_{\text{пр}}$ будет асимптотически эффективной в том смысле, что не существует другой асимптотически нормальной оценки, имеющей меньшую дисперсию. Если параметр θ допускает эффективную оценку (несмещенную, состоятельную и имеющую минимально допустимую согласно неравенству (5.3.7) дисперсию), то эта оценка получается как единственное в этом случае решение уравнения правдоподобия. Наконец, в тех случаях, когда характер распределения допускает *достаточные оценки* для совокупности данных параметров (см. 5.3.1), оценки по методу наибольшего правдоподобия выражаются через эти оценки. Поэтому можно быть уверенным, что оценки $\tilde{\theta}_{\text{пр}}$ используют всю информацию относительно параметров, которая доставляется выборкой.

Заметим, что оценки $\tilde{\theta}_{\text{пр}}$, вообще говоря, будут *смещенными*. Однако эта смещенность не имеет существенного значения и может быть в большинстве случаев обезврежена путем надлежащего «исправления» оценки, например, с помощью умножения на надлежащий множитель.

Важное свойство оценок $\tilde{\theta}_{\text{пр}}$ заключается еще в их «инвариантности» относительно замены переменного. Если вместо параметра θ мы должны оценивать некоторую его однозначную функцию $u(\theta)$, то оценкой для $u(\theta)$ будет $u(\tilde{\theta}_{\text{пр}})$. В самом деле, допустим, что обратная функция для $u(\theta)$ будет $\theta = \theta(u)$. Подставляя ее вместо θ в $L(O_n, \theta)$, получим:

$$L(O_n, \theta) = L(O_n, \theta(u)) = L_1(O_n, u).$$

Так как максимум $L(O_n, \theta)$ обеспечивает значение $\theta = \tilde{\theta}_{\text{пр}}$, то $\theta(u)$ следует приравнять $\tilde{\theta}_{\text{пр}}$, чтобы обеспечить максимум $L_1(O_n, u)$, и, следовательно, $\tilde{u}_{\text{пр}}$ окажется равна $u(\tilde{\theta}_{\text{пр}})$. Отсюда следует, например, что «наилучшая» оценка для σ при нормальном законе распределения будет:

$$\tilde{\sigma}_{\text{пр}} = \sqrt{\tilde{\sigma}_{\text{пр}}^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = s. \quad (5.4.75)$$

Для нормального распределения четвертый центральный момент $\mu_4 = 3\sigma^4$; отсюда следует, что его «наилучшая» оценка по данным выборки будет:

$$\tilde{\mu}_{\text{пр}} = 3(\tilde{\sigma}_{\text{пр}}^2)^2 = 3 \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^2. \quad (5.4.76)$$

Хотя m_4 — выборочный момент четвертого порядка — также представляет оценку для μ_4 , но оценка $\tilde{\mu}_4$ пр, задаваемая соотношением (5.4.76), обладает большими преимуществами в смысле точности и надежности оценки.

5.4.9. Доверительные области для теоретического закона распределения. Теория доверительных интервалов для оценки параметров может быть обобщена и применена к значительно более сложным задачам. Предположим, что мы рас-

смотрим выборку объема n из генеральной совокупности, в которой интересующий нас признак X распределен по некоторому непрерывному закону $F(x) = P(X < x)$. Вид этой функции $F(x)$ нам неизвестен и какой-либо дополнительной информацией о ее свойствах (кроме свойства непрерывности) мы не располагаем. Посмотрим, какого рода оценку закону $F(x)$ можно дать, опираясь только на данные выборки. Особенность этой задачи заключается в том, что мы не делаем каких-либо ограничительных предположений относительно неизвестного закона распределения в противоположность случаю оценки параметров, когда мы считали известной функциональную форму закона, принадлежавшего определенному семейству вида $F(x; \theta_1, \theta_2, \dots)$. Поэтому говорят, что поставленная нами задача принадлежит к типу «непараметрических» задач.

Для оценки функции $F(x)$ воспользуемся эмпирической функцией распределения $\tilde{F}_n(x)$. Как мы видели в 5.1.2, ордината кривой $\tilde{F}_n(x)$ в каждой фиксированной точке x представляет случайную величину, а именно частоту $\frac{m_x}{n}$, сходящуюся по вероятности к ординате функции $F(x)$. Отношение между частотой $\frac{m_x}{n} = \tilde{F}_n(x)$ и $F(x)$ при данном x — такое же, как между частотой и вероятностью в схеме n независимых испытаний Бернулли. Поэтому в качестве меры возможных отклонений $|\tilde{F}_n(x) - F(x)|$ величины $\frac{m_x}{n}$ от ее математического ожидания $M\left(\frac{m_x}{n}\right) = P(X < x) = F(x)$ мы рассмотрим среднее квадратическое отклонение (3.7.16), записав его в виде

$$\frac{\sigma_{m_x}}{n} = \sqrt{\frac{F(x)[1-F(x)]}{n}}.$$

Мы можем далее утверждать на основании теоремы Лапласа, что при больших n вероятность неравенства

$$|\Delta_n(x)| = |\tilde{F}_n(x) - F(x)| < t \sqrt{\frac{F(x)[1-F(x)]}{n}}$$

будет приблизительно равна $2\Phi(t)$. Таким образом, для каждой фиксированной точки x мы можем гарантировать с вероятностью α , как угодно близкой к единице, что величина $|\Delta_n(x)|$ не превысит $t_\alpha \sigma_{\tilde{F}_n(x)}$, где t_α определится из уравнения $2\Phi(t_\alpha) = \alpha$. Однако было бы неправильно на основании этого утверждать, что с той же большой вероятностью α мы можем гарантировать выполнение и неравенства $|\Delta_n(x)| < t_\alpha \sigma_{\tilde{F}_n(x)}$ одновременно во всех точках x . В самом деле, хотя вероятность нарушения этого неравенства в какой-либо индивидуальной точке мала, вероятность нарушения его *хотя бы в одной точке* из бесконечного множества их, содержащихся в рассматриваемом интервале, может оказаться немалой. И действительно, можно показать, что, каким бы большим мы ни брали значение $t > 0$, максимальное расхождение функций $\tilde{F}_n(x)$ и $F(x)$, т. е. величина $D_n = \max |\Delta_n(x)|$, почти наверно превзойдет $t \sigma_{\tilde{F}_n(x)}$. Исследование закона распределения величины, проведенное советскими математиками, позволило решить задачу доверительной оценки функции D_n в весьма общих условиях. Особенно замечательно следующее предложение, доказанное впервые акад. А. Н. Колмогоровым:

Какова бы ни была непрерывная функция распределения $F(x)$, вероятность $P_n(\lambda)$ неравенства

$$D_n = \max |\tilde{F}_n(x) - F(x)| < \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \quad (5.4.77)$$

при любом $\lambda > 0$ для больших n приблизительно равна:

$$P_n(\lambda) \approx K(\lambda), \quad (5.4.78)$$

где функция распределения $K(\lambda)$ определяется как сумма бесконечного ряда, а именно:

$$K(\lambda) = 1 - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} e^{-2^{\nu}\lambda^2}. \quad (5.4.79)$$

Для функции $K(\lambda)$ составлена таблица ее значений и вычислены q -процентные пределы для некоторых значений уровня значимости.

Вот краткая таблица q -процентных уклонений для функции $K(\lambda)$ (табл. 5.4.4):

Таблица 5.4.4

q	50%	10%	5%	1%	0,1%
λ_q	0,828	1,224	1,358	1,627	1,950

Неравенство

$$D_n < \frac{\lambda_q}{\sqrt{n}}$$

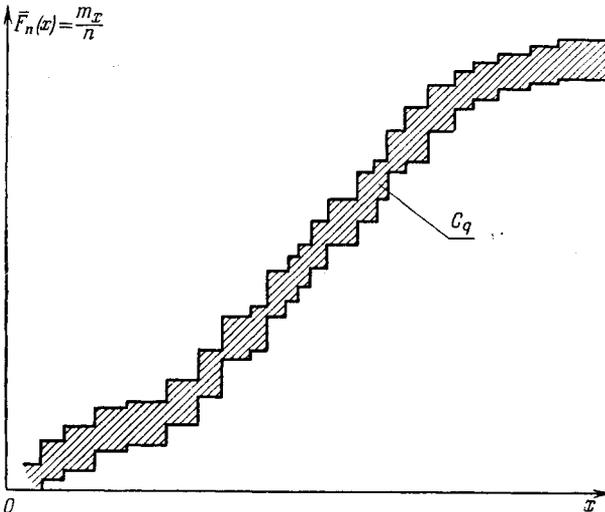
равносильно тому, что при каждом x осуществляется неравенство

$$|\tilde{F}_n(x) - F(x)| < \frac{\lambda_q}{\sqrt{n}}$$

или

$$\tilde{F}_n(x) - \frac{\lambda_q}{\sqrt{n}} < F(x) < \tilde{F}_n(x) + \frac{\lambda_q}{\sqrt{n}}. \quad (5.4.80)$$

Рассмотрим полосу C_q , ограниченную двумя кривыми



$$y_1(x) = \tilde{F}_n(x) - \frac{\lambda_q}{\sqrt{n}}$$

и

$$y_2(x) = \tilde{F}_n(x) + \frac{\lambda_q}{\sqrt{n}},$$

получаемыми смещением вверх и вниз (вдоль оси y) эмпирической функции $\tilde{F}_n(x)$ на величину $\frac{\lambda_q}{\sqrt{n}}$ (черт. 83).

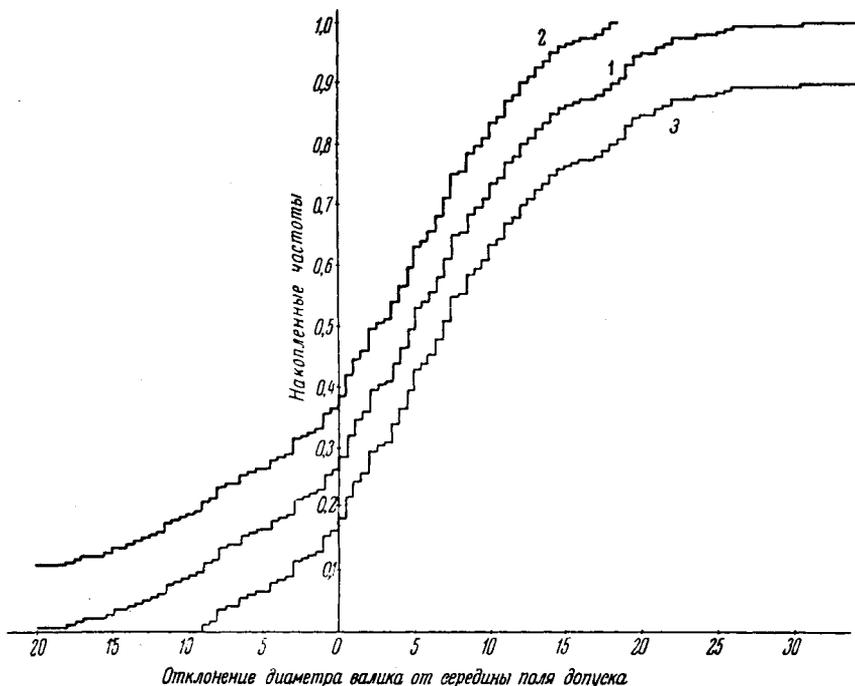
Неравенства (5.4.80) говорят, что график неизвестной функции $F(x)$ проходит на всем протяжении оси x внутри полосы C_q , не пересекая границ этой полосы. Таким образом, вероятность покрытия полосой C_q с границами $y_1(x)$

Черт. 83. Доверительные границы для функции распределения $F(x)$, построенные по данным выборки.

и $y_2(x)$ кривой $F(x)$ для больших n приближенно равна $K(\lambda_q) = \frac{q}{100}$. Мы получаем, следовательно, две доверительных границы для неизвестной функции $F(x)$, отвечающие выбранному коэффициенту доверия $1 - \frac{q}{100}$.

Отметим, что использование этого приема оценки предполагает непрерывность функции $F(x)$; вместе с тем предполагается, что эмпирическая функция $\tilde{F}_n(x)$ построена по не сведенным (не сгруппированным) в те или иные интервалы значениям величины X . Лишь с некоторым приближением доверительная оценка будет действовать и в том случае, когда интервалы группировки будут достаточно малы.

Пример 5.4.8. Рассмотрим эмпирическую кривую распределения, построенную по измерениям (приведенным в таблице примера 5.3.12) диаметров 200 валков, изготовленных на токарном автомате. Эта кривая изображена на черт. 84.



Черт. 84. Доверительные границы для функции распределения $F(x)$ валков по их диаметрам при обработке на токарном автомате (границы построены по выборке объема 200 штук).

5%-ные доверительные границы для неизвестной функции распределения $F(x)$ в данном случае будут определяться уравнениями

$$\underline{y}(x) = \tilde{F}_n(x) - \frac{1,358}{\sqrt{200}},$$

$$\bar{y}(x) = \tilde{F}_n(x) + \frac{1,358}{\sqrt{200}}.$$

Для тех значений x , для которых $\tilde{F}_n(x) < \frac{1,358}{\sqrt{200}}$, мы дополнительно полагаем $\underline{y}(x) = 0$ и при $\tilde{F}_n(x) > 1 - \frac{1,358}{\sqrt{200}}$ считаем $\bar{y}(x) = 1$.

Кривые $\underline{y}(x)$ и $\bar{y}(x)$ определяют область с 5%-ной доверительной вероятностью, показанную на черт. 84. Мы можем считать, что с данными выборки совместимы лишь те функции распределения, которые будут проходить внутри полосы C_q .

ГЛАВА VI

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

§ 1. Общие понятия о статистических гипотезах и их проверке

6.1.1. Постановка задачи о проверке гипотез в математической статистике. «Нулевые гипотезы». Пример проверки нулевой гипотезы. В предыдущей главе мы рассматривали вопрос об оценке параметров распределения, к которому, как мы видели, приводится задача получения доброкачественных выводов из данных наблюдения в естествознании и технике. Правила и положения, изложенные в предшествующей главе, относились к тому важному для практики случаю, когда сами фактические данные могут рассматриваться как случайная выборка из некоторой генеральной совокупности.

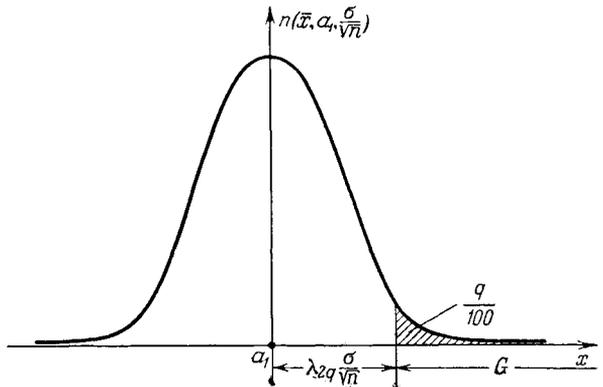
Получение доброкачественной оценки по данным выборки, однако, является, как правило, лишь некоторой предварительной стадией статистического исследования; цель же его часто состоит в использовании полученных оценок для сравнения совокупностей между собой в том или ином отношении по тому или иному признаку и т. д. Вопрос о том, по каким признакам и в каких отношениях целесообразно проводить подобного рода сравнения, всецело относится к компетенции тех научных областей, к которым применяются статистические методы, и поэтому не может быть здесь рассмотрен.

Пусть, например, желают определить, будет ли новый метод производства электрических ламп увеличивать их долговечность. Предположим, что средняя продолжительность службы лампочек при существующем способе производства составляет 1500 часов. Испытывая новую процедуру изготовления ламп, получили для некоторой (сравнительно небольшой) партии ламп среднюю продолжительность работы в 1675 часов. Спрашивается, можно ли считать, что новый способ изготовления лучше старого. Чтобы дать обоснованный ответ на этот вопрос и на весьма многочисленные аналогичные вопросы, встающие в различных областях техники, агрономии и т. п., необходимо так же, как и в задаче об оценке параметров, опираться на некоторую статистическую модель или схему подобного рода явлений. Мы рассматриваем две генеральные совокупности электрических ламп, распределенные по продолжительности их работы; среднее $a_1 = 1500$ часов первой совокупности мы предполагаем известным достаточно точно. Наиболее простое решение поставленного вопроса заключалось бы в сопоставлении средней второй совокупности a_2 со средней a_1 . Однако мы не располагаем точным значением параметра a_2 , и потому этот прямой путь сравнения для нас невозможен. Среднее a_2 мы можем оценить только с большей или меньшей точностью и надежностью по произведенным нами наблюдениям. Полученное нами выборочное среднее \bar{x} можно рассматривать тогда как оценку генеральной средней a_2 , причем закон распределения \bar{x} зависит, конечно, от этого неизвестного параметра. Для того чтобы прийти к определенному заключению хотя бы вероятностного характера, мы сделаем гипотетическое допущение о равенстве генеральных средних: $a_2 = a_1 = a$. Такого рода вспомогательные гипотезы об отсутствии интересующего нас различия между параметрами генеральных совокупностей часто назы-

вают «нулевыми гипотезами». Таким образом, на основании выборки из второй совокупности мы должны принять или отбросить нулевую гипотезу. Для этого мы будем выводить следствия из сделанного допущения (нулевой гипотезы) и сравнивать с тем, что в действительности получилось в выборке. Пусть получено среднее выборочной совокупности, равное 1675 часам. Это как будто указывает на преимущество нового процесса перед старым. Предположим, однако, что среднее квадратическое отклонение средней арифметической \bar{x} , выражающееся соотношением (3.4.21) в виде $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

оказалось равным 140 часам. Тогда, как видно из (5.4.4), 95%-ный доверительный интервал для генеральной средней a_2 второй совокупности будет в круглых числах от 1400 до 1950 часов. Выборочная средняя в 1675 часов, попадая в этот интервал, легко может получиться из первой совокупности с генеральной средней $a_1 = 1500$ часов. Мы не имеем, следовательно, достаточных оснований для того, чтобы отбросить нулевую гипотезу. Если же в другом случае при $\sigma'_{\bar{x}} = 40$ часов 95%-ный доверительный интервал будет составлять примерно от 1600 до 1750 часов, то с большой надежностью мы можем отбросить нулевую гипотезу и признать расхождение существенным, т. е. таким, которое нельзя объяснить лишь случайными обстоятельствами данной выборки.

Рассмотренный нами прием дает возможность уверенно отвергнуть нулевую гипотезу, но не дает еще определенных указаний на то, какова величина расхождения. Мы можем, однако, поступить следующим образом. Предполагая опять выполненной нулевую гипотезу, рассмотрим на оси x область G (бесконечный интервал) (черт. 85), определяемую неравенством



Черт. 85. «Критическая область» G для проверки гипотезы относительно альтернативных допущений вида $a_2 > a_1$, где a_1 — известная генеральная средняя, a_2 — оцениваемая по \bar{x} генеральная средняя.

$$\bar{x} > a_1 + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Предполагая n достаточно большим, мы можем считать, что вероятность попадания \bar{x} (при нулевой гипотезе $a_2 = a_1 = a$) в эту область выражается интегралом

$$P\left(\bar{x} > a_1 + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1 - \Phi(t). \quad (6.1.1)$$

Полагая $t = \lambda_{2q}$, где λ_{2q} есть 2q%-ный (двухсторонний) предел нормального отклонения $\frac{\bar{x} - a_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, получим:

$$P\left(\bar{x} > a_1 + \lambda_{2q} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi(\lambda_{2q}) = \frac{q}{100}, \quad (6.1.2)$$

так как

$$P\left(|\bar{x} - a_1| > \lambda_{2q} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2[1 - \Phi(\lambda_{2q})] = \frac{2q}{100}.$$

Мы видим, что построенная нами гипотеза позволяет вывести определенное заключение относительно вероятности попадания \bar{x} в область G . Если эта

вероятность попадания будет мала, то мы будем иметь дело с событием, практически невозможным, и с некоторым небольшим риском ошибиться мы можем пренебречь возможностью наступления этого события. Поэтому, если \bar{x} попало в область G (т. е. событие произошло), то это будет для нас прямым указанием на неправильность проверяемой гипотезы. Бракуя ее, мы будем ошибаться в среднем лишь в доле $\frac{q}{100}$ всех случаев применения этого приема в аналогичных условиях. Выбор достаточно малой вероятности $\frac{q}{100}$ (уровня значимости нашей гипотезы) позволяет гарантировать исследователя достаточной надежностью от неправильных заключений — браковки гипотезы в тех случаях, когда она действительно верна.

В нашем случае, бэря, например, $q = 1\%$, для λ_{2q} по табл. IV приложений получим $\lambda_{2q} = 2,326$, и область G определится неравенством $\bar{x} > 1500 + 2,326 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Построенная таким образом область является примером «критической области» для проверяемой гипотезы (относительно альтернативных допущений вида $a_2 > a_1$).

Если $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 40$ часов, то средняя арифметическая 1675 попадает в критическую область $\bar{x} > 1593$, и мы достаточно уверенно (рискуя ошибиться лишь в 1% всех случаев) можем опровергнуть нулевую гипотезу и считать, что новый процесс производства лучше старого.

Мы можем считать с надежностью в 95%, что соблюдается неравенство

$$1675 - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a_2 < 1675 + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

или, в круглых цифрах, $1595 < a_2 < 1755$ и что разность $a_2 - a_1$ удовлетворяет неравенству

$$95 < a_2 - a_1 < 255.$$

Проверка гипотез, как мы видим, тесно связана с проблемой оценки параметров распределения, которой была посвящена глава V. Однако ее целесообразно рассматривать отдельно в силу своеобразия употребляемых здесь приемов.

6.1.2. Статистические приемы проверки гипотез. «Критическая область». **Уровень значимости критериев.** Пример, рассмотренный в предыдущем разделе, дает повод ввести некоторые новые понятия с целью более точной формулировки задачи проверки. Мы будем называть «*статистической гипотезой*» всякое предположение о законах распределения рассматриваемых величин, или генеральных совокупностей. Допуская подобного рода предположения, мы будем выводить из них разные следствия и рассматривать, насколько оправдываются они на опыте. Эти следствия будут носить характер вероятностных суждений о поведении некоторых статистических характеристик, значения которых мы будем вычислять по данным выборки. Эти характеристики мы будем называть *критериями* проверки. Прием проверки гипотезы будет состоять тогда в выборе определенного правила, указывающего условия, при которых мы будем считать гипотезу не согласующейся с опытом и браковать ее.

Чтобы сформулировать такое правило, мы выбираем прежде всего некоторую статистическую характеристику, выборочное распределение которой при данной гипотезе должно быть полностью известно. В рассмотренном примере такой характеристикой была средняя арифметическая \bar{x} , нормально распределенная с центром, положение которого полностью фиксировалось сделанной гипотезой, а дисперсию мы считали известной. Далее мы выбираем некоторый уровень значимости, т. е. достаточно малое значение вероятности, отвечающее событиям, которые в данной обстановке исследования можно считать практически невозмож-

ными. Появление такого события мы будем считать указанием на неправильность нашего исходного предположения. Обычно берут 50/0-, 20/0- или 10/0-ный и т. п. уровни значимости. Чем меньше уровень значимости, тем меньше вероятность забраковать верную гипотезу. Для данного уровня значимости мы указываем далее область, попадание в которую выбранной нами статистической характеристики в том случае, когда испытываемая гипотеза верна, будет в точности равно уровню значимости. Такая область носит название «критической области» данного критерия. Попадание в критическую область говорит о несоответствии гипотезы фактическим данным, и гипотеза бракуется, так как мы получаем результат, практически невозможный при данном попадании. Область, дополняющая критическую, носит название области «допустимых значений». С уменьшением уровня значимости расширяется область допустимых значений критерия и вместе с тем теряется его чувствительность, так как повышается вероятность принять гипотезу даже в тех случаях, когда эта гипотеза неверна и на самом деле осуществляются гипотезы, противоречащие проверяемой, но близкие к ней и потому обеспечивающие большую вероятность попадания критерия в область допустимых значений. Гарантируя себя выбором достаточно малого уровня значимости от возможности неправильной браковки верной гипотезы (т. е. от ошибки «первого рода»), мы вместе с тем должны озаботиться и тем, чтобы гарантировать себя от ошибочного принятия ложной гипотезы (т. е. от ошибки «второго рода»).

Обоснование статистических критериев составляет весьма сложную задачу современной математической статистики. Несколько подробнее вопросы общей теории проверки гипотез будут рассмотрены в § 7 настоящей главы.

Если используемый нами критерий попадает в область допустимых значений, то мы не можем еще сделать вывода о правильности нашей гипотезы: мы можем только заключить, что наблюдаемое значение критерия не противоречит ей, и признать допустимость гипотезы, по крайней мере, до тех пор, пока более обстоятельные исследования (например, по большему материалу или с помощью других более точных критериев) не приведут нас к противоположному заключению. В рассмотренном примере критической областью для гипотезы $a_2 = a_1$ с уровнем значимости $\frac{q}{100}$ служил бесконечный с одной стороны интервал

$$\bar{x} > 1500 + k_{2q} \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Разумеется, описанная процедура выбора приема проверки не обладает полной определенностью, например, при данном уровне значимости для выбора критической области имеется еще бесконечно много возможностей. Точно так же неясно, каким критерием лучше пользоваться в каждом случае проверки. Все эти вопросы весьма важны для теории и практики.

Вопрос о сравнительной эффективности различных способов проверки гипотез мы рассмотрим в общем виде в конце настоящей главы, следующие же параграфы посвятим изложению современных способов проверки статистических гипотез, относящихся к некоторым типичным проблемам практики.

§ 2. Проверка гипотезы о равенстве средних

6.2.1. Гипотеза о положении центра группирования. Мы рассмотрим здесь еще два примера испытания гипотезы о положении центра группирования по данным выборки. При этом мы, как и в 6.1.1, будем опираться на оценку генеральной средней по средней арифметической выборки, предполагая сначала, что эта последняя распределена нормально с известным средним квадратическим отклонением σ . Если же среднее квадратическое отклонение совокупности неизвестно и его в свою очередь приходится оценивать по выборочным данным,

мы принуждены будем обратиться к оценке по методу Стьюдента, предполагая, конечно, что условие нормальности распределения также выполнено.

Пример 6.2.1. На основе подробного анализа точности работы горизонтально-ковочной машины № 4 было установлено, что высота отштампованных внутренних колец шарикоподшипников составляет в среднем 21,46 мм, а среднее квадратическое отклонение высоты $\sigma = 0,36$ мм. Распределение отштампованных колец по высоте оказалось достаточно близким к нормальному.

Позднее был проведен сокращенный анализ работы машины № 2. Была взята выборка в 30 штук колец, отштампованных на этой машине. Средняя арифметическая высота кольца оказалась равной $\bar{x} = 21,58$ мм и среднее квадратическое отклонение \bar{s} оказалось несущественно отличающимся от σ . Требовалось определить, можно ли считать различие в высотах колец, отштампованных на машинах № 4 и № 2, случайным и, следовательно, несущественным.

Наша «нулевая гипотеза» заключается в том, что центр распределения a_1 при работе на машине № 4 не отличается от центра a_2 , имевшего место при работе на машине № 2. В качестве критерия проверки нулевой гипотезы мы принимаем нормально распределенную с плотностью $n(z; 0; 1)$ величину:

$$z = \frac{\bar{x} - a_1}{\sigma_{\bar{x}}}$$

Выбирая уровень значимости, равный 5%, мы строим для нашего критерия область допустимых значений с помощью табл. V приложений. Границами ее будут: $-1,96 + 1,96$.

Таким образом, наша критическая область расположена по обе стороны от этих границ.

Имеем:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,36}{\sqrt{30}} = 0,066 \text{ мм.}$$

Полученное из выборки значение нашего критерия составляет:

$$z = \frac{21,58 - 21,46}{0,066} = 1,82.$$

Оно лежит в области допустимых значений. Поэтому предположение об отсутствии существенной разницы между средними высотами колец, отштампованных на машинах № 4 и № 2, не противоречит произведенным наблюдениям.

Пример 6.2.2. Пусть известно, что после чистового нарезания зубьев в точном зуборезном станке погрешность эвольвентного профиля зубьев шестерен составляет в среднем для данного типо-размера шестерен $a_1 = 18$ мк при нормальном ее распределении. Требуется определить, дает ли существенное преимущество в отношении точности бокового профиля зубьев этих шестерен применение последующего шевингования, если на 20 шевингованных шестернях была получена средняя погрешность профиля $\bar{x} = 14$ мк и среднее квадратическое отклонение этой погрешности $\bar{s} = 4,5$ мк. 20 шевингованных шестерен мы рассматриваем как выборку из генеральной совокупности со средней $a_1 = 18$ мк. Так как точные значения средних квадратических отклонений при чистовом зубофрезеровании и шевинговании неизвестны, но имеются основания (например, по наблюдениям, относящимся к другим типо-размерам шестерен) считать их одинаковыми и общее для обоих случаев среднее квадратическое отклонение приходится оценивать по той же выборке, то здесь при построении критической области придется воспользоваться методом Стьюдента.

При уровне значимости $q = 5\%$ по табл. XIV приложений, считая $\frac{q}{100} = 0,05$ и $k = 20 - 1 = 19$, мы находим $t_{q, k} = 2,07$, откуда критическая область будет

определяться неравенством

$$|\bar{x} - a_1| > \frac{4,5}{\sqrt{20-1}} \quad 2,07 \cong 2,1 \text{ мк.}$$

Мы же получили в выборке значение

$$|\bar{x} - a_1| = |14 - 18| = 4 \text{ мк.}$$

Этот результат лежит в критической области не только при уровне значимости 5%, но и при 1% и даже 0,5%, что легко проверить по табл. XVIII приложений. Поэтому нулевую гипотезу следует отбросить, а шевингование нужно определенно считать существенно влияющим на точность бокового профиля зубьев шестерен.

При условии нормальности распределения погрешности профиля мы можем с 90%-ным коэффициентом доверия утверждать, что оцениваемая разность $a_2 - a_1$ между средними двух совокупностей определяется следующим образом:

$$P\left(-t < \frac{a_2 - \bar{x}}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} < t\right) = 2S(t) = 0,90.$$

Из табл. XVII приложений находим $t = 1,7$. Далее

$$-1,7 \frac{4,5}{\sqrt{20-1}} < a_2 - 14 < 1,7 \frac{4,5}{\sqrt{20-1}}$$

или

$$-1,8 \text{ мк} < a_2 - 14 < 1,8 \text{ мк}$$

и окончательно

$$-5,8 < a_2 - a_1 < -2,2.$$

6.2.2. Проверка гипотезы о равенстве двух средних по выборкам большого объема. Мы предполагали до сих пор среднюю и дисперсию (или только среднюю) одной из сравниваемых совокупностей известными точно. В других случаях мы должны сравнивать данные двух выборок и по результатам их судить о реальности расхождения генеральных средних в интересующих нас совокупностях.

Пусть \bar{x} и \bar{y} — выборочные средние, полученные по двум независимым выборкам объемов соответственно n_x и n_y из двух генеральных совокупностей. Если исходные случайные величины X и Y распределены нормально или объемы выборок n_x и n_y достаточно велики, величины \bar{x} и \bar{y} , как мы видели в 5.3.5, будут распределены соответственно нормально или приближенно нормально. Но по свойству нормального закона сумма, разность и вообще всякая линейная комбинация независимых нормальных величин сама распределена нормально с соответствующими центром и дисперсией (см. § 5 главы IV). Поэтому мы будем считать, что разность $\bar{y} - \bar{x}$ подчиняется закону

$$N\left(z; a_y - a_x, \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}\right).$$

Это обстоятельство и дает возможность построить критическую область для нулевой гипотезы $a_y - a_x = 0$, если допустить еще, что, по крайней мере, при большом объеме выборки мы располагаем достаточно точными оценками неизвестных дисперсий σ_x^2 и σ_y^2 . Критерием проверки служит тогда нормированная разность

$$Z = \frac{\bar{y} - \bar{x}}{\sigma(\bar{y} - \bar{x})},$$

а критической областью с уровнем значимости $q/0$ — область больших по абсолютной величине уклонений

$$|Z| > Z_q.$$

Если альтернативным к нулевой гипотезе предположением является допущение $a_y > a_x$ или, наоборот, $a_y < a_x$, то доверительная область (при уровне значимости q) определяется неравенством

$$Z > Z_{2q} \quad (6.2.1)$$

или соответственно

$$Z < -Z_{2q}. \quad (6.2.2)$$

Пример 6.2.3. Пусть у нас имеются данные об испытаниях двух выборок по 50 штук из продукции двух электроламповых заводов; оказалось, что средняя арифметическая продолжительность работы ламп завода *A* составила 1282 часа со средним квадратическим отклонением 80 часов, а завода *B* — 1208 часов со средним квадратическим отклонением 94 часа.

Требуется установить, имеется ли реальное различие в качестве ламп заводов *A* и *B*. Так как σ_x^2 и σ_y^2 неизвестны, их необходимо оценить по выборочным данным. Такая оценка, естественно, связана с погрешностью, однако при выборке объема 50 эта погрешность не будет существенно влиять на выводы. С достаточным приближением будем иметь:

$$\sigma_{(\bar{y}-\bar{x})} \approx \sqrt{\frac{80^2}{50} + \frac{94^2}{50}} = 17,5 \text{ часа.}$$

Выбирая, как и прежде, уровень значимости критической области равным $q = 5\%$ и пользуясь табл. VII приложений, получим $z_5 = 1,96$; поэтому расхождение между средними, превышающее по абсолютной величине $z_5 \cdot \sigma_{(\bar{y}-\bar{x})} \approx 1,96 \cdot 17,5 = 34,3$ часа, следует считать существенным, мы же имеем $y - x = 1282 - 1208 = 74$ часа. Это отклонение попадает в критическую область даже, если бы мы взяли значительно более высокий уровень значимости, например $q = 0,01\%$. Таким образом, в данном случае следует признать, что продолжительность работы ламп завода *A* определенно больше, нежели завода *B*.

Для разности $a_y - a_x$ мы можем дать доверительные границы. Например, доверительной вероятности $P = 0,95$ соответствует интервал для $a_y - a_x$ с границами $\alpha = 74 - 34,3 = 39,7$ часа и $\beta = 74 + 34,3 = 108,3$ часа.

6.2.3. Проверка гипотезы о равенстве двух средних по малым выборкам. Если объемы выборок малы, то способ проверки гипотезы о расхождении между двумя средними, примененный в 6.2.2, будет недостаточно точным даже в том случае, когда величины X и Y , а следовательно, и средние арифметические \bar{x} и \bar{y} строго подчинены нормальным законам. В этих случаях мы должны считаться с тем, что дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 не могут быть оценены достаточно точно; поэтому естественно опираться на критерии, построенные по методу Стьюдента, использующие эмпирические дисперсии s_x^2 и s_y^2 , полученные в выборках. Однако мы принуждены будем сделать еще одно существенное допущение, которое суживает область применения нового критерия: мы предположим, что дисперсии генеральных совокупностей равны $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$.

Пусть опять две случайные независимые выборки объемов n_x и n_y будут взяты из двух нормальных совокупностей с центрами a_x и a_y и дисперсией σ^2 . Рассмотрим величину

$$Z = \frac{(\bar{y} - \bar{x}) - (a_y - a_x)}{\sigma_{(\bar{y}-\bar{x})}} = \frac{(\bar{y} - \bar{x}) - (a_y - a_x)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}.$$

Наряду с Z введем еще величину

$$V^2 = \frac{n_x s_x^2 + n_y s_y^2}{\sigma^2},$$

которая, как мы видели в 5.4.3, распределена по закону χ^2 с числом $k = n_x + n_y - 2$ степеней свободы. Как легко видеть, величины Z и V^2 будут отвечать условиям теоремы 5.4.3, при которых имеет место t -распределение для частного $t = \frac{Z}{V}$.

Следовательно, критерий, основанный на характеристике

$$t = \frac{(\bar{y} - \bar{x}) - (a_y - a_x)}{\sqrt{\frac{n_x s_x^2 + n_y s_y^2}{n_x + n_y}}} \sqrt{\frac{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}{n_x + n_y}}, \quad (6.2.3)$$

будет следовать распределению Стьюдента с числом $n_x + n_y - 2$ степеней свободы. Тогда для проверки нулевой гипотезы $a_y = a_x$ мы выберем критическую область с уровнем значимости q , определяемую неравенством

$$|t| > t_{q, k} \quad (q = n_x + n_y - 2), \quad (6.2.4)$$

где $t_{q, k}$ определяется с помощью табл. XVI, XVII и XVIII приложений. Затем мы проверяем, попадает ли выборочное значение

$$t = \frac{\bar{y} - \bar{x}}{\sqrt{\frac{n_x s_x^2 + n_y s_y^2}{n_x + n_y}}} \sqrt{\frac{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}{n_x + n_y}} \quad (6.2.5)$$

в указанную критическую область.

Следует еще раз подчеркнуть, что применение критерия t связано с предположением о равенстве дисперсий; это последнее допущение должно быть обосновано предварительно. В противном случае показания критерия t могут привести к ошибочным заключениям.

Если показано, что нулевая гипотеза $a_y = a_x$ неприемлема, то бывает интересно знать, насколько велико или мало возможное расхождение между генеральными средними. Для заданной доверительной вероятности P доверительные границы дают минимальное и максимальное значения расхождения между средними.

Рассмотрим числовой пример.

Пример 6.2.4. При обработке втулок (с диаметром по чертежу $2,050 + 0,150$ мм) на автоматическом станке было отобрано две пробы по 10 штук деталей в каждой. Результаты измерений диаметров валиков, попавших в первую и вторую пробы, приводятся в табл. 6.2.1:

Таблица 6.2.1

№ деталей в порядке обработки.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Проба № 1 (x)	2,066	2,063	2,068	2,060	2,067	2,063	2,059	2,062	2,062	2,060
Проба № 2 (y)	2,063	2,060	2,057	2,056	2,059	2,058	2,062	2,059	2,059	2,057

Распределение диаметров втулок предполагается нормальным. Поскольку пробы отбирались из продукции одного и того же станка, можно без специального исследования предположить, что $\sigma_x = \sigma_y$. Пусть теперь наша гипотеза заключается в том, что генеральные средние, соответствующие моментам отбора проб

№ 1 и № 2, равны между собой, т. е. $a_x = a_y$. Вычислим средние арифметические и эмпирические дисперсии

$$\bar{x} = 2,063 \text{ мм}, \quad \bar{y} = 2,059 \text{ мм}, \quad n_x s_x^2 = 86 \text{ мк}^2, \quad n_y s_y^2 = 44 \text{ мк}^2.$$

Пользуясь соотношением (6.2.5), получим:

$$t = \frac{-4}{\sqrt{86+44}} \cdot \sqrt{\frac{100 \cdot 18}{20}} = -3,3, \quad k = 18.$$

Из табл. XVII находим, что вероятность q получения t , большего по абсолютной величине, чем 3,3, при $k = 18$ равна $q = 0,4\%$.

Таким образом, полученное на опыте значение критерия t будет попадать в критические области при уровнях значимости в 5, 2, 1 и даже 0,5%, что свидетельствует о наличии несомненного расхождения центров группирования, т. е., иными словами, уровней настроек станка.

К тому же выводу мы могли бы прийти, воспользовавшись табл. XVIII приложений. По этой таблице находим, что при уровне значимости, например, в 1% и $k = 18$ $t_{q,k} = 2,878$, т. е. меньше наблюдаемого нами значения.

Найдем теперь доверительные границы для оценки расхождения между центрами $a_y - a_x$, используя метод Стьюдента.

Беря, например, 95%-ный доверительный интервал, мы будем иметь:

$$P(|t| < t_{5,18}) = 0,95,$$

откуда

$$\begin{aligned} \alpha = \bar{y} - \bar{x} - t_{5,18} \sqrt{\frac{(n_x s_x^2 + n_y s_y^2)(n_x + n_y)}{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}} < a_y - a_x < \beta = \\ = \bar{y} - \bar{x} + t_{5,18} \sqrt{\frac{(n_x s_x^2 + n_y s_y^2)(n_x + n_y)}{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}}. \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

В данном примере, замечая, что при $t_{5,18} = 2,101$ (см. табл. XVIII), найдем:

$$\alpha = -4 - 2,1 \sqrt{\frac{(86+44) \cdot 20}{100 \cdot 18}} = -4 - 2,5 = -6,5 \text{ и } \beta = -4 + 2,5 = -1,5.$$

Таким образом,

$$-6,5 \text{ мк} < a_y - a_x < -1,5 \text{ мк}.$$

Из этого результата ясно, что в данном случае по двум малым выборкам объемов по 10 штук можно с достаточно высокой надежностью заключить о смещении центра настройки станка в момент времени, соответствующий пробе № 2, по сравнению с моментом, соответствующим пробе № 1, в сторону уменьшения размера примерно на 1,5 + 6,5 микрона.

6.2.4. Проверка гипотезы об однородности средних совокупности и ее подгрупп. Нередко на практике совокупность наблюдений составляется из нескольких подгрупп, полученных в том или ином порядке (например, из различных частей генеральной совокупности). В этом, а также и в некоторых других случаях иногда требуется проверить однородность средних в такой совокупности с целью суждения о возможности использования обобщенных данных. Другими словами, мы хотим знать, существенно ли расхождение между средними подгрупп и общим средним для всей совокупности наблюдений или это расхождение можно отнести за счет случайных колебаний в отдельных выборках. Эта проверка может быть проведена с помощью критерия, аналогичного критерию Стьюдента.

Пусть \bar{x}_m представляет среднюю арифметическую, вычисленную по некоторой подгруппе из m наблюдений, т. е. по той или иной части всей совокупности n наблюдений. Далее обозначим через

$$y_m = \frac{\bar{x}_m - \bar{x}}{s} \quad (6.2.7)$$

относительное (в долях общего эмпирического среднего квадратического отклонения s) уклонение средней \bar{x}_m подгруппы от общей средней \bar{x} . Тогда можно доказать¹⁾, что величина

$$t = \frac{y_m \sqrt{m(n-2)}}{\sqrt{n-m-my_m^2}} \quad (6.2.8)$$

будет распределена по закону Стьюдента с $k = n - 2$ степенями свободы.

Полученный нами таким образом критерий, основанный на характеристике t , может быть использован для проверки гипотезы об отсутствии существенного различия между средней по подгруппе \bar{x}_m и общей средней арифметической. Построение критических областей для этого критерия производится в том же порядке, что и в предыдущих случаях.

Пример 6.2.5. Пусть у нас имеется «большая выборка» объема 140 штук из текущей продукции горизонтально-ковочной машины, составленная из 7 отдельных «временных» проб по 20 штук штамповок, т. е. проб, отштампованных через определенные промежутки времени. При этом известно, что общее среднее отклонение от чертежного размера по всей «большой выборке» составляет $\bar{x} = +1,20$ мм и общее эмпирическое среднее квадратическое отклонение $s = 0,32$ мм. Требуется оценить с 5%-ным уровнем значимости, является ли существенным расхождение между средней арифметической (наибольшей по величине) в пробе № 2, равной $\bar{x}_2 = 1,49$ мм, и общей средней арифметической по всей «большой выборке».

По формулам (6.2.7) и (6.2.8) получаем:

$$y_2 = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}}{s} = \frac{1,49 - 1,20}{0,32} = 0,91,$$

$$t = \frac{0,91 \sqrt{20(140-2)}}{\sqrt{140-20-20 \cdot 0,91^2}} = +4,7.$$

По табл. XVIII приложений для $q = 5\%$ и $k = \infty$ (так как в таблице нет значений для числа степеней свободы $k = 140 - 2 = 138$) находим:

$$t_{5, \infty} = 1,96.$$

Таким образом, средняя по пробе № 2 попадает в критическую область, определяемую неравенством

$$\bar{x} > t_q \frac{\sqrt{m(n-2)}}{\sqrt{n-m-my_m^2}}, \quad (6.2.9)$$

и поэтому гипотеза об однородности средних пробы № 2 и всей выборки должна быть отвергнута. Отсюда следует, что за время отбора семи проб, повидимому, имели место смещения центра настройки машины.

§ 3. F-распределение и его применения к проверке гипотез

6.3.1. F-распределение. Как было указано в 6.2.3, для того чтобы применять t -распределение при проверке гипотезы о расхождении между средними, необходимо предположить, что генеральные средние квадратические отклонения, соответствующие двум сравниваемым выборкам, равны между собой, т. е. что $\sigma_x = \sigma_y$.

1) См. Г. Крамер, Математические методы статистики, стр. 427.

Такая же задача выдвигается в ряде других случаев, например при сравнении точности двух рядов измерений, при проверке устойчивости технологического процесса и т. п.

В свою очередь, для того чтобы судить о равенстве дисперсий, естественно рассмотреть отношение выборочных дисперсий и исследовать закон распределения этого отношения (конечно, в предположении нормальности рассматриваемых генеральных совокупностей). Эта задача приведет нас к новой функции распределения, имеющей применение при решении многих важных проблем практики. Мы докажем сначала одно вспомогательное предложение:

Если U и V независимы и распределены по закону χ^2 со степенями свободы k_1 и k_2 соответственно, то величина

$$F = \frac{\frac{U}{k_1}}{\frac{V}{k_2}} = \frac{k_2 U}{k_1 V} \tag{6.3.1}$$

имеет плотность вероятности

$$\varphi_F(f) = \frac{C_0 f^{\frac{k_1-2}{2}}}{(k_2 + k_1 f)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, \quad C_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right) k_1^{\frac{k_1}{2}} \cdot k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}, \tag{6.3.2}$$

называемую плотностью F -распределения со степенями свободы k_1 и k_2 .

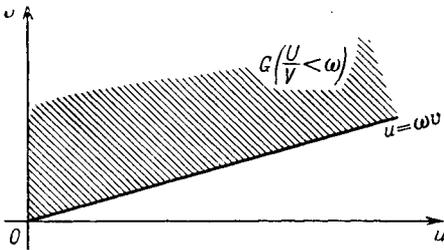
Докажем это предложение.

Рассмотрим сначала распределение вероятности величины $W = \frac{U}{V}$. Пусть $\omega > 0$, тогда

$$P(W < \omega) = P\left(\frac{U}{V} < \omega\right) = \int_G \int \varphi_U(u) \varphi_V(v) du dv, \tag{6.3.3}$$

где G — область плоскости (u, v) , определяющаяся неравенствами $u \geq 0, v > 0$ и

$$\frac{u}{v} < \omega \quad \text{или} \quad u < v\omega.$$



Черт. 86. Геометрическая интерпретация функции распределения величины

$$W = \frac{U}{V}.$$

Эта область ограничена положительными полуосями координат прямой $u = v \cdot \omega$, проходящей через начало координат (черт. 86).

Интегрируя по G и пользуясь (4.5.49), мы получим:

$$P(W < \omega) = \int_0^\infty \varphi_v(v) dv \int_0^{v\omega} \varphi_u(u) du = C_1 C_2 \int_0^\infty e^{-\frac{v}{2}} v^{\frac{k_2-2}{2}} dv \int_0^{v\omega} u^{\frac{k_1-2}{2}} e^{-\frac{u}{2}} du, \tag{6.3.4}$$

где C_1 и C_2 — постоянные, полученные из (4.5.49).

Найдем теперь плотность распределения W , продифференцировав левую и правую части выражения (6.3.4) (причём в правой части дифференцирование произведем под знаком интеграла) по ω :

$$\begin{aligned} \frac{dP(W < \omega)}{d\omega} &= \varphi_W(\omega) = C_1 C_2 \int_0^\infty e^{-\frac{v}{2}} v^{\frac{k_2-2}{2}-1} (\omega v)^{\frac{k_1-2}{2}} e^{-\frac{v\omega}{2}} v dv = \\ &= C_1 C_2 \omega^{\frac{k_1-2}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{v}{2}(1+\omega)} v^{\frac{k_1+k_2-2}{2}} dv. \end{aligned}$$

Сделаем далее в интеграле замену переменного v , полагая $y = \frac{v}{2}(1 + w)$; тогда $\varphi_W(w)$ преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_W(w) &= C_1 C_2 w^{\frac{k_1-2}{2}} \int_0^\infty \left(\frac{2y}{1+w} \right)^{\frac{k_1+k_2-2}{2}} e^{-y} \frac{2}{1+w} dy = \\ &= \frac{C_1 C_2 w^{\frac{k_1-2}{2}} \cdot 2^{\frac{k_1+k_2}{2}}}{(1+w)^{\frac{k_1+k_2}{2}}} \int_0^\infty y^{\frac{k_1+k_2-2}{2}} e^{-y} dy = \frac{C w^{\frac{k_1-2}{2}}}{(1+w)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

где константа C , включающая полученное с помощью (4.5.2) значение интеграла, зависит только от k_1 и k_2 . Ее точное выражение будет:

$$C = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}. \quad (6.3.6)$$

В приложениях оказывается более удобным оперировать не величиной W , а выражением вида

$$F = \frac{U}{\frac{V}{k_2}} = \frac{k_2 U}{k_1 V} = \frac{k_2}{k_1} W.$$

Переходя от плотности распределения W , заданной (6.3.5), к плотности распределения F (т. е. делая замену $w = \frac{k_1}{k_2} f$, $dw = \frac{k_1}{k_2} df$ и принимая во внимание значение C_0 в (6.3.2)), получим:

$$\begin{aligned} \varphi_F(f) &= \varphi_W\left(\frac{k_1}{k_2} f\right) \cdot \frac{k_1}{k_2} = \frac{C \left(\frac{k_1}{k_2} f\right)^{\frac{k_1-2}{2}} \cdot \frac{k_1}{k_2}}{\left(1 + \frac{k_1}{k_2} f\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}}} = \\ &= C \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1-2}{2}} \cdot \frac{f^{\frac{k_1-2}{2}} \frac{k_1}{k_2} \frac{k_1+k_2}{2}}{\left(k_2 + k_1 f\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}}} \cdot \frac{k_1}{k_2} = \frac{C_0 f^{\frac{k_1-2}{2}}}{\left(k_2 + k_1 f\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Для F -распределения составлены таблицы (см. табл. XX приложений) $q^0/0$ -пределов F_q , таких, что вероятность того, что случайная величина F примет значение, большее F_q , равна $\frac{q}{100}$.

В табл. XX приложений приводятся значения F_q (в верхней строчке, напечатанной обычным шрифтом, при $\frac{q}{100} = 0,05$ и в нижней строчке, напечатанной жирным шрифтом, при $\frac{q}{100} = 0,01$) для чисел степеней свободы k_1 от 1 до 500 и k_2 от 1 до 1000. Эти значения F_q удовлетворяют соотношению

$$\frac{q}{100} = \int_{F_q}^{\infty} \frac{C_0 f^{\frac{k_1-2}{2}}}{\left(k_2 + k_1 f\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}}} df. \quad (6.3.7)$$

Перейдем теперь к приложениям F -распределения.

6.3.2. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий. Мы рассмотрим теперь приложение F -распределения в первую очередь к испытанию гипотезы о равенстве дисперсий двух нормально распределенных величин X и Y по двум независимым выборкам объемов n_x и n_y . Это предположение лежало в основе рассмотренной уже процедуры испытания гипотезы о равенстве центров с помощью t -критерия.

Пусть s_x^2 и s_y^2 будут выборочными дисперсиями, полученными из случайных выборок из указанных двух совокупностей.

Так как случайные величины $\frac{n_x s_x^2}{\sigma_x^2}$ и $\frac{n_y s_y^2}{\sigma_y^2}$ обладают независимыми χ^2 -распределениями с числом $k_1 = (n_x - 1)$ и $k_2 = (n_y - 1)$ степеней свободы соответственно, то величины

$$\frac{U}{k_1} = \frac{n_x s_x^2}{(n_x - 1) \sigma_x^2}$$

и

$$\frac{V}{k_2} = \frac{n_y s_y^2}{(n_y - 1) \sigma_y^2}$$

удовлетворяют требованиям, предъявляемым в (6.3.1) к U и V . Учитывая гипотезу о том, что $\sigma_x = \sigma_y$, мы приходим далее к тому, что

$$F = \frac{\frac{n_x}{n_x - 1} s_x^2}{\frac{n_y}{n_y - 1} s_y^2} = \frac{\bar{s}_x^2}{\bar{s}_y^2} \quad (6.3.8)$$

(где \bar{s}_x^2 и \bar{s}_y^2 — несмещенные оценки дисперсий величин X и Y) имеет F -распределение с $k_1 = n_x - 1$ и $k_2 = n_y - 1$ числами степеней свободы.

Отметим, что мы при этом выводе не делали никаких допущений относительно центров распределений a_x и a_y наших генеральных совокупностей. Способ проверки равенства дисперсий, подобно способу проверки гипотезы о равенстве средних с помощью t -распределения, опирается на независимость F -распределения от каких-либо неизвестных параметров генеральных совокупностей.

Пример 6.3.1. В качестве числовой иллюстрации рассмотрим данные примера 6.2.4. Находим:

$$\bar{s}_x^2 = \frac{n_x s_x^2}{n_x - 1} = \frac{86}{9} = 9,6 \text{ мк}^2, \quad \bar{s}_y^2 = \frac{n_y s_y^2}{n_y - 1} = \frac{44}{9} = 4,9 \text{ мк}^2,$$

откуда

$$F = \frac{9 \cdot 86}{44 \cdot 9} = 1,95 \text{ с } k_1 = k_2 = 9 \text{ степенями свободы.}$$

Чтобы проверить гипотезу о равенстве дисперсий $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$, мы должны еще построить критическую область для критерия. Только тогда мы сможем судить о том, будет ли полученное нами значение слишком большим или слишком малым. За эту критическую область принимают два интервала: интервал «больших» значений F , удовлетворяющих неравенству $F > F_2$, и интервал «малых» значений $0 < F < F_1$, причем подбирают критические точки F_1 и F_2 так, что при уровне значимости α

$$P(F > F_2) = \frac{\alpha}{2} \text{ и } P(F < F_1) = \frac{\alpha}{2}. \quad (6.3.9)$$

Такой выбор критической области, как можно показать, обеспечивает большую чувствительность критерия F .

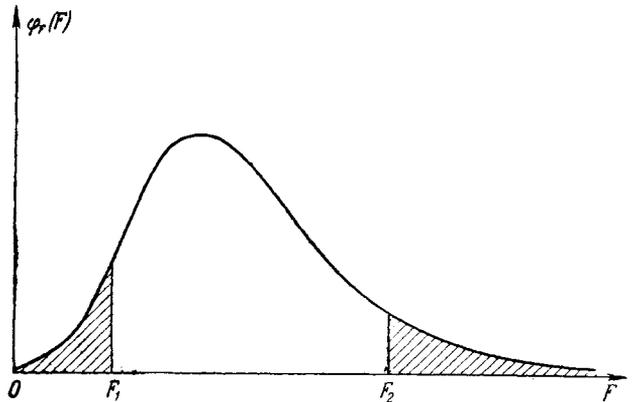
На черт. 87 изображена кривая распределения критерия F . Здесь заштрихованные площади равны каждая в точности $\frac{\alpha}{2}$.

Если выборочное значение F оказывается вне интервала допустимых значений (F_1, F_2) , то гипотеза $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ должна быть отвергнута. Пусть $F' = \frac{1}{F}$. Тогда в силу того, что $F = \frac{\bar{s}_x^2}{\bar{s}_y^2}$ имеет F -распределение (со степенями свободы k_1 и k_2), то $F' = \frac{\bar{s}_y^2}{\bar{s}_x^2}$ имеет также F -распределение со степенями свободы k_2 и k_1 .

С помощью функции F' вероятность $P(F < F_1)$ может быть выражена следующим образом:

$$\frac{\alpha}{2} = P(F < F_1) = P\left(\frac{1}{F} > \frac{1}{F_1}\right) = P\left(F' > \frac{1}{F_1}\right). \quad (6.3.10)$$

Этот результат показывает, что левая критическая точка F -распределения соответствует правой критической точке F' -распределения. Таким образом, необходимо найти только правые критические точки для F и F' , чтобы определить F_1 и F_2 . Ввиду этого свойства случайной величины F табулированы только правые критические точки этого распределения. К сожалению, табл. XX приложений включает лишь 5%- и 1%-ные правые критические точки для различных сочетаний степеней свободы k_1 и k_2 . Тем самым мы получаем возможность строить критические области для уровней значимости $\alpha = 0,1$ (10%) и $\alpha = 0,02$ (2%).



Черт. 87. График плотности вероятности F -распределения для типичных значений k_1 и k_2 и доверительные границы F_1 и F_2 .

Для промежуточных значений уровня значимости нужные критические точки можно получать из таблиц лишь путем грубой интерполяции.

Для упрощения процедуры принято при использовании F -критерия в качестве числителя брать большее значение из двух несмещенных оценок дисперсий \bar{s}_x^2 и \bar{s}_y^2 так, что выборочное значение F всегда больше единицы. Если далее условиться отбрасывать гипотезу, когда F превосходит верхнее критическое значение для уровня значимости $\frac{\alpha}{2}$, то тем самым критическая область критерия будет отвечать уровню α . В самом деле, если $F > 1$, то нужно, чтобы $F > F_2$ для отбрасывания гипотезы; если же $F < 1$, то мы используем в качестве критерия величину $F' = \frac{1}{F}$ и $F' > 1$; чтобы гипотеза была отброшена, нужно, чтобы $F' > F'_2$, где F'_2 — верхняя критическая точка при том же уровне $\frac{\alpha}{2}$. Но неравенство $F' > F'_2$ равносильно неравенству $F < F_1$, так как из (6.3.10) следует, что $F'_2 = \frac{1}{F_1}$. Таким образом, при указанном правиле мы будем браковать гипотезу

всякий раз, когда отношение оценок дисперсий $\frac{\overline{s_x^2}}{\overline{s_y^2}}$ выходит за границы области допустимых значений, т. е. за границы интервала (F_1, F_2) .

Обращаясь к примеру и беря 10%-ный уровень значимости, мы находим по табл. XX приложений при $\frac{\alpha}{2} = 5\%$ и $k_1 = k_2 = 9$ значение $F_{10} = 3,18$. Таким образом, выборочное значение $F_{\text{н}} = 1,95$ является незначимым. Этот результат подтверждает, что предположение о равенстве дисперсий не противоречит наблюдениям и что значимая величина t , полученная в примере 6.2.4 в связи с задачей проверки отсутствия смещения центра настройки станка, т. е. проверки равенства $a_x = a_y$, не может быть приписана неудовлетворительности предположения о равенстве $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

Возьмем теперь уровень значимости $\alpha = 0,05$, т. е. 5%. Для построения критических областей в этом случае необходимо найти F для $\frac{\alpha}{2} = 0,025$, т. е. для 2,5%. Но такого значения в табл. XX приложений нет, и поэтому приходится интерполировать. При 1%-ном значении имеем $F_2 = 5,35$, при 5%-ном — $F_{10} = 3,18$. Так как

1% соответствует 5,35,

5% соответствует 3,18,

то 2,5% соответствует

$$F_5 = 5,35 - \frac{(5,35 - 3,18) \cdot 1,5}{5 - 1} \approx 4,5.$$

Применение 5%-ного уровня значимости, естественно, не может изменить нашего вывода (принятия гипотезы), сделанного при 10%-ном уровне, так как снижение уровня значимости приводит к расширению области допустимых значений.

6.3.3. Понятие о дисперсионном анализе. Проверка гипотезы об однородности ряда средних. Задачи, подобные рассмотренным в 6.2.3, являются довольно обычными, однако нередко приходится сопоставлять друг с другом более чем два значения средних. Так, например, с помощью нескольких различных приборов могло быть произведено по нескольку измерений с целью проверки наличия систематических погрешностей измерения. Задачи подобного рода, в которых рассматривается влияние интересующих нас факторов (в простейшем случае одного фактора) на средние, выведенные для каждой группы экспериментов, отвечающих различным возможным значениям или, как часто говорят, вариантам одного фактора, весьма многочисленны и разнообразны. Исследование подобного рода задач в различных условиях постановки опыта объединяется в настоящее время в особый отдел математической статистики, носящей название *дисперсионного анализа*. Мы рассмотрим лишь простейший случай из задач этого типа; более сложные задачи требуют уже более тонкого математического аппарата и не будут рассматриваться в этой части книги.

Заметим, что было бы неправильно применять процедуру, предназначенную для сравнения двух средних, к выбранным тем или иным способом парам средних, так как различия между средними в известной степени зависят и от взятого числа средних, т. е. разность между крайними членами в последовательности наблюдений растет с возрастанием числа наблюдений. Если бы мы располагали большим числом таких средних, то наибольшие различия между парами средних значительно выросли бы даже в том случае, когда все средние были бы получены по выборкам, извлеченным из одной совокупности.

Для того чтобы лучше уяснить руководящую идею дисперсионного анализа, мы рассмотрим сначала с несколько иной точки зрения вопрос о проверке гипо-

тезы, относящейся к одной выборке из нормальной совокупности (a, σ^2) . Пусть по данным n независимым наблюдениям x_1, x_2, \dots, x_n требуется проверить гипотезу $a = a_0$.

Мы имеем прежде всего следующее тождество:

$$\sum_i (x_i - a)^2 = \sum_i (x_i - \bar{x} + \bar{x} - a)^2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - a)^2. \quad (6.3.11)$$

Каждое из двух слагаемых, стоящих в правой части (6.3.11), может быть использовано для получения несмещенной оценки неизвестной дисперсии σ^2 : в самом деле, согласно (5.3.61) и (5.3.62)

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right] &= \mathbf{M} [(n-1)\bar{s}^2] = \sigma^2 (n-1), \\ \mathbf{M} [n(\bar{x} - a)^2] &= n\mathbf{M}(\bar{x} - a)^2 = n \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2. \end{aligned}$$

Мы знаем далее, что первое из слагаемых в правой части (6.3.11) имеет распределение величины $\sigma^2 \chi^2$ с $(n-1)$ степенями свободы (см. 5.4.2), а второе также можно рассматривать как величину, имеющую распределение $\sigma^2 \chi^2$ с одной степенью свободы (как квадрат нормально распределенной величины).

С другой стороны, для суммы, стоящей в правой части, мы имеем распределение $\sigma^2 \chi^2$ с n степенями свободы; равенство (6.3.11) представляет разбиение суммы n независимых квадратов (с n степенями свободы) на две суммы квадратов (некоторых линейных функций от x_1, x_2, \dots, x_n) соответственно с $n-1$ и 1 степенями свободы. Важное свойство этого разбиения состоит в независимости слагаемых разбиения, на что указывалось в 5.4.2.

Оказывается, что факт независимости и принадлежности к χ^2 -распределению с соответствующим числом степеней свободы является следствием одной важной общей теоремы, доказательство которой мы здесь приводить не будем.

Чтобы разъяснить смысл этой теоремы, мы введем сначала важное для всего дальнейшего изложения понятие *числа степеней свободы* линейных форм от n независимых аргументов. Функция вида

$$h = \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n$$

носит название *линейной формы переменных* z_1, z_2, \dots, z_n . Средняя арифметическая $\frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n}$ или средняя взвешенная $\frac{g_1 z_1 + g_2 z_2 + \dots + g_n z_n}{g_1 + g_2 + \dots + g_n}$ могут служить примерами таких форм.

Если рассматривается одновременно несколько таких форм, то всегда существенно знать, какое число среди них будет линейно независимых форм.

Формы h_1, h_2, \dots, h_k от одних и тех же переменных называются *линейно независимыми*, если ни при какой системе значений коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ при этих формах, кроме тривиальной $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, мы не будем иметь тождество

$$\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \dots + \lambda_k h_k = 0. \quad (6.3.12)$$

Если r форм линейно независимы, мы будем говорить, что *число степеней свободы* равно r . В противном случае, когда формы связаны зависимостью вида (6.3.12), причем хотя бы один коэффициент λ_i отличен от нуля, они называются *линейно зависимыми*. Если, например, имеет место (6.3.12) и, скажем, $\lambda_k \neq 0$, то (6.3.12) можно разрешить относительно h_k и записать в виде

$$h_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} h_1 - \dots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} h_{k-1},$$

Таким образом, при наличии одного соотношения (6.3.12) одну из форм всегда можно линейно выразить через другие формы. Если $k-1$ форм

h_1, h_2, \dots, h_{k-1} линейно независимы, то мы будем говорить, что число степеней свободы форм h_1, h_2, \dots, h_k равно $k-1$. Аналогичным образом, если среди k линейных форм h_1, h_2, \dots, h_k содержится $k-m$ линейно независимых, а остальные m форм можно выразить через независимые формы, то говорят, что число степеней свободы форм h_1, h_2, \dots, h_k равно $k-m$. В частности, если k форм связаны m линейными соотношениями, позволяющими m форм выразить линейно через остальные $k-m$ форм, то число свободы этих k форм равно $k-m$. Пусть, далее, мы рассматриваем *квадратичную форму* (т. е. однородный многочлен второй степени относительно переменных z_1, z_2, \dots, z_n) Q , представляющую сумму квадратов линейных форм h_1, h_2, \dots, h_k ,

$$Q = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_k^2,$$

где

$$h_m = \alpha_{m1}z_1 + \alpha_{m2}z_2 + \dots + \alpha_{mn}z_n.$$

Тогда мы условимся считать, что *число степеней свободы* Q равно числу степеней свободы линейных форм h_1, h_2, \dots, h_k ; очевидно, если это число равно r ($r < k$), то Q можно выразить в функции r форм из числа h_1, h_2, \dots, h_k .

Значение *теоремы «подразделения»*, к формулировке которой мы сейчас перейдем, заключается в том, что она указывает условия, при которых квадратичная форма $Q = \sum_{i=1}^k h_i^2$, представляющая сумму квадратов линейных форм от случайных нормально распределенных величин, подчиняется закону χ^2 с числом степеней свободы, равным как раз числу степеней свободы самой формы Q .

Теорема подразделения. Пусть сумма $\chi^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2$ *нормально распределенных переменных* Z_1, Z_2, \dots, Z_n с центрами в нуле и единичной дисперсией представлена в виде суммы k *квадратичных форм* Q_i вида

$$Q_i = h_{1i}^2 + h_{2i}^2 + \dots + h_{si}^2$$

с f_i степенями свободы. Здесь h_{ri} — *линейные формы переменных* Z_1, Z_2, \dots, Z_n , так что мы имеем тождественно относительно Z_1, Z_2, \dots, Z_n

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k Z_i^2 = \sum_{i=1}^k Q_i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^s h_{ji}^2.$$

Тогда *необходимое и достаточное условие для того, чтобы квадратичные формы* Q_1, Q_2, \dots, Q_k *были независимы между собой и распределены по закону* χ^2 *с* f_1, f_2, \dots, f_k *степенями свободы соответственно, заключается в выполнении равенства*

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = n.$$

В рассмотренном в начале этого раздела случае число сумм Q_i разбиения равнялось двум, т. е. мы имели в правой части $Q_1 + Q_2$, причем

$$Q_1 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^2 = h_{11}^2 + \dots + h_{n1}^2,$$

так что $s = n$ и

$$h_{m1} = \left(x_m - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right) = \left[(x_m - a) - \frac{(x_1 - a) + (x_2 - a) + \dots + (x_n - a)}{n} \right]$$

есть линейная функция нормально распределенных величин $x_i - a$ с центром в нуле.

Число степеней свободы Q_1 будет $(n-1)$, так как линейные формы $h_{11}, h_{21}, \dots, h_{n1}$ связаны одним соотношением

$$\sum_{m=1}^n h_{mi} = \sum_{m=1}^n (x_m - \bar{x}) = 0.$$

С другой стороны, в том же случае

$$Q_2 = n(\bar{x} - a)^2 = n \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - a \right)^2 = h_{12}^2.$$

В этом случае имеется всего одна линейная форма

$$h_{12} = \sqrt{n} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - na}{n} \right) = \frac{\sum_{m=1}^n (x_m - a)}{\sqrt{n}}$$

и Q_2 имеет одну степень свободы.

Возвращаясь теперь снова к разложению (6.3.11), отметим, что две несмещенные оценки дисперсии $\sigma^2 - s^2$ и $s'^2 = n(\bar{x} - a)^2$ существенно различны между собой.

Оценка $\bar{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ не зависит от того, какое значение имеет

центр нормального распределения в генеральной совокупности и, следовательно, не зависит от сделанного допущения $a = a_0$. С другой стороны, оценка $s'^2 = n(\bar{x} - a)^2$ может быть использована только в том случае, когда относительно a мы имеем надлежащую информацию. При нашей гипотезе $a = a_0$ эта оценка примет значение

$$\begin{aligned} s'_{a_0}{}^2 &= n(\bar{x} - a_0)^2 = n(\bar{x} - a + a - a_0)^2 = \\ &= n(\bar{x} - a)^2 + n(a - a_0)^2 + 2n(\bar{x} - a)(a - a_0). \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

Если гипотеза неверна и, следовательно, $a \neq a_0$, то математическое ожидание $s'_{a_0}{}^2$ уже не будет равно σ^2 , а будет всегда больше, чем σ^2 . В самом деле, из (6.3.13) следует

$$\begin{aligned} M s'_{a_0}{}^2 &= nM(\bar{x} - a)^2 + n(a - a_0)^2 + 2n(a - a_0)M(\bar{x} - a) = \\ &= n \frac{\sigma^2}{n} + n(a - a_0)^2 + 0 = \sigma^2 + n(a - a_0)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, при всяком уклонении истинного значения a от предположенного a_0 $s'_{a_0}{}^2$ стремится быть больше чем \bar{s}^2 (последняя же будет, как мы видели в 5.4.2, при всяком a флюктуировать около σ^2).

Если мы рассмотрим отношение $F = \frac{s'_{a_0}{}^2}{s^2}$, то значение F , значительно превосходящее единицу, очевидно, будет указывать на неверность гипотезы $a = a_0$. Если вместо отношения $\frac{s'_{a_0}{}^2}{s^2}$ мы используем отношение $\frac{s'_{a_0}}{s}$, то мы придем к критерию Стьюдента (см. 5.4.4), так как

$$\frac{s'_{a_0}}{s} = \frac{\sqrt{n} |\bar{x} - a_0|}{s}.$$

Мы рассмотрим теперь простейшую схему дисперсионного анализа, применяемую при проверке гипотезы о влиянии какого-либо фактора A на результаты

экспериментов. Предполагается, что этот фактор может встречаться в нескольких различных вариантах A_1, A_2, \dots, A_k и каждому варианту A_i соответствует группа из n_i произведенных опытов, давших результаты $x_{i\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots, n_i$).

Данные наблюдений образуют в этом случае таблицу, подобную табл. 6.3.3.

Таким образом, всего произведено $N = \sum_{i=1}^k n_i$ опытов, результаты которых мы обозначим буквой x с двумя индексами, обозначающими: первый — номер группы, а второй — номер опыта в соответствующей группе. Мы предполагаем, что по наблюдениям каждой группы представляют выборку из нормальной совокупности; дисперсия этих совокупностей σ^2 предполагается одинаковой, не зависящей от номера группы. Это предположение будет играть очень существенную роль и должно быть проверено приемом, который был описан в 5.4.3. Обозначая через a_i центр i -й совокупности, мы можем положить:

$$x_{i\nu} = a_i + x'_{i\nu}, \quad (6.3.14)$$

где $x'_{i\nu}$ — случайные отклонения в каждом индивидуальном опыте.

Изменение «существенных» компонент a_i в разложении (6.3.14) будет отражать влияние факторов: каждому варианту A_i отвечают соответствующие значения a_i . Для того чтобы обнаружить влияние этих факторов, мы построим «нулевую» гипотезу

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = a = \text{const},$$

как раз основанную на отрицании этого влияния.

В этом случае структура наблюдений (6.3.14) упрощается

$$x_{i\nu} = a + x'_{i\nu}. \quad (6.3.15)$$

Пусть \bar{x}_i — среднее арифметическое i -й выборки $\bar{x}_i = \frac{\sum_{\nu=1}^{n_i} x_{i\nu}}{n_i}$. Подобно соотношению (6.3.11) мы можем написать теперь для каждого i ($i = 1, 2, \dots, k$) соотношение

$$\sum_{\nu=1}^{n_i} (x_{i\nu} - a_i)^2 = \sum_{\nu=1}^{n_i} (x_{i\nu} - \bar{x}_i)^2 + n_i (\bar{x}_i - a_i)^2, \quad (6.3.16)$$

причем два члена правой части независимы между собой и распределены, как $\sigma^2 \chi^2$ с $n_i - 1$ и 1 степенями свободы. Суммируя соотношения, подобные (6.3.16) при всех i , получим:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{\nu=1}^{n_i} (x_{i\nu} - a_i)^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{\nu=1}^{n_i} (x_{i\nu} - \bar{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - a_i)^2. \quad (6.3.17)$$

Первая из сумм правой части (6.3.17) по теории сложения для χ^2 -распределений будет распределена, как $\sigma^2 \chi^2$ с $N - k$ ($N = \sum_{i=1}^k n_i$) степенями свободы, тогда как вторая распределяется по тому же закону с k степенями свободы — оба члена представляют независимые друг от друга величины. Каждое из слагаемых, поделенное на соответствующее число степеней свободы, может рассматриваться как оценка параметра σ^2 .

Полагая

$$s_r^2 = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{\nu=1}^{n_i} (x_{i\nu} - \bar{x}_i)^2}{N - k}, \quad (6.3.18)$$

мы будем иметь несмещенную оценку σ^2 , основанную лишь на колебаниях внутри каждой из выборок и не зависящую от величины центров a_1, a_2, \dots, a_k отдельных совокупностей. С другой стороны, полагая $\frac{a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_k n_k}{N} = a$, будем иметь:

$$\bar{x}_i - a_i = (\bar{x}_i - \bar{x}) + (\bar{x} - a) - (a_i - a) = [(\bar{x}_i - \bar{x}) - (a_i - a)] + (\bar{x} - a), \quad (6.3.19)$$

где

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 n_1 + \bar{x}_2 n_2 + \dots + \bar{x}_k n_k}{N}.$$

Беря взвешенную сумму квадратов уклонений средних \bar{x}_i от их центров, получим согласно (6.3.19):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - a_i)^2 &= \sum_{i=1}^k n_i [(\bar{x}_i - \bar{x}) - (a_i - a)]^2 + N(\bar{x} - a)^2 + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x} - a) [\bar{x}_i - \bar{x} - (a_i - a)]. \quad (6.3.20) \end{aligned}$$

Но для последней суммы имеем:

$$\sum_{i=1}^k n_i (\bar{x} - a) [\bar{x}_i - \bar{x} - (a_i - a)] = (\bar{x} - a) \left\{ \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x}) - \sum_{i=1}^k n_i (a_i - a) \right\} = 0,$$

так как

$$\sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x}) = 0, \quad \sum_{i=1}^k n_i (a_i - a) = 0$$

как взвешенные суммы уклонения от средних.

Поэтому из (6.3.20) следует:

$$\sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - a_i)^2 = \sum_{i=1}^k n_i [(\bar{x}_i - \bar{x}) - (a_i - a)]^2 + N(\bar{x} - a)^2. \quad (6.3.21)$$

Левая часть (6.3.21) представляет сумму k квадратов независимых нормально распределенных величин $\sqrt{n_i} (\bar{x}_i - a_i)$, первое слагаемое правой части Q_1 представляет сумму k квадратов линейных функций

$$\begin{aligned} \sqrt{n_i} [(\bar{x}_i - \bar{x}) - (a_i - a)] &= \sqrt{n_i} [(x_i - a_i) - (\bar{x} - a)] = \\ &= \sqrt{n_i} \left[x_i - a_i - \frac{n_1(x_1 - a_1) + n_2(x_2 - a_2) + \dots + n_k(x_k - a_k)}{N} \right] \end{aligned}$$

от тех же переменных. Эти функции связаны одним линейным соотношением

$$\sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x} - a_i + a) = 0.$$

Поэтому Q_1 имеет $k-1$ степеней свободы, второе слагаемое $Q_2 = N(\bar{x} - a)^2$ — одну степень свободы. Применяя к разложению (6.3.21) теорему о подразделении χ^2 , мы заключаем, что $\frac{Q_1}{\sigma^2}$ и $\frac{Q_2}{\sigma^2}$ распределены, как χ^2 с $(k-1)$ и одной степенью свободы соответственно.

Однако использовать первое из слагаемых правой части (6.3.21) для оценки дисперсии мы можем, лишь сделав определенные предположения относительно разностей $a_i - a$.

Предположим теперь, что верна гипотеза равенства средних в рассматриваемых совокупностях, тогда

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = a$$

и

$$a_i - a = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Полагая

$$s_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2}{k-1}, \quad (6.3.22)$$

мы при *сделанном предположении* будем иметь оценку σ^2 такую, что $\frac{s_a^2(k-1)}{\sigma^2}$ распределено по закону χ^2 . Эта оценка основана на колебаниях средних в выборках около общего среднего; можно показать, что она не зависит от оценки s_r^2 , определенной из (6.3.18), основанной на колебаниях индивидуальных значений внутри каждой серии около отвечающих им средних. Значит, при нашем предположении отношение

$$F = \frac{s_a^2}{s_r^2} \quad (6.3.23)$$

имеет F -распределение с $k-1$ и $N-k$ степенями свободы.

Если гипотеза неверна, то величина s_a^2 , как правило, будет больше σ^2 , и отношение $\frac{s_a^2}{s_r^2}$ будет стремиться значительно превзойти единицу.

В самом деле, легко показать простым вычислением, что во всех случаях

$$Ms_a^2 = \sigma^2 + \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k n_i (a_i - a)^2.$$

Таким образом, чем далее система a_1, a_2, \dots, a_k уклоняется от однородного случая $a_1 = a_2 = \dots = a_k$, тем значительнее s_a^2 будет превосходить σ^2 и, значит, s_r^2 .

Характеристики s_r^2 и s_a^2 и отвечающие им суммы квадратов связаны соотношением, получающимся возведением в квадрат и суммированием двух частей тождества $(x_{i_v} - \bar{x}) = x_{i_v} - \bar{x}_i + (\bar{x}_i - \bar{x})$,

$$\sum_{i=1}^k \sum_{v=1}^{n_i} (x_{i_v} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{v=1}^{n_i} (x_{i_v} - \bar{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2.$$

Рассмотренная нами простейшая схема дисперсионного анализа может быть представлена табл. 6.3.1.

Таблица 6.3.1

Вариация	Соответствующая сумма квадратов	Число степеней свободы	Оценка дисперсии
Между выборками	$\sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$k-1$	s_a^2
Внутри выборок	$\sum_{i=1}^k \sum_{v=1}^{n_i} (x_{i_v} - \bar{x}_i)^2$	$\sum_{i=1}^k n_i - k = N - k$	s_r^2
Общая	$\sum_{i=1}^k \sum_{v=1}^{n_i} (x_{i_v} - \bar{x})^2$	$N-1$	

Вычислительная схема может быть записана в следующую таблицу (табл. 6.3.2).

Т а б л и ц а 6.3.2

№ выборки	Наблюдения	Число наблюдений	Суммы	Суммы квадратов	Квадраты сумм, отнесенные к числу наблюдений в группе	Суммы квадратов отклонений	Число степеней свободы
1	$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$	n_1	$\sum_{v=1}^{n_1} x_{1v}$	$\sum_{v=1}^{n_1} x_{1v}^2$	$\frac{\left(\sum_{v=1}^{n_1} x_{1v}\right)^2}{n_1}$	$\sum_{v=1}^{n_1} (x_{1v} - \bar{x}_1)^2$	$n_1 - 1$
2	$x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}$	n_2	$\sum_{v=1}^{n_2} x_{2v}$	$\sum_{v=1}^{n_2} x_{2v}^2$	$\frac{\left(\sum_{v=1}^{n_2} x_{2v}\right)^2}{n_2}$	$\sum_{v=1}^{n_2} (x_{2v} - \bar{x}_2)^2$	$n_2 - 1$
...
k	$x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn_k}$	n_k	$\sum_{v=1}^{n_k} x_{kv}$	$\sum_{v=1}^{n_k} x_{kv}^2$	$\frac{\left(\sum_{v=1}^{n_k} x_{kv}\right)^2}{n_k}$	$\sum_{v=1}^{n_k} (x_{kv} - \bar{x}_k)^2$	$n_k - 1$
Общий итог	...	N	$\sum_{i=1}^k \sum_{v=1}^{n_i} x_{iv}$	$\sum_{i=1}^k \sum_{v=1}^{n_i} x_{iv}^2$	$\sum_{i=1}^k \frac{\left(\sum_{v=1}^{n_i} x_{iv}\right)^2}{n_i}$	$\sum_{i=1}^k \sum_{v=1}^{n_i} (x_{iv} - \bar{x}_i)^2$	$N - k$

Вычисление сумм, характеризующих вариации между выборками и внутри их, происходит по формулам, в которых использованы итоговые данные таблицы:

$$s_r^2(N - k) = \sum_{i=1}^k \sum_{v=1}^{n_i} (x_{iv} - \bar{x}_i)^2, \tag{6.3.24}$$

$$s_a^2(k - 1) = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k \frac{\left(\sum_{v=1}^{n_i} x_{iv}\right)^2}{n_i} - \frac{\left(\sum_{i=1}^k \sum_{v=1}^{n_i} x_{iv}\right)^2}{N}. \tag{6.3.25}$$

Для проверки можно использовать упомянутое уже в тексте соотношение

$$\sum_{i=1}^k \sum_{v=1}^{n_i} (x_{iv} - \bar{x})^2 = s_r^2(N - k) + s_a^2(k - 1). \tag{6.3.26}$$

Если нулевая гипотеза подтвердилась, мы можем оценивать дисперсию σ^2 с помощью несмещенной оценки \bar{s}_0^2 по совокупности всех наблюдений

$$\bar{s}_0^2 = \frac{Q}{N - 1} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{v=1}^{n_i} (x_{iv} - \bar{x})^2}{N - 1}. \tag{6.3.27}$$

Для оценки a при этом мы используем \bar{x} и можем построить доверительный интервал, пользуясь распределением Стьюдента для

$$t = \frac{\bar{x} - a}{\frac{s_0}{\sqrt{N}}} \tag{6.3.28}$$

с $(N - 1)$ степенями свободы.

Если же зависимость от факторов обнаружена (нулевая гипотеза не подтвердилась), то мы можем оценить «существенные» компоненты a_i с помощью \bar{x}_i , воспользовавшись опять-таки отношением Стьюдента

$$t_i = \frac{\bar{x}_i - a_i}{\frac{s_r}{\sqrt{n_i}}} \quad (6.3.29)$$

с $(N - k)$ степенями свободы при любом i .

Таким образом, для каждого a_i мы можем построить доверительный интервал. В некоторых случаях представляет интерес оценить разность $a_i - a_j$ между центрами двух групп; для этой цели мы можем использовать критерий Стьюдента

$$t = \frac{(\bar{x}_i - \bar{x}_j) - (a_i - a_j)}{s_r \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}} \quad (6.3.30)$$

с $(N - k)$ степенями свободы.

Рассмотрим теперь пример.

Пример 6.3.2. Пусть у нас имеются данные об отклонениях показаний в микронах по общепринятому критерию H_{ck} чистоты поверхности четырех различных моделей профилометров от показаний образцового профилометра при проверке поверхности 7-го класса чистоты. В табл. 6.3.3 приводятся данные, полученные в результате четырех повторных проверок одной и той же поверхности с помощью каждого из четырех приборов.

Таблица 6.3.3

№ повторных измерений	Номера и модели приборов			
	1 КВ	2 ПИ5	3 ПИ5/6	4 ПИ6
1	-0,21	+0,16	+0,10	+0,12
2	-0,06	+0,08	-0,07	-0,04
3	-0,17	+0,03	+0,15	-0,02
4	-0,14	+0,11	-0,02	+0,11

Дисперсии во всех четырех сериях предполагаются однородными. Эта гипотеза подлежит, вообще говоря, предварительной проверке приемом, рассмотренным в 6.4.3. Требуется проверить гипотезу об однородности ряда средних $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, иными словами, требуется проверить предположение об отсутствии существенных систематических ошибок у приборов. Поставленную задачу мы решаем по изложенной выше методике, причем для удобства и наглядности вычислений располагаем наши данные в табл. 6.3.4 и 6.3.5.

Таблица 6.3.4

№ приборов по порядку	Наблюденные значения в сотых долях микрона					
	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	x_{i4}	$\sum_{v=1}^{n_i} x_{iv}$	$\sum_{v=1}^{n_i} x_{iv}^2$
1	-21	-6	-17	-14	-55	962
2	16	8	3	11	38	450
3	10	-7	15	-5	13	399
4	12	-4	-2	11	17	285
$\sum_{i=1}^k$	17	-9	-1	3	10	2096

Таблица 6.3.5

№ приборов по порядку	n_i	$\sum_{v=1}^{n_i} x_{i,v}$	$\sum_{v=1}^{n_i} x_{i,v}^2$	$\left(\sum_{v=1}^{n_i} x_{i,v}\right)^2$	$\frac{\left(\sum_{v=1}^{n_i} x_{i,v}\right)^2}{n_i}$	$\sum_{v=1}^{n_i} (x_{i,v} - \bar{x}_i)^2$	f_i	\bar{x}_i
1	4	-58	962	3364	841	121	3	-14,5
2	4	38	450	1444	361	89	3	9,5
3	4	13	399	169	42,25	356,75	3	3,25
4	4	17	285	289	72,25	212,75	3	4,25
$\sum_{i=1}^k \sum_{v=1}^{n_i}$	16	10	2096	5266	1316,5	779,5	12	2,5

Вычисляем по формулам (6.3.24) и (6.3.25) суммы, характеризующие вариации, используя итоговые числа табл. 6.3.5:

$$s_r^2(N - k) = \sum_{i=1}^k \sum_{v=1}^{n_i} (x_{i,v} - \bar{x}_i)^2 = 779,5,$$

$$\begin{aligned} s_a^2(k - 1) &= \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k \left[\frac{\left(\sum_{v=1}^{n_i} x_{i,v}\right)^2}{n_i} \right] - \frac{\left(\sum_{i=1}^k \sum_{v=1}^{n_i} x_{i,v}\right)^2}{N} = \\ &= 1316,5 - \frac{10^2}{16} = 1310,25. \end{aligned}$$

С целью проверки вычислений определяем еще, следуя (6.3.26), сумму

$$\sum_{i=1}^k \sum_{v=1}^{n_i} (x_{i,v} - \bar{x})^2 = 2096 - \frac{10^2}{16} = 2089,75$$

и убеждаемся, что $2089,75 = 779,5 + 1310,25$, откуда следует, что вычисления сделаны верно.

Определяем теперь критерий F согласно (6.3.23):

$$F = \frac{s_a^2}{s_r^2} = \frac{1310,25 \cdot 12}{3 \cdot 779,5} = 6,7.$$

При числах степеней свободы $k - 1 = 3$ и $N - k = 16 - 4 = 12$ соответственно для s_a^2 и s_r^2 по табл. XX приложений находим $F_{0,05} = 3,49$ и $F_{0,01} = 5,95$, мы же получили из наблюдений $F = 6,7$.

Таким образом, $F > F_q$, и с высокой степенью надежности гипотезу об однородности ряда средних, т. е. предположение об отсутствии систематических погрешностей у приборов, следует отвергнуть на основании проведенных наблюдений.

Построим теперь доверительные интервалы для систематических погрешностей a_i приборов. Задаваясь уровнем значимости $\frac{q}{100} = 0,05$, мы по табл. XVIII приложений находим для $N - k = 16 - 4 = 12$ степеней свободы пятипроцентный предел $t_{5,12} = 2,179$, откуда, пользуясь (6.3.24) и (6.3.29), находим:

$$s_r^2 = \frac{779,5}{12} = 64,96, \quad s_r = \sqrt{64,96} = 8,06$$

и

$$-14,5 - 2,179 \cdot \frac{8,06}{\sqrt{4}} < a_1 < -14,5 + 2,179 \cdot \frac{8,06}{\sqrt{4}},$$

$$-23,3 < a_1 < -5,7$$

и аналогично

$$0,7 < a_2 < 18,3,$$

$$-5,55 < a_3 < 12,05,$$

$$-4,55 < a_4 < 13,05.$$

Мы видим, что прибор КВ имеет отрицательную систематическую погрешность, которая оценивается 95%-ными доверительными границами от $-0,23$ до $-0,06$; наименьшую систематическую ошибку имеет прибор ПИ5/6; она лежит в пределах от $-0,06$ до $0,12$ мк.

Если принять прибор ПИ5/6 за образцовый, то систематическая составляющая отклонений прибора ПИ6 от его показаний может быть оценена на основе (6.3.30) следующим 95%-ным доверительным интервалом:

$$1 - 2,179 \cdot 8,06 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} < a_4 - a_3 < 1 + 2,179 \cdot 8,06 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}$$

или

$$-0,11 \text{ мк} < a_4 - a_3 < 0,13 \text{ мк}.$$

Таким образом, вполне возможно, что между систематическими составляющими этих приборов в действительности отсутствует какое-либо различие.

§ 4. Статистическая проверка соответствия между гипотетическим распределением и данными выборки

6.4.1. Критерий χ^2 . Мы рассмотрим теперь, как проверяется гипотеза об определенном виде закона распределения случайной величины или, как часто говорят, о распределении генеральной совокупности, если мы имеем в своем распоряжении выборку достаточно большого объема из этой генеральной совокупности. Начнем с простейшего случая, когда случайная величина может принимать только два значения, и данные наблюдения группируются естественным образом в две дополняющие друг друга группы S_1 и S_2 . Допустим, что проверяемая гипотеза полностью определяет вероятности p_1 и p_2 каждого из двух значений, т. е. вероятности отнесения наблюдений соответственно в группы S_1 и S_2 , причем, конечно,

$$p_1 + p_2 = 1; \quad p_1 > 0 \quad \text{и} \quad p_2 > 0. \quad (6.4.1)$$

Если мы обозначим через v_1 и v_2 числа наблюдений, попавших в S_1 и S_2 из общего их числа

$$v_1 + v_2 = n \quad (6.4.2)$$

в выборке, то, очевидно, задача проверки соответствия состоит в оценке близости между гипотетически допускаемыми вероятностями p_1 и p_2 и наблюдаемыми на опыте частотами $\frac{v_1}{n}$ и $\frac{v_2}{n}$ классов S_1 и S_2 .

В качестве меры уклонения мы возьмем взвешенную сумму квадратов отклонений v_1 и v_2 от их математических ожиданий np_1 и np_2 :

$$\chi^2 = \frac{(v_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(v_2 - np_2)^2}{np_2}. \quad (6.4.3)$$

В качестве «весов» мы выбираем величины, обратные математическим ожиданиям; о причинах такого выбора мы скажем несколько позднее. Проанализи-

руем сначала алгебраическую структуру выражения χ^2 . Уклонения $x_1 = v_1 - np_1$ и $x_2 = v_2 - np_2$ не представляют независимых величин. В самом деле, принимая во внимание (6.4.1) и (6.4.2), мы будем иметь:

$$x_1 + x_2 = (v_1 + v_2) - n(p_1 + p_2) = n - n = 0, \quad (6.4.4)$$

откуда

$$x_1 = -x_2. \quad (6.4.5)$$

Точно так же взвешенные уклонения

$$z_1 = \frac{x_1}{\sqrt{np_1}} = \frac{v_1 - np_1}{\sqrt{np_1}} \quad \text{и} \quad z_2 = \frac{x_2}{\sqrt{np_2}} = \frac{v_2 - np_2}{\sqrt{np_2}}$$

благодаря (6.4.4) будут связаны линейным соотношением

$$z_1 \sqrt{np_1} + z_2 \sqrt{np_2} = 0. \quad (6.4.6)$$

Преобразуя выражение (6.4.3), мы получим ввиду (6.4.5):

$$\begin{aligned} \chi^2 &= z_1^2 + z_2^2 = \frac{x_1^2}{np_1} + \frac{x_2^2}{np_2} = \frac{x_1^2}{n} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right) = \frac{x_1^2}{np_1 p_2} = \\ &= \frac{(v_1 - np_1)^2}{np_1(1-p_1)} = \left(\frac{v_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} \right)^2. \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

Но нормированное уклонение $\frac{v_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}$ по теореме (4.3.67) Лапласа распределено при достаточно большом числе наблюдений n приблизительно нормально. Следовательно, χ^2 при тех же условиях приближенно следует закону χ^2 с одной степенью свободы. Это дает возможность при данном уровне значимости построить критическую область для проверки гипотезы соответствия. Считая, например, значения χ^2 , превышающие $1\%_0$ -ный предел $\chi_{0,01}^2$, практически невозможными, если наша гипотеза верна, мы должны будем ее отвергнуть, когда вычисленное по данным выборки значение χ^2 превысит $\chi_{0,01}^2$. Результат, к которому мы пришли, рассматривая простейший случай двух групп, оказывается возможно обобщить на любое их число. Пусть мы имеем l групп S_1, S_2, \dots, S_l возможных значений рассматриваемого признака; допускаемая нами гипотеза

позволяет определить значения вероятностей $p_1, p_2, \dots, p_l, \sum_{i=1}^l p_i = 1$ для попадания в каждую из групп. Пусть численность наблюдений в группах будет соответственно $v_1, v_2, \dots, v_l, \sum_{i=1}^l v_i = n$. Для оценки полученного на опыте соответствия мы можем использовать величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^l \frac{x_i^2}{np_i}, \quad (6.4.8)$$

т. е. взвешенную сумму квадратов уклонений $x_i = v_i - np_i$.

Как и в рассмотренном выше случае, уклонения x_i связаны одним линейным соотношением

$$\sum_{i=1}^l x_i = 0.$$

Закон распределения, которому следуют числа v_i , в данном случае будет выражаться полиномиальной формулой, обобщающей биномиальный закон

(см. 2.4.1, 2.4.2 и 4.2.1):

$$P(v_1 = m_1, v_2 = m_2, \dots, v_l = m_l) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_l!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_l^{m_l}, \quad (6.4.9)$$

где $\sum_{i=1}^l m_i = n$.

На этот случай обобщается также и теорема (4.3.67) Лапласа, показывающая, что для нормированных отклонений

$$z_1 = \frac{x_1}{\sqrt{np_1}}, \quad z_2 = \frac{x_2}{\sqrt{np_2}}, \quad \dots, \quad z_l = \frac{x_l}{\sqrt{np_l}},$$

связанных (как и величины x_i) одним линейным соотношением, применим обобщенный $(l-1)$ -мерный нормальный закон.

Величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l z_i^2$$

оказывается поэтому распределенной при нашей гипотезе (приближенно) согласно закону χ^2 с $l-1$ степенями свободы¹⁾.

Это обстоятельство и дает возможность построить критическую область типа $\chi^2 > \chi_q^2$, вероятность попадания в которую при данной гипотезе отвечает заданному уровню значимости q . При надлежащем подборе q такое событие может считаться практически невозможным.

Рассмотрим теперь вопрос о чувствительности критерия χ^2 к альтернативным гипотезам, противоречащим нашей гипотезе, другими словами, вопрос о вероятности принять неверную гипотезу, совершив ошибку второго рода (см. 6.1.2). Допустим, что фактические значения вероятностей попадания в группы (обозначим их через p'_i) на самом деле отличны от гипотетически допустимых p_i , так что $p'_i \neq p_i$ хотя бы при одном i . Если мы рассмотрим величину

$$\chi'^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(v_i - np'_i)^2}{np'_i}, \quad (6.4.10)$$

то она будет следовать, как мы установили, закону χ^2 с $l-1$ единицами степеней свободы. Математическое ожидание этой величины, принимая во внимание (4.2.10), будет равно

$$\begin{aligned} M\chi'^2 &= M \left[\sum_{i=1}^l \frac{(v_i - np'_i)^2}{np'_i} \right] = \sum_{i=1}^l \frac{M(v_i - np'_i)^2}{np'_i} = \sum_{i=1}^l \frac{n^2 M \left(\frac{v_i}{n} - p'_i \right)^2}{np'_i} = \\ &= \sum_{i=1}^l \frac{n^2 p'_i (1 - p'_i)}{n^2 p'_i} = \sum_{i=1}^l (1 - p'_i) = l - \sum_{i=1}^l p'_i = l - 1. \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

Величина же

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i}, \quad (6.4.12)$$

которая отвечает гипотетически допущенным нами значениям вероятностей, уже не будет следовать закону χ^2 . Ее математическое ожидание с помощью тех же

¹⁾ Точное доказательство см.: Г. Крамер, Математические методы статистики, стр. 460.

соотношений, что и выше, может быть выражено следующим образом:

$$\begin{aligned}
 M\chi^2 &= \sum_{i=1}^l \frac{M(v_i - np'_i + np'_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^l \frac{M(v_i - np'_i)^2 + n^2(p'_i - p)^2}{np_i} = \\
 &= \sum_{i=1}^l \frac{np'_i(1 - p'_i) + n^2(p'_i - p)^2}{np_i} > n \sum_{i=1}^l \frac{(p'_i - p)^2}{p_i}.
 \end{aligned}
 \tag{6.4.13}$$

Сумма $\sum_{i=1}^l \frac{(p'_i - p)^2}{p_i}$ не обращается в нуль при увеличении числа наблюдений n и, следовательно, $M\chi^2$ неограниченно возрастает вместе с n .

Поэтому, если проверяемая гипотеза оказывается неверной, то, как правило, выборочное значение χ^2 при достаточно большом n оказывается настолько большим, что попадает в критическую область, и испытание заканчивается браковкой гипотезы соответствия.

Таким образом, критерий χ^2 оказывается состоятельным по крайней мере при большом числе наблюдений в том смысле, что он почти наверно опровергает неверную гипотезу при достаточно большом числе испытаний. Более тонкое исследование показывает также, что критерий χ^2 обеспечивает минимальную возможную вероятность ошибки второго рода по сравнению с другими критериями, работающими на том же уровне значимости по отношению к гипотезам, тем более близким к проверяемой, чем больше объем наблюдений (при такого рода допущениях вероятности p'_i отличаются от вероятностей p_i на величину порядка $\frac{1}{\sqrt{n}}$). Таким образом, кажущийся несколько искусственным выбор весов $\frac{1}{np_i}$ при взвешивании квадратов отклонений может быть теоретически оправдан.

Покажем схему применения этого критерия на примере.

Пример 6.4.1. При отсчетах по шкалам измерительных приборов последние цифры показаний обычно оцениваются лишь приблизительно в долях деления шкалы. При этом часто констатируется предпочтение, которое даже опытные наблюдатели оказывают одним цифрам перед другими. В табл. 6.4.1 приводится распределение 200 случаев оценки последней цифры одним из наблюдателей при отсчете по измерительному прибору в долях деления шкалы.

Таблица 6.4.1

Цифры	Наблюденные численности v_i	Математические ожидания численностей np_i	Уклонения $v_i - np_i$	$\frac{(v_i - np_i)^2}{np_i}$
1	2	3	4	5
0	35	20	15	11,25
1	16	20	-4	0,80
2	15	20	-5	1,25
3	17	20	-3	0,45
4	17	20	-3	0,45
5	19	20	-1	0,05
6	11	20	-9	4,05
7	16	20	-4	0,80
8	30	20	10	5,00
9	24	20	4	0,80
Σ	200	200	0	24,90

Табл. 6.4.1 обнаруживает, что цифры 0 и 8 встречаются значительно чаще, чем другие. Вопрос заключается в том, имеем ли мы здесь дело с систематической ошибкой в отсчете или нет. Этот вопрос, естественно, решается сравнением наблюдаемого распределения с гипотетически допускаемым равномерным, при котором вероятность получения любой из цифр 0, 1, 2, ..., 9 равна $\frac{1}{10}$.

В графе 4 таблицы указаны значения уклонений наблюдаемых численностей от их математических ожиданий и в графе 5 сделаны подсчеты χ^2 .

Значение $\chi^2 = 24,90$ при 9 степенях свободы превосходит 0,5%-ное уклонение, как это видно из табл. VIII приложений, и потому гипотеза равномерности должна быть отброшена.

Практическое применение χ^2 -критерия, а главное — истолкование полученного результата должно производиться с некоторой осторожностью. Прежде всего следует помнить, что мы используем χ^2 -распределение как точный закон, тогда как оно применимо лишь приближенно и только в тех случаях, когда численность групп достаточно велика, во всяком случае не менее *пяти* в каждой группе. Если некоторые группы не удовлетворяют данному требованию, то лучше объединить несколько малочисленных групп в одну. При небольшом числе наблюдений, как правило, можно провести лишь грубую проверку с разбивкой материала на небольшое число групп. Возможность разбить материал разными способами на группы приводит к некоторой условности вероятностной оценки, так как эта последняя зависит от числа групп и величины полученного при данном разбиении критерия χ^2 . С этим обстоятельством особенно часто встречаются, когда рассматривают распределение непрерывно варьирующего признака и выбор длины и положения классовых интервалов производят более или менее произвольно.

Если проверяемая гипотеза заключается в том, что закон распределения рассматриваемой непрерывной величины выражается определенной интегральной функцией $F(x)$ (не содержащей каких-либо неизвестных параметров), то лучший способ проверки может быть основан на упомянутой выше теореме (5.4.78) А. Н. Колмогорова о распределении максимума уклонения эмпирической функции $\bar{F}_n(x)$ от теоретической $F(x)$.

Величина $D_n = \max |\bar{F}_n(x) - F(x)|$ в этом случае может быть определена путем сличения графиков функций $\bar{F}_n(x)$ и $F(x)$. Если $\sqrt{n}D_n$ превосходит q^0_0 -ный уровень значимости, определяемый с помощью распределения $K(\lambda)$, т. е.

$$\sqrt{n}D_n > \lambda_q, \quad (6.4.14)$$

где $1 - K(\lambda_q) = \frac{q}{100}$, то гипотезу следует считать несовместимой с данными опыта; в противном случае ее можно признать не противоречащей наблюдениям.

Следует, однако, отметить, что случаи, когда вид функции $F(x)$ полностью фиксируется проверяемой гипотезой, составляют скорее исключения. На практике гипотетическое распределение обычно содержит некоторое число параметров, которые оцениваются с помощью того же выборочного распределения, с которым мы должны сравнить теоретическое. Как показывают исследования ¹⁾, метод проверки с помощью χ^2 -критерия может быть обобщен и на этот случай, если применять надлежащую оценку параметров. В этом случае для вероятностей p_i точное значение не может быть найдено; однако, заменяя в функции $F(x; \theta_1, \theta_2, \dots)$ неизвестные параметры их оценками $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots$ по данным выборки, мы можем в качестве ее приближения рассматривать функцию $F(x; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots)$. Отсюда имеется возможность получить и приближенные оценки для вероятностей p_i — некоторые функции \hat{p}_i , зависящие от данных наблюдения.

¹⁾ Г. Крамер, Математические методы статистики, гл. 30.

Предположим, например, что мы проверяем гипотезу нормальности для некоторого наблюдаемого распределения. Заменяя неизвестные параметры центра рассеивания a и дисперсии σ^2 их эмпирическими оценками \bar{x} и s^2 соответственно, мы будем в качестве приближения к теоретической плотности рассматривать функцию

$$n(x; a, \sigma) \approx g(x; \bar{x}, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}}. \quad (6.4.15)$$

В этом случае в качестве оценки вероятности попадания в какой-нибудь интервал Δ естественно считать:

$$\tilde{p}_\Delta = \int_\Delta g(x; \bar{x}, s) dx. \quad (6.4.16)$$

Эти оценки \tilde{p}_Δ зависят от выборочных характеристик \bar{x} и s .

В качестве критерия соответствия в данном случае рассматривают величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(v_i - n\tilde{p}_i)^2}{n\tilde{p}_i}, \quad (6.4.17)$$

где \tilde{p}_i — оценки вероятностей для каждой i -й группы $i = 1, 2, \dots, l$, на которые мы подразделили наше распределение.

Уклонения в данном случае связаны между собой более чем одним линейным соотношением

$$\sum_{i=1}^l (v_i - n\tilde{p}_i) = 0.$$

Если число оцениваемых параметров равно c , то на уклонения $v_i - n\tilde{p}_i$ накладывается тем самым еще c связей; поэтому число независимых между собой уклонений в этом случае будет $l - c - 1$. Можно показать, что при достаточно больших численностях групп и в этом случае критерий (6.4.17) будет приближенно следовать закону χ^2 с $l - c - 1$ степенями свободы.

Методика его применения остается прежней: мы сравниваем полученное значение χ^2 с $q^0/0$ -ным верхним пределом, отвечающим $l - c - 1$ степеням свободы, и в том случае, когда χ^2 окажется превосходящим этот предел, мы бракуем гипотезу.

Заметим еще, что в некоторых случаях критерий χ^2 получается настолько малым, что значения, бóльшие полученного, можно ожидать теоретически с вероятностью, весьма близкой к единице. Такое положение дела может являться следствием того, что большое число оцениваемых по данному материалу параметров искусственно форсирует слишком хорошее согласование опытных данных с теорией. Поэтому следует внимательно и осторожно анализировать причины полученного согласования, используя и другие критерии и оценки.

Рассмотрим теперь еще один пример.

Пример 6.4.2. Пусть требуется оценить с помощью критерия χ^2 соответствие выборочного распределения, приведенного в примере 5.2.2, нормальному закону.

Пользуясь уже полученными в примерах 5.2.2 и 5.2.6 результатами, строим табл. 6.4.2.

Таблица 6.4.2

№ интервалов	Границы интервалов	Частота в интервале v_i	Координаты границ интервалов в долях s относительно \bar{x}	$\Phi(z_i)$	Оценка вероятности попадания в интервал \tilde{p}_i	Оценка математических ожиданий $n\tilde{p}_i$	Взвешенные квадраты уклонений $\frac{(v_i - n\tilde{p}_i)^2}{n\tilde{p}_i}$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	$-\infty \div -15$	7	$-\infty \div -1,99$	-0,5	0,0233	4,66	1,18
2	$-15 \div -10$	11	$-1,99 \div -1,47$	-0,4761	0,0475	9,50	0,24
3	$-10 \div -5$	15	$-1,47 \div -0,96$	-0,4292	0,0977	19,54	1,05
4	$-5 \div 0$	24	$-0,96 \div -0,44$	-0,3315	0,1615	32,30	2,13
5	$0 \div 5$	49	$-0,44 \div 0,07$	-0,1700	0,1979	39,58	2,24
6	$5 \div 10$	41	$0,07 \div 0,59$	0,0279	0,1945	38,90	0,11
7	$10 \div 15$	26	$0,59 \div 1,10$	0,2224	0,1419	28,38	0,20
8	$15 \div 20$	17	$1,10 \div 1,62$	0,3643	0,0831	16,62	0,01
9	$20 \div 25$	7	$1,62 \div 2,13$	0,4474	0,0526	10,52	0,03
10	$25 \div \infty$	3	$2,13 \div \infty$	0,4834			
Сумма		200		0,5	1,0000	200,00	7,19

В графы 1, 2 и 3 мы заносим данные о номерах интервалов (разрядов), границах интервалов и частотах в интервалах, полученные в примере 5.2.2.

Далее, используя вычисленные в примере 5.2.6 значения $\bar{x} = 4,30$ мк и $s^2 = 94,26$ мк², мы определяли координаты границ интервалов относительно \bar{x} , выраженные в долях s . Так, например, учитывая, что $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{94,26} = 9,71$ мк, находим для начала z_2 второго интервала ($z_1 = -\infty$ начало первого, z_2 — конец первого и одновременно начало второго и т. д.):

$$z_2 = \frac{-15 - 4,30}{9,71} = \frac{-19,3}{9,71} = -1,99$$

и для его конца z_3

$$z_3 = \frac{-10 - 4,30}{9,71} = \frac{-14,3}{9,71} = -1,47.$$

Вообще длина нормированных интервалов (кроме первого и последнего)

$$\Delta z = \frac{5}{9,71} = 0,515.$$

Полученные этим способом координаты границ интервалов вносим в графу 4. Затем с помощью табл. IV приложений находим оценки \tilde{p}_i вероятностей попадания в интервалы. Так, например, для первого интервала мы находим:

$$\Phi(z_1) = \Phi(-\infty) = -0,5 \quad \text{и} \quad \Phi(z_2) = \Phi(-1,99) = -0,4767;$$

тогда $\tilde{p}_1 = -0,4767 - (-0,5) = 0,0233$.

Результаты вычислений заносим в графу 6; интервал 10 при этом ввиду его малочисленности (в него попало всего три наблюдения) мы объединяем с интервалом 9. Замечаем, что вспомогательная графа 5, в которой проставлены взятые из табл. IV приложений значения функции Лапласа, в началах соответствующих интервалов может облегчить получение данных графы 6 оценок вероятностей. Сумма чисел \tilde{p}_i в 6-й графе всегда будет равна единице.

В графу 7 заносим оценки математических ожиданий частот по интервалам, получаемые путем умножения оценок вероятностей \tilde{p}_i на общее число наблюдений n . Так, например, в первом интервале получаем $n\tilde{p}_1 = 200 \cdot 0,0233 = 4,66$.

Итог по графе 7, конечно, должен равняться итогу по графе 3. Наконец, в графе 8 проставляем взвешенные квадраты уклонений частот от оценок их математических ожиданий; итог по этой графе и дает критерий χ^2 , определяемый формулой (6.4.17). Таким образом, мы получим:

$$\chi^2_{\text{н}} = 7,19.$$

Так как мы по данным выборки оценивали два параметра (a и σ) нормального закона, то в нашем случае число степеней свободы будет равно:

$$k = l - c - 1 = 9 - 2 - 1 = 6,$$

где l — число интервалов, получившееся после объединения интервалов 9 и 10; $c = 2$.

По табл. VIII приложений находим, что полученное по данным выборки значение $\chi^2 = 7,16$ меньше значения χ^2_{α} , соответствующего 30%-ному уровню значимости, другими словами, вероятность получить такие же или еще большие значения χ^2 при нашей гипотезе более 0,3. Отсюда заключаем, что результат нельзя считать значимым, и гипотеза о нормальности генеральной совокупности, из которой получена наша выборка, не противоречит наблюдениям. При вычислении χ^2 (или для контроля вычислений по указанной схеме) можно пользоваться также легко проверяемым соотношением

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(v_i - n\tilde{p}_i)^2}{n\tilde{p}_i} = \sum_{i=1}^l \frac{v_i^2}{n\tilde{p}_i} - n.$$

6.4.2. Критерий независимости. Пусть мы имеем совокупность независимых наблюдений, распределенных по двум признакам A и B , каждый из которых может варьировать от одного наблюдения к другому. Эта вариация признаков может носить количественный или качественный характер. Допустим, что по признаку A возможные результаты наблюдения могут быть подразделены на m групп A_1, A_2, \dots, A_m и по признаку B на l групп B_1, B_2, \dots, B_l , так что возможны любые комбинации $A_i B_j$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, l$) признаков. Классифицируя все наблюдения по группам $A_i B_j$ и обозначая численность этой группы через h_{ij} , мы будем иметь уже ранее встречавшуюся «двумерную» таблицу (табл. 6.4.3).

Таблица 6.4.3

$A \backslash B$	B_1	B_2	...	B_k	Всего
A_1	h_{11}	h_{12}	...	h_{1l}	h_{10}
A_2	h_{21}	h_{22}	...	h_{2l}	h_{20}
...
A_m	h_{m1}	h_{m2}	...	h_{ml}	h_{m0}
Всего ...	h_{01}	h_{02}	...	h_{0l}	n

Если распределение вероятностей $P(A_i B_j) = p_{ij}$ попадания в каждую из групп задано гипотетически, то эта гипотеза может быть проверена, как было указано в 6.4.1, путем вычисления критерия, который в данном случае будет иметь следующий вид:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l \frac{(h_{ij} - np_{ij})^2}{np_{ij}}, \quad (6.4.18)$$

при этом число степеней свободы следует считать равным $f = ml - 1$. Если вероятности зависят от c параметров, которые будут оцениваться по этому же материалу, то, как мы видели в 6.4.1, число степеней свободы будет меньше f на число параметров. Если проверяемая гипотеза H заключается в независимости признаков A и B , то это предположение равносильно осуществлению равенств

$$P(A_i B_j) = P(A_i)P(B_j) \quad (6.4.19)$$

или

$$p_{ij} = p_{i0}p_{0j},$$

где

$$P(A_i) = p_{i0}, \quad P(B_j) = p_{0j},$$

причем

$$\sum_{i=1}^m P(A_i) = \sum_{i=1}^m p_{i0} = 1, \quad (6.4.20)$$

$$\sum_{j=1}^l P(B_j) = \sum_{j=1}^l p_{0j} = 1. \quad (6.4.21)$$

Таким образом, из (6.4.19), (6.4.20) и (6.4.21) следует, что при гипотезе H распределение вероятностей полностью определяется заданием $m - 1$ параметров p_{i0} , например $p_{10}, p_{20}, \dots, p_{m-1,0}$, и $l - 1$ параметров p_{0j} , например $p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0,l-1}$, т. е. заданием всего $c = m + l - 2$ параметров. В качестве оценки этих параметров естественно рассмотреть соответствующие частоты:

$$\frac{h_{i0}}{n} \approx p_{i0}, \quad \frac{h_{0j}}{n} \approx p_{0j}.$$

В качестве оценки математического ожидания числа наблюдений в группе $A_i B_j$, равного $nP(A_i B_j) = np_{ij}$ при данной гипотезе H , используем произведение

$$n \frac{h_{i0}}{n} \frac{h_{0j}}{n} = \frac{h_{i0}h_{0j}}{n}.$$

Внося это значение вместо произведения np_{ij} в выражение (6.4.18) для χ^2 , получим:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l \frac{\left(h_{ij} - \frac{h_{i0}h_{0j}}{n}\right)^2}{\frac{h_{i0}h_{0j}}{n}}; \quad (6.4.22)$$

в свою очередь (6.4.22) можно привести к такому виду:

$$\chi^2 = n \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l \frac{h_{ij}^2}{h_{i0}h_{0j}} - 1 \right). \quad (6.4.23)$$

Критерий (6.4.22) — (6.4.23) по тем же причинам, что и критерий (6.4.3), рассмотренный в 6.4.1, будет распределен по закону χ^2 с числом степеней свободы

$$k = ml - 1 - c = ml - 1 - (m + l - 2) = ml - m - l + 1 = (m - 1)(l - 1).$$

Легко видеть и непосредственно, что ml уклонений

$$h_{ij} - \frac{h_{i0}h_{0j}}{n}$$

удовлетворяют $m + l - 1$ независимым линейным соотношениям, которые получаются в результате суммирования вдоль строк и столбцов приведенной в начале

этого раздела табл. 6.4.3. Например, суммируя по индексу j (вдоль строки i), получим:

$$\sum_{j=1}^l h_{ij} - \frac{h_{i0}}{n} \cdot \sum_{j=1}^l h_{0j} = h_{i0} - \frac{h_{i0}}{n} n = 0, \quad (6.4.24)$$

и аналогично

$$\sum_{i=1}^m h_{ij} - \frac{h_{0j}}{n} \sum_{i=1}^m h_{i0} = 0. \quad (6.4.25)$$

Так как сумма всех отклонений, получаемых двойным суммированием по i и j также равна нулю, то из $m+l$ соотношений (6.4.24) и (6.4.25) независимыми будут только $m+l-1$ соотношений. Всего, следовательно, из ml отклонений независимых будет $k = ml - (m+l-1) = (m-1)(l-1)$, что мы и видели.

При $m=l=2$ мы можем представить критерий (6.4.22) в очень простом виде

$$\chi^2 = \frac{n(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21})^2}{h_{10}h_{20}h_{01}h_{02}}, \quad (6.4.26)$$

причем число степеней свободы $k=1$.

Рассмотрим числовой пример.

Пример 6.4.3. В табл. 6.4.4 приводятся данные о распределении 320 штамповок колец подшипников по высоте (A) и наружному диаметру (B) на нормальные (т. е. находящиеся в пределах допуска) и завышенные (т. е. превышающие наибольший предельный размер).

Таблица 6.4.4

Диаметр \ Высота	Нормальные	Завышенные	Итого
Нормальные . . .	239	60	299
Завышенные . . .	14	7	21
Итого . . .	253	67	320

Требуется проверить, являются ли независимыми завышения штамповок против допускаемых размеров по высоте и наружному диаметру.

Если оба признака дефектности встречаются независимо друг от друга, то ожидаемое число штамповок, имеющих одновременно оба дефекта, должно быть

$$\frac{21 \cdot 67}{320} = 4,4 \text{ штуки.}$$

По имеющимся данным их больше, а именно 7 штук. Это как будто говорит против гипотезы о независимости.

Подсчитаем теперь критерий χ^2 по формуле (6.4.26):

$$\chi^2 = \frac{(239 \cdot 7 - 14 \cdot 60)^2 \cdot 320}{299 \cdot 21 \cdot 253 \cdot 67} = 2,1.$$

По табл. VIII приложений находим, что при числе степеней свободы $k=1$ полученное на опыте значение $\chi^2=2,1$ меньше значения χ^2 , отвечающего при $k=1$ уровню значимости $q=10\%$. Таким образом, имеющиеся в нашем распоряжении данные не противоречат гипотезе о независимости получения завышений размеров штамповок против установленных в чертеже предельных отклонений высоты и

наружного диаметра. Еще раз заметим, что получение положительного результата при проверке гипотезы не может еще рассматриваться как вполне достаточное ее подтверждение.

6.4.3. Проверка гипотезы об однородности ряда дисперсий. Метод χ^2 может быть применен также к решению задачи, которую можно рассматривать как естественное обобщение задачи о равенстве дисперсий по двум независимым выборкам из нормальной совокупности, рассмотренной в 6.3.2.

Пусть мы имеем k серий независимых наблюдений, представляющих выборки из некоторых нормальных совокупностей с дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2$. Пусть $\bar{s}_1^2, \bar{s}_2^2, \dots, \bar{s}_k^2$ — несмещенные оценки дисперсии по данным выборок, причем

$$\bar{s}_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{m=1}^{n_i} (x_m^{(i)} - \bar{x}^{(i)})^2, \quad (6.4.27)$$

где $\bar{x}^{(i)}$ — средняя арифметическая из данных $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{n_i}^{(i)}$ i -й выборки объема n_i .

Требуется проверить, что $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 = \sigma^2$, где σ^2 — общая дисперсия всех генеральных совокупностей. Если проверяемая гипотеза верна, то при каждом i частное $\frac{\bar{s}_i^2 (n_i - 1)}{\sigma^2}$ будет распределено по закону χ^2 с $(n_i - 1)$ степенями свободы (см. 5.4.2). Величину

$$\bar{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k \bar{s}_i^2 (n_i - 1)}{N - k}, \quad (6.4.28)$$

где

$$N = \sum_{i=1}^k n_i,$$

следует считать при нашей гипотезе несмещенной оценкой σ^2 . Следовательно, согласно теореме сложения для χ^2 распределений сумма независимых слагаемых

$$\frac{\sum_{i=1}^k \bar{s}_i^2 (n_i - 1)}{\sigma^2} = \frac{\bar{s}^2 (N - k)}{\sigma^2}$$

будет иметь распределение χ^2 с $(N - k)$ степенями свободы.

Очевидно, что распределение отношения $\frac{\bar{s}^2}{\sigma^2}$ при нашей гипотезе зависит лишь от n_i и не зависит от каких-либо других параметров.

Рассмотрим критерий

$$Q = -\frac{1}{c} \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \ln \frac{\bar{s}_i^2}{\bar{s}^2}, \quad (6.4.29)$$

где

$$c = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N - k} \right). \quad (6.4.30)$$

Можно показать, что величина Q имеет распределение, близкое к χ^2 с $(k - 1)$ степенями свободы, если только n_i не слишком малы ($n_i > 3$).

Для вычисления Q пользуются следующей расчетной формулой, в которой совершен переход от натуральных к десятичным логарифмам:

$$Q = \frac{2,3026}{c} \left[(N - k) \log \bar{s}^2 - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \log \bar{s}_i^2 \right]. \quad (6.4.31)$$

Задавая некоторым уровнем вероятности, например, полагая $P = 0,95$, определяют соответствующий верхний критический предел χ^2 по распределению χ^2 с $k - 1$ единицами свободы. Если для полученного вычислением Q найдем $Q > \chi_q^2$, то проверяемая гипотеза бракуется, так как при нашей гипотезе отдельные значения \bar{s}_i^2 и \bar{s}^2 отличаются от общего математического ожидания, равного σ^2 , только случайными флуктуациями. Если $Q \leq \chi_q^2$, то мы можем считать это подтверждением гипотезы, которая выдержала проверку (однако не следует, как и всегда при использовании статистических методов, считать гипотезу доказанной).

Заметим, что если произведение Qc , вычисляемое обычно раньше Q , окажется меньше χ_p , то в вычислении c нет надобности, так как при $c > 1$ значение Q оказывается незначимым, а гипотеза об однородности ряда дисперсий — не противоречащей наблюдениям.

Пример 6.4.4. Пусть требуется по условиям примера 5.3.6 проверить гипотезу однородности ряда дисперсий, состоящего из семи дисперсий, т. е., иными словами, проверить предположение об отсутствии разладок горизонтально-ковочной машины по рассеиванию размеров штамповок за семь смен работы. При этом, однако, мы будем считать, что данные примера 5.3.6 относятся не к эмпирическим дисперсиям s_j^2 , а к несмещенным оценкам \bar{s}_j^2 .

Для того чтобы произвести вычисления по формулам (6.4.28) и (6.4.31), мы сначала составляем табл. 6.4.5.

Таблица 6.4.5

№ смен	\bar{s}_i^2	n_i	$n_i - 1$	$\bar{s}_i^2 (n_i - 1)$	$\frac{1}{n_i - 1}$	$\log \bar{s}_i^2$	$(n_i - 1) \log \bar{s}_i^2$
1	0,067	25	24	1,61	0,0417	$\bar{2},8261$	$\bar{29},826$
2	0,136	20	19	2,58	0,0526	$\bar{1},1335$	$\bar{17},536$
3	0,168	15	14	2,35	0,0714	$\bar{1},2253$	$\bar{11},154$
4	0,068	20	19	1,29	0,0526	$\bar{2},8325$	$\bar{23},818$
5	0,066	20	19	1,25	0,0526	$\bar{2},8195$	$\bar{23},570$
6	0,102	25	24	2,45	0,0417	$\bar{1},0086$	$\bar{24},206$
7	0,137	25	24	3,29	0,0417	$\bar{1},1367$	$\bar{21},281$
		150	143	14,82	0,3543		$\bar{146},391$

Далее по формуле (6.4.28) находим:

$$\bar{s}^2 = \frac{14,81}{150-7} = 0,104 \text{ мм}^2.$$

По формуле (6.4.31) находим Q , для чего предварительно определяем:

$$c = 1 + \frac{1}{3(7-1)} \left(0,3543 - \frac{1}{150-7} \right) = 1,0193.$$

Продолжая вычисления, находим:

$$\log s^2 = \log 0,104 = \bar{1},0170,$$

и потому

$$Q = \frac{2,3026}{1,0193} [(150-7) \bar{1},0170 - \bar{145},391] = 9,13.$$

Выбираем доверительную вероятность равной $P = 0,95$. Тогда верхний критический предел χ_q^2 при числе степеней свободы, равном $7 - 1 = 6$, будет составлять согласно табл. VIII приложений

$$\chi_q^2 = 12,6.$$

Так как мы получили

$$Q = 9,13 < \chi_q^2 = 12,6,$$

то нашу гипотезу об однородности ряда дисперсий следует считать не противоречащей наблюдениям, т. е. данные наблюдений не дают оснований утверждать, что на протяжении семи смен работы машины имела место разладка по рассеиванию.

В том случае, когда числа наблюдений n_i одинаковы, $n_i = n$ и $\sum_{i=1}^k n_i = kn = N$ велика по сравнению с n , мы можем более детально исследовать распределение отношений

$$q_i = \frac{(n-1) \bar{s}_i^2}{s^2}, \quad (6.4.32)$$

которые будут при нашем предположении приближенно следовать распределению χ^2 с $(n-1)$ степенями свободы.

Таким образом, в последнем случае задача сводится к задаче проверки согласованности наблюдаемого распределения величин q_i с их гипотетическим распределением. Мы видели в 6.4.1, как такая задача решается опять-таки с помощью χ^2 -распределения. Однако при такой проверке для получения определенных результатов требуется значительное число проб (100—200), которое редко встречается на практике.

Вместо этой проверки при тех же условиях (т. е. при одинаковых объемах ряда выборок, по которым проверяется однородность дисперсий соответствующего ряда совокупностей) можно использовать еще один упрощенный прием, основанный на рассмотрении последовательности величин G_i

$$G_i = \frac{\max [s_i^2]}{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_k^2} \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (6.4.33)$$

Для максимального из членов этой последовательности G_{\max} найден закон распределения, с помощью которого построены табл. XXI приложений, в которых при числах k выборок от 2 до 120 и объемах выборок n от 2 до 145 даны значения показателя G_{\max} , отвечающие 5%- и 10%-ным уровням значимости.

Если найденное из наблюдений значение G_{\max} окажется больше указанного в таблице для соответствующих k и $n-1$, то вероятность получить такое значение оказывается меньше того уровня значимости, для которого составлена данная таблица, и потому гипотеза об однородности ряда дисперсий с тем же уровнем значимости должна быть отброшена.

Пример 6.4.5. Пусть у нас имеются данные о рассеивании по высоте штамповок, полученных на горизонтально-ковочной машине, причем было произведено через каждый час работы машины по одной выборке объема 20 штук каждая и всего было 47 выборок, по данным каждой из которых была вычислена несмещенная оценка \bar{s}_i^2 дисперсии.

Результаты после некоторого округления получились в следующем виде (табл. 6.4.6):

Таблица 6.4.6

i	\bar{s}_i^2 в мм ²	i	\bar{s}_i^2 в мм ²	i	\bar{s}_i^2 в мм ²	i	\bar{s}_i^2 в мм ²
1	0,0576	13	0,1444	25	0,0676	37	0,1089
2	0,1444	14	0,1600	26	0,1369	38	0,1089
3	0,1600	15	0,1521	27	0,1681	39	0,0784
4	0,1024	16	0,2116	28	0,0676	40	0,1369
5	0,1369	17	0,1024	29	0,0676	41	0,0729
6	0,0961	18	0,0961	30	0,1024	42	0,1089
7	0,0961	19	0,1156	31	0,1369	43	0,0784
8	0,1156	20	0,1024	32	0,0576	44	0,1521
9	0,1764	21	0,1521	33	0,1024	45	0,2116
10	0,0900	22	0,1024	34	0,0841	46	0,0400
11	0,1225	23	0,2601	35	0,0729	47	0,1764
12	0,2025	24	0,1296	36	0,1225		
						Сумма	5,6893

Требуется проверить гипотезу об однородности ряда дисперсии или, иными словами, предположение об отсутствии разладки машины в смысле изменения рассеивания по высоте.

При решении этой задачи, хотя объемы всех выборок одинаковы ($n = 20$), мы все же не можем воспользоваться с достаточной уверенностью показателем q_i и критерием «согласия» χ^2 ввиду недостаточного числа выборок.

Однако для иллюстрации пользования данным приемом мы все же сначала используем его.

Пользуясь формулой (6.4.28), сначала находим:

$$\bar{s}^2 = \frac{19 \sum \bar{s}_i^2}{940 - 47} = \frac{19 \cdot 5,6893}{893} = 0,1210,$$

затем вычисляем q_i и находим для этого показателя эмпирическое среднее квадратическое отклонение s_q , используя для вычислений табл. 6.4.7:

Таблица 6.4.7

№ по пор.	\bar{s}_i^2	v_i	q_i	q_i^2	$v_i q_i^2$
1	0,0400	1	6,28	39,4	39,4
2	0,0576	2	9,04	81,7	163,4
3	0,0676	3	10,62	112,8	338,4
4	0,0729	2	11,45	131,1	262,2
5	0,0784	2	12,31	151,5	302,6
6	0,0841	1	13,20	174,2	174,2
7	0,0900	1	14,12	199,4	199,4
8	0,0961	3	15,09	227,7	683,1
9	0,1024	6	16,07	258,2	1549,2
10	0,1089	3	17,09	292,1	876,3
11	0,1156	2	18,14	329,1	658,2
12	0,1225	2	19,22	369,4	738,8
13	0,1296	1	20,34	413,7	413,7
14	0,1369	4	21,48	461,4	1845,6
15	0,1444	2	22,66	513,5	1027,0
16	0,1521	3	23,87	569,8	1709,4
17	0,1600	2	25,11	630,5	1261,0
18	0,1681	1	26,38	695,9	695,9
19	0,1764	2	27,68	766,2	1532,4
20	0,2025	1	31,78	1010,0	1010,0
21	0,2116	2	33,21	1102,9	2205,8
22	0,2601	1	40,82	1666,3	1666,3
		47			19352,3

Из табл. 6.4.7 находим несмещенную оценку дисперсии¹⁾:

$$\bar{s}_q^2 = \frac{19352 - 47 \cdot 19^2}{47 - 1} = \frac{2385}{46} = 51,8,$$

$$\bar{s}_q = \sqrt{51,8} = 7,20.$$

При дальнейших вычислениях, следуя указаниям, содержащимся в 6.4.1, мы прежде всего разбиваем значения показателя на интервалы с таким расчетом, чтобы частота в каждом интервале была не менее пяти, после чего производим необходимые для использования критерия χ^2 подсчеты (табл. 6.4.8):

Таблица 6.4.8

№ интервалов	Границы интервалов значений q_i	Частоты ν_i	Оценка вероятности попадания в интервал \tilde{p}	Оценка математических ожиданий $N\tilde{p}$	Взвешенные квадраты уклонений $\frac{(\nu - N\tilde{p})^2}{N\tilde{p}}$
1	2	3	4	5	6
1	6 ÷ 11	6	0,0741	3,5	1,79
2	11 ÷ 16	9	0,2665	12,5	0,98
3	16 ÷ 21	14	0,3205	15,1	0,08
4	21 ÷ 26	11	0,2066	9,7	0,17
5	26 ÷ 41	7	0,1291	6,1	0,13
Сумма		47	0,9968	46,9	3,15

В столбец 3 мы заносим частоты ν_i по интервалам, беря их из предыдущей таблицы. Так, например, в первый интервал войдут значения $q_1 = 6,28$; $q_2 = 9,04$ и $q_3 = 10,62$, а потому частота в нем будет $\nu_1 = 1 + 2 + 3 = 6$. Проставляемые в столбце 4 оценки \tilde{p} вероятности попадания в интервал мы берем по табл. IX приложений, учитывая, что показатель q_i распределен по закону χ^2 с числом степеней свободы $n - 1 = 19$. Так, например, оценку \tilde{p}_1 для первого интервала мы получаем следующим образом.

При числе степеней $n - 1 = 19$ для $\chi_q^2 = 6$ имеем $P(\chi^2 > 6) = 0,9979$, а для $\chi_q^2 = 11$ вероятность $P(\chi^2 > 11) = 0,9238$; отсюда $\tilde{p}_1 = P(6 < \chi^2 < 11) = 0,9979 - 0,9238 = 0,0741$. При определении \tilde{p}_5 затруднение заключается в том, что табл. IX приложений содержит вероятности для значений χ_q^2 до 30, а так как верхняя граница пятого интервала представляет $\chi_q^2 = 41$, то, учитывая близость «хвостов» χ^2 -распределения и нормального распределения, мы используем табл. IV приложений.

Мы находим координату верхней границы пятого интервала по формуле

$$z_5 = \frac{q_5 - q_0}{\bar{s}_q} = \frac{41 - 19}{7,20} = 3,06.$$

По табл. IV приложений находим:

$$\Phi(3,06) = 0,49889 \approx 0,4989.$$

Поэтому

$$P(\chi^2 > 41) = 0,5 - 0,4989 = 0,0011.$$

После этого, учитывая, что

$$P(\chi^2 > 26) = 0,1302,$$

находим:

$$\tilde{p}_5 = P(26 < \chi^2 < 41) = 0,1302 - 0,0011 = 0,1291.$$

Заполнение столбцов 5 и 6 понятно без пояснений.

1)

$$\bar{s}_q^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k \nu_i (q_i - q_0)^2,$$

где q_0 равно среднearифметическому величин q_i . Но легко проверить на основании (6.4.18) и (6.4.32), что $q_0 = n - 1$. Поэтому мы получаем:

$$\bar{s}_q^2 = \frac{\sum \nu_i q_i^2 - (n-1)^2 k}{k-1}.$$

Сумма по пяти строкам шестого столбца представляет наблюдаемое значение критерия «согласия» χ^2 . Таким образом,

$$\chi_{\text{н}}^2 = 3,15.$$

Число степеней свободы в этом случае равно:

$$k = 5 - c - 1 = 5 - 2 - 1 = 2,$$

где $c = 2$, так как по данным выборки оцениваются два параметра исходного нормального распределения.

Просматривая табл. VIII приложений, мы видим, что при двух степенях свободы полученное в наблюдениях значение $\chi_{\text{н}}^2 = 3,15$ меньше даже значения χ_{q}^2 , отвечающего уровню значимости в 20%. Отсюда заключаем, что результат нельзя считать значимым, и гипотеза об однородности 47 дисперсий не противоречит наблюдениям. Таким образом, нет еще достаточных оснований считать, что за 47 часов работы машины имели место разладки по рассеиванию высоты штамповок. Подчеркнем еще раз, что число выборок—47, использованных в данном примере для оценки однородности ряда дисперсий, является недостаточным, и поэтому результаты проверки несколько условны.

Используем теперь для решения поставленной задачи второй прием, не требующий большого числа выборок. Учитывая, что самой большой дисперсией из 47 дисперсий является 23-я по счету дисперсия $\bar{s}_{23}^2 = 0,2601$, вычислим показатель G_{23} по формуле (6.4.33):

$$G_{23} = \frac{0,2601}{5,6893} = 0,046.$$

По табл. XXI приложений при 5%-ном уровне значимости, при $k = 47$ и числе степеней свободы $n - 1 = 20 - 1 = 19$ находим двойным линейным интерполированием:

а) при $k = 40$ для $n - 1 = 19$ находим:

$$0,0595 - \left(\frac{0,0595 - 0,0462}{20} \cdot 3 \right) = 0,0575;$$

б) при $k = 60$ для $n - 1 = 19$ находим:

$$0,0411 - \left(\frac{0,0411 - 0,0316}{20} \cdot 3 \right) = 0,0397;$$

в) при $n - 1 = 19$ для $k = 47$ находим:

$$0,0575 - \left(\frac{0,0575 - 0,0397}{20} \cdot 7 \right) = 0,0513 \approx 0,051.$$

Так как мы получили

$$G_{23} = 0,046 < 0,051,$$

то проверка и этим приемом указывает на незначимость результата, т. е. на отсутствие существенного противоречия между гипотезой однородности дисперсий и данными опыта.

6.4.4. Проверка гипотезы принадлежности двух независимых выборок одной и той же генеральной совокупности. Пусть мы имеем две совокупности независимых наблюдений (или, что то же, две выборки) объемов n_1 и n_2 соответственно, проведенных над величинами X_1 и X_2 . Законы распределения этих величин в генеральных совокупностях пусть будут $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Мы будем считать эти последние функции непрерывными. Задача заключается в том, чтобы по данным наблюдения решить, можно ли считать правильной гипотезу тождественности законов распределения $F_1(x) \equiv F_2(x)$, т. е. тождественности генеральных совокупностей, к которым принадлежат рассматриваемые выборки. Подобного рода задача неизбежно возникает, когда хотят показать в картине распределения существенное изменение, обусловленное влиянием какого-либо известного нам фактора. Так, например, сравнивают погрешности геометрической формы изделий, получаемых с помощью двух различных методов обработки, или продолжительность службы двух групп электрических лампочек, производимых в различных производственных условиях. В других случаях, наоборот, мы хотим получить подтверждение тождественности двух распределений. Так, например, мы имеем две машины, вырабатывающие одинаковую продукцию, и хотим проверить предположение о том, что разбросы размеров изделий, получаемых на обеих машинах, одинаковы для того, чтобы можно было применять к этим машинам единые нормативы при точностных расчетах. В качестве приближений к теоретическим функциям распределения мы рассматриваем эмпирические функции $\bar{F}_{n_1}^{(1)}(x)$ и $\bar{F}_{n_2}^{(2)}(x)$

при объемах выборок n_1 и n_2 . За меру расхождения этих двух функций естественно принять величину наибольшей разности:

$$D_{n_1, n_2} = \max \left\{ \bar{F}_{n_2}^{(2)}(x) - \bar{F}_{n_1}^{(1)}(x) \right\}. \quad (6.4.34)$$

Величину D_{n_1, n_2} легко определить непосредственным вычислением для каждого x или графически, построив графики ступенчатых кривых $F_{n_1}^{(1)}(x)$ и $F_{n_2}^{(2)}(x)$. Оказывается, что в том случае, когда гипотеза H справедлива, т. е. $F_1(x) = F_2(x) = F(x)$ при любых x , величина $D_{n_1, n_2} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$ подчиняется при больших n_1 и n_2 приближенно закону распределения Колмогорова $K(\lambda)$ независимо от вида непрерывной функции $F(x)$. Другими словами,

$$P \left(D_{n_1, n_2} < \lambda \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}} \right) \rightarrow K(\lambda) \quad (6.4.35)$$

$$\begin{aligned} n_1 &\rightarrow \infty \\ n_2 &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

при любом $\lambda > 0$.

Эта теорема дает возможность проверить гипотезу H по крайней мере при достаточно больших n_1 и n_2 ($n_1 > 50$, $n_2 > 50$). Для меньших значений n_1 и n_2 предельную теорему применять нельзя и следует применять формулы, основанные на точном законе распределения D_{n_1, n_2} . Для уровня значимости α критическая область для проверки гипотезы определяется неравенством

$$D_{n_1, n_2} > \lambda_\alpha \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}. \quad (6.4.36)$$

Иначе говоря, расхождение, превышающее предел, стоящий в правой части неравенства, можно считать существенным с вероятностью ошибки, не превосходящей α . Рассмотрим числовой пример.

Пример 6.4.6. Пусть у нас имеются нижеследующие данные о наружных диаметрах 120 штампков колец подшипников одного определенного типа-размера, полученных на двух горизонтально-ковочных машинах — № 1 и № 4 (по 60 колец на каждой машине) (табл. 6.4.9).

Таблица 6.4.9

№ по пор.	Наружный диаметр кольца		№ по пор.	Наружный диаметр кольца		№ по пор.	Наружный диаметр кольца	
	машина № 1	машина № 4		машина № 1	машина № 4		машина № 1	машина № 4
1	72,58	72,50	21	72,50	72,35	41	72,30	72,31
2	72,35	72,35	22	72,69	72,16	42	72,28	72,46
3	72,33	72,69	23	72,54	72,51	43	72,51	72,36
4	72,54	72,60	24	72,48	72,50	44	72,37	72,39
5	72,24	72,54	25	72,36	72,50	45	72,14	72,30
6	72,42	72,42	26	72,50	72,48	46	72,42	72,30
7	72,58	72,68	27	72,43	72,53	47	72,36	72,38
8	72,47	72,54	28	72,46	72,25	48	72,28	72,55
9	72,54	72,55	29	72,56	72,48	49	72,20	72,36
10	72,24	72,33	30	72,48	72,36	50	72,48	72,24
11	72,38	72,56	31	72,43	72,53	51	72,66	72,23
12	72,70	72,36	32	72,56	72,23	52	72,64	72,16
13	72,47	72,36	33	72,34	72,55	53	72,73	72,17
14	72,49	72,15	34	72,38	72,51	54	72,43	72,37
15	72,28	72,48	35	72,56	72,25	55	72,28	72,38
16	72,47	72,46	36	72,32	72,11	56	72,64	72,46
17	71,95	72,36	37	72,41	72,44	57	72,72	72,12
18	72,18	72,38	38	72,14	72,51	58	72,35	72,28
19	72,66	72,40	39	72,29	72,55	59	72,60	72,23
20	72,35	72,38	40	72,31	72,24	60	72,46	72,38

Требуется проверить гипотезу о том, что обе «пробы» взяты из одной генеральной совокупности, т. е., иными словами, что обе машины дают более или менее одинаковое распределение штапков по их наружным диаметрам.

С целью такой проверки находим величину наибольшей разности между эмпирическими функциями распределения (накопленными частотами), пользуясь табл. 6.4.10.

Таблица 6.4.10

Значение	Частота		Накопленная частота		Накопленная частотность		Разность накоплен. частотей (абс. вел.)
	машина № 1	машина № 4	машина № 1	машина № 4	машина № 1	машина № 4	
71,95	1		1	0	0,0167	0,0000	0,0167
72,11		1	1	1	0,0167	0,0167	0,0000
72,12		1	1	2	0,0167	0,0333	0,0167
72,14	2		3	2	0,0500	0,0333	0,0167
72,15		1	3	3	0,0500	0,0500	0,0000
72,16		2	3	5	0,0500	0,0833	0,0333
72,17		1	3	6	0,0500	0,1000	0,0500
72,18	1		4	6	0,0667	0,1000	0,0333
72,20	1		5	6	0,0833	0,1000	0,0167
72,23		3	5	9	0,0833	0,1500	0,0667
72,24	2	2	7	11	0,1167	0,1833	0,0667
72,25		2	7	13	0,1167	0,2167	0,1000
72,28	4	1	11	14	0,1833	0,2333	0,0500
72,29	1		12	14	0,2000	0,2333	0,0333
72,30	1	2	13	16	0,2167	0,2667	0,0500
72,31	1	1	14	17	0,2333	0,2833	0,0500
72,32	1		15	17	0,2500	0,2833	0,0333
72,33	1	1	16	18	0,2667	0,3000	0,0333
72,34	1		17	18	0,2833	0,3000	0,0167
72,35	3	2	20	20	0,3333	0,3333	0,0000
72,36	2	6	22	26	0,3667	0,4333	0,0667
72,37	1	1	23	27	0,3833	0,4500	0,0667
72,38	2	5	25	32	0,4167	0,5333	0,1167
72,39		1	25	33	0,4167	0,5500	0,1333
72,40		1	25	34	0,4167	0,5667	0,1500
72,41	1		26	34	0,4333	0,5667	0,1333
72,42	2	1	28	35	0,4667	0,5833	0,1167
72,43	3		31	35	0,5167	0,5833	0,0667
72,44		1	31	36	0,5167	0,6000	0,0833
72,46	2	3	33	39	0,5500	0,6500	0,1000
72,47	3		36	39	0,6000	0,6500	0,0500
72,48	3	3	39	42	0,6500	0,7000	0,0500
72,49	1		40	42	0,6667	0,7000	0,0333
72,50	2	3	42	45	0,7000	0,7500	0,0500
72,51	1	3	43	48	0,7167	0,8000	0,0833
72,53		2	43	50	0,7167	0,8333	0,1167
72,54	3	2	46	52	0,7667	0,8667	0,1000
72,55		4	46	56	0,7667	0,9333	0,1667
72,56	3	1	49	57	0,8167	0,9500	0,1333
72,58	2		51	57	0,8500	0,9500	0,1000
72,60	1	1	52	58	0,8667	0,9667	0,1000
72,64	2		54	58	0,9000	0,9667	0,0667
72,66	2		56	58	0,9333	0,9667	0,0333
72,68		1	56	59	0,9333	0,9833	0,0500
72,69	1	1	57	60	0,9500	1,0000	0,0500
72,70	1		58	60	0,9667	1,0000	0,0333
72,72	1		59	60	0,9833	1,0000	0,0167
72,73	1		60	60	1,0000	1,0000	0,0000
Сумма	60	60					

Просматривая последнюю графу этой таблицы, мы обнаруживаем, что наибольшая разность между эмпирическими функциями распределения отвечает диаметру кольца 72,55 мм; она равна:

$$D_{60-60} = 0,1667.$$

Используя табл. 5.4.4 значений λ , приведенную в 5.4.9, находим, что $\lambda = 1,358$ при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

Тогда критическая область определится с помощью неравенства (6.4.36) следующим образом:

$$D_{60-60} > 1,358 \sqrt{\frac{60+60}{60^2}} = 0,248.$$

Полученное нами на опыте значение $D_{60-60} = 0,1667$ лежит в области «допустимых значений». Таким образом, гипотезу об одинаковости распределений штамповок, полученных на двух машинах, по диаметрам следует признать не противоречащей наблюдениям.

§ 5. Критерий «случайности» последовательности

6.5.1. Постановка задачи. Мы знаем, что основные условия, при которых последовательность наблюдений x_1, x_2, \dots, x_n над некоторой величиной X можно считать случайной выборкой из генеральной совокупности, состоят в том, чтобы, во-первых, величины x_i были независимы и, во-вторых, чтобы они были одинаково распределены¹⁾. Только при этих условиях мы можем рассматривать величины x_i как повторения одной и той же величины X с некоторым законом распределения $F(x)$. Закон распределения совокупности величин x_i в условиях случайной выборки можно записать в таком виде:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1) F(x_2) \dots F(x_n), \quad (6.5.1)$$

где $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть интегральный n -мерный закон распределения совокупности n величин. Значение $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не изменяется при перестановке любых аргументов x_i и x_j между собой. Отсюда следует, что в том случае, когда выборка случайна, порядок, в котором располагаются наблюдения различной величины, не играет существенной роли: все $n!$ перестановок, дающие ту же группу наблюдаемых значений, будут равновозможны. Невозможно поэтому дать какой-нибудь признак «случайности» выборки, описываемый в терминах величин и относительного порядка в расположении наблюдений. Однако часто гипотезы, исключающие «случайность» и возможно фактически имеющие место в рассматриваемых случаях, как раз указывают на необходимость определенной зависимости между порядком наблюдения и величиной, зарегистрированной в этом наблюдении.

Так, в том случае, когда мы можем допустить, что в течение наблюдения центр распределения смещался, непрерывно возрастаая, естественно ожидать появления наблюдений в порядке их роста от меньшего к большему с некоторыми, быть может, исключениями, которые следует приписать случайным флуктуациям.

Разумеется, схема случайной выборки представляет некоторую математическую модель, которую с хорошим приближением можно воспроизвести в искусственных опытах, например, с выниманием карточек с написанными на них числами из ящика, в который эти карточки помещаются перед опытом в хорошо перемешанном виде; после каждого вынимания карточка возвращается обратно и после нового перемешивания опыт повторяется в тех же условиях, как и предыдущий. Если вероятности появления каждого из возможных чисел нам известны, то, как мы видели ранее, возможны и некоторые статистические предсказания

¹⁾ В этом смысле безвозвратная выборка, строго говоря, не является в полной мере случайной, так как она не обеспечивает полной независимости отдельных наблюдений.

относительно результатов длинной серии подобных опытов. В этом случае говорят, что массовый процесс находится в статистически контролируемом состоянии в том смысле, что мы можем говорить о вероятности нахождения изменяющегося признака в любых заданных заранее границах и предсказывать по крайней мере средний процент попадания признака в заданный наперед интервал в результате многократного повторения случайных испытаний (подобных выниманию карточек в нашем примере).

Этой схеме процесса, находящегося под «статистическим контролем», до известной степени уподобляют практически процесс изготовления деталей на станке, работающем по методу автоматического получения размера; если точность его соответствует заданной точности обработки, он правильно настроен и все основные производственные условия являются в достаточной мере стабильными. В этих условиях изменчивость размеров изготовленных деталей носит, по крайней мере как правило, не опасный характер в том смысле, что выход за границы производственного допуска теоретически возможен лишь в исчезающе малом проценте случаев; практически же тем самым гарантируется возможность работы без брака. Однако такое «статистически контролируемое» состояние длится до тех пор, пока под действием тех или иных факторов (разладка станка, износ или поломка инструмента, изменение температурного режима и т. д.) в ходе процесса не произойдут перемены, систематически существенным образом изменяющие характер изменчивости в опасную сторону в смысле появления заметного процента изделий, выходящих по размерам за границы допуска. (Здесь мы пока оставляем в стороне факторы, изменяющие масштабы самого рассеивания размеров.)

Одна из важных задач, которая возникает при статистическом анализе последовательно наблюдаемых данных в таких условиях, заключается в разработке оперативной системы своевременной сигнализации о всех нарушениях нормального хода процесса. Другая задача состоит в том, чтобы перед тем, как применять к статистическим данным те или иные описанные выше приемы с целью получения интересующих нас теоретических и практических выводов, проверить, в какой мере эти данные можно рассматривать как случайную выборку.

Мы рассмотрим теперь несколько простых приемов, которые оказываются полезными для того, чтобы проверить гипотезу «случайности». Там, где эта гипотеза будет забракована, естественно искать причины, обнаруживающие свое действие в особом порядке расположения следующих друг за другом наблюдений.

6.5.2. Понятие серии. Мы введем сначала некоторые новые понятия. Рассмотрим последовательность, в которой наблюдается случайное чередование n элементов, состоящих из n_1 элементов одного рода — они будут обозначаться буквой a и n_2 элементов второго рода — элементов b . Вот пример такой последовательности:

$$aaabbaabaabbbbbaabba,$$

состоящей из 10 элементов a и 9 элементов b .

Всякий отрезок последовательности максимальной возможной длины, состоящий из элементов одного и того же рода, называется *серией*. Иными словами, серия представляет совокупность следующих друг за другом одинаковых элементов, причем первый элемент этой совокупности следует за элементом другого рода. Число элементов, входящих в серию, называется ее *длиной*. В приведенном выше примере последовательность начинается с серии из трех элементов a , за ней следует серия из двух элементов b , далее серия из двух элементов a , серия из одного элемента b и т. д. Всего в нашем примере последовательность содержит 9 серий, из них 5 серий элементов a и 4 серии элементов b . Ясно, что число серий из элементов одного и другого рода может быть или

одинаковым или различаться на одну единицу, смотря по тому, будет ли последовательность начинаться и кончатся разными или одинаковыми элементами.

В теории серий используют следующие обозначения:

r_{1i} — число серий a длины i ;

r_{2i} — число серий b длины i ;

$r_i = r_{1i} + r_{2i}$ — общее число серий длины i ;

$R_{1k} = \sum_{i=k}^{n_1} r_{1i}$ — число серий из элементов a длины, не меньшей k ;

$R_{2k} = \sum_{i=k}^{n_2} r_{2i}$ — число серий элементов b длины, не меньшей k ;

$R_k = R_{1k} + R_{2k}$ — общее число серий длины, не меньшей k ;

R — общее число серий.

В приведенном выше примере числа серий разного рода соответственно их длине можно свести в отдельную таблицу (табл. 6.5.1).

Таблица 6.5.1

i	r_{1i}	r_{2i}	r_i	k	R_{1k}	R_{2k}	R_k
1	1	1	2	1	5	4	9
2	3	2	5	2	4	3	7
3	1	0	1	3	1	1	2
4	0	1	1	4	0	1	1

6.5.3. Законы распределения, математические ожидания и дисперсии чисел серий. Каждая из величин r_{1i}, \dots, R_i, R при гипотезе случайности следует закону распределения, вычисление которого представляет довольно сложную задачу комбинаторики. Мы выведем здесь для примера закон распределения величины R — общего числа серий в данной последовательности, предполагая возможные чередования элементов a и b одинаково вероятными. Подсчитаем прежде всего число различных способов образования последовательностей из n_1 букв a и из n_2 букв b , причем $n_1 + n_2 = n$. Очевидно, что каждой такой последовательности отвечает вполне определенное сочетание из n номеров $1, 2, \dots, n$ по n_1 , если мы будем отмечать порядковые номера тех мест, которые заняты буквой a , и, наоборот, каждому сочетанию из указанных номеров по n_1 будет отвечать вполне определенная последовательность из букв a и b , причем буква a будет стоять на выбранных (входящих во взятое сочетание) n_1 местах, а остающиеся $n - n_1 = n_2$ мест будут заняты буквой b . Таким образом, число различных последовательностей a и b будет равно $C_n^{n_1} = C_n^{n_2}$. Все они имеют одинаковую вероятность осуществления. Рассмотрим теперь, какова будет вероятность равенства $R = 2k$. Так как за каждой серией букв одного рода должна следовать серия из букв другого, то, очевидно, число R должно состоять в данном случае из k серий букв a и k серий букв b . Мы покажем несколько ниже, что k серий из n_1 букв a можно образовать $C_{n_1-1}^{k-1}$ способами и аналогично k серий из n_2 букв b можно образовать $C_{n_2-1}^{k-1}$ способами. Комбинируя тогда каждый набор из k серий первого рода (из общего их числа $C_{n_1-1}^{k-1}$) с каждым набором из k серий элементов второго рода, мы можем двумя способами получать интересные нас последовательности с $2k$ сериями: можно начинать с серии букв a (и кончать тогда серией из b) или начинать ее серией из b (кончая в этом случае серией из a). Таким образом, в результате комбинирования мы получим

$2C_{n_1-1}^{k-1} \cdot C_{n_2-1}^{k-1}$ последовательностей с $2k$ сериями, и потому искомая вероятность будет равна:

$$P(R = 2k) = p_{2k} = \frac{2C_{n_1-1}^{k-1} \cdot C_{n_2-1}^{k-1}}{C_n^n}. \quad (6.5.2)$$

Докажем теперь, что из n_1 букв a можно получить k серий ровно $C_{n_1-1}^{k-1}$ отличающимися друг от друга способами. Другими словами, этим числом способов можно n_1 элементов (т. е. букв a) разбить на k групп, причем ни одна из них не должна быть пустой. Наглядно можно представить себе такое разбиение следующим образом: выписав n_1 букв a друг за другом, проведем $k-1$ вертикальных черточек, отделяющих одну группу от другой, например:

$$\begin{array}{cccc} |aa| & a| & aaa| & a \dots a|aaaa| \\ \text{1-я группа} & \text{2-я группа} & \text{3-я группа} & \text{k-я группа} \end{array}$$

Чтобы ни одна группа не оказалась пустой, мы должны позаботиться о том, чтобы каждая из черточек, кроме первой и последней, прошла в промежутке между смежными буквами. Число таких промежутков равно $n_1 - 1$, а число внутренних черточек $k - 1$; поэтому удовлетворяющее указанному условию разбиение можно получить $C_{n_1-1}^{k-1}$ способами, отличающимися друг от друга положением хотя бы одной черточки. Этим подсчетом мы и воспользовались выше. Точно таким же способом можно показать, что

$$P(R = 2k + 1) = p_{2k+1} = \frac{C_{n_1-1}^k \cdot C_{n_2-1}^{k-1} + C_{n_1-1}^{k-1} C_{n_2-1}^k}{C_n^n}. \quad (6.5.3)$$

Формула (6.5.2) вместе с (6.5.3) определяет закон распределения R .

Укажем теперь, каковы будут математические ожидания и дисперсии чисел серий разного рода ¹⁾ и как можно приближенно определить вероятности, связанные с распределениями этих чисел. Математическое ожидание числа серий элементов a длины i при случайном чередовании n элементов равно:

$$Mr_{1i} = \frac{n_1(n_1-1) \dots (n_1-i+1)(n_2+1)n_2}{n(n-1) \dots (n-i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n_1). \quad (6.5.4)$$

Выражение для r_{2i} получится заменой n_1 на n_2 и n_2 на n_1 . Для числа R_{1k} мы будем иметь:

$$MR_{1k} = \frac{n_1(n_1-1) \dots (n_1-k+1)(n_2+1)}{n(n-1) \dots (n-k+1)} \quad (k = 1, 2, \dots, n_1). \quad (6.5.5)$$

С помощью (6.5.4) и (6.5.5) могут быть получены и математические ожидания других величин. Мы ограничимся случаем, когда число элементов первого и второго рода одинаково, т. е. $n_1 = n_2 = m$ и $n = 2m$.

В этом случае из (6.5.4) получим:

$$\begin{aligned} Mr_{1i} = Mr_{2i} &= \frac{m(m-1) \dots (m-i+1)m(m+1)}{n(n-1) \dots (n-i)} = \\ &= \frac{\frac{m}{n} \left(\frac{m}{n} - \frac{1}{n} \right) \dots \left(\frac{m}{n} - \frac{i-1}{n} \right) \frac{m}{n} \left(\frac{m}{n} + \frac{1}{n} \right) n}{1 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{i}{n} \right)}; \end{aligned} \quad (6.5.6)$$

¹⁾ Теорию рассматриваемого здесь вопроса см. в книге: В. Феллер, [Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., ИЛ, 1952.

а так как $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, то

$$Mr_{1i} = Mr_{2i} \approx \frac{n}{2^{i+2}}. \quad (6.5.7)$$

Точно так же из (6.5.5) будет следовать

$$MR_{1k} = MR_{2k} \approx \frac{n}{2^{k+1}}. \quad (6.5.8)$$

Наконец,

$$MR_k = 2MR_{1k} = \frac{2m(m-1)\dots(m-k+1)(m+1)}{n(n-1)\dots(n-k+1)} \approx \frac{n}{2^k}. \quad (6.5.9)$$

Математическое ожидание и дисперсия числа серий того и другого типа выражаются формулами

$$MR = \frac{n+2}{2}, \quad DR = \frac{n}{4} \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \approx \frac{n-1}{4}. \quad (6.5.10)$$

Из (6.5.8) следует, что объем выборки, для которого можно ожидать появления хотя бы одной серии (из элементов a или элементов b) длины k или еще большей, должен быть приблизительно равен 2^{k+1} . Например, в последовательности из 64 элементов (32 элемента a и 32 элемента b) в среднем может осуществиться не более одной серии длиной шесть или еще большей длины.

Исследование вероятностей p_{2k} и p_{2k+1} для больших n ($n_1 = n_2$) показывает, что R распределено при этом приближенно нормально.

Поэтому при достаточно больших n имеет место следующее соотношение:

$$P(R \leq z) \approx 0,5 + \Phi \left(\frac{z + \frac{1}{2} - \frac{n+2}{2}}{\frac{1}{2} \sqrt{n-1}} \right). \quad (6.5.11)$$

Практически этой формулой можно пользоваться уже при $n \geq 20$. Обозначая через u_p нижний предел нормированного отклонения, которому при нормальном законе отвечает вероятность $P(u > u_p) = 0,5 - \Phi(u_p) = \frac{p}{100}$, и полагая

$$z = z_p(R) = \frac{1}{2} (n+1 + u_p \sqrt{n-1}), \quad (6.5.12)$$

получим из (6.5.11) и (6.5.12):

$$P(R < z_p) \approx \frac{p}{100}. \quad (6.5.13)$$

Например, полагая $n = 40$ и $p = 2,5\%$, будем иметь: $u_p = -1,96$, $z_p(R) = \frac{1}{2} (41 - 1,96 \sqrt{39}) \approx 14,37$. Следовательно, вероятность встретить 14 серий или меньше (при среднем числе серий $\frac{40+2}{2} = 21$) при случайном чередовании 20 элементов a и 20 элементов b не превосходит $2,5\%$.

Распределение R_{11} общего числа серий элементов (длины 1 и более единицы) также приближенно нормально при $n > 20$ с математическим ожиданием

$$MR_{11} \approx \frac{1}{2} MR = \frac{n+2}{4} \quad (6.5.14)$$

и дисперсией

$$DR_{11} = \frac{n+2}{16} \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \approx \frac{n+1}{16}, \quad (6.5.15)$$

что позволяет указать для R_{11} нижний предел допустимых значений с уровнем значимости $\frac{p}{100}$ %:

$$z_p(R_{11}) \approx \frac{1}{4}(n + u_p \sqrt{n+1}). \quad (6.5.16)$$

Распределение R_{1k} или $k > 2$ хотя и сходится к нормальному, но более медленно и при малых n резко асимметрично.

Для больших k можно с успехом использовать распределение Пуассона

$$P(R_{1k} = \nu) \approx \frac{a^\nu}{\nu!} e^{-a},$$

считая

$$a = MR_{1k} \approx \frac{n}{2^{k+1}}. \quad (6.5.17)$$

Следовательно, для вероятности найти хотя бы одну серию из элементов a длины k или больше мы будем иметь приближенно:

$$P(R_{1k} \geq 1) = 1 - P(R_{1k} = 0) = 1 - e^{-\frac{n}{2^{k+1}}}. \quad (6.5.18)$$

Отсюда легко определить критическое значение k такое, что $P(R_{1k} \geq 1)$ оказывается равной наперед заданному малому числу α .

Например, при $n = 40$ и $\alpha = 0,05$

$$P(R_{1k} \geq 1) = 1 - e^{-\frac{40}{2^{k+1}}} = 0,05,$$

$$\text{откуда } k = \frac{\lg_{10} \left(-\frac{40}{\ln 0,95} \right)}{\lg_2 2} - 1 = 8,6.$$

Таким образом, с вероятностью всего в 50% мы можем рассчитывать найти по крайней мере одну серию длиной 8 и более из букв a в случайном расположении 20 букв a и 20 букв b .

6.5.4. Различные критерии «случайности». Изложенная теория может быть применена к проверке «случайности» выборки из некоторой генеральной совокупности с непрерывным распределением. Допустим, что мы имеем $n = 2m + 1$ наблюдений непрерывно распределенной величины. Определив медиану из наших наблюдений, т. е. найдя $m + 1$ -й член по порядку в нашем вариационном ряду, мы классифицируем теперь все остальные наблюдения в порядке их появления, разбивая их на два класса равной численности, а именно на большие медианы и меньшие медианы. Обозначив первые буквой a , а вторые — буквой b , мы получим последовательность, в которой в некотором порядке чередуется m букв a и m букв b . В случае четного числа $n = 2m$ можно за эмпирическую медиану принять некоторое число, промежуточное между двумя центральными членами с порядковыми номерами (по возрастанию значений) m и $m + 1$.

При гипотезе «случайности» мы имеем вполне определенное распределение общего числа серий и числа очень длинных серий. Пусть, с другой стороны, мы можем допустить, что в течение наблюдения происходило смещение центра распределения, например, в сторону больших значений. В этом случае мы как следствие указанного смещения будем обнаруживать в ряду наблюдений очень длинные серии при сравнительно малом их общем числе. Так мы естественным путем приходим к двум критериям проверки гипотезы «случайности»:

- 1) длине серий и
- 2) числу серий.

Таблица 6.5.2

Длина серии k	Наибольшее общее число наблюдений n , для которого вероятности выполнения нижеследующих неравенств меньше 0,05		
	$R_k \geq 1$	$R_{1k} \geq 1$ и $R_{2k} \geq 1$	$R_{1k} \geq 1$
5	10	16	10
6	14	32	18
7	22	64	28
8	34	120	48
9	54	230	80
10	86		130
11	140		230
12	230		420

В табл. 6.5.2 мы приводим для длин серий $k = 5, 6, \dots, 12$ такие наибольшие значения общего числа наблюдений, для которого вероятности $P(R_k \geq 1)$ (наличия хотя бы одной серии любого из элементов длиной, не меньшей k), вероятности $P(R_{1k} \geq 1; R_{2k} \geq 1)$ (наличия хотя бы по одной серии первого и второго элементов длиной, не меньшей k) и вероятности $P(R_{1k} \geq 1)$ (наличия хотя бы одной серии первого элемента длиной, не меньшей k) оказываются меньшими 0,05.

Из табл. 6.5.2 мы можем заключить, например, что до тех пор, пока общее число наблюдений n меньше 22, вероятность появления хотя бы одной серии любого из элементов длиной 7 или большей будет меньше 0,05. При числе наблюдений n , большем 22, мы можем встретить хотя бы одну серию длиной 7 или больше с вероятностью, уже большей чем 0,05. Вероятность встретить среди наблюдений хотя бы одну серию элементов a и в то же время по крайней мере одну серию элементов b длиной, большей или равной 8, будет меньше 0,05 до тех пор, пока общее число наблюдений n будет меньше 120.

Приведем еще одну таблицу (табл. 6.5.3) для второго критерия. В ней даются при числах наблюдений $n = 10, 20, 30, \dots, 200$ и при числе элементов a , равном числу элементов b , верхние и нижние пределы для числа серии R в рассматриваемой последовательности.

Таблица 6.5.3

Вероятности встретить R	Общее число серий R												
	Общее число наблюдений n												
	10	20	30	40	50	60	80	100	120	140	160	180	200
0,05	3	6	11	15	19	24	33	42	51	60	70	79	88
0,95	8	15	20	26	32	37	48	59	70	81	91	102	113
0,025	2	6	10	14	18	22	31	40	49	58	68	77	86
0,975	9	15	21	27	33	39	50	61	72	83	93	104	115

В первой строке указаны пределы такие, что вероятность получить для R меньшее значение, чем указанное в таблице, не превосходит 0,05. Аналогичные пределы для вероятности 0,025 указаны в третьей строке. Во второй и четвертой строках помещены пределы такие, что с вероятностями 0,95 и 0,975 соответственно мы можем быть уверены в том, что R превзойдет указанные пределы. Малые вероятности предназначены для проверки гипотезы «случайности» тогда, когда число серий в выборке мало, меньше ожидаемого числа, а большие вероят-

ности — для обратного случая. Таким образом, в таблице приведены нижний и верхний пределы общего числа серий R при уровнях значимости 0,05 и 0,10.

По табл. 6.5.3 мы можем заключить, например, что при общем числе наблюдений, равном 100, мы можем встретить общее число серий R , не большее 42 с вероятностью, не большей 0,05, и не большее 40 с вероятностью, не большей 0,025, не меньшее 59 с вероятностью, не меньшей 0,95, и не меньшее 61 с вероятностью, не меньшей 0,975.

Покажем теперь, пользуясь данными о штамповках колец из примера 5.2.1 и о валиках из примера 5.2.2, как пользоваться указанными двумя критериями.

Найдем сначала медианы распределений колец и валиков. Как можно усмотреть из примеров 5.2.3 и 5.3.12, медианы наших распределений соответственно равны:

$$m_{e_1} = 32,295 \text{ мм} \text{ и } m_{e_2} = 5 \text{ мк.}$$

Запишем теперь последовательности наблюдений в виде букв a (значения меньше медианы) и букв b (значения, большие медианы).

Распределение 20 колец будет тогда иметь вид

abbabaaabbabaaabbabb

Распределение 200 валиков будет выглядеть так:

*aaaaaaaaabaaaaabaaaaabbaabbb
 bbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbb
 bbbbbbbbbbbbbbbbbbbbabaaa
 baabbabbbbbabaaaabaaabbbb
 abaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaa
 aaaaaaaaaabbbbabbbaaaaaba
 abbabaabababbbbbbbbaabaaa
 bbbbaababaaabaaaaabaaaa*

Произведем теперь подсчет чисел серий различной длины и сведем результаты подсчета в нижеследующие таблицы (при этом из семи значений второй выборки, равных 5, первое отнесем к элементам a и все последующие — к b) (табл. 6.5.4 и 6.5.5):

Таблица 6.5.4

Распределение серий колец

Длина серий i	Фактическое число серий			Ожидаемое число серий		
	r_{1i} (элемента a)	r_{2i} (элемента b)	r_i (общее число)	$Mr_{1i} = Mr_{2i}$	Mr_i	MR_{1i}
1	2	3	4	5	6	7
1	4	2	6	2,9	5,8	5,5
2	0	4	4	1,5	2,9	2,6
3	2	0	2	0,7	1,4	1,1
Сумма			12			

Таблица 6.5.5

Распределение серий валиков

Длина серий i	Фактическое число серий			Ожидаемое число серий		
	r_{1i} (элемента a)	r_{2i} (элемента b)	r_i (общее число)	$Mr_{1i} = Mr_{2i}$	Mr_i	MR_{1k}
1	2	3	4	5	6	7
1	9	16	25	25,4	50,8	50,5
2	6	3	9	12,7	25,4	25,1
3	5	1	6	6,3	12,6	12,4
4	2	2	4	3,1	6,2	6,1
5	2	1	3	1,5	3,1	3,0
6	1	1	2	0,75	1,51	1,46
7	1	0	1	0,37	0,73	0,71
8	0	1	1	0,18	0,36	0,34
33	1	0	1	~ 0	~ 0	~ 0
48	0	1	1	~ 0	~ 0	~ 0
Сумма			53			

Для контроля правильности подсчета служит графа 4. Если просуммировать произведения чисел, стоящих в графе 4, на соответствующие длины серий, стоящие в графе 1, то мы должны получить общее число наблюдений.

Для колец мы имеем:

$$6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 0 = 20 \text{ и общее число колец равно } 20,$$

следовательно, подсчет сделан правильно.

Аналогично этому для валиков получим:

$$25 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 33 + 1 \cdot 48 = 200.$$

Ожидаемое число MR_{1k} серий первого элемента длиной, не меньшей k , мы получим по формуле (6.5.5).

Если число n_1 элементов a не равно числу n_2 элементов b , то из этой формулы получаем:

$$MR = MR_{11} = \frac{n_1(n_2 + 1)}{n}, \quad (6.5.19)$$

где n — общее число всех элементов a и b .

В случае же равенства чисел элементов a и b , т. е. когда $n_1 = n_2 = m = \frac{n}{2}$, будем из той же формулы иметь:

$$MR_{11} = \frac{m + 1}{2}. \quad (6.5.20)$$

Далее из приведенных в 6.5.3 вычислений вытекает:

$$MR_{1, k+1} = MR_{1, k} \cdot \frac{m - k}{n - k}, \quad (6.5.21)$$

$$Mr_{1i} = MR_{1i} - MR_{1, i+1}. \quad (6.5.22)$$

Для колец мы имеем:

$$n_1 = n_2 = m = \frac{n}{2} = 10;$$

$$MR_{11} = \frac{10 + 1}{2} = 5,5, \quad MR_{12} = 5,5 \cdot \frac{10 - 1}{20 - 1} = 2,6,$$

$$MR_{13} = 2,6 \cdot \frac{10 - 2}{20 - 2} = 1,1, \quad MR_{14} = 1,1 \cdot \frac{10 - 3}{20 - 3} = 0,4.$$

Эти результаты, кроме последнего, мы проставляем в графе 7. Далее с помощью формулы (6.5.22) находим:

$$Mr_{11} = 5,5 - 2,6 = 2,9, \quad Mr_{12} = 1,5 \quad \text{и} \quad Mr_{13} = 0,7.$$

Полученные таким образом значения проставляем в графе 5. Данные для графы 6 мы получаем умножением на 2 данных предыдущей графы.

Аналогично мы вычисляем данные для граф 5, 6, 7 для валиков.

Применим к полученным данным сначала критерий длины серий. Из сравнения полученных нами в примере таблиц распределений серий колец и валиков с таблицей 6.5.2 заключаем, что с уровнем значимости 0,05 последовательность колец не противоречит гипотезе «случайности», так как здесь встречаются серии длины, не большей 3, а уже при числе наблюдений $n > 10$ можно обнаружить с вероятностью, *большой* 0,05, серию одного из элементов *длины 5 и большей*.

Последовательность валиков, наоборот, с большой значимостью не согласуется с гипотезой «случайности», так как здесь встречаются при $n = 200$ серии длины 33 и даже 48, в то время как согласно таблице 6.5.2 при числе наблюдений n , равном 230 и меньшем, вероятность встретить хотя бы одну серию длины 12 и большей меньше 0,05.

Этот же критерий можно применить еще, используя закон распределения Пуассона для R_{1k} .

В самом деле, по формуле (6.5.18) мы определяем вероятность встретить в n наблюдениях хотя бы одну серию из элементов a наибольшей наблюдаемой длины k для колец

$$P(R_{13} \geq 1) = 1 - e^{-\frac{20}{2^3+1}} = 0,7135$$

и для валиков

$$P(R_{1,33} \geq 1) = 1 - e^{-\frac{200}{2^{33}+1}} \approx 0.$$

Таким образом, для последовательности колец гипотеза «случайности» не противоречит данным наблюдения даже в том случае, если уровень значимости выбрать очень большим, например близким к 0,5; но для валиков эта гипотеза опровергается, если даже выбрать уровень значимости чрезвычайно малым, например 0,001.

Можно было бы еще иначе применить этот же критерий длины серий, а именно, воспользоваться вытекающим непосредственно из формулы (6.5.18) равенством

$$k = \frac{\lg_{10} \left(-\frac{n}{\ln \alpha} \right)}{\lg_{10} 2} - 1, \quad (6.5.23)$$

где α представляет дополнение до единицы вероятности, с которой при n наблюдениях в последовательности элементов a и b можно встретить хотя бы одну серию элементов a длины k и большей. Возьмем, например, уровень значимости 0,05 и, следовательно, $\alpha = 0,95$.

Тогда получим для колец

$$k = \frac{\lg_{10} \left(\frac{-20}{\ln 0,95} \right)}{\lg_{10} 2} - 1 = 7,6$$

и для валиков

$$k = \frac{\lg_{10} \left(\frac{-200}{\ln 0,95} \right)}{\lg_{10} 2} - 1 = 11,0.$$

Таким образом, критические области определяются неравенствами для колец

$$k > 8$$

и для валиков

$$k > 11.$$

Для колец наиболее длинная серия имеет длину 3 и, следовательно, лежит в области допустимых значений, тогда как для валиков соответствующая серия имеет длину 33, т. е. попадает в критическую область.

Отсюда следуют те же заключения, что и прежде.

Теперь мы применим к тем же данным *критерий числа серий*, используя нормальный закон распределения для общего числа серий R . Беря тот же 5%-ный уровень значимости и применяя формулы (6.5.12) и (6.5.13), мы будем иметь для нижнего предела числа серий $u_p = -1,65$, откуда для колец

$$Z_p(R) = \frac{1}{2}(20 + 1 - 1,65\sqrt{19}) = 6,9$$

и для валиков

$$Z_p(R) = \frac{1}{2}(200 + 1 - 1,65\sqrt{199}) = 88,9.$$

Таким образом, критические области будут определяться неравенствами: для колец

$$R < 6,$$

для валиков

$$R < 88.$$

Эти же значения для критических пределов мы можем взять непосредственно из табл. 6.5.3.

Из таблиц распределений числа серий мы видим, что по нашим наблюдениям для колец $R = 12$ и для валиков $R = 53$. Число серий для колец и тут лежит в области допустимых значений, а для валиков — в критической области; следовательно, мы приходим к тому же заключению, что и прежде.

Заметим, что проверки, применяющие оба эти критерия к одному и тому же материалу, конечно, не являются независимыми друг от друга.

6.5.5. Способ последовательных разностей. Из рассматриваемой последовательности n наблюдений

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

образуем $n - 1$ разность между соседними членами

$$d_1 = x_2 - x_1, \quad d_2 = x_3 - x_2, \dots, \quad d_{n-1} = x_n - x_{n-1}.$$

Если x_i образуют выборку из генеральной совокупности величины X и $MX = a$, $DX = \sigma^2$, то, как явствует из теоремы (3.3.16), ввиду независимости последовательных наблюдений

$$M d_i^2 = M (X_{i+1} - X_i)^2 = 2DX = 2\sigma^2. \quad (6.5.24)$$

Поэтому, взяв среднюю арифметическую из величин d_i^2 и разделив ее на два, мы получим несмещенную оценку параметра σ^2 по данным выборки

$$q^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} d_i^2. \quad (6.5.25)$$

При тех же условиях можно подсчитать и дисперсию величины q^2 . Мы в дальнейшем будем предполагать еще нормальность распределения величины X . Тогда, поль-

зуюсь (4.3.27) и применяя приемы, использованные для вывода (5.3.6), из (6.5.25) получим

$$Dq^2 = \frac{3n-4}{(n-1)^2} \sigma^4. \quad (6.5.26)$$

Но из (5.3.74) и (5.3.61) следует, что для обычной несмещенной оценки

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

представляющей при нормальном законе распределения эффективную оценку σ^2 , мы имеем:

$$D\bar{s}^2 = \frac{2}{n-1} \sigma^4. \quad (6.5.27)$$

Поэтому относительная эффективность оценки q^2 равна:

$$\frac{D\bar{s}^2}{Dq^2} = \frac{2(n-1)}{3n-4} \approx \frac{2}{3}. \quad (6.5.28)$$

Таким образом, q^2 в обычных условиях выборки значительно уступает \bar{s}^2 в степени использования информации, содержащейся в данных наблюдениях. Однако величина q^2 может быть иногда полезна в несколько иных условиях. Предположим, например, что в течение наблюдения центр распределения величины X постепенно меняется, но дисперсия остается постоянной. В этом случае оценка σ^2 с помощью \bar{s}^2 даст заметное преувеличение, так как вариация самой средней входит как составная часть в \bar{s}^2 . С другой стороны, если изменения средней происходят достаточно плавно и медленно, так что за промежуток между двумя последовательными наблюдениями ее прирост мал по сравнению с σ , то это изменение мало скажется на последовательных разностях, а следовательно, и на величине q^2 . Другими словами, \bar{s}^2 оказывается более чувствительной к постепенному смещению центра рассеивания, которое наблюдается, например, при монотонном его росте или уменьшении (как это бывает при износе инструмента и при нагреве станка в процессе работы), при циклических колебаниях среднего (под влиянием, например, циклических погрешностей в многопозиционном станке) и т. д.

Таким образом, если нужно проверить гипотезу «случайности» выборки или наличия статистически контролируемого состояния при допущении в качестве альтернативных гипотез возможности постепенного смещения центра рассеивания (при неизменном σ): то целесообразно использовать критерий

$$\delta = \frac{q^2}{s^2}. \quad (6.5.29)$$

При этом малые значения δ следует считать указывающими на существенное расхождение с выводами из проверяемой гипотезы «случайности». В самом деле, можно показать, что при гипотезе случайной выборки из нормальной совокупности

$$M\delta = 1 \quad \text{и} \quad D\delta = \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \quad (6.5.30)$$

и что критерий будет приблизительно нормально распределен при $n > 20$. Таким образом, критическая область для δ , отвечающая $q\%$ -ному уровню значимости при $n > 20$, будет определяться неравенством

$$\left. \begin{aligned} &\delta < \bar{\delta}_q, \\ &\delta < \bar{\delta}_q, \end{aligned} \right\} \quad (6.5.31)$$

$$\bar{\delta}_q \approx 1 - \frac{u_q}{\sqrt{n+1}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_q}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,5 - \Phi(u_q) = \frac{q}{100}.$$

Для $n < 20$ можно использовать следующую таблицу допустимых нижних пределов $\bar{\delta}_q$ для уровней значимости 0,1%, 1% и 5% (табл. 6.5.6).

Таблица 6.5.6

Число наблюдений n	Допустимые нижние пределы δ_q для уровней значимости		
	0,1%	1%	5%
4	0,295	0,313	0,390
5	0,208	0,269	0,410
6	0,182	0,281	0,445
7	0,185	0,307	0,468
8	0,202	0,331	0,491
9	0,221	0,354	0,512
10	0,241	0,376	0,531
11	0,260	0,396	0,548
12	0,278	0,414	0,564
13	0,295	0,431	0,578
14	0,311	0,447	0,591
15	0,327	0,461	0,603
16	0,341	0,475	0,614
17	0,355	0,487	0,624
18	0,368	0,499	0,633
19	0,381	0,510	0,642
20	0,393	0,520	0,650

Пример 6.5.1. Пусть требуется проверить гипотезу «случайности» выборки, приведенной в примере 5.2.1, с помощью последовательных разностей. Используя подсчеты, сделанные в примере 5.4.2, получим:

$$\bar{s}^2 = \frac{ns^2}{n-1} = \frac{2,5282}{20-1} = 0,1331 \text{ мм}^2.$$

Находим несмещенную оценку q^2 по формуле (6.5.26)

$$q^2 = \frac{1}{2(20-1)} [0,44^2 + 0,07^2 + (-0,39)^2 + \dots + (-0,29)^2] = \frac{4,8170}{38} = 0,1268 \text{ мм}^2.$$

Вычисляем критерий δ по формуле (6.5.29)

$$\delta = \frac{0,1268}{0,1331} = 0,953.$$

Просматривая таблицу 6.5.6, замечаем, что при $n=20$ нижняя граница для критерия δ даже при 5%-ном уровне значимости равна $\delta_5 = 0,650$. Таким образом, полученное нами из наблюдений значение $\delta = 0,953$ лежит в зоне допустимых значений, и следовательно, гипотеза «случайности», как и в предыдущих проверках, хорошо согласуется с данными наблюдений.

§ 6. Проверка гипотезы нормальности

6.6.1. Способ выпрямленных диаграмм. В 6.4.1 было показано, что, применяя критерий χ^2 , мы можем проверить, насколько хорошо соответствует гипотетически допускаемый закон распределения наблюдаемой в выборке картины распределения. В случае нормального закона распределения такая проверка требует предварительной оценки параметров a и σ по выборочным значениям x с \bar{x} и неизвестных вероятностей попадания в последовательные интервалы с помощью приближенной кривой плотности

$$n(x; \bar{x}, \bar{s}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\bar{s}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\bar{s}^2}}.$$

Истолкование результатов проверки с помощью критерия χ^2 не свободно от некоторой условности (ввиду произвольности группировки и малой нагляд-

ности самого показателя. Во многих случаях проверку нормальности распределения можно провести более наглядным и простым по идее способом.

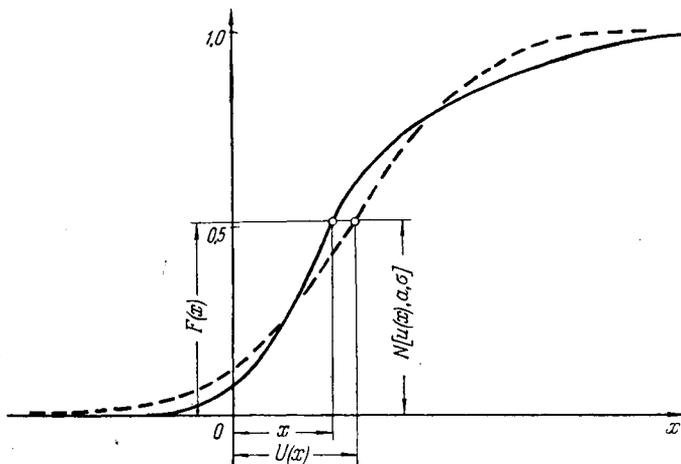
Заметим прежде всего, что всякую непрерывную функцию распределения $F(x)$ можно представить, используя нормальную функцию

$$N(x) = N(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

в виде сложной функции

$$F(x) = N[u(x); 0, 1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u(x)} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, = N(u(x)),$$

где функция $u(x)$ будет некоторой монотонной возрастающей функцией от x . Возможность такого представления следует с очевидностью из черт. 88, на кото-



Черт. 88. Геометрическая интерпретация функции $u(x)$, связывающей абсциссу точки кривой рассматриваемой функции распределения с абсциссой такой точки нормальной кривой, которая имеет такую же ординату.

ром изображены примерный график функции $F(x)$ и график нормального закона $N(x; 0, 1)$. Здесь $u(x)$ представляет абсциссу такой точки нормальной интегральной кривой, ордината которой равна ординате рассматриваемой интегральной кривой $F(x)$. Ясно, что рассматриваемая таким образом абсцисса $u(x)$ есть функция от x . Таким образом, если мы поставим в соответствие каждому x значение абсциссы $u(x)$, для которого ордината кривой $N(x; 0, 1)$ равна ординате $F(x)$, то мы и получим вполне определенную функцию $u(x)$. При этом мы будем полагать $u(x) = -\infty$ на всем интервале, где $F(x) = 0$ и $u(x) = +\infty$ в таких точках x , где $F(x) = 1$.

Если распределение нормально, то

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = N\left(\frac{x-a}{\sigma}; 0, 1\right).$$

Следовательно, в этом и только в этом случае функция $u(x)$ линейна:

$$u = \frac{x-a}{\sigma}.$$

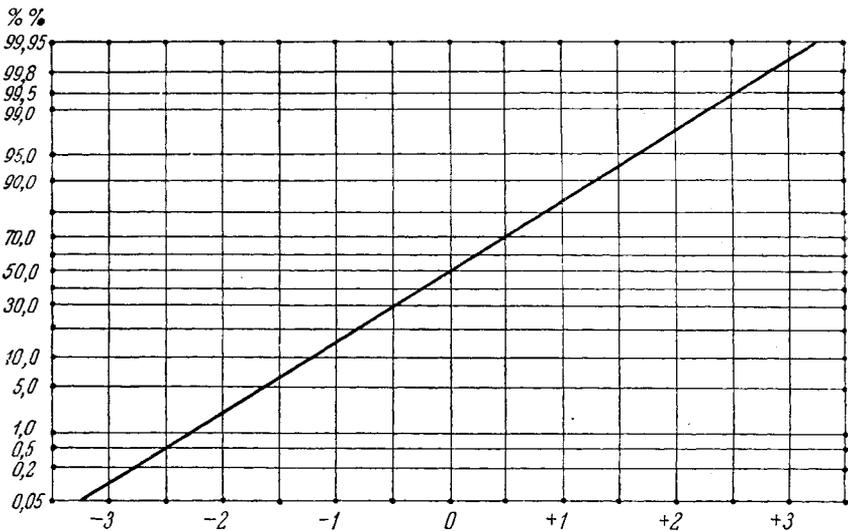
На плоскости (x, a) функция $u(x)$ изобразится в этом случае прямой, проходящей через точку $(a; 0)$ и имеющей угловой коэффициент $\frac{1}{\sigma}$.

Предположим теперь, что мы имеем в распоряжении s точек $(x_1; F_1)$, $(x_2; F_2)$, ..., $(x_s; F_s)$, где F_1, F_2, \dots, F_s — значения неизвестной функции распределения $F(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_s . Для того чтобы проверить, принадлежит ли $F(x)$ к нормальному типу, мы можем для каждого F_i определить соответствующее значение функции $u(x_i) = u_i$, пользуясь уравнением

$$F_i = N[u(x_i)],$$

и затем построить точки $(x_i; u_i)$ плоскости $(x; u)$. Если эти точки окажутся лежащими на некоторой прямой, то гипотеза нормальности подтвердится.

Для упрощения процедуры вместо того, чтобы наносить точки $(x_i; u_i)$, иногда строят чертеж непосредственно, нанося точки $(x_i; F_i)$, но используя



Черт. 89. График нормальной функции распределения на «вероятностной бумаге».

при этом специальную сетку с функциональной шкалой, выбранной таким образом, что график нормального закона изображается в этой сети прямой линией (черт. 89)¹⁾.

Заметим еще, что если мы знаем две пары значений $(x_1; u_1)$ и $(x_2; u_2)$, то a и σ могут быть найдены из уравнений

$$a + u_1\sigma = x_1,$$

$$a + u_2\sigma = x_2,$$

откуда

$$a = x_1 - u_1\sigma = x_2 - u_2\sigma \quad \text{и} \quad \sigma = \frac{x_1 - x_2}{u_1 - u_2}.$$

В случае, когда в нашем распоряжении имеются только выборочные данные, для проверки гипотезы мы используем вместо функции $F(x)$ ее эмпирическое приближение $\bar{F}(x)$. Эта последняя функция, как известно, представляет

¹⁾ Здесь использован один из обычных приемов номографии (см., например, Д. Л. Гавр, Основы номографии с примерами из машиностроения, М.—Л., 1949).

лестничную (ступенчатую) кривую, которая в каждой точке $x = x_i$, представляющей один из членов вариационного ряда

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n,$$

скачком переходит от значения $\frac{i-1}{n}$ к значению $\frac{i}{n}$. Условно мы будем считать, что ее значение в данной точке равно:

$$\bar{F}(x_i) = \frac{i - \frac{1}{2}}{n} = \tilde{F}_i, \quad (6.6.1)$$

Определим теперь значение \tilde{u}_i из уравнения $N(\tilde{u}_i) = \tilde{F}_i$ и рассмотрим множество точек $(x_i; \tilde{u}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) плоскости $(x; u)$. Для большого n мы имеем право считать \tilde{F}_i некоторой оценкой вероятности $F(x_i)$, и потому точки $(x_i; \tilde{u}_i)$ должны быть близки к соответствующим точкам $(x_i; u_i)$. Если последние точки лежат на одной прямой $u = \frac{x-a}{s}$, то точки $(x_i; \tilde{u}_i)$ уклонятся от этой прямой только под действием случая.

Таким образом, приближенную прямолинейность в расположении точек $(x_i; \tilde{u}_i)$ и в этом случае можно считать признаком нормальности распределения генеральной совокупности. В качестве прямой, которая отвечает теоретическому нормальному закону, можно взять прямую

$$u = \frac{x - \bar{x}}{s},$$

получаемую заменой параметров a и s их оценками по выборке \bar{x} и \bar{s} .

В качестве меры уклонения нормально распределенной $n(\tilde{u}_i; u_i, \sigma_{\tilde{u}_i}^2)$ эмпирически наблюдаемой ординаты \tilde{u}_i от теоретически рассчитываемой (в предположении нормального закона) величины

$$u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s} \quad (6.6.2)$$

можно использовать среднюю квадратическую:

$$\sigma_{\tilde{u}_i}^2 \approx \frac{1}{g(u_i)} \sqrt{\frac{N(u_i)N(-u_i)}{n}} = \frac{1}{g(u_i)} \sqrt{\frac{[0,5 + \Phi(u_i)][0,5 - \Phi(u_i)]}{n}}, \quad (6.6.3)$$

где $\Phi(u_i)$ — функция Лапласа, берущаяся по табл. IV приложений, и $g(u_i)$ — приближенное значение нормальной плотности, берущейся по табл. III приложений.

Эта формула обнаруживает, что точность приближения сильно уменьшается от центра распределения к концам его, что связано с быстрым приближением к нулю функции $g(u)$ при возрастании $|u|$. Следовательно, на краях распределения следует ожидать значительно худшего согласия между эмпирическими данными и вычисленными на основании гипотезы нормальности значениями функции u_i .

Оценка гипотезы нормальности производится с помощью сопоставления нормированных уклонений $\frac{\tilde{u}_i - u_i}{\sigma_{\tilde{u}_i}}$ с уклонениями, отвечающими при нормальном законе надлежащим образом выбранному уровню значимости (см. табл. VII приложений). Следует отметить, что этот прием в теоретическом отношении нуждается в ряде уточнений.

При проведении сравнения по описанному методу наибольшие затруднения представляет вычисление значений величины \tilde{u}_i . Для облегчения этой операции составлены специальные таблицы, в которых приводятся для данных значений p или $100p$ корни уравнения $p = N(u_p)$, т. е. квантили нормального распределения.

В табл. XXII приложений для аргумента $100p$ (от 0 до 99,99) табулированы значения $Z_p = u_p + 5$. Прибавление 5 дает возможность помещать в таблице только положительные значения Z_p .

При отсутствии таблиц квантилей нормального распределения значения \tilde{u}_i можно найти по табл. IV функций Лапласа из уравнения

$$\Phi(\tilde{u}_i) = \tilde{F}_i - 0,5, \quad (6.6.4)$$

где $\Phi(\tilde{u}_i)$ — функция Лапласа. Рассмотрим пример.

Пример 6.6.1. Пусть требуется произвести проверку гипотезы нормальности распределения обрабатываемых на токарном автомате валиков по выборке объема $n = 50$ (выборочные данные приводятся в графе 2 табл. 6.6.1), если $\bar{x} = 4,16$ мк и $\bar{s} = 9,81$ мк.

Производим сначала вычисления \tilde{F}_i , $\tilde{u}_i + 5$ и $u_i = \frac{x - \bar{x}}{\bar{s}}$ и сведем результаты их в табл. 6.6.1.

В этой таблице в графы 1 и 2 занесены исходные данные, расположенные в порядке возрастания x_i , т. е. вариационный ряд. В графе 3 проставляем квадраты значений x_i , необходимые для подсчета оценки $\bar{s} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} s$ среднего квадратического отклонения. Данные для графы 4 — значения эмпирической функции распределения — подсчитываем по формуле (6.6.1), умножая результат на 100. Так, в частности,

$$\tilde{F}_1 = 100 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}}{50} = 1, \quad \tilde{F}_2 = 100 \cdot \frac{2 - \frac{1}{2}}{50} = 3 \text{ и т. д.}$$

В графе 5 проставляем данные из табл. XXII приложений, а в графе 6 — те же значения за вычетом 5. При отсутствии табл. XXII квантилей нормального распределения мы заполняем непосредственно графу 6, пользуясь табл. IV приложений и формулой (6.6.4).

Так, например, $\Phi(\tilde{u}_1) = 0,01 - 0,5 = -0,49$; по табл. IV приложений для значения $\Phi(0,49)$ находим $\tilde{u}_1 = -2,33$; $\Phi(\tilde{u}_{45}) = +0,89 - 0,5 = 0,39$, откуда по табл. IV $\tilde{u}_{45} = 1,23$.

Данные для графы 7 подсчитываем по формуле (6.6.2). Так, например,

$$u_1 = \frac{-20 - 4,16}{9,81} = -2,46, \quad u_{45} = \frac{17 - 4,16}{9,81} = 1,31$$

и т. д. В графе 8 проставляем абсолютную величину разности $|\tilde{u}_i - u_i|$. Так, например,

$$|\tilde{u}_1 - u_1| = |-2,33 - (-2,46)| = 0,13,$$

$$|\tilde{u}_{45} - u_{45}| = |1,23 - 1,31| = 0,08$$

и т. д.

Учитывая формулу (6.6.3), мы, просматривая графу 8, отмечаем такие отклонения $|u_i - \tilde{u}_i|$, относительные значения которых (в долях $\sigma_{\tilde{u}_i}$) являются наибольшими.

Таковыми отклонениями оказались отклонения \tilde{u}_{15} , \tilde{u}_{23} и \tilde{u}_{50} . Для этих значений мы по формуле (6.6.3) подсчитываем оценки средних квадратических

Таблица 6.6.1

№ по пор. i	x_i	x_i^2	$100 \frac{i - \frac{1}{2}}{n} = \bar{F}_i \cdot 100$	$\tilde{u}_i + 5$	\tilde{u}_i	$u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$	$ \tilde{u}_i - u_i $	$\frac{ \tilde{u}_i - u_i }{\sigma_{\tilde{u}_i}}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	—20,0	400	1	2,67	—2,33	—2,46	0,13	
2	—17,0	289	3	3,12	—1,88	—2,16	0,28	
3	—14,0	196	5	3,36	—1,64	—1,89	0,25	
4	—11,5	132,25	7	3,52	—1,48	—1,60	0,12	0,41
5	—10,5	110,25	9	3,66	—1,34	—1,49	0,15	
6	—9,0	81	11	3,77	—1,23	—1,37	0,14	
7	—8,0	64	13	3,87	—1,13	—1,24	0,11	
8	—6,5	42,25	15	3,96	—1,04	—1,09	0,05	
9	—5,5	30,25	17	4,05	—0,95	—0,98	0,03	
10	—4,0	16	19	4,12	—0,88	—0,83	0,05	
11	—3,0	9	21	4,19	—0,81	—0,73	0,08	
12	—1,5	2,25	23	4,26	—0,74	—0,58	0,16	
13	—1,0	1	25	4,33	—0,67	—0,53	0,14	
14	0,0	0,0	27	4,39	—0,61	—0,42	0,19	
15	0,5	0,25	29	4,45	—0,55	—0,37	0,18	0,99
16	0,5	0,25	31	4,50	—0,50	—0,37	0,13	
17	1,0	1	33	4,56	—0,44	—0,32	0,12	
18	1,5	2,25	35	4,62	—0,38	—0,27	0,11	
19	2,0	4	37	4,67	—0,33	—0,22	0,11	
20	2,0	4	39	4,72	—0,28	—0,22	0,06	
21	2,5	6,25	41	4,77	—0,23	—0,17	0,06	
22	3,5	12,25	43	4,82	—0,18	—0,07	0,11	
23	4,0	16	45	4,87	—0,13	—0,016	0,11	0,62
24	4,0	16	47	4,92	—0,08	—0,016	0,06	
25	4,5	20,25	49	4,98	—0,02	0,035	0,05	
26	5,0	25	51	5,02	0,02	0,09	0,07	
27	5,0	25	53	5,08	0,08	0,09	0,01	
28	6,0	36	55	5,13	0,13	0,19	0,06	
29	6,5	42,25	57	5,18	0,18	0,24	0,06	
30	7,0	49	59	5,23	0,23	0,29	0,06	
31	7,0	49	61	5,28	0,28	0,29	0,01	
32	7,5	56,25	63	5,33	0,33	0,34	0,01	
33	7,5	56,25	65	5,38	0,38	0,34	0,04	
34	8,5	72,25	67	5,44	0,44	0,44	0,00	
35	8,5	72,25	69	5,50	0,50	0,44	0,06	
36	9,5	90,25	71	5,55	0,55	0,54	0,01	
37	10,0	100	73	5,61	0,61	0,60	0,01	
38	10,5	110,25	75	5,67	0,67	0,65	0,02	
39	11,0	121	77	5,74	0,74	0,70	0,04	
40	12,0	144	79	5,81	0,81	0,80	0,01	
41	12,5	156,25	81	5,88	0,88	0,85	0,03	
42	13,0	169	83	5,95	0,95	0,90	0,05	
43	14,0	196	85	6,04	1,04	1,00	0,04	
44	14,5	210,25	87	6,13	1,13	1,05	0,08	
45	17,0	289	89	6,23	1,23	1,31	0,08	
46	18,0	324	91	6,34	1,34	1,41	0,07	
47	19,0	361	93	6,48	1,48	1,51	0,03	
48	19,5	380,25	95	6,64	1,64	1,56	0,08	
49	21,0	441	97	6,88	1,88	1,72	0,16	
50	23,5	552,25	99	7,33	2,33	1,97	0,36	0,95
Сумма	208,0	5583,5						

отклонений и в графе 9 проставляем относительные значения полученных нами отклонений. Так, например,

$$\sigma_{u_{50}} \approx \frac{1}{0,0573} \sqrt{\frac{(0,5 + 0,4756) \cdot (0,5 - 0,4756)}{50}} = 0,381;$$

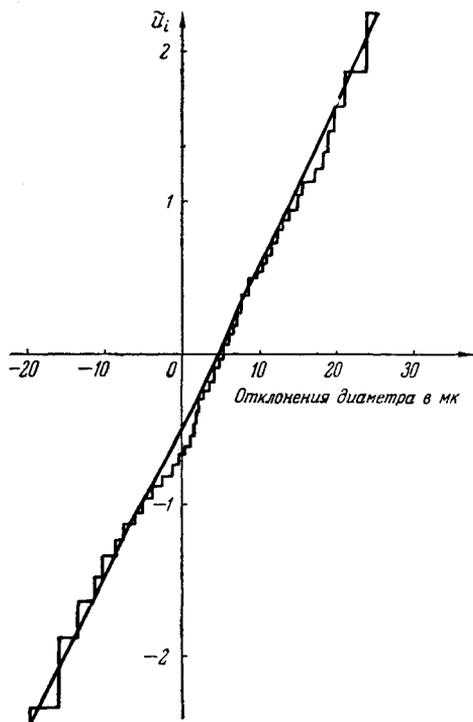
здесь 0,0573 представляет значение (взятое по табл. III приложений) нормальной плотности, отвечающее $u_{50} = 1,97$, а 0,4756 есть значение функции Лапласа (взятое по табл. IV приложений), отвечающее тому же значению $u_i = +1,97$;

$$\sigma_{\tilde{u}_{23}} = \frac{1}{0,3989} \sqrt{\frac{(0,5 - 0,0064) \cdot (0,5 + 0,0064)}{50}} = 0,177;$$

отсюда относительные отклонения будут равны:

$$\frac{|\tilde{u}_{50} - u_{50}|}{\sigma_{\tilde{u}_4}} = \frac{0,36}{0,381} = 0,95, \quad \frac{|\tilde{u}_{23} - u_{23}|}{\sigma_{\tilde{u}_{23}}} = \frac{0,11}{0,177} = 0,62.$$

Для наглядности построим выпрямленную диаграмму для нашего случая, совмещенную с теоретической наклонной прямой (черт. 90). Здесь ординаты ступенчатой кривой представляют значения \tilde{u}_i , приведенные в графе 6 вышеупомянутой таблицы. Абсциссами являются отклонения диаметра в микронах. Теоретическая прямая проведена через точку $(4,16; -0)$ с угловым коэффициентом $\frac{1}{9,81} = 0,102$.



Черт. 90. Выпрямленная диаграмма распределения 50 валков по наружным диаметрам.

Напомним, что $\bar{x} = 4,16$ и $\bar{s} = 9,81$.

Мы видим, что самое большое относительное отклонение, проставленное в графе 8, не превышает 0,99, а это значит (см. табл. VIII приложений), что при уровне значимости 0,05, 0,10 и даже 0,15 полученные нами отклонения могут вполне оказаться случайными. Таким образом, мы приходим к заключению, что гипотеза нормальности в нашем примере не противоречит выборочным данным.

Мы рассматривали до сих пор случай, когда сравнению с теоретической прямой подвергаются несгруппированные по интервалам данные. Когда же мы располагаем данными, сведенными в интервалы (разряды), или же сами прибегаем к группировке в силу большого числа наблюдений, то операцию проверки гипотезы нормальности проводим в следующем порядке.

Отмечаем правые границы интервалов $t_i + \frac{\Delta t}{2}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) и подсчитываем накопленные частоты H_i по последовательным интервалам. Каждой точке $t_i + \frac{\Delta t}{2}$ ставим в соответствие надлежащие частоты

$$H_i = \sum_{j < i} \frac{h_j}{n}, \quad (6.6.5)$$

а затем для каждой частоты H_i определяем соответствующий \tilde{u}_i (или $\tilde{u}_i + 5$), определяя их из уравнения

$$\Phi(\tilde{u}_i) = H_i - 0,5, \quad (6.6.6)$$

аналогично уравнению (6.6.4).

В остальной части процедура проверки гипотезы остается прежней.

Рассмотрим еще один пример.

Пример 6.6.2. Пусть требуется проверить гипотезу нормальности по сгруппированным в интервалы данным примера 5.2.2, если известно, что $\bar{x} = 4,3$ мк и $s = 9,73$ мк.

Пользуясь уже полученными в примерах 5.2.2, 5.2.6 и 6.4.2 результатами, составляем нижеследующую таблицу (табл. 6.6.2):

Таблица 6.6.2

№ интервалов по порядку	Границы интервалов	Частоты в интервалах ν_i	Накопления частоты H_i	\tilde{u}_i	$u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$	$ \tilde{u}_i - u_i $	$\frac{ \tilde{u}_i - u_i }{\sigma_{\tilde{u}_i}}$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	$-\infty \div -15$	7	0,035	-1,81	-1,98	0,17	0,89
2	$-15 \div -10$	11	0,090	-1,34	-1,47	0,10	
3	$-10 \div -5$	15	0,165	-0,97	-0,96	0,01	
4	$-5 \div 0$	24	0,285	-0,57	-0,44	0,13	1,41
5	$0 \div 5$	49	0,530	0,08	0,07	0,01	
6	$5 \div 10$	41	0,735	0,63	0,59	0,04	
7	$10 \div 15$	26	0,865	1,10	1,10	0,00	
8	$15 \div 20$	17	0,950	1,64	1,61	0,03	
9	$20 \div 25$	7	0,985	2,17	2,13	0,04	
10	$25 \div \infty$	3	1,000	$+\infty$	2,64		
Σ		200					

В этой таблице в графах 1, 2 и 3 проставлены данные, взятые из таблицы примера 6.4.2. В графу 4 заносим накопленные частоты, подсчитанные по формуле (6.6.5). Так, например,

$$H_3 = \frac{7 + 11 + 15}{200} = 0,165.$$

В графу 5 заносим нормальные уклонения \tilde{u}_i , отвечающие накопленным частотам H_i и подсчитываемые по формуле (6.6.6). Так, например,

$$\Phi(\tilde{u}_3) = 0,165 - 0,5 = -0,335,$$

откуда по табл. IV приложений находим, что $\tilde{u}_3 = -0,97$. В графу 6 заносим нормальные уклонения u_i , отвечающие концам интервалов, вычисляемые по формуле (6.6.2). Так, например,

$$u_3 = \frac{-5 - 4,3}{9,73} = -0,96.$$

В графу 7 заносим абсолютные значения уклонений $|\tilde{u}_i - u_i|$. Просматривая графу 7 и учитывая формулу (6.6.3), замечаем, что наибольшие относительные значения абсолютных уклонений отвечают интервалам 1 и 4. Вычисляем для этих интервалов $\sigma_{\tilde{u}_i}$ по формуле (6.6.3):

$$\sigma_{\tilde{u}_1} = \frac{1}{0,0562} \sqrt{\frac{(0,5 - 0,4761) \cdot (0,5 + 0,4761)}{200}} = 0,19,$$

$$\sigma_{\tilde{u}_4} = \frac{1}{0,3621} \sqrt{\frac{(0,5 - 0,17) \cdot (0,5 + 0,17)}{200}} = 0,092.$$

Определяем теперь относительные величины полученных нами уклонений:

$$\frac{|\tilde{u}_1 - u_1|}{\sigma_{\tilde{u}_1}} = \frac{0,17}{0,19} = 0,89,$$

$$\frac{|\tilde{u}_4 - u_4|}{\sigma_{\tilde{u}_4}} = \frac{0,13}{0,092} = 1,41.$$

Пользуясь табл. VII приложений, легко установить, что наибольшее из этих уклонений отвечает вероятности $p = 0,8214$. Таким образом, с уровнем значимости, большим 0,05 и даже большим 0,075, мы заключаем, что гипотеза нормальности распределения в нашем примере не противоречит данным наблюдения.

6.6.2. Проверка гипотезы нормальности по совокупности малых выборок.

Мы рассматривали вопрос о соответствии данной выборки нормальному распределению, предполагая его полностью определенным, т. е. с определенными значениями параметров. В некоторых случаях на практике вопрос о принадлежности данной совокупности к нормальному типу ставится в другой форме.

Допустим, что мы имеем достаточно большое число выборок, независимых между собой и одного и того же объема. Мы хотим проверить гипотезу нормальности генеральных совокупностей, из которых взяты эти выборки, не предполагая, что параметры этих совокупностей имеют тождественное значение во всех выборках без исключения. Другими словами, мы предполагаем устойчивой лишь форму распределения, а именно предполагаем ее нормальной, не делая никаких допущений относительно центров и дисперсий генеральных совокупностей. В данном случае проверка нашей гипотезы может быть основана на следующем интересном факте.

Рассмотрим уклонение

$$\tau = \frac{x_i^{(j)} - \bar{x}^{(j)}}{s^{(j)}} \quad (6.6.7)$$

какого-либо наудачу взятого наблюдения $x_i^{(j)}$ j -й выборки от соответствующей средней арифметической $\bar{x}^{(j)}$, нормированного оценкой $s^{(j)}$ среднего квадратического отклонения по той же выборке. Оказывается, что распределение величины τ не зависит совсем от параметров нормальной совокупности, а только от объема n выборок.

Плотность величины τ ¹⁾ равна:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_\tau(x) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \left(1 - \frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} \text{ при } |x| < \sqrt{n-1}, \\ \varphi_\tau(x) &= 0 \text{ при } |x| \geq \sqrt{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (6.6.8)$$

Отсюда следует, например, при $n = 4$, что распределение эмпирических уклонений в выборках по 4 единицы имеет равномерное распределение, если исходные совокупности нормальны, хотя, быть может, имеют разные центры и дисперсии. Этим обстоятельством можно воспользоваться для проверки нашей гипотезы, когда число выборок достаточно велико.

При $n \neq 4$ плотность величины τ не будет удобной для пользования при проверке гипотезы нормальности ввиду отсутствия надлежащих таблиц. Поэтому в этих случаях приходится переходить от нее к величине

$$\eta = \frac{\tau \sqrt{n-2}}{\sqrt{n-1-\tau^2}}. \quad (6.6.9)$$

Можно доказать, что величина η при нормальных исходных распределениях следует закону (5.4.33) Стьюдента с $n-2$ степенями свободы, различные данные для которого приводятся в табл. XVI, XVII и XVIII приложений.

Пользование величиной (6.6.9) делает процедуру проверки значительно более громоздкой, в силу чего следовало бы табулировать значения F_i по формуле (6.6.8) при различных значениях n .

После перехода к величинам τ или η задача проверки гипотезы нормальности приобретает непараметрический характер, ввиду чего для ее решения естественно воспользоваться законом распределения Колмогорова. Следует, однако, иметь в виду, что при нахождении значений λ в этом случае можно пользоваться краткой табличкой, приведен-

1) См. Г. Крамер, Математические методы статистики, стр. 426.

ной в 5.4.9 только при числе выборок $m \geq 40$; при меньшем же числе выборок следует применять более подробную табл. XXIII приложений.

Процедура проверки гипотезы по большому числу малых выборок сводится к следующему.

Из каждой выборки берем наудачу по одному значению. Если выборки представляют, например, временные «пробы», взятые из текущей продукции станка, то можно из каждой пробы взять по одному, первому (или последнему) по времени порядковому наблюдению. Порядок отбора здесь не играет существенной роли; важно лишь то, чтобы отбор одного наблюдения из данной пробы производился без какого бы то ни было учета значения $x_i^{(j)}$ данного i -го наблюдения j -й пробы. Если в каждой выборке число наблюдений (оно должно быть одинаковым для всех данных выборок) велико, например более 10, то может быть сделана не одна, а две или даже три (при больших n_j) самостоятельных проверки гипотезы, например, по первым и по последним экземплярам каждой пробы.

Далее, если $n = 4$, для каждого отобранного значения вычисляется по формуле (6.6.7) показатель τ ; если же $n \neq 4$, то вычисляется по формуле (6.6.9) показатель η . Потом полученные значения τ или η располагаются в вариационный ряд и для каждого значения подсчитывается эмпирическая функция \bar{F}_j распределения по формуле (6.6.1). Для каждой из этих точек вычисляется, кроме того, теоретическая функция распределения F_j , причем при $n = 4$ для этого используется закон (3.1.15) равной вероятности, а при $n \neq 4$ — таблицы закона (5.4.33) распределения Стьюдента.

Сравнивая \bar{F}_j с F_j , мы находим величину наибольшей разности

$$D_m = \max |\bar{F}_j - F_j|.$$

Теперь для уровня значимости $q = 1 - \alpha$ критическая область для проверки нашей гипотезы определится неравенством

$$D_m > \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{m}}, \quad (6.6.10)$$

где m — число выборок.

Попадание наблюдаемого значения D_m в критическую область следует рассматривать как несогласие проверяемой гипотезы с данными опыта, и гипотезу в этом случае полагается браковать.

Пример 6.6.3. Пусть мы имеем 40 «проб» по 4 штамповки в каждой из текущей продукции горизонтально-ковочной машины, причем мы не можем быть уверенными, что центр рассеивания и дисперсия за период отбора всех 40 «проб» оставались постоянными. Требуется проверить гипотезу о том, что распределение штамповок по высоте *по своей форме* является нормальным. Берем из каждой пробы по одной штамповке (первую по времени изготовления) и вычисляем для каждого из 40 значений показатель τ . Результаты вычислений сводим в табл. 6.6.3.

Таблица 6.6.3

№ проб в порядке отбора	Наблюдённые значения в порядке произведённых наблюдений				\bar{x}	s	$x_1 - \bar{x}$	$\tau = \frac{x_1 - \bar{x}}{s}$
	x_1	x_2	x_3	x_4				
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,55	0,13	0,21	—0,20	0,172	0,308	0,378	1,23
2	0,98	0,52	0,10	0,42	0,505	0,364	0,475	1,30
3	0,68	—0,13	0,42	0,29	0,315	0,338	0,365	1,08
4	0,18	0,72	0,32	0,27	0,372	0,240	—0,192	—0,800
5	0,24	0,08	—0,68	0,21	—0,038	0,433	0,278	0,642
6	0,43	0,26	0,86	0,78	0,582	0,286	—0,152	—0,531
7	0,19	0,97	0,73	0,63	0,630	0,326	—0,440	—1,35
8	—0,21	0,07	0,82	1,03	0,428	0,591	—0,638	—1,08
9	0,02	—0,91	1,17	0,59	0,218	0,886	—0,198	—0,223
10	0,00	—0,30	0,56	0,51	0,192	0,415	—0,192	—0,463
11	0,23	0,04	—0,14	0,29	0,105	0,195	0,125	0,641
12	0,03	0,32	0,49	0,04	0,220	0,225	—0,190	—0,844
13	0,69	—0,99	0,27	0,23	0,050	0,726	0,640	0,882
14	0,04	0,41	0,01	—0,18	0,070	0,247	—0,030	—0,121
15	0,64	0,06	0,35	—0,11	0,235	0,330	0,405	1,23
16	0,57	0,31	0,26	0,20	0,335	0,163	0,235	1,44

Продолжение

№ проб в порядке отбора	Наблюдаемые значения в порядке произведенных наблюдений				\bar{x}	\bar{s}	$x_1 - \bar{x}$	$\tau = \frac{x_1 - \bar{x}}{\bar{s}}$
	x_1	x_2	x_3	x_4				
1	2	3	4	5	6	7	8	9
17	-0,19	0,38	0,58	0,18	0,238	0,328	-0,428	-1,30
18	0,35	0,27	0,24	0,18	0,260	0,071	0,090	1,27
19	0,11	0,54	0,01	0,23	0,222	0,231	-0,112	-0,485
20	0,43	0,77	0,28	0,39	0,468	0,210	-0,038	-0,181
21	0,11	0,01	-0,12	0,10	0,025	0,107	0,085	0,794
22	0,54	0,31	-0,18	-0,36	0,078	0,418	0,462	1,11
23	0,36	-1,31	-1,31	-0,21	-0,618	0,832	0,978	1,18
24	0,16	-0,38	0,68	-0,07	0,098	0,447	0,062	0,139
25	0,90	1,58	0,65	1,36	1,122	0,436	-0,222	-0,509
26	1,57	0,82	1,65	1,63	1,418	0,397	0,152	0,383
27	1,35	1,81	1,13	1,41	1,425	0,283	-0,075	-0,265
28	1,19	1,13	1,08	1,35	1,188	0,110	0,002	0,018
29	0,87	1,46	1,18	1,54	1,262	0,306	-0,392	-1,28
30	0,92	1,42	1,14	1,49	1,242	0,266	-0,322	-1,21
31	0,92	1,36	1,43	1,04	1,188	0,243	-0,268	-1,10
32	0,02	0,64	0,08	-0,40	0,085	0,427	-0,065	-0,152
33	0,66	-0,26	0,63	-0,09	0,235	0,479	0,425	0,887
34	-0,12	0,40	0,40	0,75	0,358	0,358	-0,478	-1,33
35	0,05	-0,05	0,20	0,40	0,150	0,196	-0,100	-0,510
36	0,90	-0,18	-0,22	0,36	0,215	0,528	0,685	1,30
37	-0,35	0,43	0,42	0,05	0,138	0,370	-0,488	-1,32
38	0,64	0,95	0,25	0,71	0,638	0,289	0,002	0,007
39	0,32	0,79	0,40	0,66	0,542	0,219	-0,222	-1,01
40	1,40	0,30	0,27	0,60	0,642	0,527	0,758	1,44

В графы 1, 2, 3, 4 и 5 этой таблицы внесены данные о 40 «пробах» по 4 штамповки каждая, причем в графах 2—5 записаны отклонения в миллиметрах высоты штамповок (расположенных в каждой из проб в порядке изготовления) от среднего допускаемого размера. В графах 6 и 7 записаны средние арифметические \bar{x} и оценки \bar{s} средних квадратических отклонений по пробам, вычисленные согласно (5.3.61). В графе 9 указаны значения показателя τ , вычисленные по первому из наблюдаемых значений каждой пробы по формуле (6.6.7).

Так, например, для первой пробы получим:

$$\tau_1 = \frac{0,55 - 0,172}{0,308} = 1,23.$$

Далее, полученные значения τ располагаем в вариационный ряд и вычисляем для каждой точки значение эмпирической функции распределения \bar{F}_j и теоретической функции F_j , с целью нахождения наибольшей по абсолютной величине разности между последними.

Наши вычисления сводим в табл. 6.6.4.

Таблица 6.6.4

№ в порядке возрастания	τ_j	\bar{F}_j	F_j	$ \bar{F}_j - F_j $	№ в порядке возрастания	τ_j	\bar{F}_j	F_j	$ \bar{F}_j - F_j $
1	-1,35	0,012	0,110	0,098	6	-1,21	0,138	0,115	0,023
2	-1,33	0,038	0,116	0,078	7	-1,10	0,162	0,182	0,020
3	-1,32	0,062	0,119	0,057	8	-1,08	0,188	0,188	0,000
4	-1,30	0,088	0,124	0,036	9	-1,01	0,212	0,208	0,004
5	-1,28	0,112	0,130	0,018	10	-0,844	0,238	0,256	0,018

Продолжение

№ в порядке возрастания	τ_j	\bar{F}_j	F_j	$ \bar{F}_j - F_j $	№ в порядке возрастания	τ_j	\bar{F}_j	F_j	$ \bar{F}_j - F_j $
11	-0,800	0,262	0,269	0,007	26	0,641	0,638	0,685	0,047
12	-0,531	0,288	0,347	0,059	27	0,642	0,662	0,686	0,024
13	-0,510	0,312	0,353	0,041	28	0,794	0,688	0,729	0,041
14	-0,509	0,338	0,353	0,015	29	0,882	0,712	0,755	0,043
15	-0,485	0,362	0,360	0,002	30	0,887	0,738	0,756	0,018
16	-0,463	0,388	0,366	0,022	31	1,08	0,762	0,812	0,050
17	-0,265	0,412	0,423	0,011	32	1,11	0,788	0,821	0,033
18	-0,223	0,438	0,436	0,002	33	1,18	0,812	0,841	0,029
19	-0,181	0,462	0,448	0,014	34	1,23	0,838	0,855	0,017
20	-0,152	0,488	0,456	0,032	35	1,23	0,862	0,855	0,007
21	-0,121	0,512	0,465	0,047	36	1,27	0,888	0,867	0,021
22	+0,007	0,538	0,502	0,036	37	1,30	0,912	0,876	0,036
23	0,018	0,562	0,505	0,057	38	1,30	0,938	0,876	0,062
24	0,139	0,588	0,540	0,048	39	1,44	0,962	0,916	0,046
25	0,383	0,612	0,611	0,001	40	1,44	0,988	0,916	0,072

В графе 2 этой таблицы мы расположили вычисленные с помощью предыдущей таблицы показатели τ для каждой пробы в порядке возрастания их значений так, что если для первой пробы $\tau_1 = 1,23$, то теперь это значение оказалось на тридцать четвертом месте, а на первое место мы поместили $\tau_7 = -1,350$, получившееся в седьмой по порядку отбора пробе. В графе 3 мы поместили значения эмпирической функции распределения, полученные по формуле (6.6.1). Так, например, для 34-го по порядку значения мы имеем:

$$\bar{F}_{34} = \frac{34 - \frac{1}{2}}{40} = 0,838.$$

В графу 4 мы внесли теоретические значения функции распределения F_j для соответствующих значений величины τ , распределенной, как мы уже говорили, по закону равной вероятности. Из формулы (6.6.8) следует, что при $n = 4$

$$\varphi_{\tau}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{3\pi} \Gamma(1)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0,289$$

при $|x| < \sqrt{3}$.

К такому же результату мы пришли бы, если бы воспользовались формулами (3.4.10) и (3.1.15). Так как

$$F_i = \int_{-\sqrt{3}}^{\tau_i} \varphi_{\tau}(x) dx = [\tau - (-\sqrt{3})] \cdot 0,289,$$

то при $\tau = -1,35$ мы имеем:

$$F_1 = [-1,35 - (-\sqrt{3})] \cdot 0,289 = 0,38 \cdot 0,289 = 0,110,$$

а для $\tau = 1,23$:

$$F_{34} = (1,23 + \sqrt{3}) \cdot 0,289 = 2,96 \cdot 0,289 = 0,855.$$

В графу 5 мы занесли абсолютную величину разности между \bar{F}_j и F_j .

Просматривая графу 5 последней таблицы, мы обнаруживаем, что максимальное абсолютное значение разности отвечает 1-му по порядку значению $\tau_1 = -1,35$.

Выбирая 5%-ный уровень значимости, мы строим критическую область, пользуясь краткой табл. 5.4.4, приведенной в 5.4.9. Критическая область будет в нашем случае определяться неравенством $D_{40} > \frac{\lambda_5}{40} = \frac{1,358}{6,325} = 0,215$.

Полученное нами в наблюдениях значение $D_{40} = 0,098$ располагается в области допустимых значений, причем значительно левее критического предела.

Отсюда следует, что гипотеза нормальности распределения штаповок по высоте не противоречит данным наблюдения.

Пример 6.6.4. Пусть теперь мы располагаем данными об отклонениях высоты штамповок от среднего допускаемого размера по 40 «пробам» численностью в 20 штук каждая, отобранным из текущей продукции горизонтально-ковочной машины. Требуется проверить гипотезу нормальности распределения штамповок, получаемых на данной машине, по высоте. В этом случае мы благодаря значительному объему проб можем сделать по крайней мере три более или менее независимые самостоятельные проверки, например, по первому, десятому и двадцатому экземплярам каждой пробы. Здесь мы ограничимся одной из трех взаимоконтролирующихся проверок, и именно проверкой по десятым экземплярам каждой пробы, но заметим, что трехкратная проверка дает нам весьма высокую, практически 100%-ную, уверенность в результатах проверки в случае их совпадения по сравнению с надежностью однократной проверки, определяющейся, вообще говоря, величиной уровня значимости. Мы ведем наши вычисления совершенно так же, как и в примере 6.6.3, т. е. строим сначала таблицу для подсчета величин τ , но ее мы дополняем еще графами, нужными для подсчета показателя η (табл. 6.6.5).

Таблица 6.6.5

№ проб по порядку отбора	x_{10}	\bar{x}	\bar{s}	$x_{10} - \bar{x}$	$\tau = \frac{x_{10} - \bar{x}}{\bar{s}}$	$\tau \sqrt{n-2}$	τ^2	$n-1-\tau^2$	$\sqrt{n-1-\tau^2}$	$\eta =$
										$\frac{\tau \sqrt{n-2}}{\sqrt{n-1-\tau^2}}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	48	32	24	16	0,667	2,83	0,44	18,56	4,31	0,657
2	82	52	38	30	0,789	3,35	0,62	18,38	4,29	0,781
3	95	45	40	50	1,250	5,30	1,56	17,44	4,18	1,268
4	—19	34	32	—53	—1,656	—7,02	2,74	16,26	4,03	—1,742
5	49	24	37	25	0,676	2,87	0,46	18,54	4,31	0,666
6	43	44	31	—1	—0,032	—0,14	0,00	19,00	4,36	—0,032
7	33	42	31	—9	—0,290	—1,23	0,08	18,92	4,35	—0,283
8	32	43	34	—11	—0,324	—1,37	0,10	18,90	4,35	—0,315
9	11	9	42	2	0,048	0,20	0,00	19,00	4,36	0,046
10	56	21	30	35	1,167	4,95	1,36	17,64	4,20	1,179
11	3	—7	35	10	0,286	1,21	0,08	18,92	4,35	0,278
12	—39	18	45	—57	—1,267	—5,37	1,61	17,39	4,17	—1,288
13	49	16	38	33	0,868	3,68	0,75	18,25	4,27	0,862
14	109	23	40	86	2,150	9,12	4,62	14,38	3,79	2,406
15	24	6	39	18	0,462	1,96	0,21	18,79	4,33	0,453
16	—118	11	46	—129	—2,804	—11,89	7,86	11,14	3,34	—3,560
17	47	2	32	45	1,406	5,96	1,98	17,02	4,13	1,443
18	45	24	31	21	0,677	2,87	0,46	18,54	4,31	0,666
19	28	25	34	3	0,088	0,37	0,01	18,99	4,36	0,085
20	—2	19	32	—21	—0,656	—2,78	0,43	18,57	4,31	—0,645
21	14	12	39	2	0,051	0,22	0,00	19,00	4,36	0,050
22	12	8	32	4	0,125	0,53	0,02	18,98	4,36	0,122
23	—51	—3	52	—48	—0,923	—3,91	0,85	18,15	4,26	—0,918
24	16	6	36	10	0,278	1,18	0,08	18,92	4,35	0,271
25	138	124	26	14	0,538	2,28	0,29	18,71	4,33	0,527
26	120	149	37	—29	—0,784	—3,32	0,61	18,39	4,29	—0,774
27	120	129	41	—9	—0,220	—0,93	0,05	18,95	4,35	—0,214
28	104	120	26	—16	—0,615	—2,61	0,38	18,62	4,32	—0,604
29	121	105	26	16	0,615	2,61	0,38	18,62	4,32	0,604
30	99	110	32	—11	—0,344	—1,46	0,12	18,88	4,35	—0,336
31	123	105	37	18	0,486	2,06	0,24	18,76	4,33	0,476
32	9	23	24	—14	—0,583	—2,47	0,34	18,66	4,32	—0,572
33	0	16	32	—16	—0,500	—2,12	0,25	18,75	4,33	—0,490
34	15	23	29	—8	—0,276	—1,17	0,08	18,92	4,35	—0,269
35	8	9	27	—1	—0,037	—0,16	0,00	19,00	4,36	—0,037
36	25	38	35	—13	—0,371	—1,57	0,14	18,86	4,34	—0,362
37	70	26	33	44	1,333	5,65	1,78	17,22	4,15	1,361
38	32	32	33	0	0	0	0	19,00	4,36	0
39	14	31	28	—17	—0,607	—2,57	0,37	18,63	4,32	—0,595
40	55	15	37	40	1,081	4,58	1,17	17,83	4,22	1,085

В этой таблице графы 1—6 полностью совпадают с графами аналогичной таблицы примера 6.6.3. Графы же 7—11 предназначены исключительно для последовательного вычисления показателя η по формуле (6.6.9). Так, например, для первой по порядку пробы мы подсчитаем:

$$\eta_1 = \frac{0,667\sqrt{20-2}}{\sqrt{20-1-0,667^2}} = \frac{2,83}{\sqrt{19-0,44}} = \frac{2,83}{\sqrt{18,56}} = \frac{2,83}{4,31} = 0,657.$$

Полученные теперь значения показателя η необходимо расположить в вариационный ряд, т. е. записать в порядке их возрастания. Затем нужно для каждой такой точки вычислить \bar{F}_j и F_j и сравнить последние между собой.

Эти вычисления мы опять сводим в табл. 6.6.6.

Таблица 6.6.6

№ в порядке возрастания	η_j	\bar{F}_j	F_j	$ \bar{F}_j - F_j $	№ в порядке возрастания	η_j	\bar{F}_j	F_j	$ \bar{F}_j - F_j $
1	-3,560	0,012	0,001	0,011	21	0,050	0,512	0,520	0,008
2	-1,742	0,038	0,050	0,012	22	0,085	0,538	0,533	0,005
3	-1,288	0,062	0,107	0,045	23	0,122	0,562	0,548	0,014
4	-0,918	0,088	0,186	0,098	24	0,271	0,588	0,605	0,017
5	-0,774	0,112	0,225	0,113	25	0,278	0,612	0,608	0,004
6	-0,645	0,138	0,264	0,126	26	0,453	0,638	0,672	0,034
7	-0,604	0,162	0,277	0,115	27	0,476	0,662	0,680	0,018
8	-0,595	0,188	0,280	0,092	28	0,527	0,688	0,697	0,009
9	-0,572	0,212	0,287	0,075	29	0,604	0,712	0,723	0,011
10	-0,490	0,238	0,315	0,077	30	0,657	0,738	0,740	0,002
11	-0,362	0,262	0,361	0,099	31	0,666	0,762	0,743	0,019
12	-0,336	0,288	0,371	0,083	32	0,666	0,788	0,743	0,045
13	-0,315	0,312	0,378	0,060	33	0,781	0,812	0,777	0,035
14	-0,283	0,338	0,390	0,052	34	0,862	0,838	0,800	0,038
15	-0,269	0,362	0,396	0,034	35	1,085	0,862	0,854	0,008
16	-0,214	0,388	0,417	0,029	36	1,179	0,888	0,873	0,015
17	-0,037	0,412	0,486	0,074	37	1,268	0,912	0,889	0,023
18	-0,032	0,438	0,488	0,050	38	1,361	0,938	0,905	0,033
19	0,000	0,462	0,500	0,038	39	1,443	0,962	0,917	0,045
20	0,046	0,488	0,518	0,030	40	2,406	0,988	0,986	0,002

В этой таблице графы 1—3 заполнены совершенно так же, как в аналогичной таблице примера 6.6.3. В графу 4 внесены значения функции распределения $S_k(t)$ Стьюдента; подсчитанные для соответствующих точек величины η при числе степеней свободы $k = 20 - 2 = 18$ с помощью табл. XVI приложений. Так, например, для $\eta_{12} = -1,742$ мы находим значение функции F_j следующим образом. Из табл. XVI приложений при $k = 18$ для $t = 1,742$, интерполируя, получаем:

$$S_{18}(1,742) = 0,947 + \frac{0,956 - 0,947}{0,10} \cdot 0,042 = 0,950,$$

откуда

$$S_{18}(-1,742) = 1 - 0,950 = 0,050.$$

Для $\eta_{35} = 1,085$ из табл. XVI приложений получаем:

$$S_{18}(1,085) = 0,857 - \frac{0,857 - 0,835}{0,10} \cdot 0,015 = 0,854.$$

Вычисления были бы удобнее при наличии более подробной таблицы значений функции $S_k(t)$.

Просматривая графу 5 составленной нами таблицы, замечаем, что максимальная абсолютная величина разности $|\bar{F}_j - F_j|$ в данном случае равна $D_m = 0,126$ при значении $\eta_6 = -0,645$.

Критический предел для проверки гипотезы нормальности в данном случае при 5%-ном уровне значимости будет тот же, что и в примере 6.6.3, а именно:

$$\frac{\lambda_5}{\sqrt{40}} = 0,215.$$

Полученное нами значение $D_{40} = 0,126$ и в этом случае лежит левее критического предела, что указывает на соответствие произведенным наблюдениям гипотезы нормальности распределения штамповок по высоте.

6.6.3. Приближенная проверка гипотезы нормальности с помощью асимметрии и эксцесса. Для приближенной проверки гипотезы нормальности могут быть использованы эмпирические асимметрия \bar{S}_k (5.2.26) и эксцесс \bar{E}_k (5.2.27). Хотя по ним не представляется возможным сколько-нибудь просто построить доверительные интервалы для теоретических асимметрии S_k (4.3.72) и эксцесса E_k (4.3.73), но степень их точности может быть приближенно оценена по их средним квадратическим отклонениям:

$$\sigma_{\bar{S}_k} = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}, \quad \sigma_{\bar{E}_k} = \sqrt{\frac{24 \cdot n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}}, \quad (6.6.11)$$

где n — объем выборки.

Большие по сравнению с $\sigma_{\bar{S}_k}$ и $\sigma_{\bar{E}_k}$ значения \bar{S}_k и \bar{E}_k , полученные из наблюдений, могут служить основаниями для браковки гипотезы нормальности исследуемого распределения.

Пусть, например, требуется проверить гипотезу нормальности по данным примера 5.2.6. Имеем $\bar{S}_k = -0,12$, $\bar{E}_k = -0,15$ и по (6.6.11)

$$\sigma_{\bar{S}_k} = \sqrt{\frac{6(200-1)}{(200+1)(200+3)}} \approx 0,17, \quad \sigma_{\bar{E}_k} = \sqrt{\frac{24 \cdot 200(200-2)(200-3)}{(200-1)^2(200+3)(200+5)}} \approx 0,4.$$

Мы видим, что \bar{S}_k и \bar{E}_k невелики по сравнению с $\sigma_{\bar{S}_k}$ и $\sigma_{\bar{E}_k}$. Поэтому гипотезу нормальности нельзя считать противоречащей данным наблюдениям.

§ 7. Понятие о мощности критерия проверки гипотезы

В начале этой главы мы изложили простейшие понятия, относящиеся к вопросу о проверке статистических гипотез: понятия критической области и уровня значимости в условиях данного приема испытания. В последующих параграфах мы рассмотрели ряд приемов проверки различных статистических гипотез, основанных на применении специально выбранных критериев, которым отвечали определенные критические области с заданным уровнем значимости. Мы строили эти критерии, исходя из соображений наглядности, но не приводя каких-либо общих теоретических соображений в пользу выбора одного из неограниченного числа возможных критериев. Заметим, что даже в том случае, когда выбрана и указана статистическая характеристика, с помощью которой строится данный критерий, оставался еще довольно значительный произвол в выборе критической области данного уровня значимости. Мы до сих пор не приводили основательных аргументов в пользу выбора той или иной области при проверке данной гипотезы. Мы попытаемся теперь хотя бы отчасти восполнить этот недостаток, вводя ряд новых важных понятий современной статистической теории и поставив самую задачу выбора доверительной области более определенно. Остановимся еще раз на рассмотренном нами в 6.1.1 и 6.2.1 приеме проверки по данным выборки гипотезы H_0 о том, что центр некоторой нормальной совокупности с известной дисперсией σ^2 совпадает с определенной точкой $a = a_0$. Выбрав уровень значимости $q = 5\%$, мы определяем допустимую область неравенством $\left| \frac{\bar{x} - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| < 1,96$ или $a_0 - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < a_0 + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ и соответственно этому

критическую область двумя неравенствами

$$\bar{x} > a_0 + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} < a_0 - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (6.7.1)$$

Если гипотеза H_0 верна и $MX = a = a_0$, то попадание в критическую область (6.7.1) будет наблюдаться в среднем в 5% случаев повторения выборок, производимых в тех же основных условиях. В этом относительно малом проценте случаев мы сделаем ошибочное заключение о гипотезе или, как принято выражаться, допустим *ошибку «первого рода»* — забракуют правильную гипотезу $MX = a_0$. Очевидно, контроль над ошибками этого рода находится в нашей власти: мы можем свести их к ничтожной доле, назначив надлежаще малый уровень значимости. Ясно, что таким же образом мы можем поступать в каждом случае проверки статистической гипотезы.

Но, проверяя гипотезу, мы можем сделать неправильное заключение и другого рода: в случае, когда a имеет на самом деле значение, отличное от a_0 ($a \neq a_0$), мы, проверяя гипотезу H_0 , можем принять ее как справедливую потому, что характеристика, которую мы используем для критерия, случайно окажется в области допустимых значений. Эти ошибки, называемые *ошибками «второго рода»*, будут наблюдаться часто, если вероятность попадания рассматриваемой характеристики в критическую область будет невелика при $a \neq a_0$. Гипотеза $a \neq a_0$ называется *гипотезой, альтернативной к H_0* . В каждом данном случае множество возможных альтернативных гипотез, т. е. допущений, противоречащих проверяемой гипотезе H_0 , определяется самой постановкой вопроса. Так, в случае сравнения продолжительности работы электрических лампочек в партии, изготовленной новым способом, со старой продолжительностью работы естественно предположить в качестве альтернативной гипотезы $a > a_0$, если есть основания считать, что новая технология во всяком случае не может ухудшить качества изделия. Разумный выбор критической области должен контролировать также и ошибки второго рода; очевидно, из двух критических областей (построенных с помощью одной и той же или разных характеристик — в нашем случае, например, при использовании вместо средней арифметической выборочной медианы и т. п.), отвечающих одному и тому же уровню значимости, та будет лучше, при которой вероятность ошибок второго рода будет меньше, т. е. которая лучше обеспечивает правильную браковку гипотезы H_0 , когда на самом деле верна одна из альтернативных гипотез $a \neq a_0$. Назовем *мощностью критерия с данным уровнем значимости в отношении альтернативной гипотезы $MX = a$* величину вероятности $p(a)$ попадания используемого критерия в критическую область при этой гипотезе.

В рассмотренном случае мы имеем:

$$\frac{\bar{x} - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + d, \quad \text{где} \quad d = \frac{a - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Поэтому условная вероятность в предположении $MX = a$ будет:

$$\begin{aligned} p(a) &= P_a \left(\left| \frac{\bar{x} - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| > 1,96 \right) = P_a \left(\left| \frac{\bar{x} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + d \right| > 1,96 \right) = \\ &= P_a \left(\frac{\bar{x} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > 1,96 - d \right) + P_a \left(\frac{\bar{x} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -1,96 - d \right) = \\ &= 1 - \Phi(1,96 - d) + \Phi(-1,96 - d) = 1 - \Phi(1,96 - d) - \Phi(1,96 + d). \end{aligned} \quad (6.7.2)$$

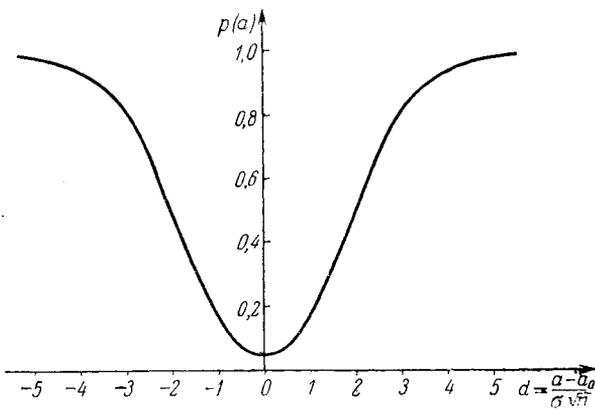
Эта вероятность существенно зависит от того, насколько отличается значение a от a_0 , отвечающего гипотезе H_0 . С увеличением $|d|$ она будет довольно быстро возрастать. Значение $d=0$ отвечает $p(a_0)=0,05$, характеризующее взятый уровень значимости. Кривая мощности нашего критерия изображена на черт. 91. По оси абсцисс здесь отложены значения d , т. е. значения нормированной разности между центром рассеивания и гипотетической точкой a_0 ; по оси ординат отложены вероятности $p(a)$ попадания критерия в критическую область при $\bar{M}X=a$, т. е. мощность данного критерия, вычисленная по формуле (6.7.2). Так, например, при $d=1,0$ мы получим:

$$p(d) = 1 - \Phi(1,96 - 1) - \Phi(1,96 + 1) = 1 - \Phi(0,96) - \Phi(2,96).$$

Беря по табл. IV приложений значения функции Лапласа в точках $Z_1 = 0,96$ и $Z_2 = 2,96$, получаем:

$$p(a) = 1 - 0,3315 - 0,4985 = 0,17.$$

Очевидно, построив кривую мощности, мы получаем уже достаточно детальную оперативную характеристику, оценивающую доброкачественность нашего критерия. Ясно, что чем круче поднимается кривая мощности в обе стороны от точки максимума (если при альтернативных допущениях возможны отклонения



как в ту, так и в другую сторону), тем лучше будет действовать наш критерий, так как тем самым понижается вероятность ошибки второго рода, равная дополнению мощности до единицы. Так, в нашем примере при $d=1,0$ вероятность P_{II} ошибки второго рода равна $P_{II} = 1 - 0,17 = 0,83$.

В некоторых случаях мы можем получить такой критерий, который обладает тем свойством, что его кривая мощности будет заведомо выше в рассматриваемой области, чем кривая мощности любого другого критерия с тем же уровнем значимости. Такого рода критерии называются *равномерно наиболее мощными*.

Ясно, что таким критериям следует отдать предпочтение перед другими. Впрочем, они существуют лишь в очень ограниченном классе задач. Одной из таких задач служит как раз рассмотренная нами задача проверки гипотезы $\bar{M}X = a_0$ при альтернативных допущениях $a > a_0$ (или соответственно $a < a_0$). В этом случае критической областью с уровнем значимости q служит область больших \bar{x}

$$\bar{x} > a_0 + \lambda_q \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{или } \bar{x} < a_0 - \lambda_q \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

и мощность этого критерия выражается формулой

$$p(a) = 0,5 - \Phi(\lambda_q - d), \tag{6.7.3}$$

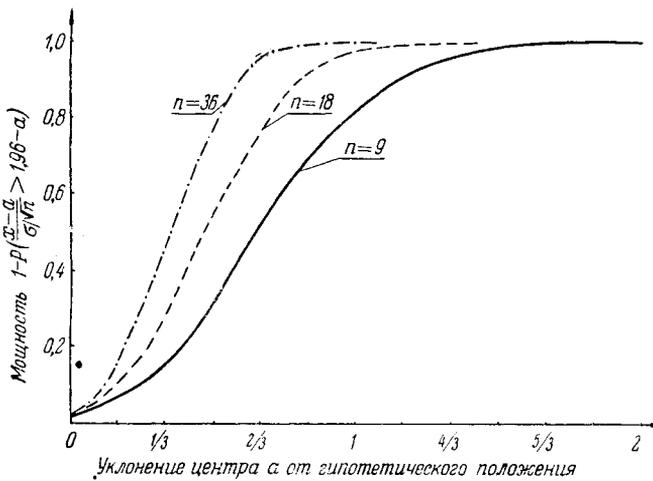
где

$$d = \frac{|a - a_0|}{\sigma / \sqrt{n}}.$$

В случае множества альтернативных гипотез $a \neq a_0$ равномерно наиболее мощного критерия не существует. Мы, например, можем найти критерии с тем же уровнем значимости, кривые мощности которых будут выше, чем кривая мощности рассмотренного нами критерия с двухсторонней критической областью.

Существенно выбирать кривую мощности с таким расчетом, чтобы она гарантировала с достаточной надежностью браковку значений a , которые связаны с заметным понижением качества изделий, ущербом и т. п. Разумеется, значения a , очень близкие к a_0 , практически часто следует считать равноправными с a_0 и вряд ли следует стремиться к тому, чтобы браковать H_0 при малых отклонениях a от a_0 ; этого, кроме того, и нельзя осуществить при малых объемах выборки.

Строя кривые мощности для различных значений объема выборки n , часто можно придать ей желательную форму, т. е. обеспечить браковку опасных значений параметра с надлежащей вероятностью.



Черт. 92. Кривые мощности одностороннего метода с $2,5\%$ -ным уровнем значимости при числе наблюдений $n = 9; 18; 36$.

На черт. 92 приведены три кривые одностороннего критерия с 5% -ным уровнем значимости для трех увеличивающихся значений n . Мы наглядно видим, как увеличивается мощность этого критерия с ростом числа наблюдений.