РЭЛЕЙ

ТЕОРИЯ ЗВУКА


ИЗДАНИЯ ВОЕННЫХ ЛЕТ
ВОЙНА
1941-1945

THE THEORY OF SOUND

BY

JOHN WILLIAM STRUTT, BARON RAYLEIGH, Sc. D., F.R.S.

HONORARY FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE

VOLUME II

SECOND EDITION REVISED AND ENLARGED

MACMILLAN AND CO. LIMITED, ST. MARTIN'S STREET, LONDON

1926

Дж. В. СТРЭТТ (Лорд РЭЛЕЙ)

ТЕОРИЯ ЗВУКА

ТОМ II

ПЕРЕВОД С ТРЕТЬЕГО АНГЛИЙСКОГО ИЗДАНИЯ
П. Н. УСПЕНСКОГО и С. А. КАМЕНЕЦКОГО

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1944 ЛЕНИНГРАД

Редактор *Э. Г. Ананиашвили.*

Подписано к печати 24/XI 1943 г. 29,75 печ. л., 34,7 уч.-авт. л. 46600 тип. зн. в печ. л.
Тираж 5 000 экз. Л 91616. Цена книги 21 руб. Переплет 2 руб. Зак. 132

Отпечатано с матриц 1 Образцовой типогр. Огиза, в типографии Госэнергоиздата.
Москва, Шлюзовая наб., д. 10

СОДЕРЖАНИЕ

Глава XI. **Воздушные колебания** 13

Воздушные колебания. Одинаковость давления во всех направлениях. Уравнения движения. Уравнение непрерывности. Специальная форма для несжимаемой жидкости. Движение в двух измерениях. Функция тока. Симметрия относительно оси. Потенциал скорости. Теорема Лагранжа. Доказательство Стокса. Физическое истолкование. Исследование Томсона. Циркуляция. Уравнение непрерывности для потенциала скорости. Выражение в полярных координатах. Движение несжимаемой жидкости в односвязном пространстве определяется граничными условиями. Распространение на многосвязные пространства. Сферический участок жидкости, совершающий безвихревое движение, внезапно отвердев, не обладал бы вращением. Безвихревое движение обладает наименьшей возможной энергией. Аналогия с теориями теплоты и электричества. Уравнение давления. Общее уравнение звукового движения. Движение в одном измерении. Положительная и отрицательная бегущие волны. Соотношение между скоростью и сжатием. Гармонический тип. Распространяющаяся энергия. Половина энергии — потенциальная и половина — кинетическая. Ньютоновское вычисление скорости звука. Поправка Лапласа. Выражение скорости через отношение теплоемкостей. Опыт Клемана и Дезорма. Вычисление Рэнкина по джаулевскому эквиваленту. Возможный эффект излучения. Исследование Стокса. Быстрое затухание звука. Теплопроводность практически не дает заметного эффекта. Зависимость скорости от температуры. Изменение высоты звука органных труб. Скорость звука в воде. Точное диференциальное уравнение для плоских волн. Приложение к волнам теории установившегося движения. Только в одном предположении относительно закона, связывающего давление и плотность, волна может сохранять свою форму в отсутствии внешней силы. Объяснение изменения типа. Уравнение Пуассона. Соотношение между скоростью и сжатием в прогрессивной волне конечной амплитуды. Трудности, представляемые конечным разрывом. Интегралы Эрншоу. Исследование Римана. Ограниченное начальное возмущение. [Явления второго порядка. Отталкивание резонаторов. Вращательная сила, действующая на подвешенный диск и обусловленная колебаниями. Ребристость в трубках Кундта. Теория Кенига.] Экспериментальные определения скорости звука.

Глава XII. **Колебания в трубах** 58

Колебания в трубах. Общая форма для простого гармонического типа. Узлы и пучности. Условие для открытого конца. В стоячих колебаниях узлы должны повторяться через промежутки $\frac{1}{2}\lambda$. Отражение импульсов у открытого и закрытого концов. Проблема сложных колебаний. Колебание в трубе, обязанное внешнему источнику. Два открытых конца. Бегущая волна, обязанная возмущению у открытого конца. Движение, возникающее в самой трубе. Вынужденные колебания поршня. Опыты Кундта. Резюме результатов. Колебания столба воздуха в органной трубе. Соотношение между длиной волны и длиной трубы. Обертоны. Частота органной трубы зависит от природы газа. Сравнение скоростей звука в различных газах. Изучение колеблющегося столба воздуха с помощью мембран и песка. С помощью пламен Кенига. Кривые трубы. Разветвленные трубы. Условия, которые должны быть удовлетворены в местах соединения труб. Переменное сечение. Приближенное вычисление высоты для труб переменного сечения. Влияние изменения сечения на бегущие волны. Изменение плотности.

Глава XIII. **Специальные проблемы. Отражение и преломление плоских волн** 77

Воздушные колебания в прямоугольной камере. Кубический ящик. Резонанс комнат. Прямоугольная труба. Сложение двух одинаковых цугов волн. Отражение от твердой плоской стены. [Узлы и пучности.] Исследование отражения и преломления плоских волн на плоской поверхности (Грин). Закон синусов. Случай воздуха и воды. Обе среды газообразные. Формулы Френеля. Отражение на поверхности раздела воздуха и водорода. Отражение от теплого воздуха. Эксперименты Тиндаля. Полное отражение. Отражение от пластины конечной толщины. [Отражение от волнистой поверхности. Случай, когда вторая среда непроницаемая.]

Глава XIV. **Общие уравнения** 104

Произвольное начальное возмущение в неограниченной атмосфере. Решение Пуассона. Проверка. Ограниченное начальное возмущение. Случай двух измерений. Вывод решения для непрерывного возобновляемого возмущения. Источники звука. Гармонический тип. Проверка решения. Источники, распределенные по поверхности. Бесконечная плоская стена. Слой двойных источников. Волны в трех измерениях, симметричные относительно точки. Гармонический тип. Волна сжатия или волна разрежения не могут существовать отдельно. Непрерывность у полюса. Начальные условия. Потенциал скорости данного источника. Вычисление испускаемой энергии. Рупор. Теория конических труб. Положение узлов. Сложение колебаний от двух простых источников одинаковой высоты. Интерференция звуков электрически возбуждаемых камертонов. Места молчания. О существовании их часто можно заключить из соображений симметрии. Случай звонка. Экспериментальные методы. Эксперименты Мейера. Звуковые тени. Отверстие в плоском экране. Зоны Френеля. Общее объяснение теней. Наклонный экран. Условия приблизительно полного отраже-

ния. Расходящиеся волны. Изменение интенсивности. Фокусы. Отражение от кривых поверхностей. Эллиптические и параболические рефлекторы. Принцип Ферма. Шепчущие галлереи. Наблюдения в соборе св. Павла. Вероятное объяснение. Резонанс в зданиях. Атмосферное преломление звука. Конвективное температурное равновесие. Диференциальное уравнение пути луча. Преломление звука ветром. Объяснение Стокса. Закон преломления. Полное отражение от ветра наверху. В случае преломления ветром ход звукового луча необратим. Наблюдения Рейнольдса. Наблюдения Тиндаля над сигналами в тумане. Закон расхождения звука. Рупор. Диффракция звука, проходящего через малые отверстия в бесконечном экране. [Опыты по диффракции. Круговая решетка. Тень круглого диска.] Расширение теоремы Грина на потенциалы скорости. Теорема взаимности (обратимости) Гельмгольца. Приложение к двойным источникам. Изменение полной энергии внутри замкнутого пространства.

Глава XV. **Дальнейшие приложения общих уравнений** 152

Вторичные волны, обязанные изменению в среде. Относительное значение вторичных волн зависит от длины волны. Область измененной сжимаемости действует подобно простому источнику, область измененной плотности — подобно двойному источнику. О законе обратной пропорциональности четвертой степени можно заключить методом размерностей. Объяснение гармонических эхо. Изменение характера сложного звука. Вторичные источники, обязанные значительной амплитуде. Изменение высоты вследствие относительного движения источника и приемника. Экспериментальные иллюстрации принципа Допплера. Движение простого источника. Колебания в прямоугольной камере, обусловленные внутренними источниками. Простой источник, расположенный в безграничной трубе. Испускаемая энергия. Сравнение с конической трубой. Дальнейшее рассмотрение движения. Вычисление реакции воздуха на колеблющуюся круглую пластинку, плоскость которой завершена неподвижным фланцем. Уравнение движения для пластины. Случай совпадения собственного и вынужденного периодов.

Глава XVI. **Теория резонаторов** 172

Теория резонаторов. Резонатор, состоящий из поршня и воздушного резервуара. Потенциальная энергия сжатия. Период. В большом классе воздушных резонаторов сжатие практически одинаково всюду внутри резервуара, а кинетическая энергия ограничена в основном соседством с воздушными каналами. Выражение кинетической энергии движения в каналах через электрическую проводимость. Вычисление собственной высоты. Случай нескольких каналов. Верхний и нижний пределы для проводимости каналов. Простые отверстия. Эллиптическое отверстие. Сравнение с круглым отверстием равной площади. Во многих случаях достаточным является вычисление, основанное только на площади. Верхний и нижний пределы для проводимости горл. Поправка к длине канала, обусловленная открытым концом. Проводимость каналов, ограниченных приблизительно цилиндрическими поверхностями вращения. Сравнение вычисленной и наблюденной высоты. Многократный резонанс. Вычисление периодов для двойного резонатора. Передача

энергии внешней атмосфере. Скорость диссипации. Численный пример. Вынужденные колебания, обусловленные внешним источником. Теория открытых труб Гельмгольца. Поправка к длине. Скорость диссипации. Влияние фланца. Экспериментальные методы определения высоты резонаторов. Рассмотрение движения, возникающего внутри открытой трубы. Движение, обязанное внешним источникам. Эффект расширения у закрытого конца. Поглощение звука резонаторами. Трубка Квинке. Действие резонатора вблизи источника звука. Усиление звука резонаторами. Идеальный резонатор. Действие резонатора вблизи двойного источника. Опыт Савара. Два или большее число резонаторов. Вопрос о возникновении струй при звуковом движении. [Возбужденные свободные колебания. Влияние струи воздуха на высоту органных труб. Поддерживающая сила струи воздуха. Обертоны. Взаимное влияние соседних органных труб. Свист. Поддерживание колебаний нагреванием. Прибор Тревельяна. Передача тепла и воздушные колебания. Поющие пламена. Наблюдения Зондхаусса. Звуки, открытые Рийке и Босша. Теория язычковых инструментов Гельмгольца.]

Глава XVII. Приложения функций Лапласа 284

Применения функций Лапласа к акустическим задачам. Общее решение, содержащее член n-го порядка. Выражение для радиальной скорости. Расходящиеся волны. Начало координат на поверхности сферы. Образование звуковых волн требует вообще известной площади движущейся поверхности; в противном случае механические условия будут удовлетворены при местном переносе воздуха без заметных сгущений и разрежений. Исследование эффекта бокового движения (Стокс). Опыт Лесли. Вычисление численных результатов. Член нулевого порядка обычно отсутствует, если звук создается колебаниями твердого тела. Реакция окружающего воздуха на совершающую колебания жесткую сферу. Увеличение эффективной инерции. Когда сфера мала по сравнению с длиной волны, то энергия передается лишь в небольшом количестве. Колебания эллипсоида. Кратные источники. В симметричных случаях функции Лапласа приводятся к функциям Лежандра. [Таблица зональных функций.] Вычисление энергии, испускаемой колеблющейся сферической поверхностью. Случай, когда возмущение ограничено малой частью сферической поверхности. Численные результаты. Влияние малой сферы, расположенной вблизи источника звука. Аналитические преобразования. Случай непрерывности в полюсе. Аналитические выражения для потенциала скоростей. Выражения через функции Бесселя дробного порядка. Частные случаи. Колебания газа, заключенного внутри жесткой сферической оболочки. Радиальные колебания. Диаметральные колебания. Колебания, выражаемые функцией Лапласа второго порядка. Таблица длин волн. Относительная высота различных тонов. Возможность выражения общего движения через простые колебания. Случай равномерной начальной скорости. Колебания газа, заключенного между концентрическими сферическими поверхностями. Сферический слой газа. Исследование возмущения, создаваемого при столкновении плоских звуковых волн со сферическим препятствием. Разложение в ряд потенциала скоростей плоских волн. Неподвижная жесткая сфера. Интенсивность вторичных волн.

Первичные волны, возникающие в источнике, расположенном на конечном расстоянии. Симметричное выражение для вторичных волн. Случай газообразного препятствия. Одинаковая сжимаемость. Максимальное возмущение, создаваемое бесконечно малым резонатором.

Глава XVIII. **Сферические слои воздуха. Движение в двух измерениях** 280

Задача о сферическом слое воздуха. Разложение потенциала скоростей в ряд Фурье. Диференциальное уравнение удовлетворяется каждым отдельным членом. Выражение его через μ и ν. Решение для случая симметрии. Условие, которому нужно удовлетворить в случае, когда полюсы не являются источниками. Приведение к функциям Лежандра. Свойство сопряженности. Переход от сферического слоя к плоскому. Функция Бесселя нулевого порядка. Сферический слой, ограниченный широтными параллелями. Решение для сферического слоя, ограниченного малой окружностью. Частные случаи, разрешимые при помощи функций Лежандра. Общая задача несимметричного движения. Переход к двум измерениям. Полное решение для полной сферы, выраженное в функциях Лапласа. Разложение в ряд произвольных функций. Рекуррентная формула. Соответствующая формула для функций Бесселя двух измерений. Независимое исследование плоской задачи. Поперечные колебания внутри цилиндрической оболочки. Случай равномерной начальной скорости. Сектор, ограниченный радиальными стенками. Применение к водяным волнам. Колебания (необязательно поперечные) внутри кругового цилиндра с плоскими основаниями. Полное решение диференциального уравнения без ограничения, накладываемого требованием отсутствия источника в полюсе. Рекуррентная формула. Выражение потенциала скоростей через нисходящий полусходящийся ряд. Случай чисто расходящейся волны. Применение к вибрирующим струнам (Стокс). Важность деки. Предотвращение бокового движения. Потенциал скоростей для линейного источника. Значение запаздывания на $\frac{1}{8}\lambda$. Задача о плоских волнах, наталкивающихся на цилиндрическое препятствие. Неподвижный жесткий цилиндр. Математически аналогичная задача, относящаяся к поперечным колебаниям упругого твердого тела. Применение к теории света. Эксперименты Тиндаля, свидетельствующие о малости препятствия, создаваемого для звука материалами с открытыми отверстиями. [Отражение от ряда слоев, расположенных параллельно и на одинаковом расстоянии друг от друга.]

Глава XIX. **Трение и теплопроводность** 305

Трение в жидкости. Природа вязкости. Коэфициент вязкости. Независимость коэфициента вязкости от плотности газа. Опыты Максвелла. Сравнение уравнений движения вязкой жидкости с уравнениями, применимыми к упругому телу. Предположение, что силы вязкости не препятствуют движению, заключающемуся в равномерном растяжении и сжатии. Выражение Стокса для диссипативной функции. Применение к теории плоских волн. Постепенное затухание гармонических волн, под-

держиваемых в начале. В первом приближении вязкость не влияет на скорость распространения. Численное определение коэфициента затухания. Действие вязкости при атмосферном давлении ощутимо только для очень высоких нот. Свисток становится неслышным на небольшом расстоянии от источника. В разреженном воздухе действие вязкости значительно усиливается. Поперечные колебания, образующиеся благодаря вязкости. Применение к вычислению влияния вязкости на колебания в узких трубках. Результаты Гельмгольца и Кирхгоффа. [Исследование Кирхгоффа. Плоские волны. Симметрия относительно оси вращения. Малая вязкость.] Наблюдения Шнеебели и Зеебека. [Исключительно тонкие трубки. Пористая стенка. Резонанс зданий. Наблюдение Дворжака над циркуляцией, получающейся в результате колебания в трубках Кундта. Теоретическое исследование.]

Глава XX. **Капиллярность** 335

[Волны, двужущиеся под действием тяжести и сцепления. Формула Кельвина. Минимальная скорость распространения. Численные значения для воды. Определение капиллярного натяжения при помощи ряби. Значения для чистой и загрязненной воды. Рябь Фарадея. Период волн ряби вдвое больше периода подставки. Явление Лиссажу. Стоячие волны на текущей воде. Волновая картина Скотта Рёсселя. Равновесие жидкого цилиндра. Потенциальная энергия малой деформации. Теорема Плато. Кинетическая энергия. Уравнение частоты. Эксперименты Бидона и Магнуса. Поперечные колебания. Применение для определения T для свежеобразованной поверхности. Неустойчивость. Максимум при $\lambda = 4{,}51 \times 2a$. Числовые оценки. Приложение теории к струе. Законы Савара. Теория Плато. Эксперименты с колебаниями низкой частоты. Влияние обертонов. Эксперименты Бэлла. Столкновения капель. Влияние электричества. Наклонные струи. Колебания разрозненных капель. Теоретический расчет. Устойчивость, создаваемую сцеплением, можно уравновесить неустойчивостью, создаваемой электризацией. Неустойчивость очень вязких нитей, приводящая к иному закону распадения.]

Глава XXI. **Вихревое движение и чувствительные пламена** . . 366

[Плоский вихревой слой. Тяжесть и капиллярность. Бесконечная толщина. Равные и противоположно направленные скорости. Тенденция вязкости. Общее уравнение малого возмущения стратифицированного движения. Случай устойчивости. Слои однородной завихренности. Неподвижные стенки. Устойчивость и неустойчивость. Различные случаи бесконечно протяженной жидкости. Бесконечность, появляющаяся при $n + kU = 0$. Чувствительные пламена. Первые наблюдения над ними. Является ли по характеру разрыв узловатым или извилистым? Узлы и пучности. Места максимального действия являются пучностями. Зависимость от азимута звука. Вредное влияние препятствий в подающих трубках. Различные объяснения. Рассмотрение с точки зрения периодичности распадения струй дыма. Струи жидкости в жидкости. Влияние вязкости. Теплая вода. Смесь воды со спиртом. Опыт Бэлла. Птичьи манки. Законы управления частотой Зондхаусса. Тоны,

исследуемые при помощи пламени. Эоловы тоны. Наблюдения Струхаля. Колебания эоловой арфы направлены поперек направлению ветра. Формула размерности.]

Глава XXII. **Колебания твердых тел** 403

[Колебания твердых тел. Общие уравнения. Плоские волны растяжения и сдвига. Стационарные волны. Начальное возмущение, ограниченное конечной областью. Теория Пуассона и Стокса. Волны, исходящие из одного центра. Вторичные волны, расходящиеся от малого препятствия. Линейный источник. Линейное препятствие. Полное решение для периодической силы, действующей в единственной точке бесконечного твердого тела. Сравнение с результатами Стокса и Герца. Отражение плоских волн при нормальном падении.] Принцип динамического подобия. Теория моделей кораблей. Приложение принципа подобия к упругим пластинкам.

Глава XXIII. **Факты и теории слуха** 419

[Факты и теории слуха. Диапазон частот, в пределах которого ухо способно воспринимать звук. Оценка высоты тона. Наблюдения Прейера. Амплитуда, необходимая для слышимости. Оценка Теплера и Больцмана. Наблюдения автора при помощи свистка и камертонов. Бинауральный слух. Локализация звуков. Закон Ома для слуха. Необходимые исключения. Два простых колебания приблизительно одинаковой частоты. Наблюдения Бозанке. Низкий звук может заглушить высокий, но не обратно. (Наблюдения Майера.) Эффект усталости. Как лучше всего услышать обертоны? Теория слуха Гельмгольца. Результаты Майера. Сколько импульсов необходимо, чтобы определить высоту тона. Результаты Кольрауша. Биения обертонов. Консонирующие интервалы в значительной степени определяются ими. Комбинационные тоны. По Гельмгольцу они создаются вследствие нарушения суперпозиции. В некоторых случаях комбинационные тоны существуют вне уха. Разностные тоны на фисгармонии. Теория Гельмгольца. Суммовые тоны. Трудность слышимости их, объясняемая, пожалуй, наблюдениями Майера. Необходимы ли сильные производящие тоны для слышимости разностных тонов? Могут ли биения переходить в разностный тон? Периодические изменения соответствующей частоты не всегда воспринимаются как звук. Разностный тон содержит колебания определенной амплитуды и фазы. Слышимые разностные тоны от неслышимых производящих. Консонирующие интервалы чистых тонов. Взгляды Гельмгольца. Определение квинты разностными тонами второго порядка. Порядок величины различных разностных тонов. При добавлении октавы достаточно первого разностного тона для определения квинты. Воспринимает ли ухо разности фаз? Наблюдения Гельмгольца над камертонами. Довод, основанный на расстройстве консонансов. Лорд Кельвин находит, что биения неточных гармонических интервалов воспринимаются, даже когда звуки слабы. Наблюдения и теории Кенига. Тоны, создаваемые биениями. Волновая сирена. Тембр музыкальных звуков в зависимости от верхних составляющих. Теория гласных звуков Виллиса. Искусственные подражания. Теория в форме, приданной ей Гельмгольцем. Нет несовместимости в действи-

тельности. Относительная характеристика частоты против неизменной характеристики частоты. Результаты Ауэрбаха. Свидетельство фонографа. Заключение Германна. Его анализ гласной А. Сравнение результатов различными авторами. С точки зрения Ллойда основное значение имеет двойной резонанс. Присутствует ли основной тон? Имитация гласных звуков при помощи камертонов (Гельмгольц). Эксперимент Германна. Гласные, произносимые шопотом.]

Примечание к § 86. 461

Добавление к главе V 461
О колебаниях сложных систем в случае, когда амплитуды не бесконечно малы.

Примечание к § 273. 468

Добавление А (§ 307) 469
О поправке для открытого конца.

Указатель 475

ГЛАВА XI[1])

ВОЗДУШНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

236. Так как атмосфера является почти универсальной средой, в которой протекают звуковые явления, то исследование колебаний газообразной среды всегда рассматривалось как основная проблема физической акустики; однако, за исключением нескольких особенно простых вопросов, относящихся, главным образом, к распространению звука в одном измерении, математические трудности здесь таковы, что развитие теории было очень медленным. Даже, когда теоретический результат уже получен, его часто нельзя подвергнуть экспериментальной проверке из-за отсутствия точных методов измерения интенсивности колебаний. В ряде вопросов все, что мы можем сделать, сводится к решению задач, математически достаточно простых, чтобы допустить решение. На эти решения и на общие принципы мы должны положиться, чтобы не остаться в полном неведении относительно других интересующих нас вопросов.

В настоящей главе мы будем рассматривать жидкости как идеальные, т. е. будем принимать, что взаимодействие любых двух частиц, разделенных некоторой воображаемой поверхностью, происходит *нормально к этой поверхности*. В дальнейшем мы сделаем некоторые замечания относительно трения в жидкостях, но вообще акустические явления не нарушаются существенным образом отклонениями от свойств идеальной жидкости, имеющими место в воздухе и других газах.

Равенство давления во всех направлениях вокруг данной точки является необходимым следствием идеальности жидкости, независимо от того, имеет ли место покой или движение. Это можно доказать, рассматривая равновесие малого тетраэдра под действием давлений самой жидкости, внешних сил и сил инерции. В пределе, когда тетраэдр взят бесконечно малым, давления, оказываемые жидкостью на его грани, становятся преобладающими, и для равновесия необходимо, чтобы величины давлений были пропорциональны площадям граней, на которые они действуют. Давление в точке x, y, z будет обозначаться через p.

---

[1]) Главы XI—XVI переведены П. Н. Успенским, главы XVII—XXIII и добавления — С. А. Каменецким.

237. Если через $\rho X\,dV$, $\rho Y\,dV$ и $\rho Z\,dV$ обозначить внешние силы, действующие на элемент массы ρdV, то уравнение равновесия имеет вид

$$dp = \rho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

где dp обозначает изменение давления в некоторой точке x, y, z, соответствующее изменениям dx, dy, dz координат этой точки. Это уравнение легко вывести, рассматривая равновесие малого цилиндра с плоскими основаниями, проекции оси которого на оси координат равны, соответственно, dx, dy, dz. Чтобы получить уравнения движения, мы должны только, в согласии с принципом Даламбера, заменить $X, \ldots$ на $X - \frac{Du}{Dt}, \ldots$, где $\frac{Du}{Dt}, \ldots$ обозначают компоненты ускорения рассматриваемой частицы жидкости. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho\left(X - \frac{Du}{Dt}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho\left(Y - \frac{Dv}{Dt}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho\left(Z - \frac{Dw}{Dt}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

В гидродинамических исследованиях принято выражать скорости жидкости u, v, w в функции x, y, z и t, причем u, v, w обозначают тогда компоненты скорости частицы какой бы то ни было природы, находящейся в момент времени t в точке x, y, z. Спустя некоторый малый промежуток времени dt точки x, y, z достигает новая частица; $\frac{\partial u}{\partial t}\,dt$ выражает избыток ее скорости над скоростью первой частицы, между тем, как $\frac{Du}{Dt}\,dt$, напротив того, выражает изменение скорости *первоначальной* частицы за то же время или изменение скорости в точке, которая не закреплена неподвижно в пространстве, но движется вместе с жидкостью. Мы будем придерживаться этих обозначений. При изменении, которое выражается символом $\frac{\partial}{\partial t}$, положение в пространстве (определенное значениями x, y, z) сохраняется неизменным, тогда как символ $\frac{D}{Dt}$ направляет внимание на некоторую определенную частицу жидкости. Связь между этими двумя видами диференцирования по времени выражается следующим образом:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\,\frac{\partial}{\partial x} + v\,\frac{\partial}{\partial y} + w\,\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (2)$$

Эту связь необходимо отчетливо уяснить себе, хотя в целом ряде весьма важных проблем, которыми мы будем заниматься в дальнейшем, данное различие практически исчезает. Если скорости

движения очень малы, члены $u\frac{\partial}{\partial x}, \ldots$ становятся все более и более незначительными сравнительно с $\frac{\partial}{\partial t}$, и, в конечном счете, $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}$.

238. Мы должны теперь выразить математически то условие, что внутри жидкости не происходит ни возникновения, ни уничтожения вещества. Если α, β, γ — ребра малого прямоугольного параллелепипеда, параллельные осям координат, то избыток количества жидкости, вытекающего из параллелепипеда за время dt, над количеством жидкости, втекающим в параллелепипед, выражается в виде

$$\left\{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right\}\alpha\beta\gamma\, dt;$$

эта величина должна быть равна действительной убыли жидкости, или

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t}\alpha\beta\gamma\, dt.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

Это — так называемое уравнение непрерывности. Если ρ постоянно (как в пространстве, так и во времени), то уравнение принимает простую форму

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

В задачах, связанных со звуком, скорости и изменение плотности могут обычно рассматриваться как малые величины. Полагая $\rho = \rho_0(1 + s)$, где s — так называемое *сжатие*, мало, и пренебрегая произведениями $u\frac{\partial s}{\partial x}, \ldots$, мы находим

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

В частных случаях эти уравнения принимают даже более простую форму. В случае несжимаемой жидкости, движение которой полностью параллельно плоскости xy,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

— уравнение, из которого мы заключаем, что выражение $u\,dy - v\,dx$ является полным дифференциалом. Обозначая его через $d\psi$, мы имеем, в качестве эквивалента (4),

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{5}$$

где ψ — функция координат, пока еще совершенно произвольная. Функция ψ называется функцией *тока*, так как движение жидкости происходит всюду в направлении кривых $\psi = \text{const}$. Когда движение

установившееся, т. е., когда оно остается все время одинаковым в одной и той же точке пространства, кривые $\psi = \text{const}$ намечают систему трубок или каналов; можно представить себе, что течение жидкости происходит именно по ним. Аналитически замена *двух* функций u и v *одной* функцией ψ часто является чрезвычайно важной.

Другой важный случай — это, когда имеется симметрия относительно некоторой оси, например относительно оси x-ов. Все величины можно выразить тогда через x и r, где $r = \sqrt{y^2 + z^2}$; движение происходит здесь в плоскостях, проходящих через ось симметрии. Если компоненты скорости, соответственно, параллельные и перпендикулярные оси симметрии, суть u и q, то уравнение непрерывности имеет вид:

$$\frac{\partial (ru)}{\partial x} + \frac{\partial (rq)}{\partial r} = 0, \tag{6}$$

что, как и прежде, эквивалентно равенствам

$$ru = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad rq = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{7}$$

где ψ — функция тока.

239. Почти во всех случаях, с которыми мы будем иметь дело, уравнения гидродинамики допускают замечательное упрощение в силу следующего предложения, впервые высказанного Лагранжем. Если для некоторой части жидкой массы выражение $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ будет в какой-либо момент времени полным дифференциалом, то оно останется таковым в течение всего последующего времени. В частности, если жидкость первоначально находилась в покое, а затем была приведена в движение консервативными силами и давлениями, переданными извне, то величины

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

(которые мы будем обозначать через ξ, η, ζ) никогда не могут стать отличными от нуля.

Мы принимаем, что ρ есть функция p, и будем писать для краткости

$$\tilde{\omega} = \int \frac{dp}{\rho}. \tag{1}$$

Уравнения движения, получаемые из (1), (2) § 237, имеют вид:

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} + X = \frac{du}{dt} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{2}$$

и еще два других той же самой формы, относящиеся к y и z. Согласно предположению

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

так что путем диференцирования первого из приведенных выше уравнений по y и второго по x и последующего вычитания, мы ислючаем $\tilde{\omega}$

и внешние силы, получая уравнения, которым может быть придана такая форма:

$$\frac{D\zeta}{Dt}=\frac{du}{dz}\xi+\frac{dv}{dz}\eta-\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right)\zeta \qquad (3)$$

и еще два других той же самой формы, определяющие $\frac{D\xi}{Dt}$ и $\frac{D\eta}{Dt}$.

В случае несжимаемой жидкости мы можем заменить выражение $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}$ его эквивалентом $-\frac{dw}{dz}$ и, таким образом, получаем

$$\frac{D\zeta}{Dt}=\frac{du}{dz}\xi+\frac{dv}{dz}\eta+\frac{dw}{dz}\zeta. \qquad (4)$$

Это — те уравнения, которые Гельмгольц положил в основу своего вывода теорем о вихрях.

Если движение имеет непрерывный характер, то коэфициенты при ξ, η, ζ в полученных выше уравнениях все конечны. Обозначим через L их наибольшее численное значение и через Ω — сумму численных значений ξ, η, ζ. Согласно предположению, Ω вначале равно нулю; спрашивается, может ли Ω с течением времени сделаться конечным? Предыдущие уравнения показывают, что этого произойти не может; действительно, скорость увеличения Ω для некоторой данной частицы всегда меньше $3L\Omega$. Но если бы даже эта скорость достигала значения $3L\Omega$, все же Ω никогда не сделалось бы конечным, как это видно из решения уравнения

$$\frac{D\Omega}{Dt}=3L\Omega. \qquad (5)$$

A fortiori, в действительном случае Ω не может отличаться от нуля, и то же самое должно иметь место в отношении ξ, η, ζ.

Заслуживает быть отмеченным, что это заключение не было бы нарушено и в том случае, если бы налицо имелись силы трения, действующие на каждую частицу и пропорциональные ее скорости; это можно видеть, если подставить в уравнение (2)[1]) вместо X, Y, Z величины $X-\varkappa u$, $Y-\varkappa v$, $Z-\varkappa w$. Иначе, однако, обстоит дело с теми силами трения, которые действительно существуют в жидкостях и которые зависят от *относительных* скоростей их частиц.

Первое удовлетворительное доказательство рассматриваемого сейчас важного предложения было дано Коши, а то, которое приведено выше, принадлежит Стоксу[2]). Недостаточно, однако, показать только, что всякий раз, когда ξ, η, ζ обращаются в нуль, то обращаются в нуль и их производные $\frac{D\xi}{Dt}$, $\frac{D\eta}{Dt}$, $\frac{D\zeta}{Dt}$, хотя это обстоятельство часто и упускают из виду. Когда тело, находившееся в покое, падает под

[1]) Вводя такие силы и пренебрегая членами, зависящими от инерции, мы получили бы уравнения, приложимые к движению электричества через однородные проводники.

[2]) Stokes *Cambridge Trans.*, том VIII, стр. 307, 1845; B. A. Report on Hydrodynamics, 1847.

действием силы тяжести, то $s \sim s^{\frac{1}{2}}$; отсюда, однако, не следует, что s никогда не сделается конечным. Чтобы оправдать это заключение, необходимо было бы показать, что s обращается в нуль в пределе не только для первого порядка, но и для всех более высоких порядков малой величины t, что, без сомнения, нельзя сделать в случае падающего тела. Если, однако, уравнение имеет вид $s \sim s$, то все производные от s по t обращаются в нуль вместе с t, если само s обладает таким свойством, и тогда законно заключение, что s никогда не может отличаться от нуля.

Согласно теореме, принадлежащей Стоксу, моменты количества движения относительно осей координат некоторого бесконечно малого сферического участка жидкости равны соответственно величинам ξ, η, ζ, умноженным на момент инерции данной массы жидкости; таким образом, эти величины (ξ, η, ζ) можно рассматривать как компоненты угловой скорости жидкости в той точке, к которой они относятся.

Если ξ, η, ζ равны нулю во всем пространстве, занятом движущейся жидкостью, то внезапно отвердевший малый сферический участок жидкости сохранил бы единственно поступательное движение. Доказательство этого предложения в общей форме будет дано немного позднее. Теорема Лагранжа заключается, таким образом, в утверждении, что частицы жидкости, лишенные в какой-либо момент времени вращения, никогда не могут его приобрести.

240. Несколько иной прием исследования был избран Томсоном, который дал в высшей степени поучительный обзор всего предмета [1]).

В силу основных уравнений

$$d\tilde{\omega} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - \frac{Du}{Dt}\,dx - \frac{Dv}{Dt}\,dy - \frac{Dw}{Dt}\,dz$$

Но $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dR$, если силы консервативны, и

$$\frac{Du}{Dt}\,dx + \frac{Dv}{Dt}\,dy + \frac{Dw}{Dt}\,dz =$$

$$= \frac{D}{Dt}(u\,dx + v\,dy + w\,dz) - u\,\frac{D\,dx}{Dt} - v\,\frac{D\,dy}{Dt} - w\,\frac{D\,dz}{Dt},$$

где

$$\frac{D\,dx}{Dt} = d\,\frac{Dx}{Dt} = du, \ \ldots$$

Таким образом, если $U^2 = u^2 + v^2 + w^2$, то

$$d\tilde{\omega} = dR - \frac{D}{Dt}(u\,dx + v\,dy + w\,dz) + \frac{1}{2}\,dU^2 \qquad (1)$$

или

$$\frac{D}{Dt}(u\,dx + v\,dy + w\,dz) = d\,(R + \tfrac{1}{2}U^2 - \tilde{\omega}). \qquad (2)$$

---

[1]) Thomson, „Vortex Motion", *Edinburgh Transactions*, 1869.

Интегрируя это уравнение вдоль некоторой конечной дуги кривой P_1P_2, движущейся вместе с жидкостью, мы имеем

$$\frac{D}{Dt}\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \left(R + \frac{1}{2}U^2 - \tilde{\omega}\right)_2 - \left(R + \frac{1}{2}U^2 - \tilde{\omega}\right)_1, \tag{3}$$

где индексы (внизу) служат для указания того, что значения функции, заключенной в скобки, берутся в точках P_2 и P_1, соответственно Если кривая является замкнутым контуром, то

$$\frac{D}{Dt}\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = 0, \tag{4}$$

или, выражая это словами,

Криволинейный интеграл тангенциальной компоненты скорости вдоль любого замкнутого контура, принадлежащего движущейся жидкости, остается постоянной величиной в течение всего времени движения.

Данный криволинейный интеграл называется *циркуляцией скорости*; предыдущее предложение может быть формулировано так: *циркуляция скорости в любом замкнутом контуре, движущемся вместе с жидкостью, остается постоянной.*

В состоянии покоя циркуляция скорости, конечно, равна нулю, так что если жидкость приведена в движение давлениями, переданными извне, или консервативными силами, то циркуляция по любому замкнутому контуру должна всегда оставаться равной нулю, а для этого необходимо, чтобы выражение $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ было полным диференциалом. Но отсюда еще не следует, что, обратно, в безвихревом движении никогда не может быть циркуляции, если только не известно наперед, что φ — однозначная функция; в противном случае действительно не требовалось бы, чтобы $\int d\varphi$ обращался в нуль для замкнутого контура. Все, что можно было бы сказать в таком случае, это, что циркуляция по любому замкнутому контуру, который можно свести в одну точку, не выходя из пространства, занятого жидкостью, совершающей безвихревое движение, равна нулю, или, более обще, что циркуляция одинакова для всех сводимых друг к другу замкнутых контуров. Два контура называют сводимыми друг к другу, если один из них можно получить из другого непрерывной деформацией, не выходя из пространства, занятого жидкостью, совершающей безвихревое движение.

В овальном пространстве, подобном тому, которое заключено внутри эллипсоида, все контуры сводимы друг к другу; поэтому, если некоторая масса жидкости этой формы совершает безвихревое движение, циркуляция по любому замкнутому контуру, проведенному внутри ее, не может отличаться от нуля. Такие пространства

называются *односвязными*. Напротив, в кольцеобразном пространстве, подобном тому, которое ограничено поверхностью якорного кольца, замкнутый контур, идущий вокруг кольца, нельзя свести непрерывным образом к точке, и поэтому вдоль него может существовать циркуляция, хотя бы движение во всем объеме и было безвихревым. Однако, циркуляция равна нулю для всякого замкнутого контура, который не обходит вокруг кольца; для всех же контуров, охватывающих кольцо, она имеет одно и то же постоянное значение.

[В предыдущих теоремах „циркуляция" определяется независимо от массы. Если плотность жидкости всюду одинакова, то *количество движения* вдоль замкнутого контура пропорционально циркуляции, в случае же сжимаемой жидкости должна быть учтена непропорциональность этих величин. Существование потенциала скоростей не позволяет в этом случае заключить, что интеграл количества движения вдоль замкнутого контура обращается в нуль.]

241. Если $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ является точным диференциалом $d\varphi$, то скорость в любом направлении выражается соответствующей скоростью изменения функции φ, которая называется потенциалом скорости, и выражение

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

может быть заменено следующим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Если S обозначает некоторую замкнутую поверхность, то скорость, с какою жидкость вытекает наружу через элемент dS, выражается через $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot dS$, где $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ есть скорость изменения φ в направлении наружной нормали. В случае постоянной плотности полный убыль жидкости за время dt равна, таким образом,

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS\, dt,$$

где интегрирование распространяется по всей поверхности S. Если пространство S заполнено целиком как в начале, так и в конце промежутка времени dt, то эта убыль должна обращаться в нуль; таким образом,

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS = 0. \tag{1}$$

Применение этого уравнения к элементу $dx\,dy\,dz$ дает в качестве уравнения непрерывности несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{2}$$

или, как обычно пишется,

$$\nabla^2\varphi = 0. \tag{3}$$

Если желательно работать с полярными координатами, то преобразованное уравнение легче получить непосредственным применением (1) к соответствующему элементу объема, нежели путем преобразования (2) по правилам замены независимых переменных.

Таким образом, если мы возьмем полярные координаты в плоскости xy, так что

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

мы найдем

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{4}$$

или, если взять полярные координаты в пространстве,

$$x = r\sin\theta\cos\omega, \quad y = r\sin\theta\sin\omega, \quad z = r\cos\theta,$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}. \tag{5}$$

В специальных случаях, например, когда имеется симметрия относительно оси z в (5), уравнение принимает более простую форму.

Если жидкость сжимаема и движение таково, что квадратами малых величин можно пренебречь, уравнение непрерывности в силу (3), § 238, имеет вид

$$\frac{ds}{dt} + \nabla^2\varphi = 0; \tag{6}$$

$\nabla^2\varphi$ в этом уравнении можно взять в той форме, которая окажется более удобной для рассматриваемой задачи.

242. Безвихревое движение несжимаемой жидкости внутри некоторого односвязного замкнутого пространства S полностью определяется нормальными скоростями на поверхности S. Если S есть некоторая материальная оболочка, то очевидно, что ее поверхности можно сообщить произвольную нормальную скорость; эта нормальная скорость должна быть воспринята непосредственно соприкасающейся с оболочкой жидкостью, при условии, что весь заключенный в оболочке объем остается неизменным. Если жидкость ранее находилась в покое, то ее частицы не могут приобрести под действием давлений вращательного движения, а это показывает, что возможно так определить функцию φ, чтобы всюду в пространстве, охватываемом S, было $\nabla^2\varphi = 0$, между тем как на поверхности $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ имело бы предписанные значения, ограниченные единственным условием

$$\iint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS = 0. \tag{1}$$

Аналитическое доказательство этого важного предложения дается в *Natural Philosophy* Томсона и Тэта, § 317.

Нетрудно показать, что возможно только одно решение задачи. По теореме Грина, если $\nabla^2\varphi = 0$, то

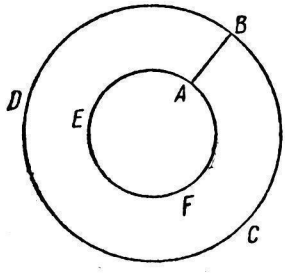
$$\iiint \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dV = \iint \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS, \qquad (2)$$

причем интегрирование в левой части производится по всему объему, а в правой части — по поверхности S. Если теперь φ и $\varphi + \Delta\varphi$ — две функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа и дающие предписанные поверхностные значения $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, то их разность $\Delta\varphi$ есть функция, также удовлетворяющая уравнению Лапласа и удовлетворяющая на поверхности S условию

$$\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial n} = 0.$$

При этих условиях двойной интеграл в (2) обращается в нуль, и мы заключаем, что во всякой точке S величины $\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial z}$ должны быть равны нулю. Другими словами, $\Delta\varphi$ должна быть постоянной величиной, и оба движения тождественны. Как частный случай, в объеме S не может существовать движения безвихревого характера, независимо от движения поверхности. Ограничение односвязными пространствами оказывается необходимым в силу ограниченной применимости теоремы Грина, которая, как впервые было указано Гельмгольцем, только и может иметь место в этом случае.

Когда пространство S многосвязно, то безвихревое движение является определенным, если кроме нормальной скорости в каждой точке S заданы значения постоянных циркуляций вдоль каждого из возможных несводимых контуров. За полным рассмотрением этого вопроса читатель отсылается к оригинальному мемуару Томсона, здесь же мы удовлетворимся случаем двухсвязного пространства, которого будет достаточно для иллюстрации.



Фиг. 54.

Пусть $ABCD$ — бесконечная замкнутая на себя труба, внутри которой происходит безвихревое движение жидкости. Для этого движения должен существовать потенциал скорости, частные производные от которого, выражающие, как это и должно быть, компоненты скорости, необходимо однозначны, но который может сам по себе и не быть однозначным. Проще всего преодолеть трудность, обусловленную неопределенностью φ, вообразив, что поперек кольца помещен барьер AB так, чтобы проход был закрыт. Пространство $ABCDBAEF$ будет тогда односвязным, и теорема Грина прилагается к нему без всяких изменений, если только учесть возможную конечную разность значений φ

по обе стороны барьера. Эта разность, если она существует, необходимо одна и та же во всех точках AB и в гидродинамических приложениях выражает *циркуляцию* скорости вокруг кольца.

Применяя уравнение

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dV=\iint \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS, \qquad (2)$$

мы должны вычислить двойной интеграл, как по поверхности обеих сторон барьера, так и по первоначальной поверхности кольца; но поскольку $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ имеет одинаковое значение по обе стороны,

$$\iint \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS \text{ (по обеим поверхностям } AB)=\iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\varkappa\, dS=\varkappa\iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS,$$

где $\varkappa$ — постоянная разность φ. Таким образом, если $\varkappa$ обращается в нуль, или циркуляция вокруг кольца отсутствует, мы заключаем, совершенно так же, как и для односвязного пространства, что φ полностью определяется значениями $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ на поверхности. Если имеется циркуляция, то φ еще определяется, если дана величина циркуляции. Действительно, если φ и $\varphi+\Delta\varphi$ — две функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа и дающие одинаковую величину циркуляции и одинаковые нормальные скорости на S, то их разность $\Delta\varphi$ также удовлетворяет уравнению Лапласа и условию, что и циркуляция и нормальные скорости должны быть равны нулю. Но, как мы только что видели, при этих условиях $\Delta\varphi$ во всякой точке равно нулю.

Несмотря на то, что в двусвязном пространстве безвихревое движение возможно независимо от нормальных скоростей на поверхности, такое движение нельзя получить ни с помощью консервативных сил, ни с помощью движения, сообщенного извне (в какое-либо предшествующее время) поверхности, ограничивающей жидкость; действительно, мы доказали, что если жидкость находилась вначале в покое, то в ней никогда не может быть циркуляций вдоль какой-либо замкнутой кривой. Отсюда — это справедливо как для многосвязных, так и для односвязных пространств, — если жидкость приводится в движение произвольной деформацией границы, то вся масса приходит в состояние покоя, как только движение границы прекращается.

Если в жидкости, движущейся без циркуляции, вся жидкость, находящаяся вне замкнутой трубчатой поверхности постоянного сечения, мгновенно отвердеет, то в этот же самый момент времени придет в состояние покоя и вся жидкость, заключенная внутри трубки. Это механическое толкование, как бы оно ни было искусственно, поможет читателю яснее понять, что разумеется под жидкостью, не имеющей циркуляции, и приведет к расширению теоремы

Стокса по отношению к молекулярному вращению. Действительно, если вся жидкость (движущаяся с потенциалом скорости) вне сферической полости некоторого радиуса внезапно отвердеет, то жидкость внутри полости не может сохранить движения; или, как мы можем это еще формулировать, всякая сферическая часть (несжимаемой) жидкости, совершающей безвихревое движение, внезапно отвердев, обладала бы одним поступательным движением, *без вращения*[1]).

Аналогичное предложение будет справедливо для цилиндрического диска, или цилиндра с плоскими основаниями, в случае жидкости, обладающей безвихревым движением только в двух измерениях. Движение несжимаемой жидкости, которая в некоторый момент находилась в покое, отличается замечательным свойством (§ 79), общим всем тем системам, которые приводятся в движение с предписанными скоростями, именно, их энергия является наименьшей возможной. Если предположить, что уравнению непрерывности и граничным условиям удовлетворяет некоторое другое движение, то его энергия будет необходимо больше энергии движения, полученного из состояния покоя[2]).

243. Тот факт, что безвихревое движение несжимаемой жидкости определяется потенциалом скоростей, удовлетворяющим уравнению Лапласа, является основой далеко идущей аналогии между движением такой жидкости и движением электричества или теплоты в однородном проводнике; эту аналогию часто полезно иметь в виду. То же самое можно сказать о связи между всеми областями физики, которые связаны в математическом отношении с понятием потенциала, так как часто бывает, что аналогичные теоремы далеко неодинаково очевидны. Так, например, теорема, согласно которой

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0$$

для замкнутой поверхности, если $\nabla^2 \varphi = 0$, всего нагляднее при интерпретации ее для жидкости, но, будучи однажды получена, она может быть применена и к электрическим или магнитным силам.

Наоборот, в теории теплопроводности или теории электричества очевидно, что внутри поверхности S не может быть установившегося движения, которое не сопровождалось бы переходом через некоторую часть граничной поверхности: если перенести этот результат на несжимаемые жидкости, то мы получаем важный, но сам по себе не очевидный закон.

244. Если потенциал скоростей существует, уравнение для определения давления можно написать в более простой форме. Мы

---

[1]) Thomson, *Vortex Motion*, loc. cit.

[2]) [Читателя, который пожелает продолжить изучение общей гидродинамики, мы должны отослать к трактатам Лэмба и Бассета.]

имеем из (1), § 240,

$$d\tilde{\omega} = dR - \frac{D}{Dt} d\varphi + \frac{1}{2} dU^2, \tag{1}$$

откуда в результате интегрирования получим

$$\tilde{\omega} = \int \frac{dp}{\rho} = R - \frac{D\varphi}{Dt} + \frac{1}{2} U^2.$$

Но

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u^2 + v^2 + w^2,$$

так что

$$\int \frac{dp}{\rho} = R - \frac{\partial \varphi}{dt} - \frac{1}{2} U^2, \tag{2}$$

что представляет собой обычно даваемое выражение.

Если ρ постоянно, то $\int \frac{dp}{\rho}$ заменяется, конечно, через $\frac{p}{\rho}$.

Соотношение между p и φ в случае движения, возникшего под действием импульса из состояния покоя, можно получить из (2) путем интегрирования. Мы видим, что в конечном счете

$$\frac{1}{\rho} \int p \, dt = -\varphi.$$

К этому же самому заключению можно притти непосредственным применением принципов механики к случаю импульсивного движения.

Если $p = \varkappa \rho$, то уравнение (2) принимает форму

$$\varkappa \log \rho = R - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} U^2. \tag{3}$$

Если движение таково, что компоненты скорости в одной и той же точке пространства всегда остаются одними и теми же, то оно называется *установившимся*, и φ оказывается независимым от времени. Уравнение давления тогда имеет вид

$$\int \frac{dp}{\rho} = R - \frac{1}{2} U^2, \tag{4}$$

или в случае, если внешние силы отсутствуют,

$$\int \frac{dp}{\rho} = C - \frac{1}{2} U^2. \tag{5}$$

В большинстве акустических приложений уравнения (2) скорости и сжатие малы; мы можем поэтому пренебречь членом $\frac{1}{2} U^2$ и заменить $\int \frac{dp}{\rho}$ через $\frac{\delta p}{\rho_0}$, если δp обозначает малую переменную часть p;

таким образом,

$$\frac{\delta p}{\rho_0} = R - \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{6}$$

что вместе с

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla^2 \varphi = 0 \tag{7}$$

представляет собой систему уравнений, посредством которых должны исследоваться малые колебания упругой жидкости.

Если $a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$, так что $\delta p = a^2 \rho_0 s$, то (6) принимает вид

$$a^2 s = R - \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{8}$$

и мы получаем, исключая s,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial R}{\partial t} + a^2 \nabla^2 \varphi. \tag{9}$$

245. Простейший вид волнового движения — тот, в котором отклонения каждой частицы параллельны некоторой неподвижной линии и одинаковы во всех плоскостях, перпендикулярных к этой линии. Предположим (принимая $R = 0$) поэтому, что φ есть функция только x (и t). Наше уравнение (9) § 244 принимает тогда форму

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \tag{1}$$

одинаковую с уравнением, рассмотренным уже в главе о струнах. Мы нашли там, что общее решение уравнения (1) есть

$$\varphi = f(x - at) + F(x + at); \tag{2}$$

оно описывает распространение независимых волн в положительном и в отрицательном направлениях с одинаковой скоростью a.

В тех пределах, в каких допустимо пользоваться приближенным уравнением (1), скорость звука совершенно не зависит от формы волны; она, например, одна и та же для простых волн

$$\varphi = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - at),$$

какова бы ни была длина волны. Условие, которое удовлетворяется положительной волной, а следовательно, и начальным возмущением, если возбуждена одна положительная волна, есть

$$a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

или, в силу (8) § 244,

$$u - as = 0. \tag{3}$$

Аналогично для отрицательной волны

$$u + as = 0, \tag{4}$$

Каково бы ни было начальное возмущение (u и s произвольны), его всегда можно разделить на две части, удовлетворяющие соответственно (3) и (4) и распространяющиеся без всякого изменения. В каждой составляющей волне направление распространения совпадает с направлением движения *сжатых* частей жидкости.

Скорость, с которой переносится энергия через единицу площади плоскости, параллельной фронту бегущей волны, может рассматриваться как механическая мера интенсивности излучения. В случае простой волны, для которой

$$\varphi = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x - at), \tag{5}$$

скорость $\dot{\xi}$ частицы в точке x $\left(\text{равная } \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$ дается выражением

$$\dot{\xi} = -\frac{2\pi}{\lambda}A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - at), \tag{6}$$

а смещение ξ — выражением

$$\xi = -\frac{A}{a}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x - at). \tag{7}$$

Давление $p = p_0 + \delta p$, где, согласно (6) § 244,

$$\delta p = -\frac{2\pi}{\lambda}\rho_0 aA\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - at). \tag{8}$$

Отсюда, если W обозначает работу, переданную через единицу площади плоскости x за время t, $\frac{\partial W}{\partial t} = (p_0 + \delta p)\dot{\xi} = \frac{1}{2}\rho_0 a\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 A^2 +$ периодические члены.

Если интегрирование по времени распространяется на некоторое число полных периодов или, практически, если область интегрирования достаточно велика, то периодические члены можно опустить и взять

$$\frac{W}{t} = \frac{1}{2}\rho_0 a\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 A^2, \tag{9}$$

или, в силу (3) и (6), если под $\dot{\xi}$ подразумевать максимальное значение скорости, а под s — максимальное значение сжатия,

$$W = \frac{1}{2}\rho_0\dot{\xi}^2 at = \frac{1}{2}\rho_0 a^3 s^2 t. \tag{10}$$

Таким образом, работа, затраченная на образование волн гармонического типа, та же самая, какая потребовалась бы для того, чтобы сообщить максимальную скорость $\dot{\xi}$ всей массе воздуха, через которую распространяются волны [1]).

---

[1]) Самая ранняя по моим сведениям формулировка принципа, заключенного в уравнении (10), находится в статье В. Томсона „О возможной плотности передающей свет среды и о механическом эквиваленте кубической мили солнечного света", *Phil. Mag.*, том IX, стр. 36, 1885.

Если выразить этот результат через максимальное отклонение ξ, то, в силу (7) и (9),

$$W = 2\pi^2\rho_0 \frac{a^3}{\lambda^2}\xi^2 t = 2\pi^2\rho_0 a t \frac{\xi^2}{\tau^2}, \qquad (11)^1)$$

где $\tau\left(=\frac{\lambda}{a}\right)$ — период. В *данной среде* механическая мера интенсивности прямо пропорциональна квадрату амплитуды и обратно пропорциональна квадрату периода. Читатель должен, однако, остерегаться сделать предположение, что механическая мера интенсивности колебаний различных длин волн является правильной мерой громкости соответствующих звуков, как они воспринимаются ухом.

Во всякой плоской бегущей волне, будет ли она гармонического типа или нет, полная энергия распределяется поровну между потенциальной и кинетической. Наиболее просто получить этот результат можно, вероятно, рассматривая, как образуются положительная и отрицательная волны из начального возмущения, энергия которого полностью потенциальная [2]). Полная энергия для каждой из двух образовавшихся бегущих волн, очевидно, одна и та же, и вместе энергия этих волн дает энергию первоначального возмущения. Кроме того, в каждой бегущей волне сжатие (или разрежение) составляет половину того, которое существовало в соответствующей точке вначале; таким образом, *потенциальная* энергия каждой бегущей волны составляет *одну четверть* энергии первоначального возмущения. А так как, — мы это только видели, — *полная* энергия каждой волны равна *половине* того же количества, то мы заключаем, что в бегущей волне любого типа половину энергии составляет потенциальная энергия и половину — кинетическая.

Это же заключение можно вывести также из общих выражений для потенциальной и кинетической энергии и из соотношений между скоростью и сжатием, выраженных уравнениями (3) и (4). Потенциальная энергия элемента объема dV есть та работа, которая была бы получена при расширении соответствующего количества газа от его действительного до его нормального объема; расширение происходит при этом всюду против нормального давления p_0.

В какой-либо фазе расширения, когда сжатие равно s', действующее давление δp, согласно § 244, есть $a^2\rho_0 s'$; это давление должно быть умножено на соответствующее увеличение объема $dV\,ds'$. Полная работа, приобретенная при расширении от dV до $dV(1+s)$, равна поэтому $a^2\rho_0 dV\int_0^s s'ds'$ или $\frac{1}{2}a^2\rho_0 dV\cdot s^2$. Следовательно, общие выра-

---

[1]) Bosanquet, *Phil. Mag.*, том XLV, стр. 173, 1873.
[2]) *Phil. Mag.* (5) I, стр. 260, 1876.

жения для потенциальной и кинетической энергии таковы:

$$\text{потенциальная энергия} = \frac{1}{2} a^2 \rho_0 \iiint s^2 dV, \tag{12}$$

$$\text{кинетическая энергия} = \frac{1}{2} \rho_0 \iiint u^2 dV; \tag{13}$$

в случае плоской бегущей волны, для которой

$$u = \pm as,$$

эти величины равны.

Если плоские бегущие волны — гармонического типа, то u и s во всякий момент времени являются круговыми функциями одной из пространственных координат (x), и поэтому среднее значение квадратов их равно половине максимального значения. Отсюда полная энергия волн равна кинетической энергии всей данной массы воздуха, движущейся с максимальной скоростью, какую можно найти у волн, или потенциальной энергии той же самой массы воздуха, сжатой до максимальной плотности, встречающейся у волн.

[Следует отметить, что если удержать члены второго порядка, то чисто периодическое значение u уже не соответствует чисто периодическому движению. Количество жидкости, которое проходит через единицу площади в точке x за время dt, есть $\rho u\, dt$ или $\rho_0 (1 + s)\, u\, dt$. Таким образом, в положительной бегущей волне

$$\int su\, dt = a \int s^2 dt,$$

и в направлении распространения волны происходит перенос жидкости.]

246. Первое теоретическое исследование скорости звука было выполнено Ньютоном, предположившим, что между давлением и плотностью существует соотношение, которое формулировано в законе Бойля. Если мы принимаем $p = \chi\rho$, мы видим, что скорость звука выражается через $\sqrt{\chi}$ или $\sqrt{\frac{p}{\rho}}$, где размерность p ($=$ сила/площадь) есть $ML^{-1}T^{-2}$, а размерность ρ ($=$ масса/объем) есть ML^{-3}. Ньютон выразил результат через *„высоту однородной атмосферы"*, определяемую уравнением

$$g\rho h = p, \tag{1}$$

где p и ρ обозначают давление и плотность на земной поверхности. Скорость звука равна, таким образом, $\sqrt{gh}$, или скорости, которую приобрело бы тело, свободно падающее под действием силы тяжести с высоты, равной половине высоты однородной атмосферы.

Чтобы получить численный результат, нам нужно знать два одновременных значения p и ρ.

[Экспериментальным путем найдено[1]), что при 0° С и давлении, создаваемом (в Париже) 760 *мм* Hg при 0° С, плотность сухого воздуха равна 0,0012933 $г \cdot см^{-3}$. Если мы примем плотность ртути при 0° равной 13,5953[2]) и $g = 980{,}939$, то мы имеем в абсолютных единицах:

$$p = 760 \cdot 13{,}5953 \cdot 980{,}939; \quad \rho = 0{,}0012933,$$

откуда

$$a = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = 27994{,}5;$$

таким образом, скорость звука при 0° С должна была бы составлять 279,945 $м \cdot сек^{-1}$, что приблизительно на одну шестую меньше результатов непосредственных наблюдений.]

Исследование Ньютона установило, что скорость звука должна быть независимой от амплитуды колебания, а также от высоты; однако, расхождение между вычисленным им значением (опубликованным в 1687 г.) и экспериментальным значением оставалось необъясненным, пока Лаплас не указал на то, что применение закона Бойля предполагает, что при сжатиях и разрежениях, сопровождающих звук, температура остается постоянной, в противоречии с известным фактом, что при внезапном сжатии воздуха его температура повышается. Законы Бойля и Шарля дают только одно соотношение между тремя величинами — давлением, объемом и температурой газа, именно,

$$pv = R\theta, \tag{2}$$

где температура θ измеряется от нуля газового термометра; без какого-либо вспомогательного предположения поэтому невозможно определить связь между p и v (или ρ). Лаплас считал, что сжатия и разрежения, связанные с распространением звука, происходят с такой скоростью, что возникающие нагревание и охлаждение не успевают проникать вглубь окружающей воздушной массы, и что поэтому соотношение между объемом и давлением в основном таково, как если бы воздух был заключен в сосуд, абсолютно непроводящий теплоту. При этих условиях изменение давления, соответствующее данному сжатию или расширению, больше, чем при гипотезе постоянной температуры, и скорость звука, таким образом, возрастает.

Пусть в уравнении (2) v обозначает объем, а p — давление единицы массы, и пусть θ выражается в градусах Цельсия, отсчитываемых от абсолютного нуля[3]). Состояние газа (если он однородный) определяется какими-либо двумя из трех величин p, v, θ, третья же может

[1]) „On the Densities of the Principal Gases", *Proc. Roy. Soc.*, том III, стр. 147, 1893.

[2]) Volkmann, *Wied. Ann.*, том XIII, стр. 221, 1881.

[3]) На обычной шкале Цельсия абсолютный нуль расположен около — 273°.

быть выражена через них. Соотношение между одновременными изменениями этих трех величин следующее:

$$\frac{d\theta}{\theta} = \frac{dp}{p} + \frac{dv}{v}. \tag{3}$$

Чтобы осуществить изменение, определяемое dp и dv, необходимо вообще сообщать газу тепло. Обозначая соответствующее количество тепла через dQ, мы можем написать

$$dQ = \left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right) dv + \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right) dp. \tag{4}$$

Предположим (a) теперь, что $dp = 0$. Уравнения (3) и (4) дают

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)_{(p=\text{const})} = \left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right) \frac{v}{\theta},$$

где $\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)_{(p=\text{const})}$ выражает удельную теплоемкость газа при постоянном давлении. Обозначая ее через $\varkappa_p$, мы имеем

$$\varkappa_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right) \frac{v}{\theta}. \tag{5}$$

Предположим (b) далее, что $dv = 0$. Мы находим аналогичным путем, что, если $\varkappa_v$ обозначает удельную теплоемкость газа при постоянном объеме, то

$$\varkappa_v = \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right) \frac{p}{\theta}. \tag{6}$$

Чтобы получить соотношение между dp и dv, когда нет притока или отдачи тепла, мы должны только положить $dQ = 0$. Таким образом,

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right) dv + \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right) dp = 0,$$

или, заменяя производные от Q их выражениями через $\varkappa_v$ и $\varkappa_p$,

$$\varkappa_p \frac{dv}{v} + \varkappa_v \frac{dp}{p} = 0. \tag{7}$$

Так как $v = \frac{1}{\rho}$,

$$\frac{dv}{v} = -\frac{d\rho}{\rho},$$

так что

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{p}{\rho} \frac{\varkappa_p}{\varkappa_v} = \frac{p}{\rho} \gamma, \tag{8}$$

если, как обычно, обозначить отношение удельных теплоемкостей через γ. Значение скорости звука, полученное Лапласом, поэтому больше значения Ньютона в отношении $\sqrt{\gamma} : 1$.

Интегрированием уравнения (8) мы получаем для соотношения между p и ρ, в предположении отсутствия притока и отдачи тепла,

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \tag{9}$$

где p_0 и ρ — два одновременных значения. При этих же условиях соотношение между давлением и температурой в силу (3) есть

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{10}$$

Значение γ нельзя определить точно путем прямого эксперимента, однако, приближенное значение можно получить методом, в основе которого лежит следующее. Воздух сжимается в резервуаре, который может сообщаться с внешним пространством, через посредство крана с широким отверстием. Температура сжатого воздуха вначале повышается, но затем, спустя некоторое время, излишняя теплота уходит прочь, и вся масса воздуха принимает температуру атмосферы Θ. Пусть давление (измеренное с помощью манометра) есть p. Кран теперь открывается на такое короткое время, которого достаточно, чтобы позволить полностью установиться равновесию, т. е. чтобы внутреннее давление сделалось равным давлению атмосферы P. Если эксперимент поставлен соответствующим образом, то эта операция совершается настолько быстро, что воздух в сосуде не успевает получить теплю от стенок и поэтому расширяется приблизительно по закону, выраженному соотношением (9). Его температура θ в момент, когда операция завершена, определяется поэтому соотношением

$$\frac{p}{P} = \left(\frac{\Theta}{\theta}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{11}$$

Воздух в сосуде затем поглощает тепло, пока снова не приобретает температуру атмосферы Θ; после этого его давление p' измеряется. Во время этого последнего изменения объем постоянен, и поэтому соотношение между давлением и температурой дает

$$\frac{P}{p'} = \frac{\theta}{\Theta}, \tag{12}$$

так что, в результате исключения θ/Θ

$$\frac{p}{P} = \left(\frac{p'}{P}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

откуда

$$\gamma = \frac{\log p - \log P}{\log p - \log p'}. \tag{13}$$

---

[1]) Здесь предполагается, что γ постоянно. Это уравнение было дано впервые, повидимому, Пуассоном.

Путем экспериментов такого рода Клеман и Дезорм определили $\gamma = 1{,}3492$; но данный метод, очевидно, не обладает сколько-нибудь большой точностью. Значение γ, необходимое для того, чтобы согласовать вычисленную и наблюденную скорости звука, есть 1,408; в правильности его вряд ли может быть какое-либо сомнение.

В нашем знании величины γ мы, однако, не являемся зависимыми от звуковых явлений. Значение $\varkappa_p$ — удельная теплоемкость при постоянном давлении — было определено экспериментальным путем Реньо; и хотя экспериментальный метод [1]), вследствие присущих ему трудностей, может и не дать удовлетворительных результатов для $\varkappa_v$, интересующие нас сведения можно получить косвенным путем — исследованием соотношения между двумя удельными теплоемкостями, которое было открыто термодинамикой.

Если из уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ}{\theta} &= \varkappa_p \frac{dv}{v} + \varkappa_v \frac{dp}{p}, \\ \frac{d\theta}{\theta} &= \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

мы исключим dp, то это даст в результате

$$dQ = (\varkappa_p - \varkappa_v)\frac{p\,dv}{R} + \varkappa_v d\theta. \tag{15}$$

Предположим, что $dQ = 0$, или что притока и отдачи тепла нет. Известно, что тепло, развивающееся при сжатии приблизительно идеального газа, такого, как воздух, является почти в точности термическим эквивалентом работы, затраченной на его сжатие. Этот важный принцип был принят Майером в его знаменитом мемуаре, посвященном динамической теории тепла, правда по основаниям, которые едва ли можно рассматривать как достаточные. Но, как бы то ни было, сам принцип, как это было доказано с тех пор экспериментами Джоуля и Томсона, строго справедлив.

Если мы измеряем теплоту в динамических единицах, то принцип Майера, при условии, что приток и отдача тепла отсутствуют, в нашем случае может быть выражен соотношением $-\varkappa_v d\theta = p\,dv$. Сравнивая это с (15), мы видим, что

$$\varkappa_p - \varkappa_v = R, \tag{16}$$

и поэтому

$$\gamma = \frac{\varkappa_p}{\varkappa_v} = \frac{\varkappa_p}{\varkappa_p - R}. \tag{17}$$

Значение pv в гравитационной мере (грамм, сантиметр) есть $1033 : 0{,}001293$ при $0°$ C, так что

$$R = \frac{1033}{0{,}001293 \times 272{,}85}.$$

[1]) [См., однако, Joly, *Phil. Trans.*, том CLXXXII A, 1891].

По экспериментам Реньо удельная теплоемкость воздуха составляет 0,2379 удельной теплоемкости воды; чтобы повысить температуру 1 грамма воды на один градус Цельсия, необходимо затратить 42 350 грамм-сантиметров работы. Отсюда, в тех же единицах, что и для R,

$$\varkappa_p = 0{,}2379 \cdot 42\,350.$$

Производя на основании этих данных вычисления, мы находим $\gamma = 1{,}410$, что почти точно согласуется со значением, полученным из скорости звука. Это исследование принадлежит Рэнкину, который воспользовался им в 1850 году для вычисления удельной теплоемкости воздуха, взяв в качестве исходных данных джоулевский эквивалент и наблюденную скорость звука. Этим путем он предвосхитил результаты экспериментов Реньо, которые не были опубликованы до 1853 года.

247. Теория Лапласа часто являлась предметом ошибочного толкования среди исследователей и камнем преткновения для тех своеобразных людей, которых Де-Морган назвал „парадоксерами" („paradoxers"). Но нет никаких оснований сомневаться в том, что, независимо от всяких вычислений, гипотезе об отсутствии теплообмена безусловно следует отдать предпочтение по сравнению с не менее специальной гипотезой постоянной температуры. Возникло бы реальное затруднение, если бы скорость звука не превосходила решительным образом значения, данного Ньютоном, и скорее удивительно то, что причина этого расхождения так долго оставалась необнаруженной.

Единственный вопрос, который, быть может, следует считать открытым, это — вопрос о том, не может ли небольшая доля нагревания и охлаждения путем теплопроводности или излучения уйти раньше, чем она произведет свой полный эффект. Все должно зависеть от быстроты тепловых изменений. С одной стороны, ниже известного предела медленности как избыток, так и недостаток тепла успевали бы компенсироваться, и температура в основном оставалась бы постоянной. В этом случае соотношение между давлением и плотностью было бы тем, которое приводит к значению скорости звука Ньютона. С другой стороны, выше известного предела быстроты изменений газ вел бы себя так, как будто он заключен в теплоизолирующий сосуд, как предполагалось в теории Лапласа. Но хотя действительные условия задачи лучше представляются вторым предположением, здесь еще может иметь место отклонение от закона давления и плотности, входящего в теорию Лапласа, отклонение, которое приводит к несколько меньшей скорости распространения звука. Этот вопрос был тщательно рассмотрен Стоксом в работе, опубликованной в 1851 году [1]), содержание которой в основных чертах мы здесь и воспроизводим.

---

[1]) Stokes, *Phil. Mag.* (4), том I, стр. 305.

Уравнения механики для *малого* движения воздуха следующие:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial t}, \ldots, \tag{1}$$

а уравнение непрерывности имеет вид

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Температура воздуха предполагается всюду одинаковой, не считая тех возмущений, которые вызываются самими колебаниями, так что, если θ обозначает *избыток* температуры, то

$$p = \varkappa\rho(1 + s + \alpha\theta). \tag{3}$$

Эффект малого внезапного сжатия s заключается в том, что оно вызывает повышение температуры, которое можно обозначить через βs. Пусть dQ есть количество тепла, входящее в элемент объема за время dt и измеряемое тем повышением температуры, которое оно произвело бы, если бы не было сжатия. Тогда (пренебрегая различием между $\frac{D}{Dt}$ и $\frac{\partial}{\partial t}$), мы имеем

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \beta \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t}, \tag{4}$$

где $\frac{\partial Q}{\partial t}$ есть функция θ и производных от θ по координатам, зависящая от специального характера рассеяния (диссипации). Можно упомянуть два крайних случая: первый, когда тенденция к выравниванию температуры обязана теплопроводности, второй, когда действующей причиной является излучение и когда прозрачность среды такова, что излучаемое тепло не поглощается заметно на расстоянии нескольких длин волн. В первом случае $\frac{\partial Q}{\partial t} \sim \nabla^2\theta$, во втором же, том самом, который был избран Стоксом для аналитического исследования, $\frac{\partial Q}{\partial t} \sim (-\theta)$, если принять за достаточное приближение к истине закон излучения Ньютона. Мы имеем тогда

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \beta \frac{\partial s}{\partial t} - q\theta. \tag{5}$$

В случае плоских волн, которыми мы и ограничим наше внимание, v и w обращаются в нуль, между тем как u, p, s, θ будут функциями только x (и t). Исключая из уравнений (1), (2) и (3) p и u, мы находим уравнение

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \varkappa\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right),$$

из которого и из уравнения (5) мы получаем, обозначив через γ

(в том же смысле, как и прежде) $1+\alpha\beta$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+q\right)\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=\varkappa\left(\gamma\frac{\partial}{\partial t}+q\right)\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \tag{6}$$

Если колебания — гармонические, то мы можем предположить, что s изменяется пропорционально e^{int}, и уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2 s}{dx^2}+\frac{n^2}{\varkappa}\frac{q+in}{q+i\gamma n}s=0. \tag{7}$$

Напишем коэфициент при s в (7) в форме $\mu^2 e^{-2i\psi}$, где

$$\mu^4=\frac{n^4}{\varkappa^2}\cdot\frac{q^2+n^2}{q^2+\gamma^2 n^2} \tag{8}$$

и

$$2\psi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\gamma n}{q}-\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{q}=\operatorname{arc\,tg}\frac{(\gamma-1)nq}{\gamma n^2+q^2}. \tag{9}$$

Уравнение (7) удовлетворяется тогда выражениями вида

$$e^{\pm i\mu(\cos\psi-i\sin\psi)x},$$

но (при положительном μ и ψ, меньшем $\frac{1}{2}\pi$), если нам нужно выражение для волны, распространяющейся в положительном направлении, мы должны взять нижний знак. Отбрасывая мнимую часть, мы находим соответствующее решение в виде

$$s=Ae^{-\mu(\sin\psi)x}\cdot\cos(nt-\mu(\cos\psi)x). \tag{10}$$

Первое обстоятельство, которое следует отметить, это то, что звук не может распространиться на значительное расстояние, если только $\sin\psi$ не является крайне малой величиной.

Скорость распространения звука V равна

$$V=n\mu^{-1}\sec\psi, \tag{11}$$

что сводится, когда $\sin\psi$ мал, к

$$V=n\mu^{-1}. \tag{12}$$

Но из (9) мы видим, что ψ не может быть малой величиной, если только $\frac{q}{n}$ не будет очень велико или очень мало. При первом предположении из (11), или прямо из (7), мы имеем приближенно $V=\sqrt{\varkappa}$ (Ньютон), при втором же $V=\sqrt{\varkappa\gamma}$ (Лаплас), что, очевидно, и должно иметь место, если принять во внимание смысл q в уравнении (5). Мы видим теперь, что если бы q и n были сравнимы, то результатом этого явилось бы не только отклонение V от того и другого из предельных значений, но и быстрое затухание звука, что, как мы знаем, в природе не имеет места.

В справедливости этого теоретического результата мы можем убедиться, как поясняет Стокс, и не прибегая к анализу. Вообразим

массу воздуха, заключенную внутри замкнутого цилиндра, в котором работает, двигаясь туда и обратно, поршень. Если период движения очень велик, то температура воздуха остается почти постоянной, так как теплота, развивающаяся при сжатии, успевает уйти посредством проводимости или излучения. При этих условиях давление является функцией объема, и всякая работа, затраченная на выполнение заданного сжатия, возвращается обратно, когда поршень проходит через то же самое положение в обратном направлении; в конечном счете здесь не расходуется никакая работа. Предположим, далее, что движение поршня настолько быстрое, что нагревание и охлаждение, развивающиеся в результате сжатий и разрежений, не успевают исчезать. Давление все еще является функцией объема и работа при этом не рассеивается. Единственное различие состоит в том, что теперь изменения давления сравнительно с изменениями объема более значительны, чем прежде. Мы видим, каким образом волны в обоих случаях — согласно гипотезе Ньютона и согласно гипотезе Лапласа — распространяются без диссипации, хотя и с различными скоростями.

Однако, в промежуточных случаях, когда движение поршня не является ни настолько медленным, чтобы температура воздуха в цилиндре оставалась постоянной, ни настолько быстрым, чтобы теплота не успевала выравниваться сама собой, результат будет другим. Работа, затраченная на некоторое малое сжатие, больше уже не возвращается полностью в течение соответствующего разрежения из-за уменьшившейся температуры, вследствие того, что часть тепла, развившаяся в результате сжатия, тем временем ушла прочь. В самом деле, переход тепла путем теплопроводности или путем излучения от более теплого к более холодному (в конце концов) телу всегда связан с рассеянием энергии; это — принцип, играющий основную роль в термодинамике. Поэтому, чтобы поддерживать движение поршня, необходимо доставлять энергию извне, а если ею можно располагать лишь в ограниченном количестве, то движение должно в конце концов прекратиться.

Другое обстоятельство, которое следует отметить, заключается в следующем: если бы q и n были сравнимы, то V зависело бы от n, т. е. от высоты звука — положение вещей, подозревать которое, как показывает эксперимент, у нас нет никакого основания. Наоборот, наблюдаемые факты показывают, что такой связи не существует.

Из (10) мы видим, что падение интенсивности, рассчитанное на длину волны, является максимальным при максимуме $\operatorname{tg}\phi$ или ϕ; согласно же (9), ϕ имеет максимум, когда $q:n=\sqrt{\gamma}$. В этом случае

$$\mu = n\varkappa^{-1/2}\gamma^{-1/4}, \quad 2\phi = \operatorname{arc\,tg}\gamma^{1/2} - \operatorname{arc\,tg}\gamma^{-1/2}, \tag{13}$$

откуда, если мы положим $\gamma=1{,}36$, получим $2\phi = 8°47'$.

Пользуясь для вычисления этими данными, мы находим, что при продвижении на каждую длину волны амплитуда колебания уменьшалась бы в отношении 0,6172.

В качестве численного примера, положим

$$\tau = \frac{1}{300} \text{ секунды, } \lambda = \text{длина волны} = 44 \text{ дюйма } [112\ см].$$

На расстоянии 20 ярдов (1828 *см*) интенсивность уменьшилась бы в отношении около 7 миллионов к одному.

Соответственно этому

$$q = 2198. \tag{14}$$

Если бы значение q было действительно таким, как написано здесь, то звуки данной высоты затухали бы очень быстро. Мы заключаем поэтому, что q в действительности значительно больше или значительно меньше. Но даже и такое большое значение, как 2000, абсолютно неприемлемо, в чем мы можем убедиться, вдумываясь в смысл уравнения (5). Предположим, что при помощи твердой оболочки, прозрачной для теплового излучения, объем малой массы газа сохраняется постоянным; тогда уравнение, которым определяется в любой момент времени ее тепловое состояние, есть

$$\frac{d\theta}{dt} + q\theta = 0,$$

откуда

$$\theta = Ae^{-qt}, \tag{15}$$

где A обозначает первоначальный избыток температуры; уравнение (15) показывает, что, спустя время $\frac{1}{q}$, избыток температуры уменьшится более, чем на половину своего первоначального значения. Если бы мы предположили, что это может случиться за одну двухтысячную долю секунды, то это находилось бы в противоречии с самым поверхностным наблюдением.

Мы вправе поэтому принять, что q очень мало сравнительно с n; наши уравнения можно тогда написать приближенно следующим образом:

$$\mu = \frac{n}{\varkappa^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}}}, \quad 2\psi = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{q}{n}, \quad V = n\mu^{-1} = \varkappa^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}},$$

$$s = Ae^{-(1-\gamma^{-1})qx/2V}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(Vt - x). \tag{16}$$

Эффект малого излучения тепла проявляется скорее в затухании колебания, чем в изменении скорости распространения звука.

Стокс находит, что, если $\gamma = 1{,}414$, $V = 1100$, то отношение $(N : 1)$, в котором уменьшается интенсивность на расстоянии x, дается выражением $\log_{10} N = 0{,}0001156\ qx$ в системе фут-секунда. Хотя мы и не в состоянии проделать точные измерения интенсивности звука, но тот факт, что слышимые нами колебания могут распространяться на многие мили, исключает всякое значение q, которое могло бы заметно влиять на скорость распространения.

Равным образом невозможно приписать воздуху такую теплопроводность, которая могла бы существенно помешать применению теории Лапласа. Чтобы проследить за эффектом теплопроводности, мы должны только заменить q в уравнении (5) через $-q' \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Принимая в качестве частного решения

$$s = Ae^{i(nt+mx)},$$

мы находим

$$m^2 in\varkappa\gamma = in^3 + q'n^2m^2 - \varkappa q'm^4,$$

откуда, если q' относительно мало,

$$m = \frac{-n}{\sqrt{\varkappa\gamma}}\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{q'n}{2\varkappa\gamma}i\right). \tag{17}$$

Таким образом, в действительных величинах решение имеет вид:

$$s = A\cdot\exp\left(-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{q'n^2x}{2(\varkappa\gamma)^{\frac{3}{2}}}\right)\cdot\cos\left(nt - \frac{nx}{\sqrt{\varkappa\gamma}}\right), \tag{18}$$

т. е. скорость распространения до этого порядка приближения все еще остается равной $\sqrt{\varkappa\gamma}$.

Из (18) видно, что теплопроводность, как и излучение, влияет, в первую очередь, скорее на амплитуду, чем на скорость распространения. В самом деле, теплопроводность газов так слаба, и, во всяком случае, для слышимых звуков время, в течение которого проводимость может иметь место, так коротко, что возмущения, вызванного этой причиной, ожидать не следует.

В предыдущих рассуждениях предполагалось, что волны распространяются в открытом пространстве. Если воздух заключен внутри трубы, диаметр которой мал в сравнении с длиной волны, то условия задачи изменяются, по крайней мере для случая теплопроводности. Этот вопрос будет, однако, удобнее рассмотреть в другом месте.

248. Из выражения $\sqrt{\frac{p\gamma}{\rho}}$ мы видим, что в одном и том же газе скорость звука не зависит от плотности, так как, если температура постоянна, то p изменяется пропорционально ρ ($p = R\rho\theta$). С другой стороны, скорость звука пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры, так что, если a_0 есть значение при 0° C, то

$$a = a_0\sqrt{1 + \frac{\theta'}{273}}, \tag{1}$$

где температура отсчитывается обычным путем, от точки замерзания воды.

Наиболее замечательным следствием зависимости скорости звука от температуры является изменчивость высоты звука органных труб,

В следующих главах мы увидим, что период открытой органной трубы есть время, которое необходимо некоторому импульсу, чтобы пробежать расстояние, равное определенному кратному длины трубы, и поэтому изменяется обратно пропорционально скорости распространения. Неудобство, возникающее вследствие этого изменения высоты, усугубляется еще тем фактом, что на язычковых трубах указанное явление сказывается неодинаково; таким образом, изменение температуры расстраивает орган.

Проф. Мейер [1]) предложил сделать связь между температурой и длиной волны основой пирометрического метода, однако, я не знаю, был ли когда-либо осуществлен этот эксперимент.

Правильность (1) для воздуха при температурах от 0° до 100° была подтверждена экспериментально Кундтом. См. § 260.

В различных газах при заданных температуре и давлении a обратно пропорционально (по крайней мере, если постоянно [2]) γ) корням квадратным из плотностей. [Для постоянных несжижаемых газов γ не может заметно отклоняться от значения для воздуха. Так, в случае водорода скорость больше, чем для воздуха, в отношении

$$\sqrt{1{,}2933} : \sqrt{0{,}08993}$$

или

$$3{,}792 : 1.]$$

Скорость звука не вполне независима от степени сухости воздуха, так как при данном давлении влажный воздух несколько легче, чем воздух сухой. Вычисление дает, что при 50° F [10° C] воздух, насыщенный водяными парами, передавал бы звук на 2—3 фута в секунду быстрее, чем когда он был бы идеально сухим [1 фут = 30,5 *см*].

Формулу $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$ можно приложить для вычисления скорости звука в жидкостях или, если эта последняя известна, заключить обратно о коэфициенте сжимаемости последних. В случае воды экспериментально найдено, что сжатие на одну атмосферу составляет 0,0000457. Таким образом, если $dp = 1033 \cdot 981$ в абсолютных CGS единицах, то

$$d\rho = 0{,}0000457,$$

так как $\rho = 1$. Отсюда

$$a = 1489 \text{ } м/сек,$$

что не очень отличается от наблюденного значения (1435).

---

[1]) Mayer, „On an Acoustic Pyrometer", *Phil. Mag.*, том XLV, стр. 18, 1873.

[2]) Согласно кинетической теории газов скорость звука определяется исключительно средней скоростью молекул и ей пропорциональна. Preston, *Phil. Mag.* (5), том III, стр. 441, 1877. [См. также Waterston (1846), *Phil. Trans.*, том CLXXXIII A, стр. 1, 1892.]

249. В предыдущих разделах теория плоских волн была выведена из общих уравнений движения. Мы перейдем теперь к независимому исследованию, в котором движение описывается через действительное положение слоев воздуха, а не при помощи потенциала скорости, введение которого не является более необходимым, так как в одном измерении не может быть вопроса о молекулярном вращении.*)

Если y, $y+\frac{\partial y}{\partial x}\,dx$ определяют в момент времени t действительное положение двух соседних слоев воздуха, положения равновесия которых определяются координатами x и $x+dx$, то плотность ρ воздуха, заключенного между этими слоями, дается выражением

$$\rho : \rho_0 = 1 : \frac{\partial y}{\partial x}, \tag{1}$$

откуда, в силу (9) § 246,

$$p : p_0 = 1 : \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\gamma}; \tag{2}$$

при этом предполагается, что расширения и сжатия происходят по адиабатическому закону. Масса единицы площади слоя есть $\rho_0 dx$, а соответствующая движущая сила

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\,dx,$$

что дает для уравнения движения

$$\rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует исключить p. Таким образом,

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\gamma+1} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{4}$$

Уравнение (4) есть *точное* уравнение, определяющее действительную абсциссу y через абсциссу равновесия x и время. Если предположить, что движение мало, то величину $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\gamma+1}$, стоящую в качестве коэфициента при малой величине $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, можно заменить ее приближенным значением — единицей; тогда (4) принимает вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{5}$$

— это обычное приближенное уравнение.

Если расширение изотермическое, как в теории Ньютона, то уравнения, соответствующие (4) и (5), получаются просто, если положить $\gamma = 1$.

*) [Под молекулярным вращением здесь и далее подразумевается вихревое движение жидкости. *Ред.*].

Каково бы ни было соотношение между p и ρ, что зависит от природы среды, уравнение движения, в силу (1) и (3), есть

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \tag{6}$$

из него следует исключить с помощью соотношения (1) между ρ и $\frac{\partial y}{\partial x}$ величину ρ, встречающуюся в $\frac{dp}{d\rho}$.

250. В проведенном выше исследовании воздушных волн мы предполагали, что воздух находится в покое, если не считать возмущений, вызываемых звуковыми колебаниями; но мы можем, конечно, приписать всей массе рассматриваемого воздуха какое угодно общее движение. Если мы предположим, что воздух движется в направлении, обратном направлению распространения волн, и с той же самой действительной скоростью, то форма волны (при условии, что она неизменна) будет неподвижна в пространстве, и движение будет *установившимся*. В настоящем разделе мы рассмотрим проблему именно в таком аспекте, так как весьма важно достигнуть максимальной ясности в наших взглядах на механику распространения волны.

Если u_0, p_0, ρ_0 обозначают, соответственно, скорость, давление и плотность жидкости в ее невозмущенном состоянии, и если u, p, ρ — те же величины в какой-либо точке волны, то уравнение непрерывности имеет вид

$$\rho u = \rho_0 u_0 \tag{1}$$

и, в силу (5) § 244, для уравнения энергии

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{2} u_0^2 - \frac{1}{2} u^2. \tag{2}$$

Исключая u, мы получаем

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{2} u_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right) \tag{3}$$

— уравнение, определяющее закон давления, при котором единственно и возможно, чтобы в жидкости, движущейся со скоростью u_0, могла существовать неподвижная волна. Из (3)

$$\frac{dp}{d\rho} = u_0^2 \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \tag{4}$$

или

$$p = \text{const} - \frac{u_0^2 \rho_0^2}{\rho}. \tag{5}$$

Так как соотношение между давлением и плотностью для действительных газов отличается от (5), мы заключаем, что существующая сама по себе стационарная воздушная волна есть нечто невозможное,

какова бы ни была скорость u_0 общего потока, или, другими словами, что волна не может распространяться относительно невозмущенных частей газа, не изменяя своего типа. Тем не менее, когда изменения плотности малы, уравнению (5) можно удовлетворить приближенно; и мы видим из (4), что скорость потока, необходимая для того, чтобы сохранить волну неподвижной, дается выражением

$$u_0 = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}, \tag{6}$$

которое совпадает с выражением для скорости волны, оцениваемой относительно жидкости.

Этот метод рассмотрения вопроса показывает, может быть, яснее, чем всякий другой, истинную природу соотношения § 245 (3), (4) между скоростью и сжатием. В стационарной волновой форме увеличение плотности связано, согласно принципу энергии, с убылью скорости, и поэтому жидкость, образующая сжатые части волны, движется вперед медленнее, чем жидкость в невозмущенных частях. Поэтому относительно жидкости движение сжатых частей происходит в том же направлении, в каком распространяются самые волны.

Если соотношение между давлением и плотностью отличается от (5), то стационарная волна может поддерживаться только при помощи внешней силы. Согласно (1) и (2) § 237 мы имеем, предполагая, что движение — установившееся,

$$X = u\frac{du}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}, \tag{7}$$

между тем как соотношение между u и ρ имеет вид (1). Если мы предположим, что $p = a^2\rho$, то (7) примет вид:

$$X = (u^2 - a^2)\frac{d\ln u}{dx}. \tag{8}$$

Это уравнение показывает, что внешняя сила необходима всюду, где u переменно и не равно a.

251. Причину изменения характера движения, возникающего, когда волна предоставлена самой себе, понять нетрудно. Из обычной теории мы знаем, что бесконечно малое возмущение распространяется с некоторой скоростью a, которая представляет собой скорость относительно частей среды, невозмущенных волной. Рассмотрим теперь случай волны настолько длинной, что изменения скорости и плотности на значительном расстоянии вдоль нее незаметны, и вообразим, что в том месте, где скорость u конечна, на нее наложена малая вторичная волна. Скорость, с которой распространяется через среду вторичная волна, есть a, но за счет скорости местного движения самой среды полная поступательная скорость есть $a + u$; она зависит от того, в каком участке длинной волны наложена малая волна. То, что было сказано о вторичной волне, прилагается также и к частям самой длинной волны. Мы видим, таким образом, что по истечении

времени t место, где была найдена некоторая определенная скорость u, перемещается из своего первоначального положения на расстояние, равное не at, но $(a+u)t$, или, как это еще можно выразить, u распространяется со скоростью $a+u$. В символическом обозначении $u=f[x-(a+u)t]$, где f есть произвольная функция, — уравнение, впервые полученное Пуассоном [1]).

Из только что приведенного рассуждения на первый взгляд могло показаться, что изменение типа было необходимо связано с перемещением волны, независимо от всяких частных предположений о виде соотношения между давлением и плотностью; однако, в § 250 было доказано, что в случае одного частного закона давления изменение типа не имело бы места. Но в настоящем разделе мы молчаливо предполагали, что a постоянна, и тем самым ограничили себя законом Бойля. При всяком другом законе давления $\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ есть функция ρ, а потому, как мы увидим, и u. В случае закона, выраженного уравнением (5) § 250, соотношение между u и ρ для бегущей волны таково, что $\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}+u$ постоянно, т. е. в поступательном движении задержка, обусловленная замедлением распространения при возрастании плотности компенсируется наложением скорости u.

Поскольку дело касается природы самой среды, ничто не мешает нам приписывать произвольные значения как u, так и ρ, но в бегущей волне между этими двумя величинами должно существовать некоторое соотношение. Мы уже знаем (§ 245), что это имеет место, когда возмущение мало; следующее рассуждение не только покажет, что такого соотношения следует ожидать и в случаях, где должен сохраняться квадрат скорости, но даже и определит форму соотношения.

Каков бы ни был закон давления, скорость распространения малых возмущений, согласно § 245, равна $\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$, и в положительной бегущей волне соотношение между скоростью и сжатием есть

$$\frac{u}{s}=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \qquad (1)$$

Если это соотношение в какой-либо точке нарушается, то возникает волна, распространяющаяся в отрицательном направлении. Представим теперь себе случай положительной бегущей волны, в которой изменения скорости и плотности происходят очень постепенно, но становятся значительными в результате накопления, и выясним, каким условиям следует удовлетворить, чтобы предупредить образование отрицательной волны. Ясно, что ответ на вопрос, возникнет или нет в

[1]) Poisson, „Mémoire sur la Théorie du Son", *Journal de l'École polytechnique*, том VII, стр. 319, 1808.

какой-либо точке отрицательная волна, зависит от состояния в непосредственном соседстве с этой точкой, а не от состояния в областях, удаленных от нее, и будет поэтому определяться критерием, приложимым к малым возмущениям. Применяя этот критерий, мы должны рассматривать скорости и сжатия не как абсолютные, а как относительные — относительно тех, которые господствуют в соседних частях среды; таким образом, выражение (1) нужно для настоящей цели взять в форме

$$du = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \cdot \frac{d\rho}{\rho}, \tag{2}$$

откуда

$$u = \int \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \cdot \frac{d\rho}{\rho}; \tag{3}$$

это и есть зависимость между u и ρ, имеющая место в положительной бегущей волне. Уравнение (2) было получено аналитически Эршоу [1]).

В случае закона Бойля $\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ постоянно, и соотношение между скоростью и плотностью, впервые выведенное, повидимому, Гельмгольцем [2]), имеет вид:

$$u = a \ln \frac{\rho}{\rho_0}, \tag{4}$$

если ρ_0 — плотность, соответствующая $u = 0$.

В этом случае интеграл Пуассона позволяет нам составить себе определенное представление об изменении типа, сопровождающем ранние стадии перемещения волны, и приводит нас, в конце концов, к затруднению, которое до сих пор еще не преодолено [3]). Если мы построим кривую, представляющую распределение скорости, отложив x по оси абсцисс и u — по оси ординат, то соответствующую кривую по истечении времени t мы можем найти с помощью следующего построения. Через всякую точку первоначальной кривой проводим параллельно оси x-ов в положительном направлении отрезок прямой линии длиною $(a + u)t$ или, поскольку нас интересует только форма кривой, длиною ut. Геометрическое место концов этих линий есть кривая скорости по истечении времени t.

Но этот закон построения кривой не может быть справедливым неопределенно долго. Гребни кривой скорости непрерывно нагоняют впадины ее и должны, в конце концов, их догнать. После этого кривая давала бы два значения u для одного значения x, и картина,

---

[1]) Earnshaw, *Phil. Trans.*, 1859, стр. 146.
[2]) Helmholtz, *Fortschritte der Physik*, IV, стр. 106, 1852.
[3]) Stokes, „On a Difficulty in the Theory of Sound", *Phil. Mag.*, ноябрь 1848.

изображаемая ею, перестала бы соответствовать действительности. В самом деле, мы не вправе применять интеграл дальше той точки, в которой скорость претерпевает разрыв, или кривая скорости имеет вертикальную касательную. Чтобы найти, когда это случится, возьмем две соседние точки какой-нибудь части кривой, опускающейся вниз в положительном направлении, и выясним, по истечении какого времени эта часть кривой станет вертикальной. Если разность абсцисс равна dx, то задняя точка догонит переднюю за время $dx:(-du)$. Таким образом, скорость, определяемая уравнением Пуассона, становится разрывной по истечении времени, равного обратной величине наибольшего отрицательного значения $\frac{\partial u}{\partial x}$, взятой с положительным знаком.

Предположим, например, что

$$u = U\cos\frac{2\pi}{\lambda}\{x-(a+u)t\},$$

где U — наибольшая начальная скорость. Когда $t=0$, наибольшее отрицательное значение $\frac{\partial u}{\partial x}$ есть $-\frac{2\pi U}{\lambda}$, так что разрыв имеет место в момент $t=\frac{\lambda}{2\pi U}$.

Если имеет место разрыв, то обычные диференциальные уравнения неприменимы; дальнейшее изменение скорости поэтому до сих пор не исследовано. Вероятно, как это было предположено Стоксом, при этом происходит нечто вроде отражения. Мы должны, однако, здесь соблюдать осторожность и отличать чисто математические вопросы от физических. На практике мы имеем дело со сферическими волнами, расходимость которых сама по себе может быть достаточной для того, чтобы устранить тенденцию к разрыву. Кроме того, в действительных случаях несомненно, что прежде, чем мог бы появиться разрыв, закон давления начнет изменять свою форму, и пренебрегать влиянием вязкости уже будет нельзя. Эти рассуждения, однако, не имеют ничего общего с математической задачей определения того, что произошло бы с волнами конечной амплитуды в среде, свободной от вязкости, где давление при всех условиях строго пропорционально плотности; последняя задача еще не решена.

Заслуживает замечания следующее обстоятельство: хотя мы и можем представить себе волну конечного возмущения существующей в любой момент времени, все же имеется предел продолжительности ее предыдущего независимого существования. Проводя линии вместо положительного, в отрицательном направлении, мы можем проследить историю кривой скорости; мы видим, что по мере того, как мы продвигаемся в нашем исследовании все дальше и дальше в прошлое, наклон кривой вперед становится меньше, а наклон ее назад — больше.

Для времени, равного наибольшему положительному значению $\frac{dx}{du}$ и предшествующего тому моменту, в который впервые рассматривается кривая, мы получим разрыв скорости.

252. Полное интегрирование точных уравнений (4) и (6) § 249 в случае бегущей волны было впервые выполнено Эршоу [1]). Отыскивая причину, благодаря которой в звуковой волне всегда должно удовлетворяться уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial t} = F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right), \tag{1}$$

он заметил, что результат диференцирования выражения (1) по t, т. е. выражение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left\{F'\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right\}^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{2}$$

можно, воспользовавшись произвольной функцией F, заставить совпасть с любым динамическим уравнением, в котором отношение $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ выражается через $\frac{\partial y}{\partial x}$. Форма функции F, таким образом, определена, и решение может быть завершено путем обычного процесса, применимого к таким случаям [2]).

Обозначив для краткости $\frac{\partial y}{\partial x}$ через α, мы можем написать

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial y}{\partial t}\,dt = \alpha\,dx + F(\alpha)\,dt;$$

интеграл найдется исключением α из уравнений

$$\left.\begin{aligned} y &= \alpha x + F(\alpha)\,t + \varphi(\alpha), \\ 0 &= x + F'(\alpha)\,t + \varphi'(\alpha), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где α равно $\frac{\rho_0}{\rho}$, а φ — произвольная функция.

Если $p = a^2\rho$, то точное уравнение (6) § 249 имеет вид:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \tag{4}$$

сравнивая его с (2), мы видим, что

$$F'(\alpha) = \frac{\pm a}{\alpha} \tag{5}$$

или, после интегрирования,

$$F(\alpha) = C \pm a \log \alpha, \tag{6}$$

как это можно было заключить и из (4) § 251. Постоянная C обращается в нуль, если $F(\alpha)$, т. е. u, обращается в нуль, когда $\alpha = 1$

[1]) Earnshaw, *Proceedings of the Royal Society*, янв. 6, 1859. *Phil. Trans.*, 1860, стр. 133.

[2]) Boole, *Differential Equations*, гл. XIV.

или $\rho = \rho_0$; другими словами, эта постоянная представляет собой скорость среды как целого, не имея ничего общего с самой волной. Для *положительной* бегущей волны в сомнительных случаях (ambiguities) следует брать нижние знаки. Так, вместо (3), мы имеем

$$\left.\begin{aligned} y &= ax - a\ln at + \varphi(a), \\ 0 &= ax - at + a\varphi'(a) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

и

$$u = -a\ln a = a\log\frac{\rho}{\rho_0}. \tag{8}$$

Если мы вычтем второе из уравнений (7) из первого, то получим

$$y - at + at\ln a = \varphi(a) - a\varphi'(a),$$

откуда, согласно (8), мы видим, что $y - (a+u)t$ есть произвольная функция a или u. Поэтому, обратно, u есть произвольная функция $y - (a+u)t$, и мы можем написать

$$u = f\{y - (a+u)t\}. \tag{9}$$

Уравнение (9) представляет собой не что иное, как интеграл Пуассона, рассмотренный в предыдущем разделе, где символ x имеет тот же смысл, какой здесь имеет y.

253. Проблема плоских волн конечной амплитуды привлекла также внимание Римана, мемуар которого был сообщен Королевскому Обществу в Геттингене 28 ноября 1859 года[1]). Исследование Римана основывается на общих уравнениях гидродинамики, изученных в §§ 237, 238, и не ограничивается каким-либо частным законом давления. Однако, чтобы не расширять незаслуженно рассмотрение этой части нашего предмета, изложенной уже, может быть, более подробно, чем это можно оправдать ее значением для акустики, мы ограничимся здесь случаем закона давления Бойля.

Прилагая уравнения (1), (2) § 237 и (1) § 238 к условиям рассматриваемой задачи, мы получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -a^2\frac{\partial \ln\rho}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \ln\rho}{\partial t} + u\frac{\partial \ln\rho}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2}$$

Если умножить (2) на $\pm a$, а затем сложить с (1), то получится:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -(u+a)\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = -(u-a)\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{3}$$

где

$$P = a\ln\rho + u, \quad Q = a\ln\rho - u. \tag{4}$$

---

[1]) B. Riemann, „Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite", *Göttingen. Abhandlungen*, том VIII, 1860. См. также превосходный реферат в *Fortschritte der Physik*, XV, стр. 123. [Можно также сослаться на статью: C. V. Burton, *Phil. Mag.*, XXXV, стр. 317, 1893.]

Таким образом,

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}\{dx - (u + a)\,dt\}, \tag{5}$$

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}\{dx - (u - a)\,dt\}. \tag{6}$$

Эти уравнения являются более общими, чем уравнения Пуассона и Эршоу, так как они не ограничиваются случаем только одной единственной положительной или отрицательной бегущей волны. Из (5) мы видим, что каково бы ни было значение P, соответствующее точке x и времени t, это же самое значение соответствует точке $x + (u + a)\,dt$ в момент времени $t + dt$; таким же путем мы усматриваем из (6), что Q остается неизменным, когда x и t увеличиваются соответственно на $(u - a)\,dt$ и dt. Если P и Q заданы в некоторый момент времени как функции x и если построены изображающие их кривые, то мы можем вывести соответствующее значение u с помощью (4) и таким же образом, как в § 251, построить кривые, представляющие значения P и Q через малый промежуток времени dt, из которых становятся, в свою очередь, известными новые значения u и ρ, и процесс может быть повторен.

Элемент жидкости, которому принадлежат в какой-либо момент времени значения P и Q, движется сам со скоростью u, так что скорости P и Q относительно элемента численно одинаковы и равны a, причем скорость P в положительном направлении, Q — в отрицательном.

Мы в состоянии теперь проследить все последствия некоторого начального возмущения, ограниченного конечным участком среды, например, заключенного между $x = \alpha$ и $x = \beta$, вне которого среда находится в покое и имеет нормальную плотность, так что значения P и Q равны $a \ln \rho_0$. Каждое значение P передается поочередно элементам жидкости, лежащим впереди него, а каждое значение Q — элементам, лежащим позади него. Самая задняя граница области, в которой P переменно, именно, место, где P впервые достигает постоянного значения $a \ln \rho_0$, приходит сперва в соприкосновение с переменными значениями Q и движется таким образом с переменной [1]) скоростью. В определенный момент времени, требующий для своего нахождения решения диференциальных уравнений, задняя (левая) граница области, в которой P меняется, встречается с задней (правой) границей области, в которой меняется Q, после чего обе области разделяются; между ними оказывается заключенной часть жидкости в условиях, отвечающих равновесию, как это следует из того факта, что значения P и Q оба равны $a \ln \rho_0$. В положительной волне Q имеет постоянное значение $a \ln \rho_0$, так что $u = a \ln \frac{\rho}{\rho_0}$, как в (4)

[1]) В этом пункте в работу Римана вкралась, повидимому, ошибка, которая исправлена в реферате, помещенном в *Fortschritte der Physik.*

§ 251; в отрицательной волне P имеет то же самое постоянное значение, что дает соотношение между u и ρ в виде $u = -a \ln \frac{\rho}{\rho_0}$. Так как в каждой бегущей волне, взятой изолированно, господствует закон, связывающий величины u и ρ, то мы видим, что в положительной волне du обращается в нуль одновременно с dP, а в отрицательной — одновременно с dQ. Таким образом из (5) мы узнаем, что в положительной бегущей волне du обращается в нуль, если приращения x и t таковы, что они удовлетворяют уравнению $dx - (u + a)\,dt = 0$, из которого сразу получается интеграл Пуассона.

Полное аналитическое развитие метода Римана завело бы нас слишком далеко, поэтому мы отсылаем читателя за таковым к оригинальному мемуару; было бы, однако, недопустимо обойти молчанием одну ошибку, касающуюся вопроса о разрывном движении, в которую впали Риман и другие авторы. Считалось, что возможно такое состояние движения, при котором жидкость разделяется на две части поверхностью разрыва, распространяющеюся с постоянной скоростью, причем вся жидкость по одну сторону от поверхности разрыва имеет одну плотность и скорость (одинаковую по всей этой части), а по другую сторону — другую плотность и скорость (одинаковую в данной части). Но если бы это движение было возможно, то было бы возможно и движение, в котором поверхность разрыва находится в покое; достаточно предположить, что всей массе жидкости сообщена скорость, равная и противоположная той, с которой движется сначала поверхность разрыва. Чтобы найти соотношения, которые должны существовать между плотностью и скоростью на одной стороне (u_1, ρ_1) и между плотностью и скоростью на другой стороне (u_2, ρ_2), мы замечаем, прежде всего, что согласно принципу сохранения вещества $\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1$. Если теперь рассмотреть количество движения слоя, ограниченного параллельными плоскостями и включающего поверхность разрыва, то мы увидим, что количество движения, теряемое единицей площади слоя в единицу времени, равно $(\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1)\,u_2$, между тем как количество движения, входящее в нее, есть $\rho_1 u_1^2$. Разность количеств движения должна быть уравновешена давлениями, действующими на границы пластины, так что

$$\rho_1 u_1 (u_2 - u_1) = p_1 - p_2 = a^2 (\rho_1 - \rho_2),$$

откуда

$$u_1 = a\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}, \quad u_2 = a\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}. \tag{7}$$

Определенное таким образом движение, однако, невозможно; оно удовлетворяет, правда, условиям для массы и количества движения, но нарушает условие для энергии (§ 244), выраженное уравнением

$$\frac{1}{2} u_2^2 - \frac{1}{2} u_1^2 = a^2 \ln \rho_1 - a^2 \ln \rho_2. \tag{8}$$

Это рассуждение уже приводилось в другой форме в § 250, и уже в том виде могло бы служить нам оправданием для того, чтобы отбросить предположенное движение, так как ясно, что никакое установившееся движение невозможно иначе, как при определенном там законе плотности. Из уравнения (8) этого раздела мы можем найти, какие внешние силы были бы необходимы для того, чтобы поддерживать движение, определенное уравнением (7). Можно видеть, что сила X, хотя и ограниченная местом разрыва, складывается из двух частей противоположного знака, так как согласно (7) u проходит *через* значение a. Полная движущая сила, именно $\int X\rho\, dx$, обращается в нуль, и это объясняет нам, каким образом (7) может удовлетворять условию для количества движения, несмотря на то, что мы совершенно пренебрегаем силой X.

253a. Среди явлений второго порядка, которые допускают легкое объяснение, одно из важных мест должно быть отдано отталкиванию резонаторов, открытому независимо друг от друга Дворжаком [1]) и Мейером [2]). Эти наблюдатели нашли, что воздушный резонатор любого рода (гл. XVI), если его подвергнуть воздействию мощного источника звука, испытывает силу, направленную внутрь от устья, несколько подобно тому как это имеет место у ракеты. Соединив четыре легких резонатора и установив их наподобие анемометра на стальном острие, можно заставить всю систему непрерывно вращаться.

Если внешние силы отсутствуют, то уравнение (2) § 244 дает

$$\tilde{\omega} = \int \frac{dp}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} U^2. \qquad (1)$$

Различая значения величин в двух разных точках пространства при помощи индексов, мы можем написать

$$\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_0 = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_0 - \varphi_1) + \frac{1}{2} U_0^2 - \frac{1}{2} U_1^2. \qquad (2)$$

Это уравнение справедливо для каждого момента времени. Интегрируя его по большому интервалу времени, мы получаем

$$\int \tilde{\omega}_1 dt - \int \tilde{\omega}_0 dt = \frac{1}{2}\int U_0^2 dt - \frac{1}{2}\int U_1^2 dt, \qquad (3)$$

что применимо ко всякому случаю движения жидкости, в котором только поток между двумя точками не возрастает непрерывным образом. Первую точку (с индексом 0) следует теперь выбрать на таком расстоянии, чтобы изменения давления и скорости были там практи-

---

[1]) Dvořák, *Pogg. Ann.*, том CLVII, стр. 42, 1876; *Wied. Ann.*, том III, стр. 328, 1878.

[2]) Mayer, *Phil. Mag.*, том VI, стр. 225, 1878.

чески незаметными. Таким образом,

$$\int \tilde{\omega}_1 dt = -\frac{1}{2}\int U_1^2 dt. \tag{4}$$

Это уравнение справедливо независимо от того, где была взята вторая точка. Если последняя находится внутри резонатора или в углу, где встречаются три неподвижных стенки, то $U_1 = 0$ и поэтому

$$\int (\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_0)\, dt = 0, \tag{5}$$

т. е. среднее значение $\tilde{\omega}$ внутри то же самое, что и на некотором расстоянии снаружи от резонатора.

В силу (9) § 246, если расширения и сжатия адиабатические, $p \sim \rho^\gamma$ и $\tilde{\omega} = p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$. Таким образом,

$$\sqrt{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}\, dt = 0. \tag{6}$$

Если положить разность между p_1 и p_0 в (6) сравнительно малой, то содержащуюся там функцию можно развернуть в ряд по теореме бинома. Приближенный результат можно выразить следующим образом:

$$\int \frac{p_1 - p_0}{p_0}\, dt = \frac{1}{2\gamma}\int \left(\frac{p_1 - p_0}{p_0}\right)^2 dt; \tag{7}$$

он показывает, что среднее значение $(p_1 - p_0)$ положительно или, другими словами, что среднее давление в резонаторе превышает атмосферное давление [1]). Резонатор стремится поэтому двигаться так, как если бы его побуждала к этому сила, действующая нормально на площадь его отверстия и направленная *внутрь*.

Эксперименты можно проделать (по Дворжаку) с резонатором Гельмгольца, соединив устье с горизонтальной, не слишком узкой, стеклянной трубкой, в которой движется легкий поршень (из эфира). Если сильно возбудить камертон подходящей частоты, например 256 или 512, и поднести к устью резонатора, то движение поршня (эфира) укажет на увеличение давления, между тем как подобное же расположение неколеблющегося камертона не даст никакого эффекта.

Если с точностью до малых величин первого порядка

$$\frac{p - p_0}{p_0} = P\cos nt, \tag{8}$$

то среднее значение с точностью до малых второго порядка равно $\frac{P^2}{4\gamma}$, где для воздуха и большинства газов $\gamma = 1{,}4$.

---

[1]) *Phil. Mag.*, том VI, стр. 270, 1878.

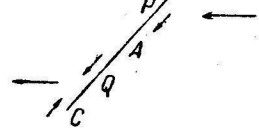
Если предположить, что расширения и сжатия происходят изотермически, то к соответствующему результату мы придем, положив в (7) $\gamma = 1$.

253*b*. Объясненный в § 253*a* эффект тесно связан со сжимаемостью жидкости, которая занимает пространство внутри резонатора. В том классе явлений, которые сейчас будут рассмотрены, сжимаемость жидкости имеет второстепенное значение, и истолкование их в основных чертах может быть дано и в предположении, что плотность жидкости всюду постоянна.

Если ρ постоянно, то уравнение (4) § 253*a* может быть написано так:

$$\int (p_1 - p_0)\, dt = -\frac{1}{2}\rho \int U_1^2 dt. \qquad (1)$$

Это показывает, что среднее давление в том месте, где имеется движение, меньше, чем в невозмущенных частях жидкости — теорема, принадлежащая Кельвину [1]) и приложенная им к объяснению притяжений, наблюдавшихся Гэтри (Guthrie) и другими экспериментаторами. Так, колеблющийся камертон, поднесенный к свободно подвешенному прямоугольному куску бумаги, оказывается, в состоянии вызвать притяжение, так как среднее значение U^2 здесь больше на стороне, обращенной к камертону, нежели на обратной.



Фиг. 54a.

В предыдущем эксперименте действие зависит от степени близости источника возмущения. Когда течение жидкости, установившееся или же непостоянное, равномерно в большой области, то ее действие на введенное туда препятствие зависит от формы последнего. В случае сферы никакой тенденции к вращению, очевидно, нет, а поскольку течение выше и ниже препятствия симметрично, то средние давления, даваемые (1), уравновешивают одно другое. Следовательно, на сферу не действует ни сила, ни пара. Дело обстоит иначе, когда форма тела удлиненная или сплющенная. О том, что плоское препятствие стремится повернуться своей плоской стороной перпендикулярно потоку [2]), можно заключить из общего характера линий тока вокруг него. Давления в различных точках поверхности BC (фиг. 54a) зависят от скоростей, которые имеет в них жидкость. Полное давление, обязанное общему торможению потока, мы найдем в двух точках, где поток разделяется. Ясно, что со стороны, обращенной к потоку, это место лежит в точке P на AB, а с обратной стороны в соответствующей точке Q на AC. Результирующая давлений стремится, следовательно, повернуть препятствие AB так, чтобы оно оказалось обращенным лицом к потоку.

[1]) Kelvin, *Proc. Roy. Soc.*, том XIX, стр. 271, 1887.
[2]) Thomson and Tait, *Natural Philosophy*, § 336, 1867.

Если препятствие имеет форму эллипсоида, то можно вычислить и силы; здесь достаточно будет указать на частный случай тонкого круглого диска, нормаль которого образует некоторый угол θ с направлением невозмущенного потока. Можно показать [1]), что момент M пары, стремящейся уменьшить θ, имеет значение, выражающееся через

$$M = \frac{4}{3}\rho a^3 W^2 \sin 2\theta, \qquad (2)$$

где a — радиус диска, а W — скорость потока. Если же поток будет не стационарным, а переменным, то, как видно из (1), нам нужно лишь воспользоваться средним значением W^2.

Тот факт, что свободно подвешенный диск сам собой устанавливается поперек направления переменных потоков воздуха, был наблюден при попытке объяснить некоторые аномалии в поведении зеркала магнетометра [2]). Для иллюстрации: „маленький диск из бумаги, размером около шестипенсовой монеты, был подвешен на тонкой шелковинке через устье резонатора с частотой 128. Если вблизи возбуждается звук этой частоты, то внутрь резонатора врывается, а также вырывается из него, мощная струя воздуха: диск при этом сам собой быстро устанавливается поперек прохода. Камертон частоты 128 можно держать вблизи резонатора, но лучше пользоваться вторым резонатором на небольшом расстоянии, чтобы избежать возможного возмущения, обязанного близости колеблющихся ножек. Эксперимент, хотя и значительно менее поразительный, удавался также с камертонами и резонаторами частоты 256".

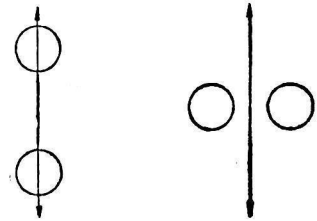
На этом принципе можно построить инструмент для измерения интенсивности воздушных колебаний избранной частоты [3]). Труба, длиною в три четверти длины волны, открыта с одного конца, с другого же герметически закрыта стеклянной пластинкой. На расстоянии одной четверти длины волны от закрытого конца подвешено на шелковинке соединенное с магнитом легкое зеркало, какое применяется для зеркальных гальванометров. В своем невозмущенном положении плоскость зеркала образует угол в 45° с осью трубы. В стенке имеется стеклянное окошечко, через которое свет, входящий в трубу вдоль оси и отраженный зеркалом, может выйти из трубы и дать соответствующее изображение на шкале с делениями. Труба в целом действует как резонатор, а переменные потоки воздуха в пучности (§ 255) отклоняют зеркало на угол, который отсчитывается обычным путем.

В инструменте, построенном Бойсом [4]), чувствительность доведена до необыкновенно высокой степени. Это достигнуто частью за

[1]) W. König, *Wied. Ann.*, том XLIII, стр. 51, 1891.
[2]) *Proc. Roy. Soc.*, том XXXII, стр. 110, 1881.
[3]) *Phil. Mag.*, том XIV, стр. 186, 1882.
[4]) Boys, *Nature*, том XLII, стр. 604, 1890.

счет применения очень легкого зеркала с подвесом из кварцевой нити, а частью за счет двойного резонанса. Большой резонатор представляет собой тяжелую латунную трубу около 10 *см* диаметром, закрытую с одного конца и такой длины, чтобы она отвечала на *e'*. Зеркало подвешивается в короткой боковой трубке, образующей соединение между большим резонатором и небольшим стеклянным баллоном соответствующей емкости. Можно считать, что внешние колебания усиливаются сначала большим резонатором, а затем снова малым, так что на зеркало действуют мощные переменные потоки воздуха. Избирательность в отношении высоты настолько определенна, что едва ли имеет место какой-либо ответ на звуки, которые на полтона выше или ниже.

Наиболее поразительным из всех эффектов переменных воздушных потоков является, вероятно, ребристая структура, принимаемая пробковыми опилками в эксперименте Кундта § 260. Внимательное наблюдение показывает, что когда происходят колебания, опилки располагаются тонкими слоями поперек трубки, простираясь вверх на некоторое расстояние от основания. Эффект является максимальным в пучностях и исчезает вблизи узлов. Когда колебания прекращаются, слои, конечно, опускаются на дно и при этом значительно теряют в резкости, но остаются видимыми, как поперечные полоски.

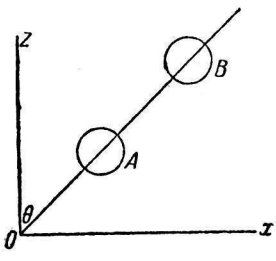


Фиг. 54b, c.

Объяснение этого своеобразного их поведения было дано В. Кенигом [1]). Мы видели, что *одно* сферическое препятствие не испытывает воздействия со стороны переменного потока. Но это положение вещей нарушается присутствием другого препятствия по соседству. Рассмотрим для простоты случай двух сфер, расположенных на сравнительно небольшом расстоянии друг от друга и так, что линия центров или параллельна потоку (фиг. 54b), или перпендикулярна к нему (фиг. 54c). Легко понять, что скорость между шарами будет меньше в первом случае и больше во втором, нежели скорости у удаленных друг от друга полушарий. Так как давление возрастает, когда скорость уменьшается, то отсюда следует, что в первом положении шары будут отталкивать друг друга, во втором же — притягивать. Результатом действия этих сил между соседними препятствиями является, очевидно, тенденция соединяться в слои. Этому случаю можно противопоставить случай железных опилок в магнитном поле, направление которого параллельно направлению воздушного потока. Здесь в первом положении имеет место притяжение, во втором отталкивание, и результатом этого является тенденция опилок соединяться в *нити*,

[1]) W. König, *Wied. Ann.*, том XLII, стр. 353, 549, 1891.

На основании исследования Кирхгоффа Кениг вычислил силы, действующие в случае двух сфер, расположенных не слишком близко друг к другу. Если a_1, a_2 — радиусы сфер, r — их расстояние друг от друга, θ — угол между линией центров и направлением потока, которое принято за ось z-ов (фиг. 54d), W — скорость потока, то компоненты силы, действующей на сферу B, в направлении z и в направлении x, проведенном перпендикулярно к z в плоскости, содержащей z и линию центров, даются выражениями:



Фиг. 54d.

$$Z = -\frac{3'\pi\rho a_1^3 a_2^3 W^2}{r^4}\cos\theta(3 - 5\cos^2\theta), \quad (3)$$

$$X = -\frac{3\pi\rho a_1^3 a_2^3 W^2}{r^4}\sin\theta(1 - 5\cos^2\theta), \quad (4)$$

третья компонента Y обращается в нуль в силу симметрии. В случае рис. 54b $\theta = 0$, и имеет место отталкивание, равное

$$\frac{6\pi\rho a_1^3 a_2^3 W^2}{r^4},$$

в случае рис. 54c $\theta = \frac{1}{2}\pi$, и получается притяжение с силой

$$\frac{3\pi\rho a_1^3 a_2^3 W^2}{r^4}.$$

В промежуточных положениях направление силы не совпадает с линией центров.

Если сферы жестко связаны, то силы, действующие на систему, приводятся к паре (стремящейся увеличить θ) с моментом, выражающимся в виде

$$-Z\sin\theta + X\cos\theta = \frac{3\pi\rho a_1^3 a_2^3 W^2}{r^3}\sin 2\theta. \quad (5)$$

Если поток переменный, то в (3), (4), (5) необходимо взять *среднее* значение W^2.

254. Точное экспериментальное определение скорости звука является предметом большей трудности, чем этого можно было бы ожидать. Наблюдения на открытом воздухе подвержены ошибкам, обусловленным действием ветра и неопределенностью в определении точного состояния атмосферы, ее температуры и влажности. С другой стороны, когда звук распространяется через воздух, содержащийся в трубах, возникает возмущение вследствие трения и переноса тепла; и хотя больших ошибок за счет этих источников в случае труб значительного диаметра, таких, как некоторые из применявшихся Реньо, можно не опасаться, все же трудно чувствовать себя уверенным в том, что идеальные плоские волны теории реализуются достаточно близко.

Следующая таблица [1]) содержит перечень главных экспериментальных определений, сделанных до сих пор.

Имена наблюдателей	Скорость звука при 0° С в метрах	Имена наблюдателей	Скорость звука при 0° С в метрах
Академия Наук [Франц.] (1738)	332	Штампфер и Мирбак . .	332,4
Бенценберг (1811) . . .	333,7 332,3	Бравэ и Мартэн (1844) .	332,4
Голдингхэм (1821) . . .	331,1	Вертгейм	321,6
Бюро Долгот (1822)	330,6	Стон (1871)	331,4
Молль и ван Беек . . .	332,2	Ле-Ру	330,7
		Реньо	330,7

В опытах Стона [2]) участок, на протяжении которого замерялся звук, начинался на расстоянии 640 футов от источника, так что ошибки, обязанные избыточным возмущениям, были в значительной степени избегнуты.

Босша [3]) предложил для определения скорости звука метод, не требующий применения больших расстояний. Этот метод зависит от точности, с какою ухо в состоянии определить, одновременны ли два частые тиканья или нет. В форме, приданной опыту Кенигом [4]), два маленьких электромагнитных счетчика управляются камертонным прерывателем (§ 64) с периодом в одну десятую долю секунды и дают синхронные тиканья того же самого периода. Когда счетчики находятся рядом, слышимые тиканья совпадают, но когда один счетчик постепенно удаляют от уха, то обе серии тиканий обособляются. Когда разность расстояний составляет около 34 метров, совпадение снова имеет место; это доказывает, что 34 метра составляют приблизительно то расстояние, которое проходит звук за одну десятую долю секунды.

[На основании опытов, сделанных в трубах, Виолль и Вотье[5]) дают для свободного воздуха 331,10. Результат включает поправку, достигающую 0,68; последняя имеет более или менее теоретический характер, так как представляет собой предполагаемое влияние трубы (0,7 *м* диаметром).]

---

[1]) Bosanquet, *Phil. Mag.*, апрель, 1877.
[2]) Stone, *Phil. Trans.*, стр. 1. 1872,
[3]) Bosscha, *Pogg. Ann.*, том XCII, 486, 1854.
[4]) König, *Pogg. Ann.*, том CXVIII, 610, 1863.
[5]) Violle et Vautier, *Ann. de Chim.*, том XIX, 1890.

ГЛАВА XII

КОЛЕБАНИЯ В ТРУБАХ

255. Мы уже рассмотрели (§ 245) решение нашего основного уравнения, когда потенциал скорости в неограниченной массе жидкости является функцией только одной пространственной координаты. В отсутствии трения введение любого числа неподвижных цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными данной координате, не вызвало бы никакого изменения; действительно, даже при отсутствии этих поверхностей жидкость не имеет тенденции двигаться через них. Если одна из цилиндрических поверхностей замкнутая (по отношению к ее поперечному сечению), то мы имеем важную проблему аксиального движения воздуха внутри цилиндрической трубы; это движение, если механические условия на концах трубы заданы, не зависит от того, что происходит вне трубы.

Рассмотрим простое гармоническое колебание; мы знаем (§ 245), что, если φ изменяется пропорционально e^{int}

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k^2\varphi = 0, \tag{1}$$

где

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n}{a}. \tag{2}$$

Решение может быть написано в двух формах

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= (A\cos kx + B\sin kx)\, e^{int}, \\ \varphi &= (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})\, e^{int}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

причем в окончательной форме этих уравнений мы удержим только действительные их части. Первая форма наиболее удобна, когда колебание стоячее или близкое к нему, а вторая — когда движение сводится к положительной или отрицательной бегущей волне. Постоянные A и B в символическом уравнении могут быть комплексными, и, таким образом, окончательное выражение в действительных величинах будет заключать *четыре* произвольные постоянные. Если мы желаем пользоваться действительными величинами на всем протяжении решения, мы должны положить

$$\varphi = (A\cos kx + B\sin kx)\cos nt + (C\cos kx + D\sin kx)\sin nt, \tag{4}$$

но при этом выкладки будут, вообще говоря, длиннее. В тех случаях, когда не может возникнуть никаких неясностей, мы будем иногда для краткости опускать или вводить обратно множитель, содержащий время, не упоминая об этом особо. Уравнения, подобные (1), конечно, одинаково справедливы, будет ли подразумеваться этот множитель или нет.

Взяв первое из выражений (3), мы можем написать

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= A\cos kx + B\sin kx, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= -kA\sin kx + kB\cos kx. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Если имеется некоторая точка, в которой φ или $\partial\varphi/\partial x$ все время равны нулю, то отношение $A:B$ должно быть действительным, и тогда волна является *стоячей*, т. е. одинакова по фазе во всех точках одновременно.

Предположим, что в начале координат имеется узел. Тогда при $x=0$ $\partial\varphi/\partial x$ обращается в нуль — условие, из которого следует $B=0$. Таким образом,

$$\varphi = A\cos kxe^{int}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -kA\sin kxe^{int}, \tag{6}$$

откуда, если заменить A через $Pe^{i\theta}$ и отбросить мнимую часть,

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= P\cos kx\cos(nt+\theta), \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= -kP\sin kx\cos(nt+\theta). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Из этих уравнений мы видим, что $\partial\varphi/\partial x$ обращается в нуль всюду, где $\sin kx=0$, т. е. что кроме начала координат узлы имеются в точках $x=\frac{1}{2}m\lambda$, где m — всякое положительное или отрицательное целое число. В любом из этих мест можно было бы поместить поперек трубы нормально к x бесконечно-тонкие твердые плоские перегородки, нисколько не нарушая движения. Посредине между каждой парой последовательных узлов имеется *пучность*, т. е. место, где нет изменения давления, так как $\delta p=-\rho\dot{\varphi}$ (6) § 244. В любой из этих пучностей можно было бы установить сообщение с внешней атмосферой, не вызывая этим никакого возмущения движения воздухом, проходящим внутрь или наружу. Пучности — места максимальной скорости, а узлы — места максимального изменения давления. Через промежутки длиною λ вся картина в точности повторяется.

Если в точке $x=l$ имеется, как и в начале координат, узел, то $\sin kl=0$, или $\lambda=2l/m$, где m — положительное целое число. Самым низким тоном, с каким может звучать воздух, содержащийся в закрытой с обеих сторон трубе длины l, является, поэтому, тон, который соответствует длине волны $2l$. Этот вывод хорошо оправдывается независимо от того, каким газом наполнена труба, но частота, т. е.

место тона в музыкальной шкале, зависит также и от природы газа. Период колебания дается выражением

$$\tau = \frac{\lambda}{a} = \frac{2l}{a}. \tag{8}$$

Другие тоны, возможные для трубы, закрытой с обоих концов, имеют периоды, в целое число раз меньшие периода наиболее низкого тона, а вся система образует гармоническую шкалу.

Предположим теперь, — не останавливаясь в настоящий момент на том, как обеспечить такое положение вещей, — что в точке $x = l$ вместо узла имеется пучность. Уравнение (6) дает $\cos kl = 0$, откуда $\lambda = 4l/(2m+1)$, где m — нуль или целое положительное число. В этом случае самый низкий тон имеет длину волны, равную учетверенной длине трубы, считаемой от узла до пучности, другие же тоны образуют с ним гармоническую шкалу, в которой, однако, отсутствуют все члены четного порядка.

256. С помощью твердой перегородки нетрудно получить узел в любой желаемой точке трубы, но условие для пучности, требующее, чтобы давление ни при каких обстоятельствах не менялось, можно реализовать только приближенно. В большинстве случаев изменение давления в любой точке трубы можно сделать малым, установив свободное сообщение с внешним воздухом. Таким именно образом Эйлер и Лагранж принимали постоянство давления, в качестве условия, которое удовлетворяется на конце открытой трубы. Впоследствии мы возвратимся к проблеме открытой трубы и исследуем с помощью строгих приемов условия, удовлетворяющиеся на открытом конце. Для нашей непосредственной цели достаточно знать — что, впрочем, довольно, — что открытый конец трубы может рассматриваться как пучность, если диаметром трубы можно пренебречь в сравнении с длиной волны, при условии, что само внешнее давление вблизи открытого конца не меняется по какой-либо причине, не зависящей от движения внутри трубы. Когда имеется некоторый независимый источник звука, то давление у конца трубы такое же, какое было бы в этом самом месте, если бы труба была удалена. Препятствием, не позволяющим удовлетворить условию для пучности в любой желаемой точке, является инерция механизма, требующегося для поддержания давления. Для теоретических целей мы можем не обращать внимания на эту трудность и представить себе лишенный массы поршень, прижимаемый сжатой пружиной, также не имеющей массы. Предположение о наличии пучности у открытого конца трубы равносильно пренебрежению инерцией воздуха, находящегося снаружи.

Мы видели, что если в какой-либо точке трубы существует узел, то должен быть целый ряд таких узлов, расположенных через одинаковые интервалы $\frac{1}{2}\lambda$; далее, что посредине между каждыми двумя последовательными узлами должна быть пучность и что волна в трубе должна быть стоячей. Такое же заключение справедливо и в случае,

когда в какой-либо точке имеется пучность, однако, вполне возможно, что в трубе вообще не будет ни узлов, ни пучностей; так, например, обстоит дело в случае, когда движение сводится к положительной или отрицательной бегущей волне. В стоячей волне перенос энергии вдоль трубы не имеет места ни в каком направлении, так как энергия не может проходить через узел или пучность.

257. Соотношения между длинами открытой или закрытой трубы и длинами волн заключенных в них столбов воздуха можно исследовать также, проследив за движением *импульса*, под которым понимается волна, заключенная в узких пределах и состоящая из равномерно сжатой или разреженной жидкости. Рассматривая вопрос с этой точки зрения, необходимо тщательно учесть обстоятельства, при которых имеют место различные отражения. Предположим сначала, что импульс перемещается в положительном направлении, к перегородке, закрепленной поперек трубы. Так как энергия, заключенная в волне, не может уйти из трубы, то должна существовать отраженная волна, а то, что эта отраженная волна также является волной сжатия, следует из факта отсутствия потери жидкости. К этому же заключению можно прийти другим путем. Эффект перегородки можно имитировать, введя на одинаковом расстоянии аналогичную волну сжатия, движущуюся в отрицательном направлении. Так как обе эти волны — волны сжатия и распространяются они в противоположных направлениях, то скорости жидкости в обеих волнах равны и противоположны и поэтому нейтрализуют друг друга, когда волны налагаются.

Если распространение отрицательной отраженной волны прерывается второй перегородкой, то происходит такое же отражение, и волна, все еще остающаяся волной сжатия, снова приобретает свое положительное направление. Когда пройденное расстояние равно удвоенной длине трубы, то первоначальное положение вещей полностью восстанавливается, и этот цикл повторяется сам собой неопределенно долго. Мы находим, таким образом, что период в закрытой с обоих концов трубе есть не что иное, как время, необходимое импульсу, чтобы пройти дважды длину трубы.

Случай трубы с одним открытым концом несколько отличается от этого. Дополнительная отрицательная волна, необходимая для имитации эффекта открытого конца, должна, очевидно, быть волной разрежения, способной нейтрализовать положительное давление первичной волны сжатия, и таким образом, в акте отражения волна изменяет свой характер волны сжатия на волну разрежения или волны разрежения на волну сжатия. Иначе можно рассмотреть этот вопрос, заметив, что в положительном импульсе сжатия количество движения направлено вперед и, в отсутствии необходимых сил, не может быть изменено путем отражения. Но движение количества движения вперед в отраженной отрицательной волне неразрывно связано с состоянием разрежения.

Когда оба конца трубы открыты, перемещающийся по ней взад и вперед импульс полностью восстанавливает свое первоначальное со-

стояние после того, как пройдет дважды длину трубы, испытав в течение этого процесса два отражения; таким образом, соотношение между длиною и периодом здесь такое же, как и в случае трубы, оба конца которой закрыты; когда же один из концов трубы открыт, а другой закрыт, двойного прохождения недостаточно, чтобы замкнуть цикл изменений. Первоначальный характер волны сжатия или волны разрежения может восстановиться лишь после двух отражений от открытого конца, и соответственно этому в данном случае период есть время, требующееся импульсу для того, чтобы пройти *четыре* раза длину трубы.

258. После того как соответствующие проблемы были подробно рассмотрены в главе о струнах, уже нет надобности говорить особенно много о сложных колебаниях столбов воздуха. В качестве простого примера мы можем взять случай открытой с одного конца трубы, которая внезапно приводится в состояние покоя в момент времени $t=0$, после того как в течение некоторого времени она находилась в движении с постоянной скоростью, параллельной ее длине. Тогда начальным состоянием заключенного в ней воздуха является состояние движения с постоянной скоростью u_0, параллельной x, при отсутствии сжатия и разрежения. Если мы примем начало координат на закрытом конце, то общее решение, в силу (7) § 255, будет иметь вид:

$$\varphi = (A_1 \cos n_1 t + B_1 \sin n_1 t) \cos k_1 x + \\ + (A_2 \cos n_2 t + B_2 \sin n_2 t) \cos k_2 x + \ldots, \qquad (1)$$

где $k_r = \left(r - \frac{1}{2}\right)\pi/l$, $n_r = ak_r$, а A_1, B_1, A_2, B_2, ... — произвольные постоянные.

Так как φ в начальный момент равно нулю для всех значений x, то коэфициенты B должны быть также равны нулю; коэфициенты A определяются из условия, что для всех значений x между 0 и l

$$\sum k_r A_r \sin k_r x = -u_0, \qquad (2)$$

где суммирование распространяется на все целые значения r от 1 до ∞. Определение коэфициентов A из (2) производится обычным путем. Умножая на $\sin k_r x\, dx$ и интегрируя от 0 до l, мы получаем

$$\frac{1}{2} l k_r A_r = -u_0 l k_r$$

или

$$A_r = -\frac{2u_0}{k_r^2 l}. \qquad (3)$$

Полное решение есть поэтому

$$\varphi = -\frac{2u_0}{l} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\cos k_r x}{k_r^2} \cos n_r t. \qquad (4)$$

259. Пусть в случае трубы, закрытой у начала координат и открытой с конца $x=l$, $\varphi=\cos nt$ будет величиной потенциала у открытого конца, обусловленного внешним источником звука. Определяя P и θ в уравнении (7) § 255, мы находим:

$$\varphi=\frac{\cos kx}{\cos kl}\cos nt. \tag{1}$$

Очевидно, что колебание внутри трубы минимальное, когда $\cos kl=\pm 1$, т. е. когда l есть кратное $\frac{1}{2}\lambda$, а тогда при $x=l$ имеется узел. Когда l — нечетное кратное $\frac{1}{4}\lambda$, $\cos kl$ обращается в нуль, и тогда, согласно (1), скорость сделалась бы бесконечно большой. В этом случае вывод о том, что давление у открытого конца не зависит от того, что происходит внутри трубы, отпадает, и мы можем только заключить, что колебание, в результате изохронизма, очень велико. Так как при $x=0$ имеется узел, то там, где x — нечетное кратное $\frac{1}{4}\lambda$, должна получиться пучность, и мы заключаем, что в случае изохронизма изменение давления у открытого конца трубы, обязанное внешней причине, в точности нейтрализуется изменением давления, обязанным движению внутри самой трубы. Если бы, действительно, у открытого конца имело место изменение давления в целом, то движение, в отсутствии диссипативных сил, должно было бы беспредельно возрастать.

Если мы предположим, что начало является не узлом, а пучностью, то соответствующее решение

$$\varphi=\frac{\sin kx}{\sin kl}\cos nt, \tag{2}$$

где $\varphi=\cos nt$ — заданное значение φ у открытого конца $x=l$. Это выражение становится бесконечным, когда $kl=m\pi$ или $l=\frac{1}{2}m\lambda$.

Рассмотрим теперь случай трубы, оба конца которой открыты и подвергаются действию возмущений одинакового периода, для которых φ равно соответственно He^{int}, Ke^{int}. Если только возмущения у концов не находится в одной и той же фазе, то, по крайней мере, один из коэфициентов H, K должен быть комплексным.

Беря (3) § 255 в первой форме, мы имеем в качестве общего решения для φ

$$\varphi=e^{int}(A\cos kx+B\sin kx).$$

Если мы возьмем начало координат в середине трубы и примем, что значения He^{int}, Ke^{int} отвечают соответственно $x=l$, $x=-l$, то мы получим для определения A и B выражения

$$H=A\cos kl+B\sin kl,$$
$$K=A\cos kl-B\sin kl,$$

откуда

$$A=\frac{H+K}{2\cos kl},\quad B=\frac{H-K}{2\sin kl}, \tag{3}$$

что дает

$$\varphi=e^{int}\frac{H\sin k(l+x)+K\sin k(l-x)}{\sin 2kl}. \tag{4}$$

Этот результат можно вывести также из (2), если учесть, что требуемое движение возникает в результате наложения движения, обязанного возмущению He^{int}, которое вычислено в предположении, что у другого конца, $x=-l$, находится пучность, на движение, обязанное возмущению Ke^{int}, выведенное в предположении, что пучность находится на конце $x=l$.

Колебание, выраженное (4), не может быть *стоячим*, если только отношение $H:K$ не является действительным числом, т. е. если возмущения на концах одинаковы или противоположны по фазе. Отсюда, если исключить оговоренные случаи, мы получим, что пучности нигде нет, а поэтому нет места, в котором можно было бы присоединить ответвление трубы, вдоль которого звук не будет распространяться [1]).

В середине трубы, для которой $x=0$,

$$\varphi=\frac{H+K}{2\cos kl}e^{int}. \tag{5}$$

Это показывает, что изменение давления (пропорциональное $\dot{\varphi}$) обращается в нуль, если $H+K=0$, т. е. если возмущения на концах равны и *противоположны* по фазе. Если же это условие не удовлетворено, то выражение становится бесконечным, когда $2l=\frac{1}{2}(2m+1)\lambda$.

В точке, отстоящей на $\frac{1}{4}\lambda$ от середины трубы, выражение для φ имеет вид:

$$\varphi=\frac{H-K}{2\sin kl}e^{int}; \tag{6}$$

оно обращается в нуль, когда $H=K$, т. е. когда возмущения на концах равны и находятся в *одинаковой* фазе. Вообще, φ становится бесконечно большим, когда $\sin kl=0$ или $2l=m\lambda$.

---

[1]) Устройство этого рода было предложено проф. Мейером (*Phil. Mag.*, том XLV, стр. 90, 1873) для сравнения интенсивностей источников звука одной и той же высоты. Каждый из концов трубы подвергается воздействию одного из сравниваемых источников звука, и расстояния при этом подбираются до тех пор, пока амплитуды колебаний, обозначенные через H и K, не будут равны. Труба, служащая ответвлением, проводится к манометрической коробке (§ 262); в этом методе предполагается, что переменой точки присоединения возмущение пламени можно устранить. Из обсуждения вопроса в тексте видно, что это допущение теоретически не является правильным.

Если на одном конце неограниченной трубы происходит изменение давления, обязанное внешнему источнику, то внутрь трубы от этого конца будет распространяться цуг бегущих волн. Таким образом, если длина вдоль трубы, измеряемая от открытого конца, есть y, потенциал скорости выражается через $\varphi = \cos(nt - ny/a)$; это соответствует $\varphi = \cos nt$ для $y = 0$, так что, если причиной возмущения внутри трубы будет прохождение цуга бегущих волн через ее открытый конец, то интенсивность внутри трубы будет та же самая, что и во внешнем пространстве. Не следует забывать, что диаметр трубы предполагается бесконечно малым в сравнении с длиной волны.

Предположим теперь, что источник движения находится внутри самой трубы, например, что он обязан принудительному движению поршня в начале координат [1]). Постоянные в (5) § 255 должны быть определены из условий (скажем) $\partial\varphi / \partial x = \cos nt$ для $x = 0$ и $\varphi = 0$ для $x = l$. Таким образом, $kA = -\operatorname{tg} kl$, $kB = 1$, и выражение для φ имеет вид:

$$\varphi = \frac{\sin k(x - l)}{k \cos kl} . \tag{7}$$

Движение имеет минимум, когда $\cos kl = \pm 1$, т. е. когда длина трубы кратна $\frac{1}{2}\lambda$.

При l, равном некоторому нечетному кратному $\frac{1}{4}\lambda$, место, занимаемое поршнем, было бы узлом, если бы открытый конец был действительно пучностью, но в этом случае решение теряет смысл. Выход энергии из трубы не позволяет энергии скапливаться за определенной точкой; однако, это можно не учитывать до тех пор, пока открытый конец рассматривается строго как пучность. Мы возвратимся к вопросу о резонансе после того, как рассмотрим подробнее теорию открытого конца, когда мы будем в состоянии трактовать ее более удовлетворительным образом.

Равным образом, если точка $x = l$ является узлом, а не пучностью, выражение для φ имеет вид:

$$\varphi = \frac{\cos k(l - x)}{k \sin kl} , \tag{8}$$

и, таким образом, движение имеет минимум, когда l — нечетное кратное $\frac{1}{4}\lambda$, а тогда начало является пучностью. При l четном кратном $\frac{1}{4}\lambda$, начало должно было бы быть узлом, что запрещено условиями задачи. В этом случае, согласно (8), скорость становится бесконечной, а это означает, что лишь наличие диссипативных сил препятствует беспредельному возрастанию колебания.

[1]) Эти проблемы рассматриваются Пуассоном, *Mém. de l'Institut*, том II, стр. 305, 1819.

260. Экспериментальное исследование воздушных волн в трубах было выполнено со значительным успехом Кундтом [1]). Получать волны довольно легко; не так легко, однако, изобрести метод, с помощью которого можно было бы их соответствующим образом исследовать. Кундт открыл, что узлы стоячих волн можно сделать видимыми при помощи пыли. Небольшое количество мелкого песка или семян ликоподия, насыпанное внутри стеклянной трубы, заключающей колеблющийся столб воздуха, располагается в виде периодически повторяющихся сгущений, по которым легко определить положения узлов и измерить интервалы между ними. В экспериментах Кундта звук возникал в результате продольных колебаний стеклянной трубы, носившей название звучащей трубы, а пыльные фигуры образовывались во второй, более широкой, трубе, носившей название волновой трубы; последняя была снабжена подвижной пробкой, позволявшей изменять ее длину. Другой конец волновой трубы был закрыт пробкой, через которую проходила на половину своей длины звучащая труба. Посредством трения звучащую трубу заставляли колебаться с частотой самого низкого ее тона, так что центральная ее точка была узловой, а ее внутренний конец (закрытый пробкой) возбуждал воздушные колебания в волновой трубе. С помощью пробки длину столба воздуха можно было подобрать так, чтобы сделать колебания возможно более сильными, что происходит тогда, когда расстояние между пробкой и концом звучащей трубы есть кратное половины длины волны звука.

С этим аппаратом Кундту удалось произвести сравнение длин волн одного и того же звука в различных газах, откуда сразу же получаются относительные скорости распространения; результаты, однако, не были полностью удовлетворительными. Было найдено, что интервалы повторяемости пыльных фигур не равны строго друг другу и, что еще хуже, что высота звука не была постоянной от одного опыта к другому. Удалось обнаружить, что эти недостатки обязаны передаче движения волновой трубе через пробку, вносившую возмущения в пыльные фигуры, высота же была непостоянной из-за неизбежных вариаций в установке аппарата. Чтобы устранить их, Кундт заменил пробку, которая давала слишком жесткое соединение между трубами, слоями листовой резины, обмотанными шелком; он получил этим путем гибкое и совершенно воздухопроницаемое соединение, а чтобы избежать риска неточного сравнения длин волн благодаря возможному изменению высоты, он перестроил аппарат так, чтобы в нем возможно было возбуждать две системы пыльных фигур одновременно при помощи одного и того же звука. Другое преимущество нового метода состояло в исключении температурных поправок.

В усовершенствованном „двойном аппарате“ звучащую трубу заставляли, возбуждая ее трением, вблизи середины, колебаться *в ее*

---

[1]) Kundt, *Pogg. Ann.*, том CXXXV. стр. 337, 1868.

втором обертоне; узлы, таким образом, образовывались в точках, отстоящих от концов трубы на одну четверть ее длины. В каждой из этих точек было осуществлено соединение с независимой волновой трубой, снабженной перемещающимся поршнем и ответвляющимися трубами с кранами для впуска различных газов. Очевидно, что пылевые фигуры, образующиеся в обеих трубах, строго соответствуют одной и той же частоте и что поэтому сравнение промежутков повторяемости фигур приводит к точному определению скоростей распространения звука, в условиях опыта, для двух газов, которыми наполнены трубы. Результаты, к которым пришел Кундт, были следующие:

(*a*) Скорость звука в трубе уменьшается с ее диаметром. Выше некоторого определенного диаметра изменение, однако, неощутимо.

(*b*) Уменьшение скорости возрастает с длиной волны применяемого тона.

(*c*) Порошок, рассыпанный в трубе, уменьшает скорость звука в узких трубах, в широких же никакого влияния не оказывает.

(*d*) В узких трубах эффект порошка возрастает, когда он очень тонко измельчен и поэтому сильно возбуждается.

(*e*) Шероховатость внутренней поверхности узкой трубы или увеличение ее поверхности уменьшают скорость.

(*f*) В широких трубах эти изменения скорости несущественны и не препятствуют применению метода для точных определений.

(*g*) Влияние интенсивности звука на скорость не может быть доказано.

(*h*) Длины волн всех тонов трубы, за исключением первого, измеряемые по пылевым фигурам, не зависят от формы возбуждения.

(*i*) В широких трубах скорость не зависит от давления, в узких же с давлением возрастает.

(j) Все наблюденные изменения скорости обязаны трению и особенно теплообмену между воздухом и стенками трубы.

(*k*) Скорость звука при 100° точно совпадает с результатами теории [1]).

Мы еще возвратимся к вопросу о распространении звука в узких трубах, на которое влияют причины, упомянутые выше (*j*), и исследуем затем формулы, данные Гельмгольцем и Кирхгоффом.

(Происхождение своеобразной поперечной ребристости, которая является основной чертой пылевых фигур, уже было рассмотрено в § 253*b*. Согласно наблюдениям Дворжака [2]) мощные колебания, которые происходят в трубке Кундта, сопровождаются некоторыми средними движениями газа. Так, вблизи стенок имеется поток от

[1]) Судя по некоторым выражениям в уже цитированном мемуаре, из которого, в основном, взято изложенное в тексте, Кундт как будто намеревался продолжить свои исследования; я, однако, не мог найти каких-либо более поздних его статей по этому вопросу.

[2]) Dvořák, *Pogg. Ann.*, том CLVII, стр. 61, 1876.

пучностей к узлам, а во внутреннем пространстве — обратный поток, от узлов к пучностям. Это является следствием вязкости, действующей с особенной силой на части жидкости, смежные со стенками [1]). Нам, может быть, еще удастся возвратиться к этому вопросу в одной из дальнейших глав.)

261. В опытах, описанных в предыдущем разделе, колебания воздуха являются *вынужденными*, так как высота определяется внешним источником, а не (в сколько-нибудь значительной степени) длиной столба воздуха. Правда, строго говоря, все незатухающие колебания являются вынужденными, так как свободные колебания не могут продолжаться без затухания, если только трение не отсутствует полностью, т. е. если случай не идеальный. Тем не менее практически важно отличать колебания столба воздуха возбуждаемым продольно колеблющимся стержнем или камертоном от таких колебаний, как колебания органной трубы или поющего пламени. В последних случаях высота звука зависит, главным образом, от длины столба воздуха, функции же воздушного потока или пламени [2]) заключаются только в восстановлении энергии, потерянной вследствие трения и сообщения с внешним воздухом. Воздух в органной трубе следует рассматривать как столб, колеблющийся почти свободно, причем нижний конец, через который проходит струя воздуха, трактуется грубо как открытый, а верхний конец — как открытый или закрытый, смотря по тому, что имеет место. Так, длина волны основного тона закрытой трубы в четыре раза больше длины трубы, и по всей длине трубы, за исключением концов, здесь нет ни узла, ни пучности. Обертоны трубы — *нечетные* гармоники: дуодецима, большая терция и т. д., соответствующие различным подразделениям столба воздуха. Например, в случае дуодецимы имеется узел в точке трисекции, ближайшей к открытому концу, и узел в другой точке трисекции, посредине между первой и закрытым концом трубы.

В случае открытой органной трубы оба ее конца являются пучностями, и поэтому должен иметься, по меньшей мере, один внутренний узел. Длина волны основного тона равна удвоенной длине трубы, которая разделяется на две одинаковые части узлом в середине. В этом заключается объяснение обычного правила, согласно которому высота звука открытой трубы та же самая, что и у закрытой трубы вдвое меньшей длины. По причинам, которые будут полнее объяснены в одной из следующих глав, связанным с приведенной выше несовершенной трактовкой трубы с открытым концом, правило это справедливо лишь приближенно. Открытая труба, отличаясь в этом отношении от закрытой, способна издавать полную серию тонов, образую-

[1]) *Phil. Trans.*, том CLXXV, стр. 1, 1884.

[2]) Вопрос о чувствительных пламенах с трубами и без труб рассматривается довольно подробно проф. Тиндалем в его труде о звуке; однако, механизм этого рода явлений исследован еще очень несовершенно. Мы возвратимся к нему в следующей главе.

щих гармоническую шкалу, основанную на ее главном тоне. В случае октавы имеется пучность в центре трубы и узлы в точках, расположенных посредине между центром и краями.

Так как частота колебания в трубе пропорциональна скорости распространения звука в газе, которым заполнена труба, то сравнение высот нот, полученных от одной и той же трубы, при наполнении различными газами, является очевидным методом определения скорости распространения звука в тех случаях, когда невозможность получения достаточно длинного столба газа препятствует применению прямого метода. Путь в этом направлении проложил, со свойственной ему проницательностью, Хладни. Этим же вопросом позднее занимались Дюлонг [1]) и Вертгейм [2]), получившие вполне удовлетворительные результаты.

262. Состояние воздуха внутри органной трубы было исследовано экспериментально Саваром [3]), который помещал в трубу небольшую натянутую мембрану, на которой было насыпано немного песка. Вблизи узла песок оставался практически невозмущенным, но в остальных участках он приходил в колебания, тем более энергичные, чем ближе эти участки были расположены к пучности. Гораздо более поразителен, однако, эксперимент, придуманный Кенигом. В этом опыте указателем колебания служит небольшое газовое пламя, питаемое через трубку, которая сообщается с полостью, носящей название манометрической капсулы. Эта полость ограничена с одной стороны мембраной, на которую действует колеблющийся воздух. Когда мембрана колеблется, вследствие чего емкость коробки делается переменной, приток газа делается непостоянным, а пламя становится прерывистым. Период колебания, конечно, слишком мал, чтобы эта прерывистость обнаружилась, когда пламя наблюдается непосредственно. Покачивая головой или при помощи подвижного зеркала, можно разложить его на более или менее отдельные изображения; но даже и без разложения непостоянный характер пламени ясен из его общего вида. В опытах с органными трубами одна или несколько капсул монтируются на трубе таким образом, чтобы мембраны находились в соприкосновении с колеблющимся столбом воздуха; различие в пламени очень заметно, в зависимости от того, расположена ли соответствующая капсула в узле или в пучности.

263. До сих пор мы предполагали трубу прямой, но легко представить себе, что это обстоятельство, когда поперечное сечение мало и площадь его не меняется, не имеет большого значения. Представим себе кривую ось x, идущую посредине трубы, и пусть постоянное сечение, перпендикулярное к этой оси, есть S. Когда наибольший диаметр сечения S очень мал сравнительно с длиной волны звука, то

[1]) Dulong, „Recherches sur les chaleurs spécifiques des fluides élastiques", *Ann. de Chim.*, том XLI, стр. 113, 1829.
[2]) Wertheim, *Ann. de Chim.*, третья серия, том XXIII, стр. 434, 1848.
[3]) Savart, *Ann. de Chim.*, том XXIV, стр. 56, 1823.

потенциал скорости φ становится почти неизменным в пределах сечения; прилагая теорему Грина к пространству, ограниченному внутренней поверхностью трубы и двумя поперечными сечениями, мы получаем

$$\iiint \nabla^2\varphi \, dV = S \cdot \Delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right).$$

Но, в силу общего уравнения движения,

$$\iiint \nabla^2\varphi \, dV = \frac{1}{a^2}\iiint \ddot{\varphi} \, dV = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\iiint \varphi \, dV = \frac{S}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \varphi \, dx,$$

и в пределе, когда расстояние между сечениями стремится к нулю,

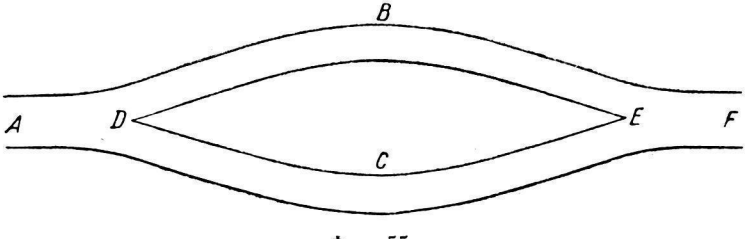
$$\int \varphi \, dx = \varphi \, dx, \quad \Delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} dx,$$

так что

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \tag{1}$$

а это показывает, что зависимость φ от x такая же, как и для прямой трубы. С помощью уравнения (1) легко исследовать колебания воздуха в кривых трубах постоянного сечения; результаты являются строгими следствиями наших основных уравнений, которые не учитывают трения, когда сечение предполагается бесконечно малым. В случае тонких труб, какие употреблялись бы в экспериментах, описанные результаты, во всяком случае, достаточны, чтобы дать очень хорошее представление о том, что происходит в действительности.

264. Мы перейдем теперь к рассмотрению некоторых случаев связанных труб. На фиг. 55 AD представляет тонкую трубу, которая



Фиг. 55.

разделяется в D на две ветви DB и DC. В E ветви соединяются снова и образуют одну трубу EF. Сечения труб AD и EF и их ветвей предполагаются постоянными, а также очень малыми.

Предположим сначала, что в A вступает положительная волна произвольного типа. По приходе к разветвлению D она дает две положительные волны: в B и в C и, если только не удовлетворено

некоторое определенное условие, отраженную отрицательную волну в A. Обозначим потенциалы положительных волн через f_A, f_B, f_C; f в каждом случае—некоторая функция $x-at$; потенциал отраженной волны пусть будет $F(x+at)$. Тогда условия, которые должны быть удовлетворены в D, сводятся к тому, что, во-первых, давления для всех трех труб должны быть одинаковы и, во-вторых, полная скорость жидкости в A должна быть равна сумме полных скоростей жидкости в B и в C. Таким образом, пользуясь буквами A, B, C для обозначения площадей сечений, мы имеем § 244,

$$\left.\begin{aligned} f'_A - F' &= f'_B = f'_C, \\ A(f'_A + F') &= Bf'_B + Cf'_C, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

откуда

$$F' = \frac{B+C-A}{B+C+A} f'_A, \tag{2}$$

$$f'_B = f'_C = \frac{2A}{B+C+A} f'_A\ ^{1}). \tag{3}$$

Очевидно, что f_B и f_C всегда одинаковы. Отражения нет, если

$$B+C=A, \tag{4}$$

т. е. если соединенные сечения ветвей равны сечению главной трубы; а, когда это условие удовлетворено,

$$f_B = f_C = f_A. \tag{5}$$

Волна перемещается тогда в B и C точно так же, как это она делала бы в A, не будь здесь перерыва. Если длины ветвей между D и E равны и сечение F равно сечению A, то волны по приходе в E соединяются в одну волну, распространяющуюся вдоль F, и здесь опять не происходит отражения. Таким образом, разделение трубы не дало абсолютно никакого эффекта, а так как то же самое было бы верно и для отрицательной волны, идущей от F к A, то мы можем вообще заключить, что трубу можно разделить на две или более ветвей одинаковой длины, и это нисколько не повлияет на законы воздушного колебания, если только общее сечение останется постоянным. Если длины ветвей от D до E неравны, то результат будет иной. Кроме положительной волны в F будут иметься вообще и отраженные отрицательные волны в B и C. Наиболее интересный случай — это, когда волна гармонического типа, и одна из ветвей длиннее чем другая, на некоторую величину, кратную $\frac{1}{2}\lambda$.

---

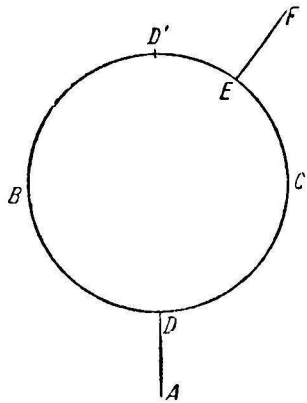
[1]) Эти формулы, в применении к определению отраженной и преломленной волн в месте соединения двух труб с сечениями $B+C$ и A, соответственно, даны Пуассоном, *Mém. de l'Institut*, том II, стр. 305, 1819. Читатель не должен забывать, что оба диаметра должны быть малы в сравнении с длиной волны.

Если разность есть *четное* кратное $\frac{1}{2}\lambda$, то результат будет такой же, как если бы ветви были одинаковой длины, и никакого отражения не произойдет. Предположим, однако, что хотя сечения B и C одинаковы, одна из ветвей длиннее другой на величину, равную *нечетному* кратному $\frac{1}{2}\lambda$. Так как волны приходят в E с противоположными фазами, то из соображений симметрии следует, что положительная волна в F должна исчезнуть и что давление в E, которое необходимо одинаково для всех труб, должно быть постоянным. Волны в B и C отражаются, следовательно, как от открытого конца. Обнаружить, что условия вопроса таким путем удовлетворены, можно еще, предположив, что вблизи E, поперек трубы F, помещена перегородка так, чтобы трубы B и C сообщались без изменения сечения. Волна в каждой трубе будет тогда без помехи проходить в другую, а изменение давления в E, будучи результирующей равных и противоположных компонент, обратится в нуль. Но тогда перегородку можно удалить, не нарушая условий, и вдоль F не будет распространяться никакая волна, каково бы ни было сечение этой трубы. Рассматриваемое нами сейчас устройство было придумано Гершелем и использовано Квинке и другими для экспериментальных целей — применение, описать которое мы будем иметь случай впоследствии. Само это явление часто приводится в качестве примера интерференции, против чего, конечно, нечего возразить, но этого нельзя уже сказать, когда читателя побуждают предположить, что положительные волны в F нейтрализуют друг друга, и что этим все кончается. Не следует забывать, что при интерференции нет потери энергии, а только происходит ее перераспределение; если энергия и уходит из одного места, то она появляется взамен в другом. В настоящем случае положительная волна в A несет с собой энергию. Если волны вдоль F нет, то имеются две возможные альтернативы: энергия накапливается в ветвях, или же она идет назад, вдоль A, в форме отрицательной волны. Для того чтобы видеть, что происходит в действительности, проследим за распространением волн, отраженных в E назад.

Эти волны одинаковы по амплитуде и исходят от E в противоположных фазах; при переходе от E до D одна из них должна пройти расстояние, большее на некоторое нечетное кратное $\frac{1}{2}\lambda$, чем другая, и поэтому по приходе в D они должны оказаться полностью совпадающими. При этих условиях они соединяются в одну волну, которая распространяется в отрицательном направлении вдоль A, и здесь нет никакого отражения. Когда отрицательная волна достигает конца трубы A или подвергается какому-либо иному возмущению на своем пути, то вся она, или часть ее, может отразиться, и тогда процесс повторяется. Но как бы часто это ни происходило, вдоль F волны не будет, если только в резуль-

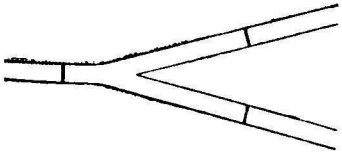
тате накопления, вследствие совпадения периодов, колебание в ветвях не станет настолько большим, что малой его долей далее пренебрегать будет нельзя.

Мы можем рассуждать еще и следующим образом. Предположим, что труба F разделена перегородкой, как прежде. Движение в кольце, будучи обязано силам, действующим в D, необходимо симметрично относительно D и D' — точки, которая делит $DBCD$ на равные части. Поэтому в D' находится узел, и колебание — стоячее. Если это так, то в точке E, отстоящей на $\frac{1}{4}\lambda$ от D' с каждой стороны, должна находиться пучность, даже если перегородку удалить, то в F все равно не будет тенденции к возникновению колебания. Если периметр кольца кратен λ, то в нем может существовать колебание данного периода независимо от всяких боковых отверстий.



Фиг. 56.

Аналогичным образом можно рассматривать и всякую другую комбинацию связанных труб. Общий принцип заключается в том, что в каждом месте соединения можно взять объем достаточно большой, чтобы он заключал в себе область, где отсутствие однородности влияет на закон волн, и все же настолько малый, чтобы наибольшим из его размеров можно было еще пренебречь сравнительно с λ. При этих условиях жидкость внутри данного объема можно рассматривать так, как если бы длина волны была бесконечно большой или сама жидкость несжимаемой; в последнем случае ее потенциал удовлетворял бы уравнению $\nabla^2\varphi = 0$, следуя законам, аналогичным законам электрических явлений.


Фиг. 57.

265. Когда сечение трубы переменно, проблема колебаний воздуха внутри ее в общем случае не может быть решена. Случай конических труб будет рассмотрен в одной из последующих глав. Здесь же мы исследуем приближенное выражение для высоты звука в почти цилиндрической трубе, взяв сначала случай обоих закрытых концов. Метод, который будет здесь применен, аналогичен методу, применявшемуся для струны, плотность которой не вполне постоянна (**§§ 91**, 140). Этот метод основывается на принципе, согласно которому период собственного колебания должен удовлетворять условию стационарности и поэтому может быть вычислен из потенциальной и кинетической энергий некоторого гипотетического движения, не слиш-

ком отличающегося от действительного типа. В согласии с этим планом, мы будем принимать, что скорость, нормальная к некоторому сечению S, постоянна в пределах сечения, что должно быть очень близко к истине, когда изменение S происходит медленно. Пусть X представляет собой полный перенос (поток) жидкости за время t через сечение при x, отсчитываемое от состояния равновесия; тогда X представляет полную скорость потока, а X/S — действительную скорость частиц жидкости, так что кинетическая энергия движения внутри трубы выражается в виде:

$$T = \frac{1}{2}\rho\int\frac{\dot{X}^2}{S}\,dx. \tag{1}$$

Потенциальная энергия § 245 (12) выражается вообще в виде

$$V = \frac{1}{2}a^2\rho\iiint s^2\,dV,$$

или, так как $dV = S\,dx$, через

$$V = \frac{1}{2}a^2\rho\int Ss^2dx. \tag{2}$$

Но, в силу условия непрерывности,

$$-s = \frac{1}{S}\frac{\partial X}{\partial x} \tag{3}$$

и, таким образом,

$$V = \frac{1}{2}a^2\rho\int\frac{1}{S}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2dx. \tag{4}$$

Если мы примем теперь для X выражение того же вида, что при постоянном S, именно

$$X = \sin\frac{\pi x}{l}\cos nt, \tag{5}$$

то мы получим из значений T и V (1) и (4)

$$n^2 = \frac{a^2\pi^2}{l^2}\,\frac{\int_0^l\cos^2\frac{\pi x}{l}\frac{dx}{S}}{\int_0^l\sin^2\frac{\pi x}{l}\frac{dx}{S}}, \tag{6}$$

или, если напишем $S = S_0 + \Delta S$ и пренебрежем квадратом ΔS,

$$n^2 = \frac{a^2\pi^2}{l^2}\left\{1 - 2\int_0^l\cos\frac{2\pi x}{l}\frac{\Delta S}{S_0}\frac{dx}{l}\right\}. \tag{7}$$

Этот результат удобно выразить через Δl, поправку, которую нужно

внести в l, чтобы высоту звука можно было вычислять по обычной формуле, как если бы S было постоянно. Значение Δl определяется формулой

$$\Delta l = \int_0^l \cos \frac{2\pi x}{l} \frac{\Delta S}{S_0} dx. \tag{8}$$

Эффект изменения сечения наибольший вблизи узла или вблизи пучности. Расширение сечения в первом случае понижает высоту, во втором случае — повышает ее. В точках, расположенных посредине между узлами и пучностями, незначительное изменение сечения не дает никакого эффекта. Высота, таким образом, решительно изменяется при расширении или сжатии вблизи середины трубы, однако, влияние незначительной коничности было бы значительно меньшим.

Выражение (8) для Δl в этом виде приложимо только к самому низкому тону; мы можем, однако, прилагать его к m-му тону гармонической шкалы, видоизменив его путем замены $\cos(2\pi x/l)$ через $\cos(2m\pi x/l)$.

В случае трубы, *открытой* с обоих концов, (5) заменяется выражением

$$X = \cos \frac{\pi x}{l} \cos nt, \tag{9}$$

что приводит к формуле

$$\Delta l = -\int_0^l \cos \frac{2\pi x}{l} \frac{\Delta S}{S_0} dx \tag{10}$$

вместо (8). Высота звука на этот раз повышается расширением на концах или сжатием в середине трубы, и, как прежде, на нее не влияет небольшая общая коничность (§ 281).

266. Случай бегущих волн, движущихся в трубе переменного сечения, также интересен. В общей форме эта задача была бы очень трудной, но, если изменение сечения достаточно постепенно, так что значительного изменения не происходит на протяжении многих длин волн, то принцип энергии приведет нас к приближенному решению. Нетрудно видеть, что в предположенном случае заметного отражения волны на каком-либо участке ее пути не будет и что поэтому энергия движения должна оставаться неизменной [1]). Но мы знаем, § 245, что для данной площади фронта волны энергия цуга простых волн пропорциональна квадрату амплитуды, откуда следует, что по мере распространения волн амплитуда колебания изменяется обратно пропорционально корню квадратному из сечения трубы. Во всех остальных отношениях характер колебания остается абсолютно неиз-

[1]) *Phil. Mag.* (5), стр. 261, 1876.

менным. Из этих результатов мы можем получить общее представление о действии слуховой трубки. Очевидно, что согласно обычным приближенным уравнениям не существует предела для концентрации звука, происходящей в трубе с постепенно уменьшающимся сечением.

Этот же самый метод применим, когда плотность среды медленно изменяется от точки к точке. Так, например, амплитуда звуковой волны, перемещающейся вверх по атмосфере, может быть определена из условия, что энергия остается неизменной. Из § 245 видно, что амплитуда изменяется обратно пропорционально квадратному корню из плотности [1]).

---

[1]) Здесь возникает деликатный вопрос об окончательной судьбе звуковых волн, распространяющихся вверх. Следует заметить, что в разреженном воздухе гасящее действие вязкости сильно возрастает.

ГЛАВА XIII

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН

267. Прежде чем приступить к исследованию общих уравнений воздушных колебаний, сосредоточим наше внимание на некоторых специальных проблемах, относящихся, главным образом, к движению в двух измерениях и допускающих строгое и тем не менее сравнительно простое решение. Таким образом, читатель, впервые знакомящийся с предметом, сможет несколько освоиться с применяемыми здесь идеями и методами, перед тем как приступить к преодолению более грозных трудностей.

В предыдущей главе (§ 255) мы исследовали колебания в одном измерении, которые могут происходить параллельно оси трубы, оба конца которой закрыты. Исследуем теперь, какие колебания возможны внутри замкнутого прямоугольного ящика, отказавшись от того ограничения, что движение должно быть только в одном измерении. Для каждого простого колебания, возможного в данной системе, φ изменяется как тригонометрическая функция времени, скажем, $\cos kat$, где k — некоторая постоянная, отсюда $\ddot{\varphi} = -k^2a^2\varphi$, и поэтому, в силу общего дифференциального уравнения (9) § 244,

$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) должно быть удовлетворено всюду в заключенном внутри ящика объеме. Условие на поверхности, которое должно быть удовлетворено на шести гранях ящика, есть просто

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \tag{2}$$

где dn представляет собой элемент нормали к поверхности. Удовлетворить (1) и (2) одновременно возможно только при особых значениях k.

Примем три ребра, встречающиеся в одной вершине, за оси прямоугольных координат и положим, что длины ребер равны, соот-

ветственно, α, β, γ. Мы знаем (§ 255), что

$$\varphi = \cos\left(p\frac{\pi x}{\alpha}\right), \quad \varphi = \cos\left(q\frac{\pi y}{\beta}\right), \quad \varphi = \cos\left(r\frac{\pi z}{\gamma}\right),$$

где p, q, z — целые числа, являются частными решениями задачи. Уравнение (2) удовлетворяется любой из этих форм, а при условии, что k равно $p\pi/\alpha$, $q\pi/\beta$ или $r\pi/\gamma$, как это может иметь место, удовлетворяется также и уравнение (1). Равным образом очевидно, что условие на границе (2) удовлетворяется на всей поверхности формой

$$\varphi = \cos\left(p\frac{\pi x}{\alpha}\right)\cos\left(q\frac{\pi y}{\beta}\right)\cos\left(r\frac{\pi z}{\gamma}\right), \tag{3}$$

которая удовлетворяет также (1), если k взято таким, что

$$k^2 = \pi^2\left(\frac{p^2}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\beta^2} + \frac{r^2}{\gamma^2}\right), \tag{4}$$

где p, q, r, как и прежде, целые числа [1]).

Общее решение, полученное сложением всех частных решений, охватываемых (3), есть

$$\varphi = \sum\sum\sum (A\cos kat + B\sin kat)\cdot\cos\left(p\frac{\pi x}{\alpha}\right)\cdot\cos\left(q\frac{\pi y}{\beta}\right)\cdot\cos\left(r\frac{\pi z}{\gamma}\right), \tag{5}$$

где A и B — произвольные постоянные, и суммирование распространяется на все целые значения p, q, r.

Это решение достаточно общее, чтобы охватить случай любого такого начального состояния внутри ящика, при котором отсутствует молекулярное вращение. Начальное распределение скоростей зависит от начального значения φ, или $\int (u_0 dx + v_0 dy + w_0 dz)$, и по теореме Фурье может быть представлено в виде (5), если приписать соответствующие значения коэфициентам A. Подобным же образом можно представить произвольное начальное распределение сжатия (или разрежения), зависящее от начального значения $\dot{\varphi}$, если приписать соответствующие значения коэфициентам B.

Настоящее исследование можно изложить несколько иначе, если предположить, в согласии с теоремой Фурье, что общее значение φ в момент t может быть выражено в форме

$$\varphi = \sum\sum\sum C\cos\left(p\frac{\pi x}{\alpha}\right)\cdot\cos\left(q\frac{\pi y}{\beta}\right)\cdot\cos\left(r\frac{\pi z}{\gamma}\right),$$

где коэфициенты C могут зависеть от t, но не от x, y, z. Тогда можно было бы образовать выражения для T и V и показать, что они заключают только квадраты коэфициентов C, а из этих выраже-

[1]) Duhamel, *Liouville Journ. Math.* том XIV, стр. 84, 1849.

ний вытекли бы нормальные уравнения движения, связывающие каждую нормальную координату C с временем.

Колебание наинизшей частоты — то, в котором все движение параллельно наибольшему измерению ящика, и здесь нет внутреннего узла.

Таким образом, если α наибольшее из трех ребер α, β, γ, то мы должны взять $p=1$, $q=0$, $r=0$.

В случае кубического ящика $\alpha=\beta=\gamma$, и тогда вместо (4) мы имеем:

$$k^2=\frac{\pi^2}{a^2}\,(p^2+q^2+r^2), \tag{6}$$

или, если λ — длина волны для плоских волн того же самого периода,

$$\lambda=\frac{2a}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\,. \tag{7}$$

Для самого медленного колебания (низкого тона) $p=1$, $q=0$, $r=0$ или $p=0$, $q=1$, $r=0$ и т. д. и $\lambda=2a$. Следующий из наиболее низких тонов, когда $p=1$, $q=1$, $r=0$ и т. д., и тогда $\lambda=\sqrt{2}a$. Когда $p=1$, $q=1$, $r=1$, $\lambda=\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Для четвертого низкого тона $p=2$, $q=0$, $r=0$ и т. д., а тогда $\lambda=a$.

Как и в случае мембраны (§ 197), когда два или больше основных типов колебания имеют один и тот же период, другие колебания данного периода могут быть получены путем наложения. Тройной бесконечный ряд возможных простых составляющих колебаний не обязательно полностью представлен в частных случаях сложных колебаний. Если, например, мы предположим, что содержимое ящика в начальном состоянии нигде не сжато и не разрежено и имеет одинаковую скорость, компоненты которой, параллельные осям координат, равны соответственно u_0, v_0, w_0, то мы не получим ни одного простого колебания, для которого свыше, чем одно из трех чисел p, q, r конечно. Действительно, каждая компонента начальной скорости может рассматриваться отдельно, и задача аналогична той, которая решена в § 258.

В дальнейших главах мы встретимся с другими примерами воздушных колебаний в совершенно замкнутых сосудах.

Некоторые из собственных нот воздуха, содержащегося в комнате, можно, вообще говоря, обнаружить, если пропеть гамму. Вероятно, до некоторой степени таким путем слепые способны оценивать размеры комнат [1]).

---

[1]) Замечательный пример цитируется в *Natural Philosophy* Юнга, том II, стр. 272 из *Zoonomia* Дарвина, том II, стр. 487. «Покойный слепой судья Филдинг, когда он однажды посетил меня, вошел в мою комнату впервые и после того, как произнес несколько слов, сказал: „Эта комната имеет около 22 футов длины, 18 ширины и 12 высоты“; все это он определил с большой точностью на слух».

В длинных и узких проходах колебания, параллельные их длине, слишком медленны, чтобы действовать на ухо, но ноты, обязанные поперечным колебаниям, часто можно слышать. Относительные пропорции различных обертонов зависят от места, в котором создается возмущение [1]).

В некоторых случаях этого рода на высоту колебаний, направление которых, в основном, поперечное, влияет наличие продольного движения. Предположим, например, в (3) и (4), что $q=1$, $r=0$ и что α значительно больше, чем β. Для основного поперечного колебания $p=0$ и $k=\frac{\pi}{\beta}$. Но кроме этого имеются колебания другого типа, в которых движение, в основном, поперечное; мы получаем их, приписывая p малые целые значения. Так, когда $p=1$,

$$k^2=\pi^2\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right),$$

— выражение, показывающее, что высота почти такова же, что и прежде [2]).

268. Если мы предположим γ бесконечно большим, то ящик предыдущего раздела превращается в бесконечную прямоугольную трубу со сторонами α и β. Каково бы ни было движение воздуха внутри этой трубы, его потенциал скорости можно выразить по теореме Фурье в виде ряда

$$\varphi=\sum\sum A_{pq}\cos p\frac{\pi x}{\alpha}\cdot\cos q\frac{\pi y}{\beta}, \tag{1}$$

где коэфициенты A не зависят от x и y. Пользуясь этой формой, мы обеспечиваем выполнение граничного условия, требующего отсутствия движения через стенки трубы; природа A, как функции z и t, зависит от других условий задачи. Рассмотрим случай, в котором движение в каждой точке гармоническое и обязано нормальному движению, сообщаемому перегородке, помещенной поперек трубы при $z=0$. Принимая, что φ пропорционально во всех точках e^{ikat}, мы получаем обычное диференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+k^2\varphi=0, \tag{2}$$

которое в силу свойства сопряженности функций должно удовлетворяться в отдельности каждым членом (1). Таким образом, для опре-

---

[1]) Oppel, „Die harmonischen Obertöne des durch parallele Wände erregten Reflexionstones", *Fortschritte der Physik*, XX, стр. 130.

[2]) В моем доме есть подземный коридор, в котором можно, пропев надлежащую ноту, возбудить свободные колебания, продолжающиеся много секунд, и часто случается, что звучащая нота сопровождается отчетливыми биениями. Ширина коридора около 4 футов, высота около $6\frac{1}{2}$ футов.

деления A_{pq} в функции z мы получаем

$$\frac{d^2A_{pq}}{dz^2} + \left[k^2 - \pi^2\left(\frac{p^2}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\beta^2}\right)\right]A_{pq} = 0. \quad (3)$$

Решение этого уравнения отличается по форме в зависимости от знака коэфициента A_{pq}. Когда p и q равны нулю, коэфициент необходимо положителен, но когда p и q возрастают, коэфициент меняет знак. Если коэфициент положителен и если его обозначить через μ^2, то общее выражение A_{pq} может быть записано так:

$$A_{pq} = B_{pq}e^{i(kat+\mu z)} + C_{pq}e^{i(kat-\mu z)}, \quad (4)$$

где B_{pq} и C_{pq}, — так как множитель e^{ikat} выражен явно, — абсолютные постоянные. Однако, первый член в (4) выражает движение, распространяющееся в отрицательном направлении, что исключается условиями задачи, и мы, таким образом, должны взять в качестве члена, соответствующего p, q, просто

$$\varphi = C_{pq}\cos p\frac{\pi x}{\alpha}\cdot\cos q\frac{\pi y}{\beta}\cdot e^{i(kat-\mu z)}.$$

В этом выражении C_{pq} может быть комплексным; переходя к действительным величинам и беря две новые действительные произвольные постоянные, мы получаем:

$$\varphi = [D_{pq}\cos(kat-\mu z) + E_{pq}\sin(kat-\mu z)]\cos p\frac{\pi x}{\alpha}\cdot\cos q\frac{\pi y}{\beta}\cdot \quad (5)$$

Мы должны теперь рассмотреть форму решения в тех случаях, когда коэфициент при A_{pq} в (3) отрицателен. Если мы обозначим его через $-\nu^2$, то решением, соответствующим (4), будет

$$A_{pq} = e^{ikat}(B_{pq}e^{\nu z} + C_{pq}e^{-\nu z}); \quad (6)$$

первый член его должен быть отброшен, как обращающийся в бесконечность вместе с z. Мы получаем, таким образом, соответственно (5),

$$\varphi = e^{-\nu z}[D_{pq}\cos kat + E_{pq}\sin kat]\cos p\frac{\pi x}{\alpha}\cos q\frac{\pi y}{\beta}\cdot \quad (7)$$

Решение, полученное соединением всех частных решений, даваемых (5) и (7), является общим решением задачи и допускает по всему сечению $z = 0$ для $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ значение, произвольное в каждой точке и по амплитуде и по фазе.

На большом расстоянии от источника члены вида (7) становятся незначительными, и движение представляется одними лишь членами вида (5). Влияние членов, соответствующих большим значениям p и q, проявляется, таким образом, лишь в непосредственном соседстве с источником, и уже на не очень больших расстояниях всякие внезапные изменения или разрывы в движении в $z = 0$ постепенно сглаживаются и исчезают.

Если мы сосредоточим наше внимание на каком-нибудь частном виде колебания (для которого p и q не равны нулю одновременно) и представим себе, что частота колебания возрастает, начиная от нуля, то мы увидим, что эффект, имевший место вначале лишь по соседству с источником, постепенно распространяется все дальше и дальше и, после того как пройдено определенное значение, распространяется сам собой на бесконечно большое расстояние, причем критическая частота есть частота двумерных свободных колебаний соответствующего типа. Ниже критической точки, чтобы *поддерживать* движение, не требуется никакой работы; выше ее — нужно затрачивать в $z=0$ столько работы, сколько уносится ее за это же время в бесконечность.

268*a*. Если мы предположим, что в общих формулах § 267 $r=0$, то мы возвратимся к случаю чисто двумерного движения. Третье измерение (γ) камеры тогда не имеет никакого значения, и наша задача может рассматриваться, как задача колебаний прямоугольной пластины воздуха, ограниченной, например, двумя параллельными стеклянными пластинами и боковой прямоугольной границей. В этой форме она была изучена как экспериментально, так и теоретически Кундтом [1]). Потенциал скорости есть просто

$$\varphi = \cos\left(p\frac{\pi x}{\alpha}\right)\cos\left(q\frac{\pi y}{\beta}\right), \tag{1}$$

где p и q — целые числа, а частота определяется выражением

$$k^2 = \pi^2\left(\frac{p^2}{\alpha^2}+\frac{q^2}{\beta^2}\right). \tag{2}$$

Если пластина *открыта* на границе, то приближенное решение можно получить, предположив, что φ здесь исчезает. В этом случае выражение для φ выводится из (1), если вместо косинусов написать синусы, между тем как уравнение частот сохраняет ту же самую форму (2). Это уже было обсуждено в связи с вопросом о мембранах в § 197. Если $\alpha=\beta$, так что прямоугольник становится квадратом, то различные нормальные виды колебаний одной и той же высоты могут комбинироваться, как объяснено в § 197.

В опытах Кундта колебания возбуждались через отверстие в одной из стеклянных пластин, к которой был приложен конец соответствующим образом настроенного стержня, колеблющегося продольно; разделение на сегменты указывалось поведением пробочных опилок. Что касается высоты, то хорошее согласие с вычислениями было в случае пластин, *закрытых* по боковой границе. Когда прямоугольная граница была *открыта*, наблюденные частоты были слишком малы — расхождение, которое следует приписать исключительно приближенному характеру допущения, о неизменности давления в пластине (см. § 307).

[1]) Kundt, *Pogg. Ann.*, том XL, стр. 177, 337 (1873).

Теория круглой пластины воздуха связана с бесселевыми функциями и рассматривается в § 339.

269. Мы исследуем теперь результат сложения двух цугов плоских волн гармонического типа с одинаковыми амплитудами и длинами волн, направления распространения которых составляют друг с другом угол 2α. Это — двумерная задача, поскольку во всех плоскостях, перпендикулярных к линиям пересечения двух групп волновых фронтов, картина явления будет совершенно одинаковой.

Положения плоскостей максимального сжатия для каждого цуга волн в любой момент времени можно представить параллельными линиями, проведенными через одинаковые интервалы λ в плоскости бумаги; нужно предположить при этом, что эти линии движутся со скоростью a в направлении, перпендикулярном к их длине. Если обе серии линий начерчены, то бумага разделяется на систему равных параллелограммов, которые перемещаются в направлении одной группы диагоналей. В каждом углу параллелограмма сжатие удваивается в результате наложения двух цугов волн, а в центре каждого параллелограмма по той же самой причине максимальным является разрежение. На каждой диагонали располагается поэтому серия максимумов и минимумов сжатия, перемещающихся без изменения их относительного расположения со скоростью $a/\cos\alpha$. Между каждыми двумя соседними линиями максимумов и минимумов находится параллельная им линия нулевого сжатия, на которой два цуга волн нейтрализуют друг друга. Особенно замечательно то, что если бы этот волновой узор был виден (подобно соответствующему волновому узору на воде, к которому приложимо все предыдущее рассуждение), то он представился бы перемещающимся вперед без изменения своего вида в направлении, отличном от направления каждого из составляющих цугов волн и со скоростью, отличной от той, с которой движутся оба составляющие цуга.

Чтобы выразить результат аналитически, предположим, что оба направления распространения одинаково наклонены под углом α к оси x-ов. Сами сжатия можно представить соответственно в виде:

$$\cos\frac{2\pi}{\lambda}(at - x\cos\alpha - y\sin\alpha)$$

и

$$\cos\frac{2\pi}{\lambda}(at - x\cos\alpha + y\sin\alpha),$$

и, таким образом, выражение для результирующей будет иметь вид:

$$s = \cos\frac{2\pi}{\lambda}(at - x\cos\alpha - y\sin\alpha) + \cos\frac{2\pi}{\lambda}(at - x\cos\alpha + y\sin\alpha) =$$
$$= 2\cos\frac{2\pi}{\lambda}(at - x\cos\alpha)\cos\frac{2\pi}{\lambda}(y\sin\alpha). \qquad (1)$$

Из (1) следует, что распределение величины s на плоскости xy перемещается параллельно оси x-ов, не изменяя своего вида и с оди-

наковой всюду скоростью $\frac{a}{\cos\alpha}$. Если рассматривать s как функцию y, то s имеет максимум, когда $y\sin\alpha$ равно 0, λ, 2λ, 3λ, и т. д., между тем как для промежуточных значений, именно $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{3}{2}\lambda$, $\cdots$, s обращается в нуль.

Если $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, так что два цуга волн идут друг другу навстречу, то скорость распространения параллельно x становится бесконечной, а (1) принимает форму

$$s=2\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}at\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}y\right), \qquad (2)$$

которая представляет *стоячие* волны.

Задача, которую мы только что рассматривали, в действительности совпадает с задачей об отражении цуга плоских волн от бесконечной плоской стены. Так как выражение в первой части уравнения (1) является четной функцией y, то s симметрично относительно оси x-ов, и, следовательно, движение поперек этой оси отсутствует. При этих условиях очевидно, что на движение нисколько бы не повлияло, если бы мы расположили вдоль оси x-ов абсолютно неподвижную стену. Если α есть угол между поверхностью и направлением распространения падающих волн, то скорость, с которой движутся места максимального сжатия (соответствующие местам наибольшего возвышения для волн на воде) вдоль стены, равна $a/\cos\alpha$. Следует заметить, что воздушные давления не имеют тенденции перемещать стену как целое, за исключением случая абсолютно перпендикулярного падения, так как в любой момент времени их столько же положительных, сколько и отрицательных.

269*a*. Когда звуковые волны, распространяющиеся от удаленного источника, отражаются перпендикулярно твердой стеной, то наложение прямой и отраженной волн приводит к возникновению системы узлов и пучностей, совершенно так же, как в случае трубы, рассмотренном в § 255. Узловые плоскости, т. е. поверхности исчезающего движения, располагаются на расстояниях, являющихся четными кратными четверти длины волны, пучности же делят пополам расстояния между узлами. При экспериментальном исследовании обычно лучше всего искать места минимального эффекта, но, будут ли это узлы или пучности, зависит от применяемого аппарата — соображение, пренебрежение которым приводило к путанице [1]). Так, резонатор перестает отвечать, если его устье совпадает с пучностью, и следовательно, этот метод исследования дает *пучности*, когда резонатор связан с ухом или с «манометрической коробкой» (§ 282). Это же самое заключение верно и при пользовании невооруженным ухом,

[1]) N. Savart, *Ann. d. Chim.*, том LXXI, стр. 20, 1839; том XL, стр. 385, 1845.

если только голова экспериментатора не представляет собой препятствие слишком большое, чтобы заметно нарушить первоначальное распределение узлов и пучностей [1]). Если, с другой стороны, индикатором служит маленькая натянутая мембрана, подвергающаяся воздействию с обеих сторон, чувствительная струя дыма или пламя, то местами исчезающего возмущения будут *узлы* [2]).

Полное установление стоячих колебаний с узлами и пучностями занимает некоторое время, в течение которого звук должен поддерживаться. Когда в комнате, лишенной ковров и занавесей, непрерывно звучит органная труба, легко, прислушиваясь с помощью резонатора, найти места, где основной тон почти полностью замирает. Но в первый момент после нажатия клавиша или непосредственно после того как он отпущен, интересующий нас тон слышен и часто с поразительной силой.

Образованием стационарных узлов и пучностей перед отражающей стеной можно с успехом воспользоваться, когда желательно определить длины волн воздушных колебаний. Метод является особенно ценным в случае очень пронзительных звуков и колебаний такой частоты, что они уже не слышны. С помощью чувствительного пламени высокого давления можно проследить за колебаниями, полученными при помощи маленьких птичьих манков (свистков для подманивания птиц), с длиной волны до 6 *см*, что соответствует частоте около 55 000 колебаний в секунду.

270. До тех пор, пока среда, передающая звук, сохраняет непрерывность и однородность, плоские волны могут распространяться в любом направлении с постоянной скоростью и не меняя своего типа; однако, когда волны достигают какой-либо части среды, где ее механические свойства претерпевают изменение, возникает некоторое возмущение. Общая проблема колебаний переменной по своим свойствам среды, вероятно, совершенно недоступна нашей современной математике, однако, многие, интересные для физики вопросы возникают в случае плоских волн. Предположим, что среда однородна выше и ниже некоторой определенной плоскости ($x = 0$), но что при пересечении этой плоскости имеет место внезапное изменение механических свойств, от которых зависит распространение звука — именно, *сжимаемости* и *плотности*. На верхней стороне плоскости (которую для отчетливости понимания мы можем предполагать горизонтальной) цуг плоских волн перемещается так, что встречает ее более или менее наклонно; задача состоит в том, чтобы определить (преломленную) волну, которая распространяется вперед во второй среде, а также и ту волну, которая проникает обратно в первую среду, т. е. отраженную. Мы должны в первую очередь образовать уравнения движения и выразить граничные условия.

---

[1]) *Phil. Mag.*, том VII, стр. 150, 1879.
[2]) *Phil. Mag.*, loc. cit., стр. 153.

В верхней среде, если ρ есть естественная плотность, а s — сжимаемость

$$\text{плотность} = \rho(1+s),$$
$$\text{давление} = P(1+As),$$

где A — коэфициент, зависящий от сжимаемости, а P — давление в невозмущенном состоянии. Равным образом в нижней среде

$$\text{плотность} = \rho_1(1+s_1),$$
$$\text{давление} = P(1+A_1 s_1),$$

причем невозмущенное давление одинаково по обе стороны от $x=0$. Беря ось z параллельной линии пересечения волновой плоскости с поверхностью раздела $x=0$, мы имеем для верхней среды (§ 244):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+V^2 s = 0, \tag{2}$$

где

$$V^2 = \frac{PA}{\rho}. \tag{3}$$

Аналогично для нижней среды

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} = V_1^2\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}\right) \tag{4}$$

и

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+V_1^2 s_1 = 0, \tag{5}$$

где

$$V_1^2 = \frac{PA_1}{\rho_1}. \tag{6}$$

Эти уравнения должны быть удовлетворены во всех точках жидкости. Граничные условия требуют, кроме того: (I) чтобы во всех точках поверхности раздела скорости, перпендикулярные к поверхности, были одинаковы для обеих жидкостей, или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \text{ при } x=0; \tag{7}$$

(II) чтобы были одинаковы давления, откуда $A_1 s_1 = As$, или, в силу (2), (3), (5) и (6),

$$\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \rho_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} \text{ при } x=0. \tag{8}$$

Чтобы представить цуг волн гармонического типа, мы можем принять φ и φ_1 пропорциональными $e^{i(ax+by+ct)}$, где уравнение $ax+by=\text{const}$ определяет направление волновой плоскости. Если мы примем для падающей волны

$$\varphi = \varphi' e^{i(ax+by+ct)}, \tag{9}$$

то отраженная и преломленная волны могут быть представлены соответственно выражениями

$$\varphi = \varphi'' e^{i(-ax+by+ct)}, \tag{10}$$

$$\varphi_1 = \varphi_1 e^{i(a_1 x+by+ct)}. \tag{11}$$

Коэфициент при t необходим один и тот же во всех трех волнах за счет периодичности, а коэфициент при y должен быть одинаковым вследствие того, что следы всех волн на плоскости раздела должны двигаться вместе. Что же касается коэфициента при x, то после подстановки в диференциальные уравнения видно, что его знак при переходе от падающей к отраженной волне изменяется на обратный; действительно,

$$c^2 = V^2[(\pm a)^2 + b^2] = V_1^2[a_1^2 + b^2]. \tag{12}$$

Но $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ есть синус угла, заключенного между осью x и нормалью к волновой плоскости — на языке оптики, синус угла падения, а $\frac{b}{\sqrt{a_1^2+b^2}}$ аналогично — синус угла преломления. Если эти углы обозначить через θ и θ_1, то (12) требует, чтобы отношение $\sin\theta/\sin\theta_1$ было равно постоянному отношению V/V_1 — хорошо известный закон синусов. Законы преломления и отражения вытекают просто из того факта, что скорость распространения в направлении, нормальном к волновым фронтам, постоянна в каждой среде, т. е. не зависит от *направления* волнового фронта, рассматриваемого в связи с равенством скоростей следов всех волн на плоскости раздела ($V/\sin\theta = V_1/\sin\theta_1$). Остается удовлетворить граничным условиям (7) и (8). Они дают

$$\left.\begin{aligned} a(\varphi' - \varphi'') &= a_1\varphi_1, \\ \rho(\varphi' + \varphi'') &= \rho_1\varphi_1, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

откуда

$$2\varphi' = \left(\frac{\rho_1}{\rho} + \frac{a_1}{a}\right)\varphi_1; \quad 2\varphi'' = \left(\frac{\rho_1}{\rho} - \frac{a_1}{a}\right)\varphi_1. \tag{14}$$

Этим завершается символическое решение. Если a_1 (и θ_1) действительны, то мы видим, что, если падающая волна есть

$$\varphi = \cos(ax + by + ct),$$

или, через V, λ и θ,

$$\varphi = \cos\frac{2\pi}{\lambda}(x\cos\theta + y\sin\theta + Vt), \tag{15}$$

то отраженная волна есть

$$\varphi = \frac{\frac{\rho_1}{\rho} - \frac{\operatorname{ctg}\theta_1}{\operatorname{ctg}\theta}}{\frac{\rho_1}{\rho} + \frac{\operatorname{ctg}\theta_1}{\operatorname{ctg}\theta}} \cos\frac{2\pi}{\lambda}(-x\cos\theta + y\sin\theta + Vt), \tag{16}$$

а преломленная волна

$$\varphi_1 = \frac{2}{\frac{\rho_1}{\rho} + \frac{\operatorname{ctg}\theta_1}{\operatorname{ctg}\theta}} \cos\frac{2\pi}{\lambda_1}(x\cos\theta_1 + y\sin\theta_1 + V_1 t). \tag{17}$$

Формула для амплитуды преломленной волны, именно

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{\frac{\rho_1}{\rho} - \frac{\operatorname{ctg}\theta_1}{\operatorname{ctg}\theta}}{\frac{\rho_1}{\rho} + \frac{\operatorname{ctg}\theta_1}{\operatorname{ctg}\theta}}, \tag{18}$$

получается здесь в предположении, что волны — гармонического типа; но так как в нее не входит λ и так как здесь не происходит изменения фазы, то она может быть распространена, в силу теоремы Фурье, на волны любого типа.

Если отраженной волны нет, то $\operatorname{ctg}\theta_1/\operatorname{ctg}\theta = \rho_1/\rho$, откуда и из

$$\frac{1+\operatorname{ctg}^2\theta_1}{1+\operatorname{ctg}^2\theta_2} = \frac{V^2}{V_1^2}$$

мы выводим

$$\left(\frac{\rho_1^2}{\rho^2} - \frac{V^2}{V_1^2}\right)\operatorname{ctg}^2\theta = \frac{V^2}{V_1^2} - 1. \tag{19}$$

Если предположить, что показатель преломления $\frac{V_1}{V}$ заключается между единицей и $\frac{\rho}{\rho_1}$, то это соотношение показывает, что всегда существует угол падения, при котором волна проходит полностью; при других условиях такого угла не существует.

Так как (18) не изменяется (исключая знак) при перестановке θ, θ; ρ, ρ_1; и т. д., мы заключаем, что волна, падающая во второй среде под углом θ_1, отражается в той же самой пропорции, что и волна, падающая в первой среде под углом θ.

В качестве численного примера, предположим, что верхняя среда есть воздух при атмосферном давлении, а нижняя среда — вода. Подставляя вместо $\operatorname{ctg}\theta_1$ его выражение через θ и показатель преломления, мы получаем

$$\frac{\operatorname{ctg}\theta_1}{\operatorname{ctg}\theta} = \frac{V}{V_1}\sqrt{1 - \left(\frac{V_1^2}{V^2} - 1\right)\operatorname{tg}^2\theta}, \tag{20}$$

или, так как приближенно $\frac{V_1}{V} = 4,3$,

$$\frac{\operatorname{ctg}\theta_1}{\operatorname{ctg}\theta} = 0{,}23\sqrt{1 - 17{,}5\operatorname{tg}^2\theta},$$

отсюда видно, что отношение котангенсов уменьшается до нуля, когда θ возрастает от нуля примерно до 13°, а дальше оно становится мнимым, что указывает на полное внутреннее отражение, как это мы

сейчас увидим. Следует помнить, что если применять оптические термины в акустике, то именно вода должна рассматриваться как „разреженная среда". Отношение плотностей составляет примерно 770/1, так что

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{1 - 0{,}0003\sqrt{1 - 17{,}5\,\mathrm{tg}^2\,\theta}}{1 + 0{,}0003\sqrt{1 - 17{,}5\,\mathrm{tg}^2\,\theta}} = 1 - 0{,}0006\sqrt{1 - 17{,}5\,\mathrm{tg}^2\,\theta},$$

с очень большим приближением. Даже при перпендикулярном падении отражение почти идеальное. Если обе среды — газообразные, то при постоянной температуре $A_1 = A$, и если даже учесть развитие теплоты при сжатии, то в случае простых газов заметной разницы между A и A_1 не будет. Но, если $A_1 = A$, то $\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_1}$, и формула для интенсивности отраженной волны принимает вид:

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{\sin 2\theta - \sin 2\theta_1}{\sin 2\theta + \sin 2\theta_1} = \frac{\mathrm{tg}\,(\theta - \theta_1)}{\mathrm{tg}\,(\theta + \theta_1)}, \tag{21}$$

совпадая с формулой, выведенной Френелем для света, поляризованного перпендикулярно к плоскости падения. В согласии с законом Брьюстера отражение исчезает при угле падения, тангенс которого равен $\frac{V}{V_1}$.

Но если, с другой стороны, $\rho_1 = \rho$, и причиной возмущения является изменение сжимаемости, то мы имеем

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \frac{\mathrm{tg}\,\theta_1 - \mathrm{tg}\,\theta}{\mathrm{tg}\,\theta_1 + \mathrm{tg}\,\theta} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta)}, \tag{22}$$

что согласуется с формулой Френеля для света, поляризованного в плоскости падения. В этом случае отраженная волна не исчезает ни при каком значении угла падения.

Вообще, когда $\theta = 0$,

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{\frac{\rho_1}{\rho} - \frac{V}{V_1}}{\frac{\rho_1}{\rho} + \frac{V}{V_1}}, \tag{23}$$

так что отражения нет, если $\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{V}{V_1}$. В случае газов $\frac{V^2}{V_1^2} = \frac{\rho_1}{\rho}$, и тогда

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho}} = \frac{V - V_1}{V + V_1}. \tag{24}$$

Предположим, например, что отражение происходит при перпендикулярном падении на поверхности, разделяющей воздух и водород. Мы имеем

$$\rho = 0{,}001276, \quad \rho_1 = 0{,}00008837,$$

откуда $\sqrt{\rho}/\sqrt{\rho_1} = 3{,}800$, что дает

$$\varphi'' = -0{,}5833\varphi'.$$

Отношение интенсивностей, которые пропорциональны квадратам амплитуд, составляет 0,3402:1, так что около одной трети отражается.

Если различие между обеими средами очень мало, то мы пишем $V_1 = V + \delta V$, и (24) принимает вид:

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = -\frac{1}{2}\frac{\delta V}{V}. \tag{25}$$

Если первая среда — воздух при 0° С, а вторая среда — воздух при t° С, $V + \delta V = V\sqrt{1 + 0{,}00366t}$, так что

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = -0{,}00091t.$$

Отношение интенсивностей отраженного и падающего звуков есть поэтому $0{,}83 \cdot 10^{-6} \cdot t^2 : 1$.

В качестве другого примера того же рода мы можем взять случай, где первой средой является сухой воздух, а второй — воздух при той же температуре, насыщенный водяным паром. При 10°С воздух, насыщенный водяным паром, легче, чем сухой воздух, примерно на 1/220, так что $\delta V \approx \frac{1}{440} V$. Отсюда мы заключаем, в связи с (25), что отраженный звук составляет всего лишь около 1/774 000 части падающего звука.

Мы видим из этих вычислений, что отражение от теплого или влажного воздуха вообще должно быть очень мало, хотя несомненно, что эффект может накопиться в результате повторения. Следует также помнить, что на практике переход от одного положения вещей к другому был бы постепенным, а не внезапным, как это предполагается настоящей теорией. Если пространство, занятое переходной зоной, достигает значительной доли длины волны, то отражение значительно уменьшается. В связи с этим мы можем ожидать, что низкие звуки будут распространяться через неоднородную среду менее свободно, чем высокие.

Отражение звука от поверхностей, разделяющих части газа с различными плотностями, привлекло внимание Тиндаля, который придумал несколько поразительных опытов для иллюстрации явления [1]). Например, звук язычковой трубы, издающей высокий тон, проводился через тонкую трубку к чувствительному пламени, которое служило индикатором. Помещая между трубкой и чувствительным пламенем газовое пламя, выходящее из обычной горелки, можно было уничтожить большую часть эффекта. Более того, держа пламя под соответствующим углом, можно было отразить звук через другую трубку

[1]) Tyndall, *Sound*, 3-е издание, стр. 282, 1875.

в количестве, достаточном для возбуждения второго чувствительного пламени, которое при отсутствии отражающего пламени оставалось бы спокойным.

[Преломление звука было продемонстрировано экспериментально Зондхауссом [1]) с помощью баллона из коллодия, наполненного углекислым газом.]

Предыдущие выражения (16), (17), (18) справедливы во всех случаях отражения от „более плотной" среды; однако, если скорость звука больше в нижней среде и угол падения превосходит критический угол, то a_1 становится мнимым, и формулы нуждаются в видоизменении. В последнем случае невозможно, чтобы существовала преломленная волна, так как если бы даже угол преломления был равен 90°, то ее след на плоскости раздела необходимо должен был бы перегнать след падающей волны.

Если вместо a_1 написать $-ia_1'$, то символические уравнения таковы:

падающая волна

$$\varphi = e^{i(ax+by+ct)};$$

отраженная волна

$$\varphi = \frac{\frac{\rho_1}{\rho} + i\frac{a_1'}{a}}{\frac{\rho_1}{\rho} - i\frac{a_1'}{a}} e^{i(-ax+by+ct)};$$

преломленная волна

$$\varphi_1 = \frac{2}{\frac{\rho_1}{\rho} - i\frac{a_1'}{a}} e^{i(-ia_1'x+by+ct)}.$$

Отбрасывая всюду мнимые части, получаем:

падающая волна

$$\varphi = \cos(ax + by + ct); \tag{26}$$

отраженная волна

$$\varphi = \cos(-ax + by + ct + 2\varepsilon); \tag{27}$$

преломленная волна

$$\varphi = \frac{2}{\sqrt{\frac{\rho_1^2}{\rho^2} + \frac{a_1'^2}{a^2}}} e^{a_1'x} \cos(by + ct + \varepsilon), \tag{28}$$

где

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{a_1'\rho}{a\rho_1}. \tag{29}$$

Эти формулы указывают на полное отражение. Возмущение во вто-

[1]) Sondhauss, *Pogg. Ann.*, том LXXXV, стр. 378, 1852, *Phil. Mag.*, том V, стр. 73, 1853.

рой среде вообще не является волной в обычном смысле слова и на коротком расстоянии от поверхности раздела (x — отрицательное) становится незаметным. Вычисляя a_1' из (12) и выражая эту величину через θ и λ, находим

$$a_1' = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\sin^2\theta - \frac{V^2}{V_1^2}}; \tag{30}$$

это выражение показывает, что возмущение проникает во вторую среду не далее, чем на несколько длин волн.

Разность фаз между отраженной и падающей волной есть 2ε, где

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\rho}{\rho_1}\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta - \frac{V^2}{V_1^2}\sec^2\theta}. \tag{31}$$

Если среды имеют одинаковую сжимаемость, то $\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{V_1^2}{V^2}$ и

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{V_1}{V}\sqrt{\frac{V_1^2}{V^2}\operatorname{tg}^2\theta - \sec^2\theta}. \tag{32}$$

Так как при отражении и преломлении нет потерь энергии, то работа, перенесенная за некоторое время через некоторую площадь фронта падающей волны, должна быть равна работе, перенесенной за то же время через соответствующие площади отраженной и преломленной волн. Эти соответствующие друг другу площади находятся, очевидно, в отношении

$$\cos\theta : \cos\theta : \cos\theta_1;$$

и, таким образом, в силу § 245 (τ одинаково для всех волн)

$$\cos\theta\,\frac{\rho}{V}\,(\varphi'^2 - \varphi''^2) = \cos\theta_1\,\frac{\rho_1}{V_1}\,\varphi_1^2,$$

а так как $V/V_1 = \sin\theta/\sin\theta_1$,

$$\rho\operatorname{ctg}\theta\,(\varphi'^2 - \varphi''^2) = \rho_1\operatorname{ctg}\theta_1\varphi_1^2, \tag{33}$$

что и представляет собой условие энергии и совпадает с результатом перемножения двух граничных уравнений (13).

Если скорость распространения больше в нижней среде, чем в верхней, и угол падения превосходит критический угол, то энергия во вторую среду не переносится; иными словами, отражение тогда полное.

Метод настоящего исследования в основном тот же, каким пользовался Грин в статье об „Отражении и преломлении звука“ [1]). Случай перпендикулярного падения был впервые исследован Пуассо-

[1]) Green, *Cambridge Transactions*, том VI, стр. 403, 1838.

ном [1]), получившим формулы, соответствующие (23) и (24), которые, однако, уже были даны Юнгом для отражения света. В следующем мемуаре [2]) Пуассон рассмотрел общий случай наклонного падения, ограничившись, однако, газообразной средой, для которой справедлив закон Бойля, и путем очень сложного анализа пришел к результату, эквивалентному (21). Он подтвердил также, что энергии отраженной и преломленной волн в сумме дают энергию падающей волны [3]).

271. Если вторая среда неограниченно простирается вниз и совершенно однородна по своим механическим свойствам, то проходящая волна непрерывно распространяется вниз. Но если при $x = -l$ имеется дальнейшее изменение сжимаемости или плотности или и того и другого, то часть волны будет отброшена назад и по приходе к первой поверхности ($x = 0$) разделится на две части; одну, проникшую в первую среду, и другую, отраженную назад, чтобы снова разделиться при $x = -l$ и т. д. Проследив за дальнейшей историей этих волн, можно получить решение проблемы; при этом результирующие отраженная и проходящая волны будут складываться из бесконечного ряда компонент, всех параллельных и гармонических. Это — метод, обычно применяемый для соответствующей задачи в оптике; он вполне строг, хотя, может быть, не всегда достаточно разъясняется; повидимому, однако, он не имеет никаких преимуществ перед более прямым анализом. В последующем исследовании мы ограничимся случаем, когда третья среда одинакова по своим свойствам с первой.

В первой среде

$$\varphi = \varphi' e^{i(ax+by+ct)} + \varphi'' e^{i(-ax+by+ct)}.$$

Во второй среде

$$\psi = \psi' e^{i(a_1 x+by+ct)} + \psi'' e^{i(-a_1 x+by+ct)}.$$

В третьей среде

$$\varphi = \varphi_1 e^{i(ax+by+ct)},$$

при условиях

$$c^2 = V^2(a^2+b^2) = V_1^2(a_1^2+b^2). \tag{1}$$

На обеих поверхностях раздела мы должны обеспечить равенство нормальных составляющих скоростей и давлений: для $x = 0$

$$\left.\begin{aligned} a(\varphi' - \varphi'') &= a_1(\psi' - \psi''), \\ \rho(\varphi' + \varphi'') &= \rho_1(\psi' + \psi''), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

[1]) Poisson, *Mém. de l'Institut*, том II, стр. 305, 1819.

[2]) Poisson, „Mémoire sur le mouvement de deux fluides élastiques superposés", *Mém. de l'Institut*, том X, стр. 317, 1831.

[3]) [Интересно и поучительно отметить одно замечание Лапласа в переписке с Юнгом. Великий аналитик пишет (1817): „Я твердо уверен в том, что проблема распространения волн, проходящих через различные среды, никогда не была разрешена, и что она, быть может, выходит за пределы возможностей современного анализа". (Young, *Works*, том I, стр. 374).]

для $x = -l$,

$$\left.\begin{aligned} a_1(\psi' e^{-ia_1 l} - \psi'' e^{ia_1 l}) &= a\varphi_1 e^{-ial}, \\ \rho_1(\psi' e^{-ia_1 l} + \psi'' e^{ia_1 l}) &= \rho\varphi_1 e^{-ial}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

откуда необходимо исключить ψ' и ψ''. Получаем:

$$\left.\begin{aligned} (\varphi' - \varphi'')\cos a_1 l - i\frac{a_1\rho}{a\rho_1}(\varphi' + \varphi'')\sin a_1 l &= \varphi_1 e^{-ial}, \\ (\varphi' + \varphi'')\cos a_1 l - i\frac{a\rho_1}{a_1\rho}(\varphi' - \varphi'')\sin a_1 l &= \varphi_1 e^{-ial}; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

а из этих уравнений, если обозначить для краткости $a\rho_1/a_1\rho$ через α,

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{\alpha - \alpha^{-1}}{\alpha + \alpha^{-1} - 2i\operatorname{ctg} a_1 l}, \tag{5}$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi'} = \frac{2e^{ial}}{2\cos a_1 l + i\sin a_1 l\,(\alpha + \alpha^{-1})}. \tag{6}$$

Чтобы перейти к действительным величинам, нужно привести эти выражения к виду $Re^{i\theta}$. Если a_1 *действительно*, то мы находим соответственно для падающей волны

$$\varphi = \cos(ax + by + ct),$$

для отраженной волны

$$\varphi = \frac{(\alpha^{-1} - \alpha)\sin(-ax + by + ct - \varepsilon)}{\sqrt{4\operatorname{ctg}^2 a_1 l + (\alpha + \alpha^{-1})^2}} \tag{7}$$

и для проходящей волны

$$\varphi = \frac{2\cos(ax + by + ct + al - \varepsilon)}{\sqrt{4\cos^2 a_1 l + \sin^2 a_1 l\,(\alpha + \alpha^{-1})^2}}, \tag{8}$$

где

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^{-1})\operatorname{tg} a_1 l. \tag{9}$$

Если $\alpha = \rho_1 \operatorname{ctg}\theta/\rho\operatorname{ctg}\theta_1 = 1$, то отраженной волны нет, а проходящая волна представляется выражением

$$\varphi = \cos(ax + by + ct + al - a_1 l),$$

показывающим, что, исключая изменение фазы, вся среда в целом могла бы быть и однородной.

Если l мало, то мы имеем приближенно для отраженной волны

$$\varphi = \frac{1}{2} a_1 l(\alpha^{-1} - \alpha)\sin(-ax + by + ct)$$

— формула, приложимая к случаю, когда толщина пластины мала сравнительно с длиной волны. Так как $a_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}\cos\theta_1$, то, очевидно, что для данного угла падения амплитуда изменяется обратно пропорционально λ_1 или λ.

Отражение исчезает всегда, когда $\operatorname{ctg}^2 a_1 l = \infty$, т. е., если

$$2l\cos\vartheta_1 = m\lambda_1,$$

где m — целое число. Волна проходит тогда целиком.

При перпендикулярном падении интенсивность отражения дается выражением

$$\frac{\frac{V\rho}{V_1\rho_1} - \frac{V_1\rho_1}{V\rho}}{\sqrt{4\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi l}{V_1\tau} + \left(\frac{V\rho}{V_1\rho_1} + \frac{V_1\rho_1}{V\rho}\right)^2}}. \tag{10}$$

Предположим теперь, что вторая среда несжимаема, так что $V_1 = \infty$; наше выражение принимает вид:

$$-\frac{\frac{\pi\rho_1 l}{\rho\lambda}}{\sqrt{1 + \pi^2\left(\frac{\rho_1 l}{\rho\lambda}\right)^2}}, \tag{11}$$

а это показывает, что величина отражения зависит от относительных масс таких количеств среды, объемы которых находятся в отношении l/λ. Очевидно, что вторая среда ведет себя подобно твердому телу и действует только в силу своей инерции. Если этого достаточно, то отражение может сделаться практически полным.

Мы должны теперь рассмотреть случай, когда a_1 — *мнимое*. В символических выражениях (5) и (6) $\cos a_1 l$ и $i\sin a_1 l$ действительны, между тем как α, $\alpha + \alpha^{-1}$, $\alpha - \alpha^{-1}$ — чисто мнимые. Таким образом, если мы предположим, что $a_1 = ia_1'$, $\alpha = i\alpha'$, и введем в обозначения гиперболические синус и косинус (§ 170), то получим

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{-i(\alpha' + \alpha'^{-1})\operatorname{sh} a_1' l}{2\operatorname{ch} a_1' l - i(\alpha' - \alpha'^{-1})\operatorname{sh} a_1' l},$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi'} = \frac{2e^{ial}}{2\operatorname{ch} a_1' l - i(\alpha' - \alpha'^{-1})\operatorname{sh} a_1' l}.$$

Отсюда, если падающая волна дается выражением

$$\varphi = \cos(ax + by + ct),$$

то отраженная волна выражается так:

$$\varphi = \frac{(\alpha' + \alpha'^{-1})\operatorname{sh} a_1' l\cos(-ax + by + ct + \varepsilon)}{\sqrt{4\operatorname{ch}^2 a_1' l + (\alpha' - \alpha'^{-1})^2\operatorname{sh}^2 a_1' l}}, \tag{12}$$

где

$$\operatorname{ctg}\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha'^{-1} - \alpha')\operatorname{th} a_1' l, \tag{13}$$

а проходящая волна дается выражением

$$\varphi = \frac{2\sin(ax+by+ct+al+\varepsilon)}{\sqrt{4\operatorname{ch}^2 a_1' l + (\alpha'-\alpha'^{-1})^2 \operatorname{sh}^2 a_1' l}}. \tag{14}$$

Легко видеть, что энергия отраженной и проходящей волн в сумме дает всю энергию падающей волны. Так как в данном случае соответствующие площади волнового фронта равны для всех трех волн, то нужно только сложить квадраты амплитуд, выраженных в уравнении (7), (8) или уравнениями (12), (14).

272. Эти вычисления отражения и преломления в различных условиях можно было бы продолжить и дальше, однако они более интересны для оптики, нежели для акустики. Важно иметь в виду, что ни при каком числе отражений и преломлений, будут ли они частичными или полными, энергия не может уничтожаться, и то количество ее, которое теряется в одном направлении, всегда вновь появляется в другом.

На границе между воздухом и каким-либо твердым телом или жидкостью отражение обычно бывает, вследствие большого различия в плотности, почти полным. Звуки, произведенные в воздухе, не легко сообщаются воде и, наоборот, звуки, источник которых находится под водой, с трудом слышимы в воздухе. Деревянный стержень или металлическая проволока действуют подобно разговорной трубе, передавая звуки с очень малыми потерями на значительные расстояния.

272*a*. В предыдущих параграфах поверхность раздела, на которой происходит отражение, предполагалась абсолютно плоской. Как с акустической, так и с оптической точек зрения интересно исследовать эффект, даваемый шероховатостью или волнистостью отражающей поверхности; поставленную таким образом задачу можно разрешить до известной степени без труда методом § 268, особенно, если мы ограничимся случаем перпендикулярного падения. Предположим, что уравнение отражающей поверхности есть $z=\zeta$, где ζ — периодическая функция от x, среднее значение которой равно нулю. В качестве частного случая мы можем взять уравнение

$$\zeta = c\cos px, \tag{1}$$

но вообще мы должны были бы дополнить первый член ряда, выражаемый (1), косинусами и синусами величин, кратных px. Потенциал скорости падающей волны (амплитуды единица) можно написать в форме

$$\varphi = e^{ik(at+z)}. \tag{2}$$

Для правильно отраженной волны мы имеем, опуская для краткости множитель, зависящий от времени $\varphi = A_0 e^{-ikz}$, но к этому следует прибавить члены, содержащие $\cos px$, $\cos 2px$ и т. д. Таким

образом, полная величина φ в верхней среде есть

$$\varphi = e^{ikz} + A_0 e^{-ikz} + A_1 e^{-i\mu_1 z}\cos px + A_2 e^{-i\mu_2 z}\cos 2px + \ldots, \quad (3)$$

где

$$\mu_1^2 = k^2 - p^2, \quad \mu_2^2 = k^2 - 4p^2. \quad (4)$$

Выражение (3), в котором для простоты синусы кратных px были опущены с самого начала, было бы достаточно общим, даже если бы член $c\cos px$ в (1) сопровождался косинусами кратных px.

Как объяснено в § 268, многое зависит от того, действительны или мнимы величины μ_1, μ_2, ... В последнем случае соответствующие члены имеют заметное значение только вблизи $z = 0$. Если все значения μ мнимы, как это имеет место при $p > k$, то вся отраженная волна скоро сводится к своему первому члену.

Для какого-нибудь действительного значения μ, скажем μ_r, соответствующая часть потенциала скорости есть

$$\varphi = \frac{1}{2} A_r \{e^{-i(\mu_r z - rpx)} + e^{-i(\mu_r z + rpx)}\},$$

что представляет плоские волны, наклоненные к z под углами, синусы которых равны $\pm \frac{rp}{k}$. Они известны в оптике под названием спектров r-го порядка. Когда длина волны волнистой поверхности меньше, чем длина волны колебания, боковые спектры отсутствуют.

В нижней среде мы имеем:

$$\varphi_1 = B_0 e^{ik_1 z} + B_1 e^{i\mu_1' z}\cos px + B_2 e^{i\mu_2' z}\cos 2px + \ldots, \quad (5)$$

где

$$\mu_1'^2 = k_1^2 - p^2, \quad \mu_2'^2 = k_1^2 - 4p^2, \ldots \quad (6)$$

В каждом экспоненциальном члене коэфициент при z должен быть взят положительным: если он мнимый, это значит, что волна распространяется в отрицательном направлении; если он — действительный, это значит, что возмущение уменьшается, вместо того, чтобы возрастать при проникновении во вторую среду.

Условия, которым нужно удовлетворить на границе, заключаются в том (§ 270), что

$$\rho\varphi = \rho_1\varphi_1 \quad (7)$$

и $\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\varphi_1}{dn}$, где dn перпендикулярно к поверхности $z = \zeta$. Отсюда

$$\frac{\partial(\varphi - \varphi_1)}{\partial z} - \frac{\partial(\varphi - \varphi_1)}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

До сих пор ни на амплитуду, ни на длину волны $(2\pi/p)$ волнистой поверхности не накладывалось никакого ограничения. Мы предположим теперь, что длина волны очень велика, так что величиной p^2 можно

всюду пренебречь. При этих условиях уравнение (8) приводится к следующему:

$$\frac{\partial(\varphi - \varphi_1)}{\partial z} = 0. \tag{9}$$

При диференцировании (3) и (5) по z различные члены умножаются на коэфициенты μ_1, $\mu_2, \ldots$, μ_1', $\mu_2', \ldots$; но когда пренебрегают p^2, эти величины можно отождествить соответственно с k, k_1. Таким образом, на границе

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = ik\,(e^{ik\zeta} - A_0 e^{-ik\zeta} - A_1 e^{-ik\zeta}\cos px - \ldots)$$

и

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = ik_1\varphi_1 = \frac{ik_1\rho\varphi}{\rho_1},$$

в силу (7). Следовательно,

$$k_1\rho\,(e^{ik\zeta} + A_0 e^{-ik\zeta} + A_1 e^{-ik\zeta}\cos px + \ldots) = \\ = k\rho_1\,(e^{ik\zeta} - A_0 e^{-ik\zeta} - A_1 e^{-ik\zeta}\cos px - \ldots),$$

или

$$\frac{k_1\rho - k\rho_1}{k_1\rho + k\rho_1}\,e^{2ik\zeta} + A_0 + A_1\cos px + A_2\cos 2px + \ldots = 0. \tag{10}$$

Этим уравнением определяются A_0, $A_1, \ldots$, когда известно ζ.

Если мы положим $\zeta = 0$, то возвратимся к нашему прежнему результату (23) § 270 для действительно плоской поверхности. Таким образом, A_1, $A_2, \ldots$ обращаются в нуль, между тем, как

$$A_0 = \frac{k\rho_1 - k_1\rho}{k\rho_1 + k_1\rho} \tag{11}$$

и выражает амплитуду правильно отраженной волны.

Мы приложим теперь (10) к случаю простой волнистой поверхности, выражаемой уравнением (1), и для краткости обозначим правую часть уравнения (11) через R. Для определения A_0, $A_1, \ldots$ требуется представить $e^{2ik\zeta}$ в виде ряда Фурье. Мы имеем (сравните § 343)

$$e^{2ikc\cos px} = J_0(2kc) - 2J_2(2kc)\cos 2px + 2J_4(2kc)\cos 4px + \ldots \\ \ldots + i\,\{2J_1(2kc)\cos px - 2J_3(2kc)\cos 3px + \\ + 2J_5(2kc)\cos 5px - \ldots\}, \tag{12}$$

где J_0, $J_1, \ldots$ — бесселевы функции различных порядков.

Таким образом.

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_0}{R} &= J_0(2kc), & \frac{A_1}{R} &= 2iJ_1(2kc), \\ \frac{A_2}{R} &= -2J_2(2kc), & \frac{A_3}{R} &= -2iJ_3(2kc), \\ \frac{A_4}{R} &= 2J_4(2kc), & \frac{A_5}{R} &= 2iJ_5(2kc), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots & & \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где коэфициенты четного порядка — действительные, а коэфициенты

нечетного порядка — мнимые величины. Полное решение проблемы отражения при ограничении случаями малых p, получается тогда подстановкой в (3); можно отметить, что этот результат совпадает с тем, который можно получить при помощи обычных оптических методов, учитывающих только запаздывания фаз. Так, что касается волны, отраженной параллельно z, то запаздывание в какой-либо точке поверхности, обязанное волнистости, составляет 2ζ или $2c\cos px$. Влияние волнистости заключается поэтому в изменении амплитуды отраженной волны в отношении

$$\frac{\int \cos(2kc\cos px)\,dx}{\int dx} \qquad \text{или} \qquad J_0(2kc).$$

Аналогично амплитуда каждого из боковых спектров первого порядка есть $J_1(2kc)$ и т. д. Сумма интенсивностей всех отраженных волн есть

$$R^2\{J_0^2 + 2J_1^2 + 2J_2^2 + \ldots\} = R^2, \tag{14}$$

согласно известной теореме; так что в предположенном случае (бесконечно малого p) доля всей энергии, отброшенная назад, такова же, как в случае гладкой поверхности.

Следует заметить, что в этой теории значение $2kc$ не подвергается никакому ограничению. Если $2kc$ мало, то заметные значения имеют только первые члены ряда, так как функция Бесселя $J_n(2kc)$ имеет порядок величины $(2kc)^n$. Напротив, когда $2kc$ велико, первые члены малы, между тем как ряд сходится медленнее. Таблицы значений J_0 и J_1 приведены в § 200. Для некоторых значений $2kc$ отдельные отраженные волны исчезают. В случае правильно отраженной волны, или спектра нулевого порядка, это имеет место впервые, когда $2kc = 2{,}404$, § 206, или $c = 0{,}2\lambda$.

Полное решение задачи настоящего раздела потребовало бы определения отражения, когда k задано для всех значений c и для всех значений p. Мы рассмотрели случай бесконечно малого p, а сейчас изучим случай, где $p > k$. Для промежуточных значений p задача труднее, и, рассматривая их, мы ограничимся более простыми граничными условиями, которые получаем, когда энергия вовсе не проникает во вторую среду. Простейший случай из всех — это тот, когда $p_1 = 0$, так что граничное уравнение (7) сводится к

$$\varphi = 0 \tag{15}$$

— условию для „открытого конца", § 256. Мы можем также указать на случай твердой стенки, или „закрытого конца", где условие на поверхности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

В силу (3) и (15) условие, которое должно быть удовлетворено на поверхности, есть

$$e^{2ikz} + A_0 + A_1 e^{i(k-\mu_1)z}\cos px + A_2 e^{i(k-\mu_2)z}\cos 2px + \ldots = 0. \quad (16)$$

В нашей задаче z задано выражением (1), как функция x; уравнения, выражающие условие, найдутся, если мы приравняем нулю коэфициенты различных членов, содержащих $\cos px$, $\cos 2px$, и т. д., когда левая часть (16) разложена в ряд Фурье. Разложение различных экспоненциальных функций выполняется так же, как в (12); в результате получаются следующие уравнения:

$$J_0(2k) + A_0 + iA_1 J_1(k-\mu_1) - A_2 J_2(k-\mu_2) - \ldots = 0, \quad (17)$$

$$2iJ_1(2k) + A_1\{J_0(k-\mu_1) - J_2(k-\mu_1)\} + A_2\{iJ_1(k-\mu_2) - iJ_3(k-\mu_2)\} + \ldots = 0. \quad (18)$$

$$-2J_2(2k) + A_1\{iJ_1(k-\mu_1) - iJ_3(k-\mu_1)\} + A_2\{J_0(k-\mu_2) + J_4(k-\mu_2)\} + \ldots = 0 \quad (19)$$

и т. д., где c ради краткости положено равным единице. Пока $(k-\mu)$ можно считать действительной величиной, — что имеет место для большого числа членов, когда p мало сравнительно с k, — различные функции Бесселя все действительны, и, таким образом, коэфициенты A четного порядка действительны, а коэфициенты A нечетного порядка — мнимы. Таким образом, фаза перпендикулярно отраженной волны такова, как если бы $c = 0$; следует, однако, помнить, что этот вывод в действительности только приближенный, потому что, как бы ни было мало p, величины μ в конце концов становятся мнимыми.

Из предыдущих уравнений легко получить значение A_0 с точностью до члена, зависящего от p^4. Из (19)

$$A_2 = 2J_2(2k);$$

из (18)

$$iA_1 = 2J_1(2k) + (k-\mu_2)J_2(2k);$$

и, наконец, из (17)

$$-A_0 = J_0(2k) + (k-\mu_1)J_1(2k) + \left\{\frac{1}{2}(k-\mu_1)(k-\mu_2) - \frac{1}{4}(k-\mu_2)^2\right\}J_2(2k) + \ldots. \quad (20)$$

Из (4)

$$k - \mu_1 = \frac{p^2}{2k} + \frac{p^4}{8k^3} + \ldots,$$

так что, вводя вновь c и располагая результат по степеням p,

$$-A_0 = J_0(2kc) + \frac{p^2}{k^2}\cdot\frac{1}{2}kc\cdot J_1(2kc) + \frac{p^4}{k^4}\left\{\frac{1}{8}kc\cdot J_1(2kc) - \frac{1}{2}k^2c^2\cdot J_2(2kc)\right\}. \quad (21)^{1)}$$

[1]) *Brit. Ass. Rep.*, 1893, стр. 691.

Отсюда получим амплитуду перпендикулярно отраженной волны, опуская p^2 и более высокие степени p.

Случай отражения от неподвижной стенки немного сложнее. Согласно (8), граничное условие есть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + pc \sin px \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

что дает уравнение

$$e^{2ikz} - A_0 - \frac{\mu_1}{k} A_1 e^{i(k-\mu_1)z} \cos px - \frac{\mu_2}{k} A_2 e^{i(k-\mu_2)z} \cos 2px - \ldots$$
$$- \frac{p^2 c \sin px}{ik} \{ A_1 e^{i(k-\mu_1)z} \sin px + 4 A_2 e^{i(k-\mu_2)z} \sin 2px + \ldots \} = 0, \quad (22)$$

которое должно быть удовлетворено, когда $z = c \cos px$. Первое приближение для A_1 имеет вид:

$$A_1 = 2iJ_1(2kc), \quad (23)$$

откуда во втором приближении

$$A_0 = J_0(2kc) + \left\{ -\frac{1}{2}(k - \mu_1) + \frac{p^2 c}{2k} \right\} iA_1 =$$
$$= J_0(2kc) - \frac{p^2}{2k^2} \cdot kc \cdot J_1(2kc). \quad (24)$$

Первое приближение для различных коэфициентов можно найти, полагая $R = +1$ в (13).

Если $p > k$, диффракционных спектров нет, и вся энергия волны, падающей на непроницаемую среду, должна быть представлена в волне, отраженной прямо. Модуль A_0 равен поэтому единице. Если $p < k$, энергия распределяется между различными спектрами, включая и спектр нулевого порядка. Между квадратами модулей A_0, A_1, A_2, ... имеется, таким образом, некоторое соотношение, причем ряд продолжается, пока μ действительно.

Исследование более аналитического характера может основываться на теореме Гельмгольца (§ 293), согласно которой

$$\int \left\{ \psi \frac{\partial \chi}{\partial n} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right\} dS = 0,$$

где S — некоторая замкнутая поверхность, а ψ и χ удовлетворяют уравнению

$$\nabla^2 + k^2 = 0.$$

Чтобы воспользоваться этой теоремой, примем в качестве ψ и χ соответственно действительную и мнимую части φ, определяемые по (3). Таким образом, представляя каждый комплексный коэфициент A_n в форме $C_n + iD_n$, мы получаем

$$\psi = \cos kz + C_0 \cos kz + D_0 \sin kz +$$
$$+ (C_1 \cos \mu_1 z + D_1 \sin \mu_1 z) \cos px + \ldots, \quad (25)$$
$$\chi = \sin kz - C_0 \sin kz + D_0 \cos kz +$$
$$+ (-C_1 \sin \mu_1 z + D_1 \cos \mu_1 z) \cos px + \ldots \quad (26)$$

В рядах (25), (26), если их достаточно продолжить, члены меняют свою форму, потому что μ в конце концов становится мнимым; для нашей цели эти члены, однако, не потребуются, так как они исчезают, когда z очень велико. Поверхность интегрирования S слагается из отражающей поверхности и параллельной ей плоскости, расположенной на большом расстоянии. Хотя эта поверхность не является строго замкнутой, ее можно рассматривать как таковую, так как часть, еще остающаяся открытой с боков в бесконечности, не влияет заметно на результат. Но часть интеграла, соответствующая отражающей поверхности, обращается в нуль, так как либо

$$\psi = \chi = 0,$$

либо

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \chi}{\partial n} = 0;$$

и мы заключаем, что, когда z велико,

$$\int \left\{ \psi \frac{\partial \chi}{\partial z} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} dx = 0. \tag{27}$$

Применение (27) к выражениям ψ и χ в (25), (26) дает

$$C_0^2 + D_0^2 + \frac{\mu_1}{2k}(C_1^2 + D_1^2) + \frac{\mu_2}{2k}(C_2^2 + D_2^2) + \ldots = 1, \tag{28}$$

причем ряд (28) продолжается настолько, чтобы в нем заключалось каждое *действительное* значение μ.

В (28) $\frac{1}{4}(C_n^2 + D_n^2)$ представляет интенсивность каждого спектра n-го порядка.

Коэфициент μ_n/k равен $\cos\theta_n$, где θ_n — угол наклона диффрагированных лучей. Значение этого фактора станет очевидным, если заметить, что каждой единице площади волн, падающей и отраженной прямо, соответствует площадь $\cos\theta_n$ волн, которые составляют спектр n-го порядка.

Если все значения μ — мнимые, что имеет место при $p > k$, то (28) сводится к

$$C_0^2 + D_0^2 = 1, \tag{29}$$

т. е., словами, интенсивность прямо отраженной волны есть единица. Весьма важно полностью уяснить себе значение этого результата. Как бы ни была глубока волнистость поверхности, если только периодичность ее такова, что периоды ее меньше, чем длина волны колебания, то правильное отражение будет полным. Исключительно шероховатая стенка будет, таким образом, отражать звуковые волны средней высоты так же хорошо, как если бы она была теоретически гладкой.

Приведенное исследование ограничивается случаем, когда вторая среда непроницаема, так что вся энергия падающей волны отбрасы

вается назад в правильно отраженной волне и в диффракционных спектрах. Интересен вопрос, можно ли заключение о том, что волнистость периода, меньшего λ, не дает никакого эффекта, расширить настолько, чтобы приложить его к случаю, когда имеется правильно проходящая волна. Очевидно, что для решения этого вопроса принципа энергии недостаточно, однако, ответ, вероятно, должен быть отрицательным. Если мы будем предполагать, что волнистость заданного периода становится все глубже и сложнее, то казалось бы, положение вещей в конце концов должно приблизиться к случаю очень постепенного перехода между средами, когда (§ 148*b*) отражение стремится вовсе исчезнуть.

Рамки нашего исследования не позволяют нам трактовать в полном объеме проблему наклонного падения на волнистую поверхность; однако, одно или два замечания могут быть сделаны.

Если p^2 можно пренебречь, то решение, соответствующее (13), имеет вид:

$$A_0 = RJ_0(2kc\cos\theta), \tag{30}$$

где θ — угол падения и отражения, а R — значение A_0, § 270, соответствующее $c = 0$. Множитель, выражающий эффект волнистости, является, таким образом, функцией $c\cos\theta$; так что глубокая волнистость, при большом θ, может иметь тот же самый эффект, что и мелкая, при θ малом.

Каков бы ни был угол падения, если длина волны волнистости меньше, чем *половина* длины волны колебаний, отраженных спектров, исключая спектр нулевого порядка, нет. Отсюда, если вторая среда нецроницаема, правильное отражение при указанном выше условии будет полным.

Читателя, желающего продолжить изучение теории решеток, мы должны отослать к трактатам по оптике и к статьям автора [1]) и проф. Роулэнда [2]).

---

[1]) „The Manufacture and Theory of Diffraction Gratings", *Phil. Mag.*, том XLVII, стр. 81, 193, 1874; On Copying „Diffraction Gratings, and on some Phenomena connected therewith.", *Phil. Mag.*, том XI, стр. 196, 1881; *Enc. Brit.*, „Wave Theory of Light".

[2]) H. Rowland, „Gratings in Theory and Practice", *Phil. Mag.*, том XXXV, стр. 397, 1893.

ГЛАВА XIV

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ

273. Одной из первых задач, естественно возникающих в связи с общей проблемой воздушных колебаний в трех измерениях, является определение движения в неограниченной атмосфере в результате произвольных начальных возмущений. Будем предполагать, что возмущение *мало́*, так что приложимы обычные приближенные уравнения, и далее, что начальные скорости могут быть получены из потенциала скорости, т. е. (§ 240), что отсутствует *циркуляция*. Если последнее условие нарушено, то мы будем иметь дело с задачей о вихревом движении, которым мы не занимаемся. Мы предположим, в первую очередь, также, что на жидкость не действуют никакие внешние силы, так что исследуемое движение обязано исключительно возмущению, действительно существующему в момент времени ($t = 0$), с которого начинается период, подлежащий нашему исследованию. Метод, которым мы будем пользоваться, не очень сильно отличается от метода Пуассона [1]), которым впервые была успешно одолена эта задача.

Если u_0, v_0, w_0 — начальные скорости в точке x, y, z, а s_0 — начальное сжатие, то мы имеем (§ 244) уравнения

$$\varphi_0 = \int (u_0 dx + v_0 dy + w_0 dz), \tag{1}$$

$$\dot{\varphi}_0 = -a^2 s_0, \tag{2}$$

которыми определяются начальные значения потенциала скорости φ и его производной по времени $\dot{\varphi}$. Стоящая перед нами задача заключается в определении φ для времени t из приведенных выше начальных данных, а общее уравнение, приложимое ко всякому моменту времени и ко всякому месту пространства, имеет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2\right) \varphi = 0. \tag{3}$$

---

[1]) Poisson, „Sur l'intégration de quelques équations linéaires aux differences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques". *Mém. de l'Institut*, том III, стр. 121, 1820.

Если φ известно, производные этой величины дают компоненты скорости в любой точке.

Символическое решение (3) может быть записано в такой форме:

$$\varphi = \sin(ia\nabla t)\cdot\theta + \cos(ia\nabla t)\cdot\chi, \qquad (4)$$

где θ и χ — две произвольные функции x, y, z и $i=\sqrt{-1}$. Чтобы связать θ и χ с начальными значениями φ и $\dot{\varphi}$, которые мы обозначим соответственно через f и F, необходимо лишь заметить, что для $t=0$ (4) дает

$$\varphi_0 = \chi, \quad \dot{\varphi}_0 = ia\nabla\theta,$$

так что наш результат может быть представлен следующим образом:

$$\varphi = \cos(ia\nabla t)\cdot f + \frac{\sin(ia\nabla t)}{ia\nabla}\cdot F; \qquad (5)$$

в этом уравнении вопрос об интерпретации нечетных степеней не возникает, так как обе символические функции целиком четные.

Мы видели (§ 245), что в случае, когда потенциал φ был функцией одного x, его значение для некоторой точки x в момент времени t зависело от начальных значений φ и $\dot{\varphi}$ в точках с координатами $x-at$ и $x+at$ и совершенно не зависело от начальных условий во всех других точках. В настоящем случае, нам кажется, проще всего предположить, что значение φ в точке 0 зависит от начальных значений φ и $\dot{\varphi}$ в точках, расположенных на поверхности сферы, центр которой есть 0 и радиус at; и, наконец, нет никаких оснований отдать предпочтение одному направлению перед другим; мы приходим, таким образом, к мысли исследовать выражение среднего значения функции на сферической поверхности через последовательные производные функции в центре.

Согласно теореме Маклорена, взятой в символической форме, значение $F(x, y, z)$ в некоторой точке P поверхности сферы радиуса r может быть написано так:

$$F(x,y,z) = e^{x\frac{\partial}{\partial x_0}+y\frac{\partial}{\partial y_0}+z\frac{\partial}{\partial z_0}}\cdot F(x_0, y_0, z_0),$$

центр сферы является началом координат. При интегрировании по поверхности сферы $\partial/\partial x_0$, $\partial/\partial y_0$, $\partial/\partial z_0$ ведут себя как некоторые постоянные; мы можем обозначить их на время через l, m, n, так что $\nabla^2 = l^2+m^2+n^2$.

Таким образом, пусть r — радиус сферы, а dS — элемент ее поверхности. Вследствие симметрии сферы, мы можем заменить любую функцию аргумента

$$\frac{lx+my+nz}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

такою же самой функцией z, не изменяя результата интегрирования, т. е.

$$\iint e^{lx+my+nz}dS=\iint (e^{\nabla})^{\frac{lx+my+nz}{\nabla\sqrt{l^2+m^2+n^2}}}dS=$$

$$=\iint e^{\nabla z}dS=2\pi r\int_{-r}^{+r}e^{\nabla z}dz=\frac{2\pi r}{\nabla}(e^{\nabla r}-e^{-\nabla r})=4\pi r^2\,\frac{\sin(i\nabla r)}{i\nabla r}.$$

Среднее значение F по поверхности сферы радиуса r выражается, таким образом, как результат операции над F символа $\sin(i\nabla r)/i\nabla r$ или, если $\iint d\sigma$ обозначает интегрирование в пределах телесного угла

$$\frac{1}{4\pi}\iint F(r)\,d\sigma=\frac{\sin(i\nabla r)}{i\nabla r_d}\cdot F. \tag{6}$$

Сравнивая этот результат с (5), мы видим теперь, что коль скоро φ зависит от начальных значений $\dot{\varphi}$, оно выражается в виде

$$\varphi=\frac{t}{4\pi}\iint F(at)\,d\sigma, \tag{7}$$

или, выражая это словами: φ в любой точке в момент времени t равно среднему значению $\dot{\varphi}$ на поверхности сферы, описанной вокруг данной точки радиусом at, умноженному на t.

Применив правило Стокса (§ 95), или просто взглянув на (5), мы видим, что часть φ, зависящая от начальных значений $\dot{\varphi}$, может быть выведена из только что написанной путем диференцирования по t и замены произвольной функции. Полное значение φ в момент времени t есть поэтому

$$\varphi=\frac{t}{4\pi}\iint F(at)d\sigma+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}t\iint f(at)\,d\sigma \tag{8}$$

— результат, полученный Пуассоном [1]).

Ввиду важности настоящей проблемы, целесообразно проверить это решение a posteriori. Мы должны сперва доказать, что оно удовлетворяет общему диференциальному уравнению (3). Беря на момент только первый член и имея в виду общее символическое уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2}t=\frac{1}{t}\frac{d}{dt}t^2\frac{d}{dt}, \tag{9}$$

мы находим из (8)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{1}{4\pi t}\frac{\partial}{\partial t}t^2\iint\frac{\partial}{\partial t}F(at)\,d\sigma=\frac{1}{4\pi at}\frac{\partial}{\partial t}\iint\frac{\partial F(at)}{\partial(at)}dS,$$

где dS — элемент поверхности сферы радиуса $r=at$.

[1]) Другое исследование можно найти в „*Vorlesungen über Mathematische Physik*“ Кирхгоффа, стр. 317, 1876. (См. также примечание к § 273 в конце этого тома.)

Но по теореме Грина

$$\iint \frac{\partial F(r)}{\partial r}\, dS = \iiint \nabla^2 F\, dV \quad (r < at);$$

и, таким образом,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi a t}\frac{\partial}{\partial t}\cdot \iiint \nabla^2 F\, dV_{(r<at)} =$$
$$= \frac{1}{4\pi t}\iint \nabla^2 F\, dS_{(r=at)} = \frac{a^2 t}{4\pi}\iint \nabla^2 F\, d\sigma.$$

Но $\iint \nabla^2 F\, d\sigma$ — идентично $\nabla^2 \iint F\, d\sigma$, и, таким образом, уравнение (3) действительно удовлетворено.

Так как вторая часть φ получается из первой путем диференцирования, то она также должна удовлетворять основному уравнению.

Что касается начальных условий, то мы видим, что когда t в (8) положено равным нулю,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\iint f(at)\, d\sigma_{(t=0)} = f(0);$$
$$\dot{\varphi} = \frac{1}{4\pi}\iint F(at)\, d\sigma_{(t=0)} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial t^2} t \iint f(at)\, d\sigma_{(t=0)}$$

— выражение, первый член которого в пределе становится равным $F(0)$. При $t = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} t \iint f(at)\, d\sigma = 2\frac{\partial}{\partial t}\iint f(at)\, d\sigma_{(t=0)} =$$
$$= 2a \iint f'(at)\, d\sigma_{(t=0)} = 0,$$

так как элементы, расположенные друг против друга, в пределе, при безграничном уменьшении радиуса сферы, взаимно уничтожаются. Выражение в (8) удовлетворяет поэтому как предписанным начальным условиям, так и общему диференциальному уравнению.

274. Если начальное возмущение ограничено пространством T, то интегралы в (8) § 273 равны нулю, если только некоторая часть поверхности сферы $r = at$ не заключена внутри T. Пусть O — некоторая точка, внешняя к T, а r_1 и r_2 — радиусы наименьшей и наибольшей из сфер, описанных вокруг O, которые пересекают T. Тогда, покуда $at < r_1$, φ остается равным нулю. Когда at лежит между r_1 и r_2, φ может быть конечным, но для значений, бо́льших, чем r_2, φ снова равно нулю. Возмущение, таким образом, во всякий момент времени ограничено теми частями пространства, для которых at заключается между r_1 и r_2. Границей волны является огибающая сфер радиуса at, центры которых расположены на поверхности T. „Когда t мало, эта система сфер будет иметь внешнюю огибающую из двух листов, причем наружный из этих листов будет внешней, а внутренний — внутренней поверхностью слоя, образованного совокупностью сфер. Внешний лист образует внешнюю границу

той части среды, где расширение отлично от нуля. По мере того как t возрастает, внутренний лист сжимается, наконец, его противоположные стороны пересекают друг друга и он изменяет свой характер, превращаясь из внешнего по отношению к сферам во внутренний. Далее он расширяется и образует внутреннюю границу слоя, в котором заключена волна сжатия" [1]). Последовательные положения границ волны представляют собой, таким образом, серию параллельных поверхностей, и каждая граница распространяется по нормали со скоростью, равной a.

Если в момент $t=0$ движения не было, так что начальное возмущение состояло только в изменении плотности, то последующее положение вещей выражается первым членом (8) § 273. Предположим, что начальное возмущение, все еще ограниченное конечной областью T, состоит только из одного сжатия, без разрежения. Можно было бы думать, что эта же самая особенность будет присуща в течение всего дальнейшего времени и возникшей волне; однако, подобное заключение, как заметил проф. Стокс, было бы ошибочным. Для значений времени, меньших, чем r_1/a, потенциал в O равен нулю; он становится затем отрицательным (s_0 положительно) и продолжает оставаться таким, пока при $t=r_2/a$ снова не обращается в нуль, после чего уже все время остается равным нулю. Когда φ уменьшается, среда в O находится в состоянии сжатия, когда же φ снова возрастает до нуля, состояние среды в O является состоянием разрежения. Волна, распространяющаяся наружу, состоит поэтому, по меньшей мере, из двух частей, из которых одна есть волна сжатия, а другая — волна разрежения. Каков бы ни был характер первоначального возмущения в пределах T, конечное значение φ в любой внешней точке O будет тем же самым, что и начальное значение; поэтому среднее сжатие при прохождении волны, зависящее от интеграла $\int s\,dt$ (так как $a^2 s = -\dot{\varphi}$) есть нуль. Мы еще будем иметь случай возвратиться к этому предмету в связи с вопросом о сферических волнах (§ 279).

Общее решение, заключающееся в (8) § 273, должно, конечно, охватывать и частный случай плоских волн; однако, несколько слов по поводу этого приложения могут оказаться не лишними. Действительно, на первый взгляд могло бы показаться, что в заданной точке эффект возмущения, ограниченного первоначально пластиной среды, заключенной между двумя параллельными плоскостями, не будет проходить за конечное время, что, как мы знаем, должно иметь место. Предположим для простоты, что φ_0 всюду равно нулю и что внутри рассматриваемой пластины начальное значение $\dot{\varphi}_0$ постоянно. Из теории плоских волн мы знаем, что во всякой произвольной точке возмущение в конце концов, — по истечении некоторого времени t, таково,

[1]) Stokes, „Dynamical Theory of Diffraction", *Camb. Trans.*, том IX, стр. 15, 1849.

что at равно расстоянию d рассматриваемой точки от более отдаленной границы первоначально возмущенной области, — прекратится; с другой стороны, из общих формул, казалось бы, вытекает, что возмущение продолжает существовать, поскольку сфера радиуса at продолжает пересекать область. Однако, хотя и верно, что φ остается конечным, это отнюдь не несовместимо с покоем. Действительно, при исследовании обнаружится, что среднее значение φ_0, умноженное на радиус сферы, одно и то же, каковы бы ни были положение и размеры сферы, при одном только условии, что она проходит целиком в области первоначального возмущения. Если $at > d$, то φ, таким образом, постоянно как в пространстве, так и во времени, и в соответствии с этим среда находится в покое.

[Эти же принципы можно применить и к истолкованию явления *грома*. Мы могли бы предположить, что образование теплоты вдоль пути молнии является равномерным и эквивалентным равномерному начальному распределению сжатия. Повидимому, значение φ в O — точке наблюдения — может быстро изменяться только тогда, когда сфера $r = at$ встречает путь разряда в самых его концах, или же очень косо.]

275. Можно было бы предположить, что в двух измерениях, когда φ не зависит от z, соответствующие формулы получатся путем простой замены сферы радиуса at кругом равного радиуса. Это, однако, не так. Можно показать, что среднее значение функции $F(x, y)$ вдоль окружности радиуса r есть $J_0(ir\nabla)F_0$, где $i = \sqrt{-1}$,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2},$$

а J_0 — функция *Бесселя* нулевого порядка, так что

$$\frac{1}{2\pi r}\int F(x, y)\, dS = \left(1 + \frac{r^2\nabla^2}{2^2} + \frac{r^4\nabla^4}{2^2 \cdot 4^2} + \ldots\right) F$$

— выражение, отличающееся от того, которое требуется, чтобы удовлетворить основному уравнению.

Правильный результат, приложимый к двум измерениям, можно получить из общей формулы. Элемент сферической поверхности dS можно заменить через $r\, dr\, d\theta / \cos\psi$, где r, θ — плоские полярные координаты, а ψ — угол между касательной плоскостью и плоскостью, в которой происходит движение. Таким образом,

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}{at},$$

$F(at)$ заменяется через $F(r, \theta)$, и, следовательно,

$$\varphi = \int\int \frac{F(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta}{4\pi a\sqrt{a^2t^2 - r^2}}, \qquad (1)$$

причем интегрирование производится по площади круга радиуса $r = at$. Другой член можно получить по правилу Стокса. Это решение приложимо к движению слоя газа между двумя параллельными плоскостями или к движению безграничной натянутой мембраны, которое подчиняется тому же основному уравнению.

276. Из решения, выраженного через начальные условия, мы можем, как обычно, вывести эффект непрерывно возобновляемого возмущения. Предположим, что всюду в пространстве T (которое мы в конце концов сделаем исчезающе малым) сообщается в момент времени t' равномерное возмущение $\dot{\varphi}$, равное $\Phi(t')\,dt'$. Соответствующее значение φ в момент времени t есть

$$\frac{S}{4\pi a^2 (t-t')}\,\Phi(t')\,dt',$$

где S обозначает часть поверхности сферы $r = a(t-t')$, заключенную внутри T, величину, которая исчезает, если только $a(t-t')$ не заключено между узкими пределами r_1 и r_2. Но $t-t'$ можно заменить через r/a и $\Phi(t')$ через $\Phi(t-r/a)$; результат интегрирования по dt' найдется, если написать T (объем) вместо $\int aS\,dt'$. Отсюда:

$$\varphi = \frac{T}{4\pi a^2 r}\,\Phi\left(t - \frac{r}{a}\right); \qquad (1)$$

это показывает, что возникающее в какой-либо точке возмущение распространяется симметрично во всех направлениях со скоростью a и с амплитудой, изменяющейся обратно пропорционально расстоянию. Так как любое число частных решений может быть суперпонировано, то общее решение уравнения

$$\ddot{\varphi} = a^2\nabla^2\varphi + \Phi \qquad (2)$$

можно написать в такой форме:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint \Phi\left(t - \frac{r}{a}\right)\frac{dV}{r}, \qquad (3)$$

где r обозначает расстояние элемента dV, расположенного в точке x, y, z, от 0 (где измеряется φ), а $\Phi(t-r/a)$ есть значение Φ для точки x, y, z в момент времени $t-r/a$. Дополнительные члены, удовлетворяющие во всем пространстве уравнению $\ddot{\varphi} = a^2\nabla^2\varphi$, могут, конечно, также войти в это решение. В нашем прежнем обозначении (§ 244)

$$\Phi = \frac{\partial}{\partial t}\int X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

и предполагается, что $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ есть полный диференциал. Силы, при наличии которых среда не могла бы сама прийти в равновесие (например, сила, одинаковая по величине и направлению

в пределах пространства τ и исчезающая вне этого пространства), исключены. Природу возмущения, обозначенного через Φ, лучше всего, вероятно, понять, рассматривая крайний случай, когда Φ исчезает всюду за исключением малого объема, который предполагается беспредельно уменьшающимся, между тем как величина Φ возрастает таким образом, что эффект в целом остается конечным. Если мы тогда проинтегрируем уравнение (2) по малому пространству, заключающему ту точку, в которой окончательно концентрируется Φ, то найдем в пределе:

$$0 = a^2 \int\int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS + \int\int\int \Phi\, dV \qquad (4)$$

— выражение, показывающее, что эффект Φ можно изобразить пропорциональным введением или удалением жидкости в рассматриваемом месте. Простейший источник звука аналогичен, таким образом, фокусу в теории теплопроводности или электроду в теории электричества.

277. Предыдущие выражения являются общими в смысле отношения ко времени входящих в них функций, но почти во всех приложениях, с которыми мы должны будем иметь дело, удобнее будет анализировать движение с помощью теоремы Фурье и трактовать простые гармонические движения различного периода по отдельности, комбинируя впоследствии, если это потребуется, результаты. Значения φ и Φ, если они являются простыми гармониками в каждой точке пространства, могут быть выражены в форме $R\cos(nt + \varepsilon)$, где R и ε не зависят от времени, но меняются от точки к точке. Но, поскольку в таких случаях прибавление члена $iR\sin(nt + \varepsilon)$, дающее в целом $Re^{i(nt+\varepsilon)}$ или $Re^{i\varepsilon}\cdot e^{int}$, часто упрощает дело, мы будем просто предполагать, что все функции, входящие в проблему, пропорциональны e^{int}, коэфициенты же вообще комплексны. После того как наши операции будут закончены, действительные и мнимые части выражений могут быть разделены; каждая из них в отдельности составляет решение вопроса.

Так как φ пропорционально e^{int}, $\ddot{\varphi} = -n^2\varphi$, и диференциальное уравнение принимает вид:

$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi + a^{-2}\Phi = 0, \qquad (1)$$

где, для краткости, вместо n/a написано k. Если λ обозначает *длину волны* колебания рассматриваемого периода,

$$k = \frac{n}{a} = \frac{2\pi}{\lambda}. \qquad (2)$$

Чтобы приспособить выражение (3) предыдущего раздела к настоящему случаю, необходимо только заметить, что замена t на $t - r/a$ осуществляется введением множителя $e^{-inr/a}$ или e^{-ikr};

таким образом,

$$\Phi\left(t-\frac{r}{a}\right)=e^{-ikr}\Phi(t),$$

и решение (1) имеет вид:

$$\varphi=\frac{1}{4\pi a^2}\int\int\int\frac{e^{-ikr}}{r}\Phi\,dV \tag{3}$$

— выражение, к которому можно прибавить любое решение $\nabla^2\varphi+k^2\varphi=0$.

Если все возмущающие силы находятся в одинаковой фазе и область, в которой они действуют, очень мала в сравнении с длиной волны, то e^{-ikr} может быть вынесено из-под знака интеграла, и на достаточном расстоянии мы можем взять

$$\varphi=\frac{e^{-ikr}}{4\pi a^2 r}\int\int\int\Phi\,dV,$$

или в действительных величинах, восстанавливая временной множитель и заменяя $\int\int\int\Phi\,dV$ через Φ_1,

$$\varphi=\Phi_1\frac{\cos(nt-kr+\varepsilon)}{4\pi a^2 r}. \tag{4}$$

Для подтверждения того, что решение (3) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), мы можем поступить как в теории обычного потенциала. Рассматривая один элемент интеграла в некоторый момент времени, мы должны прежде всего показать, что

$$\varphi=\frac{e^{-ikr}}{r} \tag{5}$$

удовлетворяет $\nabla^2\varphi+k^2\varphi=0$ в точках, для которых r конечно. Простейший путь — это выразить ∇^2 в полярных координатах, отнесенных к самому элементу, взятому в качестве полюса; тогда

$$\nabla^2\frac{e^{-ikr}}{r}=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r\cdot\frac{e^{-ikr}}{r}=-k^2\frac{e^{-ikr}}{r}.$$

Мы заключаем, что (3) удовлетворяет $\nabla^2\varphi+k^2\varphi=0$ во всех точках, где Φ обращается в нуль. Для точки, в которой Φ не исчезает, мы можем исключить из рассмотрения все элементы, расположенные на конечном расстоянии (так как они дают лишь члены, удовлетворяющие уравнению $\nabla^2\varphi+k^2\varphi=0$), а для элемента на бесконечно малом расстоянии заменить e^{-ikr} единицей. Таким образом, в сумме

$$(\nabla^2+k^2)\varphi=\frac{1}{4\pi a^2}\nabla^2\int\int\int\Phi\frac{dV}{r}=\frac{1}{a^2}\Phi,$$

в точности так же, как в теореме Пуассона для обычного потенциала [1]).

---

[1]) См. Thomson and Tait, „*Natural Philosophy*", § 491.

278. Эффект силы Φ_1, распределенной по поверхности S, можно получить в предельном случае из (3) § 277. $\Phi\, dV$ заменяется через $\Phi b\, dS$, где b обозначает толщину слоя; в пределе мы можем написать $\Phi b = \Phi_1$. Таким образом,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi a^2}\int\int \Phi_1 \frac{e^{-ikr}}{r}\, dS. \tag{1}$$

Значение φ одинаково по обе стороны от S, но производные φ претерпевают на S разрыв. Если dn проведено по нормали наружу от S, то (4) § 276 дает

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_2 = -\frac{1}{a^2}\Phi_1\ ^{1}). \tag{2}$$

Если поверхность S — плоская, то интеграл в (1) очевидно симметричен относительно нее, и поэтому

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_2.$$

Отсюда, если $\partial v/\partial n$ есть заданная нормальная скорость жидкости в соприкосновении с плоскостью, то значение φ определяется выражением

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int\int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\frac{e^{-ikr}}{r}\, dS, \tag{3}$$

которое представляет собой весьма важный результат. Чтобы выразить его через действительные величины, мы можем положить

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = Pe^{i(nt+\varepsilon)}, \tag{4}$$

где P и ε — действительные функции положения dS. Символическое решение принимает тогда вид:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int\int Pe^{i(nt-kr+\varepsilon)}\frac{dS}{r}, \tag{5}$$

из которого, если отбросить мнимую часть, мы получаем

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int\int P\frac{\cos(nt-kr+\varepsilon)}{r}\, dS, \tag{6}$$

соответственно

$$\frac{\partial v}{\partial n} = P\cos(nt+\varepsilon). \tag{7}$$

Этот же самый метод приложим к общему случаю, когда движение не обязательно сводится к простой гармонике. Мы имеем:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int\int V\left(t-\frac{r}{a}\right)\cdot\frac{dS}{r}, \tag{8}$$

---

[1]) Helmholtz, *Crelle*, том 57, стр. 21, 1860.

где через $V\left(t-\frac{r}{a}\right)$ обозначена нормальная скорость в плоскости для элемента dS в момент времени $t-r/a$, т. е. на время r/a, предшествующее моменту, для которого оценивается φ.

Чтобы завершить решение проблемы для неограниченной массы жидкости, лежащей по одну сторону бесконечной плоскости, мы должны прибавить наиболее общее выражение для φ, совместимое с $V=0$. Эта часть вопроса тождественна с общей задачей отражения от бесконечной твердой плоскости [1]).

Очевидно, что эффект связи будет представлен, если ввести по другую сторону плоскости фиктивные начальные смещения и силы, образующие в соединении с действительно существующими на первой стороне систему, строго симметричную относительно плоскости. Каковы бы ни были начальные значения φ и $\dot{\varphi}$, принадлежащие любой точке на первой стороне, то же самое должно быть приписано ее *изображению*, и равным образом, какая бы функция времени Φ ни существовала в первой точке, такую же точно функцию времени следует представить себе в другой. При этих условиях ясно, что φ для всего последующего времени будет симметрично относительно плоскости, и поэтому нормальная скорость равна нулю. Но тогда очевидно, что в движении на первой стороне ничего не изменится, если плоскость будет удалена и жидкость будет простираться неограниченно во всех направлениях, — если, конечно, положить, что условия на второй стороне являются точным отображением условий на первой стороне. Если иметь это в виду, то общее решение задачи для жидкости, ограниченной бесконечной плоскостью, содержится в формулах (8) § 279, (3) § 277 и (8) настоящего раздела. Они дают результат для произвольных начальных условий φ_0 и $\dot{\varphi}_0$, произвольных приложенных сил Φ и произвольного движения плоскости со скоростью V.

Если измерять по результирующему потенциалу, то источник заданной интенсивности, т. е. источник, в котором происходят заданные поступление и отток жидкости, вдвое эффективнее, когда он находится вплотную по соседству с твердой плоскостью, чем в случае, когда он расположен в открытом пространстве; результат в конечном счете одинаков, сконцентрирован ли источник в одной точке в плотном соседстве с плоскостью или же он обусловлен соответствующим нормальным движением поверхности самой плоскости.

Действие плоскости состоит в том, что она удваивает эффективные давления, которые противостоят расширению и сжатию у источника, и поэтому удваивает полную испускаемую энергию, а так как эта энергия рассеивается только в пределах полупространства, то интенсивность звука учетверяется, что соответствует удвоенной амплитуде, или удвоенному потенциалу (§ 245).

---

[1]) Poisson, *Journal de l'École polytechnique*, том VII, 1808.

Мы предположим теперь, что условием, предписанным для бесконечной плоскости, вместо $d\varphi/dn = 0$, является $\varphi = 0$. В этом случае фиктивное распределение φ_0, φ_0, Φ на другой стороне плоскости должно быть *противоположным* распределению на первой стороне, так что сумма значений в двух соответствующих точках всегда равна нулю. Этим обеспечивается равенство φ нулю всюду на самой плоскости симметрии.

Предположим далее, что имеются две параллельные поверхности S_1 и S_2, разделенные бесконечно малым интервалом dn, и что значение Φ_1 на второй поверхности равно и противоположно значению Φ_1 на первой поверхности. При переходе через S_1, согласно (2), имеет место конечное изменение значения $d\varphi/dn$ на величину Φ_1/a^2, при проходе же через S_2 то же самое конечное изменение происходит в обратном направлении. Когда dn стремится к нулю, и $\Phi_1 dn$ заменяется через Φ_{11}, $d\varphi/dn$ оказывается одинаковым по обе стороны двойного слоя, но значение φ претерпевает разрыв φ величиною Φ_{11}/a^2. В то же самое время (1) принимает вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi a^2}\iint \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\Phi_{11}\,dS. \tag{9}$$

Если поверхность S плоская, то значения φ по обе стороны ее численно равны, и поэтому вплотную к самой поверхности

$$\varphi = \pm\frac{1}{2}\,a^{-2}\Phi_{11}.$$

Отсюда (9) можно написать следующим образом:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\iint \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\varphi\,dS, \tag{10}$$

где φ под знаком интеграла представляет собой поверхностный потенциал, положительный на одной стороне и отрицательный на другой, обязанный действию сил в S. Направление dn следует считать *в ту сторону*, с которой подсчитывается φ.

279. Проблема сферических волн, расходящихся из точки, по существу уже вошла в круг нашего внимания и до некоторой степени была рассмотрена, но ввиду ее важности требует более детальной трактовки. Если центр симметрии взят в качестве полюса, то потенциал скоростей есть функция одного только r, и (§ 241) ∇^2 сводится к $\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$ или к $\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r^2$. Уравнение свободного движения (3) § 273 приобретает, таким образом, вид:

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}, \tag{1}$$

откуда, как в § 245,

$$r\varphi = f(at - r) + F(at + r). \tag{2}$$

Значения скорости и сжатия найдутся путем диференцирования в согласии с формулами

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \qquad s = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{3}$$

Как и в случае одного измерения, первый член представляет волну, распространяющуюся в направлении возрастающих r, т. е. расходящуюся волну, второй же член — волну, сходящуюся к полюсу. Последняя сама по себе не представляет большого интереса. Если мы ограничим наше внимание расходящейся волной, то мы имеем:

$$u = -\frac{f(at-r)}{r^2} - \frac{f'(at-r)}{r}; \quad as = -\frac{f'(at-r)}{r}. \tag{4}$$

Когда r очень велико, членом, содержащим в делителе r^2, можно пренебречь, и тогда приближенно

$$u = as \tag{5}$$

— то же самое соотношение, что и в случае плоской волны, как этого и следовало ожидать.

Если тип колебаний — гармонический, то

$$r\varphi = Ae^{ik(at-r+\theta)}, \tag{6}$$

или, если удерживается только действительная часть,

$$r\varphi = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(at+\theta-r). \tag{7}$$

Если расходящееся возмущение ограничено сферическим слоем, вне которого сжатие и скорость равны нулю, то характер волны определяется замечательным соотношением, впервые указанным Стоксом [1]). Из уравнений (4) мы имеем:

$$(as-u)r^2 = f(a^t-r)$$

— выражение, показывающее, что значение $f(at-r)$ вне слоя (внутри и снаружи), которым ограничена волна, одно и то же, а именно, равно нулю. Отсюда, в силу (4), если α и β радиусы, больший и меньший, чем крайние радиусы слоя,

$$\int_\alpha^\beta sr\,dr = 0, \tag{8}$$

что и выражает упомянутое соотношение. Как в § 274, мы видим, что волна сжатия или волна разрежения не может существовать отдельно. Когда радиус становится большим в сравнении с толщиной, изменением r в интеграле можно пренебречь, и уравнение (8) выражает тогда, что *среднее* сжатие равно нулю.

---

[1]) Stokes, *Phil. Mag.*, XXXIV, стр. 52, 1849.

(Пользуясь методом Фуко, позволяющим делать видимыми малейшие оптические неоднородности, Теплеру [1]) удалось наблюдать сферические звуковые волны, возникающие в малых электрических искрах, и их отражение от плоской стены. Впоследствии фотографии подобных явлений были получены Махом [2]).)

Применяя общее решение (2), чтобы получить движение, возникающее при произвольных начальных условиях, мы должны помнить, что в его настоящей форме оно слишком обще для этой цели, так как охватывает случай, когда полюс является источником или местом, где жидкость вводится или выводится, в нарушение уравнения непрерывности. Полный поток через поверхность сферы радиуса r есть $4\pi r^2 u$, или, в силу (2) и (3),

$$-4\pi\{f(at-r)+F(at+r)\}+4\pi r\cdot\{F'(at+r)-f'(at-r)\},$$

так что, если в полюсе нет источника, то $f(at-r)+F(at+r)$ или $r\varphi$ должно обращаться в нуль вместе с r. Таким образом,

$$f(at)+F(at)=0 \tag{9}$$

— уравнение, которое должно быть справедливо для всех положительных значений аргумента [3]).

В силу известных начальных условий значения u и s определены для времени $t=0$ и для всех (положительных) значений r. Если эти начальные значения представлены u_0 и s_0, то мы получаем из (2) и (3) уравнения

$$\left.\begin{aligned} f(-r)+F(r)&=r\int u_0\,dr,\\ f(-r)-F(r)&=a\int s_0 r\,dr,\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

которыми функция f определяется для всех отрицательных значений аргумента, а функция F — для всех положительных значений. Вид f для положительных значений аргумента вытекает из (9), а тогда все последующее движение определяется уравнением (2). Вид F для отрицательных значений аргумента знать не обязательно.

Начальное возмущение разделяется само на две части, перемещающиеся в противоположных направлениях, в каждом из которых $r\varphi$ распространяется с постоянной скоростью a, причем волна, идущая внутрь, непрерывно отражается в полюсе. Так как условие, которому нужно здесь удовлетворить, есть $r\varphi=0$, то этот случай, до известной степени, аналогичен случаю параллельной трубы, оканчивающейся *открытым* концом, и таким путем мы, может быть,

---

[1]) Töpler, *Pogg. Ann.*, том CXXXI, стр. 33, 180, 1867.

[2]) Mach, *Sitzber. der Wiener Akad.*, 1889.

[3]) Решение для сферических колебаний можно получить, не пользуясь (1), суперпозицией пучков плоских волн, также отнесенных к полюсу и распространяющихся наружу симметрично во всех направлениях.

в состоянии будем лучше понять, почему за волной сжатия, возникающей в результате освобождения массы сжатого воздуха вокруг полюса, немедленно следует волна разрежения.

[Сложный характер волны, возникающей в результате начального сжатия, можно призвать для объяснения одного часто вызывавшего удивление явления. Часто наблюдают, что стекла, разбитые сильным взрывом по соседству, выпадают *наружу*, как будто бы они подверглись действию волны разрежения. Этот эффект можно приписать второй части сложной волны, но при этом естественно спросить, почему же вторая часть должна преобладать над первой? Если бы стекло было подвешено свободно, то количества движения, приобретенные им от волны сжатия и волны разрежения, были бы равны. Но в действительных условиях легко может случиться, что сила волны сжатия затрачивается на преодоление сопротивления опор (supports), и тогда волна разрежения остается свободной, чтобы полностью произвести свой эффект.]

280. Возвращаясь теперь к случаю цуга гармонических волн, распространяющихся наружу из полюса, как из источника, исследуем связь между потенциалом скорости и количеством жидкости, которое надо предполагать попеременно вводимым и удаляемым в полюсе. Если потенциал скорости есть

$$\varphi = -\frac{A}{4\pi r}\cos k\,(at - r), \tag{1}$$

то мы имеем, как в предыдущем разделе, для полного потока пересекающего сферу радиуса r,

$$4\pi r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = A\,\{\cos k\,(at - r) - kr \sin k\,(at - r)\} = A \cos kat,$$

где r достаточно мало. Если обозначить максимальную скорость введения жидкости через A, то соответствующий потенциал дается выражением (1).

Следует заметить, что, если источник, измеряющийся величиной A, конечен, то потенциал и изменение давления (пропорциональное φ) в полюсе бесконечны. Это, однако, не влечет за собой, как можно было бы сначала предположить, бесконечного испускания энергии. Если давление разделено на две части, одна из которых совпадает по фазе со скоростью, а другая — с ускорением, то первая часть, от которой зависит работа, конечна. Бесконечная часть давления в целом не совершает работы, но лишь поддерживает колебание воздуха непосредственно вокруг источника, эффективная инерция которого бесконечно велика.

Исследуем теперь энергию, испускаемую простым источником заданной интенсивности, предполагая для большей общности, что источник расположен в вершине твердого конуса с телесным углом ω. Если скорость, с которой вводится жидкость в источник, есть

$A\cos kat$, то мы имеем окончательно

$$\omega r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = A\cos kat,$$

соответственно

$$\varphi = -\frac{A}{\omega r}\cos k(at - r), \tag{2}$$

откуда

$$\dot{\varphi} = \frac{kaA}{\omega r}\sin k(at - r) \tag{3}$$

и

$$\omega r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = A\{\cos k(at - r) - kr\sin k(at - r)\}. \tag{4}$$

Таким образом, как в § 245, если dW — работа, перенесенная за время dt, мы получаем, поскольку $\delta p = -\rho\dot{\varphi}$,

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\rho kaA^2}{\omega r}\sin k(at - r)\cos k(at - r) + \rho\frac{k^2aA^2}{\omega}\sin^2 k(at - r).$$

Первый член правой части целиком периодический, а во втором среднее значение $\sin^2 k(at - r)$ равно $\frac{1}{2}$. Таким образом, за длительное время

$$W = \frac{\rho k^2 aA^2}{2\omega}t\ ^{1}). \tag{5}$$

Следует отметить, что при заданном источнике амплитуда изменяется обратно пропорционально ω, и поэтому интенсивность обратно пропорциональна ω^2. Для острого конуса интенсивность больше не только за счет уменьшения телесного угла, внутри которого распределяется звук, но также и потому, что сама полная энергия, испускаемая источником, возрастает.

Когда источник находится в открытом пространстве, мы должны только положить $\omega = 4\pi$, когда же он расположен вплотную к твердой плоскости, $\omega = 2\pi$.

Результаты этого раздела находят интересное применение в теории рупора или (в силу закона обратимости §§ 109, 294) слуховой трубки. Если диаметр широкого открытого конца мал сравнительно с длиной волны, то волны по приходе испытывают сильное отражение, и окончательный результат, который должен зависеть, в основном, от точных относительных длин трубы и волны, требуется определить иным путем. Это отражение можно уменьшить достаточным удлинением конуса; оно имеет тенденцию исчезнуть, когда диаметр открытого конца заключает в себе большое число длин волн. Если отвлечься от трения, то, уменьшая ω, от данного источника можно получить любое желаемое количество энергии, и в то же самое

---

[1]) Cambridge Mathematical Tripos Examination, 1876.

время удлинением конуса устранить беспрепятственный переход этой энергии от трубы к окружающему воздуху.

Из теории диффракции следует, что звук не будет сколько-нибудь сильно ослабляться в боковом направлении, если диаметр широкого конца не превосходит половины длины волны. Общеизвестное объяснение эффекта обычного рупора, связанное с предполагаемой концентрацией *лучей* в аксиальном направлении, таким образом, несостоятельно.

281. С помощью уравнения Эйлера

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2}. \tag{1}$$

мы легко можем развить теорию для конических труб с открытыми концами, аналогичную теории Бернулли для параллельных труб, и подчиненную тем же ограничениям относительно малости диаметра труб сравнительно с длиной волны звука[1]). Полагая колебание стоячим, так чтобы $r\varphi$ было всюду пропорционально $\cos kat$, мы получаем из (1) уравнение

$$\frac{d^2 (r\varphi)}{dr^2} + k^2 \cdot r\varphi = 0, \tag{2}$$

общим решением которого является

$$r\varphi = A \cos kr + B \sin kr. \tag{3}$$

Условие, которое должно быть удовлетворено на открытом конце, заключается в том, что здесь не должно быть ни сжатия, ни разрежения, и дает $r\varphi = 0$, так что, если крайние радиусы трубы суть r_1 и r_2, мы имеем:

$$A \cos kr_1 + B \sin kr_1 = 0 \text{ и } A \cos kr_2 + B \sin kr_2 = 0,$$

откуда, после исключения A/B, имеем $\sin k(r_2 - r_1) = 0$, или $r_2 - r_1 = \frac{1}{2} m\lambda$, где m — целое число. Действительно, поскольку форма общего решения (3) и условия для открытого конца те же самые, что и для параллельной трубы, то и результат, согласно которому длина трубы кратна половине длины волны, необходимо должен быть также одинаков с предыдущим.

Конус, полный до самой вершины, можно трактовать так, как если бы последняя была открытым концом, потому что условие $r\varphi = 0$, как мы видели в § 279, там удовлетворено.

Сходство с параллельными трубами не распространяется, однако, на положение узлов. В случае самого низкого колебания параллельной трубы, открытой на обоих концах, узел занимает центральное положение, и обе половины колеблются синхронно, как трубы, открытые с одного конца и закрытые с другого. Но если бы коническая

---

[1]) D. Bernoulli, *Mém. d. l'Acad. d. Sci.*, 1762; Duhamel, *Liouville Journ. Math.*, том XIV, стр. 98, 1849.

труба была разделена перегородкой в ее центре, то обе ее части имели бы, очевидно, различные периоды; действительно, одна часть отличается от трубы с параллельными стенками тем, что она сжата у своего открытого конца, причем эффектом сжатия является понижение высоты, между тем как другая часть сжата у своего закрытого конца, где эффектом этого является возрастание высоты. Чтобы оба периода могли быть одинаковыми, перегородку нужно приблизить к более узкому концу трубы. Действительное положение перегородки можно определить аналитически из (3), приравнивая нулю выражение $\partial\varphi/\partial r$.

Когда оба конца конической трубы закрыты, то соответствующие ноты определяются путем исключения A/B из уравнений

$$A(\cos kr_1 + kr_1 \sin kr_1) + B(\sin kr_1 - kr_1 \cos kr_1) = 0,$$
$$A(\cos kr_2 + kr_2 \sin kr_2) + B(\sin kr_2 - kr_2 \cos kr_2) = 0.$$

Результат можно представить в форме

$$kr_2 - \operatorname{arc\,tg}\, kr_2 = kr_1 - \operatorname{arc\,tg}\, kr_1. \tag{4}$$

Если $r_1 = 0$, мы имеем просто

$$\operatorname{tg} kr_2 = kr_2; \tag{5}$$ [1]

если r_1 и r_2 очень велики, то и $\operatorname{arc\,tg} kr_1$ и $\operatorname{arc\,tg} kr_2$ являются нечетными кратными $\frac{1}{2}\pi$, так что $r_2 - r_1$ есть кратное $\frac{1}{2}\lambda$, как того требует теория труб с параллельными стенками.

[Если $r_2 - r_1 = l$ и $r_2 + r_1 = r$, то (4) можно написать так:

$$\operatorname{tg} kl = \frac{kl}{1 + \frac{1}{4}k^2(r^2 - l^2)}. \tag{6}$$

Когда r велико в сравнении с l, приближенное решение (6) дает

$$\lambda = \frac{2l}{m}\left(1 - \frac{4l^2}{m^2\pi^2 r^2}\right), \tag{7}$$

где m — целое число. Влияние коничности на высоту звука, таким образом, второго порядка.

Эксперименты с коническими трубами производились Буте [2] и Блэйкли [3].]

282. Если имеются два различных источника звука одинаковой высоты, расположенных в O_1 и O_2, то потенциал скорости φ в точке P, расстояния которой от O_1 и O_2 равны, соответственно, r_1

---

[1] Относительно корней этого уравнения см. § 207.
[2] Boutet, *Ann. d. Chim.*, том XXI, стр. 150, 1870.
[3] Blaikley, *Phil. Mag.*, том VI, стр. 119, 1878.

и r_2, можно выразить следующим образом:

$$\varphi = A\frac{\cos k(at - r_1)}{r_1} + B\frac{\cos k(at - r_2 - \alpha)}{r_2}, \qquad (1)$$

где A и B — коэфициенты, представляющие силы источников (им можно, не теряя в общности, приписать одинаковые знаки), а α представляет запаздывание (рассматриваемое в виде расстояния) второго источника относительно первого. Два цуга сферических волн находятся в согласии (в фазе) в некоторой точке P, если $r_2 + \alpha - r_1 = \pm m\lambda$, где m — целое число, т. е. если P лежит на одном из системы гиперболоидов вращения, имеющих фокусы в O_1 и O_2. В точках, лежащих на промежуточных гиперболоидах, представляемых уравнением $r_2 + \alpha - r_1 = \pm\frac{1}{2}(2m+1)\lambda$, обе серии волн противоположны по фазе и нейтрализуют друг друга, насколько это позволяют их действительные амплитуды. Нейтрализация полная, если $r_1/r_2 = A/B$, и тогда плотность в P продолжает все время оставаться постоянной. Пересечения этой сферы с системой гиперболоидов будут, таким образом, выражаться в большинстве случаев несколькими кругами абсолютного молчания. Если расстояние O_1O_2 между источниками велико сравнительно с длиной волны и если сами источники не слишком близки по силе, то от сферы $r_1/r_2 = A/B$ возможно отойти на расстояние нескольких длин волн, не нарушая заметно равенства интенсивностей, и, таким образом, получить на конечных поверхностях несколько смен звука и почти полного молчания.

В действительности удовлетворительное осуществление интерференции двух независимых звуков представляет некоторые трудности. Если унисон не исключительно идеальный, то молчания только мгновенные, и вследствие этого их трудно оценивать. Лучше поэтому пользоваться источниками, механически связанными друг с другом так, чтобы относительные фазы испускаемых ими звуков не могли меняться. Простейшая схема — это повторять первый звук путем отражения его от плоской стены (§§ 269, 278), но тогда эксперимент несколько теряет в своей непосредственности вследствие фиктивного характера второго источника. Может быть наиболее удовлетворительной формой эксперимента является та, которая описана мною в *Philosophical Magazine* за июнь 1877 года. „Прерывистый электрический ток, получавшийся от камертонного прерывателя, дающего 128 колебаний в секунду, возбуждал с помощью электромагнитов два других камертона, частота которых была равна 256 (§§ 63, 64). Эти два камертона были помещены на расстоянии примерно десяти ярдов друг от друга и снабжены соответствующим образом настроенными резонаторами, усиливавшими их звуки. Частота камертонов была необходимо одинаковой, так как колебания возбуждались электромагнитными силами абсолютно одинакового периода. Было найдено, что с одним закрытым ухом возможно определить места молчания

со значительной точностью: перемещения на один дюйм уже было достаточно, чтобы произвести заметное усиление звука. В точке молчания, из которой линия, соединяющая камертоны, была видна под углом около 60°, остановка одного из камертонов воспринималась, как внезапный взрыв звучания второго камертона, и производила весьма своеобразный эффект".

Другой метод заключается в раздвоении звука, идущего вдоль трубы, с помощью ответвлений, открытые концы которых действуют как источники. Но осуществление опыта в этой форме — дело не очень легкое.

Чтобы указать на существование мест молчания, часто достаточно соображений симметрии. Так, например, очевидно, что ни на продолжении плоскости колеблющейся пластинки, ни в экваториальной плоскости симметричного тела вращения, колеблющегося в направлении своей оси, не может быть никакого изменения плотности. Более обще, любая плоскость, по отношению к которой источники располагаются симметрично, так что в любой паре изображающих друг друга в плоскости точек расположены источники равных интенсивностей и противоположных фаз или, как часто удобнее выражаться, источники с одинаковой фазой и противоположными амплитудами, есть плоскость молчания.

Если некоторое число источников с одинаковой фазой, половина которых имеет положительную, а половина — отрицательную амплитуду, размещено на окружности круга, то они не вызовут возмущений давления в точках прямой линии, которая проходит через центр круга и перпендикулярна к его плоскости. Это — случай симметричного колокола (§ 232), который не испускает звука в направлении своей оси [1]).

Тщательное экспериментальное исследование воздушных колебаний связано со значительными трудностями, которые до настоящего времени преодолены лишь частично. Чтобы избежать нежелательных отражений, необходимо, вообще, работать на открытом воздухе, где трудно управлять такими деликатными приборами, как чувствительное пламя. Другое затруднение возникает вследствие присутствия самого экспериментатора, тело которого достаточно велико, чтобы сильно изменить положение вещей, которое он желает исследовать. Среди индикаторов звука можно упомянуть мембраны, натянутые на чашки, где возбуждение делается видимым благодаря песку или маленьким маятникам, свободно подвешенным вблизи мембран. Если мембрана просто натянута на обод, то на обе ее стороны действуют приблизительно одинаковые силы, и движение вследствие этого сильно уменьшается, если только мембрана не настолько велика, чтобы дать заметную тень, которая может защитить ее заднюю сторону. Вероятно, наилучший метод изучения интенсивности звука в какой-либо

[1]) *Phil. Mag.* (5), том III, стр. 460, 1877.

точке воздуха заключается в том, чтобы отвести часть его с помощью трубки, оканчивающейся в маленьком конусе или резонаторе; отведенный звук направляется к уху или к манометрической коробке. Этим путем места молчания нетрудно определить со значительной точностью.

С помощью аппарата этого рода возможно исследовать даже *фазу* колебания в какой-либо точке в воздухе и проследить поверхности, на которых фаза не меняется [1]). Если внутренность резонатора соединена гибкой трубкой с манометрической коробкой, которая действует на небольшое газовое пламя, то движение пламени неизменным образом (зависящим от самого аппарата) связано с изменением давления в резонаторе; в частности, интервал между самым низким положением пламени и самым низким давлением в резонаторе не зависит от абсолютного времени, когда этот эффект имеет место. В экспериментах Мейера применялись два пламени, расположенные вблизи друг друга на одной вертикальной линии; они исследовались с помощью вращающегося зеркала. Пока присоединенные резонаторы оставались невозмущенными, зубцы обоих пламен занимали неизменное относительное положение; это относительное положение сохранялось и тогда, когда один из резонаторов перемещали, чтобы проследить за поверхностью неизменной фазы. За дальнейшими деталями мы должны отослать читателя к оригинальной статье.

283. Когда звуковые волны встречают какое-либо препятствие, часть движения отбрасывается назад в качестве эхо, и под защитой препятствия здесь образуется род звуковой тени. Однако, чтобы образовать тень, сколько-нибудь похожую на совершенные оптические тени, тело, служащее препятствием, должно иметь значительные размеры. Образцом для сравнения, соответствующим предмету, является длина волны колебания; чтобы получить звуковые *лучи*, требуются почти столь же крайние условия, как в оптике для того, чтобы избегнуть образования их. Тем не менее звуковые тени, отбрасываемые холмами или зданиями, бывают часто довольно полными и должны быть знакомы всякому.

Для более близкого изучения возьмем сначала случай плоских волн, встречающих неподвижный плоский экран бесконечно малой толщины, в котором имеется отверстие какой-либо формы; плоскость экрана ($x = 0$) пусть параллельна фронтам волн. Потенциал скорости невозмущенного цуга волн можно взять в форме

$$\varphi = \cos(nt - kx). \qquad (1)$$

Если значение $d\varphi/dx$ по всей площади отверстия известно, то формулы (6) и (7) § 278 позволяют нам вычислить значение φ в любой точке на другой стороне. В обычной теории дифракции, как она излагается в трудах по оптике, предполагается, что возмущение

[1]) Mayer, *Phil. Mag.* (4), том XLIV, стр. 321, 1872.

в плоскости отверстия таково, как при отсутствии экрана. Эта гипотеза, хотя она никогда не может быть строго правильной, достаточна, если отверстие очень велико сравнительно с длиной волны, как это обычно имеет место в оптике.

Для невозмущенной волны мы имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}_{(x=0)} = k \sin nt, \tag{2}$$

а поэтому на другой стороне получаем

$$\varphi = -\frac{k}{2\pi} \int\int \frac{\sin (nt - kr)}{r} \, dS, \tag{3}$$

причем интегрирование распространяется по всей площади отверстия. Так как $k = 2\pi/\lambda$, то, сравнивая с (1), мы видим, что, если предположить, имея в виду применение принципа Гюйгенса, первичную волну разбитой на элементарные волны, то dS следует разделить на λr, а фаза должна быть увеличена на четверть периода.

Если r велико сравнительно с размерами отверстия, состав интеграла лучше всего изучать с помощью зон Френеля [1]). Взяв в качестве центра точку O, для которой нужно измерить φ, описываем ряд сфер радиусами, возрастающими от одного к другому на постоянную разность $\frac{1}{2}\lambda$, причем радиус первой сферы таков (c), чтобы она касалась плоскости экрана. На этой плоскости образуется, следовательно, система окружностей, радиусы ρ которых даются выражением $\rho^2 + c^2 = (c + \frac{1}{2} n\lambda)^2$ или, очень близко к этому, $\rho^2 = nc\lambda$, так что кольца, на которые разделяется плоскость, имея приблизительно одинаковую площадь, дают доли φ, приблизительно одинаковые по своей численной величине и попеременно противоположные по знаку. Если O лежит определенно в пределах проекции площади, то первый член ряда, представляющего интеграл, конечен; следующие члены попеременно противоположны по знаку и сначала почти постоянны по величине, но впоследствии постепенно стремятся к нулю, так как части колец, уменьшающихся в пределах отверстия, становятся всё меньше и меньше. Случай отверстия, граница которого отстоит всюду на одно и то же расстояние от O, исключается.

В ряде подобного вида всякий член после первого почти точно нейтрализуется (поскольку это касается разностей первого порядка) полусуммой предшествующего ему и следующего за ним, так что сумма всего ряда приближенно представляется половиной первого члена,

---

[1]) [Эти зоны авторами сочинений по оптике обычно называются зонами Гюйгенса (например Billet, *Traité d'Optique physique*, том I, стр. 102, Париж, 1858); однако, как было указано Шустером (*Phil. Mag.*, том XXXI, стр. 85, 1891), их правильнее назвать именем Френеля.]

которая остается некомпенсированной. Мы видим, что, при достаточном числе зон, укладывающихся в пределах отверстия, значение φ в точке O не зависит от природы отверстия и поэтому таково, как если бы экрана не было вовсе. Мы можем еще вычислить прямым путем эффект круга, которым начинается система зон — прием, который будет иметь то преимущество, что он сделает более ясным значение изменения фазы, которое, как мы нашли, необходимо ввести, когда первичная волна является расходящейся. Представим себе, что этот круг разделен на бесконечно узкие кольца равной площади. Доли φ, обязанные каждому из этих колец, равны по амплитуде и имеют фазы, изменяющиеся равномерно на протяжении половины полного периода. Фаза результирующей находится поэтому посредине между фазами крайних элементов, т. е. отстает на четверть периода от фазы элемента в центре круга. Амплитуда результирующей будет меньше, чем в том случае, если бы все ее компоненты имели одну и ту же фазу, в отношении $\int_0^{\pi} \sin x dx : \pi$ или $2 : \pi$, а потому (площадь круга есть $\pi\lambda c$) половина эффекта первой зоны выражается формулой

$$\varphi = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin\left(nt - kc - \frac{1}{2}\pi\right)}{kc} \cdot \pi\lambda c = \cos(nt - kc),$$

т. е. таким же образом, как если бы первичная волна прошла невозмущенной.

Если точка O находится достаточно далеко от проекции отверстия, результат будет совершенно иным. Ряд, представляющий интеграл, сходится тогда на обоих концах, и в силу того же рассуждения, что и прежде, его сумма приближенно равна нулю. Мы заключаем, что, если проекция O на плоскость $x = 0$ попадает в пределы отверстия и находится ближе к O, чем ближайшая точка границы отверстия, на большое число длин волн, возмущение в O почти такое же, как и при полном отсутствии препятствия; но если проекция O оказывается за пределами отверстия и находится ближе к O, чем ближайшая точка границы, на большое число длин волн, то возмущение в O практически исчезающе мало. Это — теория звуковых лучей в ее простейшей форме.

Рассуждение мало изменится, если экран расположен наклонно к плоскости волн. Как и прежде, движение на другой стороне экрана можно рассматривать как результат нормального движения частиц в плоскости отверстия, но это нормальное движение теперь изменяется по фазе от точки к точке. Если первичные волны исходят от источника в Q, то зоны Френеля для точки P образуют серию эллипсов, представляемых уравнением $r_1 + r_2 = PQ + \frac{1}{2} n\lambda$, где r_1 и r_2 — расстояния от какой-либо точки на экране до Q и P, соответственно,

а n — целое число. За счет предположенной малости λ сравнительно с r_1 и r_2, зоны вначале имеют одинаковую площадь и приносят равные и противоположные по знаку доли в значение φ; таким образом, с помощью того же самого рассуждения, что и прежде, мы можем заключить, что в какой-либо точке, расположенной определенно вне геометрической проекции отверстия, возмущение исчезает, между тем как в точке, расположенной определенно в пределах геометрической проекции, возмущение таково, как если бы первичная волна прошла через экран совершенно беспрепятственно. Можно заметить, что увеличение площади зон Френеля за счет наклонного положения экрана компенсируется в вычислении интеграла соответствующим образом уменьшенным значением нормальной скорости жидкости. Ослабление первичной волны между экраном и точкой P, обязанное расхождению, представляется уменьшением площади зон Френеля ниже площади тех, которые соответствуют плоско падающим волнам, в отношении $(r_1 + r_2)/r_1$.

Между прохождением звука через отверстие в экране и его отражением от плоского рефлектора той же формы, что и отверстие, имеется простое соотношение, которым иногда можно воспользоваться при эксперименте. Представим себе, что в Q', *изображении* Q в плоскости экрана, помещен источник, одинаковый с Q и в той же фазе, и предположим, что экран удален и заменен пластинкой, форма и положение которой в точности таковы же, как у отверстия; мы знаем, что на эффект в P от двух источников не влияет присутствие пластинки, так что колебание от Q', отраженное пластинкой, и колебание от Q, обошедшее кругом пластинки, дают в соединении такое же самое колебание, какое было бы получено от Q, если бы препятствия не было совсем. Но согласно допущению, которое мы сделали в начале этого раздела, колебание, беспрепятственно идущее от Q, можно рассматривать, как состоящее из колебания, находящего себе путь вокруг пластинки, и колебания, которое прошло бы через отверстие той же самой формы в бесконечном экране; таким образом, колебание от Q, прошедшее через отверстие, одинаково с колебанием от Q', отраженным от пластинки.

Чтобы получить почти полное отражение, достаточно, чтобы отражающая пластинка заключала лишь небольшое число зон Френеля. В случае прямого отражения радиус ρ первой зоны определяется уравнением.

$$\rho^2 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) = \lambda, \tag{4}$$

где c_1 и c_2, соответственно, — расстояния от источника до рефлектора и точки наблюдения. Когда эти расстояния велики, зоны получаются настолько большими, что обычные стены недостаточны для полного отражения, но при средних расстояниях эхо часто бывают почти идеальными. Площадь, необходимая для полного отражения, зависит также от длины волны; таким образом, может случиться, что доска

или пластинка, совершенно неподходящие для того, чтобы отразить низкую музыкальную ноту, могут очень хорошо отражать шипение или звук высокого свистка. В экспериментах над отражением с экранами среднего размера главная трудность заключается в достаточно полном освобождении от прямого звука. Простейший прием состоит в том, чтобы отражать звук электрического звонка или какого-нибудь другого достаточно постоянного источника, расположенного за углом большого здания [1]).

284. В предыдущем разделе мы применили принцип Гюйгенса к случаю, в котором первичная волна разбивается на элементарные поверхности воображаемой плоскости. Если мы действительно знаем, каково нормальное движение в плоскости, то мы можем вычислить с помощью строгих приемов возмущение в любой точке на другой стороне. Для поверхностей, отличных от плоскости, задача не может быть решена в общем виде; тем не менее, нетрудно видеть, что если радиусы кривизны поверхности очень велики сравнительно с длиной волны, эффект нормального движения некоторого элемента поверхности должен быть почти таким же, как если бы поверхность была плоской. При этом условии мы можем воспользоваться для вычисления общего результата тем же самым интегралом, что и прежде. Из соображений удобства обычно всего лучше предположить, что волна разбивается на элементарные волны на том, что называется в оптике волновой поверхностью, т. е. на поверхности, в каждой точке которой *фаза* возмущения одна и та же.

Рассмотрим применение принципа Гюйгенса к вычислению распространения заданной расходящейся волны. Опишем из точки P, в которой требуется найти возмущение, как из центра, ряд сфер радиусами, возрастающими от предыдущего к последующему каждый раз на постоянную величину $\frac{1}{2}\lambda$; радиус первой из сфер (c) таков, что она касается заданной волновой поверхности в C. Если R — радиус кривизны поверхности в плоскости, проходящей через P и C, то соответствующий радиус внешней границы n-ой зоны ρ дается уравнением

$$R+c=\sqrt{R^2-\rho^2}+\sqrt{(c+\tfrac{1}{2}n\lambda)^2-\rho^2},$$

из которого мы получаем приближенно

$$\rho^2=\frac{n\lambda}{\frac{1}{R}+\frac{1}{c}}. \qquad (1)$$

Если данная поверхность является поверхностью вращения с осью PC, то площадь первых n зон есть $\pi\rho^2$, а так как ρ^2 пропорционально n, то отсюда следует, что зоны имеют одинаковые площади. Если поверх-

[1]) *Phil. Mag.* (5), том III, стр. 458, 1877.

ность не является поверхностью вращения, то площадь первых n зон представляется выражением $\frac{1}{2}\int \rho^2 d\theta$, где θ — азимут плоскости, в которой измеряется ρ, но положение, что зоны имеют равные площади, все еще остается верным. Поскольку, согласно гипотезе, нормальное движение не очень быстро меняется вдоль волновой поверхности, то возмущения в P, обязанные различным зонам, почти равны по величине и попеременно противоположны по знаку; мы заключаем поэтому, что общий эффект, как и в случае плоских волн, составляет половину эффекта первой зоны. Фаза в P отстает от той, которая господствует на заданной волновой поверхности, на величину, соответствующую расстоянию c.

Интенсивность возмущения в P зависит от площади первой зоны Френеля и от расстояния c. В случае симметрии мы имеем

$$\frac{\pi\rho^2}{c} = \frac{\pi\lambda R}{R+c}$$

— соотношение, показывающее, что возмущение меньше, чем если бы R было бесконечно велико, в отношении $(R+c):R$. Это уменьшение — эффект расхождения; оно одинаково с тем, которое было бы получено при предположении, что движение ограничено конической трубой, вершина которой находится в центре кривизны (§ 266). Когда поверхность не является поверхностью вращения, значение $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta/c$ можно выразить через главные радиусы кривизны R_1 и R_2, с которыми R связано соотношением

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{R_1} + \frac{\sin^2\theta}{R_2}.$$

Мы получаем, выполняя интегрирование,

$$\frac{1}{2c}\int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta = \frac{\pi\lambda\sqrt{R_1R_2}}{\sqrt{(R_1+c)(R_2+c)}}, \qquad (2)$$

так, что амплитуда уменьшается за счет расхождения в отношении $\sqrt{(R_1+c)(R_2+c)} : \sqrt{R_1R_2}$ — результат, который можно было предвидеть, предполагая, что движение ограничено трубой, образованной нормалями, проведенными через малый контур, намеченный на волновой поверхности.

Хотя до сих пор мы говорили только о расходящихся волнах, предыдущие выражения можно применить также и к волнам, сходящимся в одной или в обеих главных плоскостях, если приписать соответствующие знаки R_1 и R_2. В этом случае площадь первой зоны Френеля больше, чем в случае плоской волны, и интенсивность коле-

бания соответственно увеличена. Если точка P совпадает с одним из главных центров кривизны, то выражение (2) становится бесконечно большим. Исследование, на котором было основано (2), тогда недостаточно; мы вправе утверждать лишь, что возмущение значительно больше в P, чем в других точках той же самой нормали, что диспропорция возрастает с частотой и что она сделалась бы бесконечно большой для нот бесконечно большой высоты, длиной волны которых можно пренебречь сравнительно с встречающимися здесь расстояниями.

285. Принцип Гюйгенса можно также применить для исследования отражения звука от кривых поверхностей. Если бы поверхность рефлектора изгибалась под действием давлений воздуха настолько сильно, что нормальная составляющая движения в каждой точке была бы той же самой, что и в отсутствии рефлектора, то звуковые волны проходили бы невозмущенными. Отражение, которое действительно происходит, когда поверхность неподатлива, можно поэтому рассматривать как результат нормального движения каждого элемента рефлектора, равного и противоположного движению первичных волн в этой точке, и исследовать с помощью формулы для плоских поверхностей способом предыдущего раздела, с аналогичным ограничением относительно длины волны и относящихся сюда расстояний.

Наиболее интересный случай отражения имеет место, когда форма поверхности такова, что дает концентрацию лучей в определенной точке (P). Если звук первоначально исходит из простого источника в Q и если поверхность является эллипсоидом вращения с фокусами в P и Q, то концентрация полная, и колебание, отраженное от какого-нибудь элемента поверхности, по приходе в Q находится в той же самой фазе. Если Q находится на бесконечно большом расстоянии, так что падающие волны плоские, то поверхность оказывается параболоидом, имеющим фокус в P и ось, параллельную падающим лучам. Не нужно, однако, думать, что симметричная волна, расходящаяся из Q, превращается в результате отражения от поверхности эллипсоида в сферическую волну, симметрично сходящуюся к P; действительно, легко видеть, что интенсивность сходящейся волны должна быть различной в различных направлениях. Тем не менее, когда длина волны очень мала в сравнении с радиусом, различные части сходящейся волны становятся приблизительно независимыми друг от друга, и на их распространение не влияет существенным образом отсутствие идеальной симметрии.

Увеличение громкости за счет кривизны зависит от величины площади отражающей поверхности, от которой приходят возмущения одинаковой фазы, сравнительно с площадью первой зоны Френеля для плоского рефлектора в том же самом положении. Если расстояния от рефлектора до источника и до точки наблюдения значительны и если длина волны не очень мала, то уже первая зона Френеля достаточно широка; поэтому если рефлектор средних размеров, то, придавая ему вогнутость, можно достигнуть лишь очень немногого. С другой сто-

роны, в лабораторных экспериментах, когда расстояния не очень велики и применяются звуки большой высоты, например тиканье часов или треск электрических искр, вогнутые рефлекторы очень эффективны и дают отчетливую концентрацию звука в определенных местах.

286. Мы видели, что если луч, идущий от Q, проходит после отражения от плоскости или кривой поверхности через P, то точка R, в которой он встречает поверхность, определяется из условия, что $QR+RP$ есть минимум (или в некоторых случаях максимум). Точка R является тогда центром системы зон Френеля; амплитуда колебания в P зависит от площади первой зоны, а его фаза от расстояния $QR+RP$. Если на поверхности рефлектора нет точки, для которой $QR+RP$ было бы максимум или минимумом, то система зон Френеля не имеет центра, и нет ни одного луча, идущего от Q, который после отражения от поверхности пришел бы в P. Равным образом, если звук отражается более одного раза, то путь луча определяется условием, что его полная длина между любыми двумя точками есть максимум или минимум.

Этот же принцип можно применить к исследованию *преломления* звука в среде, механические свойства которой меняются постепенно от точки к точке. Изменение предполагается настолько медленным, что заметного отражения не происходит, и это не является несовместимым с определенным преломлением лучей при прохождении расстояний, заключающих очень большое число длин волн. Очевидно, что нам сейчас приходится иметь дело не только с длиной луча, но и со скоростью, с которой волна распространяется вдоль него, поскольку эта скорость более уже не постоянна. Условие, которое должно быть удовлетворено, следующее: *время*, требующееся волне, чтобы пройти вдоль луча между любыми двумя точками, должно быть максимумом или минимумом; таким образом, если V — скорость распространения в некоторой точке, а ds — элемент пути луча, то это условие может быть выражено так: $\delta \int V^{-1} ds = 0$. Это — принцип кратчайшего времени Ферма.

Дальнейшее развитие этой части предмета завело бы нас слишком далеко в область геометрической оптики. Так как основное предположение о малости длины волны, на котором построена доктрина лучей, имеет более широкое применение к явлениям света, чем к явлениям звука, то задачу развития его следствий можно, собственно, предоставить культиваторам этой родственной науки. В следующих разделах методы оптики применены к одному или двум изолированным вопросам, достаточно интересным для акустики, чтобы рассмотрение их в настоящем труде было оправдано.

287. Одно из наиболее поразительных явлений, связанных с распространением звука внутри закрытых строений, — это „шепчущие галлереи", хороший и доступный всем пример которых представляет собой круговая галлерея, расположенная в цоколе купола собора св. Павла.

Что касается точной природы явления, то полного согласия здесь между авторитетами акустики нет. По мнению Королевского астронома [1]) этот эффект следует приписать отражению от поверхности купола вверху; он должен наблюдаться в точке галлереи, диаметрально противоположной источнику звука. Каждый луч, исходящий от излучающей точки и отраженный от поверхности сферического рефлектора, пересечет после отражения тот диаметр сферы, который заключает излучающую точку. Этот диаметр есть по существу вырожденная форма одной из двух каустических поверхностей, которых вообще касаются системы лучей, представляющей собой геометрическое место центров главной кривизны поверхности, к которой лучи являются нормалями. Осуществляющаяся таким путем концентрация лучей на одном из диаметров не требует близости излучающей точки к отражающей поверхности.

Основываясь на некоторых наблюдениях, сделанных мной в шепчущей галлерее св. Павла, я склонен думать, что основное явление следует объяснять несколько иначе. Ненормальная громкость, с какой слышен шопот, наблюдается не только в точке диаметрально противоположной тому, которое занимает шепчущий, и потому, казалось бы, не зависит существенно от симметрии купола. Шопот представляется ползущим горизонтально кругом по галлерее, не обязательно вдоль более короткой дуги, а скорее вдоль той дуги, к которой шепчущий обращен лицом. Это — следствие очень неодинаковой слышимости шопота впереди говорящего и позади его — явление, которое легко можно наблюдать на открытом воздухе [2]).

Рассмотрим ход лучей, расходящихся от излучающей точки P, расположенной вблизи поверхности отражающей сферы, и обозначим центр сферы через O, а диаметр, проходящий через P, через AA', так что A есть точка на поверхности, ближайшая к P. Если мы остановим внимание на луче, который исходит из P под углом $\pm\theta$ с касательной плоскостью в A, то увидим, что после некоторого числа отражений он продолжает касаться концентрической сферы радиуса $OP\cos\theta$, так что весь конический пучок лучей, которые вначале составляли с касательной плоскостью в A углы, численно меньшие θ, впоследствии всегда заключается между отражающей поверхностью и поверхностью концентрической сферы радиуса $OP\cos\theta$. Обычное расхождение в трех измерениях, которое предполагает уменьшающуюся пропорционально r^{-2} интенсивность, заменяется расхождением в двух измерениях, аналогичным расхождению для волн, исходящих от источника, расположенного между двумя параллельными отражающими плоскостями с интенсивностью, изменяющейся пропорционально r^{-1}. Менее быстрое, чем обычно, ослабление звука с расстоянием является основным свойством шепчущих галлерей.

---

[1]) Airy, *On Sound*, 2-е издание, стр. 145, 1871.
[2]) *Phil. Mag.* (5), том III, стр. 458, 1877.

Толщина слоя, заключенного между двумя сферами, становится все меньше и меньше, по мере того как A приближается к P, и в предельном случае излучающей точки, расположенной на поверхности рефлектора, выражается через $OA(1 - \cos\theta)$ или, если θ мало, приближенно через $\frac{1}{2} OA \cdot \theta^2$. Телесный угол пучка, который определяет полное количество излучения в слое, есть $4\pi\theta$, так что когда θ беспредельно уменьшается, интенсивность становится бесконечно большой сравнительно с интенсивностью на конечном расстоянии от подобного же источника в открытом пространстве.

Очевидно, что это, если можно так выразиться, „цепляние" звука за поверхность вогнутой стены не должно зависеть от точности сферической формы. Однако, в случае точной сферы или скорее какой-либо поверхности, симметричной относительно AA', имеется еще концентрация другого рода, о которой говорилось в начале настоящего раздела и которая свойственна точке A', диаметрально противоположной источнику звука. Вероятно, в случае почти сферического купола, подобного куполу св. Павла, часть наблюдаемого эффекта обязана симметрии, хотя большую часть нужно, вероятно, отнести просто за счет общей вогнутости стен.

На распространение сейсмических возмущений, вероятно, влияет кривизна поверхности земного шара, действующая подобно шепчущей галлерее, а, может быть, и звуковые колебания, возбуждаемые на поверхности земли или воды, не избегают целиком влияния этого же рода.

В акустике общественных зданий есть много вопросов, которые еще остаются темными. Важно иметь в виду, что потеря, испытываемая звуком, при одном отражении на гладкой стене, будет ли последняя плоской или кривой, очень мала. Чтобы предупредить реверберацию, часто может оказаться необходимым вводить для поглощения звука ковры или драпировки. Найдено, что иногда для достижения желаемого эффекта достаточно присутствия аудитории. В отсутствии всяких заглушающих материалов продление звука может быть очень значительным; пожалуй, наиболее поразительным примером этого является Баптистерия в Пизе, где пропетые последовательно ноты простой гаммы можно слышать в течение многих секунд [1]). По Генри [2]), важно предупредить повторное отражение звука взад и вперед по *длине* зала, предназначенного для публичных выступлений, что можно сделать с помощью соответственно помещенных наклонных поверхностей. Этим путем число отражений в

---

[1]) [Мои собственные наблюдения, сделанные в 1883 г., дали длительность в 12 секунд. Если нота изменяет высоту, то оба звука слышны вместе и могут привести к возникновению комбинационного тона, § 68. См. Haberditzl, „Ueber die von Dvorák beobachteten Variationston", Wien, *Akad. Sitzber.*, 77, стр. 204, 1878.]

[2]) Henry, *Amer. Assoc. Proc.*, 1856, стр. 119.

данное время увеличивается, и чрезмерная продолжительность звука устраняется.

288. Почти единственный пример акустического преломления, который имеет практический интерес, это — отклонение звуковых лучей от прямолинейного хода, обязанное неоднородности атмосферы. Изменение давления на различных уровнях само по себе не приводило бы к возникновению преломления, так как скорость звука не зависит от плотности, но, как было указано впервые проф. Осборном Рейнольдсом [1]), дело обстоит иначе с изменением температуры, которые обычно встречаются в атмосфере. Температура атмосферы определяется, главным образом, сжатием или разрежением, которое должна испытывать масса воздуха при ее переходе с одного уровня на другой, и нормальное состояние атмосферы есть скорее состояние „подвижного равновесия" [2]), чем однородности. Согласно этой точке зрения, соотношение между давлением и плотностью выражается уравнением (9) § 246, а скорость звука дается выражением

$$V^2 = \frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma - 1}. \tag{1}$$

Чтобы связать плотность и давление с высотой (z), мы располагаем уравнением гидростатики:

$$dp = -g\rho\, dz, \tag{2}$$

из которого и из уравнения (1) мы находим

$$V^2 = V_0^2 - (\gamma - 1)\, gz, \tag{3}$$

где V_0 — скорость на поверхности. Соответствующее соотношение между температурой и высотой, полученное с помощью уравнения (10) § 246, есть

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 1 - \frac{\gamma - 1}{V_0^2} gz, \tag{4}$$

где θ_0 — температура на поверхности.

Согласно (4), падение температуры составляет около 1° C на 330 футов (100 *м*), что не очень значительно отличается от результатов шаропилотных наблюдений Глешера. Когда небо ясное, падение температуры днем более быстрое, чем при облачном небе, но к заходу солнца температура становится приблизительно постоянной [3]). Вероятно, в ясные ночи вверху часто теплее, чем внизу.

Объяснение акустической рефракции, как результата изменения температуры с высотой, почти совпадает с объяснением оптического явления — миража. Кривизну луча (ρ^{-1}), ход которого приблизительно горизонтален, легко оценить методом, данным проф. Джемсом Том-

---

[1]) Reynolds, *Proceedings of the Royal Society*, том XXII, стр. 531, 1874.

[2]) Thomson, „On the convective equilibrium of temperature in the atmosphere", *Manchester Memoirs*, 1861—62,

[3]) *Nature*, Sept. 20, 1877.

соном [1]). Нормальные плоскости, проведенные через две последовательные точки вдоль луча, встречаются в центре кривизны и касаются волновой поверхности в двух ее последовательных положениях. Участки лучей на высотах z и $z+\delta z$ соответственно, заключающиеся между нормальными плоскостями, находятся в отношении $\rho/(\rho-\delta z)$ друг к другу, а также, поскольку они описываются в одно и то же время, в отношении $V/(V+\delta V)$. Отсюда в пределе

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{d\ln V}{dz}. \tag{5}$$

При нормальном состоянии атмосферы луч, который выходит горизонтально, постепенно заворачивает вверх и, на достаточном расстоянии, проходит над головой наблюдателя, находящегося на одном уровне с источником. Если источник приподнят, то звук слышен на поверхности земли благодаря лучу, который выходит с наклоном вниз; но если и наблюдатель, и источник находятся на поверхности, то прямой луч отсутствует, и звук слышен, если это вообще имеет место, благодаря диффракции. Тогда можно сказать, что наблюдатель расположен в звуковой тени, хотя по прямой линии между ним и источником может не быть никакого препятствия. Согласно (3),

$$2V\frac{dV}{dz}=-(\gamma-1)g,$$

так что

$$\rho=\frac{2V^2}{(\gamma-1)g}=\frac{4}{\gamma-1}\cdot\frac{V^2}{2g}, \tag{6}$$

т. е. радиус кривизны горизонтального луча примерно в десять раз больше высоты, с которой тело должно упасть под действием силы тяжести, чтобы приобрести скорость, равную скорости звука. Если высоты источника и наблюдателя суть, соответственно, z_1 и z_2, то наибольшее расстояние, на котором можно слышать звук иначе, чем за счет диффракции, есть

$$\sqrt{2z_1\rho}+\sqrt{2z_2\rho}. \tag{7}$$

Не следует полагать, что состояние атмосферы всегда таково, что соотношение между скоростью и высотой дается выражением (3). При солнце изменение температуры по вертикали более быстрое; напротив, как заметил проф. Рейнольдс, когда идет дождь, следует ожидать значительно более медленного изменения температуры по вертикали. В арктических областях, где ночи продолжительные и тихие, излучение может иметь более сильное влияние в определении температурного равновесия, чем конвекция, а если так, то распро-

[1]) См. Everett, „On the Optics of Mirage", *Phil. Mag.* (4), XLV; (4), стр. 161, 248.

странению звука в горизонтальном направлении благоприятствовало бы приблизительно изотермическое состояние атмосферы.

Общее дифференциальное уравнение для пути луча, когда поверхности равной скорости представляют собой параллельные плоскости, легко получается из закона синусов. Если θ — угол падения, то $V/\sin\theta$ не изменяется преломляющей поверхностью и поэтому остается в предположенном случае постоянным вдоль всего хода луча. Если x — горизонтальная координата и если постоянное значение $V/\sin\theta$ обозначить через c, то мы получаем $dx/dz = V/\sqrt{c^2 - V^2}$ или

$$x = \int \frac{V\,dx}{\sqrt{c^2 - V^2}}. \tag{8}$$

Если закон для скорости — тот, который выражен (3), то

$$dz = -\frac{2V\,dV}{(\gamma - 1)\,g},$$

и, таким образом,

$$x = -\frac{2}{(\gamma - 1)\,g}\int \frac{V^2 dV}{\sqrt{c^2 - V^2}},$$

или, выполняя интегрирование,

$$(\gamma - 1)\,gx = \text{const} + V\sqrt{c^2 - V^2} - c^2 \arcsin\frac{V}{c}, \tag{9}$$

где V — можно выразить через z с помощью (3).

Более простой результат можно получить, если взять приближенную формулу (3), которая достаточно точна, чтобы представить случаи, имеющие практический интерес. Пренебрегая квадратом и высшими степенями z, мы можем положить

$$V^{-1} = V_0^{-1} + \frac{g(\gamma - 1)\,z}{2V_0^3}. \tag{10}$$

Написав для краткости β вместо $\dfrac{g(\gamma - 1)}{2V_0^3}$, мы имеем

$$\beta\,dz = dV^{-1}.$$

Подставив в (8), получим

$$c\beta x = \int \frac{d\left(\frac{c}{V}\right)}{\sqrt{\frac{c^2}{V^2} - 1}} = \ln\left[\frac{c}{V} + \sqrt{\frac{c^2}{V^2} - 1}\right]; \tag{11}$$

начало x берется так, чтобы оно отвечало значению $V = c$, т. е. в том месте, где луч горизонтален. Выражая V через x, мы находим

$$\frac{2c}{V} = e^{c\beta x} + e^{-c\beta x},$$

откуда

$$\beta z = -V_0^{-1} + \frac{1}{2c}(e^{c\beta x} + e^{-c\beta x}). \qquad (12)$$

Путь каждого луча является поэтому цепной линией с вершиной, обращенной книзу; линейный параметр есть $\frac{2V_0^3}{g(\gamma-1)c}$ и меняется от луча к лучу.

289. Другой случай атмосферной рефракции можно найти в действии ветра. Уже давно известно, что вообще звуки слышны лучше с подветренной, чем с наветренной стороны от источника; явление оставалось, однако, необъясненным, пока Стокс [1]) не указал на то, что возрастающая скорость ветра вверху должна мешать прямолинейному распространению звуковых лучей. Из закона кратчайшего времени Ферма следует, что ход луча в движущейся, но с других точек зрения однородной среде, такой же, каким он был бы в среде, все части которой находятся в покое, если бы скорость распространения была увеличена в каждой точке на компоненту скорости ветра в направлении луча. Если ветер — горизонтальный и не меняется в горизонтальной плоскости, то ход луча, направление которого всюду составляет лишь незначительный угол с направлением ветра, можно вычислить на основании тех же принципов, какие были применены в предыдущем разделе к случаю переменной температуры; локальная скорость ветра в каждой точке увеличивает или уменьшает нормальную скорость распространения звука в зависимости от того, распространяется ли звук по ветру или против ветра. Таким образом, когда скорость ветра вверх возрастает, что можно рассматривать как нормальное положение вещей, горизонтальный луч, идущий против ветра, постепенно загибается вверх и на некотором расстоянии проходит над головой наблюдателя; напротив, лучи, идущие в направлении ветра, загибаются вниз, так что наблюдатель, расположенный с подветреной стороны от источника, слышит звук благодаря прямому лучу, который выходит с незначительным уклонением вверх и имеет то преимущество, что он изолирован от помех на большей части своего пути.

Легко исследовать закон преломления на горизонтальной плоскости, при переходе через которую скорость ветра изменяется скачком. Достаточно рассмотреть случай, когда направление ветра и луч находятся в одной и той же вертикальной плоскости. Если θ — угол падения, который является также углом между волновой плоскостью и поверхностью раздела, U — скорость воздуха в том направлении, которое составляет меньший угол с лучом, и V — общая скорость распространения, то скорость следа волновой плоскости на поверхности раздела есть

$$\frac{V}{\sin\theta} + U \qquad (1)$$

[1]) **Stokes**, *Brit. Assoc. Rep.*, 1857, стр. 22.

— величина, которая не меняется при преломлении. Если поэтому U' — скорость ветра на другой стороне, а θ' — угол преломления, то

$$\frac{V}{\sin\theta}+U=\frac{V}{\sin\theta'}+U', \tag{2}$$

что отличается от обычного закона оптики. Если скорость ветра изменяется непрерывно, то ход луча можно вычислить из условия, что выражение (1) остается постоянным.

Если мы предположим, что $U=0$, то наибольшее допустимое значение U' есть

$$U'=V(\csc\theta-1). \tag{3}$$

В слое, где U' имеет это значение, направление луча, вышедшего под углом θ, становится параллельным преломляющей поверхности, и в слой, где U' имеет большее значение, луч не сможет совсем проникнуть. Таким образом, луч, идущий в спокойном воздухе вверх с наклоном $\left(\frac{1}{2}\pi-\theta\right)$ к горизонту, отражается наверху ветром со скоростью, превосходящей даваемую уравнением (3), и это — независимо от скоростей промежуточных слоев. В качестве численного примера укажем, что все лучи, идущие вверх с наклоном менее 11°, полностью отражаются ветром того же азимута со скоростью 15 миль в час. Влияние такого ветра на распространение звука нельзя не признать очень важным. Над поверхностью спокойной воды звук, распространяющийся в направлении ветра, будучи ограничен параллельными отражающими плоскостями, расходится только в двух измерениях; его можно поэтому слышать на расстояниях, много больших, чем это возможно в иных условиях. Другое возможное действие рефлектора, расположенного вверху, заключается в том, что он делает слышимыми звуки, которым в спокойном воздухе преградили бы путь холмы или другие препятствия. Для возникновения этих явлений не необходимо, чтобы ветер отсутствовал около источника звука, но, как это сразу же видно из формулы уравнения (2), нужно лишь, чтобы достигла достаточного значения *разность* скоростей $U'-U$.

Диференциальное уравнение пути луча, когда скорость ветра U изменяется непрерывно, есть

$$V\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=c\pm U, \tag{4}$$

откуда

$$x=\int\frac{V\,dz}{\sqrt{(c\pm U)^2-V^2}}. \tag{5}$$

Сравнивая (5) с уравнением (8) предыдущего раздела, которое является соответствующим уравнением для обычного преломления, мы должны вспомнить, что V теперь постоянно. Если для получения определенного результата мы предположим, что закон изменения ветра на различных уровнях выражается уравнением

$$U=\alpha+\beta z, \tag{6}$$

то мы имеем

$$\beta x = V \int \frac{dU}{\sqrt{(c \pm U)^2 - V^2}} \qquad (7)$$

— уравнение, имеющее ту же самую форму, что и уравнение (11) предыдущего раздела. Следовательно, ход луча в настоящем случае также изображается цепной линией, однако, между этими двумя задачами имеется существенное различие. Когда преломление обычного рода и зависит от непостоянства скорости распространения, направление луча может быть обращено. В случае атмосферной рефракции, обязанной уменьшению температуры с высотой, путь луча, в каком бы направлении последний ни распространялся, изображается цепной линией с вершиной, обращенной книзу. Когда рефракция обязана ветру, скорость которого возрастает с высотой по закону, выраженному уравнением (6) с положительным β, путь луча, идущего против ветра, также является цепной линией с вершиной, обращенной книзу, но луч, распространяющийся по ветру, идет не по этому пути. В последнем случае вершина цепной линии, вдоль которой распространяется луч, обращена кверху.

290. В статье Рейнольдса, которая уже цитировалась нами, дается описание нескольких интересных опытов, предназначенных специально для проверки теории рефракции звука ветром. Было найдено, что „в направлении ветра, когда он был силен, звук (электрического звонка) можно было слышать одинаково хорошо как вблизи земли, так и с поднятой головой и даже в лощине, когда звонок был скрыт от глаз склоном холма; поднимаясь на возвышение или поднимая звонок, мы не приобретаем никакого преимущества. Таким образом, при ветре над травой звук можно было слышать на расстоянии 140 ярдов, а над снегом — на расстоянии 360 ярдов, будь то с поднятой головой или держа ухо на уровне земле, между тем как под прямым углом к ветру во всех случаях область слышимости расширялась при более высоком положении наблюдателя или звонка".

„Было найдено, что подъем влияет заметнее на область слышимости звука в направлении против ветра, чем под прямым углом к нему.

„Если голова помещалась на уровне земли, то над травой звук полностью исчезал на расстоянии 20 ярдов, если же голова находилась на высоте 3 футов, то звук ослабевал на расстоянии 30 ярдов и полностью исчезал на расстоянии 30 ярдов, если стоять во весь рост. В 70 ярдах, если стоять прямо, звук исчезал на продолжительные интервалы, да и тогда слышался лишь слабо; однако, он становился снова непрерывным, если ухо было расположено на высоте 9 футов от земли, и достигал полной силы на высоте 12 футов".

Проф. Рейнольдс следующим образом резюмирует результаты своих экспериментов:

1. „Когда ветра нет, звук, идущий над шероховатой поверхностью, вверху сильнее, чем внизу".

2. „Если скорость ветра вверху больше, чем внизу, звук поднимается против ветра и не уничтожается".

3. „При тех же самых условиях он идет вниз в направлении ветра, и поэтому область его слышимости на поверхности земли расширяется".

Атмосферная рефракция имеет важное отношение к слышимости туманных сигналов — предмет, который за последние несколько лет занимал внимание двух выдающихся физиков, проф. Генри в Америке и проф. Тиндаля в Англии. Генри [1]) приписывает почти все капризы далеких звуков рефракции и показывает, как с помощью различных предположений относительно движения воздуха вверху возможно объяснить некоторые ненормальные явления, которые были замечены им самим и другими наблюдателями. Тиндаль [2]), исследования которого были в равной степени обширны, считает, что очень ограниченные расстояния, на которых иногда слышны звуки, являются результатом действительной задержки звука при неоднородном (flocculent) состоянии атмосферы, возникающем вследствие неравномерного нагревания или влажности. В том, что последняя причина способна действовать до некоторой степени рассматриваемым образом, сомневаться нельзя. Тиндаль доказал лабораторными экспериментами, что звук электрического звонка можно заметно ослабить расположенными попеременно слоями газов различной плотности; и хотя нужно признать, что изменения плотности были здесь более значительны и более резки, чем это можно предположить для открытого воздуха, за исключением, может быть, слоев, расположенных в непосредственной близости к почве, некоторые из наблюдений над туманными сигналами, казалось бы, прямо указывают на это объяснение.

Так, было найдено, что за звуком сирены, помещенной на вершине утеса, господствующего над морем, следовало эхо постепенно уменьшающейся интенсивности, продолжительность которого достигала иногда 15 секунд. Это явление наблюдалось, „когда море было зеркально гладким"; очевидно, его нельзя было приписать иной причине, помимо указанной Тиндалем. Вероятно, поэтому, что и рефракция, и акустическая мутность имеют отношение к капризному поведению туманных сигналов. A priori мы, конечно, были бы склонны придавать бóльшее значение рефракции, и Рейнольдс показал, что некоторые из собственных наблюдений Тиндаля допускают объяснение на основе этого принципа. Отсутствие *обратимости* можно объяснить в согласии с теорией лишь действием ветра (§ 111).

По гипотезе акустических облаков можно ожидать различий в поведении звуков большой и короткой продолжительности; оно заслуживает быть указанным здесь, поскольку, кажется, не отмеча-

[1]) Henry, *Report of the Lighthouse Board of the United States for the year 1874.*

[2]) Tyndall, *Phil. Trans.*, 1874; *Sound*, 3-е издание, гл. VII.

лось никем из прежних авторов. Так как при отражении и преломлении энергия не теряется, то интенсивность излучения непрерывно действующего источника звука (или света) на данном расстоянии не изменится, если окружить его облаком сферической формы, однородным по плотности: потеря за счет промежуточных частей облака будет компенсирована отражением от тех, которые лежат за источником. Но если звук — небольшой продолжительности, облако может очень сильно уменьшить интенсивность его на расстоянии, за счет различия положений его отражающих частей и обусловленного этим различием удлинения продолжительности звука, хотя полная интенсивность, измеряемая интегралом во времени, может быть такой же, как если бы облака не было совсем. В этом, вероятно, заключается объяснение наблюдения Тиндаля, что различные виды сигналов не всегда сохраняют одинаковую эффективность. При определенной погоде „выстрел гаубицы с трехфунтовым зарядом был слышен в большей области, чем свисток, труба или сирена", между тем как в другие дни „превосходство сирены над пушкой обнаруживалось самым отчетливым образом". Следует, однако, заметить, что в той же самой серии экспериментов было найдено, что свойство звука выстрела орудия „гаситься или отражаться ветром противоположного направления, так что он оказывается практически бесполезным уже на очень коротком расстоянии с наветренной стороны, резко выражено". Собственно рефракция должна быть одинаковой для звуков всякого рода, но по причине, объясненной выше, диффракция около края препятствия может быть менее эффективной для звука выстрела орудия, чем для неослабевающей ноты сирены.

Другим вопросом, исследованным Тиндалем, было влияние тумана на распространение звука. Вопреки отдельным противоположным утверждениям [1]) наиболее распространено было мнение Дергема, что влияние тумана — вредное. Наблюдения Тиндаля хорошо показывают, что это мнение ошибочно и что однородное состояние атмосферы, которым обычно сопровождается туманная погода, благоприятствует прохождению звука. Когда воздух насыщен водяными парами, падение температуры с высотой, по закону конвективного равновесия, происходит менее быстро, чем в случае сухого воздуха, за счет конденсации пара, которою тогда сопровождается расширение. Из вычислений Томсона [2]) вытекает, что в теплом тумане эффект испарения и конденсации должен компенсировать падение температуры наполовину. Это должно было бы уменьшить акустическую рефракцию, обусловленную температурой; в других же отношениях состояние воздуха было бы несомненно благоприятным для распространения звука, если предположить, что сами взвешенные частицы не создают никакого

[1]) См., например, Desor, *Fortschritte der Physik,* том XI, стр. 217, 1855.
[2]) Thomson, *Manchester Memoirs,* 1861—62.

препятствия. В следующей главе мы исследуем возмущение плоских звуковых волн малым препятствием, и найдем, что эффект зависит от отношения диаметра препятствия к длине волны звука.

Читатель, желающий продолжить изучение этого вопроса, может обратиться к статье Рейнольдса „О рефракции (преломлении) звука атмосферой“ [1]), равно как и к другим уже упомянутым авторитетам. Упомянем, что Рейнольдс согласен с Генри в том, что рефракцию следует считать действительно важной причиной возмущения, однако, требуется еще много дальнейших набюдений. См. также § 294.

291. Допуская, что возмущение у отверстия в экране такое же, какое было бы в этом же месте при отсутствии экрана, мы можем решать различные проблемы диффракции теми же методами, какие применяются для соответствующих проблем в физической оптике. Так, например, возмущение на некотором расстоянии по другую сторону бесконечной плоской стены с проделанным в ней круглым отверстием, на которую прямо падают плоские звуковые волны, можно вычислить как в аналогичной задаче картины оптической диффракции, образующейся в фокусе круглого объектива. Так, в случае симметричного рупора звук является максимальным вдоль оси инструмента, где все элементарные возмущения, исходящие из различных точек плоскости устья, находятся в одной фазе. В других направлениях интенсивность меньше; однако, она не должна сильно падать по сравнению с максимальным значением, если только наклон не таков, что разность расстояний самой близкой и самой удаленной точек устья достигает примерно половины длины волны. При несколько большем наклоне устье можно разделить на две части, из которых более близкая дает соединенный эффект, равный по величине, но противоположный по фазе, сравнительно с более далекой, так что в этом направлении интенсивность равна нулю. В направлениях, еще более наклонных, звук возрождается, интенсивность увеличивается до 0,017 интенсивности вдоль оси [2]), снова уменьшается до нуля и т. д., причем эти изменения соответствуют ярким и широким кольцам, которые окружают центральное светлое пятно в изображении звезды. Когда R обозначает радиус устья, угол, под которым встречается первая зона молчания, есть arc sin $(0{,}610\ \lambda/R)$. Когда диаметр устья не превосходит $\frac{1}{2}\lambda$, элементарные возмущения соединяются без значительного антагонизма в фазе, и интенсивность приблизительно одинакова по всем направлениям. Очевидно, что концентрация звука вдоль оси требует, чтобы отношение R/λ было большим — условие, которое обычно не удовлетворяется в применяемых рупорах, действие которых заключается, главным образом, в увеличении первоначального объема звука (§ 280). Но когда колебания с очень короткой

[1]) Reynolds, *Phil. Trans.*, том 166, стр. 315, 1876.
[2]) Verdet, *Leçons d'optique physique*, том I, стр. 306.

длиной волны, рупор среднего размера пригоден для осуществления значительной концентрации звука вдоль оси, как я сам это проверил на примере свиста.

292. Вычисления, о которых мы говорили в предыдущем разделе, полезны тем, что дают нам общее представление об явлениях дифракции. Не следует, однако, забывать, что вспомогательное допущение, на котором они основываются, ни в какой степени не является строгим и вообще верным. Так, в случае волны, падающей прямо на экран, нормальная скорость в плоскости отверстия непостоянна, как было предположено, но возрастает от центра к краям, становясь бесконечно большой на самом краю. Чтобы исследовать условия, которыми определяется нормальная скорость, предположим на момент, что отверстие закрыто. Падающая волна $\varphi = \cos(nt - kx)$ тогда полностью отражается, и потенциал скорости на отрицательной стороне экрана ($x = 0$) есть

$$\varphi = \cos(nt - kx) + \cos(nt + kx), \tag{1}$$

что дает, когда $x = 0$, $\varphi = 2\cos nt$. Это соответствует обращению в нуль нормальной скорости по всей площади отверстия; для полного решения задачи нам нужно определить переменную нормальную скорость в отверстии так, чтобы потенциал, обязанный ей (§ 278), при переходе с отрицательной стороны на положительную, возрастал на постоянную величину $2\cos nt$; или, так как переход этот влечет за собой просто перемену знака, определить значение нормальной скорости в площади отверстия, которая даст на положительной стороне, на этой же площади, $\varphi = \cos nt$. Результат наложения двух определенных таким путем движений удовлетворяет всем условиям задачи и дает одинаковые скорость и давление по обе стороны от отверстия и нулевую нормальную скорость на остальной части экрана.

Если $P\cos(nt + \varepsilon)$ есть значение $\partial\varphi/\partial x$ в различных точках площади (S) отверстия, то условие для определения P и ε, в силу (6) § 278, есть

$$-\frac{1}{2\pi}\iint P\frac{\cos(nt - kr + \varepsilon)}{r}\,dS = \cos nt, \tag{2}$$

где r обозначает расстояние между элементом dS и какой-нибудь фиксированной точкой в отверстии. Когда P и ε известны, полное значение φ для какой-либо точки на положительной стороне экрана дается выражением

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\iint P\frac{\cos(nt - kr + \varepsilon)}{r}\,dS, \tag{3}$$

и для точки отрицательной стороны — выражением

$$\varphi = +\frac{1}{2\pi}\iint P\frac{\cos(nt - kr + \varepsilon)}{r}\,dS + 2\cos nt\cos kx. \tag{4}$$

Отыскание выражений P и ε для конечного отверстия, даже круглой формы, выходит, вероятно, за пределы возможностей известных методов; но в случае, когда размеры очень малы в сравнении с длиной волны, проблему можно решить для круга и для эллипса. Если r — расстояние между двумя точками, расположенными по площади отверстия, то kr можно пренебречь, и мы получаем тогда из (2):

$$\varepsilon = 0, \quad 1 = -\frac{1}{2\pi}\iint P\frac{dS}{r} \tag{5}$$

— соотношение, показывающее, что $-P/2\pi$ есть плотность вещества, которое нужно распределить по S, чтобы получить там постоянный потенциал, равный единице. На некотором расстоянии от отверстия, на положительной стороне, мы можем считать r постоянным и положить

$$\varphi = M\frac{\cos(nt-kr)}{r}, \tag{6}$$

где $M = -\frac{1}{2\pi}\iint P\,dS$ обозначает полное количество вещества, которое мы должны предположить распределенным на S. В дальнейшем (§ 306) будет показано, что для эллипса с большой полуосью a и эксцентриситетом e

$$M = \frac{a}{F(e)}, \tag{7}$$

где F — символ полной эллиптической функции первого рода. В случае круга $F(e) = \frac{1}{2}\pi$ и

$$M = \frac{2a}{\pi}. \tag{8}$$

Этот результат совершенно отличен от того, который мы получили бы, предположив, что нормальная скорость в отверстии имеет значение, свойственное первичной волне. В этом случае, в силу (3) § 283,

$$\varphi = -\frac{\pi a^2}{\lambda}\frac{\sin(nt-kr)}{r}. \tag{9}$$

Если имеется несколько небольших отверстий, расстояния которых друг от друга значительно больше, чем их размеры, то этот же метод дает

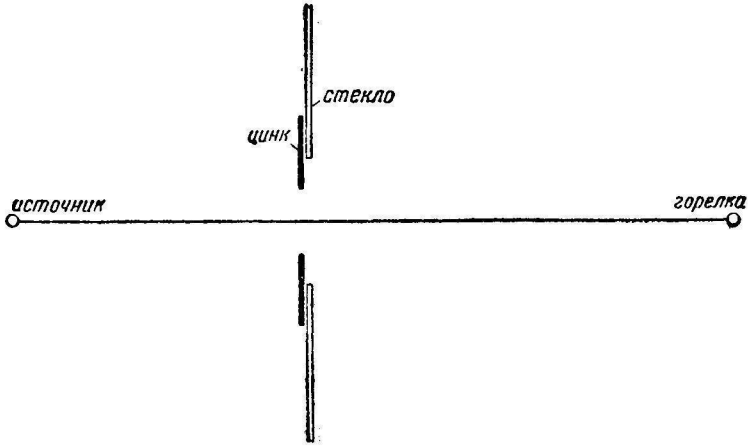
$$\varphi = M_1\frac{\cos(nt-kr_1)}{r_1} + M_2\frac{\cos(nt-kr_2)}{r_2} + \ldots \tag{10}$$

Дифракция звука представляет собой предмет, который привлекал очень мало внимания как со стороны математиков, так и со стороны экспериментаторов. Общий характер явлений понят хорошо, и поэтому здесь нельзя ждать никаких поразительных открытий; тем не менее точное решение нескольких более простых задач, которые

встают перед изучающим этот предмет, было бы интересным; даже с настоящими несовершенными методами, вероятно, можно было бы кое-что сделать на пути экспериментального исследования.

292*a*. С помощью птичьего манка, дающего волны длиною около 1 *см*, и чувствительного пламени высокого давления можно воспроизвести много интересных оптических экспериментов. При помощи этого аппарата тень от препятствия, не превышающего по размеру руку, можно сделать заметной на расстоянии нескольких футов.

Очень хорош эксперимент, показывающий антагонизм между частями волны, соответствующими первой и второй зоне Френеля



Фиг. 57a.

(§ 283). В большом стеклянном экране (фиг. 57a) просверлено круглое отверстие 20 *см* в диаметре; экран помещен между источником звука и горелкой так, чтобы отверстие соответствовало первым двум зонам Френеля. С помощью цинковой пластинки, плотно прижатой к стеклу, диаметр отверстия можно довести до 14 *см*, и тогда пропускается только первая зона. Если установка произведена хорошо, то пламя (на которое не действовали волны, проникавшие через большее отверстие), после того, как отверстие ограничивается цинковой пластинкой, начинает гореть очень сильно и неровно. Или, наоборот, пластинку с отверстием можно заменить диском диаметра 14 *см*, который позволяет действовать второй зоне, между тем как первая заслоняется.

Если a, b обозначают расстояния экрана от источника и от точки наблюдения, то внешний радиус ρ n-ой зоны дается выражением

$$\sqrt{a^2+\rho^2}+\sqrt{b^2+\rho^2}-a-b=\frac{1}{2}n\lambda;$$

или приближенно

$$\rho^2 = n\lambda \frac{ab}{a+b}. \tag{1}$$

Когда $a = b$

$$\rho = \frac{1}{2} n\lambda a. \tag{2}$$

При отверстиях, указанных выше, $\rho^2 = 49$ для $n = 1$; $\rho^2 = 100$ для $n = 2$; так что

$$\lambda a = 100$$

в сантиметрах. Это дает нужные расстояния, когда λ известно. В описанном эксперименте $\lambda = 1{,}2$, $a = 83$.

Процесс усиления общего эффекта попеременным блокированием зон можно продолжить значительно дальше. Так, если между источником звука и пламенем расположена соответствующая круговая решетка, вырезанная из листа цинка, то эффект во много раз больше, чем в случае, когда экран совершенно удален [1]). Решетка, как и в соответствующих оптических экспериментах Corpé, играет роль собирательной линзы.

Фокусное расстояние линзы определяется выражением (1), которое можно написать в форме:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{n\lambda}{\rho^2}, \tag{3}$$

так что

$$f = \frac{\rho^2}{n\lambda}. \tag{4}$$

В действительной решетке, построенной согласно этому плану, восемь зон — первая, третья, пятая и т. д. — заняты металлом. Радиус первой зоны, или центрального круга, равен 7,6 *см*, так что $\rho^2/n = 58$. Таким образом, если $\lambda = 1{,}2$ *см*, $f = 48$ *см*. Если a и b равны, то каждая из этих величин должна быть равна 96 *см*.

Положение вещей в центре тени круглого диска исследовать еще легче. Если мы построим мысленно систему зон, начинающихся с края диска, то увидим, как в § 283, что общий эффект в точке на оси, представляемый половиной эффекта первой зоны, таков же, как если бы не было никакого препятствия. Этот аналогичный знаменитому оптическому эксперименту опыт легко осуществить [2]). В одном эксперименте был взят стеклянный диск диаметром 38 *см*, а его расстояния от источника и от пламени были сделаны соответственно равными 70 *см* и 25 *см*. Для этого опыта подходит птичий манок, дающий чистый тон ($\lambda = 1{,}5$ *см*), но его можно заменить игрушечной язычковой трубой или каким-нибудь другим источником звука, дающим короткие, хотя и необязательно простые волны. В нелабораторной обстановке вместо чувствительного пламени можно пользоваться ухом, вооруженным каучуковой трубкой.

---

[1]) „Diffraction of Sound", *Proc. Roy. Inst.*, янв. 20, 1888.

[2]) „Acoustical Observations", *Phil. Mag.*, том IX, стр. 281, 1880; *Proc. Roy. Inst.*, loc. cit.

Область отсутствия заметной тени, хотя она и не ограничена математической точкой на оси, имеет небольшие размеры, и достаточно очень умеренного перемещения диска в его собственной плоскости, чтобы успокоить пламя. Непосредственно вблизи центрального пятна имеется кольцо почти полного молчания, а за ним имеется снова некоторое усиление эффекта. Вычисление интенсивности звука в точках, лежащих в стороне от оси симметрии, слишком сложно, чтобы им можно было здесь заняться. Результаты, полученные Ломмелем [1]), можно легко приспособить к акустической проблеме. Для данных, указанных выше, диаметр кольца молчания, непосредственно окружающего центральную активную область, составляет примерно 1,7 *см*.

293. Значение функции φ, которая удовлетворяет всюду в замкнутом односвязном пространстве S уравнению $\nabla^2\varphi = 0$, можно выразить как потенциал вещества, распределенного по поверхности S. В некотором смысле это верно также и для класса функций, которыми мы теперь занимаемся и которые удовлетворяют уравнению $\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0$. Последующее доказательство принадлежит Гельмгольцу [2]). В силу теоремы Грина, если φ и ψ обозначают какие-нибудь две функции x, y, z, то

$$\iint \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, dS - \iiint \varphi \nabla^2 \psi \, dV = \iint \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS - \iiint \psi \nabla^2 \varphi \, dV.$$

Прибавим к каждой стороне $-\iiint k^2 \varphi\psi \, dV$; тогда, если

$$a^2 (\nabla^2\varphi + k^2\varphi) + \Phi = 0$$

и

$$a^2 \nabla^2\psi + k^2\psi) + \Psi = 0,$$

то

$$a^2 \iint \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, dS + \iiint \varphi\Psi \, dV = a^2 \iint \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS + \iiint \psi\Phi \, dV. \quad (1)$$

Если Φ и Ψ равны нулю внутри S, мы имеем просто

$$\iint \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, dS = \iint \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS. \quad (2)$$

Предположим, однако, что

$$\varphi = \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (3)$$

где r представляет собой расстояние от произвольной точки до неподвижного начала O внутри S. Во всех точках, за исключением O, Φ обращается в нуль; последний член в (1) принимает вид

$$\iiint \psi\Phi \, dV = -a^2 \iiint \psi \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) dV = 4\pi a^2 \psi,$$

[1]) Lommel, *Abh. der bayer. Akad. der Wiss.*, II kl., том XV, отдел II. См. также *Encyclopaedia Britannica*, статья „Wave Theory".

[2]) Helmholtz, *Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden, Crelle*, том LVII, стр. 1, 1860.

где ψ относится к точке O. Таким образом, получается выражение

$$4\pi\psi = \iint \frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{e^{-ikr}}{r}\,dS - \iint \psi\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dS + \frac{1}{a^2}\iiint \Psi\frac{e^{-ikr}}{r}\,dV, \quad (4)$$

которое при ψ, обращающемся в нуль, дает нам значение Ψ в любой внутренней точке O через значения ψ и $\partial\psi/\partial n$ на поверхности. В случае обычного потенциала, к которому мы возвращаемся, полагая $k=0$, ψ было бы определено одними значениями $\partial\psi/\partial n$ на поверхности. Но с конечным k этот закон перестает быть универсально верным. Для данного пространства S имеется, как в случае, исследованном в § 267, ряд определенных значений k, соответствующих периодам возможных простых гармонических колебаний, которые могут иметь место внутри замкнутой твердой оболочки, имеющей форму S. Очевидно, что при любом из этих значений k, ψ не определяется своим изменением по нормали на S, и ясно, что оно удовлетворяет всюду внутри S уравнению $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$. Но если предположенное значение k не совпадает ни с одним значением из этого ряда, то задача определена; действительно, разность каких-нибудь двух возможных решений, если она конечна, удовлетворяла бы условию отсутствия нормальной скорости на S — условию, которое, согласно предположению, не может быть удовлетворено при принятом значении k.

Если размеры пространства S очень малы в сравнении с $\lambda\,(=2\pi/k)$, то e^{-ikr} можно заменить единицей, и мы заключаем, что ψ очень мало разнится от функции, которая всюду внутри S удовлетворяет уравнению $\nabla^2\varphi = 0$.

294. Расширяя теорему Грина (1), Гельмгольц нашел доказательство следующей важной теоремы. *Если в заполненном воздухом пространстве, частично ограниченном простирающимися на конечное расстояние неподвижными телами, частично же не ограниченном, в какой-либо точке A возбуждаются звуковые волны, то обусловленный ими в какой-либо другой точке B потенциал скорости и по величине и по фазе совпадает с тем, который имел бы место в A, если бы в B находился источник звука.*

Если уравнение

$$a^2\iint\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS = \iiint(\psi\Phi - \varphi\Psi)\,dV, \quad (1)$$

где φ и ψ — произвольные функции, и уравнения

$$\Phi = -a^2(\nabla^2\varphi + k^2\varphi) \quad \text{и} \quad \Psi = -a^2(\nabla^2\psi + k^2\psi)$$

прилагаются к пространству, целиком охваченному твердой границей и содержащему некоторое число неподвижных твердых тел, и если φ и ψ — потенциалы скорости, обусловленные источниками внутри S, то мы получаем

$$\iiint(\psi\Phi - \varphi\Psi)\,dV = 0. \quad (2)$$

Таким образом, если φ обусловлено источником, сосредоточенным в точке A, $\Phi = 0$ всюду за исключением этой точки, и

$$\iiint \phi\Phi \, dV = \phi_A \iiint \Phi \, dV,$$

где $\iiint \Phi \, dV$ представляет собой интенсивность источника. Аналогично, если ϕ обусловлено источником, расположенным в B, то

$$\iiint \varphi\Psi \, dV = \varphi_B \iiint \Psi \, dV.$$

Следовательно, если источники конечны и равны, так что

$$\iiint \Phi \, dV = \iiint \Psi \, dV, \tag{3}$$

то

$$\phi_A = \varphi_B, \tag{4}$$

что и является символическим выражением теоремы Гельмгольца.

Если пространство S не ограничено, то интеграл по поверхности все еще равен нулю, и результат будет тот же самый; здесь, однако, нет необходимости входить в детали вопроса, так как эта теорема заключается в гораздо более широком принципе обратимости, установленном в главе V. Исследование, проведенное там, показывает, что этот принцип остается верным и при наличии диссипативных сил, при условии, что они возникают как результат сопротивлений, пропорциональных первой степени скорости, и далее, что жидкость не должна быть обязательно однородной, а соседние тела — твердыми и неподвижными. В приложении к бесконечному пространству все неясности исчезают, если предположить, что колебания медленно затухают, после того как они прошли расстояние между A и B (рассматриваемыми источниками).

Читатель должен тщательно помнить, что в этой теореме одинаковыми источниками звука являются те, которые получаются в результате периодических введений или изъятий равных количеств жидкости или каких-либо других воздействий, приводящих к такому же эффекту, и что одинаковые источники в одинаковое время не обязательно испускают одинаковые количества энергии. Так, например, источник, расположенный вблизи поверхности большого препятствия, испускает вдвое больше энергии, нежели источник, расположенный в открытом пространстве.

В качестве примера применения этой теоремы мы можем взять случай слуховой, или разговорной, трубы, представляющей собой коническую трубу. Действие ее, таким образом, одинаково, независимо от того, наблюдается ли в вершине конуса звук, произведенный в некоторой точке снаружи трубы, или же источник равной силы, расположенный в вершине конуса, наблюдается во внешней точке.

Важно также иметь в виду, что теорема взаимности в форме Гельмгольца приложима только к *простым* источникам звука, кото-

рые в отсутствии препятствий давали бы симметричные волны. Как мы увидим более отчетливо в следующей главе, возможно осуществить источники звука, которые не удовлетворяют этому условию, хотя и сконцентрированы в бесконечно малой области. Здесь достаточно рассмотреть случай *двойных* источников, для которых видоизмененная теорема взаимности имеет самостоятельный интерес.

Предположим, что A есть простой источник, дающий в точке B потенциал $-\psi$, а A' — равный и противоположный источник, расположенный в соседней точке, потенциал которого в B есть $\psi+\Delta\psi$. Если оба источника действуют одновременно, то потенциал в B равен $\Delta\psi$. Предположим теперь, что в B имеется простой источник, интенсивность и фаза которого одинаковы с интенсивностью и фазой источников в A и A'; соответствующий потенциал в A будет ψ и в A' $\psi+\Delta\psi$. Если расстояние AA' обозначить через h и предположить, что оно беспредельно уменьшается, то скорость жидкости в A в направлении AA' будет равна пределу $\Delta\psi/h$. Отсюда, если мы определяем двойной источник, как предел двух равных и противоположных простых источников, расстояние между которыми уменьшается и интенсивность которых возрастает беспредельно таким образом, что произведение интенсивности на расстояние совпадает с таким же произведением для двух простых источников, помещенных друг от друга на расстоянии, равном единице, то мы можем сказать, что скорость жидкости в A в направлении AA', обусловленная простым источником в B, численно равна потенциалу в B от *двойного* источника в A, ось которого лежит в направлении AA'. Следует заметить, что эта теорема верна независимо от всяких препятствий или рефлекторов, какие могут существовать вблизи источников.

Но если AA' и BB' представляют собой два двойных источника с одинаковой фазой, то скорость в B в направлении BB', обусловленная источником AA', та же, что и скорость в A в направлении AA, обусловленная источником BB. Эти и другие результаты подобного характера можно также получить непосредственным применением общего принципа § 108. Этих примеров достаточно, чтобы показать, что, прилагая принцип взаимности, необходимо учитывать характер источников. Двойной источник, расположенный в открытом пространстве, не слышен из точки, расположенной в его экваториальной плоскости, но из этого не следует, что простой источник в экваториальной плоскости не слышен из положения двойного источника. Этот принцип, я думаю, позволяет объяснить любопытный опыт Тиндаля [1]), в котором имеет место кажущееся отсутствие взаимности [2]). Источником звука была язычковая труба очень большой

---

[1]) Tyndall, *Proceedings of the Royal Institution*, янв. 1875. Также Tyndall, *On Sound*, 3-е издание, стр. 405.

[2]) См. заметку „On the application of the Principle of Reciprocity to Acoustics", *Royal Society Proceedings*, том XXV, стр. 118, 1876 или *Phil. Mag.* (5), III, стр. 300.

высоты, помещенная в трубе, вдоль оси которой интенсивность была значительно больше, чем в наклонных направлениях.

295. Кинетическая энергия T движения внутри замкнутой поверхности S выражается в виде

$$T=\frac{1}{2}\rho_0\iiint\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 dV, \tag{1}$$

так что

$$\frac{dT}{dt}=\rho_0\iiint\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial x}\,dV=\rho_0\iint\dot{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS-\rho_0\iiint\dot{\varphi}\nabla^2\varphi\,dV, \tag{2}$$

в силу теоремы Грина. Для потенциальной энергии V_1 мы имеем, согласно (12) § 245,

$$V_1=\frac{\rho_0}{2a^2}\iiint\dot{\varphi}^2\,dV, \tag{3}$$

откуда

$$\frac{dV_1}{dt}=\frac{\rho_0}{a^2}\iiint\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\,dV=\frac{\rho_0}{a^2}\iiint\left\{\frac{dR}{dt}+A^2\nabla^2\varphi\right\}\dot{\varphi}\,dV, \tag{4}$$

согласно общему уравнению движения (9) § 244. Таким образом, если E означает полную энергию в пределах пространства S, то

$$\frac{dE}{dt}=\rho_0\iint\dot{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS+\frac{\rho_0}{a^2}\iiint\frac{dR}{dt}\dot{\varphi}\,dV, \tag{5}$$

где первый член представляет собой работу, переданную через границу S, а второй — работу, произведенную внутренними источниками звука.

Если граница S представляет собой неподвижную твердую оболочку, и если не имеется внутренних источников, то E сохраняет в продолжение всего движения первоначальное значение. Этот принцип был приложен Кирхгоффом [1]) к доказательству определенности движения, возникающего из заданных произвольных начальных условий. Так как каждый элемент E положителен, то внутри S не может быть движения, если E равно нулю. Но, если бы были возможны два движения, соответствующие одним и тем же начальным условиям, то их разность была бы движением, для которого начальное значение E равно нулю; но тем самым доказана невозможность таких двух движений.

---

[1]) Kirchhoff, *Vorlesungen über Math. Physik*, стр. 311.

ГЛАВА XV

ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ

296. Когда ничем не стесненный цуг плоских волн попадает в объем, занятый веществом, механические свойства которого отличаются от механических свойств окружающей среды, возникают вторичные волны, которые можно рассматривать как возмущение, обязанное изменению природы среды, — точка зрения, подходящая особенно тогда, когда *область возмущения*, равно как и изменение механических свойств, малы. Если среда и препятствие — жидкости, то механических свойств, о которых идет речь, два, — *сжимаемость* и *плотность*; трение или вязкость здесь не учитывается. В главе, посвященной сферическому гармоническому анализу, мы рассмотрим предложенную здесь проблему в предположении, что препятствие сферическое, без какого-либо ограничения, налагаемого на величину изменения механических свойств; в настоящем исследовании форма препятствия произвольна, но мы принимаем, что квадраты и высшие степени изменений механических свойств можно опустить.

Пусть ξ, η, ζ обозначают смещения параллельно осям координат частицы, положение равновесия которой определяется через x, y, z, и пусть σ — нормальная плотность, а m — постоянная сжимаемости, так что $\delta p = ms$; тогда уравнения движения имеют вид

$$\sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial (ms)}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

и два аналогичных уравнения для η и ζ. Полагая, что все движение пропорционально e^{ikat}, где, как обычно, $k = 2\pi/\lambda$ (§ 244) $a^2 = m/\sigma$, (1) можно переписать так:

$$\frac{\partial (ms)}{\partial x} - \sigma k^2 a^2 \xi = 0. \qquad (2)$$

Соотношение между сжатием s и смещениями ξ η, ζ, получающееся при интегрировании (3) § 238 по времени, есть

$$-s = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \qquad (3)$$

Для системы первичных волн, перемещающихся в направлении — x, величины η и ζ равны нулю; если ξ_0 и s_0 — значения ξ и s, а m_0 и σ_0 — механические константы для невозмущенной среды, то мы имеем,

как в (2),

$$\frac{\partial (m_0 s_0)}{\partial x} - \sigma_0 k^2 a^2 \xi_0 = 0, \tag{4}$$

но ξ_0 и s_0 не удовлетворяют (2) в области возмущения, благодаря имеющему там место изменению m и σ. Предположим, что полные значения суть $\xi_0 + \xi$, η, ζ и $s_0 + s$ [1]), и подставим в (2). Тогда, принимая во внимание (4), мы получаем

$$\frac{\partial (ms)}{\partial x} - \sigma k^2 a^2 \xi + (m - m_0) \frac{\partial s_0}{\partial x} + s_0 \frac{\partial m}{\partial x} - (\sigma - \sigma_0)\ k^2 a^2 \xi_0 = 0$$

или, иначе,

$$\frac{\partial}{\partial x}(ms) - \sigma k^2 a^2 \xi + \frac{\partial}{\partial x}(\Delta m \cdot s_0) - \Delta\sigma \cdot k^2 a^2 \xi_0 = 0, \tag{5}$$

где Δm и $\Delta\sigma$ обозначают, соответственно, $m - m_0$ и $\sigma - \sigma_0$. Уравнения для n и ζ имеют аналогичным образом вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(ms) - \sigma k^2 a^2 \eta + \frac{\partial}{\partial y}(\Delta m \cdot s_0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z}(ms) - \sigma k^2 a^2 \zeta + \frac{\partial}{\partial z}(\Delta m \cdot s_0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Следует заметить, что Δm и $\Delta\sigma$ обращаются в нуль всюду за исключением того малого пространства, которое рассматривается как область возмущения; ξ, η, ζ, s, являющиеся результатом возмущения, следует трактовать как малые величины порядка Δm и $\Delta\sigma$, так что в нашем приближенном анализе изменениями m и σ в первых двух членах (5) и (6) следует пренебречь, так как они умножаются на малые величины. Мы получаем, таким образом, из (5) и (6) путем дифференцирования и сложения, пользуясь (3), в качестве дифференциального уравнения для s, следующее соотношение:

$$\nabla^2 (ms) + k^2 ms = k^2 a^2 \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\sigma \cdot \xi_0) - \nabla^2 (\Delta m \cdot s_0). \tag{7}$$

Как и в § 277, решение (7) имеет вид

$$4\pi ms = \iiint \frac{e^{-ikr}}{r} \left\{ \nabla^2 (\Delta m \cdot s_0) - k^2 a^2 \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\sigma \cdot \xi_0) \right\} dV, \tag{8}$$

где интегрирование распространяется по объему, целиком заключающему в себе область возмущения. Интеграл в (8) может быть преобразован с помощью теоремы Грина. Обозначая обе его части соответственно через P и Q, мы имеем:

$$P = \iiint \frac{e^{-ikr}}{r} \nabla^2 (\Delta m \cdot s_0)\, dV = \iiint \Delta m \cdot s_0 \nabla^2 \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dV + \\ + \iint \left\{ \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial n}(\Delta m \cdot s_0) - \Delta m \cdot s_0 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right\} dS,$$

[1]) [Это обозначение принято для краткости. Для ясности можно было бы писать $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$, $s = s_0 + \Delta s_0$ и т. д., так, чтобы ξ, s и т. д. сохранили свой прежний смысл.]

где S обозначает поверхность объема, по которому распространяется тройное интегрирование. Но на S как Δm, так и $\frac{\partial}{\partial n}(\Delta m \cdot s_0)$ равны нулю, так что оба интеграла по поверхности исчезают. Кроме того,

$$\nabla^2\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}e^{-ikr} = -k^2\frac{e^{-ikr}}{r};$$

и, таким образом,

$$P = -k^2\iiint \frac{e^{-ikr}}{r}\Delta m \cdot s_0\, dV. \tag{9}$$

Если область возмущения мала сравнительно с λ, то мы можем написать

$$P = -k^2 s_0 \frac{e^{-ikr}}{r}\iiint \Delta m \cdot dV. \tag{10}$$

Аналогичным образом для второго интеграла в (8) мы находим

$$Q = -k^2a^2\iiint \frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\sigma\cdot\xi_0)\,dV =$$

$$= k^2a^2\iiint \Delta\sigma\cdot\xi_0\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dV = ik^2a^2\xi_0\mu\frac{e^{-ikr}}{r}\iiint \Delta\sigma\, dV, \tag{11}$$

где μ обозначает косинус угла между x и r. Линейными размерами области пренебрегаем в сравнении с λ, а λ пренебрегаем в сравнении с r.

Если T — объем пространства, где Δm и $\Delta\sigma$ имеют заметные значения, то мы можем написать

$$\iiint \Delta m\, dV = T\cdot\Delta m, \quad \iiint \Delta\sigma\, dV = T\cdot\Delta\sigma,$$

если в правых сторонах Δm и $\Delta\sigma$ относятся к *средним значениям* рассматриваемых изменений. Таким образом, из (8)

$$s = -\frac{k^2Te^{-ikr}}{4\pi r}\left\{\Delta m\cdot s_0 - ika^2\Delta\sigma\cdot\xi_0\mu\right\}. \tag{12}$$

Выразим теперь ξ_0 через s_0; из (3) мы имеем $\xi_0 = -\int s_0\, dx$; таким образом, если сжатие для первичных волн равно $s_0 = e^{ik(at+x)}$, $ik\xi_0 = -s_0$, и (12) можно представить в форме

$$\frac{s}{s_0} = -\frac{\pi Te^{-ikr}}{\lambda^2 r}\left\{\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta\sigma}{\sigma}\mu\right\}, \tag{13}$$

где s_0 обозначает сжатие для первичных волн в месте возмущения в момент времени t, а s обозначает сжатие для вторичных волн в тот же самый момент времени на расстоянии r от возмущения. Так как разность фаз, представляемая множителем e^{-ikr}, соответствует просто расстоянию r, то мы можем считать, что в месте возмущения имеет место простое обращение фазы. Амплитуда вторичных волн обрат-

но пропорциональна расстоянию r и *квадрату* длины волны λ. Из двух членов, содержащихся в (13), первый симметричен во всех направлениях вокруг места возмущения, между тем как второй изменяется пропорционально косинусу угла между первичным и вторичным лучами. Таким образом, место, где m изменяется, ведет себя как *простой* источник, а место, в котором изменяется σ — как источник *двойной* (§ 294).

Тот факт, что вторичное возмущение должно меняться по закону λ^{-2}, можно доказать непосредственно методом размерностей. Если Δm и $\Delta\sigma$ заданы, то амплитуда необходимо пропорциональна T и, в согласии с принципом энергии, должна также изменяться обратно пропорционально r. Но величинами (зависящими от пространства, времени и массы), функцией которых может быть отношение амплитуд, являются только T, r, λ, a (скорость звука) и σ, из которых последняя не может встречаться в выражении простого отношения, поскольку она — единственная из них, которая зависит от массы. Из остающихся четырех величии T, r, λ и a последняя — единственная, которая зависит от времени, и поэтому она также исключается. Нам остаются T, r и λ, единственной комбинацией которых, меняющейся по закону Tr^{-1} и независящей от единицы длины, является $Tr^{-1}\lambda^{-2}$ [1]).

Интересное приложение результатов этого раздела можно произвести для объяснения явления, названного *гармоничвским эхо* [2]). Если первичный звук является сложной музыкальной нотой, то различные составляющие ее тоны рассеиваются в неодинаковой пропорции. Октава, например, в шестнадцать раз сильнее в сравнении с основным тоном во вторичном звуке, чем это было в первичном. Нетрудно, таким образом, понять, каким образом эхо, отраженное от такого препятствия, как группа деревьев, может оказаться повышенным на октаву. Это явление имеет также и дополнительную сторону. Если на пути звуковых волн лежит значительное число небольших тел, то колебания, испускаемые ими во всех направлениях, происходят за счет энергии главного потока, и там, где звук сложный, возбуждение более высоких гармоник в рассеянных волнах предполагает пропорциональное отсутствие их в прямой волне после прохождения препятствий. Это является, может быть, объяснением некоторых эхо, о которых сказано, что они возвращают звук ниже первоначального; действительно известно, что высота чистого тона часто оценивается слишком низко. Однако, факты противоречивы, и весь этот вопрос требует дальнейшего тщательного экспериментального исследования, которое можно рекомендовать вниманию располагающих необходимыми условиями. В то время как изменение *характера* звука легко понятно и, действительно, в ограниченной степени должно вообще происходить, изменение высоты простого тона было бы нару-

[1]) „On the Light from the Sky", *Phil. Mag.*, февраль, 1871 и „On the Scattering of Light by small Particles", *Phil. Mag.*, июнь, 1871.

[2]) *Nature*, 1873, VIII, 319.

шением закона вынужденных колебаний и едва ли могло бы быть примирено с теоретическими представлениями.

При выводе уравнения (13) мы пренебрегли влиянием переменной природы среды *на возмущение*. Если возмущение при этом предположении вполне известно, мы можем выполнить приближение снова тем же самым путем. Полученные при этом дополнительные члены были бы необходимо второго порядка относительно Δm и $\Delta\sigma$, так что наши выражения, с точностью до первых степеней этих величин, правильны во всех случаях.

Этот метод применим даже в том случае, когда область возмущения не является малой в сравнении с λ, при условии, что квадратами Δm и $\Delta\sigma$ действительно можно пренебречь. Полный эффект какого-либо препятствия можно тогда вычислить интегрированием эффектов его частей. Этим путем мы можем проследить переход от малой области возмущения, *поверхность* которой не входит в рассмотрение, к тонкой пластинке площадью в несколько или же в большое число квадратных длин волн, которая может в конечном счете отражать по нормальному оптическому закону. Но если препятствие вообще удлинено в направлении первичных лучей, то этот метод вычисления скоро перестает быть практически пригодным, потому что, даже если изменение механических свойств было очень мало, нельзя уже оставлять без учета взаимодействие различных частей препятствия. Эта предосторожность особенно важна, когда мы имеем дело со светом, где длина волны столь исключительно мала в сравнении с размерами обычных препятствий.

297. Эффектом, аналогичным до некоторой степени эффекту, который вызывается изменением механических свойств малой области жидкости, является тот, который имеет место, когда квадрат скорости возрастает в каком-либо месте настолько, что им уже больше нельзя пренебрегать. $\nabla^2_{\varphi+k^2\varphi}$ приобретает тогда конечное значение, зависящее от квадрата скорости. Такие места действуют поэтому подобно источникам звука; периоды источников включают целые части [дроби с числителем 1] первоначального периода. Таким образом, какая-либо часть пространства, где интенсивность накапливается в достаточной степени, сама становится вторичным источником, излучающим гармонические тоны первичного звука. Если имеются два первичных звука достаточной интенсивности, то вторичные колебания имеют частоты, являющиеся суммами и разностями частот первичных звуков (§ 68)[1]).

298. Высота звука подвержена изменению, когда источник и приемник находятся в относительном движении. Ясно, например, что наблюдатель, приближающийся к неподвижному источнику, будет встречать волны с частотой, превосходящей собственную частоту

[1]) Гельмгольц о комбинационных тонах, *Pogg. Ann.*, том XCIX, стр. 497, 1855.

звука на число длин волн, пройденных наблюдателем за секунду времени. Таким образом, если v — скорость наблюдателя, a — скорость звука, то частота изменяется в отношении $(a \pm v) : a$, в зависимости от того, будет ли движение направлено к источнику или от него. Так как изменение частоты постоянно, то музыкальное исполнение слышалось бы еще нерасстроенным, хотя во втором случае, если кроме того a и v близки друг к другу, понижение звука было бы настолько велико, что нарушило бы весь музыкальный характер вещи. Если бы мы могли предположить, что v больше a, то звук, произведенный после того, как движение началось, никогда бы не достиг наблюдателя, звуки же, возбужденные ранее, постепенно нагонялись бы и слышались в порядке, обратном естественному. При $v = 2a$ наблюдатель услышал бы музыкальную вещь правильно и за правильное время, но *в обратном порядке*.

Аналогичный результат получается и когда в движении находится источник, а наблюдатель в покое; изменение зависит только от относительного движения в направлении слушания. Если наблюдатель и источник движутся с одинаковой скоростью, то изменения частоты не происходит, независимо от того, находится среда в движении или нет. При относительном движении со скоростью 40 миль (64 километра) в час изменение высоты очень заметно, достигая приблизительно полутона. Свисток паровоза слышен несколько более высоким, когда паровоз приближается к наблюдателю на станции, и более низким, когда он удаляется, изменяясь довольно резко в момент прохождения мимо наблюдателя.

Принцип изменения высоты вследствие относительного движения был впервые высказан Допплером [1]) и часто называется принципом Допплера. Довольно странно, что его законность оспаривалась Петцвалем [2]); возражения Петцваля были результатом того, что он смешал два совершенно различных случая; случай, в котором имеется относительное движение источника и приемника, и случай, где находится в движении среда, между тем как источник и приемник находятся в покое. В последнем случае условия в механическом отношении такие же, как если бы среда находилась в покое, а источник и приемник имели общее движение, и поэтому, согласно принципу Допплера, никакого изменения высоты ожидать не следует.

Принцип Допплера был проверен экспериментально Бейс Балло [3]) и Скотт Расселем, изучившим изменения высоты звука музыкальных инструментов, перемещавшихся на паровозах. Лабораторный инструмент для доказательства изменения частоты вследствие движения был изобретен Махом [4]). Он состоит из трубы в шесть футов (183 *см*)

---

[1]) Doppler, „Theorie des farbigen Lichtes der Doppelsterne", Прага, 1842. См. Pisko, *Die neueren Apparate der Akustik*, Вена, 1865.

[2]) Petzval, *Wien. Ber.*, VIII, 134, 1852; *Fortschritte der Physik*, VIII, 167.

[3]) Buijs Ballot, *Pogg. Ann.*, LXVI, стр. 321.

[4]) Mach, *Pogg. Ann.*, CXII, стр. 66, 1861 и CXVI, стр. 333, 1862.

длиной, которая может вращаться вокруг оси в ее центре. На одном конце трубы помещен небольшой свисток (или язычковая труба), через который продувается воздух, направляемый вдоль оси трубы. Наблюдатель, расположенный в плоскости вращения, слышит ноту колеблющейся высоты, но если он располагается на продолжении оси вращения, то звук приобретает постоянный характер. Вероятно, наиболее простым экспериментом является тот, который описан Кенигом [1]). Два c''-камертона, монтированные на резонансных ящиках, подготовлены так, чтобы давать друг с другом четыре биения в секунду. Если приближать к уху более низкий из камертонов, оставляя другой в покое, то на каждые два фута (61 *см*) приближения *теряется* одно биение; если, наоборот, приближать более высокий из камертонов, то на этом же расстоянии *нарастает* одно биение. Можно отметить также видоизменение этого эксперимента, принадлежащее Мейеру [2]). В этом случае один камертон возбуждает колебания другого в унисон с самим собой; возбуждение можно сделать заметным с помощью маленького маятника, касающегося конца одной из ножек. Когда возбуждающий камертон находится в покое, эффект заметен на расстоянии до 60 футов (1830 *см*), но он прекращается, когда возбуждающий камертон быстро перемещают в ту или другую сторону, в направлении линии, соединяющей камертоны.

В математической трактовке задачи движущегося источника имеется некоторая трудность, связанная с тем, что всякий действительный источник действует так же и как препятствие. Так, в случае колокольчика, перемещаемого в воздухе, мы должны были бы потребовать решения задачи, достаточно трудной даже если бы не было колебаний. Но решение подобной задачи, если бы даже его и можно было получить, не пролило бы особого света на закон Допплера, и мы можем поэтому упростить вопрос, идеализуя колокольчик в форме простого источника звука.

В § 147 мы рассматривали задачу о движущемся источнике возмущения в случае натянутой струны. Теория воздушных волн в одном измерении совершенно аналогична, но для общего случая трех измерений, чтобы учесть возможность движения поперек направления звуковых лучей, необходимо некоторое ее расширение. Из §§ 273, 276 следует, что эффект, который дается источником звука в некоторой точке O, один и тот же, будет ли он находиться в покое или как-либо двигаться по поверхности сферы, описанной из O, как из центра. Если источник движется так, что его расстояние r от точки O изменяется, то даваемый им эффект изменяется в двух отношениях. Изменение расстояния влияет не только на *фазу* возмущения по приходе в O, но и на *амплитуду*. Последнее усложнение можно, однако, оставить без учета, если мы ограничиваемся случаем, когда источник

[1]) König, *Catalogue des Appareils d'Acoustique*, Париж, 1865.
[2]) Mayer, *Phil. Mag.* (4), XLIII, стр. 278, 1872.

достаточно удален. При этом условии мы можем утверждать, что эффект в O от возмущения, произведенного в момент t на расстоянии r от O, одинаков с эффектом подобного же возмущения, произведенного в момент $t + \delta t$ на расстоянии $r - a\,\delta t$ от O. В случае периодического возмущения приближение со скоростью v эквивалентно возрастанию частоты в отношении $a:(a+v)$.

299. Мы исследуем теперь вынужденные колебания воздуха, заключенного внутри прямоугольной камеры, колебания, обязанные своим происхождением внутренним источникам звука. В силу § 267 ясно, что результат начального сжатия, ограниченного областью в соседстве с точкой ξ, η, ζ, в момент t, есть

$$\dot{\varphi} = \sum\sum\sum kaB_{pqr} \cos kat \cos\left(p\frac{\pi x}{\alpha}\right)\cos\left(q\frac{\pi y}{\beta}\right)\cos\left(r\frac{\pi z}{\gamma}\right), \quad (1)$$

где

$$kaB_{pqr} = \frac{8}{\alpha\beta\gamma}\cos\left(p\frac{\pi\xi}{\alpha}\right)\cos\left(q\frac{\pi\eta}{\beta}\right)\cos\left(r\frac{\pi\zeta}{\gamma}\right)\iiint \dot{\varphi}_0\,dx\,dy\,dz, \quad (2)$$

откуда можно вывести эффект какой-либо внешней силы, как в § 276. Если возмущение $\iiint \dot{\varphi}_1'\,dx\,dy\,dz$, сообщенное в момент t', представить в форме $\iiint \Phi(t')\,dt'\,dx\,dy\,dz$, или $\Phi_1(t')\,dt'$, то возмущение в момент t будет

$$\dot{\varphi} = \frac{8}{\alpha\beta\gamma}\sum\sum\sum \cos\left(p\frac{\pi x}{\alpha}\right)\cos\left(q\frac{\pi y}{\beta}\right)\cos\left(r\frac{\pi z}{\gamma}\right)\times$$

$$\times \cos\left(p\frac{\pi\xi}{\alpha}\right)\cos\left(q\frac{\pi\eta}{\beta}\right)\cos\left(r\frac{\pi\zeta}{\gamma}\right)\int_{-\infty}^{t}\Phi_1(t')\cos ka(t-t')\,dt'. \quad (3)$$

Симметрия этого выражения по отношению к x, y, z и ξ, η, ζ есть пример принципа обратимости (§ 107).

В случае гармонической силы, для которой $\Phi_1(t') = A\cos mat'$, мы должны рассмотреть значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{t}\cos mat'\cos ka(t-t')\,dt'. \quad (4)$$

Строго говоря, этот интеграл не имеет определенного значения; но если нас интересует выражение только вынужденных колебаний, то мы должны опустить интегрируемую функцию на нижнем пределе; это можно видеть, если предположить, что введены очень малые диссипативные силы. Мы получаем, таким образом,

$$\int_{-\infty}^{t}\Phi_1(t')\cos ka(t-t')\,dt' = A\frac{ma\sin mat}{(m^2-k^2)a^2}. \quad (5)$$

Как можно было предвидеть, эти выражения становятся бесконечно большими в случае совпадения периода источника с одним из соб-

ственных периодов сосуда. Никакое отдельное нормальное колебание не возбудится, если источник расположен в одной из его пучностей.

Об эффекте нескольких источников легко заключить, суммируя или интегрируя имеющиеся выражения.

300. Когда звук возбуждается внутри цилиндрической трубы, то простейший способ возбуждения, какой только мы можем предположить, — это возбуждение с помощью вынужденных колебаний поршня. В этом случае волны являются плоскими с самого начала. Но важно также исследовать, что происходит, когда источник, вместо того чтобы быть равномерно распределенным по сечению, сконцентрирован в одной его точке. Если мы примем (что, однако, не является верным безоговорочно), что на достаточном расстоянии от источника волны становятся плоскими, то закона обратимости достаточно, чтобы получить желаемые сведения.

Пусть A — простой источник в неограниченной трубе, B и B' — две точки одного и того же нормального сечения в области плоских волн. Ex hypothesi, потенциалы в B и B', обязанные источнику A, одинаковы и, согласно закону взаимности, такие же источники в B и B' дали бы тот же самый потенциал в A. Отсюда следует, что эффект какого-либо источника на расстоянии такой же, как если бы источник был равномерно распределен по сечению, которое проходит через него. Так, например, если бы B и B' были одинаковыми источниками в противоположных фазах, возмущение в A было бы равно нулю.

Энергию, испускаемую простым источником, расположенным внутри трубы, теперь нетрудно вычислить. Если сечение трубы есть σ и источник таков, что в открытом пространстве потенциал, обязанный ему, был бы равен

$$\varphi = -\frac{A}{4\pi}\cdot\frac{\cos k(at-r)}{r}, \tag{1}$$

то потенциал скорости на некотором расстоянии внутри трубы будет таким, как если бы причиной возмущения было движение поршня в начале, дающее равное общее смещение, и испущенная энергия также будет той же самой. Но из (1) имеем окончательно

$$2\pi r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{2}A\cos kat,$$

и поэтому, если ϕ — потенциал скорости плоских волн в трубе (предполагаемой параллельной z), мы можем положить

$$\sigma\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{1}{2}A\cos k(at-z), \tag{2}$$

соответственно этому

$$\dot{\phi} = -\frac{aA}{2\sigma}\cos k(at-z). \tag{3}$$

Отсюда, как в § 245, энергия W, испускаемая *в каждую сторону*

от источника, дается выражением:

$$\frac{dW}{dt} = \sigma\left(-\rho\dot{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\rho a A^2}{4\sigma}\cos^2 kat,$$

так что для значительного промежутка времени

$$W = \rho\frac{aA^2}{8\sigma}t. \tag{4}$$

Если труба закрыта неподвижным поршнем, помещенным вблизи источника, то вся энергия излучается в одном направлении; но это еще не все. В результате удвоенного давления развивается энергия в два раза больше, чем раньше, и, таким образом, в этом случае

$$W = \rho\frac{aA^2}{2\sigma}t. \tag{5}$$

Чем у́же труба, тем больше энергия, испускаемая данным источником. Интересно сравнить эффективность источника у закрытого конца цилиндрической трубы с эффективностью равного источника, расположенного в вершине конуса. Из § 280 мы имеем в последнем случае

$$W' = \rho\frac{k^2 aA^2}{2\omega}t, \tag{6}$$

так что

$$\frac{W}{W'} = \frac{\omega}{k^2\sigma}. \tag{7}$$

Энергия, испускаемая в обоих случаях, одинакова, когда $\omega = k^2\sigma$, т. е. когда сечение цилиндра равно площади, вырезываемой конусом на сфере радиуса k^{-1}.

301. Мы должны теперь исследовать, насколько справедливо утверждение, что колебания внутри цилиндрической трубы на достаточном расстоянии от их источника становятся приблизительно плоскими. Взяв ось z параллельной образующим цилиндра, исследуем движение, потенциал которого меняется по закону e^{ikat}, на положительной стороне источника, расположенного в $z = 0$. Если φ — потенциал и если вместо $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ подставить ∇^2, то уравнением движения будет

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \nabla^2 + k^2\right)\varphi = 0. \tag{1}$$

Если φ не зависит от z, то это уравнение представляет колебания, целиком поперечные к оси цилиндра. Если тогда потенциал пропорционален e^{ipat}, то он должен удовлетворять уравнению

$$(\nabla^2 + p^2)\varphi = 0, \tag{2}$$

равно как и условию, что на границе сечения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0. \tag{3}$$

Чтобы эти уравнения могли быть совместными, p ограничивается некоторыми определенными значениями, соответствующими периодам

собственных колебаний. Нулевое значение p дает $\varphi = \text{const}$ — решение, которое мы должны будем сейчас рассмотреть, хотя оно и не имеет значения для задачи в двух измерениях. Для каждого допустимого значения p имеется определенная нормальная функция u от x и y (§ 92), так что решение имеет вид

$$\varphi = Aue^{ipat}. \tag{4}$$

Две функции u и u', соответствующие различным значениям p, являются сопряженными, именно, для них

$$\iint uu'dx\,dy = 0, \tag{5}$$

и всякая функция от x и y может быть разложена внутри контура в ряд

$$\varphi = A_0u_0 + A_1u_1 + A_2u_2 + \ldots, \tag{6}$$

где u_0, соответствующее $p = 0$, постоянно.

В действительной задаче φ все еще можно разложить в тот же ряд, при условии, что A_0, A_1, ... рассматриваются как функции z. В результате подстановки в (1) мы получаем, принимая во внимание (2),

$$u_0\left\{\frac{d^2A_0}{dz^2} + k^2A_0\right\} + u_1\left\{\frac{d^2A_1}{dz^2} + (k^2 - p_1^2)\,A_1\right\} + \\ + u_2\left\{\frac{d^2A_2}{dz^2} + (k^2 - p_2^2)\,A_2\right\} + \ldots = 0, \tag{7}$$

где в силу свойства сопряженности нормальных функций каждый коэфициент при u должен обращаться в нуль по отдельности. Таким образом,

$$\frac{d^2A_0}{dz^2} + k^2A_0 = 0, \quad \frac{d^2A}{dz^2} + (k^2 - p^2)\,A = 0. \tag{8}$$

Решение первого из этих уравнений есть

$$A_0 = \alpha_0e^{ikz} + \beta_0e^{-ikz},$$

что дает

$$\varphi_0 = \alpha_0u_0e^{ik(at+z)} + \beta_0u_0e^{ik(at-z)}. \tag{9}$$

Решение общего уравнения для A принимает различную форму в зависимости от того, будет ли $k^2 - p^2$ положительным или отрицательным. Если вынужденное колебание является более низким, чем наинизшее из чисто поперечных собственных колебаний, то каждое конечное значение p^2 больше, чем k^2, или $k^2 - p^2$ всегда отрицательно. Полагая

$$k^2 - p^2 = -\mu^2, \tag{10}$$

мы имеем

$$A = \alpha e^{\mu z} + \beta e^{-\mu z},$$

откуда

$$\varphi = (\alpha e^{\mu z} + \beta e^{-\mu z})ue^{ikat}. \tag{11}$$

Но при предположенных условиях очевидно, что движение не стано-

вится бесконечно большим вместе с z, так что все коэфициенты α равны нулю. По несколько иному основанию то же самое справедливо для α_0, так как не может существовать волны в отрицательном направлении. Мы можем поэтому положить

$$\varphi = \beta_0 e^{ik(at-z)} + \beta_1 u_1 e^{-\mu_1 z} e^{ikat} + \beta_2 u_2 e^{-\mu_2 z} e^{ikat} \qquad (12)$$

— выражение, которое сводится к своему первому члену, когда z достаточно велико. Мы приходим к заключению, что во всех случаях волны в конце концов становятся плоскими, *если вынужденное колебание является более низким, чем наинизшее из собственных поперечных колебаний.*

В случае кругового цилиндра радиуса r длина волны наинизшего поперечного колебания равна $2\pi r : 1{,}841 = 3{,}413r$ (§ 339). Если при этом длина волны вынужденного колебания превосходит $3{,}413r$, то волны в конце концов становятся плоскими. Может случиться, что волны в конце концов становятся плоскими, хотя длина волны и падает ниже указанного предела. Так, если источник колебаний симметричен относительно оси трубы — например, простой источник, расположенный на оси трубы, — то наинизшее поперечное колебание, с которым нам пришлось бы иметь дело, было бы более, чем на октаву, выше, чем в общем случае, и длина волны вынужденного колебания могла бы иметь значение, меньшее половины указанного значения.

Из (12), когда $z = 0$, следует

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -ik\beta_0 e^{ikat} - \mu_1 \beta_1 u_1 e^{ikat} - \ldots,$$

откуда

$$\iint \frac{d\varphi}{dz}\, d\sigma = -ik\beta_0 \sigma e^{ikat}, \qquad (13)$$

поскольку $\iint u_1 d\sigma$, $\iint u_2 d\sigma$ и т. д. все обращаются в нуль.

В связи с этим ясно, что плоские волны на некотором расстоянии от источника такие же, как если бы они были получены с помощью твердого поршня в начале, что дает ту же самую среднюю нормальную скорость, какая существует в действительности. Всякое нормальное движение, положительная и отрицательная части которого равны, не дает в конце концов никакого эффекта.

Когда нет никаких ограничений относительно характера источника, и когда некоторые из собственных поперечных колебаний являются более низкими, чем данное, то несколько значений $k^2 - p^2$ положительны, и тогда появляются члены вида

$$\varphi = \beta u e^{ikat} e^{-i\sqrt{k^2 - p^2}\, z},$$

или, в действительных величинах,

$$\varphi = \beta u \cos\left\{kat - \sqrt{k^2 - p^2}\, z\right\}; \qquad (14)$$

это указывает, что особенности источника распространяются на бесконечно большое расстояние.

Задачу, рассмотренную здесь, можно считать обобщением задачи § 268. Для кругового цилиндра ее можно решить полностью с помощью функций Бесселя, но это мы предоставляем читателю.

302. В § 278 мы полностью определили движение воздуха, являющееся результатом периодического движения в направлении нормали граничной плоской пластины бесконечной протяженности. Если $\partial\varphi/\partial n$ — заданная скорость в направлении нормали элемента dS, то

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\iint \frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{e^{-ikr}}{r}\,dS \tag{1}$$

дает потенциал скорости в точке P на растоянии r от dS. Остальная часть настоящей главы посвящается исследованию частного случая этой задачи, имеющей место, когда скорость в направлении нормали имеет заданное постоянное значение на площади круга радиуса R, а на остальной части плоскости равна нулю. В частности, мы исследуем, какие силы, являющиеся результатом реакции воздуха, действуют на твердую круглую пластинку, колеблющуюся по простому гармоническому закону в равном ей по площади круглом отверстии, вырезанном в твердой плоской пластине, простирающейся в бесконечность.

Для полного изменения давления, действующего на пластинку, мы имеем (§ 244)

$$\iint \delta p\,dS = -\sigma\iint \dot{\varphi}\,dS = -ik\sigma\iint \varphi\,dS,$$

где σ — нормальная (natural) плотность, а φ меняется пропорционально e^{ikat}. Таким образом, согласно (1),

$$\iint \delta p\,dS = \frac{ik\sigma}{\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\sum\sum \frac{e^{-ikr}}{r}\,dS\,dS'. \tag{2}$$

В двойной сумме

$$\sum\sum \frac{e^{-ikr}}{r}\,dS\,dS', \tag{3}$$

которую мы должны теперь вычислить, каждая пара элементов должна быть взята по одному разу, и произведение нужно суммировать после умножения на множитель $r^{-1}e^{-ikr}$, зависящий от их взаимного расстояния. Лучшим методом является тот, который предложен проф. Максвеллом для обычного потенциала [1]). Величина (3) рассматривается как работа, которая была бы затрачена для полной диссоциации вещества, составляющего диск, т. е. для удаления каждого элемента из области влияния всякого другого, в предположении, что потенциал двух элементов пропорционален $r^{-1}e^{-ikr}$. Величину требуемой работы, которая зависит только от начального и конечного состояний, можно вычислить, предполагая, что операция выполняется любым путем, какой окажется более удобным. С этой целью мы предположим, что

[1]) Maxwell, „Theory of Resonance" *Phil. Trans.*, 1870.

диск разделен на элементарные кольца и что каждое кольцо уводится прочь в бесконечность прежде, чем будут нарушены какие-либо из внутренних колец.

Первым шагом является вычисление потенциала V на краю диска радиуса c. Взяв полярные координаты ρ, θ с какой-либо точкой окружности в качестве полюса, мы имеем

$$V=\iint\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\rho\,d\rho\,d\theta=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{2c\cos\theta}e^{-ik\rho}d\rho\,d\theta=\frac{2}{ik}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\{1-e^{-2ikc\cos\theta}\}\,d\theta.$$

Эту величину нужно умножить на $2\pi c\,dc$, а затем проинтегрировать по c между пределами 0 и R. Удобнее, однако, произвести сначала преобразование. Мы имеем

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-2ikc\cos\theta}d\theta=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-2ikc\sin\theta}d\theta=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(2kc\sin\theta)\,d\theta-\frac{2i}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin(2kc\sin\theta)\,d\theta=J_0(z)-iK(z),\quad(4)$$

где вместо $2kc$ написано z. $J_0(z)$ есть функция Бесселя нулевого порядка (§ 200), а $K(z)$ — функция, определенная уравнением

$$K(z)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin(z\sin\theta)\,d\theta=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{z-\frac{z^3}{1^2\cdot3^2}+\frac{z^5}{1^2\cdot3^2\cdot5^2}-\frac{z^7}{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2}+\cdots\right\}.\quad(5)$$

Отвлекаясь в настоящий момент от дальнейшего рассмотрения функции K, мы можем написать

$$V=\frac{\pi}{k}[K(z)-i\{1-J_0(z)\}]\quad(6)$$

и, таким образом,

$$\sum\sum\frac{e^{-ikr}}{r}\,dS\,dS'=\frac{\pi^2}{2k^3}\int\limits_{0}^{2kR}z\,dz[K(z)-i\{1-J_0(z)\}].$$

Но, согласно (6) § 200 и (8) § 204,

$$\int\limits_{0}^{z}z\,dzJ_0(z)=zJ_1(z);\quad(7)$$

таким образом, если определить K_1 равенством

$$K_1(z) = \int_0^z K(z) z\, dz, \tag{8}$$

то мы можем написать

$$\sum\sum \frac{e^{-ikr}}{r} dS\, dS' = \frac{\pi^2}{2k^3} K_1(2kR) - i\frac{\pi^2 R^2}{k}\left(1 - \frac{J_1(2kR)}{kR}\right). \tag{9}$$

Полное давление выводится отсюда, если ввести множитель

$$\frac{ika\sigma}{\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n},$$

так что

$$\iint \delta p\, dS = a\sigma\cdot\pi R^2\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial n}\left(1 - \frac{J_1(2kR)}{kR}\right) + i\frac{a\sigma\pi}{2k^2}\frac{\partial\varphi}{\partial n} K_1(2kR). \tag{10}$$

Реакцию воздуха на диск можно, таким образом, разделить на две части, из которых первая пропорциональна скорости диска, а вторая — ускорению. Если ξ обозначает смещение диска, так что $\dot{\xi} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}$, то мы имеем $\ddot{\xi} = ika\dot{\xi} = ika\frac{\partial\varphi}{\partial n}$; и поэтому в уравнении движения диска реакция воздуха представляется силой трения

$$a\sigma\cdot\pi R^2\cdot\dot{\xi}\left(1 - \frac{J_1(2kR)}{kR}\right),$$

замедляющей движение, и приростом инерции, равным $\frac{\pi\sigma}{2k^3} K_1(2kR)$.

Если kR мало, то мы имеем из ряда (5) § 200 для J_1, расположенного по возрастающим степеням,

$$1 - \frac{J_1(2kR)}{kR} = \frac{k^2R^2}{1\cdot 2} - \frac{k^4R^4}{1\cdot 2^2\cdot 3} + \frac{k^6R^6}{1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4} - \frac{k^8R^8}{1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5} + \ldots, \tag{11}$$

так что член, соответствующий трению, равен приблизительно

$$\frac{1}{2} a\sigma\pi R^2 k^2 R^2 \dot{\xi}. \tag{12}$$

В силу самой природы задачи коэфициент при $\dot{\xi}$ должен быть положительным, иначе реакция воздуха, вместо того чтобы уменьшить, стремилась бы увеличить скорость. То, что $J_1(z)$ действительно всегда меньше, чем $\frac{1}{2}z$, можно проверить следующим образом. Если θ лежит между 0 и π, а z положительно, то $\sin(z\sin\theta) - z\sin\theta$ отрицательно, и поэтому

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \{\sin(z\sin\theta) - z\sin\theta\}\sin\theta\, d\theta$$

также отрицательно. Но этот интеграл равен $J_1(z) - \frac{1}{2}z$, а следо-

вательно, и эта разность отрицательна для всех положительных значений z.

Когда kR велико, $J_1(2kR)$ стремится к нулю, и тогда член, выражающий трение, становится равным просто $a\sigma\pi R^2\dot{\xi}$. Этого результата можно было бы ожидать; действительно, если kR очень велико, волновое движение в соседстве с диском становится приблизительно плоским. Мы имеем тогда, согласно (6) и (8) § 245, $dp = a\rho_0\dot{\xi}$, где ρ_0 плотность (σ), так что задерживающая сила есть $\pi R^2\delta p = a\sigma\pi R^2\cdot\dot{\xi}$.

Мы должны теперь рассмотреть член, представляющий изменение инерции, и наряду с прочим доказать, что это изменение является увеличением, т. е. что $K_1(z)$ положительно. В результате непосредственного интегрирования ряда (5) для K (который всегда сходится), имеем

$$K_1(z) = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{z^3}{1^2.3} - \frac{z^5}{1^2.3^2.5} + \frac{z^7}{1^2.3^2.5^2.7} - \dots\right\}. \qquad (13)$$

Поэтому, когда kR мало, мы можем написать в качестве выражения для прироста инерции

$$\frac{8\sigma R^3}{3} = \sigma\pi R^2\frac{8R}{3\pi}. \qquad (14)$$

Эту часть реакции воздуха можно поэтому представить, предположив, что колеблющаяся пластинка несет с собой массу воздуха, равную заключенной в цилиндре, основанием которого служит пластинка, а высота равна $8R/3\pi$, так что, если пластинка достаточно мала, присоединяемая масса не зависит от периода колебания.

Рассматривая ряд (5) для $K(z)$, можно доказать непосредственно, что

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\right)K(z) = \frac{2}{\pi z} - K(z), \qquad (15)$$

или

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz} + 1\right)K(z) = \frac{2}{\pi z}. \qquad (16)$$

Из первой формы (15) следует, что

$$K_1(z) = \int_0^z K(z)\,z\,dz = \frac{2}{\pi}z - z\frac{dK(z)}{dz}. \qquad (17)$$

С помощью этого выражения для $K_1(z)$ легко доказать, что функция всегда положительна. Действительно,

$$\frac{dK(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(z\sin\theta)\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(z\sin\theta)\sin\theta\,d\theta; \qquad (18)$$

так что

$$K_1(z) = \frac{2z}{\pi}\left\{1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\theta)\sin\theta\, d\theta\right\} =$$

$$= \frac{4z}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\left(\frac{1}{2}z\sin\theta\right)\sin\theta\, d\theta \qquad (19)$$

— интеграл, каждый элемент которого положителен. Когда z очень велико, $\cos(z\sin\theta)$ колеблется с очень большой скоростью, и, таким образом, $K_1(z)$ стремится к форме

$$K_1(z) = \frac{2}{\pi}\cdot z. \qquad (20)$$

Если z велико, ряд, расположенный по возрастающим степеням, для K и K_1, хотя всегда в конце концов и сходящийся, становится бесполезным для практического вычисления, и тогда необходимо обратиться к другим приемам. Заметим, что диференциальное уравнение (16), удовлетворяемое K, то же самое, какому принадлежит и функция Бесселя J_0, за исключением члена в правой части, именно $2/\pi z$. Функция K входит поэтому в форму, которая получается, если к общему решению уравнения Бесселя, содержащему две произвольные постоянные, прибавить какое-либо частное решение (16). Таким частным решением является

$$\frac{1}{2}\pi\cdot K(z) = z^{-1} - z^{-3} + 1^2\cdot 3^2\cdot z^{-5} - 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot z^{-7} + \\ + 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot z^{-9} - \ldots, \qquad (21)$$

как это легко проверить подстановкой. Ряд в правой части (21), несмотря на то, что он в конце концов расходится, может быть с успехом использован для вычисления, когда z велико. Действительно, он является аналитическим эквивалентом $\int_0^\infty e^{-\beta}(z^2+\beta^2)^{-\frac{1}{2}}d\beta$, и мы можем положить

$$K(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\beta}d\beta}{\sqrt{z^2+\beta^2}} + \text{дополнительная функция},$$

определяя две произвольные постоянные путем исследования форм, принимаемых, когда z очень велико. Но, может быть, проще следовать методу, каким пользовался в случае бесселевых функций Липшиц [1]).

---

[1]) Lipschitz, *Crelle*, том LVI, 1859; Lömmel, *Studien über die Besselschen Funktionen*, стр. 59.

Согласно (4), мы имеем

$$J_0(z) - iK(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-iz\cos\theta}d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-izv}dv}{\sqrt{1-v^2}}. \qquad (22)$$

Рассмотрим интеграл $\int \frac{e^{-zw}dw}{\sqrt{1+w^2}}$, где w — комплексное переменное вида $u+iv$. Рассматривая, как обычно, одновременные пары значений u и v, как координаты точки, мы видим, что интеграл равен нулю, если интегрирование по w распространено по контуру прямоугольника, вершинами которого являются соответственно 0, h, $h+i$, i, где h — некоторая действительная положительная величина. Таким образом,

$$\int_0^h \frac{e^{-zu}du}{\sqrt{1+u^2}} + \int_0^i \frac{e^{-z(h+iv)}d(iv)}{\sqrt{1+(h+iv)^2}} + \int_h^0 \frac{e^{-z(u+i)}du}{\sqrt{1+(u+i)^2}} + \int_i^0 \frac{e^{-izv}d(iv)}{\sqrt{1-v^2}} = 0,$$

откуда, если мы предположим, что $h=\infty$,

$$\int_0^1 \frac{e^{-izv}dv}{\sqrt{1-v^2}} = -i\int_0^\infty \frac{e^{-zu}du}{\sqrt{1+u^2}} + i\int_0^\infty \frac{e^{-z(u+i)}du}{\sqrt{1+(u+i)^2}}. \qquad (23)$$

Заменяя uz через β, мы можем написать (23) в форме

$$\int_0^1 \frac{e^{-izv}dv}{\sqrt{1-v^2}} = -i\int_0^\infty \frac{e^{-\beta}d\beta}{z\sqrt{1+\frac{\beta^2}{z^2}}} + \frac{e^{-i\left(z-\frac{1}{4}\pi\right)}}{\sqrt{2z}}\int_0^\infty \frac{e^{-\beta}\beta^{-\frac{1}{2}}d\beta}{\sqrt{1-\frac{i\beta}{2z}}}. \qquad (24)$$

Первый член в правой части (24) — целиком мнимый; согласно (22), поэтому $\frac{1}{2}\pi\cdot J_0(z)$ является действительной частью второго члена. Развертывая бином под знаком интеграла и затем интегрируя по формуле

$$\int_0^\infty e^{-\beta}\beta^{q-\frac{1}{2}}d\beta = \Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right),$$

мы получаем разложение $J_0(z)$ по отрицательным степеням z в виде

$$J_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{1 - \frac{1^2\cdot 3^2}{1\cdot 2\cdot (8z)^2} + \ldots\right\}\cos\left(z-\frac{1}{4}\pi\right) + \\ + \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\frac{1^2}{1\cdot 8z} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot (8z)^3} + \ldots\right\}\sin\left(z-\frac{1}{4}\pi\right). \qquad (25)$$

Обрывая разложение при любом желаемом числе членов и образуя выражение для остатка, можно доказать, что ошибка, какую совер-

шают, когда пренебрегают остаточным членом, не может превосходить последнего из удерживаемых членов (§ 200).

Аналогичным образом, мнимая часть правой части (24) эквивалент на $-\frac{1}{2}i\pi K(z)$, так что

$$K(z)=\frac{2}{\pi}\left\{z^{-1}-z^{-3}+1^2\cdot3^2\cdot z^{-5}-1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot z^{-7}+\ldots\right\}+$$
$$+\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{1-\frac{1^2\cdot3^2}{1\cdot2\cdot(8z)^2}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot(8z)^4}-\ldots\right\}\sin\left(z-\frac{1}{4}\pi\right)-$$
$$-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\frac{1^2}{1\cdot8z}-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{1\cdot2\cdot3\cdot(8z)^3}+\ldots\right\}\cos\left(z-\frac{1}{4}\pi\right)\ldots \quad (26)$$

Значение $K_1(z)$ можно теперь определить с помощью (17). Мы находим

$$\frac{dK}{dz}=-\frac{2}{\pi}\left\{z^{-2}-3\cdot z^{-4}+1^2\cdot3^2\cdot5\cdot z^{-6}-1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7\cdot z^{-8}+\ldots\right\}+$$
$$+\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{1}{4}\pi\right)\left\{1+\frac{3\cdot5\cdot1}{1\cdot2\cdot(8z)^2}-\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot1\cdot3\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot(8z)^4}+\ldots\right\}-$$
$$-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{1}{4}\pi\right)\left\{\frac{3}{1\cdot(8z)}-\frac{3\cdot5\cdot7\cdot1\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot(8z)^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot1\cdot3\cdot5\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot(8z)^5}-\ldots\right\}. \quad (27)$$

Окончательно выражение для $K_1(z)$ можно представить в форме

$$K_1(z)=\frac{2}{\pi}\left\{z+z^{-1}-3\cdot z^{-3}+1^2\cdot3^2\cdot5\cdot z^{-5}-1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7\cdot z^{-7}+\right.$$
$$\left.+\ldots\right\}-\sqrt{\frac{2z}{\pi}}\cdot\cos\left(z-\frac{1}{4}\pi\right)\left\{1-\frac{(1^2-4)(3^2-4)}{1\cdot2\cdot(8z)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(1^2-4)(3^2-4)(5^2-4)(7^2-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot(8z)^4}-\ldots\right\}-$$
$$-\sqrt{\frac{2z}{\pi}}\cdot\sin\left(z-\frac{1}{4}\pi\right)\left\{\frac{1^2-4}{1\cdot8z}-\right.$$
$$\left.-\frac{(1^2-4)(3^2-4)(5^2-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot(8z)^3}+\ldots\right\}^{1}). \quad (28)$$

Тогда очевидно, что K_1 не обращается в нуль, когда z велико, но приближается к $2z/\pi$. Но хотя прирост инерции, который пропорционален K_1, становится бесконечно большим вместе с R, он в конце концов исчезает, в сравнении с площадью диска и с другим членом, который представляет диссипацию. Это согласуется с тем, что можно было бы предвидеть из теории плоских волн.

Если, независимо от реакции воздуха, масса пластинки равна M, и восстанавливающая сила $\mu\xi$, то уравнение движения пластинки, на

[1]) Как и следовало ожидать, ряды внутри скобок те же самые, какие встречаются в выражении функции $J_1(z)$.

которую действует внешняя сила F, пропорциональная e^{ikat}, имеет вид

$$\left\{M+\frac{\pi\sigma}{2k^3}K_1(2kR)\right\}\ddot{\xi}+a\sigma\pi R^2\left(1-\frac{J_1(2kR)}{kR}\right)\dot{\xi}+\mu\xi=F, \quad (29)$$

или, согласно (13), если, как это будет обычно в практических приложениях, kR мало:

$$\left(M+\frac{8\sigma R^3}{3}\right)\ddot{\xi}+\frac{a\sigma\pi k^2R^4}{2}\dot{\xi}+\mu\xi=F. \quad (30)$$

Заслуживают быть отмеченными два частных случая этой задачи. Пусть, во-первых, M и μ равны нулю, так что на пластинку, саму по себе лишенную массы, не действуют никакие другие силы кроме F и тех, которые возникают вследствие воздушных давлений. Так как $\ddot{\xi}=ika\dot{\xi}$, то член, представляющий трение, относительно незначителен, и мы получаем, если kR очень мало,

$$a\sigma\pi R^2\cdot\frac{8kR}{3\pi}\dot{\xi}=-iF. \quad (31)$$

Пусть, далее, M и μ таковы, что собственный период пластинки, когда на нее действует только реакция воздуха, одинаков с периодом, приложенным к ней извне. При этих условиях

$$\left(M+\frac{8\sigma R^3}{3}\right)\ddot{\xi}+\mu\xi=0,$$

и поэтому

$$a\sigma\pi R^2\cdot\frac{k^2R^2}{2}\cdot\dot{\xi}=F. \quad (32)$$

Сравнивая с (31), мы видим, что амплитуда колебания в том случае, когда инерция воздуха уравновешивается, больше в отношении $16:3\pi kR$; это указывает на значительное увеличение, если kR мало. В первом случае фаза движения такова, что сила F совершает сравнительно очень небольшую работу, между тем как во втором случае инерция воздуха компенсируется упругостью, и тогда F, будучи в одинаковой фазе со скоростью, дает максимальное количество работы.

ГЛАВА XVI

ТЕОРИЯ РЕЗОНАТОРОВ

303. В случае трубы, закрытой с одного конца и открытой с другого, мы имели пример массы воздуха, способной колебаться с некоторыми определенными свойственными ей периодами при более или менее полной независимости от внешней атмосферы. Если бы воздух за открытым концом был совершенно лишен массы, то движение внутри трубы не имело бы тенденции уходить наружу, и заключенный в ней столб воздуха вел бы себя подобно всякой другой сложной системе, не подверженной диссипации. В действительном эксперименте инерцию внешнего воздуха устранить, конечно, нельзя, но когда диаметр трубы мал, возникающий эффект на протяжении нескольких периодов может быть незначительным, и тогда колебания, однажды возбужденные в трубе, обладают в известной степени постоянством. Чем уже канал, соединяющий внутренность сосуда с внешней средой, тем совершеннее осуществляется независимость. Такие полости образуют резонаторы; в присутствии какого-либо внешнего источника звука заключенный в полости воздух колеблется в унисон с ним и с амплитудой, зависящей от соотношения между величинами периодов собственного и вынужденного колебаний, достигающей большого значения в случае приблизительного изохронизма. Когда первоначальная причина звука перестает действовать, резонатор отдает назад накопленные внутри него колебания, становясь, таким образом, на короткое время вторичным источником. Теория резонаторов составляет важную отрасль нашего предмета.

В качестве введения в эту теорию мы можем взять простой случай закрытого с одного конца цилиндра, в котором движется без трения поршень. Предположим, что воздух с другой стороны поршня лишен инерции, так что давление абсолютно постоянно. Если теперь привести поршень в колебания с очень большим периодом, то ясно, что содержащийся в цилиндре воздух во всякий момент времени будет находиться с очень большим приближением в состоянии равновесия (одинаковая всюду плотность), соответствующем мгновенному положению поршня. Если масса поршня очень значительна сравнительно с массой заключенного в цилиндре воздуха, то собственные колебания, возникающие в результате смещения, будут происходить

почти так, как если бы воздух не имел инерции; при определении периода из кинетической и потенциальной энергий первую можно вычислять без учета инерции воздуха, вторую же так, как если бы разрежение и сжатие были равномерны. В рассматриваемых условиях воздух действует только как пружина в силу своего сопротивления сжатию или расширению; форма сосуда, в которой заключен воздух, поэтому несущественна, и период колебания остается одним и тем же, если не изменяется емкость.

Когда газ сжат или расширен, работа полученного смещения находится умножением каждого бесконечно малого увеличения объема на соответствующее давление и интегрированием по всей требуемой области. В настоящем случае действительно деятельной является, конечно, лишь разность давлений по обе стороны поршня, и для малого изменения она пропорциональна изменению объема. Полная работа этого малого изменения такова, как если бы расширению противодействовало всюду *среднее*, т. е. половина конечного, давление; таким образом, соответственно изменению объема от S до $S+\delta S$, поскольку $p=a^2\rho$,

$$V=p\,\frac{\delta S}{2S}\,\delta S=\frac{1}{2}\,\rho a^2\,\frac{(\delta S)^2}{S}\,^{1}). \tag{1}$$

Если A обозначает площадь поршня, M — его массу, а x — его линейное перемещение, то $\delta S=Ax$, и уравнение движения есть

$$M\ddot{x}+\frac{\rho a^2A^2}{S}\,x=0, \tag{2}$$

что указывает на колебания с периодом

$$\tau=\frac{2\pi}{aA\sqrt{\dfrac{\rho}{MS}}}. \tag{3}$$

Представим себе теперь содержащий воздух сосуд, внутренность которого сообщается с внешней атмосферой через узкое отверстие или горлышко. Нетрудно видеть, что эта система способна совершать колебания, аналогичные только что рассмотренным; при этом воздух в соседстве с отверстием занимает место поршня. При достаточном увеличении S период колебания можно сделать сколь угодно большим, и мы получаем в конце концов такое положение вещей, когда кинетической энергией можно пренебречь всюду за исключением пространства в соседстве с отверстием, а потенциальную энергию можно вычислять так, как если бы плотность внутри сосуда была всюду одинаковой. Протекая через отверстие под действием разности давлений с двух сторон или в силу своей собственной инерции, после того как такое давление перестало действовать, воздух движется приблизительно так, как это делала бы в аналогичных условиях несжимаемая жидкость, при условии, что размеры пространства,

[1]) Ср. (12) § 245.

где кинетическая энергия имеет заметное значение, очень малы сравнительно с длиной волны. Предположения, на основе которых мы намерены действовать, не являются, конечно, строго правильными в приложении к действительным резонаторам, какими пользуются в экспериментах, но они достаточны, чтобы дать наглядное представление о предмете и во многих случаях служить основанием для достаточно точного вычисления высоты. Они становятся строгими только в пределе, когда длина волны бесконечно велика в сравнении с размерами сосуда.

[Изложенные выше принципы позволяют сразу же вычислить высоту резонатора с объемом S, полость которого сообщается с внешним воздухом посредством длинного цилиндрического горлышка длины L и площади A. Масса воздушного поршня есть ρAL, так что (3) дает для периода колебания

$$\tau = \frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{LS}{A}}, \tag{4}$$

или, если λ — длина плоских волн той же самой высоты,

$$\lambda = a\tau = 2\pi\sqrt{\frac{LS}{A}}. \tag{5}$$

Если поперечное сечение горлышка есть круг радиуса R, то $A = \pi R^2$, и мы получаем формулу (8) § 307.]

304. Кинетическую энергию движения несжимаемой жидкости через данный канал можно выразить через плотность ρ и скорость переноса, или потока, $\dot{X}$, потому что при рассматриваемых условиях характер движения всегда один и тот же. Так как T необходимо меняется пропорционально ρ и $\dot{X}^2$, то мы можем положить

$$T = \frac{1}{2}\rho\frac{\dot{X}^2}{c}, \tag{1}$$

где постоянная c, которая зависит только от природы канала, есть линейная величина, как это можно заключить из того факта, что размерность X относительно пространства есть 3 и относительно времени — 1. В самом деле, если φ потенциал скорости, то в силу теоремы Грина

$$T = \frac{1}{2}\rho\iiint\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\rho\iint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS,$$

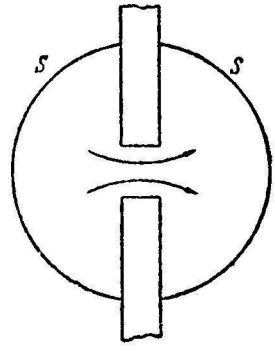
причем интегрирование должно быть распространено по поверхности, включающей всю область, в которой скорость имеет заметную величину. На достаточном расстоянии по обе стороны от отверстия φ становится постоянным; если обозначить эти постоянные значения через φ_1 и φ_2 и ограничить теперь интегрирование той половиной S, в направлении к которой течет жидкость, то мы имеем

$$T = \frac{1}{2}\rho(\varphi_1 - \varphi_2)\iint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS = \frac{1}{2}\rho(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{X}.$$

Но, так как φ внутри S определяется линейно своими значениями на поверхности, интеграл $\int\int \frac{d\varphi}{dn} dS$, или X, пропорционален $(\varphi_1 - \varphi_2)$. Если мы положим $\dot{X} = c(\varphi_1 - \varphi_2)$, то получим, как прежде,

$$T = \frac{1}{2}\rho \dot{X}^2/c.$$

Природу постоянной c понять легче всего, рассматривая электрическую задачу, условия которой математически тождественны с условиями рассматриваемой. Предположим, что жидкость заменена одинаково повсюду проводящим веществом, граница же канала или отверстия — непроводниками. Мы знаем, что, если с помощью батарей или каким-нибудь другим путем на обеих сторонах поддерживается разность электрических потенциалов, то через отверстие будет протекать постоянный электрический ток пропорциональной величины. Отношение полного тока к электродвижущей силе называется *проводимостью* канала; таким образом, мы видим, что наша постоянная c представляет просто эту проводимость, если принять, что удельная проводимость гипотетического вещества равна единице. То же самое можно выразить иначе, сказав, что c есть сторона куба, сопротивление которого между противоположными гранями одинаково с сопротивлением канала. В дальнейшем мы часто будем пользоваться электрической аналогией.



Фиг. 58.

Если c известно, собственный тон резонатора легко найти. Так как

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\rho a^2 \frac{X^2}{S} \\ \text{и} \qquad T &= \frac{1}{2}\rho \frac{\dot{X}^2}{c}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

то уравнение движения есть

$$\ddot{X} + \frac{a^2 c}{S} X = 0, \tag{3}$$

что указывает на простые колебания с периодом

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{S}{a^2 c}}. \tag{4}$$

Если N — частота, или число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, то

$$N = \frac{a}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{S}}. \tag{5}$$

Длина волны λ, которая является величиной, наиболее тесно связанной с размерами полости, дается уравнением

$$\lambda = \frac{a}{N} = 2\pi \sqrt{\frac{S}{c}} \tag{6}$$

и изменяется обратно пропорционально линейному размеру. Следует заметить, что длина волны является функцией только размера и формы резонатора, между тем как частота зависит также и от природы газа; важно отметить, что высота зависит от природы газа, находящегося внутри канала и вблизи него, но не от природы газа, занимающего внутренность сосуда, так как инерция в последнем положении не играет роли, а сжимаемость всех газов приблизительно одинакова. Таким образом, в случае трубы замена водорода воздухом в соседстве с узлом вызвала бы лишь малое изменение, но ее эффект в соседстве с пучностью был бы значительным.

До сих пор мы говорили об одном соединительном канале, но если имеется несколько каналов, то существенного изменения задача не претерпевает. Та же формула для частоты еще приложима, если мы, как прежде, понимаем под c полную проводимость между внутренностью сосуда и внешним пространством. Если каналы расположены достаточно далеко друг от друга, чтобы действовать независимо, результирующая проводимость есть простая сумма проводимостей, принадлежащих отдельным каналам; в иных условиях результирующая меньше, чем вычисляемая путем простого сложения.

Если имеются два совершенно одинаковых канала, которые не взаимодействуют друг с другом и проводимость каждого из которых в отдельности есть c, то мы имеем

$$N = \sqrt{2} \cdot \frac{a}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{S}} \tag{7}$$

— уравнение, показывающее, что нота выше, чем в случае только одного канала, в отношении $\sqrt{2} : 1$, т. е. на интервал, значительно меньший квинты, — закон, наблюденный Зондхаусом и доказанный теоретически Гельмгольцем для случая, когда соединительные каналы представляют собой простые отверстия в бесконечно тонких стенках резервуара.

305. Исследование проводимости для каналов различного рода является важной частью теории резонаторов; однако, точное решение задачи во всех случаях — исключение составляют лишь очень немногие — недоступно современной математике. Можно, впрочем, изложить некоторые общие принципы, проливающие свет на вопрос; во многих же интересных случаях можно получить приближенное решение, достаточное для практических целей.

Мы знаем (§§ 79, 242), что энергия жидкости, протекающей через канал, не может быть больше энергии любого воображаемого движения, дающего тот же самый общий поток. Отсюда, если поток каким-нибудь путем сузить или ввести какое-нибудь препятствие, то

проводимость в результате этого уменьшится, так как введенное изменение эквивалентно дополнительной связи. Перед изменением жидкость была свободна принять то распределение течения, которое имеет место в конечном счете. В тех случаях, когда точное решение получить нельзя, мы можем воспользоваться свойством минимума, чтобы оценить нижний предел проводимости; энергия, вычисленная из гипотетического закона течения, никогда не может быть меньше истинной и должна превосходить ее, если только гипотетическое и истинное движения не совпадают.

Другой общий принцип, который часто бывает полезен, удобнее высказать на языке теории электричества. Величина, с которой мы имеем дело, есть проводимость некоторого проводника, состоящего из вещества с единичной удельной проводимостью. Принцип состоит в том, что если проводимость какой-либо части проводника возрастает, то возрастает и проводимость всего целого, если же проводимость какой-либо части уменьшается, то уменьшается и проводимость целого; исключение могут составлять лишь несколько весьма специальных случаев, где изменение не имеет места. При прохождении через проводник электричество само́ распределяется таким образом, что энергия диссипации для данного полного тока является наименьшей из возможных (§ 82). Если бы теперь удельное сопротивление какой-либо части было уменьшено, то полная диссипация была бы меньше, чем прежде, даже если бы распределение токов осталось неизменным. A fortiori это будет иметь место, когда токи перераспределяются так, чтобы сделать диссипацию минимальной. Если бесконечно тонкая пластина вещества, натянутая поперек канала, сделана идеально проводящей, то сопротивление целого уменьшится, если только она не совпадает с одной из невозмущенных эквипотенциальных поверхностей. В последнем исключительном случае это не даст никакого эффекта.

306. Среди каналов различного вида важное место должно быть отведено таким, которые состоят из простых отверстий в неограниченных плоских стенках бесконечно малой толщины. В практических приложениях достаточно, чтобы стенка была очень тонкой сравнительно с размерами отверстия и приблизительно плоской на расстояниях от отверстия, больших сравнительно с теми же размерами.

За счет симметрии по обе стороны от стенки движение жидкости в плоскости отверстия должно быть нормальным, и поэтому потенциал скорости постоянным; на остальной части плоскости движение должно быть исключительно тангенциальным, так что для определения φ на одной стороне плоскости мы имеем условия (I) $\varphi = \text{const}$ на площади отверстия, (II) $d\varphi/dn = 0$ на всей остальной части плоскости стенки, (III) $\varphi = \text{const}$ в бесконечности.

Так как для нас интересны только изменения φ, то мы можем предположить, что φ в бесконечности исчезает. Мы увидим, что

условия (II) и (III) удовлетворяются, если предположить, что φ есть потенциал притягивающего вещества, распределенного по площади отверстия; остальная часть проблемы заключается в нахождении такого распределения вещества, чтобы его потенциал мог быть постоянным на той же самой площади. С математической стороны эта задача одинакова с задачей нахождения распределения электричества на заряженной проводящей пластине, расположенной в открытом пространстве и имеющей форму рассматриваемого отверстия; проводимость отверстия можно выразить через *емкость* пластины в статической проблеме. Если φ_1 обозначает постоянный потенциал в отверстии, то электрическое сопротивление (для одной стороны) будет

$$\frac{\varphi_1}{\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma},$$

где интегрирование распространено по площади отверстия.

Но $\int\int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma = 2\pi \times$ (полное количество распределенного вещества), и, таким образом, если M — емкость, или заряд, соответствующий единичному потенциалу, то полное сопротивление есть $(\pi M)^{-1}$. Соответственно этому для проводимости, которая является величиной, обратной сопротивлению, —

$$c = \pi M. \tag{1}$$

Насколько мне известно, эллипс — единственная форма отверстия, для которой c или M можно определить теоретически [1]); в этом случае результат содержится в известном решении проблемы нахождения распределения заряда на проводящем эллипсоиде. Из того факта, что оболочка, ограниченная двумя концентрическими подобными и подобно расположенными эллипсоидами, не производит никакого воздействия на частицу, расположенную внутри ее, легко видеть, что поверхностная плотность в любой точке эллипсоида, необходимая для того, чтобы давать постоянный потенциал, пропорциональна длине перпендикуляра p, опущенного из центра на касательную плоскость в рассматриваемой точке. Таким образом, если ρ — плотность, то $\rho = \varkappa p$; общее количество вещества Q дается выражением

$$Q = \iint \rho\, dS = \varkappa \iint p\, dS = 4\pi\varkappa abc \text{ [2])}, \tag{2}$$

так что

$$\rho = \frac{Qp}{4\pi abc}. \tag{3}$$

---

[1]) Случай резонатора с эллиптическим отверстием был рассмотрен Гельмгольцем (*Crelle*, том 57, 1860), результат которого эквивалентен (8).

[2]) $2c$ обозначает здесь третью главную ось эллипсоида.

В обычном обозначении

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

или, так как $z^2/c^2 = 1 - x^2/a^2 - y^2/b^2$,

$$p = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2x^2}{a^4} + \frac{c^2y^2}{b^4}}}.$$

Если мы теперь предположим, что c бесконечно мало, мы получим частный случай эллиптической пластинки, а если мы больше не различаем две поверхности, то получаем:

$$\rho = \frac{Q}{2\pi ab\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}. \tag{4}$$

Мы должны теперь найти значение постоянного потенциала P. Рассматривая значение P в центре пластинки, мы видим, что

$$P = \iint \frac{\rho\, dS}{r} = \iint \rho\, dr\, d\theta.$$

Интегрируя сначала по r, мы имеем:

$$\int_0^r \rho\, dr = \frac{Q}{4a\sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}},$$

где e — эксцентриситет; таким образом,

$$P = \frac{Q}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}} = \frac{Q}{a}F(e),$$

где F символ полной эллиптической функции первого рода. Полагая $P = 1$, мы находим

$$\frac{c}{\pi} = M = \frac{a}{F(e)}. \tag{5}$$

Это — окончательное выражение для емкости эллипса, главная полуось которого a и эксцентриситет e. В частном случае круга, $e = 0$, $F(e) = \frac{1}{2}\pi$ и, таким образом, для круга радиуса R

$$c = 2R. \tag{6}$$

Если емкость резонатора есть S, то из (6) § 304 мы находим

$$\lambda = \pi\sqrt{\frac{2S}{R}}. \tag{7}$$

Площадь σ эллипса дается выражением

$$\sigma = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2},$$

отсюда, выражая c через σ,

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \cdot \frac{2F(e)(1-e^2)^{1/4}}{\pi}. \tag{8}$$

Если e мало, мы получаем, разлагая по степеням e перед интегрированием:

$$F(e) = \frac{1}{2}\pi\left\{1 + \frac{1^2}{2^2}e^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2}e^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}e^6 + \ldots\right\}, \tag{9}$$

откуда

$$\frac{2F(e)(1-e^2)^{1/4}}{\pi} = 1 - \frac{e^4}{64} - \frac{e^6}{64} + \ldots$$

Пренебрегая e^8 и более высокими степенями, мы имеем поэтому

$$c = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \cdot \left(1 + \frac{e^4}{64} + \frac{e^6}{64} + \ldots\right). \tag{10}$$

Этот результат показывает нам, что проводимость эллиптического отверстия почти одинакова с проводимостью круглого отверстия *равной площади*. Среди отверстий различной формы данной площади должно иметься одно с минимальной проводимостью, и хотя формальное доказательство и представляет затруднения, легко понять, что таким отверстием может быть только круг. Нижний предел для значения c дается, таким образом, проводимостью круга равной площади, т. е. $2\sqrt{\sigma/\pi}$, и когда действительная форма очень близка к кругу, то этот предел можно взять в качестве хорошего приближения к действительному значению.

Значение λ дается тогда выражением

$$\lambda = 2^{1/2}\pi^{3/4}\sigma^{-1/4}S^{1/2}. \tag{11}$$

Чтобы показать, как незначительно влияет умеренный эксцентриситет на значение c, я вычислил с помощью таблиц Лежандра для $F(e)$ следующую короткую таблицу.

ψ	$e = \sin\psi$	$b/a = \cos\psi$	$\pi/2\,F(e)(1-e^2)^{1/4}$
0°	0,00000	1,00000	1,0000
20°	0,34204	0,93969	1,0002
30°	0,50000	0,86603	1,0013
40°	0,64279	0,76604	1,0044
50°	0,76604	0,64279	1,0122
60°	0,86603	0,50000	1,0301
70°	0,93969	0,34202	1,0724
80°	0,98481	0,17365	1,1954
90°	1,00000	0,00000	∞

Полагая $e = \sin\psi$, мы получим отношение осей, равное $\cos\psi$, и проводимость

$$c = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{\cos\psi \cdot F(\sin\psi)}}.$$

Значения последнего множителя, данные в четвертом столбце, представляют собой отношения проводимости эллипса к *проводимости круга равной площади*. Можно видеть, что даже при эксцентриситете эллипса, соответствующем отношению осей 2 : 1, увеличение проводимости составляет всего около 3%, что соответствовало бы изменению высоты резонатора немного более, чем на комму (§ 18). Повидимому нет никаких оснований предполагать, что эта приблизительная независимость от формы есть специфическое свойство эллипса, и мы вправе с некоторой степенью уверенности заключить, что в случае умеренно удлиненного овального отверстия проводимость со значительной степенью точности можно вычислить по одной лишь площади.

Если площадь задана, то верхнего предела c не существует. Действительно, предположим, что площадь σ разделена на n равных кругов, достаточно удаленных друг от друга, чтобы действовать независимо. Площадь каждого круга есть σ/n, а его проводимость $2(n\pi)^{-1/2}\sigma^{1/2}$. Общая проводимость в n раз больше и поэтому возрастает беспредельно вместе с n. Как общее правило, чем больше удлинено или распространено отверстие, тем больше будет проводимость для данной площади.

Чтобы найти верхний предел проводимости данного отверстия, мы можем воспользоваться тем положением, что всякое увеличение отверстия должно сопровождаться увеличением значения c. Так, в случае квадрата мы можем быть уверены, что c меньше, чем для описанного круга, и мы уже видели, что оно больше, чем для круга равной площади. Если b — сторона квадрата, то

$$\frac{2b}{\sqrt{\pi}} < c < \sqrt{2}b.$$

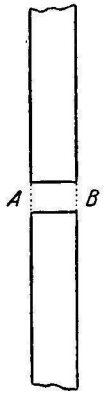
Тоны резонатора с квадратным отверстием, вычисленные из этих двух пределов, отличались бы друг от друга приблизительно на целый тон; более низкий из них был бы несомненно много ближе к истинному. Этот пример показывает, что даже тогда, когда анализ не может дать решения в строго математическом смысле этого слова, мы все же не должны оставаться в полном неведении относительно порядка величин, с которыми имеем дело.

В случае подобных отверстий, или систем отверстий, c изменяется прямо пропорционально линейным размерам.

307. Большинство резонаторов, применяемых на практике, имеет большей или меньшей длины горло, но даже когда нет ничего, что можно было бы назвать горлом, нельзя каждый раз пренебрегать толщиной стенки резервуара. Мы исследуем поэтому проводимость

канала, просверленного в преграждающей пластине, ограниченной параллельными плоскостями, и хотя мы не можем решить проблему строго, мы получим сведения, достаточные для практических целей. Толщину пластины мы обозначим через L, радиус цилиндрического канала через R.

Каково бы ни было сопротивление канала, оно уменьшится, если ввести в A и B бесконечно тонкие диски идеальной проводимости (фиг. 59). Эффект этих дисков тот, что они образуют постоянный потенциал на своих площадях, и задача видоизменяется так, что становится доступной строгому решению. Вне A и B движение одинаково с исследованным ранее, когда преграждающая пластина бесконечно тонкая; между A и B поток равномерный. Поэтому в целом сопротивление равно



Фиг. 59.

$$\frac{1}{2R}+\frac{L}{\pi R^2},$$

откуда

$$c=\frac{\pi R^2}{L+\frac{1}{2}\pi R}. \tag{1}$$

Если через a обозначить поправку, которую нужно прибавить к L, чтобы учесть открытый конец, то

$$a=\frac{1}{4}\pi R. \tag{2}$$

Эта поправка, вообще говоря, незначительна, но если L очень мало в сравнении с R, предполагаемое движение все ближе и ближе совпадает с действительным, и, таким образом, значение a (2) стремится сделаться правильным.

Верхний предел для сопротивления можно вычислить из гипотетического движения жидкости. Для этой цели мы предположим, что в A и B введены бесконечно тонкие поршни; результатом этого явится то, что нормальная скорость будет в этих местах постоянной. Внутри трубы поток будет, как и прежде, равномерным, но для внешнего пространства мы должны будем рассматривать новую задачу: определить движение жидкости, ограниченной бесконечной плоскостью, когда нормальная скорость на некоторой круговой площади плоскости имеет постоянное значение, а на остальной части плоскости равна нулю.

Потенциал все еще может рассматриваться как обусловленный веществом, распределенным по диску, но он больше уже не постоянен на площади; *плотность* же вещества, будучи пропорциональной $d\varphi/dn$, постоянна.

Кинетическая энергия движения равна

$$\frac{1}{2}\iint \varphi\frac{d\varphi}{dn}\,d\sigma=\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dn}\iint\varphi\,d\sigma,$$

где интегрирование распространено по площади круга.

Полный поток через плоскость равен

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma = \pi R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial n}.$$

Отсюда

$$\frac{2 \text{ кинетическая энергия}}{(\text{поток})^2} = \frac{\iint \varphi\, d\sigma}{\pi^2 R^4 \frac{\partial \varphi}{\partial n}}.$$

Если принять плотность вещества за единицу, то $\partial\varphi/\partial n = 2\pi$ и требуемое отношение выразится через $P/\pi^3 R^4$, где P обозначает потенциал на самого себя кругового слоя радиуса R вещества с единичной плотностью.

Простейший метод вычисления P связан с тем соображением, что P представляет собой работу, необходимую для разложения диска на бесконечно малые элементы, и удаление их на расстояния, исключающие взаимное влияние [1]). Если мы возьмем полярные координаты ρ, θ с полюсом на краю диска, радиус которого есть a, то получим для потенциала в полюсе $V = \int\int d\theta\, d\rho$, причем пределы для ρ есть 0 и $2a\cos\theta$, пределы для θ суть $-\frac{1}{2}\pi$ и $+\frac{1}{2}\pi$.

Таким образом,

$$V = 4a. \tag{3}$$

Вырежем теперь полоску ширины da по краю диска. Работа, необходимая для того, чтобы удалить ее на бесконечно большое расстояние, равна $2\pi a\, da \cdot 4a$. Если мы постепенно урежем диск до конца и удалим все части в бесконечность [2]), то найдем полную работу, интегрируя по a от 0 до R, в виде

$$P = \frac{8\pi R^3}{3}.$$

Пределом сопротивления (для одной стороны) является, таким образом, $8/3\pi^2 R$; мы заключаем, что сопротивление всего канала меньше, чем

$$\frac{L}{\pi R^2} + \frac{16}{3\pi^2 R}. \tag{4}$$

Сопоставляя наши результаты, мы видим, что

$$\frac{\pi}{4} R < a < \frac{8}{3\pi} R \tag{5}$$

или

$$\left.\begin{aligned} a &> 0{,}785R, \\ a &< 0{,}849R. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

---

[1]) Часть § 302 повторяется здесь в интересах тех, кто пожелал бы избегнуть трудностей более полного исследования.

[2]) Этот метод вычисления P был подсказан автору профессором К. Максвеллом.

Следует заметить, что α здесь обозначает поправку за один конец. Полное сопротивление соответствует длине $L+2\alpha$ трубы, имеющей сечение πR^2.

Если L очень велико сравнительно с R, мы можем положить просто

$$c=\frac{\pi R^2}{L}. \tag{7}$$

В этом случае мы имеем из (6) § 304

$$\lambda=\frac{2\sqrt{\pi}\sqrt{SL}}{R}. \tag{8}$$

Поправка на открытый конец α есть функция L, совпадающая с нижним пределом, именно $\frac{1}{4}\pi R$, когда L обращается в нуль. Когда L возрастает, α возрастает вместе с L, но никогда не достигает (даже, когда L бесконечно велико) верхнего предела $8R/3\pi$. Действительно, рассмотрим движение, происходящее на каком-либо среднем участке трубы. Кинетическая энергия больше, чем это соответствует только длине участка. Если поэтому удалить данный участок и соединить свободные концы так, чтобы движение в остальном продолжалось, как прежде, то кинетическая энергия уменьшится больше, чем это соответствует длине удаленного куска. A fortiori это будет справедливо для реального движения, которое существовало бы в укороченной трубе. То, что для $L=\infty$ α не становится равным $8R/3\pi$, очевидно потому, что нормальная скорость, далекая от постоянства, как было предположено при вычислении этого результата, должна возрастать от центра наружу и становиться бесконечно большой на краю.

Дальнейшее приближение к значению α можно получить, предположив переменную скорость в плоскости устья. Вычисление можно найти в Добавлении A. Очевидно, что в случае бесконечно длинной трубы α не может достигнуть значения $0{,}82422R$. Действительное значение α, вероятно, недалеко от $0{,}82R$.

308. Кроме цилиндра имеется очень немного форм канала, проводимость которых можно определить математически. Впрочем, когда форма приближенно цилиндрическая, мы можем вычислить граничные величины, полезные для нас, так как они позволяют оценить влияние таких отклонений от математической точности, которых следует ожидать на практике.

Нижний предел для сопротивления какого-либо удлиненного и приблизительно прямого проводника можно получить непосредственно, мысленно вводя бесконечно большое число плоских идеально проводящих слоев, перпендикулярных к оси. Если через σ обозначить площадь сечения в какой-нибудь точке x, то сопротивление участка между двумя слоями, отстоящими друг от друга на dx, равно $\sigma^{-1}dx$

и поэтому все действительное сопротивление, конечно, больше, чем

$$\int \sigma^{-1} dx, \tag{1}$$

если только проводник на самом деле не является цилиндрическим.

Чтобы найти верхний предел, мы можем вычислить кинетическую энергию потока на основе гипотезы, что скорость параллельно оси одинакова в пределах каждого сечения. Гипотетическое движение — то, которое возникло бы в результате введения бесконечно большого числа движущихся свободно твердых поршней; вычисленный результат необходимо превзойдет истинный, если только сечение не является постоянным. Мы предположим для простоты, что канал симметричен относительно оси, а в этом случае и движение жидкости, несомненно, также симметрично.

Если U обозначает полный поток, то мы имеем ex hypothesi для скорости на оси в какой-либо точке x

$$u = \sigma^{-1} U, \tag{2}$$

откуда можно определить с помощью уравнения непрерывности (6) § 238]

$$\frac{\partial (ru)}{\partial x} + \frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0$$

радиальную скорость v.

Таким образом,

$$rv = \text{const} - \frac{1}{2} U r^2 \frac{\partial \sigma^{-1}}{\partial x},$$

или, так как на оси нет никакого источника жидкости,

$$v = -\frac{1}{2} U r \frac{\partial \sigma^{-1}}{\partial x}. \tag{3}$$

Кинетическую энергию теперь можно вычислить простым интегрированием:

$$\int u^2 \sigma \, dx = U^2 \int \sigma^{-1} dx,$$

$$\iint v^2 2\pi r \, dr \, dx = \frac{\pi U^2}{8} \int y^4 \left(\frac{\partial \sigma^{-1}}{\partial x} \right)^2 dx,$$

где y — радиус канала в точке x, так что $\sigma = \pi y^2$.

Таким образом,

$$\frac{2 \text{ кинетическая энергия}}{(\text{поток})^2} = \int \frac{1}{\pi y^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} dx. \tag{4}$$

Это — величина, определяющая верхний предел для сопротивления. Первый член, соответствующий компоненте скорости u, одинаков с тем, какой был получен ранее для нижнего предела, как это и можно было предвидеть. Разность двух пределов, дающая максимальную ошибку, которая может вкрасться, если принять один из них за истинное значение, есть

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx. \tag{5}$$

В приблизительно цилиндрическом канале dy/dx есть малая величина, так что найденный этим путем результат является очень хорошим приближением. Не обязательно, чтобы сечение было почти постоянным, нужно лишь чтобы оно изменялось медленно. Успех приближения в этом и аналогичных случаях связан с тем фактом, что значение оцениваемой величины есть минимум. Всякое разумное приближение к действительному движению даст результат, очень близкий к истине, согласно принципам дифференциального исчисления.

На основании свойств потенциала и функции тока (§ 238) настоящая проблема допускает действительное приближенное решение. Если φ и ψ обозначают значения этих функций в какой-либо точке x, r, а u, v обозначают аксиальную и трансверсальную скорости, то

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{6}$$

откуда, после исключения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0. \tag{8}$$

Если F обозначает значение φ, как функции x, когда $r=0$, то общие значения φ и ψ можно выразить через F посредством (7) и (8) в форме рядов:

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=F-\frac{r^2F''}{2^2}+\frac{r^4F^{\mathrm{IV}}}{2^2\cdot4^2}-\frac{r^6F^{\mathrm{VI}}}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\cdots\\ \psi&=\frac{r^2F'}{2}-\frac{r^4F'''}{2^2\cdot4}+\frac{r^6F^{\mathrm{V}}}{2^2\cdot4^2\cdot6}-\frac{r^8F^{\mathrm{VII}}}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8}+\cdots,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где штрихи обозначают дифференцирование по x. На границе канала, где $r=y$, ψ — постоянно (скажем, ψ_1). Тогда

$$\psi_1=\frac{y^2F'}{2}-\frac{y^4F'''}{2^2\cdot4}+\frac{y^6F^{\mathrm{V}}}{2^2\cdot4^2\cdot6}-\cdots \tag{10}$$

— уравнение, связывающее y и F. В нашей задаче y задано, и мы должны выразить F через него. Последовательным приближением мы получаем из (10)

$$F'=\frac{2\psi_1}{y^2}+\frac{y^2}{8}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{2\psi_1}{y^2}\right)+\frac{1}{8}\frac{\partial^2}{\partial x^2}y^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{2\psi_1}{y^2}\right)\right\}-\\-\frac{y^4}{12\cdot4^2}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(\frac{2\psi_1}{y^2}\right). \tag{11}$$

Полный поток дается интегралом

$$\int_0^y\frac{\partial\varphi}{\partial x}2\pi r\,dr=\int_0^y\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}2\pi r dr=2\pi\psi_1,$$

и поэтому сопротивление между двумя эквипотенциальными поверх-

ностями представляется выражением

$$\frac{1}{2\pi\psi_1}\int F'dx.$$

Выражение для сопротивления допускает значительное упрощение путем интегрирования по частям в случае, когда канал в пределах интегрирования строго цилиндрический. Этим путем мы находим окончательный результат в виде

$$\text{сопротивление} = \int \frac{dx}{\pi y^2}\left\{1 + \frac{1}{2}y'^2 = \frac{(3y'^2 - yy'')^2}{48}\right\}, \quad (12)\,[1]$$

y' и y'' обозначают здесь производные y по x.

Таким образом, видно, что верхний предел в предыдущем исследовании является на самом деле правильным результатом до второго порядка приближения. Если мы рассматриваем y как функцию ωx, где ω — малая величина, то (12) правильно с точностью до членов, содержащих ω^4.

309. Знанием законов, которыми определяется высота резонаторов, мы обязаны трудам нескольких экспериментаторов и математиков.

Наблюдением, что при данном устье (мундштуке) высота резонатора зависит, главным образом, от объема, мы обязаны Лисковиусу, который нашел, что высота тона колбы, частично наполненной водой, не изменялась, когда ее наклоняли. Этот результат был подтвержден Зондхауссом [2]). Последний наблюдатель нашел далее, что в случае резонаторов без горла влияние отверстия зависело, главным образом, от его площади, хотя некоторое повышение тона и имело место, когда форма была очень удлиненной. Зондхаусс дал формулу

$$N = 52\,400\,\frac{\sigma^{1/4}}{S^{1/2}}, \quad (1)$$

в которой единицей длины является миллиметр.

Теорией резонаторов этого типа мы обязаны Гельмгольцу [3]), формула которого

$$N = \frac{a\sigma^{1/4}}{2^{1/2}\pi^{1/4}S^{1/2}} \quad (2)$$

приложима к круглым отверстиям.

Для колб с длинным горлом Зондхаусс [4]) нашел

$$N = 46\,705\,\frac{\sigma^{1/2}}{L^{1/2}S^{1/2}}, \quad (3)$$

---

[1]) *Proceedings of the London Mathematical Society*, том VII, стр. 70, 1876.

[2]) Sondhauss, „Ueber den Brummkreisel und das Schwingungsgesetz der kubischen Pfeifen", *Pogg. Ann.*, LXXXI, стр. 235, 347, 1850.

[3]) Helmholtz, *Crelle*, том LVII, стр. 1 — 72, 1860.

[4]) Sondhauss, „Über die Schallschwingungen der Luft in erhitzten Glasröhren und in gedeckten Pfeifen von ungleicher Weite", *Pogg. Ann.*, LXXIX, стр. 1, 1850.

что соответствует теоретической формуле

$$N=\frac{a}{2\pi}\frac{\sigma^{1/2}}{L^{1/2}S^{1/2}}. \qquad (4)$$

На практике не часто встречается, чтобы горло резонатора было настолько длинно, чтобы можно было пренебречь поправкой на открытые концы, как предполагает (4), или, напротив, настолько коротко, чтобы им можно было пренебречь, как было предположено в (2). Вертгейм [1]) был первым, кто показал, что влияние открытого конца можно представить прибавкой α к длине, независимой, или приблизительно независимой, от L и λ.

Приближенным теоретическим определением α мы обязаны Гельмгольцу, который дал величину $\frac{1}{4}\pi R$ в качестве поправки для открытого конца с бесконечным фланцем. Его метод заключался в отыскании форм трубы, для которых проблема была бы разрешима, и в выборе такой формы, которая была бы всего ближе к цилиндру. Поправка $\frac{1}{4}\pi R$ строго применима к трубе, радиус которой у открытого конца и на большом расстоянии от него есть R, но которая в соседстве с открытым концом незначительно расширяется.

Из того факта, что действительный цилиндр можно получить введением специального препятствия (obstruction), мы можем заключить, что результат, полученный таким путем, слишком мал.

Интересно, что прием, которому мы следуем в этом труде и который впервые был дан в мемуаре о резонансе, ведет в точности к такому же результату, хотя трудно представить себе два метода, более непохожие друг на друга.

Поправка на длину зависит до некоторой степени от того, задерживается поток воздуха от открытого конца или нет. Когда горло выдается в открытое пространство, торможение будет меньше, чем тогда, когда поток встречает фланец, как было предположено в наших приближенных вычислениях. Впрочем неточность, вводимая этим путем, не очень значительна, и мы можем вообще принять с хорошим приближением $\alpha=\frac{1}{4}\pi R$. На практике, когда горла короткие, гипотеза фланца довольно хорошо согласуется с фактами, а когда горла длинные, поправка сама по себе имеет подчиненное значение.

Общая формула имеет тогда вид

$$N=\frac{a}{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma}{S\left(L+\frac{1}{2}\sqrt{\pi\sigma}\right)}}, \qquad (5)$$

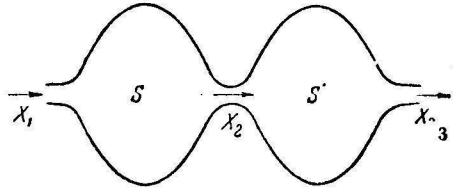
[1]) Wertheim, „Mémoire sur les vibrations sonores de l'air", *Ann. d. Chim.* (3) XXXI, стр. 385, 1851.

где σ — площадь поперечного сечения горла, или численно

$$N = \frac{a}{6{,}2832} \frac{\sigma^{1/2}}{S^{1/2}\sqrt{L + 0{,}8863\sqrt{\sigma}}}. \qquad (6)$$

Формула, лишь слегка отличающаяся от этой, была дана, как выражение результатов своих измерений, Зондхауссом [1]), который тогда же высказал убеждение, что она не является простой эмпирической интерполяционной формулой, но выражает закон природы. Теория резонаторов с шейкой была дана примерно в то же время [2]) в мемуаре „О резонансе", опубликованном в *Philosophical Transactions* за 1871, откуда взята большая часть материала нескольких последних страниц.

310. Простой метод вычисления высоты резонаторов, которым мы занимались, приложим только к наиболее низкому колебанию, характер которого совершенно особый. Обертоны резонаторов со сжатыми горлами относительно очень высоки, и соответствующие колебания ни в какой степени не являются независимыми от инерции воздуха внутри резервуара. Характер этих колебаний будет более очевиден, если мы рассмотрим колебания воздуха внутри совершенно замкнутого сосуда, такого, как сфера; однако, редко случается, чтобы высоту можно было вычислить теоретически. Имеются, впрочем, случаи многократного резонанса, к которым приложима наша теория. Они имеют место тогда, когда два или больше сосудов соединяются каналами друг с другом и с внешним воздухом; их легко трактовать методом Лагранжа, конечно, при условии, что длина волны колебания достаточно велика сравнительно с размерами сосуда.



Фиг. 60.

Предположим, что имеются два резервуара S и S', сообщающиеся друг с другом и с внешним воздухом с помощью узких каналов или шеек. Если бы мы стали рассматривать SS' как один резервуар и приложили к нему нашу предыдущую формулу, мы пришли бы к ошибочному результату, так как эта формула основывается на допущении, что инерцию воздуха внутри резервуара можно не учитывать; между тем очевидно, что энергия движения через соединительный канал может быть так же велика, как и энергия движения через два других канала. Однако, исследование по тому же самому общему плану, как и прежде, полностью разъясняет этот случай. Обозначая, соответственно, через X_1, X_2, X_3 полный перенос

[1]) Sondhauss, *Pogg. Ann.*, CXL, стр. 53, 219, 1870.
[2]) *Proceedings of the Royal Society*, ноябрь 24, 1870.

жидкости через каждый из трех каналов, мы имеем, подобно (2) § 304, для кинетической энергии выражение

$$T=\frac{1}{2}\rho\left\{\frac{\dot{X}_1^2}{c_1}+\frac{\dot{X}_2^2}{c_2}+\frac{\dot{X}_3^2}{c_3}\right\}, \tag{1}$$

а для потенциальной энергии — выражение

$$V=\frac{1}{2}\rho a^2\left\{\frac{(X_2-X_1)^2}{S}+\frac{(X_3-X_2)^2}{S'}\right\}. \tag{2}$$

Применение метода Лагранжа дает диференциальные уравнения движения в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{\ddot{X}_1}{c_1}+a^2\frac{X_1-X_2}{S}&=0,\\ \frac{\ddot{X}_2}{c_2}+a^2\left\{\frac{X_2-X_1}{S}+\frac{X_2-X_3}{S'}\right\}&=0,\\ \frac{\ddot{X}_3}{c_3}+a^2\frac{X_3-X_1}{S'}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

После сложения и интегрирования

$$\frac{X_1}{c_1}+\frac{X_2}{c_2}+\frac{X_3}{c_3}=0. \tag{4}$$

Отсюда после исключения X_2

$$\left.\begin{aligned}\ddot{X}_1+\frac{a^2}{S}\left\{(c_1+c_2)X_1+\frac{c_1c_2}{c_3}X_3\right\}&=0,\\ \ddot{X}_3+\frac{a^2}{S'}\left\{(c_3+c_2)X_3+\frac{c_3c_2}{c_1}X_1\right\}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Полагая $X_1=Ae^{pt}$ и $X_3=Be^{pt}$, мы получаем, после подстановки и определения отношения $A:B$,

$$p^4+p^2a^2\left\{\frac{c_1+c_2}{S}+\frac{c_3+c_2}{S'}\right\}+\frac{a^4}{SS'}\{c_1c_3+c_2(c_1+c_3)\}=0 \tag{6}$$

— уравнение для определения собственных тонов. Если N — частота колебания, $N^2=-p^2/4\pi^2$ и оба значения p^2 будут, конечно, действительными и отрицательными. Формула значительно упрощается, если $c_3=c_1$ и $S'=S$; однако, было бы поучительнее рассмотреть этот случай с самого начала. Пусть $c_1=c_3=mc_2=mc$.

Диференциальные уравнения принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\ddot{X}_1+\frac{a^2c}{S}\{(1+m)X_1+X_3\}&=0,\\ \ddot{X}_3+\frac{a^2c}{S}\{(1+m)X_3+X_1\}&=0,\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

между тем как из (4) $X_2=-\dfrac{X_1+X_3}{m}$.

Отсюда

$$\left.\begin{aligned}(\ddot{X}_1+\ddot{X}_3)+\frac{a^2c}{S}(m+2)(X_1+X_3)=0,\\(\ddot{X}_1-\ddot{X}_3)+\frac{a^2c}{S}m(X_1-X_3)=0.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

Все движение можно разделить на две части. Для первой из них

$$X_1+X_3=0,\tag{9}$$

для чего необходимо $X_2=0$. Движение поэтому такое же, какое могло бы иметь место, если бы сообщение между S и S' было прервано, и имеет частоту, даваемую выражением

$$N^2=\frac{a^2c_1}{4\pi^2S}=\frac{a^2mc}{4\pi^2S}.\tag{10}$$

Плотность воздуха одинакова в обоих резервуарах.

Для другой компоненты $X_1-X_3=0$, так что

$$X_2=-\frac{2X_1}{m};\quad N'^2=\frac{a^2(m+2)c}{4\pi^2S}.\tag{11}$$

Колебания, таким образом, противоположны по фазе. Отношение частот дается выражением $N'^2/N^2=(m+2)/m$; это показывает, что второе колебание имеет более короткий период. В этом колебании соединительный канал действует до некоторой степени как второе отверстие для обоих сосудов и таким образом повышает частоту. Если канал сжат, то интервал высоты между двумя нотами мал.

Частный случай общей формулы, заслуживающий быть отмеченным, мы получаем, полагая $c_3=0$. Это достигается устранением одного из сообщений с внешним воздухом. Мы получаем таким образом

$$p^4+a^2p^2\left(\frac{c_1+c_2}{S}+\frac{c_2}{S'}\right)+\frac{a^4c_1c_2}{SS'}=0,\tag{12}$$

или, если $S=S'$, $c_1=mc_2=mc$,

$$p^4+a^2p^2\frac{(m+2)c}{S}+\frac{a^4mc^2}{S^2}=0,\tag{13}$$

откуда

$$N^2=\frac{a^2c}{8\pi^2S}\left\{m+2\pm\sqrt{m^2+4}\right\}.\tag{14}$$

Если мы, далее, предположим, что $m=1$, или $c_2=c_1$, то

$$N^2=\frac{a^2c}{8\pi^2S}(3\pm\sqrt{5}),$$

и, таким образом,

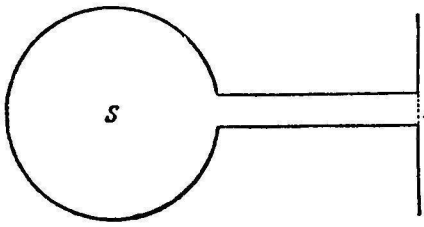
$$\frac{N_1^2}{N'^2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=2{,}618,$$

$$\frac{N'^2}{N_2^2}=\frac{2}{3-\sqrt{5}}=2{,}618.$$

Мы видим, что интервал от N_1 до N' одинаков с интервалом от N' до N_2 и равен $\sqrt{2{,}618} = 1{,}618$, т. е. несколько больше квинты. Можно видеть, что, каково бы ни было значение m, интервал между двумя тонами не может быть меньше 2,414, что равно примерно одной октаве и малой терции. Соответствующее значение m равно 2.

Аналогичный метод приложим к любой сколь угодно сложной комбинации резервуаров и соединительных каналов при единственном ограничении относительно размеров резервуаров и длин волн; только что приведенный пример достаточен, чтобы иллюстрировать теорию многократного резонанса. В уже упоминавшемся моем мемуаре о резонансе подробно разбирается несколько примеров измерения высоты тона двойных резонаторов.

311. Уравнения, которыми мы пользовались до сих пор, не учитывают ухода энергии из резонатора в пространство. Если бы перехода энергии между резонатором и внешней атмосферой действительно не было, то движение было бы изолированным и имело бы небольшой практический интерес; тем не менее характеристику резонатора составляют его колебания, являющиеся в значительной степени независимыми. Колебания, возбужденные однажды, будут продолжаться в течение значительного числа периодов без большой потери энергии, и их частота почти совсем не будет зависеть от скорости диссипации. Скорость диссипации является, однако, важной чертой в характере резонатора, от которой существенно зависит при некоторых условиях его поведение. Следует иметь в виду, что рассеяние, или диссипация, о которой мы говорим, означает только уход энергии из сосуда и из пространства вблизи него и ее рассеяние в окружающей среде, но не преобразование механической энергии в теплоту. Такое преобразование наши уравнения не учитывают, если только не будут введены специальные члены с целью представить эффект вязкости, теплопроводности и теплового излучения. [Влияние теплопроводности было рассмотрено Колачеком [1].]



Фиг. 61.

В предыдущей главе (§ 278) мы видели, как выражается движение по правую сторону безграничного фланца (фиг. 61) через нормальную скорость жидкости на диске A. Мы нашли, § 278 (3),

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int\int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\frac{e^{-ikr}}{r}\,d\sigma,$$

где φ пропорционально e^{int}.

[1]) Kolàček, *Wied. Ann.*, том XII, стр. 353, 1881.

Если r — расстояние между двумя точками диска, то kr — малая величина и $e^{-ikr} \simeq 1 - ikr$.

Таким образом,

$$\varphi_A = -\frac{1}{2\pi}\left(\int\int \frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{dz}{r} - ik\int\int \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dz\right). \qquad (1)$$

Первый член зависит от распределения потока. Если мы предположим, что $\partial\varphi/\partial n$ постоянно, мы получим в конечном счете член, представляющий увеличение инерции, или поправку за длину, равную $8R/3\pi$. Мы его уже рассматривали, когда предполагали, что в A находится поршень. Второй член, от которого зависит диссипация, не зависит от распределения потока, являясь функцией только полного потока $\dot{X}$. Ограничивая наше рассмотрение этим членом, мы можем написать

$$\varphi_A = \frac{ik\dot{X}}{2\pi}. \qquad (2)$$

Предполагая теперь, что φ пропорционально e^{int}, мы имеем для той части изменения давления в A, от которой зависит диссипация, соотношение

$$\delta p = -\rho\dot{\varphi}_A = -i\rho n\varphi_A = \frac{\rho n k\dot{X}}{2\pi} = \frac{\rho n^2\dot{X}}{2\pi a}. \qquad (3)$$

Соответствующая работа, совершенная при переносе количества жидкости δX, есть $\frac{\rho n^2\dot{X}}{2\pi a}\delta X$; а так как выражения для потенциальной и кинетической энергии имеют, как в § 304, вид

$$V = \frac{1}{2}\rho a^2\frac{X^2}{S}, \quad T = \frac{1}{2}\rho\frac{\dot{X}^2}{c}, \qquad (4)$$

то уравнением движения будет вместо (3) § 304 следующее:

$$\ddot{X} + \frac{n^2 c}{2\pi a}\dot{X} + \frac{a^2 c}{S}X = 0\ ^1). \qquad (5)$$

При оценке c необходимо учесть инерцию жидкости с правой стороны от A, соответственно члену, опущенному в выражении δp.

Уравнение (5) имеет обычную для свободных колебаний систем с диссипацией и одной степенью свободы (§ 45) форму. Амплитуда изменяется пропорционально $e^{-n^2 ct/4\pi a}$, уменьшаясь в отношении $e{:}1$ по истечении времени, равного $4\pi a/n^2 c$. Если высота (определяемая n) задана, то колебания обладают наибольшим постоянством в том случае, когда c наименьшее, т. е. когда горло максимально узко.

---

[1]) Уравнение (5) только приближенное, поскольку диссипативная сила вычисляется в предположении, что колебание незатухающее; это, однако, не может повести к существенной ошибке, если диссипация мала.

Если S задано, то после подстановки выражения c через S и n мы получим

$$\frac{4\pi a}{n^2 c} = \frac{4\pi a^3}{n^4 S} \tag{6}$$

— соотношение, показывающее, что при этих условиях продолжительность движения с уменьшением n быстро возрастает.

В случае подобных резонаторов $c \sim n^{-1}$, и тогда

$$\frac{4\pi a}{n^2 c} \sim \frac{1}{n};$$

это показывает, что в данном случае по прошествии одного и того же числа периодов всегда имеет место одна и та же пропорциональная потеря амплитуды. Этот результат можно получить методом размерностей, как следствие принципа динамического подобия.

В качестве примера (5) я могу указать на случай шара с горлом, предназначенного для сжигания фосфора в кислороде, емкостью 0,251 куб. фут. (7100 $см^3$). Из опыта было найдено, что нота максимального резонанса давала 120 колебаний в секунду, так что $n = 120 \cdot 2\pi$. Полагая скорость звука a равной 1120 фут. (34 200 $см$) в секунду, мы находим из этих данных:

$$\frac{4\pi a^3}{n^4 S} \approx \frac{1}{5} \text{ сек.}$$

Судя по звуку, который возникает, если ударить по шару, я думаю, что эта оценка должна быть слишком низкой; впрочем, следует заметить, что отсутствие бесконечного фланца, принимавшегося в теории, должно очень существенно влиять на скорость диссипации.

Мы исследуем теперь вынужденные колебания, обязанные источнику звука, внешнему по отношению к резонатору. Если давление ∂p у устья резонатора, создаваемое источником, т. е. вычисленное в предположении, что устье закрыто, есть Fe^{ikat}, то уравнение движения, соответствующее (5), но приложимое только к вынужденным колебаниям, имеет вид

$$\frac{\rho}{c}\ddot{X} + \frac{\rho k^2 a}{2\pi}\dot{X} + \frac{\rho a^2}{S}X = Fe^{ikat}. \tag{7}$$

Если $X = X_0 e^{i(kat+\varepsilon)}$, причем X_0 — действительное, то

$$\frac{F^2}{\rho^2 a^4 X_0^2} = \left(\frac{1}{S} - \frac{k^2}{c}\right)^2 + \left(\frac{k^3}{2\pi}\right)^2.$$

Максимальное изменение G давления внутри резонатора связано с X_0 уравнением

$$G = \frac{a^2 \rho X_0}{S}, \tag{8}$$

так как X_0/S есть максимальное сжатие. Таким образом,

$$\frac{F^2}{G^2} = \left(1 - \frac{k^2 S}{c}\right)^2 + \left(\frac{k^3 S}{2\pi}\right)^2, \tag{9}$$

что согласуется с уравнением, полученным Гельмгольцем для случая,

когда сообщение с внешним воздухом осуществляется через простое отверстие (§ 306). Настоящая задача почти целиком является частным случаем той задачи, которая рассматривалась в § 46; различие связано с тем фактом, что коэфициент диссипации в (7) является функцией периода, а не абсолютно постоянной величиной. Если период, определяемый k, и S заданы, то (9) показывает, что внутреннее изменение давления G имеет максимум, когда $c = k^2S$, т. е. когда собственная нота резонатора (вычисленная без учета диссипации) одинакова с нотой возбуждающего звука. Максимальное колебание, когда совпадение периодов идеально, изменяется обратно пропорционально S; но, если S мало, то незначительного неравенства периодов достаточно, чтобы вызвать заметное падение интенсивности резонанса (§ 49). При пользовании резонаторами невыгодно слишком сильно понижать S и c; это связано, вероятно, с тем, что приспособления, необходимые для установления связи внутренности резонатора с ухом или с другим чувствительным аппаратом, влекут за собой отклонение от тех предположений, на которых основаны вычисления, отклонение, все более и более значительное по мере того, как уменьшаются размеры. Когда чувствительный аппарат не связан с внутренностью резонатора, как в опыте с усилением звука камертона посредством резонатора, в рассмотрение входят другие элементы, и необходимо иное исследование (§ 319).

В силу принципа взаимности предыдущее рассуждение можно приложить и к вычислению действия источника звука, расположенного внутри резонатора.

312. Мы переходим теперь к дальнейшему обсуждению задачи открытой трубы. Предположим, что открытый конец трубы снабжен бесконечным фланцем и что ее диаметр мал в сравнении с длиной волны рассматриваемого колебания.

В качестве введения в вопрос мы предположим далее, что устье трубы имеет легко подвижный поршень, лишенный толщины и массы. Предыдущие задачи, от которых настоящая отличается по существу очень мало, уже дали нам основание полагать, что наличие поршня не вызовет значительного изменения. Мы принимаем (§ 244), что внутри трубы потенциал скорости равен

$$\varphi = (A \cos kx + B \sin kx)\, e^{int}, \tag{1}$$

причем, как обычно, $k = 2\pi/\lambda = n/a$. В устье, где $x = 0$,

$$\varphi_0 = Ae^{int}; \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 = kBe^{int}. \tag{2}$$

Справа от поршня соотношение между φ_0 и $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0$, согласно § 302, имеет вид

$$\frac{\int\int \varphi_0 d\sigma}{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_0} = i\frac{\pi R^2}{k}\left\{1 - \frac{J_1(2kR)}{kR}\right\} - \frac{\pi}{2k^3}\, k_1(2kR) \tag{3}$$

(R — радиус трубы). Отсюда можно получить решение проблемы без какого-либо ограничения относительно малости kR; но так как присутствие поршня не меняет существенно дела только тогда, когда kR мало, мы можем также воспользоваться преимуществом упрощения, полагая сразу, как в (1) § 311,

$$\frac{\int\int \varphi_0 d\sigma}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0} = \frac{i\pi kR^4}{2} - \frac{8R^3}{3}. \tag{4}$$

Но так как поршень не занимает места, значения $(\partial\varphi/\partial x)_0$ должны быть одинаковы по обе его стороны; а так как у него нет и массы, то аналогичное должно быть справедливо и для значений $\int\int \varphi_0 d\sigma$. Таким образом,

$$A\sigma = kB\left\{-\frac{8R^3}{3} + i\frac{k\pi R^4}{2}\right\}$$

или

$$A = B\left\{-\frac{8kR}{3\pi} + i\frac{k^2R^2}{2}\right\}. \tag{5}$$

Подставляя в (1), мы находим, отбросив мнимую часть и положив для краткости $B = 1$,

$$\varphi = \left\{\sin kx - \frac{8kR}{3\pi}\cos kx\right\}\cos nt - \frac{1}{2}k^2R^2\cos kx\sin nt. \tag{6}$$

В этом выражении член, содержащий $\sin nt$, зависит от диссипации, и таков же, как если бы поршня не было вовсе, между тем как член, содержащий $8kR/3\pi$, представляет эффект инерции внешнего воздуха в соседстве с устьем. Чтобы сравнить с полученным ранее результатом, возьмем α таким, чтобы

$$\sin kx - \frac{8kR}{3\pi}\cos kx = \sin k(x-\alpha);$$

тогда, пренебрегая квадратами малых величин, имеем

$$\alpha = \frac{8R}{3\pi} \tag{7}$$

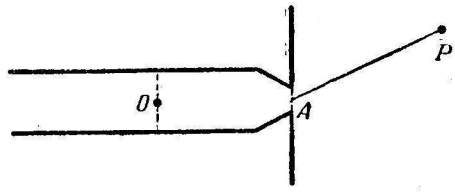
и

$$\varphi = \sin k(x-\alpha)\cos nt - \frac{1}{2}k^2R^2\cos kx\sin nt. \tag{8}$$

Эти формулы показывают, что если оставить без учета диссипацию, то потенциал скорости оказывается таким, как будто труба удлинена на $8/3\pi$ радиуса, и открытый конец ведет себя тогда как пучность. Величина этой поправки согласуется с тем предположительным результатом, какого, согласно предыдущему исследованию, мы могли бы ожидать от введения поршня. Мы видели, в чем причина того, что истинное значение α лежит между $\frac{1}{4}\pi R$ и $8R/3\pi$ и что

присутствие поршня не влияет на член, представляющий диссипацию. Но прежде чем обсуждать наши результаты, было бы целесообразно исследовать их заново несколько иным методом, который, будучи, кроме того, и несколько более общим, поможет пролить свет на механику всего этого вопроса.

313. Для этой цели удобно переместить начало координат в отрицательном направлении на такое расстояние от устья, чтобы волны оказались там приблизительно плоскими, — смещение, которое согласно нашим предположениям не должно превосходить малой доли длины волны. Трудность вопроса состоит в нахождении связи между волнами в трубе, которые на достаточном расстоянии от устья являются плоскими, и расходящимися волнами вне ее, которые на достаточном расстоянии можно трактовать как сферические. Если переход имеет место в пространстве, малом сравнительно с длиной волны, как это очевидно и должно быть, если диаметр достаточно мал, то задача допускает решение, какова бы ни была форма трубы в соседстве с устьем.



Фиг. 62.

В точке P, расстояние которой от A не очень велико, потенциал скорости есть (§ 279)

$$\phi = \frac{A'}{r} e^{-ikr} e^{int}, \tag{1}$$

откуда

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{A' e^{i(nt-kr)}}{r^2}(1 + ikr). \tag{2}$$

Рассмотрим поведение массы воздуха, заключенной между плоским сечением в O и полусферической поверхностью, центр которой есть A и радиус r, причем r велико сравнительно с диаметром трубы, но мало сравнительно с длиной волны. В этом пространстве воздух должен двигаться приблизительно как несжимаемая жидкость. Но поток через полусферическую поверхность равен

$$2\pi r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} = -2\pi A' (1 + ikr) e^{i(nt-kr)} = -2\pi A' e^{int}, \tag{3}$$

если пренебречь квадратом kr.

Если, как прежде, мы положим для потенциала скорости внутри трубы

$$\phi = (A \cos kx + B \sin kx)\, e^{int}, \tag{4}$$

то поток через сечение в O будет равен

$$\sigma \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = \sigma k B e^{int}, \tag{5}$$

и, таким образом,

$$\sigma kB = -2\pi A'. \tag{6}$$

Это — первое условие; второе должно быть найдено из того соображения, что полный поток (два значения которого были только что рассмотрены) пропорционален разности потенциалов на концах. Таким образом, обозначив через c проводимость канала между двумя конечными поверхностями, имеем

$$\sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 = c\,(\psi_r - \varphi_0),$$

или

$$\frac{\sigma kB}{c} = \frac{A'}{r}e^{-ikr} - A. \tag{7}$$

Подставляя вместо A' его значение из (6), мы имеем:

$$-A = \sigma kB\left(\frac{1}{c} + \frac{e^{-ikr}}{2\pi r}\right) = \sigma kB\left\{\frac{1}{c} + \frac{1}{2\pi r} - \frac{ik}{2\pi}\right\}.$$

В этом выражении вторым членом можно пренебречь по сравнению с первым, так как c есть по большей части величина того же порядка, что и радиус трубы, а если устье сильно сжато, то еще меньше. Таким образом, мы можем взять

$$A = \sigma kB\left(-\frac{1}{c} + \frac{ik}{2\pi}\right). \tag{8}$$

Подставляя это в (4), мы получим комплексное выражение потенциала скорости внутри трубы — если положить B равным единице — в виде

$$\varphi = \left\{\sin kx + \sigma k\left(-\frac{1}{c} + \frac{ik}{2\pi}\right)\cos kx\right\}e^{int},$$

или, если оставить только действительную часть,

$$\varphi = \left\{\sin kx - \frac{\sigma k}{c}\cos kx\right\}\cos nt - \frac{k^2\sigma}{2\pi}\cos kx \sin nt. \tag{9}$$

Следуя Гельмгольцу, мы можем упростить наши результаты, вводя величину α, определяемую уравнением:

$$\operatorname{tg} k\alpha = \frac{k\sigma}{c}. \tag{10}$$

Таким образом,

$$\varphi = \frac{\sin k(x-\alpha)}{\cos k\alpha}\cos nt - \frac{k^2\delta}{2\pi}\cos kx \sin nt, \tag{11}$$

и соответствующий потенциал скорости вне устья

$$\psi = -\frac{\sigma k}{2\pi r}\cos(nt - kr). \tag{12}$$

Если R радиус трубы, то мы можем заменить σ через πR^2.

Если труба представляет собой простой цилиндр и начало координат лежит на расстоянии ΔL от ее устья, то мы знаем, что $\alpha c^{-1} = \Delta L + \mu R$, где μ — число, несколько большее $\frac{1}{4}\pi$. В таком случае (начало взято достаточно близко к устью) $k\alpha$ есть малая величина, и поэтому по (10)

$$a = \frac{\sigma}{c} = \Delta L + \mu R. \tag{13}$$

В то же время $\cos k\alpha$ можно принять за единицу. Главный член в φ, содержащий $\cos nt$, можно тогда вычислять так, словно труба удлинена, и в точке, расположенной на расстоянии μR дальше действительного положения устья, имеется пучность, — в согласии с найденными нами ранее результатами. Эти результаты, приближенные для обычных труб, становятся точными, когда диаметр беспредельно уменьшается, — если трением возможно пренебречь.

Если в A нет фланца, то значение c изменяется очень мало при удалении препятствия, но главный эффект сказывается на члене, представляющем диссипацию. Если мы примем, в порядке приближения, что волны, расходящиеся от A, сферические, то мы должны взять для потока $4\pi r^2\, \partial\psi/\partial r$ вместо $2\pi r^2\, \partial\psi/\partial r$. Конечным эффектом изменения будет уменьшение наполовину значения потенциала скорости вне устья, равно как и соответствующего второго члена в φ (содержащего $\sin nt$). Можно видеть, таким образом, что величина диссипации существенно зависит от степени, с какою волны могут расходиться, и наши аналитические выражения должны рассматриваться лишь как грубые оценки.

Точная теория открытой органной трубы, включающая уравнения (11) и (12), была развита Гельмгольцем [1]), метод которого, однако, значительно отличается от принятого здесь. Старые решения задачи, данные Лагранжем, Д. Бернулли и Эйлером, были основаны на допущении, что у открытого конца давление не может отклоняться от давления окружающей атмосферы — принцип, который, пожалуй, и в настоящее время допустимо применять к идеально открытому концу. Тот факт, что во всех обычных случаях энергия теряется в пространство, является доказательством того, что в трубе нигде нет абсолютной пучности, и можно было бы ожидать, что эффектом инерции воздуха непосредственно (снаружи) устья будет увеличение длины. Положения узлов в звучащей трубе были изучены экспериментально Саваром [2]) и Гопкинсом [3]), получившими ряд результатов, что интервал между устьем и ближайшим узлом всегда меньше половины интервала, разделяющего последовательные узлы.

---

[1]) Helmholtz, *Crelle*, том 57, стр. 1, 1860.

[2]) Savart, „Recherches sur les vibrations de l'air", *Ann. d. Chim.*, том XXIV, 1823.

[3]) Hopkins, „Aerial vibrations in cylindrical tubes", *Cambridge Transactions*, том V, стр. 231, 1833.

[Поправка, необходимая для открытого конца, является источником отклонения от простого закона октав, который согласно элементарной теории связывал бы ноты замкнутой и открытой труб одной и той же длины. Пусть, например, в приложении к органной трубе αR обозначает поправку для верхнего конца, когда он открыт, и l — длину трубы, включающую поправку на устье у нижнего конца. Полная эффективная длина открытой трубы есть тогда $l+\alpha R$, между тем как эффективная длина трубы, когда она закрыта на верхнем конце, равна просто l. Открытая труба практически длиннее, и интервал между нотами меньше, чем октава простой теории [1]).

Быть может целесообразно указать, что поправка, предполагавшаяся независимой от длины волны, не должна нарушать гармонических соотношений между парциальными тонами, независимо от того, будет ли труба открытой или закрытой.]

314. Экспериментальные определения поправки для открытого конца производились, вообще говоря, без фланца, и поэтому важно дать хотя бы грубую оценку его эффекта. Никакого теоретического решения задачи об открытом конце без фланца до сих пор дано не было, но легко видеть (§§ 79, 307), что удаление фланца понизит поправку значительно ниже значения $0{,}82R$ (Добавление 1). Ввиду отсутствия теории я попытался определить эффект фланца экспериментальным путем [2]). Органными мехами продувались две органные трубы, находившиеся приблизительно в унисоне друг с другом, чтобы давать биения, которые можно было бы подсчитать; эффект фланца выводился из разности в частотах биений, полученных для случаев, когда одна из труб была снабжена фланцем или когда фланца не было ни у одной из труб. Поправка на фланец составляла около $0{,}2R$. Повторение (вероятно, больше заслуживающее доверия) этого эксперимента Бозанке́ дало $0{,}25R$. Если мы вычтем $0{,}22R$ из $0{,}82R$, то получим, $0{,}6R$, что можно рассматривать как вероятное приблизительное значение поправки для конца без фланца, в предположении, что длина волны велика в сравнении с диаметром трубы.

Попытки определить поправку целиком из эксперимента до сих пор не привели к очень точным результатам. Измерения Вертгейма [3]) над трубами, открытыми с обоих концов, дали в качестве среднего (для каждого конца) $0{,}663R$, между тем как для труб, открытых только с одного конца, средний результат был $0{,}746R$. В двух тщательных экспериментах Бозанке [4]) с трубами, открытыми с обоих концов, поправка для одного конца была $0{,}635R$ при $\lambda = 12R$

---

[1]) Bosanquet, *Phil. Mag.*, том VI, стр. 63, 1878.

[2]) *Phil. Mag.* (5) III, 456, 1877. [Самые ранние эксперименты этого рода принадлежат Грипону (*Ann. d. Chim*, III, стр. 384, 1874), который показал, что эффект больших фланцев пропорционален диаметру трубы.]

[3]) Wertheim, *Ann. d. Chim.* (3), том XXXI, стр. 394, 1851.

[4]) Bosanquet, *Phil. Mag.* (5), том IV, стр. 219, 1877.

и $0{,}543R$ при $\lambda = 30R$. Бозанке принимает в качестве общего правила, что поправка (выраженная в долях R) возрастает с увеличением отношения диаметра к длине волны: часть этого возрастания может быть, однако, обязана взаимной реакции концов, что заставляет плоскость симметрии вести себя подобно твердой стенке. Когда труба не слишком длинна в сравнении с ее диаметром, то положение вещей близко скорее к случаю присутствия, чем к случаю отсутствия фланца. Сравнение теории и наблюдения в этом отношении несколько трудно, потому что, когда поправка мала, на ее значение, вычисленное из наблюдений, влияют неточности в абсолютной высоте и скорости звука; для случая же, когда она относительно велика (здесь с экспериментом удобнее иметь дело), не существует теории. Вероятно, более точное значение поправки можно было бы получить с резонатором типа, рассмотренного в § 306, где соединение с внешним воздухом осуществляется с помощью простого отверстия; „длина" в этом случае равна нулю и „поправка" — это все. Некоторые измерения этого рода, в которых, однако, не делалось попыток достигнуть большой точности, можно найти в моем мемуаре о резонансе [1]).

[Тщательные экспериментальные определения поправки на открытый конец без фланца были проделаны Блэйкли [2]), который применял вертикальную трубу из тонкой латуни в 2,08 дюйма (5,3 *см*) диаметром. Нижняя часть трубы была погружена в воду, поверхность которой определяла „закрытый конец"; эксперимент заключался в изменении степени погружения, пока не достигался максимальный резонанс с камертоном известной высоты. Если два наиболее коротких расстояния поверхности воды от открытого конца, найденные таким путем, были l_1 и l_2, то $(l_2 - l_1)$ представляет половину длины волны, и „поправка на открытый конец" есть $\frac{1}{2}(l_2 - l_1) - l_1$. Следующие цифры представляют собой результаты, полученные Блэйкли и выраженные в долях радиуса. Они относятся к одной и той же трубе, отвечавшей на камертоны различной высоты.

c'	. . . 253,68	0,565
e'	. . . 317,46	0,595
g'	. . . 380,81	0,564
$b\flat'$	. . . 444,72	0,587
c''	. . . 507,45	0,568

Средняя поправка составляет, таким образом, $0{,}576R$.]

Для определения высоты резонаторов экспериментальным путем применяли различные методы. Пожалуй, наиболее часто резонаторы заставляли звучать по способу органных труб, продувая струю воз-

---

[1]) *Phil. Trans.*, 1871. См. также Зондхаусс, *Pogg. Ann.*, том 140, стр. 53, 219 (1870) и некоторые мои замечания по этому поводу (*Phil. Mag.*, сент. 1879).

[2]) Blaikley, *Phil. Mag.*, том VII, стр. 339. 1879.

духа наискось поперек их устья. Хотя этим путем и были получены хорошие результаты, наше незнание механизма действия потока воздуха делает метод неудовлетворительным. В экспериментах Бозанке в трубах не возбуждалось вынужденное звучание, но поперек открытого конца продували короткие прерывистые струи воздуха, причем высота оценивалась из свободных колебаний, когда звук замирал.

Метод, которым я иногда с удобством пользовался, в принципе аналогичен и состоит в возбуждении свободных колебаний посредством удара. Чтобы получить возможно более точно определенную ноту, важно подобрать жесткость вещества, с которым приходит в соприкосновение резонатор, сообразно с высотой: наибольшая высота требует мягкого удара. Так, высота тона пробирки может быть определена в момент, когда ею ударяют о согнутое колено. Пользуясь этим методом, мы не должны забывать, что собственную высоту колеблющегося тела изменяет член, зависящий от квадрата диссипации. В обозначениях § 45 частота уменьшается от n до $n(1-\frac{1}{8}k^2n^{-2})$ или, если x — число колебаний, совершаемых за время, в течение которого амплитуда падает в отношении $e:1$, от n до

$$n\left(1-\frac{1}{8\pi^2x^2}\right).$$

Поправка, однако, редко заслуживает того, чтобы принимать ее во внимание.

Измерения, приведенные в моем мемуаре о резонансе, были основаны на ином принципе, именно, на оценке ноты максимального резонанса. Ухо помещалось вблизи некоторой полости, и проигрывалась хроматическая гамма. Этим путем оказалось возможно при небольшой практике оценивать высоту хорошего резонатора с точностью до четверти полутона. В случае небольших колб с длинными горлами, к которым предыдущий метод был бы неприложим, оказалось достаточным просто держать колбы вблизи колеблющихся струн рояля. Резонансная нота давала сама знать о себе дрожанием колбы, легко ощущавшимся пальцами. При пользовании этим методом важно выработать способность без предубеждения подразделять интервал между двумя последовательными полутонами. Если теоретический результат уже известен, то почти невозможно прийти к независимому суждению путем эксперимента.

315. Мы изучим теперь, следуя Гельмгольцу, более близко природу представляемого формулой (11) § 313 движения внутри трубы.

Мы имеем

$$\varphi = L\cos(nt-\theta), \tag{1}$$

где

$$L^2 = \frac{\sin^2 k(x-\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4\sigma^2}{4\pi^2}\cos^2 kx, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{k^2\sigma\cos k\alpha\cos kx}{2\pi\sin k(x-\alpha)}. \tag{3}$$

В выражении для L^2 второй член очень мал, и поэтому мы очень близки к максимальным значениям φ, когда

$$k(x-a)=\left(-m+\frac{1}{2}\right)\pi,$$

или

$$-x=\frac{1}{2}m\lambda-\frac{1}{4}\lambda-a, \tag{4}$$

где m — положительное целое число.

Расстояние между последовательными максимумами, таким образом, равно $\frac{1}{2}\lambda$, и значение максимума есть $\sec^2 ka$. Минимальные значения L^2 встречаются приблизительно там, где $k(x-a)=-m\pi$ или

$$-x=\frac{1}{2}m\lambda-a, \tag{5}$$

а их величина дается выражением

$$L^2=\frac{k^4\sigma^2}{4\pi^2}\cos^2 kx=\frac{k^4\sigma^2}{4\pi^2}\cos^2 ka. \tag{6}$$

Аналогично

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=J\cos(nt-\chi), \tag{7}$$

где

$$J^2=k^2\frac{\cos^2 k(x-a)}{\cos^2 ka}+\frac{k^6\sigma^2}{4\pi^2}\sin^2 kx, \tag{8}$$

$$\operatorname{tg}\chi=\frac{k^2\sigma\cos ka\sin kx}{2\pi\cos k(x-a)}. \tag{9}$$

Максимальные значения J^2 имеют место, когда

$$-x=\frac{1}{2}m\lambda-a, \tag{10}$$

а минимальные значения — когда

$$-x=\frac{1}{2}m\lambda-\frac{1}{4}\lambda-a. \tag{11}$$

Приблизительная величина максимума есть $k^2\sec^2 ka$, минимума — $k^6\sigma^2\cos^2 ka/4\pi^2$. Очевидно, что максимумы скорости находятся в тех же местах трубы, где находятся минимумы сжатия (и разрежения), а минимумы скорости — в тех местах, где максимумы сжатия. Серии пучностей и узлов располагаются так, как если бы первый узел находился на расстоянии a за устьем.

Что касается фаз, то мы видим, что и θ и χ вообще малы; поэтому за исключением мест, где L^2 и J^2 близки к минимуму, все движение синхронно, как при отсутствии диссипации.

До сих пор мы рассматривали задачу о прохождении плоских волн вдоль трубы и их постепенной диффузии от устья независимо от вопроса о происхождении самих плоских волн. Мы принимали только, что источник движения расположен где-либо вне трубы.

Будем теперь предполагать, что движение обязано известному колебанию поршня, расположенного в $x = -l$, причем начало координат находится в устье. Таким образом, при $x = -l$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = G \cos nt; \tag{12}$$

и это выражение необходимо связать с выражением для плоских волн, обобщенным путем введения произвольных амплитуды и фазы.

Мы можем положить

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = BJ \cos (nt - \varepsilon - \chi), \tag{13}$$

где J и χ имеют значения, данные в (8), (9), между тем как B и ε произвольны. Сравнивая (12) и (13), мы заключаем, что

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{k^2 \sigma \cos k\alpha \sin kl}{2\pi \cos k(l+\alpha)}, \tag{14}$$

$$G^2 = B^2 k^2 \left\{ \frac{\cos^2 k(l+\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4 \sigma^2}{4\pi^2} \sin^2 kl \right\} \tag{15}$$

— уравнения, которыми определяются B и ε.

В согласии с (12) § 313, соответствующая расходящаяся волна представляется выражением

$$\Psi = -\frac{\sigma k B}{2\pi r} \cos (nt - \varepsilon - kr). \tag{16}$$

Если G задано, то B имеет наибольшее значение, когда $\cos k(l+\alpha) = 0$, т. е. когда поршень расположен в приближенном узле. В этом случае

$$B = \frac{2\pi}{k^2 \sigma \cos k\alpha} G \tag{17}$$

— выражение, показывающее, что величина результирующего колебания очень велика, хотя и не бесконечна, так как $\cos k\alpha$ не может обращаться в нуль. Когда устье сильно сжато, $\cos k\alpha$ может сделаться малым, но в этом случае необходимо, чтобы согласие между периодами было очень точным, для того чтобы первым членом (15) можно было пренебречь по сравнению со вторым. В обычных трубах $\cos k\alpha$ приблизительно равен единице.

Минимум колебания имеет место при l таком, чтобы $\cos k(l+\alpha) = \pm 1$, т. е. когда поршень расположен в пучности. В этом случае

$$B = \frac{G \cos k\alpha}{k}. \tag{18}$$

Колебание вне трубы тогда в зависимости от значения α равно или меньше колебания, которое имело бы место в отсутствии трубы, если бы колеблющаяся пластина была частью плоскости yz.

316. Наши уравнения можно также приложить к исследованию движения, возбужденного в трубе внешними источниками звука. Предположим сначала, что устье трубы закрыто неподвижной пластиной, образующей часть плоскости yz, и что потенциал, обусловленный внешними источниками (приблизительно постоянный на пластине), при этих условиях есть

$$\psi = H\cos nt, \tag{1}$$

где ψ складывается из потенциалов всех источников и их зеркальных изображений в плоскости yz, как объяснено в § 278. Внутри трубы потенциал пусть равен

$$\varphi = H\cos kx\cos nt, \tag{2}$$

так что φ и его производная непрерывны на барьере. Физический смысл всего этого прост. Представим себе внутри трубы движение, определяемое условием, что скорость в устье равна нулю и что сжатие в устье такое же, какое создают источники звука, когда устье закрыто. Очевидно, что при этих условиях пластину, закрывающую устье, можно удалить, нисколько не изменяя движения. Однако в точке $x = -l$, вообще говоря, скорость конечна, и поэтому мы не можем предположить, что труба там закрыта. Но когда при $x = -l$ находится узел, т. е. когда l таково, что $|\sin kl| = 0$, то все условия удовлетворены и действительное движение внутри трубы выражается уравнением (2)[1]). Это движение, очевидно, такое же, какое имело бы место, если бы труба была закрыта с обоих концов; во внешнем же пространстве потенциал такой же, как если бы устье трубы было закрыто твердой пластиной.

В общем случае, чтобы привести воздух в точке $x = -l$ в состояние покоя, мы должны наложить на движение, представленное уравнением (2), другое — типа, исследованного в § 313, определенное так, чтобы оно давало $x = -l$ скорость, равную и противоположную скорости первого. Таким образом, если второе движение определено выражением

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = BJ\cos(nt - \varepsilon - \chi),$$

то мы имеем $\varepsilon + \chi = 0$ и

$$B^2\left\{\frac{\cos^2 k(l+\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4\sigma^2}{4\pi^2}\sin^2 kl\right\} = H^2\sin^2 kl. \tag{3}$$

Если $\sin kl = 0$, мы имеем, как было объяснено выше, $B = 0$. Максимум B имеет место тогда, когда $\cos k(l+\alpha) = 0$ и тогда

$$B = \frac{2\pi H}{k^2\sigma}\,^2). \tag{4}$$

---

[1]) [Ошибка, на которую указал д-р Бертон, здесь исправлена.]

[2]) Helmholtz. *Crelle*, том 57, 1860.

Очевидно, — как этого и следовало ожидать, что резонанс наибольший, когда приведенная длина представляет собой нечетное кратное $\frac{1}{4}\lambda$.

317. Положение, согласно которому инерция воздуха в соседстве с узлом не должна играть большой роли, позволяет нам видеть, что в таких местах форма трубы не имеет большого значения, а нужно учитывать только емкость. Это соображение позволяет нам вычислить высоту трубы, цилиндрической на большей части своей длины l, но вблизи закрытого конца расширяющейся в шар небольшой емкости S.

Приведенная длина тогда, очевидно, равна

$$l + \alpha + S\sigma^{-1}, \tag{1}$$

где α — поправка на открытый конец, а σ — площадь поперечного сечения цилиндрической части. Эта формула часто оказывается полезной, и ее можно применять и тогда, когда отклонение от цилиндрической формы не имеет характера расширения.

Когда расширение, представляемое S, слишком велико, чтобы сделать возможной предыдущую трактовку, мы можем поступать следующим образом. Если пренебречь диссипацией, то потенциал скорости в трубе можно считать равным

$$\varphi = \sin k(x - a)\cos nt,$$

причем начало координат находится в устье, между тем как приближенно $a = \frac{1}{4}\pi R$. В точке $x = -l$ мы имеем

$$\dot{\varphi} = n \sin k(l + \alpha)\sin nt$$

и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = k \cos k(l + \alpha)\cos nt.$$

Но сжатие дается выражением $s = -a^{-2}\dot{\varphi}$, и условие, которое должно быть удовлетворено у $x = -l$, следующее:

$$S\frac{ds}{dt} = -\sigma\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2}$$

если предположить, что сжатие внутри S в основном одинаково. Таким образом,

$$Sn^2a^{-2}\sin k(l + \alpha) = \sigma k \cos k(l + \alpha),$$

или, так как $n = ak$,

$$\operatorname{tg} k(l + \alpha) = \frac{\sigma}{kS} \tag{3}$$

— уравнение, определяющее высоту. Численные примеры приложе-

ния уравнения (3) даны в моем мемуаре о резонансе (*Phil. Trans.*, 1871, стр. 117).

Аналогичное рассуждение доказывает, что в любом таком случае стоячих колебаний, когда длина волны в несколько раз больше диаметра широкой части, конец трубы, примыкающий к расширению, ведет себя приблизительно как открытый конец, если kS значительно больше σ, и как закрытый конец, если kS значительно меньше σ.

318. Вопрос о действии резонатора под влиянием источника звука в унисоне с резонатором — вопрос значительной тонкости и важности, по поводу которого среди авторов работ по акустике, не исключая и автора данной книги, возникало много неясностей.

В некоторых случаях резонатор поглощает звук, как бы притягивая к себе колебания и, таким образом, отвлекая их из областей, где они иначе должны были бы чувствоваться. Предположим, например, что имеется простой источник звука B, помещенный в узкой трубе на расстоянии $\frac{1}{4}\lambda$ (или каком-либо нечетном кратном этой величины) от закрытого конца и не слишком близко от устья, тогда во всякой удаленной внешней точке A его эффект равен нулю. Это — непосредственное следствие принципа взаимности, потому что, если бы A было источником, то в B изменения потенциала не происходило бы. Ограничение, предупреждающее излишне большую близость к устью, можно отбросить, если мы предположим, что источник B, вместо того чтобы быть сконцентрированным в одной точке, равномерно распределен по поперечному сечению. Тогда, каковы бы ни были размеры и форма отверстия, по другую сторону не будет абсолютно никакого возмущения. Это ясно из теории колебаний в одном измерении: обратное предположение, именно, что какие бы источники возмущения ни существовали за сечением, $\iint \dot{\psi}\, d\sigma = 0$ — можно доказать с помощью формулы Гельмгольца (2) § 293, если взять в качестве φ потенциал скорости чисто аксиального колебания того же периода.

Едва ли нужно говорить о том, что всякий раз, когда излучение энергии отсутствует, источник не совершает работы; для этого не требуется, чтобы у источника не было изменения давления, так как в случае простого источника это невозможно, но нужно, чтобы переменная часть давления обладала в точности фазой ускорения и не имела бы компоненты с фазой скорости.

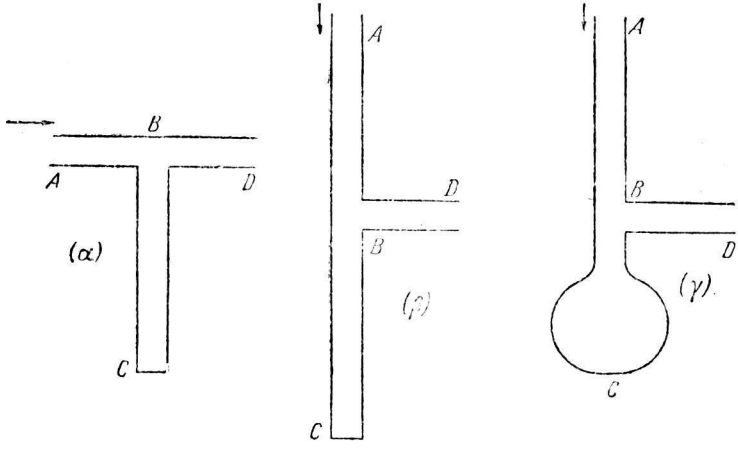
Другие примеры поглощения звука резонаторами даются некоторыми видоизменениями интерференционной трубы Гершеля[1]), применявшейся Квинке, чтобы помешать тонам определенной высоты достигнуть уха.

---

[1]) *Phil. Mag.*, том III. стр. 405, 1833.

В комбинациях труб, представленных на фиг. 63, звук свободно входит в A; в B он оказывается у устья резонатора, высота которого совпадает с его собственной. При этих условиях он поглощается, и вдоль BD не распространяется никакого колебания. Цилиндрическую трубу BC можно, очевидно, заменить любым другим резонатором той же высоты (γ), не нарушая действия аппарата. Обычное объяснение при помощи (так называемой) интерференции прямой и отраженных волн тогда менее применимо.

Случаи, когда источник находится в устье резонатора, не нужно смешивать с случаями, когда источник находится внутри. Если B — источник на дне закрытой трубы, приведенная длина которой равна $\frac{1}{4}\lambda$, то интенсивность в наружной точке A может быть значительно



Фиг. 63.

больше, чем в отсутствии трубы. Действительно, потенциал в A, обязанный источнику в B, такой же, какой имел бы место в B при наличии источника в A.

319. Для более близкого исследования механизма резонанса мы придадим задаче форму, свободную от трудностей, не являющихся неизбежными, предположив, что резонатор состоит из небольшой круглой пластинки на пружине, вставленной в бесконечную твердую плоскость. В предыдущей главе было доказано (30) § 302, что если M — масса пластинки, ξ — ее смещение, $\mu\xi$ — восстанавливающаяся сила, R — радиус пластинки и σ — плотность воздуха, то уравнение колебания имеет вид

$$\left(M+\frac{8\sigma R^3}{3}\right)\ddot{\xi}+\frac{a\sigma\pi k^2R^4}{2}\dot{\xi}+\mu\xi=F, \qquad (1)$$

где F и ξ пропорциональны e^{ikat}.

Если собственный период колебания (включая реакцию внешнего воздуха) совпадает с наложенным периодом, то уравнение приводится к следующему:

$$\frac{1}{2}a\sigma\pi k^2R^4\dot{\xi}=F. \tag{2}$$

Предположим теперь, что F обусловлено внешним источником звука, дающим, когда пластинка находится в покое, потенциал $\dot{\psi}_0$, приблизительно постоянный на площади пластинки. Таким образом,

$$F=-\dot{\rho}\cdot\pi R^2=ika\sigma\cdot\pi R^2\cdot\dot{\psi}_0, \tag{3}$$

так что

$$\pi R^2\dot{\xi}=\dot{X}=2i\pi k^{-1}\dot{\psi}_0=ik\dot{\psi}_0, \tag{4}$$

и потенциал φ, обязанный движению пластинки, на расстоянии r равен

$$\varphi=-\frac{\dot{X}}{2\pi}\frac{e^{-ikr}}{r}=-\frac{i\dot{\psi}_0}{k}\frac{e^{-ikr}}{r}=\dot{\psi}_0\frac{e^{-ikr}}{ikr}, \tag{5}$$

т. е., как легко видеть, независим от площади пластинки. Оставляя пока в стороне случай идеального изохронизма, предположим, что

$$-\left(M+\frac{8\sigma R^3}{3}\right)k'^2a^2+\mu=0, \tag{6}$$

так что $2\pi/k'$ есть длина волны собственной ноты резонатора. Если вместо $M+\frac{8}{3}\sigma R^3$ написать M', то уравнение, соответствующее (5), принимает форму

$$\varphi=\dot{\psi}_0\frac{e^{-ikr}}{ikr\left(1-2iM'\dfrac{k'^2-k^2}{\pi\sigma k^3R^4}\right)}, \tag{7}$$

из которой мы можем заключить, как и прежде, что если $k'=k$, то эффективность резонатора как источника не зависит от R. Если совпадение не является идеальным, закон спадания зависит от $M'R^{-4}$. Таким образом, если M' велико, а R мало, то, чтобы приблизиться к максимуму (§ 49), требуется бóльшая точность настройки, хотя максимальная эффективность резонатора здесь и не меньше. В случае резонаторов с простыми отверстиями $M'=\frac{16}{3}\sigma R^3$, так что $M'R^{-4}$ изменяется пропорционально R^{-1}. Следовательно, для резонаторов с малыми отверстиями требуется бóльшая точность настройки, но разница незначительна. Из сравнения настоящего исследования с рассуждением § 311 следует, что условия действия различны в зависимости от того, рассматривается ли внутренний или внешний эффект.

Мы возвратимся теперь к случаю изохронизма и предположим далее, что внешний источник звука, на который отвечает резонатор A, образуется движением подобной ему пластинки B, расстояние которой c от A есть величина, большая сравнительно с размерами пла-

стинки. Интенсивность источника B можно положить такой, чтобы его потенциал был равен

$$\psi = \frac{e^{-ikr}}{r}. \tag{8}$$

Следовательно, $\psi_0 = c^{-1}e^{-ikc}$, и поэтому, в силу (5),

$$\varphi = \psi_0 \frac{e^{-ikr}}{ikr} = \frac{e^{-ikc}}{ikc} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \tag{9}$$

— уравнение, показывающее при одинаковом расстоянии от источников

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{e^{-ikc}}{ikc}. \tag{10}$$

Чтобы представить себе, каково соотношение между фазами, предположим, что индуцированное колебание φ распространяется от B по пути A и подвержено дополнительному запаздыванию на $\frac{1}{4}\lambda$, так что общее запаздывание между B и A равно $c + \frac{1}{4}\lambda$. Что касается амплитуды, то φ больше ψ в отношении $1 : kc$.

Таким образом, когда kc мало, индуцированное колебание значительно больше и полный звук значительно громче, чем если бы действие A не имело места. В этом случае фаза запаздывает на четверть периода.

Важно получить ясное представление о причине этого усиления звука. В предыдущей главе (§ 280) мы видели, что если A фиксировано, B излучает значительно меньше, чем этого можно было бы ожидать на основании развитого давления. Объяснение этого заключалось в том, что *фаза* давления была неблагоприятной; большая часть его концентрируется только на преодолении инерции окружающего воздуха и неэффективна в смысле совершения работы. Но давление, которое приводит A в движение, есть полное давление, а не только та несущественная его часть, которая сама совершала бы работу. Движение A определяется условием, что та компонента полного давления на A, которая имеет фазу скорости, должна быть равна нулю. Но большая часть давления, которое обусловлено движением A, имеет фазу ускорения, и поэтому предписанное условие требует равенства малой компоненты давления, обусловленного движением A, некоторой величине, сравнимой с большой компонентой давления, обусловленного движением B. Результатом является то, что A становится значительно более мощным источником, чем B. Поршень A, конечно, не совершает никакой работы; его эффект состоит в увеличении работы, совершаемой в B, путем изменения соотношения между фазами давления и скорости, которое иначе было бы неблагоприятным.

Бесконечная плоскость в предыдущем рассуждении требуется только для того, чтобы мы могли найти за ней место для нашего

механизма пружин. Если мы удовольствуемся еще более идеализированными источниками и резонаторами, то мы можем от нее отказаться. Каждый поршень следует дополнить дублетом, колеблющимся аналогичным образом, но в противоположном направлении; эффектом этого будет обращение в нуль на плоскости AB нормальной скорости жидкости. При этих условиях плоскость не будет оказывать никакого влияния, и ее можно удалить. Если размеры пластинок беспредельно уменьшать, то они становятся в конце концов эквивалентными простым источникам жидкости: мы заключаем отсюда, что простой источник B становится более эффективным, чем раньше, в отношении $1:kc$, если на небольшом расстоянии c от него действует простой резонатор (как его можно назвать) той же высоты, т. е. источник, в котором инерция непосредственно окружающей жидкости компенсируется при помощи соответствующих приспособлений и который приводится в движение только внешними причинами.

При настоящем состоянии наших сведений в области механики колеблющихся жидкостей, когда дедуктивные трудности по большей части еще предстоит преодолеть, всякое упрощение условий, которое позволяет продвинуться вперед, не нарушая целиком практического характера вопроса, может оказаться шагом большой важности. Таким было, например, введение Гельмгольцем представления об источнике, сконцентрированном в одной точке, который аналитически представляется нарушением в этой точке уравнения непрерывности. Возможно, что аналогичным образом и представление о простом резонаторе также окажется полезным, хотя построить его было бы, так сказать, еще более невозможно, чем простой источник.

320. Мы видели, что помещение вблизи простого источника резонатора, настроенного соответствующим образом, вызывает значительное усиление звука. То же самое имеет место в еще большей степени, когда источник звука сложный. Потенциал, обусловленный двойным источником (§§ 294, 324), есть

$$r\psi = \mu e^{-ikr}\left(1 + \frac{1}{ikr}\right). \tag{1}$$

Если резонатор находится на небольшом расстоянии c, то

$$\psi_0 = \mu_0 \frac{e^{-ikc}}{ikc^2},$$

и поэтому потенциал от резонатора, расположенного на расстоянии r', есть

$$\varphi = \mu_0 \frac{e^{-ikc}}{ikc^2} \cdot \frac{e^{-ikr'}}{ikr'} = \mu_0 \frac{e^{-ikc}}{i^2k^2c^2} \cdot \frac{e^{-ikr'}}{r'}. \tag{2}$$

Если μ_0 обращается в нуль, то резонатор не дает никакого эффекта, но если $\mu_0 = \pm 1$, т. е. если резонатор расположен на оси двойного источника, мы имеем

$$\varphi = \mp \frac{e^{-ikc}}{k^2c^2} \cdot \frac{e^{-ikr'}}{r'}. \tag{3}$$

На некотором расстоянии от двойного источника вызываемый им потенциал равен

$$\psi = \mu \frac{e^{-ikr}}{r}. \qquad (4)$$

Таким образом, мы можем считать, что потенциал, вызываемый резонатором, если пренебречь угловым изменением, больше потенциала двойного источника в отношении $k^2c^2 : 1$.

Колеблющаяся твердая сфера сообщает окружающему воздуху движение того же рода, что и двойной источник, расположенный в ее центре; но замена, подсказываемая этим фактом, допустима только тогда, когда радиус сферы мал сравнительно с c; другими словами, присутствие сферы изменяет действие резонатора. Тем не менее, предыдущее исследование показывает, насколько мощно действие резонатора, когда он помещен в соответствующем положении вблизи сложного источника звука, характер которого таков, что он сам по себе давал бы на некотором расстоянии лишь очень малый эффект.

Одним из лучших примеров этого применения резонатора является колеблющийся стеклянный или металлический стержень, закрепленный своими узловыми точками. Стеклянная полоска около фута [30 *см*] длиной, шириною в 1 дюйм [2,5 *см*] и средней толщины (скажем, $\frac{1}{8}$ дюйма, [0,32 *см*]), поддерживаемая на расстоянии около 3 дюймов [7,6 *см*] от концов обвитой вокруг нее пружиной, хорошо отвечает назначению. Если ударить по ней молотком, то она дает очень мало звука, если не считать обертонов; но даже от них можно почти совсем освободиться, выбирая молоток подходящей мягкости. Эта недостаточность звука является следствием малых размеров стержня сравнительно с длиной волны, что позволяет воздуху легко переходить с одной стороны на другую. Если поместить теперь над одним из свободных концов стержня устье резонатора соответствующей высоты [1]), то при правильном ударе можно получить звук значительной силы и чистоты. Этим путем можно построить усовершенствованную фисгармонию с тонами много ниже тех, которые были бы осуществимы без резонаторов. В обычном инструменте длины волн достаточно коротки для того, чтобы позволить стержню сообщать колебания непосредственно воздуху.

Усиление звука звонка в хорошо известном опыте, принадлежащем Савару [2]), является примером действия этого же рода; но, пожалуй, наиболее поразительным примером является устройство, принятое Гельмгольцем в его опытах, требовавших чистых тонов, кото-

[1]) Для достижения наилучшего эффекта устье резонатора следует поместить довольно близко к стержню; тогда высота определенно ниже, чем это было бы в открытом пространстве. Окончательную установку можно осуществить, меняя величину препятствия. Это применение резонаторов известно с глубокой древности.

[2]) Savart, *Ann.. d. Chim.*, том XXIV, 1823.

рые и получились от камертонов, расположенных над устьем резонаторов.

321. Если два простых резонатора A_1 и A_2, находящиеся каждый в отдельности в унисоне с источником, помещают рядом друг с другом, эффект меньше, чем в случае, когда имеется только один резонатор. Если потенциалы от A_1 и A_2 соответственно равны φ_1 и φ_2, то мы можем положить

$$\varphi_1 = A_1 \frac{e^{-ikr_1}}{r_1}, \quad \varphi_2 = A_2 \frac{e^{-ikr_2}}{r_2}.$$

Пусть R представляет расстояние A_1A_2, а ψ_1 и ψ_2 — потенциалы, которые существовали бы в A_1 и A_2, если бы не было резонаторов; тогда условия для определения A_1 и A_2, в силу (5) § 319, следующие:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 + \frac{A_2}{R} &= +ikA_1, \\ \psi_2 + \frac{A_1}{R} &= +ikA_2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Согласно гипотезе, ψ_1 и ψ_2 приблизительно равны, и поэтому

$$A_1 = A_2 = \frac{R}{-1 + ikR}\psi. \tag{2}$$

Так как ikR мало, то эффект много меньше, чем только с одним резонатором. Следует впрочем заметить, что уменьшенная эффективность связана с тем, что резонаторы расстраивают друг друга, и если компенсировать эту тенденцию изменением пружины, то любое число резонаторов, помещенных рядом, даст в точности тот же эффект, что и один резонатор. Этот момент иллюстрируется § 302, где можно видеть (32), что хотя резонанс и не зависит от размеров пластины, от них зависит инерция воздуха, которая должна быть компенсирована пружиной.

322. Здесь было бы уместно сказать несколько слов о возражении, выставленном Бозанке,[1]) и, казалось бы, обесценивающем обычные вычисления высоты резонатора и поправки на длину органных труб. Когда жидкость протекает постоянным потоком через отверстие в тонкой пластине, то характер движения со стороны, где давление низкое, совершенно иной, чем это было найдено в § 306. Жидкость, вместо того чтобы, пройдя через отверстие, растекаться по поверхности пластины, образует приблизительно цилиндрическую струю, форму которой для двумерного случая можно вычислить[2]) по формуле, данной Кирхгоффом. Со стороны высокого давления движение не отклоняется так значительно от определяемого электрическим законом. Равным образом жидкость, выходящая наружу из трубы, про-

[1]) Bosanquet, *Phil. Mag.*, том IV, стр. 125, 1877.
[2]) *Phil. Mag.*, том II, стр. 441, 1876.

должает двигаться цилиндрическим потоком. Если внешнее давление больше, то характер движения иной. В этом случае линии тока сходятся со всех сторон к устью трубы, собираясь затем в параллельный пучок, сечение которого значительно меньше сечения трубы. Ясно, что если бы образование струй имело место в значительной степени и при прохождении воздуха через устья резонаторов, то наши вычисления высоты нужно было бы значительно видоизменить.

Исследование точных условий, при которых образуются струи, является предметом большой трудности. Можно было бы даже сомневаться в том, происходит ли образование струй вообще в жидкости без трения, движущейся с настолько малыми скоростями, что соответствующие давления, которые пропорциональны квадратам скоростей, незначительны. Но для воздуха, движущегося под действием давлений, имеющихся в резонаторах, с которым нам и приходится иметь дело, нужно принять, что струи иногда могут встречаться. Около двух лет назад, производя опыты с одним из латунных резонаторов Кенига высоты c', я заметил, что, когда соответствующий камертон, сильно возбужденный, располагался около устья, из сопла на противоположной стороне выходила струя воздуха значительной силы. Эта струя способна усилиться до такой степени, что может задуть свечу, на пламя которой она направлена. Эффект этот не связан с каким-нибудь особым движением воздуха около ножек камертона; это можно показать, установив камертон на резонансный ящик и обратив открытый конец ящика к устью резонатора; получаемый эффект лишь немного меньший по интенсивности. Аналогичный результат был получен с камертоном и резонатором, настроенными октавой ниже (c). Более близкое исследование обнаружило тот факт, что на краях сопла поток, текущий наружу, заменяется потоком в противоположном направлении, так что язык пламени расположенной подходящим образом свечи представлялся входящим в сопло, между тем как другая свеча, расположенная непосредственно впереди, задувалась. Эти два эффекта в действительности чередуются и только кажутся одновременными вследствие неспособности глаза уследить за столь быстрыми изменениями. Образование струй должно вызывать серьезную потерю энергии движения. Чтобы получить сильный звук от резонатора этой формы, необходимо поэтому каждый раз, когда к нему подносится соответствующий камертон, закрывать сопло.

В то же время не представляется вероятным, чтобы образование струй в сколько-нибудь заметной степени имело место у устьев обычно употребляемых резонаторов. Почти достаточным доказательством этого является близкое согласие между наблюденной и вычисленной высотой. Другой аргумент, приводящий к тому же самому заключению, можно извлечь из факта стойкости собственных колебаний резонаторов (§ 311), продолжительность которых, казалось бы, исключает всякую значительную причину диссипации, сверх передачи движения окружающему воздуху.

В случае органных труб, в которых колебания очень мощны, все эти доводы не так неоспоримы, но я не вижу оснований полагать, что движение у верхнего открытого конца сильно отличается от того, которое принимает в своих вычислениях Гельмгольц. Никакого противоположного заключения, я думаю, вывести из явлений стационарного движения с уверенностью нельзя. В противоположном крайнем случае — случае импульсивного движения — струи, конечно, не могут образовываться, как это следует из принципа наименьшей энергии Томсона (§ 79), и неясно, с каким из этих крайних случаев наиболее справедливо было бы сравнить периодическое движение. Наблюдения по методу перемежающегося освещения (§ 42) могут впрочем пролить дальнейший свет на этот вопрос.

322*a*. Как уже было упомянуто, свободные колебания массы воздуха, заключенной в резонаторе, могут быть возбуждены соответствующим ударом по последнему. Газ вначале не принимает участия в движении, сообщенном стенкам, и полученное таким образом относительное движение является источником свободных колебаний типа, рассмотренного в предыдущих разделах. Когда вынимают пробки из частично наполненных бутылок или когда резко снимают крышки круглых картонных пеналов, свободные колебания резонирующих столбов воздуха возбуждаются именно этим путем.

Если колебания необходимо поддерживать для того, чтобы обеспечить непрерывное испускание звука, то колеблющееся тело должно быть соединено с источником энергии (§ 68*a*); при этом взаимодействие между источником и телом должно быть таким, чтобы имело место правильное соотношение фаз. Вопрос о том, что именно является источником звука — источник энергии или резонатор, — не имеет особенного значения, и на него можно ответить по-разному, в зависимости от точки зрения в данный момент. В органе источником звука является скорее труба, нежели сжатый воздух внутри мехов или даже струя воздуха, но когда звучание подобной трубы поддерживается пламенем, то преимущественная роль в их соединенном эффекте обычно отдается последнему.

До настоящего момента истолкование незатухающих (поддерживаемых) колебаний довольно просто, но для полной теории в каком-либо частном случае требуется такое исследование взаимодействия, которое определит соотношение между фазами. От этого зависит вопрос о том, будет ли взаимодействие благоприятным или неблагоприятным для продолжения колебаний, определить же это часто очень трудно.

Прежде чем перейти к обсуждению действия дутья, целесообразно остановиться несколько подробнее на свойствах органной трубы, рассматриваемой просто как резонатор. Мы видели (§ 314), как следует учитывать верхний открытый конец, но согласно правилу Кавайе-Колля полная поправка, которую нужно прибавить к измеренной длине открытой трубы, чтобы получить приблизительное согласие с простой

формулой (8) § 255, достигает величины $3\frac{1}{3}R$, что значительно больше поправки $1{,}2R$, необходимой для простой трубы кругового сечения, открытой с обоих концов. Это расхождение иногда приписывается дутью. Следует, однако, вспомнить, что нижний конец открыт значительно меньше чем верхний, и что если бы для последнего требовалась заметная поправка за счет того, что он недостаточно открыт, то, вероятно, значительно большая поправка была бы нужна для первого. Наблюдения автора [1]) показали, что это действительно так. Труба с выдвижным коленом настраивалась в максимальный резонанс с данным (256) камертоном, как в эксперименте Блэйкли (§ 314). Через нее затем продували воздух хорошо отрегулированными мехами с измеренным давлением; высота полученных этим путем звуков сопоставлялась по методу биений (§ 30) с высотой камертона. Результаты показали, что высота трубы, приведенной в звучание потоком воздуха при практически доступных давлениях, была выше, чем ее собственная нота максимального резонанса, так что значительную поправку к длине, найденную Кавайе-Коллем, нельзя приписать дутью, а следует отнести за счет того, что нижний конец — сжатый — в элементарной теории трактуется как открытый. Чтобы оценить собственную ноту, потребовалась бы еще большая „поправка к длине".

Увеличение высоты за счет дутья возрастает вместе с давлением. Так, в рассмотренном выше случае труба при давлении в 1,06 дюймов (2,7 *см*) водяного столба давала ноту приблизительно на 2 колебания в секунду выше ноты камертона, но когда давление дутья возрастало до 4,2 дюймов (10,7 *см*), избыток был около 11 колебаний в секунду. Когда давление увеличивалось еще больше [overblowing], труба давала октаву своего собственного тона, что, несомненно, соответствует другому виду колебания воздушного столба.

Остается рассмотреть поддерживающее колебание действие дутья. Колебания столба воздуха можно усилить, либо вводя в том месте, где изменяется плотность, в момент сжатия (или же удаляя в момент разрежения) жидкость, либо сообщая соответствующее ускорение частям столба воздуха, расположенным около пучности. Так как дутье органа действует у открытого конца трубы, то ясно, что здесь мы имеем дело со второй альтернативой. Ветровой слой, направленный поперек края трубы, легко отклоняется. Когда во время колебания внешний воздух стремится войти в трубу, он увлекает с собой струю более или менее полностью. На полпериода позднее, когда собственный поток направлен наружу, струя отклоняется в соответствующем направлении. В каждом из случаев струя усиливает преобладающее движение и делает, таким образом, возможным поддержание колебаний.

---

[1]) *Phil. Mag.* III, стр. 462, 1877; XIII, стр. 340, 1882.

Для хорошего звучания необходимо, чтобы струя воздуха была отрегулирована очень точно. Однако, Шнеебели [1]) показал, что если колебание уже однажды возникло, свободы оказывается больше. В одной экспериментальной установке струя была отрегулирована так, что она проходила целиком вне трубы. При этих условиях звучание было несовершенным, пока с помощью не очень сильного дутья, направленного на нее снаружи, струя не прогибалась внутрь трубы до нужного положения. Труба тогда начинала звучать и продолжала действовать, пока давлением в обратном направлении струя не отклонялась назад. Движение струи можно было сделать видимым с помощью дыма или кусочка папиросной бумаги, удерживавшегося так, чтобы он колебался вместе с ней. Как Шнеебели, так и Смит [2]) настаивают на аналогии струи с язычком язычковой органной трубы, однако, механизм действия в этих двух случаях, повидимому, существенно различен.

Изложенная нами точка зрения, принятая Гельмгольцем в четвертом издании его большого труда, повидимому, позволяет дать удовлетворительное общее объяснение поддержания непрерывных колебаний; однако, объяснение это нельзя считать полным. В вопросах этого рода практика обычно опережает теорию, и многие поколения практиков довели органную трубу до высокой степени совершенства.

Другая точка зрения, которая была благоприятно встречена многими авторитетами, сводится к тому, что трубе приписывается роль приспособления, усиливающего своим собственным резонансом звук, первоначально возникший благодаря трению струи об ее край; повидимому, возникновение звука таким путем, также не допускает сомнений [3]). Возможно, что между этими двумя точками зрения в конце концов меньше различия, чем это могло бы показаться вначале, и вторая может оказаться особенно удобной, если речь идет скорее о возникновении звука, нежели собственно о его поддержании. Детальное обсуждение вопроса можно найти в работе ван-Шайка [4]). Чтобы получить более полное объяснение, мы должны, вероятно, подождать, когда лучше будет известна механика струи.

322*b*. Характер звука, издаваемого трубой, зависит от того, имеются ли в нем различные обертоны — вопрос, требующий дальнейшего рассмотрения. Когда система колеблется свободно, обертоны могут быть гармоническими или негармоническими, в зависимости от ее природы, и состав звука зависит от начальных условий. Но в случае незатухающего (поддерживаемого) колебания, которое мы сейчас изучаем, движение строго периодическое, и обертоны, если они

---

[1]) Schneebeli, *Pogg. Ann.*, том 153, стр, 301, 1874.

[2]) Smith, *Nature*, 1873, 1874, 1875.

[3]) См., например, Melde, *Akustik*, стр. 252; Sondhauss, *Pogg. Ann.*, XCI, стр. 126, 1854.

[4]) Van Schaik, *Ueber die Tonerregung in Labialpfeifen*, Роттердам, 1891.

вообще имеются, должны быть гармоническими. Частота всего колебания будет приблизительно соответствовать собственной наиболее низкой частоте трубы [1]), но совпадение между высотой слышимого обертона и обертона какого-либо свободного колебания может быть значительно менее близким. Интенсивность всякого обертона зависит, таким образом, от двух вещей: во-первых, от того, в какой степени поддерживающие силы обладают компонентой правильного типа, и, во-вторых, от степени близости между обертоном и каким-либо собственным тоном колеблющегося тела. В органных трубах резкий верхний край и сравнительно небольшая толщина струи воздуха благоприятствуют образованию обертонов; благодаря этому Гельмгольцу удалось в узких открытых трубах отчетливо слышать первые шесть парциальных тонов. Напротив, в широких открытых трубах совпадение между обертонами и собственными тонами менее близкое. Благодаря этому трубы данного класса, особенно деревянные, дают звук более мягкого характера, в котором кроме основного тона можно обнаружить только октаву и дуодециму [2]).

Когда около склянки или сферического резонатора продувают воздух, как в случае органной трубы, то благодаря отсутствию соседних с гармониками собственных тонов возникающий звук почти свободен от обертонов.

322*c*. Когда две органные трубы одинаковой высоты стоят рядом друг с другом, то возникают осложнения, которые на практике нередко причиняют затруднение. В исключительных случаях трубы могут почти что заставить замолчать друг друга. Но даже когда их взаимодействие более умеренное, оно все же может привести к тому, что заставит трубы звучать в унисон, вопреки неизбежным малым различиям. Простейший случай, какой представляется нашему вниманию, — это случай трубы, вдоль средней плоскости которой предположена введенной тонкая жесткая (resisting) стенка. Если эта стенка занимает всю плоскость, то первоначальная труба разделяется на две, независимые друг от друга и идеально одинаковые трубы. Высота этих сегментов одинакова с высотой первоначальной трубы, если пренебрегать трением, так как во время колебаний трубы движение в средней плоскости симметрии отсутствует. Но дело меняется, если стенка образует лишь часть плоскости, заключенной внутри трубы, так как тогда два колеблющихся столба могут взаимодействовать. Система в целом имеет две степени свободы — сейчас мы не рассматриваем обертонов — и свободные колебания совершаются с двумя различными периодами. Первый из них характеризуется синхронизмом фазы колебаний составляющих столбов воздуха, и высота, следовательно, та же, что и перед разделением трубы на две части. Но для второго типа фазы колебания составляющих столбов противо-

[1]) Мы не говорим здесь о „чрезмерном дутье" [overblowing].
[2]) Helmholtz, *Tonempfindungen*, 4-е издание, стр. 155, 1877.

положны, так что воздух, выходящий из одного конца, поглощается смежным открытым концом другой части. Вследствие этого „поправка на открытые концы" значительно уменьшается и высота этого колебания соответственно повышается. Пока движение свободное, временно могут существовать колебания и того и другого рода, что может повести к возникновению биений; отсюда, однако, не следует, что оба колебания могут поддерживаться дутьем. Это и в самом деле уже заранее кажется невероятным, и эксперимент показывает, что спустя мгновение колебания приводятся только ко второму типу. Смежные открытые концы действуют как противоположные источники, и испускается очень мало звука, хотя внутри труб и снаружи, в непосредственном соседстве с их устьями, сила колебаний не уменьшается. Подобные же явления возникают, когда две отдельные, но одинаковые трубы устанавливаются рядом друг с другом, и под влиянием дутья эта система может совершать колебания только одного рода, вопреки малым различиям в высоте нот, испускаемых трубами, когда они звучат по отдельности [1]).

322*d*. Прямое наблюдение положения вещей внутри колеблющегося столба воздуха является, несомненно, очень трудным, однако, интересные результаты были получены Теплером и Больцманом [2]): они призвали на помощь метод оптической интерференции, чтобы преодолеть трудность, обусловленную невидимостью воздуха, и стробоскопический метод, чтобы преодолеть трудность, обусловленную быстротой изменений. Верхний конец органной трубы, закрытой тонкой металлической пластинкой, был снабжен стенками из стекла, выдававшимися за металлическую пластинку; с помощью специальной оптической установки осуществлялась интерференция света, проникшего выше и ниже пластинки. Вследствие того, что пространство выше занято воздухом нормальной плотности, ниже — воздухом в состоянии увеличенной или уменьшенной плотности, соответственно мгновенной фазе момента, интерференционные полосы испытывают смещения, синхронные с воздушными колебаниями. Если наблюдать непосредственно, то эти смещения ускользают от глаза: но с помощью электрически возбуждаемого камертона, снабженного соответствующими щелями (§ 42), освещение можно сделать перемежающимся с периодом, почти совпадающим с периодом колебания; тогда последовательность изменений становится видимой. Из наблюдаемого движения полос возможно заключить не только о полном изменении плотности от максимума к минимуму, но и о законе изменения плотности в функции времени.

Когда труба большого сечения продувалась лишь умеренно сильно, изменение плотности в узле достигало 0,009 атмосферы, и закон был почти точно простым гармоническим. При большом давлении дутья

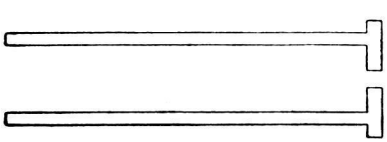
---

[1]) *Proceedings of the Musical Association*, декабрь 1878.
[2]) Töpler u. Boltzmann, *Pogg. Ann.*, том CXLI, стр. 321, 1870.

простой гармонический закон сильно нарушался, причем полосы сдвигались почти внезапно из одного крайнего положения в другое. В этом случае амплитуда первого обертона составляла около четверти амплитуды основного тона. Полное изменение плотности было равно 0,019 атмосферы.

322*е*. В некоторых экспериментальных исследованиях применялись трубы более симметричной относительно оси формы [1]). Кромку трубы составлял цельный круговой край трубы, определяемый плоскостью, перпендикулярной к оси, а над ним продувался поток воздуха. Аналогичное устройство принято в обычном паровом свистке.

Другой путь применения струи воздуха для возбуждения звучания малых труб был испробован Зондхауссом [2]); он еще менее понятен. Труба, целиком открытая с одного конца, частично закрыта с другого конца деревянной или металлической пластинкой в 2 или 3 *мм* толщины, имеющей цилиндрическое отверстие с острыми краями (фиг. 63а). Чтобы привести трубу в действие, необходимо только поместить ее открытый конец в резервуар, откуда идет поток воздуха. Для грубых целей, когда не требуется ни регистрировать давление, ни сохранять постоянную температуру, достаточно дуть ртом, и звук можно возбудить как нагнетанием, так и всасыванием. Цилиндрическое отверстие можно заменить отверстием конической формы, но в этом случае воздух должен течь от более узкого конца к более широкому. Звуки, отмеченные Зондхауссом, изменялись от a' до f^6, соответствуя во всех случаях собственным тонам трубы.



Фиг. 63а.

Свистящие звуки, издаваемые ртом, очевидно, принадлежат к этому классу; изменение высоты (примерно от c'' до c^5) осуществляется, главным образом, за счет изменения внутренней емкости (§ 304). Относительно образования звука при свисте иногда говорят, что оно связано с вибрацией губ, но нам представляется, что это ошибочное мнение. Я нашел, что можно свистеть через подходящее коническое отверстие в куске самшита (box-wood), прочно зажатом между губами.

Существование колебания может рассматриваться как свидетельство того, что постоянное течение воздуха через рассматриваемые каналы неустойчиво. Противоположно тому, что имеет место в органной трубе и в чувствительных пламенах, деформации струи, казалось, должны бы быть симметричными.

Возможно, что здесь имеется тенденция к попеременному следованию и отступлению от хода, намеченного стенками.

---

[1]) Gripon, *Ann. d. Chemie*, III, стр. 384, 1874.
[2]) Sondhauss, *Pogg. Ann.*, XCI, стр. 126, 1854.

322 *f*. Вопрос о поддержании колебаний посредством тепла составляет важную часть интересующего нас предмета и мы постараемся дать по крайней мере общее представление о том, каким образом этот эффект имеет место. Почти во всех случаях, где телу сообщают тепло, происходит расширение, и его можно заставить совершать механическую работу. Если фаза сил, действующих таким путем, благоприятна, можно получить и поддерживать колебание.

Наглядным примером является прибор (rocker) Тревеллиана, состоящий из некоторой массы железа или меди, которой придана такая форма, чтобы во время колебания вес ее попеременно переносился на одно или другое из двух смежных и параллельных ребер. Когда инструмент нагревают и помещают на плиту холодного свинца, колебания продолжаются до тех пор, пока еще остается достаточно тепла. „Сэр Джон Лесли первый высказал предположение, что причину этих колебаний следует искать в расширении холодного куска свинца за счет теплоты, которая течет внутрь него от нагретого металла в точках контакта. Фарадей [1]), Зеебек [2]) и Тиндаль [3]) приняли это объяснение; они показали, что большая часть фактов, которые они сами и другие получили относительно этих колебаний, легко объясняются с этой точки зрения, если только предположить, что расширение свинца достаточно велико, чтобы произвести заметный эффект. Напротив, Форбс [4]) после обширной серии опытов пришел к отрицанию объяснения сэра Джона Лесли; одним из принципиальных оснований для этого была представлявшаяся ему невозможность допустить, что расширение, вызванное таким медленным процессом, как теплопроводность, может дать сколько-нибудь заметный механический эффект.

Дэвис, из статьи которого [5]) взята приведенная цитата, исследовал вопрос математически и показал, что объяснение Лесли является достаточным. Очевидно важно, чтобы нижнее тело обладало большою скоростью расширения с температурой. В этом отношении свинец стоит высоко среди металлов, а каменная соль, которую Тиндаль нашел хорошо отвечающей требованиям эксперимента, обладает еще большей скоростью расширения.

На возражение Форбса можно ответить, что процесс теплопроводности отнюдь не является медленным, если расстояния и массы малы; а особое отталкивание, выдвинутое им в качестве основы иного объяснения, было бы неподходящим по фазе: необходимо, чтобы фаза силы отставала от фазы отрицательного смещения.

В опыте, принадлежащем Пэйджу [6]), колебания сделаны независимыми от начальной разности температур, местное же нагревание в

---

[1]) Faraday, *Proc. of Roy. Inst.*, том II, стр. 119, 1831.
[2]) Seebeck, *Pogg. Ann.*, том LI, стр. 1, 1840.
[3]) Tyndall, *Phil. Mag.*, том VIII, стр. 1, 1854.
[4]) Forbes, *Phil. Mag.*, том IV, стр. 15, 182, 1834.
[5]) Davis, *Phil. Mag.*, том XLV, стр. 296, 1873.
[6]) Page, *Silliman's, Journal*, том IX, стр. 105, 1850.

точках контакта осуществляется с помощью электрического тока, который пропускают от одного тела к другому. В этой установке из расширения нижнего тела нельзя вывести никакого сжатия верхнего. На аналогичном принципе Гор[1]) осуществил непрерывное движение медного шара, который движется по круговым рельсам, соединенным с мощной батареей.

322*g*. Но наиболее интересными примерами колебаний, поддерживаемых с помощью тепла, являются те, которые происходят, когда резонирующее тело газообразно. „Если теплота периодически сообщается массе воздуха, колеблющейся, например в цилиндре с поршнем, и отнимается от нее, то получаемый эффект зависит от фазы колебания, с каким происходит передача тепла. Если теплота сообщается воздуху в момент наибольшего сжатия или отнимается от него в момент наибольшего разрежения, то это усиливает колебание. Напротив, если теплота сообщается в момент наибольшего разрежения, то колебание этим ослабляется. Последнее происходит само собой вследствие излучения (§ 247), когда скорость изменения не очень велика и не очень мала; действительно, когда воздух сжимается, он становится теплее и сообщает тепло окружающим телам. Два крайних случая являются исключительными, хотя и по разным причинам. В первом случае, который соответствует гипотезам теории распространения звука Лапласа, времени, для того, чтобы мог осуществляться заметный перенос тепла, недостаточно. Во втором случае температура остается почти постоянной, и потеря тепла происходит во время *процесса* сжатия, а не тогда, когда сжатие уже произошло. Этот случай соответствует теории распространения звука Ньютона. Если перенос тепла имеет место в момент наибольшего сжатия или наибольшего разрежения, высота остается неизменной.

„Если воздух в момент переноса тепла имеет нормальную плотность, то колебание не усиливается и не ослабляется, но высота его изменяется. Так, высота *увеличивается*, если тепло сообщается воздуху за четверть периода до фазы наибольшего сжатия, и *понижается*, если тепло сообщается на четверть периода *позже* фазы наибольшего сжатия.

„Вообще, эффект того и другого типа достигается посредством периодического переноса тепла. Высота изменяется, а колебания или усиливаются или ослабляются. Однако, эффект второго типа не имеет места, если рассматриваемая масса воздуха находится в пучности, т. е. в месте, где плотность не меняется, а также, если тепло сообщается в одинаковой мере как на любой стадии разрежения, так и на соответствующей стадии сжатия“ [2]).

---

[1]) Gore, *Phil. Mag.*, том XV, стр. 519, 1858; том XVIII, стр. 94, 1859.

[2]) *Proc. Roy. Inst.*, том VIII, стр. 536, 1878; *Nature*, том XVIII, стр. 319, 1878.

Таким образом, во всякой задаче о поддержании колебаний посредством тепла, какая может встретиться на практике, главный вопрос, который должен рассматриваться, — это вопрос о соотношении между *фазой* передачи тепла и *фазой* колебания.

322*h*. Звуки, испускаемые струей водорода, горящего в трубке, открытой с обоих концов, были замечены вскоре после открытия этого газа и были предметом нескольких тщательных исследований. Хладни указал, что ноты здесь в основном те же, какие могут быть получены другими путями, например с помощью дутья. Фарадей [1] показал, что и другие газы в состоянии занять место водорода, хотя и не без ущерба. Однако, только Зондхауссу [2] мы обязаны наиболее детальным исследованием условий, при которых образуется звук. Его опыты указывают на важность роли, которую играет столб газа в трубке, дающей струю. Звук, например, нельзя получить с подводящей газ трубкой, которая заткнута ватой вблизи струи, хотя на-глаз нельзя обнаружить никакой разницы между пламенем, полученным этим путем, и другими, которые в состоянии возбуждать звук. Когда подводящая газ трубка не содержит препятствий, звуки, получаемые переменой резонатора, ограничены по высоте и часто разделяются на отдельные группы. В интервалах между группами никаким способом невозможно вызвать постоянный звук; можно еще добавить, что по крайней мере для части интервала влияние пламени неблагоприятно, так что колебание, возбужденное дутьем, затухает быстрее, чем в случае, когда пламя не было зажжено.

Можно применять резонаторы и иной формы, чем открытая труба; иногда это дает преимущество. Очень низкие ноты можно получить от сферических резонаторов, таких, как большие шары, применяемые для демонстрации сгорания фосфора в кислороде. Такой шар давал в своем естественном состоянии глубокий и чистый тон в 64 колебания в секунду. Когда к нему была приспособлена длинная и узкая шейка, сделанная из картонной трубки, вычисленная частота падала до 25, и колебания, достаточно сильные, чтобы погасить пламя, были едва слышны. Когда желательно возбудить очень низкие звуки, подводящую трубку нужно взять значительной длины, а отверстие не должно быть сильно сжатым.

Электрически возбуждаемые камертоны могут быть при получении чистых тонов иногда заменены поющим пламенем, если нет настоятельной необходимости соблюдать абсолютное постоянство высоты. Чтобы избежать прогрессивного ухудшения воздуха, рекомендуется пользоваться резонатором, открытым одинаково как сверху, так и снизу. Цилиндрические стекла с расширением, какие часто применяются для парафиновых ламп, удовлетворяют этому требованию

---

[1] Faraday, *Quart. Journ. Sci.*, том V, стр. 274, 1818.
[2] Sondhauss, *Pogg. Ann.*, том CIX, стр. 1, 426, 1860.

и в то же время дают чистый тон. Можно также поместить посредине цилиндрической трубы слабо пригнанный пыж [1]).

Как показал Уитстон, прерывистость поющего пламени легко демонстрировать с помощью колеблющегося или вращающегося зеркала. Более точное исследование лучше всего осуществляется стробоскопическим методом (§ 42). Зарисовки наблюденных этим путем преобразований были даны Теплером [2]); из них видно, что при определенной фазе пламя может целиком втягиваться внутрь подводящей трубки.

Колебания, способные быть поддержанными, не всегда возникают сами собой. Начальный импульс можно сообщать ударом по резонатору или легким продуванием, направленным поперек устья. В поразительных экспериментах Шаффгоча и Тиндаля [3]) пламя, молчавшее до того, отвечает на звук, который находится в унисоне с ним. В некоторых случаях интенсивность возбужденных таким путем колебаний возрастает до такой степени, что пламя гаснет.

Эксперименты Зондхаусса показывают, что между длинами подводящих трубок и звучащих столбов воздуха существует пропорциональность. Для различных газов можно сохранять одну и ту же подводящую трубку; средние длины звучащих столбов при этом приблизительно пропорциональны корням квадратным из плотности газа. Таким образом, устанавливается связь между собственной нотой подводящей трубки и нотами, которые можно получить с ее помощью.

Частью вследствие своеобразного и плохо понятого поведения пламен, частью же по другим причинам полное объяснение рассматриваемых сейчас явлений представляет некоторые трудности; но не может быть сомнения в том, что эти явления принадлежат к области колебаний, поддерживаемых нагреванием, причем теплота сообщается периодически массе воздуха, заключенной в звучащей трубке, в том месте, где в ходе колебания давление изменяется. Некоторые авторы склонялись к тому, чтобы обращать особое внимание на действие потока воздуха через трубу, но звуки, как мы видели, легко получить не только при отсутствии прямого потока, но даже когда пламя расположено так, что вблизи него вообще нет заметного периодического движения воздуха.

Вследствие переменного давления внутри резонатора выход газа, а поэтому и выделение теплоты, изменяется во время колебания. Возникает вопрос о том, при каких условиях это изменение обладает характером, необходимым для поддержания колебания. Если предположить, — как мы склонны были поступить в первоначальный момент, — что выход газа наибольший, когда давление в резонаторе

---

[1]) *Phil. Mag.*, том VII, стр. 149, 1879.
[2]) Töpler, *Pogg. Ann.*, том CXXVIII, стр. 126, 1866.
[3]) Tyndall, *Sound*, 3-е издание, стр. 224, 1875.

имеет наименьшую величину, и что фаза наибольшего нагрева совпадает с фазой наибольшего выхода газа, то мы имели бы положение вещей, наиболее неблагоприятное из всех возможных для существования колебания. Нетрудно, однако, видеть, что оба эти предположения неправильны. В подводящей трубке (предполагая, что она ничем не заткнута и имеет не слишком малое отверстие) возбуждаются стоячие или приблизительно стоячие колебания, фаза которых одинакова с фазой или противоположна фазе колебания в резонаторе. Если длина подводящей трубки от горелки до открытого конца сосуда, где добывается газ, меньше четверти длины волны действительного колебания в водороде, то наибольший выход газа *опережает* на четверть периода фазу наибольшего сжатия, так что, если развитие теплоты несколько *запаздывает* сравнительно с выходом газа, положение вещей *благоприятно* для поддержания звука. Известное запоздание такого рода неизбежно, потому что струя воспламеняющегося газа может гореть только снаружи; однако, во многих случаях можно обнаружить еще более сильную причину в том, что во время обратного входа газа в подводящую трубку небольшие количества воздуха могут войти из резонатора, удалить который следует раньше, чем снова начнется выход газа.

Если длина подводящей трубки в точности равна одной четверти длины волны, то стоячее колебание в ней будет такого характера, что узел образуется у горелки; при этом переменная часть давления сразу же внутри горелки будет той же самой, что и внутри резонатора. При этих условиях нет никаких причин к тому, чтобы течение газа, или выделение теплоты, было переменным, и поэтому колебание не может поддерживаться. Этот частный случай свободен от некоторых трудностей, которые присущи общей задаче, и сделанное заключение находится в согласии с наблюдениями Зондхауссa.

Когда длина подводящей трубки несколько больше четверти длины волны, движение газа существенно отличается от описанного вначале. Вместо того чтобы опережать фазу наибольшего сжатия, наибольший выход газа наружу здесь *отстает* от нее на четверть периода, и поэтому выделение теплоты несколько запаздывает, и весь эффект является неблагоприятным. Это положение вещей продолжает господствовать по мере удлинения подводящей трубки, пока она не достигает длины, равной полуволне, после чего движение снова меняет знак, и возможность поддержания колебания восстанавливается. Хотя размеры пламени и его положение в трубке (или горле резонатора) также производят свое влияние, все же этот очерк теории достаточен для объяснения факта, отмеченного Зондхауссом, — именно, что основою в этом вопросе является длина подводящей трубки.

322*i*. Другое явление рассматриваемого сейчас класса часто отмечается стеклодувами. Когда на конце довольно узкой трубки 12 или 14 *см*

длиной выдувается шар около 2 *см* диаметром, иногда слышен звук, исходящий от нагретого стекла. Для экспериментальных целей хорошо применять твердое стекло, которое впоследствии можно нагреть по желанию снова, причем оно не теряет своей формы. Как было показано Де-ля-Ривом, образование звука облегчается присутствием пара, особенно паров спирта и эфира.

Зондхаусс доказал [1]), что колебание самого стекла не играет существенной роли в этом явлении; этому же неутомимому наблюдателю удалось открыть связь (§§ 303, 309) между высотой ноты и размерами аппарата. Однако, никакого удовлетворительного объяснения образованию звука дано не было.

Ради простоты можно рассматривать простую трубку, нагретую у закрытого конца, с плавно падающей к холодному открытому концу температурой. Четвертью периода *ранее* фазы наибольшего сжатия (которое происходит почти одновременно во всех частях столба) воздух движется внутрь, т. е. к закрытому концу, и поэтому переходит от более холодных к более нагретым частям трубки; но теплота, полученная в этот момент (нормальной плотности), не оказывает никакого влияния ни в смысле усиления, ни в смысле ослабления колебания. То же самое было бы справедливо относительно всего теплового действия, если бы выравнивание температуры было мгновенным, так, чтобы между температурой воздуха и прилегающих частей трубки никогда не было заметной разницы. Но в действительности выравнивание температуры требует *времени*, и, таким образом, температура воздуха отличается от температуры прилегающих частей трубы, приближаясь к температуре той части трубки, *откуда* только что пришел воздух. Отсюда следует, что в момент наибольшего сжатия теплота приобретается воздухом, в момент же наибольшего разрежения — отдается и, таким образом, возникает возможность поддерживать колебания.

Не следует, однако, забывать, что, если совсем отвлечься от передачи тепла, сжатый воздух теплее разреженного воздуха; поэтому, для того чтобы все тепловое действие имело эффектом усиление, необходимо, чтобы перед сжатием воздух проходил не просто к более теплым частям трубки, но тоже к тем ее частям, которые более теплы, чем воздух, когда он туда прибывает. Ввиду этого для поддержания колебания необходим большой градиент температур, и даже при большом градиенте влияние переноса тепла будет необходимо неблагоприятным у закрытого конца, где движение очень мало. Это, вероятно, и является объяснением преимущества, даваемого расширением лампового стекла. Очевидно, что если нагревать *открытый* конец трубки, то эффект передачи тепла будет еще более неблагоприятным, чем в случае одинаковой повсюду температуры.

---

[1]) Sondhauss, *Pogg. Ann.*, том LXXIX, стр. 1, 1850.

322*j*. Последний пример образования звука в результате нагревания, который мы здесь рассмотрим, представляет собой поразительное явление, открытое Рийке [1]). Когда кусок частой металлической сетки, натянутый на нижнюю часть трубы, открытой с обоих концов и расположенной вертикально, нагревается газовым пламенем, помещенным ниже ее, то почти непосредственно вслед за удалением пламени слышен звук значительной силы, длящийся несколько секунд. Рийке нашел, что образование звука, отличаясь в этом отношении от случая звучащих пламен, тесно связано с возникновением сквозной тяги, встречающей нагретую сетку. При такой форме опыта теплота скоро исчерпывается, и звук прекращается; но сохраняя сетку нагретой (током от сильной гальванической батареи), Рийке удавалось продлить звук на сколь угодно долгое время.

Эти звуки могут быть получены очень сильными, и тогда получение их представляет собой очень интересный лекционный эксперимент. Для этой цели можно воспользоваться чугунной трубой в 5 футов (152 *см*) длиной и $4^3/_4$ дюйма (12 *см*) диаметром. Сетка (железная проволока) имеет около 32 ячеек на дюйм длины (2,54 *см*); ее удобно взять двух диаметров (толщин). Сетке можно придать с помощью молотка на цилиндрическом деревянном бруске такую форму, чтобы ее диаметр был немного меньше диаметра трубы, и тогда она будет сохранять свое положение в трубе просто благодаря трению. Когда нужно получить звук, сетчатые колпачки вдвигаются в трубу на высоту около фута (30,5 *см*); ниже их располагается пламя большой горелки на таком уровне, чтобы сетка нагревалась до яркокрасного каления. Для этого, если необходимо, следует удлинить вертикальную трубу лампы на дополнительную длину медной трубкой. Когда достигнуто хорошее красное каление, пламя быстро удаляют, убирая горелку или прекращая приток газа. Примерно через секунду возникает звук; вскоре его интенсивность возрастает настолько, что он сотрясает комнату, после чего постепенно замирает. Общая продолжительность звука может доходить до 10 секунд [2]).

Обсуждая вопрос о поддержании колебаний в соответствии с уже изложенными взглядами, мы должны исследовать характер переменной отдачи теплоты от сетки воздуху. Пока на отдачу действуют непосредственно изменения давления или плотности, это влияние неблагоприятно, поскольку воздух получает теплоту от сетки меньше, когда его собственная температура в результате сжатия повышается. Поддержание звука связано с переменной передачей тепла, являющейся результатом переменного *движения* воздуха через сетку, причем это движение складывается из равномерного движения вверх с движением попеременно вверх и вниз, обязанным колебанию. В нижней половине

---

[1]) Rijke, *Pogg. Ann.*, том CVII, стр. 339, 1859; *Phil. Mag.*, том XVII, стр. 419, 1859.

[2]) *Phil. Mag.*, том VII, стр. 155, 1879.

трубы эти движения действуют согласно за четверть периода *до* фазы наибольшего сжатия и противодействуют одно другому четвертью периода позднее этой фазы. Скорость переноса теплоты будет зависеть, главным образом, от температуры воздуха, соприкасающегося с сеткой, и является наибольшей, когда эта температура наинизшая. Пожалуй, всего легче проследить за механизмом действия на простом колебании без постоянного потока. При этих условиях весь воздух, который приходит в соприкосновение с металлом в течение полного периода, нагревается; после этого устанавливается состояние, при котором дальнейшая передача теплоты сравнительно мала. Легко теперь понять эффект наложения малого постоянного потока вверх. В конце движения, направленного внутрь, т. е. в фазе наибольшего сжатия, небольшое количество воздуха, с которым этого до сих пор не происходило и которое является поэтому холодным, приходит в соприкосновение с металлом, и теплота, сообщенная металлом этому количеству воздуха, действуют наиболее благоприятным образом в смысле поддержания колебания.

Совершенно иной результат получается, если поместить сетку в *верхней* половине трубы. В этом случае свежий воздух поступает в момент наибольшего разрежения, когда приток тепла оказывает вместо благоприятного — неблагоприятный эффект. Основную ноту трубы возбудить поэтому нельзя.

Дополнительное явление, открытое Боссша [1]) и Риссом [2]), может быть объяснено на основании тех же самых принципов. Если поток горячего воздуха встречает холодную сетку, то возникает звук; но чтобы получить основную ноту трубы, сетку следует расположить в верхней, а не в нижней, как раньше, половине трубы. В опыте, принадлежащем Риссу, звук поддерживается в течение неограниченного времени. Верхняя часть медной трубы сохраняется холодной с помощью воды, содержащейся в окружающем ее сосуде, через дно которого труба проходит. При этом сетка остается сравнительно холодной, хотя на нее и действует тепло газового пламени, расположенного дюймом или двумя ниже. Опыт иногда удается лучше, когда тяга регулируется деревянной пластинкой, помещенной вблизи на небольшом расстоянии над трубой.

Как в опытах Рийка, так и в опытах Рисса переменная передача тепла зависит от колебательного движения, между тем как эффект передачи зависит от изменения давления. Сетку поэтому следует помещать там, где оба эффекта заметны, т. е. не вблизи узла и не вблизи пучности. Наиболее благоприятное положение, — это на расстоянии четверти длины трубы от верхнего или от нижнего конца [3]).

---

[1]) Bosscha, *Pogg. Ann.*, том CVII, стр. 342, 1859.
[2]) Riess, *Pogg. Ann.*, том CVIII, стр. 653, 1859; CIX, стр. 145, 1860.
[3]) *Proc. Roy. Inst.*, том VIII, стр. 536, 1879; *Nature*, том XVIII, стр. 319, 1878.

322*k*. Остается коротко рассмотреть другой класс поддерживаемых воздушных колебаний, где поддержание осуществляется путем механического введения жидкости, которое производится в узле вблизи фазы максимального сжатия. Хорошо известные примеры этого явления дают такие язычковые инструменты, как кларнет, и различные духовые инструменты, действующие прямо от губ.

Получаемые ноты определяются в основном воздушными столбами, до некоторой степени, вероятно, изменяемыми механическими приспособлениями. Язычковые трубы фисгармонии и органа представляют собой иное устройство. Высота здесь определяется почти целиком язычками, колеблющимися в силу их собственной упругости, причем резонирующие столбы воздуха или отсутствуют совсем, или же играют лишь подчиненную роль.

В рассматриваемых сейчас инструментах столб воздуха и трубки, в которую вдувается воздух, сообщаются через узкое отверстие, которое периодически открывает и закрывает колеблющийся язычок. Язычки разделяются Гельмгольцем на открывающиеся внутрь и открывающиеся наружу. В первом случае проход открывается, когда язычок движется внутрь, т. е. против струи воздуха, как это происходит в кларнете. Губные инструменты, такие, как тромбон, принадлежат ко второму классу, где проход открыт в момент, когда губы движутся наружу, т. е. вместе с потоком воздуха.

Рассмотрим случай цилиндрической трубы, открытой с дальнего конца, в которой воздух колеблется с такой частотой, что четверть длины волны равна длине трубы. Конец столба, где расположен язычок, совпадает, таким образом, приблизительно с узлом, и воздушное колебание может поддерживаться только при условии, что проход открыт в момент наибольшего сжатия, так что воздух вводится в трубу с силой. Язычок поддерживается в движении переменным давлением внутри трубы, и фаза его движения будет зависеть от того, открывается ли он внутрь или наружу. В последнем случае фаза его почти противоположна фазе действующих на него сил; язычок открыт, когда давление, стремящееся его закрыть, наибольшее. Таково положение вещей в губных инструментах, где губы мало подвижны сравнительно с быстрыми действительно совершающимися колебаниями, § 46. Если язычок легкий и жесткий, он должен быть сделан открывающимся внутрь, как в кларнете; тогда его фаза приблизительно совпадает с фазой сил. Незначительное отклонение в движении от точной противоположности или точного совпадения фаз, могущее иметь место, позволит сообщать энергию, достаточную для поддержания движения вопреки диссипации. Более полная аналитическая формулировка вопроса была дана Гельмгольцем [1]), которому принадлежит вся теория.

---

[1]) Helmholtz, *Tonempfindungen*, 4-е издание, дополнение VII.

Характер звуков различных духовых инструментов, применяемых в музыке, очень различен. Сильно разнящимися качествами обладают тромбон и баритон: звук первого блестящий и резкий, звук второго — мягкий. Блэйкли [1]) проанализировал звуки большого числа инструментов и указал на различные обстоятельства, такие, как размер выходного устья и форма мундштука, примыкающего к губам, от которых, вероятно, зависят эти различия. Давления, применяемые на практике и достигающие 40 дюймов (102 *см*) водяного столба в случае баритона, были измерены Стоном [2]).

---

[1]) Blaikley, *Phil. Mag.*, том VI, стр. 119, 1878.
[2]) Stone, *Phil. Mag.*, том XLVIII, стр. 113, 1874.

ГЛАВА XVII

ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЛАПЛАСА

323. Общее уравнение потенциала скоростей, отнесенное к полярным координатам, имеет вид (§ 241)

$$r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+2r\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2}+k^2r^2\psi=0. \quad (1)$$

Если k равно нулю, то мы имеем уравнение обычного потенциала, которому, как мы знаем, удовлетворяет функция $\psi=r^nS_n$, где S_n обозначает сферическую двухмерную гармоническую функцию n-го порядка [1]). Подставляя, убеждаемся, что уравнение, которому удовлетворяет S_n, есть

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial S_n}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2S_n}{\partial\omega^2}+n(n+1)S_n=0. \quad (2)$$

Но какой бы вид ни имела функция ψ, она может быть разложена в ряд по сферическим функциям:

$$\psi=\psi_0+\psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_n+\ldots, \quad (3)$$

где ψ_n удовлетворяют уравнению вида (2).

Сравнивая (1) и (2), мы видим, что для определения ψ_n, как функции от r, имеем

$$r^2\frac{\partial^2\psi_n}{\partial r^2}+2r\frac{\partial\psi_n}{\partial r}-n(n+1)\psi_n+k^2r^2\psi_n=0,$$

что можно также написать в виде

$$\frac{\partial^2(r\psi_n)}{\partial(kr)^2}-\frac{n(n+1)}{(kr)^2}(r\psi_n)+r\psi_n=0. \quad (4)$$

Чтобы найти решение этого уравнения, заметим, что если r очень велико, средним членом, имеющим малое относительное значение, можно пренебречь, так что тогда решение будет иметь вид

$$r\psi_n=Ae^{ikr}+Be^{-ikr}. \quad (5)$$

---

[1]) Новейшие английские руководства по теории этих функций следующие: Todhunter, *The Functions of Laplace*, Lamé and Bessel; Ferrer, *Spherical Harmonics* и Gray a. Mathews, *Bessel's Functions*, Macmillan, 1895.

Можно считать, что такого же вида решение будет удовлетворять и полному уравнению (4), если рассматривать A и B не как постоянные, а как функции от r, природу которых следует еще определить. Подставляя в (4), находим для B

$$-\frac{\partial^2 B}{\partial (ikr)^2}+2\frac{\partial B}{\partial \cdot ikr}+\frac{n(n+1)}{(ikr)^2}B=0. \tag{6}$$

Положим

$$B=B_0+B_1(ikr)^{-1}+B_2(ikr)^{-2}+\ldots+B_s(ikr)^{-s}+\ldots \tag{7}$$

и подставим это в (6). Приравнивая нулю коэфициент при $(ikr)^{-s-2}$, получим

$$B_{s+1}=B_s\frac{n(n+1)-s(s+1)}{2(s+1)}=B_s\frac{(n-s)(n+s+1)}{2(s+1)}$$

Таким образом,

$$B_1=\frac{1}{2}n(n+1)B_0,$$

$$B_2=B_1\frac{(n-1)(n+2)}{2\cdot 2}=\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2\cdot 4}B_0 \text{ и т. д.,}$$

так что

$$B=B_0\left\{1+\frac{n(n+1)}{2\cdot ikr}+\frac{(n-1)\ldots(n+2)}{2\cdot 4\cdot (ikr)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-2)\ldots(n+3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot (ikr)^3}+\ldots+\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n\cdot (ikr)^n}\right\}, \tag{9}$$

Обозначая, вместе с проф. Стоксом [1]), ряд внутри скобок через $f_n(ikr)$, получим

$$B=B_0 f_n(ikr). \tag{10}$$

Подобным же образом, меняя знаки при i, получаем

$$A=A_0 f_n(-ikr). \tag{11}$$

Хотя символы A_0 и B_0 и не зависят от r, тем не менее они являются функциями угловых координат: в самом общем случае они представляют две какие-нибудь сферические поверхностные функции порядка n. Поэтому уравнение (5) можно написать в виде

$$r\psi_n=S_n e^{-ikr}f_n(ikr)+S'_n e^{+ikr}f_n(-ikr). \tag{12}$$

Дифференцируя (12), имеем

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial r}=\frac{S_n}{r^2}e^{-ikr}F_n(ikr)-\frac{S'_n}{r^2}e^{+ikr}F(-ikr), \tag{13}$$

где

$$F_n(ikr)=(1+ikr)f_n(ikr)-ikr f'_n(ikr). \tag{14}$$

[1]) Stokes, On the Communication of Vibrations from a Vibrating Body to a surrounding Gas", *Phil. Trans.*, 1868.

Вид функций F до седьмого порядка представлен в следующей таблице:

$$F_0(y) = y + 1,$$
$$F_1(y) = y + 2 + 2y^{-1},$$
$$F_2(y) = y + 4 + 9y^{-1} + 9y^{-2},$$
$$F_3(y) = y + 7 + 27y^{-1} + 60y^{-2} + 60y^{-3},$$
$$F_4(y) = y + 11 + 65y^{-1} + 240y^{-2} + 525y^{-3} + 525y^{-4},$$
$$F_5(y) = y + 16 + 135y^{-1} + 735y^{-2} + 2625y^{-3} + 5670y^{-4} + 5670y^{-5},$$
$$F_6(y) = y + 22 + 252y^{-1} + 1890y^{-2} + 9765y^{-3} + 34\,020y^{-4} + 72\,765y^{-5} + 72\,765y^{-6},$$
$$F_7(y) = y + 29 + 434y^{-1} + 4284y^{-2} + 29\,925y^{-3} + 148\,995y^{-4} + 509\,355y^{-5} + 1\,081\,080y^{-6} = 1\,081\,080y^{-7}.$$

Для того чтобы определить главные члены функции $F_n(ikr)$, когда ikr мало, обратим ряд (9); получаем

$$f_n(ikr) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)(ikr)^{-n} \times \left\{1 + ikr + \frac{n-1}{2n-1}(ikr)^2 + \ldots\right\}, \tag{15}$$

откуда при помощи (14) находим

$$F_n(ikr) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)(n+1)(ikr)^{-n} \times \left\{1 + ikr + \frac{n^2(ikr)^2}{(n+1)(n-1)} + \ldots\right\}. \tag{16}$$

324. Важным частным случаем полученных общих формул является тот, когда ψ представляет возмущение, распространяющееся полностью *наружу*. На большом расстоянии от источника $f_n(ikr) = f_n(-ikr) = 1$, и следовательно, если мы восстановим временной множитель (e^{ikat}), то получим

$$r\psi_n = S_n e^{ik(at-r)} + S'_n e^{ik(at+r)}; \tag{1}$$

правая часть этого выражения представляет возмущение, распространяющееся внутрь. При рассмотренных обстоятельствах нам следует поэтому положить $S'_n = 0$; таким образом получим

$$r\psi_n = S_n f_n(ikr)\, e^{ik(at-r)}, \tag{2}$$

что представляет в самом общем виде n-ую гармоническую составляющую возмущения с заданным периодом, распространяющимся наружу в бесконечное пространство.

Источником возмущения может быть заданное нормальное движение поверхности сферы радиуса c. Положим, что в некоторой точке сферы скорость, направленная наружу, представляется функцией Ue^{ikat}, где U вообще функция положения рассматриваемой точки.

Разложив U в ряд по сферическим функциям

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots, \tag{3}$$

мы должны иметь, в силу (3) § 323,

$$U_n = -\frac{S_n}{c^2} e^{-ikc} F_n(ikc). \tag{4}$$

Таким образом, полное значение ψ есть

$$\psi = -\frac{c^2}{r} e^{ik(at-r+c)} \sum \frac{U_n}{F_n(ikc)} f_n(ikr), \tag{5}$$

где суммирование следует распространить на все (целые) значения n. Действительная часть этого уравнения даст потенциал скоростей, образованный нормальной скоростью $U\cos kat$ [1]) на поверхности сферы $r = c$.

Проф. Стокс применил это решение к объяснению замечательного опыта Лесли, в котором звук колокольчика, колеблющегося в частично эвакуированном пространстве, ослаблялся при введении водорода. Это парадоксальное явление происходит благодаря увеличению длины волны вследствие добавления водорода, в результате чего колокольчик, так сказать, теряет свою власть над окружающим газом. Общее объяснение этого нельзя выразить лучше, чем словами проф. Стокса:

„Предположим, что человек движет рукой вперед и назад в небольшом промежутке. Движение, которое создается в воздухе, почти в точности одинаково с тем, которое возникло бы, если бы воздух представлял собой несжимаемую жидкость. Здесь имеется просто местное возвратное движение, при котором воздух непосредственно впереди руки толкается вперед, а непосредственно сзади — устремляется за движущимся телом, между тем как вообще в пространстве впереди воздух отступает в стороны в результате движения тела, а в пространстве сзади вообще притекает со всех сторон для заполнения пустоты, которая стремится здесь образоваться; таким образом, с боков течение жидкости направлено назад и так, что часть избытка жидкости впереди стремится заполнить недостачу сзади. Теперь допустим, что период этого движения непрерывно уменьшается. Постепенно изменение направления движения становится слишком быстрым для того, чтобы могло вполне установиться чисто местное возвратное течение; воздух заметно сжимается и разрежается, и заметная звуковая волна (или волна такой же природы, если период ее находится вне пределов человеческого слуха) распространяется на известное расстояние. То же самое происходит и в любом газе; и чем

[1]) Предположение, что U имеет действительное значение, эквивалентно требованию, чтобы нормальная скорость имела одну и ту же фазу по всей сфере $r = c$. Для того чтобы учесть наиболее общее движение воздуха, необходимо рассматривать U как комплексную величину.

быстрее распространяются сгущения и разрежения в газе, тем более черты явления будут приближаться, в отношении тех движений, которые мы рассматриваем, к условиям, существующим в несжимаемой жидкости; тем ближе будут условия смещения газа на поверхности твердого тела удовлетворяться простым местным возвратным течением".

Обсуждая решение (5), проф. Стокс продолжает:

„На большом расстоянии от сферы функция $f_n(ikr)$ [1]) в пределе становится равной 1, и мы имеем

$$\psi = -\frac{c^2}{r} e^{ik(at-r+c)} \sum \frac{U_n}{F_n(ikc)}. \qquad (6)$$

„Оказывается (из значения $\partial\psi/\partial r$), что компонента скорости вдоль радиуса-вектора имеет порядок r^{-1}, а в любом направлении, перпендикулярном к радиусу-вектору, — порядок r^{-2}, так что боковым движением можно пренебречь всюду, за исключением непосредственного соседства со сферой.

„Для того чтобы исследовать влияние бокового движения вблизи сферы, сравним действительное возмущение на большом расстоянии с тем, которое имело бы место, если бы всякое боковое движение было предотвращено, например, путем разделения всей жидкости на элементарные каналы бесконечно тонкими коническими трубками, каждая из которых представляет коническую поверхность с вершиною в центре.

„При этом предположении, очевидно, движение в каждом канале будет таким же, каким оно было бы во всех направлениях, если бы колебания сферы сводились к одинаковому в любой точке расширению и сжатию ее поверхности, причем нормальная скорость поверхности совпадала бы со скоростью в точке, где рассматриваемый канал выходит на поверхность. Если бы U было постоянным, то в разложении U имелся бы только первый член U_0, и, принимая во внимание, что $f_0(ikr) = 1$, мы бы имели из (5)

$$\psi = -\frac{c^2}{r} e^{ik(at-r+c)} \frac{U_0}{F_0(ikc)}.$$

Это выражение применимо к любому отдельному каналу, если считать, что U_0 обозначает нормальную скорость на поверхности сферы для данного канала; поэтому, для того чтобы получить выражение, применимое непосредственно ко всем каналам, достаточно просто писать U вместо U_0. Для облегчения сравнения (5) и (6) я, однако, буду писать $\sum U_n$ вместо U. Тогда

$$\psi = -\frac{c^2}{r} e^{ik(at-r+c)} \frac{\sum U_n}{F_0(ikc)}. \qquad (7)$$

[1]) Я здесь несколько изменил обозначения проф. Стокса.

Следует помнить, что это — выражение, применимое непосредственно ко всем каналам, в каждом из которых движение происходит целиком вдоль радиуса-вектора, и, следовательно, это выражение нельзя диференцировать по θ или ω с целью найти поперечные скорости.

„Сравнивая (7) с выражением функции ψ для действительного движения на большом расстоянии от сферы (6), мы видим, что оба они тождественны, если не считать того, что делителями U_n служат в них две различные постоянные, именно $F_0(ikc)$ в первом случае и $F_n(ikc)$ — во втором. То же самое справедливо и для главных членов (членов порядка r^{-1}) в выражениях для сгущения и для скорости. Следовательно, если тип колебания сферы таков, что нормальная скорость ее поверхности выражается функцией Лапласа какого бы то ни было порядка, то возмущение на большом расстоянии от сферы будет изменяться в зависимости от направления по такому же закону, как если бы боковые движения были задержаны, причем амплитуда смещения на данном расстоянии от центра изменяется в обоих случаях как амплитуда смещения в нормальном направлении к самой поверхности сферы. Единственным различием здесь является то, которое выражается символическим отношением $F_n(ikc):F_0(ikc)$. Если предположить, что $F_n(ikc)$ приводится к виду $\mu_n(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n)$, то амплитуда действительного колебания будет относиться к амплитуде в гипотетическом случае, как $\mu_0:\mu_n$, а фазы в обоих случаях будут отличаться на $\alpha_0 - \alpha_n$.

„Если нормальная скорость поверхности сферы не может быть выражена при помощи одной функции Лапласа, а только при помощи ряда, конечного или бесконечного, таких функций, то возмущение на данном большом расстоянии от центра уже не будет изменяться в зависимости от направления по тому же закону, что нормальная скорость поверхности сферы, так как модуль μ_n, а равно и амплитуда α_n мнимой величины $F_n(ikc)$ изменяются с изменением порядка функции.

„Предположим, что возмущение выражается функцией Лапласа какого-нибудь порядка, и будем искать численное значение изменения интенсивности на некотором расстоянии, вызванного боковым движением, которое существует в действительности.

„Интенсивность будет измеряться живой силой, развитой за данное время, и следовательно, будет изменяться пропорционально плотности, помноженной на скорость распространения и на квадрат амплитуды колебания. Из них оба первых множителя такие же, как если бы никакого бокового движения не было. Амплитуда изменяется в отношении $\mu_0:\mu_n$ так, что если $\mu_n^2/\mu_0^2 = I_n$, то I_n — величина, на которую нужно разделить интенсивность, которая имела бы место, если бы боковое движение жидкости было задержано.

„Если λ — длина звуковой волны, соответствующая данному периоду колебания, то $k = 2\pi/\lambda$, так что kc — отношение длины большого круга сферы к длине волны. Если считать, что рассматриваемый газ есть

воздух и что λ равна двум футам, что соответствует примерно 550 колебаниям в секунду, а большой круг сферы $2\pi c$ имеет длину 1 фут (эти размеры и высота тона соответствуют примерно обычному домашнему колокольчику), то мы будем иметь $kc = \frac{1}{2}$. Приводимая ниже таблица дает значения квадратов модуля и отношения I_n для функций $F_n(ikc)$ первых пяти порядков и для значений kc, равных 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$. Сейчас выясняется, почему таблица продложена более далеко в направлении значений, бóльших $\frac{1}{2}$, чем в противоположном направлении, причина чего выяснится ниже. Сохранены по меньшей мере пять значащих цифр.

kc	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	
4	17	16	14,879	13,848	20,177	Значения μ_n^2
2	5	5	9,3125	80	1 495,8	
1	2	5	89	3 965	300 137	
0,5	1,25	16,25	1 330,2	236 291	72 086 371	
0,25	1,0625	64,062	20 878	14 837899	$18\,160 \times 10^6$	
4	1	0,95588	0,87523	0,81459	1,1869	Значения I_n
2	1	1	1,8625	16	299,16	
1	1	2,5	44,5	1 982,5	150 068	
0,5	1	13	1 064,2	188 953	57 669 097	
0,25	1	60,294	19 650	$13\,965 \times 10^3$	$17\,092 \times 10^6$	

„При $kc = \infty$ мы получаем из аналитических выражений $I_n = 1$. Из таблицы мы видим, что когда kc сравнительно велико, I_n, повидимому, должно быть *немного* меньше, чем 1, и следовательно, звук должен быть *немного* интенсивнее, чем если бы боковое движение было уничтожено. Это легко объясняется, если учесть, что волны сгущения, исходящие из тех частей сферы, которые в данный момент колебания движутся в положительном направлении, т. е. наружу, по истечении полупериода могут распространиться на соседние части, которые теперь в свою очередь движутся в положительную сторону, так что эти последние части при движении наружу производят работу против сил несколько большего давления, чем если бы они встречали только то колебание газа, которое вызвано ими самими; то же самое объяснение применимо mutatis mutandis к волнам разрежения. Однако, усиление звука, получающееся благодаря существованию бокового движения, во всяком случае мало́, между тем как если kc относительно мало, I_n увеличивается чрезвычайно сильно, и звук становится ничтожным по сравнению с тем, каким он должен бы быть, если бы боковое движение было предотвращено.

„Чем выше порядок функции, тем на большее число частей, колеблющихся попеременно в положительном и отрицательном направлении, будет разделена сфера в каждый данный момент. Из таблицы ми видим, что для данного периода, а также для данного радиуса значение I_n становится большим при n, достаточно большом. Однако, практически колебания этого рода возникают в случае, когда упругая сфера совершает колебания не с основной частотой, а с одной из вторичных частот, причем соответствующая частота повышается с порядком колебания, так что k увеличивается в соответствии с этим порядком. Именно вследствие этого таблица продолжена в направлении высоких частот от $kc = 0{,}5$ дальше, чем в направлении низких: она продолжена на три октавы выше $kc = 0{,}5$ и только на одну октаву ниже.

„Если сфера колеблется симметрично относительно центра, т. е. так, что каждые две противоположные точки поверхности в каждый данный момент движутся с равными скоростями в противоположных направлениях, или, более обще, когда тип колебаний таков, что положение центра тяжести всего объема не изменяется, то член порядка 1 отсутствует. Для сферы, колеблющейся по типу колокольчика, основным колебанием является колебание, выражающееся членом порядка 2, к более подробному разбору которого я и перехожу.

„Полагая для краткости $k^2c^2 = q$, имеем

$$\mu_0^2 = q + 1, \quad \mu_2^2 = (q^{1/2} + 9q^{-1/2})^2 + (4 - 9q^{-1})^2 = q - 2 + 9q^{-1} + 81q^{-2},$$

$$I_2 = \frac{q^3 - 2q^2 + 9q + 81}{q^2(q+1)}.$$

„Минимальное значение I_2 определяется уравнением

$$q^3 - 6q^2 - 84q - 54 = 0,$$

откуда приближенно

$$q = 12{,}859, \quad kc = 3{,}586, \quad \mu_0^2 = 13{,}859, \quad \mu_2^2 = 12{,}049,$$
$$I_2 = 0{,}86941,$$

так что максимальное усиление звука, получающееся от бокового движения, достигает около 15%.

„Перехожу теперь специально к экспериментам Лесли. Ничего не указано относительно формы, величины и тона его колокольчика; но даже если бы все это было точно описано, оставалось бы еще достаточно труда для определения размеров эквивалентной сферы, которою можно было бы заменить колокольчик. Следовательно, все, что мы можем сделать — это выбрать такие значения k и c, которые сравнимы с вероятными условиями опыта.

„У меня имеется колокольчик, принадлежащий к типу старинных приборов (bell-in-air), который, вероятно, несколько напоминает колокольчик, употреблявшийся Лесли. Он приблизительно полусфе-

рической формы, диаметр его 1,96 дюйма, а тон его на октаву выше среднего c рояля. Принимая число колебаний 1056 в секунду и скорость звука в воздухе 1100 футов в секунду, имеем $\lambda=12{,}5$ дюйма. Представлять колокольчик сферой такого же радиуса означало бы сильно недооценить влияние местной циркуляции, так как вблизи отверстия газ не имеет больших возможностей для движения снаружи во внутрь и наоборот. Представление колокольчика сферой половинного радиуса означало бы, повидимому, все еще недооценку этого эффекта. Тем не менее, для того чтобы скорее недооценить, чем преувеличить влияние рассмотренной здесь причины, я сделаю последовательно оба эти предположения, принимая, соответственно, значения $c=0{,}98$ и $c=0{,}49$, $kc=0{,}4926$ и $kc=0{,}2463$ для воздуха.

„Если бы не было бокового движения, то интенсивность изменялась бы от газа к газу пропорционально отношению плотности к скорости распространения, и, следовательно, отношению давления к квадратному корню из плотности газа при обычном давлении, если учесть, что множитель, зависящий от распространения теплоты (коэфициент теплопроводности) по существу одинаков для газов и газовых смесей, с которыми мы будем иметь дело. В приводимой таблице в первом столбце дается название газа, во втором — давление p в атмосферах, в третьем — плотность D при давлении p, отнесенная к плотности воздуха при атмосферном давлении, принятой за единицу, в четвертом Q_r — величина, которая представляла бы интенсивность, если бы движение было полностью радиальным, — отнесенная к интенсивности в воздухе при атмосферном давлении, принятой за единицу, или, другими словами, величина, изменяющаяся пропорционально давлению $p\times$ (плотность при давлении единица)$^{1/2}$. Затем идут значения q, I_2 и Q, причем последняя величина обозначает действительную интенсивность, отнесенную, как и выше, к воздуху.

Газ	P	D	Q_r	$c=0{,}98$			$c=0{,}49$		
				q	I_2	Q	q	I_2	Q
Воздух	1	1	1	0,2427	1 136	1	0,06067	20 890	1
Водород	1	0,0690	0,2627	0,01674	284 700	0,001048	0,004186	4 604 000	0,001191
Разреженный воздух	0,01	0,01	0,01	0,2427	1 136	0,01	0,06067	20 890	0,01
То же при наполнении водородом	1	0,0783	0,2798	0,01900	220 600	0,001440	0,004751	3 572 000	0,001637
Воздух той же плотности . . .	0,0783	0,0783	0,0783	0,2427	1 136	0,0783	0,06067	20 890	0,0783
Воздух разреженный вдвое . . .	0,5	0,5	0,5	0,2427	1 136	0,5	0,06067	20 890	0,5
То же при наполнении водородом	1	0,5345	0,7311	0,1297	4 322	0,1921	0,0324	74 890	0,2039

„Как показывает рассмотрение чисел, содержащихся в столбце Q, приведенная здесь причина вполне достаточна для объяснения фактов, упомянутых Лесли".

Важность этого предмета и мастерскую трактовку, которая была дана проф. Стоксом, можно пожалуй считать достаточным оправданием столь длинной цитаты.

Простота истинного объяснения представляет замечательный контраст с различными, предложенными ранее гипотезами. Так, например, сэр Дж. Гершель думал, что смесь двух газов, в которых звук распространяется с различными скоростями, могла вызвать турбулентность, приводящую в результате к быстрому затуханию звука.

[Рассматриваемый здесь вопрос можно иллюстрировать еще проще задачами §§ 268, 301. Например, случай, рассматриваемый в § 268, можно считать крайним случаем настоящего, когда сферическая поверхность обращается в колеблющуюся плоскость, разделенную на прямоугольные части. Если допустить, что размеры этих частей, определяемые сторонами p и q, заданы, и проследить, какой эффект производит постепенное увеличение частоты, то мы увидим, что только когда частота достигает известного значения, заметные колебания распространяются до бесконечности, причем закон ослабления колебаний с расстоянием имеет экспоненциальный вид. С другой стороны, колебания, частота которых превышает критическое значение, распространяются без потерь, не подвергаясь ослаблению, которое сферические волны необходимо должны испытывать.]

325. Член нулевого порядка

$$\psi_0 = \frac{S_0}{r} e^{ik(at-r)}, \tag{1}$$

где S_0 — комплексная постоянная, соответствует потенциалу *простого источника* произвольной интенсивности и фазы, расположенного в центре сферы (§ 279). Если, как это часто бывает на практике, источником звука является твердое тело, колеблющееся без существенного изменения объема, то этот член относительно невелик. В случае жесткой сферы, колеблющейся около положения равновесия, этот член вовсе незначителен [1]), поскольку все движение в целом тогда изображается членом первого порядка; и во всех случаях, когда тело очень мало по сравнению с длиной волны, член нулевого порядка должен быть незначительным. В самом деле, если мы интегрируем уравнение движения $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$ по малому объему, заключенному между телом и сферой, описанной вплотную вокруг него, то мы убедимся, что все количество жидкости, которое входит внутрь этого пространства и выходит из него, мало́ и что поэтому имеется лишь небольшой полный поток сквозь поверхность сферы.

Положив $n = 1$, получим для члена первого порядка

$$r\psi_1 = S_1 e^{ik(at-r)}\left\{1 + \frac{1}{ikr}\right\}, \tag{2}$$

[1]) Центр сферы принят за начало координат.

причем S_1 пропорционально косинусу угла между рассматриваемым направлением и некоторой неподвижной осью. Это выражение имеет такой же вид, что и потенциал *двойного* источника (§ 294), расположенного в центре и состоящего из двух равных и противоположных простых источников, лежащих на рассматриваемой оси, расстояние между которыми бесконечно мало, интенсивности же таковы, что произведение интенсивностей на расстояние конечно. В самом деле, обозначим ось через x, а косинус угла между x и r — через μ; тогда очевидно, что потенциал двойного источника пропорционален

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)=\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)=-ik\frac{\mu e^{-ikr}}{r}\left\{1+\frac{1}{ikr}\right\}.$$

Отсюда следует, что возмущение, создаваемое колебанием сферы как твердого тела, — такое же, как возмущение, соответствующее двойному источнику в центре, ось которого совпадает с направлением колебаний сферы.

Реакция воздуха на малую сферу, колеблющуюся как твердое тело по гармоническому закону, можно легко вычислить из предыдущих формул. Пусть $\dot{\xi}$ обозначает скорость сферы в момент t,

$$U_1 e^{ikat}=\dot{\xi}\mu, \tag{3}$$

и следовательно, для значения $\dot{\psi}$ на поверхности сферы из (5) § 324 имеем

$$\dot{\psi}=-ikac\dot{\xi}\mu\frac{f_1(ikc)}{F_1(ikc)}. \tag{4}$$

Сила Ξ, возникающая вследствие сгущений воздуха, ускоряющих движение, определяется выражением

$$\Xi=-\int\int\mu\delta p\,dS=\rho\int\int\mu\dot{\psi}\,dS=$$
$$=-ika\rho c^3\dot{\xi}\frac{f_1(ikc)}{F_1(ikc)}\int 2\pi\mu^2 d\mu=-ika\frac{4\pi c^3}{3}\rho\dot{\xi}\frac{f_1(ikc)}{F_1(ikc)}.$$

Если положить

$$\frac{f_1(ikc)}{F_1(ikc)}=p-iq, \tag{5}$$

то

$$\Xi=-p\cdot\frac{4}{3}\pi\rho c^3\ddot{\xi}-qka\cdot\frac{4}{3}\pi\rho c^3\dot{\xi}, \tag{6}$$

поскольку

$$\ddot{\xi}=ika\dot{\xi}.$$

Роль воздуха, таким образом, состоит в увеличении эффективной инерции сферы, именно на усиленную в p раз инерцию смещенного воздуха, и в замедлении движения силой, пропорциональной скорости

и равной $\frac{4}{3}\pi\rho c^3 \cdot qka\dot{\xi}$; оба эти эффекта вообще являются функциями частоты колебания. Вводя значения f_1 и F_1, находим

$$\frac{f_1(ikc)}{F_1(ikc)} = \frac{2+k^2c^2-ik^3c^3}{4+k^4c^4}, \tag{7}$$

так что

$$p = \frac{2+k^2c^2}{4+k^4c^4} \text{ и } q = \frac{k^3c^3}{4+k^4c^4}. \tag{8}$$

Когда kc мало, мы имеем приближенно $p = \frac{1}{2}$ и $q = \frac{1}{4}k^3c^3$. Следовательно, эффективная инерция малой сферы увеличивается на половину инерции смещенного воздуха — величину, не зависящую от частоты, и такую же, как если бы жидкость была несжимаемой. Член, выражающий рассеяние и соответствующий испускаемой энергии, есть член высшего порядка по kc; поэтому (если пренебречь влиянием вязкости) колебания малой сферы затухают медленно.

Движение эллипсоида в несжимаемой жидкости было исследовано Грином [1]), и результаты его можно применить к вычислению увеличения эффективной инерции благодаря сжимаемости жидкости, если размеры тела малы по сравнению с длиной волны колебания. Для малого круглого диска, колеблющегося перпендикулярно к своей плоскости, увеличение эффективной инерции относится к массе жидкой сферы, радиус которой равен радиусу диска, как $2:\pi$. Результат для случая сферы, описанный выше, был получен Пуассоном [2]) несколько раньше появления в печати статьи Грина.

Максвелл [3]) показал, что различные члены разложения по гармоническим функциям обычного потенциала можно рассматривать как члены, представляющие *кратные точки* соответствующей кратности комплексной плоскости. Так, V_i пропорционально $\frac{\partial^i}{\partial h_1 \partial h_2 \ldots \partial h_i}\left(\frac{1}{r}\right)$, где r^{-1} i раз диференцируется по осям h_1, h_2 и т. д., причем некоторое число этих осей может в частном случае совпадать. Пожалуй, можно было бы ожидать, что подобный же закон сохраняет силу и для потенциала скоростей, если подставить $r^{-1}e^{-ikr}$ вместо r^{-1}. Однако, это не имеет места; можно показать, что потенциал квадруполя, представляемый в виде $\frac{\partial^2}{\partial h_1 \partial h_2} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}$, соответствует вообще не просто члену второго порядка, т. е. $S_2 \frac{e^{-ikr}}{r} f_2(ikr)$, а комбинации этого члена с членом нулевого порядка. Поэтому аналогия сохраняет силу только для случая *двойной* точки или источника, хотя, разу-

---

[1]) Green, *Edinburgh Transactions*, декабрь 16, 1833. Также Green, *Mathematical Papers, edited by Ferrers*, Macmillan & Co, 1871.

[2]) Poisson, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, том XI, стр. 521.

[3]) Maxwell, *Electricity and Magnetism*, гл. IX.

меется, функция $r^{-1}e^{-ikr}$ после любого числа дифференцирований продолжает удовлетворять основному уравнению

$$(\nabla^2 + k^2)\,\psi = 0.$$

Целесообразно, пожалуй, отметить, что возмущение вне любой воображаемой сферы, полностью охватывающей источник звука, можно представить как обязанное нормальному движению поверхности некоторой меньшей концентрической сферы, или, в частном случае, когда радиус сферы бесконечно мал, как обязанное источнику, сконцентрированному в точке, именно, в центре сферы. Этот источник вообще будет состоять из комбинации кратных источников всех порядков.

326. Когда источником возмущения является колебание твердого тела параллельно оси вращения, то различные сферические функции S_n сводятся к простым кратным зональной функции $P_n(\mu)$, которую можно определить как коэфициент при e^n в разложении $\{1 - 2e\mu + e^2\}^{-1/2}$ по восходящим степеням e. (Вид этих функций приведен в § 334.) Когда же твердое тело симметрично не только относительно оси, но также симметрично и относительно экваториальной плоскости (пересечение которой с осью принято за начало координат), то разложение получающегося возмущения по сферическим функциям будет содержать только члены нечетного порядка. Так, например, если колеблющимся телом является круглый диск, совершающий колебания перпендикулярно к его плоскости, то разложение ψ будет содержать члены, пропорциональные $P_1(\mu)$, $P_3(\mu)$, $P_5(\mu)$ и т. д. В случае сферы, как мы видели, ряд сводится полностью к первому члену, и этот член вообще будет преобладающим.

С другой стороны, может существовать и колебательная система, симметричная относительно оси и относительно экваториальной плоскости, но совершающая колебания таким образом, что движения частей системы по обе стороны от этой плоскости противоположны. Под эту рубрику подходит идеальный камертон, составленный из одинаковых сфер или параллельных круговых дисков, расстояние между которыми периодически изменяется. Из соображений симметрии ясно, что потенциал скорости, будучи одинаковым в любой паре точек, представляющих собой зеркальные изображения друг друга в плоскости симметрии, должен быть четной функцией от μ и, следовательно, должен выражаться рядом, содержащим только четные функции $P_0(\mu)$, $P_2(\mu)$ и т. д. Вторая функция $P_2(\mu)$ обычно превалирует, хотя в частных случаях, как например в случае тела, состоящего из двух дисков, расстояние между которыми мало по сравнению с их диаметром, симметричный член нулевого порядка может получить большое значение. Сравнение с известным решением для сферы, поверхность которой совершает колебания по некоторому закону, в большинстве случаев дает достаточный материал для оценки относительного значения различных членов.

Таблица зональных сферических функций

θ	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
°							
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0,9994	0,9982	0,9963	0,9939	0,9909	0,9872	0,9829
4	0,9976	0,9927	0,9854	0,9758	0,9638	0,9495	0,9329
6	0,9945	0,9836	0,9674	0,9459	0,9194	0,8881	0,8522
8	0,9903	0,9709	0,9423	0,9048	0,8589	0,8053	0,7448
10	0,9848	0,9548	0,9106	0,8532	0,7840	0,7045	0,6164
12	0,9781	0,9352	0,8724	0,7920	0,6966	0,5892	0,4732
14	0,9703	0,9122	0,8283	0,7224	0,5990	0,4635	0,3219
16	0,9613	0,8860	0,7787	0,6454	0,4937	0,3322	0,1699
18	0,9511	0,8568	0,7240	0,5624	0,3836	0,2002	0,0289
20	0,9397	0,8245	0,6649	0,4750	0,2715	0,0719	−0,1072
22	0,9272	0,7895	0,6019	0,3845	0,1602	−0,0481	−0,2201
24	0,9135	0,7518	0,5357	0,2926	0,0525	−0,1559	−0,3095
26	0,8988	0,7117	0,4670	0,2007	−0,0489	−0,2478	−0,3717
28	0,8829	0,6694	0,3964	0,1105	−0,1415	−0,3211	−0,4052
30	0,8660	0,6250	0,3248	0,0234	−0,2233	−0,3740	−0,4101
32	0,8480	0,5788	0,2527	−0,0591	−0,2923	−0,4052	−0,3876
34	0,8290	0,5310	0,1809	−0,1357	−0,3473	−0,4148	−0,3409
36	0,8090	0,4818	0,1102	−0,2052	−0,3871	−0,4031	−0,2738
38	0,7880	0,4314	0,0413	−0,2666	−0,4112	−0,3719	−0,1918
40	0,7660	0,3802	−0,0252	−0,3190	−0,4197	−0,3234	−0,1003
42	0,7431	0,3284	−0,0887	−0,3616	−0,4128	−0,2611	−0,0065
44	0,7193	0,2762	−0,1485	−0,3940	−0,3914	−0,1878	0,0846
46	0,6947	0,2238	−0,2040	−0,4158	−0,3568	−0,1079	0,1666
48	0,6691	0,1716	−0,2547	−0,4270	−0,3105	−0,0251	0,2349
50	0,6428	0,1198	−0,3002	−0,4275	−0,2545	+0,0563	0,2854
52	0,6157	0,0686	−0,3401	−0,4178	−0,1910	+0,1326	0,3153
54	0,5878	0,0182	−0,3740	−0,3984	−0,1223	+0,2002	0,3234
56	0,5592	−0,0310	−0,4016	−0,3698	−0,0510	+0,2559	0,3095
58	0,5229	−0,0788	−0,4229	−0,3331	0,0206	+0,2976	0,2752
60	0,5000	−0,1250	−0,4375	−0,2891	0,0898	+0,3232	0,2231
62	0,4695	−0,1694	−0,4455	−0,2390	0,1545	+0,3321	0,1751
64	0,4384	−0,2117	−0,4470	−0,1841	0,2123	+0,3240	0,0818
66	0,4067	−0,2518	−0,4419	−0,1256	0,2615	+0,2996	0,0021
68	0,3746	−0,2896	−0,4305	−0,0650	0,3005	+0,2605	−0,0763
70	0,3420	−0,3245	−0,4130	−0,0038	0,3281	+0,2089	−0,1485
72	0,3090	−0,3568	−0,3898	0,0568	0,3434	+0,1472	−0,2099
74	0,2756	−0,3860	−0,3611	0,1153	0,3461	+0,0795	−0,2559
76	0,2419	−0,4132	−0,3275	0,1705	0,3362	+0,0076	−0,2848
78	0,2079	−0,4352	−0,2894	0,2211	0,3143	−0,0644	−0,2943
80	0,1736	−0,4458	−0,2474	0,2659	0,2810	−0,1321	−0,2835
82	0,1392	−0,4709	−0,2020	0,3040	0,2378	−0,1926	−0,2536
84	0,1045	−0,4836	−0,1539	0,3345	0,1861	−0,2431	−0,2067
86	0,0698	−0,4927	−0,1038	0,3569	0,1278	−0,2811	−0,1460
88	0,0349	−0,4982	−0,0522	0,3704	0,0651	−0,3045	−0,0735
90	0,0000	−0,5000	−0,0000	0,3750	0,0000	−0,3125	0,0000

[Приведенная на стр. 244 таблица, изображающая P_n в функции от θ или $\arccos \mu$, представляет выдержку из таблицы Перри [1].]

327. Полное излучение энергии колеблющейся сферой определяется путем умножения переменной части давления (пропорциональной $\dot{\psi}$) на нормальную скорость и интегрирования по всей поверхности (§ 245). Благодаря сопряженности различные сферические функции, являющиеся членами разложения, можно брать порознь, без всякого ущерба для общности. Имеем (§ 323)

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi}_n &= ika\,\frac{S_n e^{ik(at-r)}}{r} f_n(ikr), \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial r} &= -\frac{S_n e^{ik(at-r)}}{r^2} F_n(ikr), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

или, отбрасывая мнимую часть,

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi}_n &= -\frac{kaS_n}{r}\{\beta' \cos k(at-r) + \alpha' \sin k(at-r)\}, \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial r} &= -\frac{S_n}{r^2}\{\alpha \cos(at-r) - \beta \sin k(at-r)\}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где

$$F = \alpha + i\beta \quad \text{и} \quad f = \alpha' + i\beta'. \tag{3}$$

Таким образом,

$$\iint \dot{\psi}_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r}\, ds = \iint \dot{\psi}_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r} \cdot r^2 d\sigma = \frac{ka}{r} \iint S_n^2 d\sigma \{\alpha\beta' \cos^2 k(at-r) - \\ - \alpha'\beta \sin^2 k(at-r) + (\alpha\alpha' - \beta\beta') \sin k(at-r) \cos k(at-r)\}.$$

Если проинтегрировать это выражение за большой промежуток времени, то периодические члены можно опустить и, таким образом,

$$\int \cdot \iint \dot{\psi}_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r}\, dS \cdot dt = \frac{kat}{2r}(\alpha\beta' - \alpha'\beta) \iint S_n^2 d\sigma. \tag{4}$$

Но так как в пространстве, заключенном между концентрическими сферическими поверхностями, накопление энергии не может иметь места, то скорости передачи энергии сквозь эти поверхности должны быть одинаковыми, т. е. $r^{-1}(\alpha'\beta - \alpha\beta')$ должно быть независимо от r. Для того чтобы определить значение константы, мы можем взять частный случай бесконечно большого r, когда

$$F_n(ikr) = ikr, \quad \alpha = 0, \quad \beta = kr,$$
$$f_n(ikr) = 1, \quad \alpha' = 1, \quad \beta' = 0.$$

Таким образом, тождественно

$$\alpha'\beta - \beta'\alpha = kr. \tag{5}$$

Можно заметить, что левая часть равенства (5), помноженная на i, представляет собой мнимую часть произведения $(\alpha + i\beta)(\alpha' - i\beta')$ или

[1] Perry, *Phil. Mag.*, том XXXII, стр. 516, 1891.

мнимую часть $F_n(ikr)f_n(-ikr)$, так что наш результат можно выразить таким образом: мнимая часть $F_n(ikr)f_n(-ikr)$ равна ikr, или

$$F_n(ikr)f_n(-ikr)-F_n(-ikr)f_n(ikr)=2ikr. \tag{6}$$

В этой форме мы и воспользуемся полученным выражением.

К тому же самому заключению можно прийти и более прямым путем, применив теорему Гельмгольца (§ 294); именно: если две функции u и v удовлетворяют в замкнутом пространстве S уравнению $(\nabla^2+k^2)u=0$, то

$$\iint\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=0. \tag{7}$$

Если за S принять пространство между двумя концентрическими сферами, что дает

$$u=\frac{S_n e^{-ikr}f_n(ikr)}{r},\qquad v=\frac{S_n e^{+ikr}f_n(-ikr)}{r},$$

то мы найдем, что $r^{-1}\{F_n(ikr)f_n(-ikr)-F_n(-ikr)f_n(ikr)\}$ должно быть независимо от r.

Поэтому имеем

$$\int\cdot\iint\dot{\psi}_n\frac{\partial\psi_n}{\partial r}\,dS\cdot dt=-\frac{1}{2}\,k^2at\iint S_n^2\,d\sigma,$$

так что выражение для энергии, излученной за время t, будет иметь вид

$$W=\frac{1}{2}\,k^2\rho at\iint S_n^2\,d\sigma \tag{8}$$

(так как $\delta p=-\rho\dot{\psi}$).

Более поучительно представить W как функцию нормального колебания у поверхности сферы с радиусом c. Из (2) имеем

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial r}=-\frac{S_n}{c^2}[\cos kat\,(\alpha\cos kc+\beta\sin kc)+$$
$$+\sin kat\,(\alpha\sin kc-\beta\cos kc)],$$

так что, если амплитуда $\partial\psi_n/\partial r$ равна U_n, то мы имеем следующее соотношение между S_n и U_n:

$$c^4U_n^2=(\alpha^2+\beta^2)S_n^2. \tag{9}$$

Таким образом,

$$W=\frac{k^2c^4\rho at}{2(\alpha^2+\beta^2)}\iint U_n^2\,d\sigma. \tag{10}$$

Эту формулу можно проверить для частных случаев $n=0$ и $n=1$, рассмотренных, соответственно, в §§ 280 и 325.

328. Если источником возмущения является нормальное колебание малой части поверхности сферы ($r=c$) в непосредственном соседстве с точкой $\mu=1$, то в общем решении, применимом для расходящихся

волн, а именно

$$\psi = -\frac{c^2}{r} e^{ik(at-r+c)} \sum \frac{U_n}{F_n(ikc)} f_n(ikr), \tag{1}$$

мы должны принять

$$U_n = \frac{1}{2}(2n+1) P_n(\mu) \cdot \int_{-1}^{+1} U P_n(\mu)\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2}(2n+1) P_n(\mu) \int_{-1}^{+1} U\, d\mu = \frac{2n+1}{4\pi c^2} P_n(\mu) \iint U\, dS, \tag{2}$$

так как, когда U имеет заметную величину, $P_n(\mu) = 1$. Таким образом,

$$\psi = -\frac{e^{ik(at-r+c)}}{4\pi r} \cdot \iint U\, dS \cdot \sum (2n+1) P_n(\mu) \frac{f_n(ikr)}{F_n(ikc)}. \tag{3}$$

В этой формуле $\iint U\, dS$ является мерой интенсивности источника.

Если ikc весьма мало, то

$$\frac{f_0(ikr)}{F_0(ikc)} = 1 - ikc + \ldots, \quad \frac{f_1(ikr)}{F_1(ikc)} = \frac{1}{2} ikc \left(1 + \frac{1}{ikr}\right) + \ldots \text{ и т. д.},$$

так что в конечном счете

$$\psi = -\frac{e^{ik(at-r)}}{4\pi r} \iint U\, dS, \tag{4}$$

и волны расходятся так, как от простого источника одинаковой величины.

Теперь мы рассмотрим эту задачу для случая, когда kc не очень мало, взяв для простоты случай, когда ψ определяется только на большом расстоянии, так что $f_n(ikr) = 1$. Множитель, от которого зависят относительные интенсивности в различных направлениях, выражается в виде

$$\sum \frac{2n+1}{2} \frac{P_n(\mu)}{F_n(ikc)}, \tag{5}$$

а полное решение задачи должно включать и исследование этого ряда как функции от μ и kc.

Таким образом, если

$$\sum \frac{2n+1}{2} \frac{P_n(\mu)}{F_n(ikc)} = F + iG, \tag{6}$$

то

$$\psi = -\frac{1}{2\pi r} \iint U\, dS \cdot (F^2 + G^2)^{1/2} \cdot e^{ik(at-r+c)+i\theta}, \tag{7}$$

где

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{G}{F}. \tag{8}$$

Интенсивность колебаний в различных направлениях, таким образом, определяется суммой $F^2 + G^2$. Если, как прежде, $F_n = \alpha + i\beta$, то

$$\left.\begin{aligned} F &= \sum \frac{2n+1}{2} \frac{\alpha P_n(\mu)}{\alpha^2+\beta^2}, \\ -G &= \sum \frac{2n+1}{2} \frac{\beta P_n(\mu)}{\alpha^2+\beta^2}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Приводимая ниже таблица позволяет вычислить F и G для любого значения μ при $kc = \frac{1}{2}$, 1 или 2. В последнем случае необходимо брать ряд до $n = 7$ для того, чтобы получить результат с достаточной точностью, для бо́льших же значений kc вычисление вскоре становится чрезвычайно громоздким. Во всех задачах подобного рода гармонический анализ, повидимому, теряет свою силу, если волны весьма малы по сравнению с размерами тела.

$kc = \frac{1}{2}$

n	2α	2β	$\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$	$\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}{\alpha^2+\beta^2}$
0	+ 2	+ 1	+ 0,4	+ 0,2
1	+ 4	− 7	+ 0,1846153	− 0,3230768
2	− 64	− 35	− 0,0601391	− 0,0328885
3	− 466	+ 853	− 0,0034527	+ 0,0063201
4	+ 14 902	+ 8 141	+ 0,0004653	+ 0,0002542
5	+ 175 592	− 321 419	+ 0,0000144	− 0,0000264

$kc = 1.$

n	α	β	$\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$	$\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}{\alpha^2+\beta^2}$
0	+ 1	+ 1	+ 0,25	+ 0,25
1	+ 2	− 1	+ 0,6	− 0,3
2	− 5	− 8	− 0,140449	− 0,224719
3	− 53	+ 34	− 0,046784	+ 0,030013
4	+ 295	+ 461	+ 0,004438	+ 0,006912
5	+ 4 951	− 3 179	+ 0,000787	− 0,000505
6	− 40 613	− 63 251	− 0,000047	− 0,000073
7	− 936 340	+ 601 217	− 0,000006	+ 0,000004

$kc = 2$

n	α	β	$\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$	$\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}{\alpha^2+\beta^2}$
0	+ 1	+ 2	+ 0,1	+ 0,2
1	+ 2	+ 1	+ 0,6	+ 0,3
2	+ 1,75	− 2,5	+ 0,46980	− 0,67114
3	− 8	− 4	− 0,35	− 0,175
4	− 16,1875	+ 35,125	− 0,04870	+ 0,10567
5	+ 186,625	+ 85,4375	+ 0,02436	+ 0,01115
6	+ 538,80	− 1177,3	+ 0,00209	− 0,00456
7	− 8621,7	− 3945,8	− 0,00072	− 0,00033

Наиболее интересным обстоятельством, которое вскрывает этот анализ, является влияние, которое оказывает твердая сфера, расположенная вблизи источника, на интенсивность звука в различных направлениях. Вследствие принципа взаимности (§ 294), источник и место наблюдения могут обменяться местами. Поэтому, если мы знаем относительные интенсивности в двух отстоящих друг от друга точках B и B', являющиеся результатом наличия источника A на поверхности сферы, то мы имеем также относительные интенсивности (измеряемые потенциалом) в точке A вследствие наличия далеких источников в точках B и B'. С этой точки зрения задача имеет двойной интерес.

В качестве численного примера я определил значения $F + iG$ и $F^2 + G^2$ для приведенных выше значений kc при $\mu = 1$, $\mu = -1$, $\mu = 0$, т. е. если смотреть из центра сферы в направлении источника, в противоположном направлении и вбок.

Если $kc = 0$, значение $F^2 + G^2$ равно 0,25, что, следовательно, представляет при той же шкале, которая принята в таблице, интенсивность, получающуюся от источника равной величины при отсутствии

kc	μ	$F + iG$	$F^2 + G^2$
$\frac{1}{2}$	1	0,521503 + 0,149417	0,294291
	− 1	0,159149 − 0,484149	0,259729
	0	0,430244 − 0,216539	0,231999
1	1	0,667938 + 0,238369	0,502961
	− 1	− 0,440055 − 0,302609	− 0,285220
	0	+ 0,321903 − 0,364974	0,236828
2	1	0,79683 + 0,23421	0,6898
	− 1	0,24954 + 0,50586	0,3182
	0	− 0,15381 − 0,57662	0,3562

препятствий. Мы можем истолковать kc как отношение длины большого круга сферы к длине волны звука.

Рассматривая цифры, приведенные в таблице, мы прежде всего обращаем внимание на сравнительно малые отклонения от равномерного распределения интенсивности звука между различными направлениями. Даже в случае, когда длина большого круга сферы вдвое превышает длину волны, едва ли можно наблюдать что-либо, могущее быть названным звуковой тенью. Но что, пожалуй, является еще более неожиданным, это то, что в первых двух случаях интенсивность позади сферы превосходит интенсивность в поперечном направлении (по бокам от сферы). Этот результат зависит, главным образом, от преобладающего значения члена первого порядка, обращающегося в нуль вместе с μ. Порядок членов, имеющих большее значение, увеличивается вместе с kc; когда kc равно 2, то главным членом является член второго порядка.

До известного предела увеличение сферы будет приводить к увеличению полного количества излучаемой энергии, так как простой источник излучает вдвое больше энергии, когда он расположен вплотную к твердой плоскости, чем когда он совершенно открыт. В пределах величин, приведенных в таблице, этот эффект скрадывает препятствия, создаваемые увеличением сферы, так что при $\mu = -1$ интенсивность больше, когда большая окружность сферы равна двойной длине волны, чем когда она равна половине длины волны, если при этом источник остается постоянным.

Если источник — не простой гармонический во времени, то относительная величина каждой из составляющих будет в некоторой степени изменяться как с размерами сферы, так и с изменением направления точки наблюдения, обнаруживая таким образом фундаментальный характер разложения на простые гармоники.

Если kc значительно меньше половины, вычисление можно провести с достаточным приближением алгебраически. В результате получим

$$F^2 + G^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} k^2c^2 \left(\frac{7}{4}\mu^2 - \frac{4}{3}\right) + \\ + \frac{1}{4} k^4c^4 \left(1 + \frac{3}{2}\mu + \frac{50}{81} P_2 + \frac{25}{81} P_2^2 - \frac{7}{20}\mu P_3 + \frac{6}{175} P_4\right) + \\ + \text{члены, содержащие } k^6c^6. \qquad (10)$$

Мы видим, что вплоть до члена с k^2c^2 интенсивность является четной функцией от μ, т. е. одинаковой в любых двух диаметрально противоположных точках. Для главных направлений $\mu = \pm 1$ или 0 численные определения коэфициента при k^4c^4 легко произвести, вследствие того, что функции P принимают тогда простые значения. Так,

$$(\mu = 1) \quad F^2 + G^2 = \frac{1}{4} + \frac{5}{144} k^2c^2 + 0{,}77755 k^4c^4 + \ldots,$$

$$(\mu = -1)\ F^2 + G^2 = \frac{1}{4} + \frac{5}{144} k^2c^2 + 0{,}02755 k^4c^4 + \ldots,$$

$$(\mu = 0)\quad F^2 + G^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} k^2c^2 + 0{,}19534 k^4c^4 + \ldots.$$

Если можно пренебречь k^4c^4, то интенсивность меньше в боковом направлении, чем непосредственно впереди или позади сферы. Вследствие свойства взаимности источник, помещенный на некотором расстоянии, будет давать на поверхности малой сферы бо́льшую интенсивность в точке, наиболее отдаленной от источника, чем в боковой точке.

Применяя эти формулы к случаю $kc = \frac{1}{2}$, получаем

$$\begin{aligned} (\mu = \ \ 1) &\quad F^2 + G^2 = 0{,}3073, \\ (\mu = -1) &\quad F^2 + G^2 = 0{,}2604, \\ (\mu = \ \ 0) &\quad F^2 + G^2 = 0{,}2344, \end{aligned}$$

что достаточно близко совпадает с результатами более полного вычисления.

Для других значений μ коэфициент при k^4c^4 в (10) можно вычислить с помощью таблиц лежандровых функций или из следующего алгебраического выражения, содержащего μ [1]):

$$1 + \frac{3}{2}\mu + \frac{50}{81} P_2 + \frac{25}{81} P_2^2 - \frac{7}{20} \mu P_3 + \frac{6}{175} P_4 =$$
$$= 0{,}78138 + 1{,}5\mu + 0{,}85938\,\mu^2 - 0{,}03056\,\mu^4.$$

Разность интенсивностей в направлениях $\mu = +1$ и $\mu = -1$ можно выразить очень просто. Так,

$$(F^2 + G^2)_{\mu=1} - (F^2 + G^2)_{\mu=-1} = \frac{3}{4} k^4c^4.$$

$$\begin{aligned} \text{При } kc = \frac{3}{8} &\quad \frac{3}{4} k^4c^4 = 0{,}0148. \\ \text{При } kc = \frac{2}{8} &\quad \frac{3}{4} k^4c^4 = 0{,}0029. \\ \text{При } kc = \frac{1}{8} &\quad \frac{3}{4} k^4c^4 = 0{,}0002. \end{aligned}$$

В то же самое время полное значение $F^2 + G^2$ приближается к 0,25, когда kc мало.

Эти числа весьма интересным образом связаны с ролью, которая принадлежит двум ушам в определении квадранта, из которого приходит звук.

Следует заметить, что изменение интенсивности в различных направлениях, о котором мы говорили, обязано присутствию сферы как препятствия, но не тому факту, что источник расположен на перифе-

[1]) Вид функций P приведен в § 334.

рии сферы, а не в ее центре. На большом расстоянии малое смещение источника звука влияет на *фазу*, но не на *интенсивность* в каком бы то ни было направлении.

Для того чтобы найти изменение фазы, имеем для малой сферы

$$F=\frac{1}{2}+k^2c^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\mu-\frac{5}{18}P_2\right),\ G=kc\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\mu\right),$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{G}{F}=kc\left(-1+\frac{3}{2}\mu\right),\ \text{или}\ \theta\approx kc\left(-1+\frac{3}{2}\mu\right).$$

Так, в (7)

$$e^{ik(at-r+c)+i\theta}=e^{ik\left(at-r+\frac{3}{2}\mu c\right)};$$

отсюда мы можем заключить, что фаза на расстоянии такая же, как если бы источник был расположен в точке $\mu=1$, $r=\frac{3}{2}c$ (вместо $r=c$) и препятствия не существовало.

329. Функциональные символы f и F можно выразить через P. Известно, что [1])

$$P_n(\mu)=1-\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{1}\cdot\frac{1-\mu}{2}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot2}\cdot\frac{(1-\mu)^2}{2^2}-\dots,$$

или, заменяя μ через $1-\mu$,

$$P_n(1-\mu)=1-\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{1}\cdot\frac{\mu}{2}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot2}\cdot\frac{\mu^2}{2^2}-\dots \quad (1)$$

Рассмотрим теперь символический оператор $P_n\left(1-\frac{d}{dy}\right)$, и пусть он действует на y^{-1}.

Так как

$$\left(\frac{d}{dy}\right)^s\cdot\frac{1}{y}=(-1)(-2)\dots(-s)\,y^{-s-1},$$

то

$$P_n\left(1-\frac{d}{dy}\right)\cdot\frac{1}{y}=y^{-1}+\frac{n(n+1)}{1\cdot2}y^{-2}+\frac{(n-1)\dots(n+2)}{2\cdot4}y^{-3}+\dots$$

Сравнение с (9) § 323 показывает, что

$$f_n(y)=yP_n\left(1-\frac{d}{dy}\right)\cdot\frac{1}{y}, \quad (2)$$

откуда, пользуясь известной формулой, выводим

$$\frac{e^{-y}}{y}f_n(y)=e^{-y}P_n\left(1-\frac{d}{dy}\right)\frac{1}{y}=(-1)^nP_n\left(\frac{d}{dy}\right)\cdot\frac{e^{-y}}{y}. \quad (3)$$

Подобным же образом

$$\frac{e^{+y}}{y}f_n(-y)=P_n\left(\frac{d}{dy}\right)\cdot\frac{e^{+y}}{y}.$$

[1]) Томсон и Тэт, *Nat. Phil.*, § 782 (цит. по Мэрфи).

Если теперь мы отождествим y с ikr, то увидим, что общее решение (12) § 323 можно написать в виде

$$\psi_n = (-1)^n ikS_n P_n\left(\frac{d}{d\cdot ikr}\right)\cdot\frac{e^{-ikr}}{ikr} + ikS'_n P_n\left(\frac{d}{d\cdot ikr}\right)\cdot\frac{e^{+ikr}}{ikr}; \quad (4)$$

второй член этого выражения следует опустить, если ни одна часть возмущения не распространяется внутрь.

Из (14) § 323 мы видим также, что

$$\frac{F_n(y)}{y^2} = \left(1-\frac{d}{dy}\right)\cdot\frac{f_n(y)}{y},$$

откуда

$$F_n(y) = y^2 P_n\left(1-\frac{d}{dy}\right)\left(1-\frac{d}{dy}\right)\cdot\frac{1}{y} \quad (5)$$

и

$$\frac{F_n(y)\,e^{-y}}{y^2} = -(-1)^n P_n\left(\frac{d}{dy}\right)\frac{d}{dy}\cdot\frac{e^{-y}}{y}. \quad (6)$$

Аналогично

$$\frac{F_n(-y)\,e^{+y}}{y^2} = -P_n\left(\frac{d}{dy}\right)\frac{d}{dy}\cdot\frac{e^{+y}}{y}. \quad (7)$$

Подставив эти выражения в уравнение (13) § 323, получаем

$$\frac{d\psi_n}{dr} = (-1)^{n+1}k^2 S_n P_n\left(\frac{d}{d(ikr)}\right)\frac{d}{d(ikr)}\cdot\frac{e^{-ikr}}{ikr} - \\ - k^2 S'_n P_n\left(\frac{d}{d(ikr)}\right)\frac{d}{d(ikr)}\cdot\frac{e^{+ikr}}{ikr}. \quad (8)$$

330. Мы уже рассматривали в некоторых деталях форму, принимаемую нашими общими выражениями в случае отсутствия источника в бесконечности. Столь же важный класс случаев соответствует условию отсутствия источника в начале. В настоящем разделе мы исследуем, какое ограничение благодаря этому накладывается на наши общие выражения.

Обращая ряд для f_n, имеем

$$r\psi_n = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{(ikr)^n}\{S_n e^{-ikr}(1+ikr+\ldots) + \\ + (-1)^n S'_n e^{+ikr}(1-ikr+\ldots)\};$$

это показывает, что при безграничном уменьшении r значение $r\psi_n$ приближается к

$$r\psi_n = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{(ikr)^n}\{S_n + (-1)^n S'_n\}.$$

Таким образом, для того чтобы ψ_n было конечным в начале, необходимо соблюдение условия

$$S_n + (-1)^n S'_n = 0; \quad (1)$$

что это условие также достаточно, мы увидим позже.

В соответствии с этим (12) § 323 принимает вид

$$r\psi_n = S_n \{e^{-ikr} f_n(ikr) - (-1)^n e^{+ikr} f_n(-ikr)\}. \quad (2)$$

Если, разделив действительную и мнимую части f_n, мы напишем (как выше)

$$f_n = \alpha' + i\beta', \quad (3)$$

то выражению (2) можно придать вид

$$r\psi_n = -2i^{n+1} S_n \left\{\alpha' \sin\left(kr + \frac{1}{2}n\pi\right) - \beta' \cos\left(kr + \frac{1}{2}n\pi\right)\right\}. \quad (4)$$

Другой вид можно получить из (4) § 329. Мы имеем

$$\psi_n = -2ik(-1)^n S_n P_n\left(\frac{d}{d(ikr)}\right) \cdot \frac{e^{+ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} =$$
$$= -2ik(-1)^n S_n P_n\left(\frac{d}{d(ikr)}\right) \cdot \frac{\sin kr}{kr}. \quad (5)$$

Поскольку функция P_n или целиком нечетная, или целиком четная, выражение для ψ_n или действительное, или чисто мнимое.

Для того чтобы доказать, что значение ψ_n в (5) остается конечным при $r \to 0$, начнем с замечания, что

$$\frac{2\sin kr}{kr} = \int_{-1}^{+1} e^{-ikr\mu} d\mu,$$

так что

$$2P_n\left(\frac{d}{d(ikr)}\right)\frac{\sin kr}{kr} = \int_{-1}^{+1} P_n\left(\frac{d}{d(ikr)}\right) e^{ikr\mu} d\mu =$$
$$= \int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\, e^{ikr\mu} d\mu. \quad (7)$$

Это станет очевидным, если учесть, что результатом дифференцирования $e^{ikr\mu}$ любое число раз по ikr будет умножение его на соответствующую степень μ. Остается разложить выражение, стоящее в правой части, по восходящим степеням r. Мы имеем

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\, e^{ikr\mu} d\mu = \int_{-1}^{+1} d\mu P_n(\mu) \left\{1 + ikr\cdot\mu + \frac{(ikr)^2}{1\cdot 2}\cdot\mu^2 + \right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{(ikr)^n}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\mu^n + \ldots\right\}.$$

Но всякая целая положительная степень μ, например μ^p, может быть разложена в конечный ряд функций P, причем функцией высшего порядка будет P_p. Отсюда, в силу известных свойств таких

функций, следует, что при $p < n$

$$\int_{-1}^{+1} \mu^p P_n(\mu)\, d\mu = 0.$$

Таким образом, низшая степень ikr в интеграле $\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\, e^{ikr\mu} d\mu$ есть $(ikr)^n$. Удерживая только главный член, мы можем написать

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\, e^{ikr\mu} d\mu = \frac{(ikr)^n}{1\cdot 2\ldots n} \int_{-1}^{+1} \mu^n P_n(\mu)\, d\mu.$$

Из выражения для $P_n(\mu)$ через μ, а именно

$$P_n(\mu) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left\{\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot (2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4} - \ldots\right\}. \qquad (8)$$

мы видим, что

$\mu^n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)} P_n(\mu) +$ члены, содержащие μ в степени ниже μ^n, а потому

$$\int_{-1}^{+1} \mu^n P_n(\mu)\, d\mu = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)} \int_{-1}^{+1} [P_n(\mu)]^2 d\mu =$$
$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)} \cdot \frac{2}{2n+1}. \qquad (9)$$

В соответствии с этим, вследствие (5) и (7),

$$\psi_n = -2ik(-1)^n S_n \frac{(ikr)^n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)} + \ldots, \qquad (10)$$

откуда видно, что ψ_n обращается в нуль вместе с r, за исключением случая, когда $n = 0$.

Полный ряд для ψ_n, в случае, когда в полюсе нет источника, удобнее получается при помощи функций Бесселя. Диференциальное уравнение (4) § 200, которым удовлетворяют эти функции, именно

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) y = 0, \qquad (11)$$

можно также написать в виде

$$\frac{d^2(yz^{1/2})}{dz^2} + \left(1 - \frac{4m^2-1}{4z^2}\right) yz^{1/2} = 0. \qquad (12)$$

Известно (§ 200), что решение уравнения (11) при условии, что оно конечно при $z=0$, есть $y=AJ_m(z)$, где

$$J_m(z)=\frac{z^m}{2^m\Gamma(m+1)}\left\{1-\frac{z^2}{2(2m+2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{z^4}{2\cdot4\cdot(2m+2)(2m+4)}-\dots\right\} \tag{13}$$

есть функция Бесселя m-го порядка.

Если m — целое, $\Gamma(m+1)=1\cdot2\cdot3\dots m$; но здесь мы имеем дело с m дробным, вида $n+\frac{1}{2}$, где n — целое. В этом случае

$$\Gamma(m+1)=\frac{1\cdot3\cdot5\dots(2n+1)}{2^{n+1}}\cdot\sqrt{\pi}. \tag{14}$$

Обращаясь теперь к (12), мы видим, что решением уравнения

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}+\left(1-\frac{4m^2-1}{4z^2}\right)\theta=0 \tag{15}$$

при том же условии конечности при $z=0$ будем иметь

$$\theta=Az^{1/2}J_m(z). \tag{16}$$

Функция ψ_n, с которой мы теперь имеем дело, удовлетворяет уравнению (4) § 323, а именно

$$\frac{d^2(r\psi_n)}{d(kr)^2}+\left\{1-\frac{n(n+1)}{(kr)^2}\right\}r\psi_n=0, \tag{17}$$

которое имеет тот же вид, как (15) в случае, если $m=n+\frac{1}{2}$; следовательно, решением будет

$$\psi_n=A(kr)^{1/2}J_{n+1/2}(kr)=A\frac{(kr)^n\sqrt{2}}{1\cdot3\dots(2n+1)\sqrt{\pi}}\left\{1-\frac{(kr)^2}{2(2n+3)}+\right.$$
$$\left.+\frac{(kr)^4}{2\cdot4\cdot(2n+3)(2n+5)}-\dots\right\}. \tag{18}$$

Определив постоянную путем сравнения с (10), находим полное выражение для ψ_n по восходящим степеням r:

$$\psi_n=-2(-1)^n i^{n+1}kS_n\left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{1/2}J_{n+1/2}(kr)=$$
$$=-2ik(-1)^nS_n\frac{(ikr)^n}{1\cdot3\cdot5\dots(2n+1)}\left\{1-\frac{k^2r^2}{2(2n+3)}+\right.$$
$$\left.+\frac{k^4r^4}{2\cdot4\cdot(2n+3)(2n+5)}-\frac{k^6r^6}{2\cdot4\cdot6\cdot(2n+3)(2n+5)(2n+7)}+\dots\right\}. \tag{19}$$

Сравнивая различные выражения для ψ_n, именно (5) и (19), получаем:

$$P_n\left(\frac{d}{d(ikr)}\right)\frac{\sin kr}{kr}=i^n\left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{1/2}J_{n+1/2}(kr). \tag{20}$$

Если $F=\alpha+i\beta$, то соответствующие выражения для $d\dot{\psi}_n/dr$ будут:

$$\frac{d\dot{\psi}_n}{dr}=-\frac{S_n}{r^2}\{e^{-ikr}F_n(ikr)-(-1)^n e^{+ikr}F_n(-ikr)\}=$$
$$=\frac{2i^{n+1}S_n}{r^2}\left\{\alpha\sin\left(kr+\frac{1}{2}n\pi\right)-\beta\cos\left(kr+\frac{1}{2}n\pi\right)\right\}=$$
$$=-2ik^2(-1)^nS_nP_n\left(\frac{d}{d(ikr)}\right)\frac{d}{d(kr)}\cdot\frac{\sin kr}{kr}=$$
$$=\frac{2n(-1)^nk^2S_n(ikr)^{n-1}}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)}\left\{1-\frac{n+2}{2n(2n+3)}k^2r^2+\ldots\right\}. \qquad (21)$$

Полезно выписать для справок вид функций $\dot{\psi}$ и $d\dot{\psi}/dr$ первых трех порядков:

$$n=0\begin{cases}\dot{\psi}_0=-2ikS_0\dfrac{\sin kr}{kr},\\ \dfrac{d\dot{\psi}_0}{dr}=\dfrac{2ikS_0}{r}\left\{\dfrac{\sin kr}{kr}-\cos kr\right\}.\end{cases}$$
$$n=1\begin{cases}\dot{\psi}_1=\dfrac{2S_1}{r}\left\{\cos kr-\dfrac{\sin kr}{kr}\right\},\\ \dfrac{d\dot{\psi}_1}{dr}=-\dfrac{2S_1}{r^2}\left\{2\cos kr+\left(kr-\dfrac{2}{kr}\right)\sin kr\right\}.\end{cases}$$
$$n=2\begin{cases}\dot{\psi}_2=-\dfrac{2iS_2}{r}\left\{\left(1-\dfrac{3}{k^2r^2}\right)\sin kr+3kr\cos kr\right\},\\ \dfrac{d\dot{\psi}_2}{dr}=\dfrac{2iS_2}{r^2}\left\{\left(4-\dfrac{9}{k^2r^2}\right)\sin kr-\left(kr-\dfrac{9}{kr}\right)\cos kr\right\}.\end{cases}$$

331. Одним из наиболее интересных применений этих результатов является применение их к исследованию движения газа внутри твердой сферической оболочки. Для определения периодов свободных колебаний достаточно будет предположить, что $\partial\dot{\psi}/\partial r$ равно нулю, когда r равно радиусу оболочки. Так, в случае симметричных колебаний имеем для определения k

$$\operatorname{tg} kr=kr, \qquad (1)$$

т. е. уравнение, которое мы уже рассматривали в главе о мембранах, § 207. Первый конечный корень ($kr=1{,}4303\pi$) соответствует симметричному колебанию низшей частоты. В случае корня более высокого порядка рассматриваемое колебание имеет сферические узлы, радиусы которых соответствуют корням низшего порядка.

Любой конус с вершиной в начале можно превратить в жесткий, нисколько не влияя на условия нашей задачи.

Пучности, или места, где отсутствует изменение давления, определяются уравнением $(kr)^{-1}\sin kr=0$, или $kr=m\pi$, где m — любое целое число, кроме нуля.

Случай, когда $n=1$ и когда колебания можно назвать диаметральными, пожалуй, наиболее интересен. S_1, будучи гармоникой пер-

вого порядка, пропорционально $\cos\theta$, где θ — угол между r и некоторым фиксированным направлением отсчета. Так как $\partial\psi_1/\partial\theta$ исчезает только в полюсах, то конические узлы [1]) с вершиной в центре отсутствуют. Но всякая меридиональная плоскость — узловая, и ее можно считать жесткой. Вдоль каждого отдельного радиуса-вектора ψ_1 и $\partial\psi_1/\partial\theta$ исчезают и меняют знак вместе с $\cos kr - (kr)^{-1}\sin kr$, т. е. когда $\operatorname{tg} kr = kr$.

Для определения сферических узлов имеем

$$\operatorname{tg} kr = \frac{2kr}{2 - k^2r^2}. \qquad (2)$$

Первый корень есть $kr = 0$. Вычисляя с помощью тригонометрических таблиц методом последовательных приближений, я нашел для ближайшего корня, соответствующего важнейшему колебанию в сфере, $kr = 119{,}26\cdot\pi/180$, так что $r/\lambda = 0{,}3313$.

Воздух движется от одной стенки к другой, в значительной степени подобно тому, как в трубе, закрытой с двух сторон. Без всякого анализа мы можем предсказать, что тон будет выше для сферы, чем для закрытой трубы такой же длины, так как сферу можно вывести из цилиндра с закрытыми концами, частично наполняя последний препятствием из некоторого материала, влияние которого должно усилить *пружинящее* действие, между тем как передвигаемая масса остается почти без изменения. И действительно, для замкнутой трубы длины $2r$

$$\frac{r}{\lambda} = 0{,}25.$$

Таким образом, тон сферы выше тона цилиндра приблизительно на одну кварту.

Рассматриваемое здесь колебание есть колебание самой низкой частоты, возможной для сферы; оно более чем на октаву ниже, чем низшее (основное) радиальное колебание. Следующим колебанием такого типа будет колебание, для которого $kr = 340{,}35\cdot\pi/180$, или

$$\frac{r}{\lambda} = 0{,}9454,$$

и которое, следовательно, выше наинизшего (основного) радиального колебания.

Если kr велико, то корни уравнения (2) удобно вычислять при помощи рядов. Если $kr = \sigma\pi - y$ (где σ — целое число), то

$$\operatorname{tg} y = \frac{2(\sigma\pi - y)}{(\sigma\pi - y)^2 - 2},$$

откуда находим

$$kr = \sigma\pi - \frac{2}{\sigma\pi} - \frac{16}{3\sigma^3\pi^3} + \ldots \qquad (3)$$

[1]) Узел является поверхностью, которую можно предположить жесткой, т. е. сквозь него не проходит никакое движение.

Если $n=2$, то общее выражение для S_n будет

$$S_2 = A_0\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right) + (A_1\cos\omega + B_1\sin\omega)\sin\theta\cos\theta + \\ + (A_2\cos 2\omega + B_2\sin 2\omega)\sin^2\theta, \tag{4}$$

откуда мы выберем для специального рассмотрения следующие замечательные случаи:

α) зональная гармоника

$$S_2 = A_0\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right). \tag{4a}$$

Здесь $\partial\psi_2/\partial\theta$ пропорционально $\sin 2\theta$, а потому исчезает при $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Это показывает, что экваториальная плоскость есть узловая поверхность, так что движение — такое же, какое могло бы иметь место внутри замкнутой полусферы. Следовательно, поскольку S_2 не содержит ω, любую меридиональную плоскость можно считать жесткой.

β) секториальная гармоника

$$S_2 = A_2\cos 2\omega\sin^2\theta. \tag{5}$$

Здесь опять $\partial\psi_2/\partial\theta$ изменяется пропорционально $\sin 2\theta$, и экваториальная плоскость — узловая. Но $d\psi_2/d\omega$ изменяется пропорционально $\sin 2\omega$, а потому не исчезает независимо от θ, за исключением случая, когда $\sin 2\omega = 0$. В соответствии с этим оказывается, что две и только две меридиональные плоскости — узловые и что они расположены под прямым углом друг к другу.

γ) тессеральная гармоника

$$S_2 = A_1\cos\omega\sin\theta\cos\theta. \tag{6}$$

В этом случае $\partial\psi_2/\partial\theta$ исчезает независимо от ω вместе с $\cos 2\theta$, т. е. когда $\theta = \frac{1}{4}\pi$ или $\frac{3}{4}\pi$, что приводит к узловому конусу вращения с прямым углом при вершине. $d\psi_2/d\omega$ изменяется пропорционально $\sin\omega$, и следовательно, имеется одна и только одна меридиональная узловая плоскость [1]).

Сферические узлы определяются уравнением

$$\operatorname{tg} kr = \frac{k^3r^3 - 9kr}{4k^2r^2 - 9}, \tag{7}$$

первое конечное решение которого есть

$$kr = 3{,}3422$$

и дает тон ниже любого тона радиальных колебаний.

[1]) [Я обязан проф. Лэмбу замечанием, что различие между β и γ заключается только в отношении к осям координат.]

В случае общей гармоники уравнение, определяющее возможные тоны в сфере радиуса r, можно написать в виде (21) § 330

$$\operatorname{tg}\left(kr+\frac{1}{2}n\pi\right)=\frac{\beta}{\alpha}, \tag{8}$$

или

$$P_n\left(\frac{d}{d(ikr)}\right)\frac{d}{d(kr)}\cdot\frac{\sin kr}{kr}=0, \tag{9}$$

или же

$$2krJ'_{n+1/2}(kr)=J_{n+1/2}(kr). \tag{10}$$

[Для корней уравнения

$$\frac{d}{dz}\left\{z^{-1/2}J_\nu(z)\right\}=0, \tag{11}$$

эквивалентного уравнению (10), проф. Мак-Магон дает [1])

$$z_\nu^{(s)}=\beta'-\frac{m+7}{8\beta'}-\frac{4(7m^2+154m+95)}{3(8\beta')^3}-\\-\frac{32(83m^3+3535m^2+3561m+6133)}{15(8\beta')^5}-\ldots, \tag{12}$$

где $m=4\nu^2$, и

$$\beta'=\frac{1}{4}(2\nu+4s+1). \tag{13}$$

Если $n=1$, так что $\nu=\frac{3}{2}$, то

$$m=9,\quad \beta'=s+1,$$

и (12) дает результат, согласный с (3).]

Таблица A дает значения λ для сферы единичного радиуса, соответствующие наиболее важным типам колебаний. В таблице B даны частоты различных колебаний относительно основной частоты всей системы. Таблица обнимает достаточно значений, включая две октавы.

Таблица A,
дающая значения λ для сферы единичного радиуса

		Порядок гармоники						
		0	1	2	3	4	5	6
Число внутренних сферических узлов	0	1,3983	3,0186	1,8300	1,392	1,113	0,9300	0,8002
	1	0,81334	1,0577	0,86195	0,7320	0,6385		
	2	0,57622	0,68251	0,59208	0,5248			
	3	0,44670	0,50653	0,45380				
	4	0,36435	0,40330					
	5	0,30833	0,33523					

[1]) McMahon, Annals of Mathematics, том IX, № 1.

Таблица B

Высота каждого тона по отношению к основной частоте	Порядок гармоники	Число внутренних сферических узлов	Высота каждого тона по отношению к основной частоте	Порядок гармоники	Число внутренних сферических узлов
1,0000	1	0	2,8540	1	1
1,6056	2	0	3,2458	5	0
2,1588	0	0	3,5021	2	1
2,169	3	0	3,7114	0	1
2,712	4	0	3,772	6	0

332. Если отбросить ненужные постоянные, то частное решение для колебаний газа внутри сферической оболочки единичного радиуса можно представить в виде

$$\psi_n = S_n(kr)^{-1/2} J_{n+1/2}(kr)\cos(kat - \theta), \tag{1}$$

где k — корень уравнения

$$2kJ'_{n+1/2}(k) = J_{n+1/2}(k). \tag{2}$$

Обобщая это, мы должны вспомнить, что S_n может быть составлена из нескольких членов, причем каждому члену может соответствовать колебание произвольной амплитуды и фазы. Далее, каждый член, входящий в S_n, может быть связан с каким-нибудь или со всеми значениями k, определяемыми уравнением (2). Так, например, под рубрикой $n = 2$ мы могли бы иметь

$$\psi_2 = A\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)(k_1 r)^{-1/2} J_{n+1/2}(k_1 r)\cos(k_1 at + \theta_1) + \\ + B\cos 2\omega \sin^2\theta\,(k_2 r)^{-1/2} J_{n+1/2}(k_2 r)\cos(k_2 at + \theta_2),$$

где k_1 и k_2 — различные корни уравнения

$$2kJ'_{5/2}(k) = J_{5/2}(k).$$

Любые две составляющие ψ сопряжены, т. е. обращаются в нуль, если их перемножить и проинтегрировать по всему объему сферы. Это следует из свойства сферических функций для случаев, когда оба рассматриваемых члена соответствуют различным значениям n или двум различным составляющим S_n [1]. Единственный случай, который еще остается рассмотреть, требует от нас доказательства того, что

$$\int_0^1 r^2 dr \cdot (k_1 r)^{-1/2} J_{n+1/2}(k_1 r) \cdot (k_2 r)^{-1/2} J_{n+1/2}(k_2 r) = 0, \tag{3}$$

[1] Томсон и Тэт, *Natural Philosophy*, стр. 151.

где k_1 и k_2 — *различные* корни уравнения

$$2kJ'_{n+1/2}(k) = J_{n+1/2}(k); \tag{4}$$

но это — непосредственное следствие основного свойства таких функций (§ 203). Поэтому приспособление общего решения к предписанным начальным условиям не представляет никаких трудностей.

Для иллюстрации возьмем случай, когда газ вначале находится в положении внутреннего равновесия, но движется с постоянной скоростью параллельно оси x. Такое условие приближенно реализуется в случае, когда сферическая оболочка с газом, сначала находившаяся в равномерном движении, внезапно останавливается.

Поскольку вначале нет ни сгущения, ни разрежения, все величины θ_n обращаются в нуль. Если $\partial\Phi/\partial x$ вначале равна единице, то мы имеем $\Phi = x = r\mu$; это показывает, что решение содержит только члены первого порядка относительно сферических функций. Поэтому решение имеет вид

$$\Phi = A_1 (k_1 r)^{-1/2} J_{3/2}(k_1 r)\,\mu \cos k_1 at + \\ + A_2 (k_2 r)^{-1/2} J_{3/2}(k_2 r)\,\mu \cos k_2 at + \dots, \tag{5}$$

где k_1, k_2 и т. д. — корни уравнения

$$2kJ'_{3/2}(k) = J_{3/2}(k). \tag{6}$$

Для определения коэфициентов мы имеем сначала, для значений r от 0 до 1,

$$r = A_1 (k_1 r)^{-1/2} J_{3/2}(k_1 r) + A_2 (k_2 r)^{-1/2} J_{3/2}(k_2 r) + \dots \tag{7}$$

Помножив на $r^{3/2} J_{3/2}(kr)$ и интегрируя по r от 0 до 1, находим

$$\int_0^1 r^{3/2} J_{3/2}(kr)\,dr = Ak^{-1/2} \int_0^1 [J_{3/2}(kr)]^2\, r\,dr, \tag{8}$$

остальные члены в правой части исчезают в силу сопряженности. Но в силу (16) § 203 и уравнения (6),

$$2\int_0^1 [J_{3/2}(kr)]^2\, r\,dr = [J'_{3/2}(k)]^2 + \left(1 - \frac{9}{4k^2}\right)[J_{3/2}(k)]^2 = \\ = \left(1 - \frac{2}{k^2}\right)[J_{3/2}(k)]^2. \tag{9}$$

Вычисление интеграла $\int_0^1 r^{5/2} J_{3/2}(kr)\,dr$ можно произвести, пользуясь теоремой, относящейся к этим функциям. Из основного дифференциального уравнения имеем

$$\int_0^r r^{n+1} \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dJ_n(kr)}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) J_n(kr)\right] dr = 0,$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$k^2\int_0^r r^{n+1}J_n(kr)\,dr = nr^nJ_n(kr) - r^{n+1}\frac{dJ_n(kr)}{dr}, \tag{10}$$

или, полагая $r=1$,

$$k^2\int_0^1 r^{n+1}J_n(kr)\,dr = nJ_n(k) - kJ_n'(k). \tag{11}$$

Так, в случае, с которым мы имеем здесь дело, в силу (6),

$$k^2\int_0^1 r^{5/2}J_{3/2}(kr)\,dr = {}^3/_2 J_{3/2}(k) - kJ_{3/2}'(k) = J_{3/2}(k).$$

Уравнение (8) поэтому принимает вид

$$A = \frac{2k^{1/2}}{(k^2-2)\,J_{3/2}(k)}, \tag{12}$$

и окончательным решением будет

$$\psi = \sum \frac{2r^{-1/2}\mu}{k^2-2}\,\frac{J_{3/2}(kr)}{J_{3/2}(k)}\cos kat, \tag{13}$$

где суммирование должно быть распространено на все допустимые значения k.

При $t=0$ и $r=1$ мы должны иметь $\psi=\mu$ и соответственно

$$\sum \frac{2}{k^2-2} = 1. \tag{14}$$

Напомним, что высшие значения k приближенно равны [(3) § 331]

$$k = \sigma\pi - \frac{2}{\sigma\pi}. \tag{15}$$

Первое значение k равно 2,0815, а второе 5,9402, откуда

$$\frac{2}{k_1^2-2} = 0{,}85742, \quad \frac{2}{k_2^2-2} = 0{,}06009,$$

что показывает, что первый член ряда для ψ значительно превышает остальные.

Здесь полезно вспомнить, что

$$J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right). \tag{16}$$

Уравнение (14) можно проверить следующим образом: величины k суть корни уравнения

$$\frac{d}{dz}\left\{z^{-1/2}J_{3/2}(z)\right\} = 0,$$

или, если $\varphi = z^{-1/2} J_{3/2}(z)$, корни уравнения $\varphi' = 0$, где φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi'' + \frac{2}{z}\varphi' + \left(1 - \frac{2}{z^2}\right)\varphi = 0. \tag{17}$$

Но поскольку главный член в разложении φ' по восходящим степеням z не зависит от z, мы можем написать

$$\varphi' = \text{const} \cdot \left\{1 - \frac{z^2}{k_1^2}\right\}\left\{1 - \frac{z^2}{k_2^2}\right\}\ldots,$$

откуда, логарифмируя и диференцируя, имеем

$$-\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{2z}{k_1^2 - z^2} + \frac{2z}{k_2^2 - z^2} + \ldots$$

Если теперь мы положим $z^2 = 2$, то, в силу (17), получим

$$\sum \frac{2}{k^2 - 2} = -\frac{\varphi''}{z\varphi'} = 1 \qquad (z^2 = 2).$$

333. Подобным же образом мы можем исследовать задачу о колебаниях воздуха, заключенного между жесткими концентрическими сферическими поверхностями с радиусами r_1 и r_2. Действительно, в силу (13) § 323, если $\partial\psi_n/\partial r$ исчезает для этих значений r, то

$$e^{2ikr_1}\frac{F_n(-ikr_1)}{F_n(+ikr_1)} = e^{2ikr_2}\frac{F_n(-ikr_2)}{F_n(+ikr_2)},$$

откуда

$$\operatorname{tg} k(r_1 - r_2) = \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_2}{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_1\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_2}, \tag{1}$$

где, как прежде,

$$F_n(+ikr) = \alpha + i\beta. \tag{2}$$

Если разность между r_1 и r_2 весьма мала, сравнительно с самими величинами, то задача тождественна с задачей колебания сферического слоя воздуха, и ее лучше всего решать независимо. В уравнении (1) § 323, в случае если ψ не зависит от r, как это очевидно должно быть приближенно при наших предположениях, мы имеем

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2} + k^2r^2\psi = 0. \tag{3}$$

Решением этого уравнения является просто

$$\psi_n = S_n, \tag{4}$$

а допустимые значения k^2 определяются соотношением

$$k^2r^2 = n(n+1). \tag{5}$$

Интервал между низшим тоном ($n = 1$) и ближайшим к нему таков, что два таких интервала вместе дали бы дуодециму (октава плюс квинта). Задача о сферическом слое газа будет рассмотрена дальше, в следующей главе. [По вопросу об отклонении соотношения (5) от фундаментального детерминанта, эквивалентного 1, отсылаем читателя к небольшой статье Кри [1].]

334. В качестве другого применения сферических функций мы проведем исследование возмущения, которое получается, когда плоские волны звука встречают преграждающую сферу. Принимая центр сферы за начало полярных координат и направление прихода волн за ось μ, обозначим через φ потенциал невозмущенных плоских волн. Тогда, отбрасывая ненужный комплексный коэфициент, имеем

$$\varphi = e^{ik(at+x)} = e^{ikat} \cdot e^{ikr\mu}, \tag{1}$$

и решение задачи требует разложения $e^{ikr\mu}$ по сферическим функциям. Вследствие симметрии сферические функции приводятся к функциям Лежандра $P_n(\mu)$, так что мы можем положить

$$e^{ikr\mu} = A_0 + A_1 P_1 + \ldots + A_n P_n + \ldots, \tag{2}$$

где A_0, A_1, ... — функции от r, но не от μ. Из доказанного уже выше мы можем предвидеть, что A_n, рассматриваемая как функция от r, должна изменяться пропорционально

$$P_n\left(\frac{d}{dikr}\right)\frac{\sin kr}{kr}, \text{ или пропорционально } r^{-1/2}J_{n+1/2}(kr);$$

этот же результат можно легко получить и непосредственно. Помножив (2) на $P_n(\mu)$ и интегрируя по μ от $\mu = -1$ до $\mu = +1$, находим

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu) e^{ikr\mu} d\mu = A_n \int_{-1}^{+1} (P_n)^2 d\mu = \frac{2A_n}{2n+1}, \tag{3}$$

и, так же, как в § 330,

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\, e^{ikr\mu}\, d\mu = 2P_n\left(\frac{d}{d(ikr)}\right) \cdot \frac{\sin kr}{kr},$$

так что, в конечном итоге,

$$\frac{A_n}{2n+1} = P_n\left(\frac{d}{d(ikr)}\right) \cdot \frac{\sin kr}{kr} = i^n \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr). \tag{4}$$

В рассматриваемой задаче все движение вне сферы можно разделить на две части; первую, изображаемую функцией φ и соответствующую невозмущенным плоским волнам, и вторую, представляющую возмущение, создаваемое присутствием сферы и расходящееся

[1] Chree, *Messenger of Mathematics*, том XV, стр. 20, 1886.

наружу от сферы. Если потенциал второй части обозначить через ψ, то, заменяя функции S_n через $a_n P_n(\mu)$, получим [(2) § 324]:

$$\left.\begin{aligned} r\psi_n &= a_n P_n(\mu)\cdot e^{-ikr} f_n(ikr), \\ r^2\frac{\partial \psi_n}{\partial r} &= -a_n P_n(\mu)\cdot e^{-ikr} F_n(ikr). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Потенциал скоростей движения в целом найдем путем сложения φ и ψ, причем постоянные a_n определяются граничными условиями, форма которых зависит от характера препятствия, представляемого сферой. Простейший случай — это случай твердой, неподвижной сферы; тогда условие, которому нужно удовлетворить при $r = c$, есть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \tag{6}$$

Это соотношение, несомненно, хорошо удовлетворяется для каждого отдельного гармонического элемента. Для элемента порядка n получаем

$$a_n = (2n+1)\frac{kc^2 e^{ikc}}{F_n(ikc)} P_n\left(\frac{d}{d(ikc)}\right)\frac{d}{d(kc)}\cdot\frac{\sin kc}{kc}. \tag{7}$$

Соответствующее плоским волнам $\varphi = e^{ik(at+x)}$, возмущение, создаваемое наличием сферы, выражается в виде

$$\psi = \frac{kc^2}{r} e^{ik(at-r+c)}\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2n+1}{F_n(ikc)} P_n\left(\frac{d}{d(ikc)}\right)\frac{d}{d(kc)}\cdot\frac{\sin kc}{kc} P_n(\mu)\cdot f_n(ikr). \tag{8}$$

На достаточном расстоянии от источника возмущения мы можем положить $f_n(ikr) = 1$. Для того чтобы перейти к решению действительной задачи, мы можем разделить действительную и мнимую части и отбросить последнюю. В этом предположении плоские волны представляются функцией

$$[\varphi] = \cos k(at + x). \tag{9}$$

Ограничиваясь ради простоты частями пространства на большем расстоянии от сферы, где $f_n(ikr) = 1$, выделим опять действительную часть выражения (8). Поскольку функции P — целиком четные или целиком нечетные,

$$P_n\left(\frac{d}{d(ikc)}\right)\frac{d}{d(kc)}\cdot\frac{\sin kc}{kc}$$

целиком действительное или целиком мнимое, так что этот множитель не доставляет затруднений. Однако, $\{F_n(ikc)\}^{-1}$ комплексна, и так как $F_n(ikc) = \alpha + i\beta$, то

$$\{F_n(ikc)\}^{-1} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{e^{i\gamma}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

где $\operatorname{tg}\gamma = -\beta/\alpha$. [Если во всех случаях брать положительное зна-

чение $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, то γ нужно выбрать так, чтобы $\cos\gamma$ имел тот же знак, что и α.]

Так,

$$\psi = \sum (2n+1)\frac{kc^2}{r} e^{i[k(at-r+c)+\gamma]} \times \\ \times \{\alpha^2+\beta^2\}^{-n/2} P_n\left(\frac{d}{d(ikc)}\right)\frac{d}{d(kc)}\cdot\frac{\sin kc}{kc}\cdot P_n(\mu). \quad (10)$$

Поэтому, когда n четно, то

$$[\psi] = (2n+1)\frac{kc^2}{r}\cos\{k(at-r+c)+\gamma\} \times \\ \times \{\alpha^2+\beta^2\}^{-n/2} P_n\left(\frac{d}{d(ikc)}\right)\frac{d}{d(kc)}\cdot\frac{\sin kc}{kc}\cdot P_n(\mu). \quad (11)$$

Когда же n нечетно, то

$$[\psi] = (2n+1)\frac{kc^2}{r} i\sin\{k(at-r+c)+\gamma\} \times \\ \times \{\alpha^2+\beta^2\}^{-n/2} P_n\left(\frac{d}{d(ikc)}\right)\frac{d}{d(kc)}\cdot\frac{\sin kc}{kc}\cdot P_n(\mu). \quad (12)$$

В качестве примера выпишем члены $[\psi]$, включающие гармоники порядка 0, 1, 2. Следующая табличка функций $P_n(\mu)$ окажет пользу в вычислении:

$$P_0 = 1, \qquad P_1 = \mu,$$
$$P_2 = \frac{3}{2}\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right), \qquad P_3 = \frac{5}{2}\left(\mu^3-\frac{3}{5}\mu\right),$$
$$P_4 = \frac{35}{8}\left(\mu^4-\frac{6}{7}\mu^2+\frac{3}{35}\right), \qquad P_5 = \frac{63}{8}\left(\mu^5-\frac{10}{9}\mu^3+\frac{5}{21}\mu\right).$$

Имеем:

$$n=0, \quad \alpha^2+\beta^2 = 1+k^2c^2, \quad \operatorname{tg}\gamma_0 = -kc,$$
$$[\psi_0] = \frac{kc^2}{r}\{1+k^2c^2\}^{-1/2}\frac{d}{d(kc)}\frac{\sin kc}{kc}\cdot\cos\{k(at-r+c)+\gamma_0\}; \quad (13)$$
$$n=1, \quad \alpha^2+\beta^2 = k^2c^2+\frac{4}{k^2c^2}, \qquad \operatorname{tg}\gamma_1 = -\frac{k^2c^2-2}{2kc},$$
$$[\psi_1] = \frac{3kc^2}{r}\left\{k^2c^2+\frac{4}{k^2c^2}\right\}^{-1/2}\frac{d^2}{d(kc)^2}\cdot\frac{\sin kc}{kc}\cdot\mu\cdot\sin\{k(at-r+c)+\gamma_1\}; \quad (14)$$
$$n=2, \quad \alpha^2+\beta^2 = k^2c^2-2+\frac{9}{k^2c^2}+\frac{81}{k^4c^4}, \quad \operatorname{tg}\gamma_2 = -\frac{kc(k^2c^2-9)}{4k^2c^2-9},$$
$$[\psi_2] = -\frac{45kc^2}{4r}\left\{k^2c^2-2+\frac{9}{k^2c^2}+\frac{81}{k^4c^4}\right\}^{-1/2} \times \\ \times\left\{\frac{d^3}{d(kc)^3}+\frac{1}{3}\frac{d}{d(kc)}\right\}\frac{\sin kc}{kc}\cdot\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right)\cos\{k(at-r+c)+\gamma_2\}. \quad (15)$$

Хотя полученное здесь решение задачи аналитически вполне обще, едва ли оно может принести практическую пользу, за исключением случая, когда kc — малая величина. В этом случае мы можем

с успехом разложить результаты по восходящим степеням kc:

$$[\psi_0] = -\frac{k^2c^3}{3r}\left(1 - \frac{3}{5}k^2c^2 + \frac{3}{7}k^4c^4 - \frac{19}{54}k^6c^6 + \dots\right) \times \\ \times \cos\{k(at - r + c) + \gamma_0\}, \tag{16}$$

$$[\psi_1] = -\frac{k^2c^3}{3r}\left(1 - \frac{3}{10}k^2c^2 - \frac{3}{28}k^4c^4 + \frac{1}{27}k^6c^6 + \dots\right) \times \\ \times \mu \cdot \sin\{k(at - r + c) + \gamma_1\}, \tag{17}$$

$$[\psi_2] = -\frac{k^4c^5}{9r}\left(1 - \frac{25}{126}k^2c^2 + \frac{13}{567}k^4c^4 + \dots\right) \times \\ \times \left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)\cos\{k(at - r + c) + \gamma_2\}. \tag{18}$$

Оказывается, что в то время как $[\psi_0]$ и $[\psi_1]$ имеют одинаковый порядок относительно малой величины kc, $[\psi_2]$ двумя порядками выше. Мы увидим сейчас, что более высокие гармонические составляющие $[\psi]$ зависят от еще более высоких степеней kc. Если так, то в первом приближении мы можем ограничиться элементами порядка 0 и 1.

Хотя $[\psi_0]$ содержит косинус, а $[\psi_1]$ синус, они тем не менее лишь незначительно отличаются по фазе. Сравнивая два значения $\partial\psi_n/\partial r$ в (21) § 330, мы видим, что тождественно

$$\alpha \sin\left(kc + \frac{1}{2}n\pi\right) - \beta\cos\left(kc + \frac{1}{2}n\pi\right) = \\ = -(-1)^n \frac{n(kc)^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n+1)} + \text{высшие степени } kc.$$

Разделив на $\alpha\cos\left(kc + \frac{1}{2}n\pi\right)$, получаем окончательно

$$\operatorname{tg}\left(kc + \frac{1}{2}n\pi\right) - \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{(-1)^n}{\alpha\cos\left(kc + \frac{1}{2}n\pi\right)} \cdot \frac{n(kc)^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n+1)}.$$

Если n — *четное*, то это уравнение, после подстановки вместо α главного члена из (16) § 323, принимает вид

$$\operatorname{tg} kc - \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{n}{(n+1)(2n+1)} \frac{(kc)^{2n+1}}{\{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)\}^2}. \tag{19}$$

Так, например, если $n = 2$, то

$$\operatorname{tg} kc - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_2 = -\frac{2(kc)^5}{3^3\cdot 5} + \dots$$

Если n велико вообще, то выражения для $\operatorname{tg} kc$ и β/α становятся почти тождественными для небольших значений kc.

Если n — *нечетное*, то примерно аналогичным методом получаем

$$\operatorname{ctg} kc + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{n(kc)^{2n-1}}{(n+1)(2n+1)\{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)\}^2} + \dots \tag{20}$$

[Из (19) мы видим, что когда n четно, то $\operatorname{tg}\gamma$ или $-\beta/\alpha$ приближенно равны $-\operatorname{tg} kc$, и из (20) мы видим, что когда n нечетно, то $\operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{tg} kc$. В первом случае в силу (16) § 323 α имеет знак i^{-n} или $(-1)^{1/2 n}$, а во втором случае α имеет знак i^{-n+1} или $(-1)^{1/2(n-1)}$. В обоих случаях приближенное решение можно выразить в виде

$$\gamma = -kc + \frac{1}{2} n\pi \text{ [1]}. \qquad (20')]$$

Поэтому потенциал скоростей возмущения, создаваемого небольшой жесткой и неподвижной сферой, приближенно равен

$$[\psi_0] + [\psi_1] = -\frac{k^2 c^3}{3r}\left(1 + \frac{3}{2}\mu\right)\cos k(at - r) = \\ = -\frac{\pi T}{r\lambda^2}\left(1 + \frac{3}{2}\mu\right)\cos k(at - r), \qquad (21)$$

если обозначить через T объем препятствия; а соответствующая прямая волна есть

$$[\varphi] = \cos k(at + x). \qquad (22)$$

Для данного препятствия и данного расстояния отношение амплитуд рассеянной и прямой волн вообще обратно пропорционально квадрату длины волны, а отношение интенсивностей обратно пропорционально четвертой степени длины волны (§ 296).

Для того чтобы сравнить интенсивности первичного и рассеянного звука, мы можем предположить, что первый исходит из простого источника, если он расположен на достаточном расстоянии (R) от T. Так, если

$$[\varphi] = \frac{\cos k(at - R)}{R}, \qquad (23)$$

то

$$[\psi] = -\frac{\pi T}{r R \lambda^2}\left(1 + \frac{3}{2}\mu\right)\cos k(at - r), \qquad (24)$$

так что на равных расстояниях от своих источников вторичная и первичная волны находятся в отношении

$$-\frac{\pi T}{R\lambda^2}\left(1 + \frac{3}{2}\mu\right). \qquad (25)$$

Следовательно, отношение их интенсивностей есть

$$\frac{\pi^2 T^2}{R^2\lambda^4}\left(1 + \frac{3}{2}\mu\right)^2, \qquad (26)$$

что для случая $\mu = +1$ дает приближенно

$$\frac{61{,}72\, T^2}{R^2\lambda^4}. \qquad (27)$$

---

[1] Как эта поправка, так и другие, вытекающие из нее, даны д-ром Бэртоном Burton.

Следует хорошо усвоить себе, что для возможности применения этого результата необходимо, чтобы λ была велика сравнительно с линейными размерами T, а R было велико сравнительно с λ.

Для определения главного члена в выражении для ψ_n, когда kc мало, мы имеем прежде всего

$$(2n+1)P_n\left(\frac{d}{d(ikc)}\right)\frac{d}{d(kc)}\cdot\frac{\sin kc}{kc}=$$
$$=\frac{ni^n(kc)^{n-1}}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}\left\{1-\frac{(n+2)k^2c^2}{2n\cdot(2n+3)}+\ldots\right\}. \quad (28)$$

Далее,

$$\alpha^2+\beta^2=F_n(ikc)\cdot F_n(-ikc)=$$
$$=\{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)(n+|1)(kc)^{-n}\}^2\left\{1+\frac{(n-1)k^2c^2}{(n+1)(2n-1)}+\ldots\right\}, \quad (29)$$

так что

$$\{\alpha^2+\beta^2\}^{-1/2}=\frac{(kc)^n}{1\cdot3\ldots(2n-1)(n+1)}\left\{1-\frac{(n-1)k^2c^2}{2\cdot(n+1)(2n-1)}+\ldots\right\}. \quad (30)$$

Следовательно, из (10)

$$\psi_n=\frac{c(kc)^{2n}ni^nP_n(\mu)}{r\{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)\}^2(n+1)}e^{i[k(at-r+c)+\gamma_n]}\times$$
$$\times\left\{1-k^2c^2\left[\frac{n-1}{(2n+2)(2n-1)}+\frac{n+2}{2n(2n+3)}\right]+\ldots\right\}. \quad (31)$$

Когда n — четное, то

$$[\psi_n]=\frac{c(kc)^{2n}ni^nP_n(\mu)}{r\{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)\}^2(n+1)}\cos\left\{k(at-r)+\frac{1}{2}n\pi\right\}\times$$
$$\times\left\{1-k^2c^2\left[\frac{n-1}{(2n+2)(2n-1)}+\frac{n+2}{2n(2n+3)}\right]+\ldots\right\}. \quad (32)$$

(так как приближенно $\gamma=-kc+\frac{1}{2}n\pi$). Когда же n — нечетное, то мы можем просто заменить i^n через i^{n+1} (и cos через sin), причем результат все еще будет действителен.

При помощи выражения (31) мы можем проверить первые два члена в выражениях для $[\psi_1]$ и $[\psi_2]$ в (17) и (18). К случаю $n=0$ (31) неприменимо.

Далее, в силу (31),

$$[\psi_3]=\frac{k^6c^7}{120\,r}\left\{1-\frac{77}{540}k^2c^2\right\}\left\{\mu^3-\frac{3}{5}\mu\right\}\sin\{k(at-r+c)+\gamma_3\}, \quad (33)$$

$$[\psi_4]=\frac{k^8c^9}{3150\,r}\left\{\mu^4-\frac{6}{7}\mu^2+\frac{3}{35}\right\}\cos\{k(at-r+c)+\gamma_4\}. \quad (34)$$

Складывая (17), (18), (33) и (34), мы получаем значение $[\psi]$ полное, вплоть до членов, имеющих порядок k^6c^6, сравнительно с двумя главными членами, определяемыми выражением (21). При

сложении частных выражений, необходимо точно учитывать как фазы компонентов, так и их амплитуды; но в случаях, когда требуется только один гармонический элемент, фаза часто имеет второстепенное значение. В таких случаях можно положить

$$\gamma = -kc + \frac{1}{2}n\pi.$$

Из (31) или (32) следует, что главный член в ψ_n возрастает на два порядка по kc при возрастании гармоники на один порядок и что сама ψ_n выражается рядом, содержащим только четные или только нечетные степени kc. Но помимо того что главный член имеет по kc порядок выше, он быстро уменьшается с возрастанием n за счет других множителей, которые он содержит. Это очевидно, поскольку для всех значений n и μ $P_n(\mu) < 1$; то же самое верно и для $n/(n+1)$; что же касается i^n, то он влияет только на фазу.

В частных случаях какой-нибудь из гармонических элементов $[\psi]$ может обратиться в нуль. В таком случае, поскольку $(\alpha^2+\beta^2)^{-1/2}$ не может обратиться в нуль, из (11) и (12) имеем

$$P_n\left(\frac{d}{d\,(ikc)}\right)\frac{d}{d\,(kc)}\,\frac{\sin kc}{kc} = 0,$$

т. е. такое же уравнение, как уравнение, определяющее периоды колебаний n-го порядка в замкнутой сфере радиуса c. Небольшое рассуждение покажет, что такого результата и следовало ожидать. Таблица, приведенная в § 331, применима также и здесь и показывает, между прочим, что когда kc мало, ни один из гармонических элементов $[\psi]$ не может обратиться в нуль.

Вследствие сгущений воздуха на сферу действует сила, параллельная оси μ, которая стремится привести сферу в колебание. Величина этой силы есть

$$2\pi c^2\sigma \int_{-1}^{+1} (\dot{\varphi} + \dot{\psi})\,\mu\,d\mu,$$

если через σ обозначить плотность жидкости; в этом выражении благодаря свойству сопряженности функций Лежандра только член первого порядка влияет на результат интегрирования. Если $r = c$, то

$$\varphi_1 = 3e^{ikat}\frac{d}{d\,(ikc)}\,\frac{\sin kc}{kc}\cdot\mu,$$

$$\psi_1 = 3kce^{ikat}\frac{f_1(ikc)}{F_1(ikc)}\,\frac{d}{d\,(ikc)}\cdot\frac{d}{d\,(kc)}\cdot\frac{\sin kc}{kc}\,\mu,$$

где

$$f_1(ikc) = 1 + \frac{1}{ikc}, \quad F_1(ikc) = ikc + 2 + \frac{2}{ikc}.$$

Для того чтобы сила могла обращаться в нуль, необходимо было бы, чтобы

$$\frac{d}{d\cdot kc}\cdot\frac{\sin kc}{kc} + kc\,\frac{f_1(ikc)}{F_1(ikc)}\,\frac{d}{d\cdot(kc)^2}\,\frac{\sin kc}{kc} = 0;$$

этому условию не может удовлетворить никакое действительное значение kc. Мы заключаем, что если сфера имеет свободу движения, то она всегда может быть приведена в колебание.

Если первичные волны не абсолютно плоски, а исходят из некоторого единичного источника, расположенного на большом, хотя и конечном, расстоянии R от центра сферы, то мы имеем

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi R} e^{ik(at-R)} \sum (2n+1) P_n(\mu) \cdot P_n\left(\frac{d}{d \cdot ikr}\right) \frac{\sin kr}{kr}, \quad (35)$$

$$\psi = -\frac{kc^2}{4\pi r R} e^{ik(at-R-r+c)} \sum (2n+1) \frac{P_n(\mu) f_n(ikr)}{F_n(ikc)} \times$$
$$\times P_n\left(\frac{d}{d(ikc)}\right) \frac{d}{d(kc)} \frac{\sin kc}{kc}. \quad (36)$$

На самой сфере $r = c$, так что значение полного потенциала в какой-нибудь точке поверхности есть

$$\varphi + \psi = -\frac{e^{ik(at-R)}}{4\pi R} \sum (2n+1) P_n(\mu) \times$$
$$\times \left[P_n\left(\frac{d}{d(ikc)}\right) \frac{\sin kc}{kc} + kc \frac{f_n(ikc)}{F_n(ikc)} P_n\left(\frac{d}{d(ikc)}\right) \frac{d}{d(kc)} \frac{\sin kc}{kc} \right].$$

Это выражение можно упростить. Мы имеем

$$P_n\left(\frac{d}{d(ikc)}\right) \frac{\sin kc}{kc} = \frac{1}{2ikc} \left\{ -(-1)^n e^{-ikc} f_n(ikc) + e^{+ikc} f_n(-ikc) \right\},$$

$$\frac{d}{d(kc)} \cdot P_n\left(\frac{d}{d(ikc)}\right) \frac{\sin kc}{kc} = \frac{1}{2ik^2c^2} \left\{ (-1)^n e^{-ikc} F_n(ikc) - e^{+ikc} F_n(-ikc) \right\},$$

и, таким образом, выражение в квадратных скобках можно написать в виде

$$\frac{e^{ikc}}{2ikc} \frac{F_n(ikc) f_n(-ikc) - F_n(-ikc) f_n(ikc)}{F_n(ikc)},$$

что, в силу (6) § 327, тождественно с $e^{ikc}\{F_n(ikc)\}^{-1}$. Таким образом,

$$\varphi + \psi = -\frac{e^{ik(at-R+c)}}{4\pi R} \sum (2n+1) \frac{P_n(\mu)}{F_n(ikc)}. \quad (37)$$

Это выражение — такое же, как если бы источник был расположен на сфере, а точка, в которой отыскивается потенциал, находилась бы на большом расстоянии (§ 328); оно представляет пример применения общего принципа взаимности. Принимая этот принцип и пользуясь результатом (3) § 328, мы видим, что если источник первичных волн находится на конечном расстоянии R, то значение полного потенциала в любой точке сферы есть

$$\varphi + \psi = -\frac{1}{4\pi R} e^{ik(at-R+c)} \sum (2n+1) P_n(\mu) \frac{f_n(ikR)}{F_n(ikc)}. \quad (38)$$

Если A и B — две точки, внешние по отношению к сфере, то единичный источник в точке A даст такой же полный потенциал в точке B,

какой дал бы в точке A единичный источник, расположенный в точке B. В обоих случаях полный потенциал состоит из двух частей, первая из которых такая же, как если бы не было никакого препятствия для свободного распространения волн, а вторая — представляет возмущение, создаваемое препятствием. Из этих двух частей — первая очевидно остается неизменной, какую бы из двух точек ни рассматривать в качестве источника, а следовательно, вторые части должны быть также равны, т. е. значение ψ в точке B, когда A является источником, равно значению ψ в точке A, когда B является таким же источником. Если источник A находится на большом расстоянии R, то значение ψ в точке B, угловое расстояние которой от A равно $\arccos \mu$, а линейное расстояние от центра равно r, есть (36)

$$\psi = -\frac{kc^2}{4\pi rR} e^{ik(at-R-r+c)} \sum (2n+1) \frac{P_n(\mu) f_n(ikr)}{F_n(ikc)} \times \\ \times P_n\left(\frac{d}{d(ikc)}\right) \frac{d}{d(kc)} \cdot \frac{\sin kc}{kc},$$

и соответственно таково же значение ψ на большом расстоянии R, когда источник расположен в точке B. Но поскольку ψ представляет возмущение, расходящееся наружу от сферы, его значение на любом конечном расстоянии R можно получить из значения на бесконечном расстоянии, вводя в каждый гармонический член множитель $f_n(ikR)$. Таким образом, мы получаем следующее симметричное выражение:

$$\psi = -\frac{kc^2}{4\pi rR} e^{ik(at-R-r+c)} \sum (2n+1) \frac{P_n(\mu)}{F_n(ikc)} \times \\ \times f_n(ikR) \cdot f_n(ikr) P_n\left(\frac{d}{d(ikc)}\right) \frac{d}{d(kc)} \frac{\sin kc}{kc}, \qquad (39)$$

определяющее эту часть потенциала в одной из точек, когда другая точка служит единичным источником.

Следует заметить, что общая часть аргумента не зависит от того, будет или нет препятствие сферическим или жестким.

Из разложения $e^{ikr\mu}$ по сферическим функциям мы можем вывести разложение потенциала волн, исходящих из простого единичного источника A, расположенного на конечном расстоянии (r) от начала координат. Потенциал в точке B на бесконечном расстоянии R от начала в направлении, составляющем угол $\arccos \mu$ с r, есть

$$\varphi = \frac{e^{ik(R-\mu r)}}{4\pi R},$$

причем временно́й множитель опущен.

Следовательно, из разложения $e^{ikr\mu}$ имеем

$$\varphi = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \sum (2n+1) P_n\left(\frac{d}{d(ikr)}\right) \frac{\sin kr}{kr} \cdot P_n(\mu),$$

откуда мы переходим к случаю конечного R простым введением множителя $f_n(ikR)$.

Таким образом, потенциал расположенного в точке A единичного источника на конечном расстоянии, в точке B, равен

$$\varphi = \frac{e^{ik(at-R)}}{4\pi R} \sum (2n+1)\, P_n\left(\frac{d}{d\,(ikr)}\right) \frac{\sin kr}{kr} f_n(ikR) \cdot P_n(\mu). \quad (40)$$

335. Рассмотрев в некоторых подробностях случай твердого сферического препятствия, мы набросаем теперь вкратце схему исследования для случаев, когда препятствие газообразное. Хотя для всех природных газов сжимаемость почти одинакова, предположим ради общности, что вещество, содержащееся внутри сферы, отлично по сжимаемости, а также по плотности от среды, в которой распространяются плоские волны.

Вне сферы φ в точности такое же, а ψ имеет тот же вид, что и прежде. Для движения внутри сферы, если длина волны внутри равна $k' = 2\pi/\lambda'$ [(2) § 330],

$$\psi_n = \frac{a'_n P_n}{r}\left\{e^{-ik'r} f_n(ik'r) - (-1)^n e^{+ik'r} f_n(-ik'r)\right\},$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial r} = \frac{2a'_n P_n}{r^2} \cdot i^{n+1} \left\{\alpha \sin\left(k'r + \frac{1}{2} n\pi\right) - \beta \cos\left(k'r + \frac{1}{2} n\pi\right)\right\},$$

что удовлетворяет условию непрерывности в центре.

Если σ и σ' — естественные плотности, а m и m' — сжимаемости, то

$$\frac{k'^2}{k^2} = \frac{\sigma'}{\sigma} \cdot \frac{m}{m'}, \quad (1)$$

и условия, которым должен удовлетворять каждый отдельный гармонический элемент, суть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r}\ (\text{снаружи}) = \frac{\partial \psi}{\partial r}\ (\text{внутри}), \quad (2)$$

$$\sigma\{\varphi + \psi\ (\text{снаружи})\} = \sigma' \psi\ (\text{внутри}); \quad (3)$$

эти условия выражают соответственно равенство нормальных движений и давлений по обе стороны от граничной поверхности. Из этих уравнений можно получить полное решение; здесь, однако, мы ограничимся нахождением значения главных членов в случае, когда kc и $k'c$ весьма малы.

В этом случае, при $r = c$,

$$\left.\begin{aligned} \psi_0\ (\text{внутри}) &= -2ik'a'_0, \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial r}\ (\text{внутри}) &= \frac{2}{3} ik'^3 c a'_0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0 &= 1, \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} &= -\frac{1}{3} k^2 c. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_0 \text{ (снаружи)} &= \frac{a_0}{c}, \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \text{ (снаружи)} &= -\frac{a_0}{c^2}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Подставив эти выражения в (2) и (3), исключив a_0' и сохранив только главный член, получим

$$a_0 = -\frac{k^2 c^3}{3} \cdot \frac{m' - m}{m'}. \tag{7}$$

Подобным же образом для члена первого порядка

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 \text{ (внутри)} &= -\frac{2}{3} a_1' k'^2 c\mu, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \text{ (внутри)} &= -\frac{2}{3} a_1' k'^2 \mu. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= ikc\mu, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} &= ik\mu. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 \text{ (снаружи)} &= \frac{a_1}{ikc^2} \cdot \mu, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \text{ (снаружи)} &= -\frac{2a_1}{ikc^3} \cdot \mu, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

что дает

$$a_1 = \frac{k^2 c^3 (\sigma - \sigma')}{\sigma + 2\sigma'}. \tag{11}$$

На некотором расстоянии от сферы возмущение, создаваемое сферой, выражается в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{r} e^{ik(at-r)} \{a_0 + a_1 \mu\} = \\ &= -\frac{k^2 c^3}{3r} e^{ik(at-r)} \left\{ \frac{m' - m}{m'} + 3 \frac{\sigma' - \sigma}{\sigma + 2\sigma'} \mu \right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Если ввести обозначение

$$T = \frac{4}{3} \pi c^3, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

и отбросить мнимую часть, то получится выражение

$$\psi = -\frac{\pi T}{\lambda^2 r} \left\{ \frac{m' - m}{m'} + 3 \frac{\sigma' - \sigma}{\sigma + 2\sigma'} \mu \right\} \cos k(at - r), \tag{13}$$

которое представляет важнейшую часть возмущения и соответствует (21) § 334 для неподвижной жесткой сферы. Оказывается, как и можно было ожидать, что член нулевого порядка получается

в результате изменения сжимаемости, а член первого порядка — в результате изменения плотности.

От (13) мы можем опять вернуться к случаю жесткой неподвижной сферы, полагая как σ', так и m' бесконечными. Положить бесконечным только σ' недостаточно, повидимому, потому, что если m' в то же самое время остается конечным, то $k'c$ не будет мало, как это предположено при нашем исследовании.

Когда $m' - m$ и $\sigma' - \sigma$ малы, то (13) становится эквивалентным выражению

$$\psi = -\frac{\pi T}{\lambda^2 r}\left\{\frac{m'-m}{m} + \frac{\sigma'-\sigma}{\sigma}\mu\right\}\cos k(at-r),$$

соответствующему $\varphi = \cos kat$ в центре сферы. Это находится в согласии с результатом (13) § 296, где препятствие могло быть любой формы.

В действительных газах $m' = m$, и член нулевого порядка исчезает. Если газ, занимающий сферическое пространство, несравненно легче другого газа, то $\sigma' = 0$ и

$$\psi = 3\frac{\pi T}{\lambda^2 r}\mu\cos k(at-r), \tag{14}$$

так что в члене первого порядка эффект будет вдвое больше, чем в случае твердого тела, и будет иметь обратный знак.

Бо́льшая часть настоящей главы заимствована из двух статей автора: „О колебаниях газа, заключенного внутри жесткой сферической оболочки“ и „Исследование о возмущении звуковых волн, создаваемым сферическим препятствием“ [1]) и из статьи проф. Стокса, уже цитированной выше.

335*a*. Любопытная функция, которую исследовал проф. Лэмб [2]), связана с максимальным возмущением, которое может быть создано бесконечно малым резонатором, поставленным на пути плоских волн.

Значение φ для распространяющихся первичных волн дается выражениями (1), (2), (4) § 334. В силу (5) § 334 и (3) § 329, значение ψ для вторичных волн можно представить в виде

$$\psi = ika_n(-1)^n P_n(\mu)\cdot P_n\left(\frac{d}{d(ikr)}\right)\left(\frac{e^{-ikr}}{ikr}\right),$$

где

$$P_n\left(\frac{d}{d(ikr)}\right)\left(\frac{e^{-ikr}}{ikr}\right) = \frac{1}{i}P_n\left(\frac{d}{d(ikr)}\right)\left(\frac{\cos kr}{kr} - i\frac{\sin kr}{kr}\right).$$

Если мы опустим общий множитель $P_n(\mu)$, то получим

$$\varphi + \psi = \{2n+1-(-1)^n ika_n\}\,P_n\left(\frac{d}{d(ikr)}\right)\frac{\sin kr}{kr} + \\ + (-1)^n ka_n P_n\left(\frac{d}{d(ikr)}\right)\frac{\cos kr}{kr}. \tag{1}$$

[1]) *Math. Society's Proceedings.*, 14 марта 1872; 14 ноября 1872.
[2]) Lamb, *London Math. Soc. Proc.*, том XXXII, стр. 11, 1900.

Единственное условие, накладываемое на приспособления, вводимые в r, состоит в том, что они не должны производить работы. Это требует, чтобы $\varphi + \psi$ были в той же фазе, что и $\partial\varphi/\partial r + \partial\psi/\partial r$, а именно, чтобы отношение (1) к его производной по r было *действительным*. Поскольку P_n является либо целиком четной, либо целиком нечетной функцией, отсюда вытекает, что

$$\frac{2n+1-(-1)^n ika_n}{(-1)^n ka_n}$$

должно быть действительным.

Если представить a_n, которое может быть и комплексным, в виде Ae^{ia}, то получим

$$kA = -(-1)^n(2n+1)\sin\alpha. \tag{2}$$

Следовательно, A имеет максимум, когда

$$\sin\alpha = -(-1)^n, \tag{3}$$

причем максимальное значение его есть

$$A = \frac{2n+1}{k}. \tag{4}$$

В силу (3) и (4),

$$a_n = -(-1)^n i\,\frac{2n+1}{k}, \tag{5}$$

так что в (1)

$$2n+1-(-1)^n ika_n = 0; \tag{6}$$

однако, сумма $\varphi + \psi$ сама не исчезает.

Если рассматривать падающие плоские волны, как исходящие из источника, расположенного на большом расстоянии R, то для того чтобы, как это предположено, обеспечить значение 1 у резонатора, мы должны иметь

$$\varphi = \frac{Re^{-ikR}}{R}; \tag{7}$$

с этим выражением мы можем сравнить

$$\psi = \frac{a_n e^{-ikr}}{r} P_n(\mu). \tag{8}$$

Работа, отдаваемая *первичным* источником, выражается в виде

$$R^2 \int_{-1}^{+1} d\mu,$$

а работа, отдаваемая, или скорее отражаемая, резонатором, будет

$$\mathrm{mod}^2 a_n \int_{-1}^{+1} P_n^2(\mu)\,d\mu.$$

Но

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2n+1} \quad \text{и} \quad \int_{-1}^{+1} d\mu = 2,$$

и, следовательно,

$$\operatorname{mod}^2 a_n = \frac{(2n+1)^2}{k^2}, \tag{9}$$

так что отношение работ имеет вид

$$\frac{2n+1}{k^2R^2}. \tag{10}$$

Это находится в согласии с результатом § 319 для симметрического резонатора ($n=0$).

Проф. Лэмб выражает свой результат через энергию, передаваемую первичными волнами сквозь единицу площади. Приняв последнюю за единицу, мы получим, что работа, отдаваемая резонатором, равна площади сферы радиуса R, т. е. $4\pi R^2$, помноженной на (10). В соответствии с этим, получаем

$$\frac{(2n+1)\lambda^2}{\pi}, \tag{11}$$

где на место k подставлено $2\pi/\lambda$. Эта формула, полученная проф. Лэмбом, выражает полную энергию, отдаваемую резонатором, через энергию первичных волн на единицу площади.

Стóит отметить, что мы нигде не предполагали, что r на поверхности резонатора мало. Поэтому результаты применимы к резонаторам конечных размеров, если только они симметричны, что предполагается в гармоническом анализе. Максимальная же отдаваемая энергия одинакова, каковы бы ни были размеры резонатора.

Случай $n=1$ в некоторых отношениях является простейшим, поскольку тогда резонатор может состоять из жесткой сферы, удерживаемой в фиксированной точке упругими связями. В качестве частного случая выражения (1) имеем

$$i(\varphi_1 + \psi_1) = \mu(3 + ika_1)\frac{d}{d(kr)}\frac{\sin kr}{kr} - ka_1\mu\frac{d}{d(kr)}\frac{\cos kr}{kr}. \tag{12}$$

Это выражение можно рассматривать как представляющее силу, действующую на сферу и обусловленную давлениями. Производная этого выражения по r будет подобным же образом представлять ускорение сферы и при подходящем выборе массы и упругости всем условиям можно удовлетворить, если только отношение этих величин действительно. Максимум a_1, как и в выражении (5), равен

$$a_1 = \frac{3i}{k}, \tag{13}$$

и так же, как в (11), энергия, отдаваемая резонатором, в принятом нами там масштабе, равна $3\lambda^2/\pi$.

Может показаться удивительным, что отдаваемая энергия в настоящем случае втрое больше энергии, отдаваемой симметричным резонатором; но от множителя 3 можно избавиться при ином изложении материала. До сих пор мы предполагали, что сфера может колебаться вдоль линии симметрии, определяемой направлением распространения первичных волн. Если сфера, рассматриваемая как бесконечно малая, может колебаться только вдоль одной линии, то ее эффективность, как резонатора, пропорциональна квадрату косинуса угла между этим направлением и направлением первичных волн. Такое колебание, ограниченное единственным направлением, в действительности и представляет собой нормальный случай, рассмотренный же прежде случай предполагает три степени свободы. Если теперь мы станем исследовать, какова *средняя* эффективность резонатора для первичных волн, встречающих его в одном направлении, то убедимся, что полученные выше, особенно благоприятные, эффективности должны быть снижены в отношении

$$\int_0^1 \mu^2 d\mu : \int_0^1 d\mu ,$$

т. е. в отношении 3:1. *Средняя* эффективность резонатора при $n=1$ тогда будет такой же, как и при $n=0$; тот же самый результат применим и к любому n. Увеличенную эффективность, выражаемую множителями $2n+1$, следует рассматривать как результат совместного действия $2n+1$ степеней свободы.

ГЛАВА XVIII

СФЕРИЧЕСКИЕ СЛОИ ВОЗДУХА. ДВИЖЕНИЕ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

336. В одной из предыдущих глав (§ 135) мы видели, что можно получить доказательство теоремы Фурье, рассматривая механически колеблющуюся струну. Аналогичное рассмотрение задачи о сферическом слое воздуха приведет нас к доказательству разложения Лапласа для функции произвольной в каждой точке сферической поверхности.

Как и в § 338, обозначая через ψ потенциал скоростей, получим уравнение непрерывности, отнесенное к обычным полярным координатам θ и ω в виде

$$c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \omega^2} \right\}.$$

Каков бы ни был характер свободного движения, его можно разложить на ряд простых гармонических колебаний, характер которых определяется соответствующими функциями ψ, рассматриваемыми как зависящие от положения в пространстве. Так, если $\psi \sim e^{ikat}$, то уравнение, определяющее ψ в функции от θ и ω, имеет вид

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \omega^2} + k^2 c^2 \psi = 0. \qquad (1)$$

Далее, какова бы ни была функция ψ, ее можно разложить, по теореме Фурье [1]), в ряд синусов и косинусов углов, кратных ω. Таким образом,

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \cos\omega + \psi_1' \sin\omega + \psi_2 \cos 2\omega + \psi_2' \sin 2\omega + \ldots$$
$$\ldots + \psi_s \cos s\omega + \psi_s' \sin s\omega + \ldots, \qquad (2)$$

где коэфициенты $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_1', \psi_2', \ldots$ являются функциями только θ и вследствие свойства сопряженности круговых функций каждый член ряда должен удовлетворять уравнению независимо от других.

---

[1]) Здесь мы вводим условие, что ψ повторяется после одного обхода вокруг сферы.

В соответствии с этим

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi_s}{\partial\theta}\right)-\frac{s^2\psi_s}{\sin^2\theta}+k^2c^2\psi_s=0 \qquad (3)$$

представляет уравнение, из которого можно определить характер функций ψ_s или ψ'_s. Это уравнение можно написать различными способами.

Выраженное через $\mu\,(=\cos\theta)$, оно имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\psi_s}{\partial\mu}\right\}+h^2\psi_s-\frac{s^2}{1-\mu^2}\psi_s=0, \qquad (4)$$

или, если $\nu=\sin\theta$, то

$$\nu^2(1-\nu^2)\frac{\partial^2\psi_s}{\partial\nu^2}+\nu(1-2\nu^2)\frac{\partial\psi_s}{\partial\nu}+\nu^2h^2\psi_s-s^2\psi_s=0, \qquad (5)$$

где вместо k^2c^2 подставлено h^2.

Когда начальная функция ψ симметрична относительно полюса, т. е. зависит только от широты, то s исчезает, и уравнения упрощаются. Этот случай нам удобнее будет рассмотреть первым. Уравнение, выраженное через μ, имеет вид

$$(1-\mu^2)\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\mu^2}-2\mu\frac{\partial\psi_0}{\partial\mu}+h^2\psi_0=0. \qquad (6)$$

Решение этого уравнения содержит две произвольные постоянные, помноженные на две определенные функции от μ, и может быть получено обычным путем, если взять возрастающий ряд и определить экспоненты и коэфициенты при помощи подстановки. Таким образом, получим

$$\psi_0=A\left\{1-\frac{h^2}{1\cdot2}\mu^2+\frac{h^2(h^2-2\cdot3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\mu^4-\right.$$
$$\left.-\frac{h^2(h^2-2\cdot3)(h^2-4\cdot5)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\mu^6+\ldots\right\}+$$
$$+B\left\{\mu-\frac{h^2-1\cdot2}{1\cdot2\cdot3}\mu^3+\frac{(h^2-1\cdot2)(h^2-3\cdot4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\mu^5-\ldots\right\}, \qquad (7)$$

где A и B — произвольные постоянные.

Предположим теперь еще, что ψ симметрична не только относительно полюса, но и относительно экватора (который, следовательно, является *узловой линией*) или, другими словами, что ψ является *четной* функцией синуса широты (μ). При этих условиях ясно, что B должно исчезнуть, и значение ψ будет выражено просто первым рядом, помноженным на произвольную постоянную A. Это значение потенциала скоростей получается как логическое следствие первоначального диференциального уравнения и наложенных двух ограничений, касающихся симметрии. Значение h^2 может показаться произвольным, но по тому, что нам известно из механики рассматриваемой проблемы, заранее очевидно, что h^2 в действительности ограничено последова-

тельностью частных значений. Остается еще условие, которое нужно ввести и которое определяет h, а именно, что первоначальное уравнение удовлетворяется в самом полюсе или, другими словами, что полюс не является источником; и это заставляет нас рассмотреть значение ряда при $\mu = 1$. Так как ряд представляет четную функцию от μ, то если полюс $\mu = +1$ не является источником, то никак не может им быть и полюс $\mu = -1$. Непосредственно очевидно, что если h^2 имеет вид $n(n+1)$, где n — четное целое число, то ряд обрывается, а потому остается конечным при $\mu = 1$; но теперь нам нужно доказать, что если ряд остается конечным при $\mu = 1$, то h^2 необходимо имеет вышеуказанный вид. По обычному правилу непосредственно ясно, что каково бы ни было значение h^2, отношение последовательных членов стремится к пределу μ^2, а потому ряд сходится для всех значений μ, меньших единицы. Но для экстремального значения $\mu = 1$ необходим более точный метод определения.

Известно [1]), что бесконечный гипергеометрический ряд

$$1 + \frac{ab}{cd} + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)\,d(d+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)\,b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)\,d(d+1)(d+2)} + \ldots \quad (8)$$

сходится, если $c+d-a-b$ больше единицы, и расходится, если $c+d-a-b$ равно или меньше единицы. В последнем случае значение $c+d-a-b$ дает критерий степени расходимости. Из двух расходящихся рядов вышеуказанного вида, для которых значения $c+d-a-b$ различны, тот *относительно* бесконечен, для которого значение $c+d-a-b$ меньше.

Наш ряд (7) можно привести к стандартному виду, полагая $h^2 = n(n+1)$, где не предполагается, что n целое число. Таким образом, ряд

$$1 - \frac{h^2}{1\cdot 2}\mu^2 + \frac{h^2(h^2-2\cdot 3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\mu^4 - \ldots =$$

$$= 1 - \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\mu^2 + \frac{n(n+1)(n-2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\mu^4 - \ldots =$$

$$= 1 + \frac{\left(-\frac{1}{2}n\right)\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)}{1\cdot\frac{1}{2}}\mu^2 +$$

$$+ \frac{\left(-\frac{1}{2}n\right)\left(-\frac{1}{2}n+1\right)\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}+1\right)}{1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}\mu^4 + \ldots \quad (9)$$

имеет стандартный вид, если

$$a = -\frac{1}{2}n, \quad b = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2}, \quad d = 1.$$

[1]) Boole, *Finite Differences*, стр. 79.

Следовательно, поскольку $c+d-a-b=1$, этот ряд расходится при $\mu=1$, *если он не обрывается*: а он обрывается только, когда n — четное целое число. Таким образом, мы пришли к заключению, что когда полюс не является источником, а ψ_0 — четная функция от μ, то h^2 должен иметь вид $n(n+1)$, где n — четное целое число.

Подобным же способом мы можем доказать, что если ψ_0 — нечетная функция от μ и полюсы не являются источниками, то $A=0$, и h^2 должно иметь вид $n(n+1)$, где n — *нечетное* целое число.

Если n — дробное, то оба ряда расходятся при $\mu=\pm 1$, и хотя можно найти такую комбинацию обоих рядов, которая останется конечной на одном или на другом полюсе, нет такой комбинации, которая оставалась бы конечной на *обоих* полюсах. Следовательно, если мы поставим условием, чтобы никакая точка на поверхности сферы не являлась источником, то у нас не будет иного выхода, как только положить n целым, и даже тогда мы не обеспечим конечности на полюсах, если не предположим еще, что $A=0$, когда n нечетно, и $B=0$, когда n четно. Отсюда мы заключаем, что для слоя, представляющего полную сферу, единственно допустимые значения ψ, которые являются функциями только широты и пропорциональны гармоническим функциям времени, заключены в выражении

$$\psi = CP_n(\mu),$$

где $P_n(\mu)$ — функция Лежандра, а n — любое нечетное или четное целое число. Возможность разложения произвольной функции широты в ряд по функциям Лежандра является необходимым следствием из того, что только что было доказано. Любое возможное движение слоя газа выражается рядом

$$\psi = A_0 + P_1(\mu)\left(A_1\cos\frac{\sqrt{1\cdot 2}\cdot at}{c} + B_1\sin\frac{\sqrt{1\cdot 2}\cdot at}{c}\right) + \ldots$$
$$\ldots + P_n(\mu)\left(A_n\cos\frac{\sqrt{n(n+1)}\cdot at}{c} + B_n\sin\frac{\sqrt{n(n+1)}\cdot at}{c}\right) + \ldots \quad (10)$$

При $t=0$

$$\psi = A_0 + A_1P_1(\mu) + \ldots + A_nP_n(\mu) + \ldots, \quad (11)$$

и значение ψ при $t=0$ представляет *произвольную* функцию широты.

Метод, который мы здесь применили, имеет еще то преимущество, что доказывает свойство сопряженности

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\,P_m(\mu)\,d\mu = 0, \quad (12)$$

когда n и m — различные целые числа. В самом деле, функции $P(\mu)$ являются *нормальными* функциями (§ 94) рассматриваемой колебательной системы, и следовательно, выражение для кинетической энер-

гии может содержать только *квадраты* обобщенных скоростей. Если соотношение (12) не удовлетворяется, то должны входить также и *произведения* скоростей.

Значение ψ, относящееся к *плоскому* слою колеблющегося газа, можно, конечно, вывести как частный случай общего решения, применимого к сферическому слою. Ограничиваясь случаем, когда в полюсе ($\mu = 1$) нет источника, мы должны будем исследовать предельный вид функции $\psi = CP_n(\mu)$, где $n(n+1) = k^2c^2$, когда c^2 и n^2 бесконечны. В то же время $\mu - 1$ и ν бесконечно малы и $c\nu$ переходит в радиус-вектор r на плоскости, так что $n\nu = kr$. Для этой цели наиболее удобным видом функции $P_n(\mu)$ будет вид, указанный Мерфи [1]):

$$P_n(\cos\theta) = 1 - \frac{n(n+1)}{1^2}\sin^2\frac{\theta}{2} + \\ + \frac{(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2)}{1^2\cdot 2^2}\sin^4\frac{\theta}{2} - \ldots \qquad (13)$$

Предел очевиден:

$$\psi = C\left\{1 - \frac{k^2r^2}{2^2} + \frac{k^4r^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{k^6r^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \ldots\right\} = CJ_0(kz) \qquad (14)$$

и показывает, что функция Бесселя нулевого порядка представляет собой экстремальный случай функции Лежандра.

Когда мы имеем неполную сферу, то задача требует иного подхода. Так, если газ ограничен стенками, расположенными вдоль двух кругов широты, то, вообще говоря, необходим полный интеграл, содержащий две произвольные постоянные. Отношение постоянных и допустимые значения h^2 следует определять при помощи двух граничных условий, выражающих то обстоятельство, что на обеих параллелях движение целиком направлено по долготе. Поскольку значение μ всюду численно меньше единицы, ряд всегда сходится.

Если часть поверхности, занимаемая газом, заключена между двумя кругами широты, расположенными на одинаковых расстояниях от экватора, то задача упрощается, так как одна или другая из постоянных A и B в выражении (7) исчезает для каждой нормальной функции.

337. Если рассматриваемая часть сферической поверхности содержит полюс, то, так же как в случае полной сферы, необходимо ввести условие, что полюс не является источником. Для этой цели более удобно взять решение, выраженное через ν, т. е. $\sin\theta$.

---

[1]) Thomson and Tait, *Nat. Phil.*, § 782 $\left(t = \sin^2\frac{1}{2}\theta,\ \text{а не}\ 4\sin^2\frac{1}{2}\theta\right)$. Todhunter, *Laplace's Functions*, § 19.

Если мы ограничимся здесь симметричным случаем, то, положив в (5) § 336 $s=0$, будем иметь

$$\nu(1-\nu^2)\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\nu^2}+(1-2\nu^2)\frac{\partial\psi_0}{\partial\nu}+h^2\nu\psi_0=0. \tag{1}$$

Одно решение этого уравнения сразу получается обычным путем, если взять возрастающий ряд и подставить в диференциальное уравнение для определения экспонентов и коэфициентов. Мы получаем [1])

$$\psi_0=A\left\{1+\frac{0\cdot1-h^2}{2^2}\nu^2+\frac{(0\cdot1-h^2)(2\cdot3-h^2)}{2^2\cdot4^2}\nu^4+\right.$$
$$\left.+\frac{(0\cdot1-h^2)(2\cdot3-h^2)(4\cdot5-h^2)}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}\nu^6+\ldots\right\}. \tag{2}$$

Это значение ψ_0 является наиболее общим решением уравнения (1) при условии конечности решения при $\nu=0$. Полное решение, содержащее две произвольные постоянные, предполагает источник произвольной интенсивности в полюсе, и в этом случае ψ_0 имеет при $\nu=0$ бесконечное значение. Поэтому всякое решение, которое остается конечным при $\nu=0$ и содержит одну произвольную постоянную, является наиболее общим возможным решением при наложенном ограничении, что полюс не является источником. Следовательно, для нашей цели нет необходимости дополнять решение. Характер второй функции (содержащей логарифм ν) будет показан на частном случае плоского слоя, который мы теперь и должны рассмотреть.

Подставив $n(n+1)$ вместо h^2, получим для ряда, заключенного в скобки,

$$1-\frac{n(n+1)}{2^2}\nu^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{2^2\cdot4^2}\nu^2-\ldots, \tag{3}$$

или после приведения к стандартному гипергеометрическому виду

$$1+\frac{\left(-\frac{1}{2}n\right)\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)}{1\cdot1}\nu^2+$$
$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}n\right)\left(-\frac{1}{2}n+1\right)\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}+1\right)}{1\cdot2\cdot1\cdot2}\nu^4+\ldots,$$

причем

$$a=-\frac{1}{2}n,\quad b=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\quad c=1,\quad d=1.$$

Так как $c+d-a-b=\frac{3}{2}$, то ряд сходится для всех значений ν от 0 до 1 включительно. Для значений ϑ ($=\arcsin\nu$) больших, чем $\frac{1}{2}\pi$, это решение неприменимо.

---

[1]) Heine, *Kugelfunctionen*, § 28.

Если n — целое число, то ряд становится тождественным с функцией Лежандра $P_n(\mu)$. Если целое число — четное, то ряд обрывается, в противном случае он бесконечен. Так, при $n=1$ ряд тождественен с разложением μ, т. е. $\sqrt{1-\nu^2}$, по степеням ν.

Выражение для ψ через ν удобно применить к исследованию свободных симметричных колебаний сферического слоя воздуха, ограниченного малым кругом, кривой радиус которого меньше квадранта. Условие, которому нужно удовлетворить, есть просто $\partial\psi/\partial\nu=0$, т. е. уравнение, связывающее возможные значения h^2, или k^2c^2, с заданным граничным значением ν.

Некоторые частные случаи этой задачи можно исследовать при помощи функций Лежандра. Предположим, например, что $n=6$, так что $h^2=k^2c^2=42$. Соответствующее решение есть $\psi=AP_6(\mu)$. Максимальное значение μ, для которого $d\psi/d\mu=0$, есть $\mu=0{,}8302$; оно соответствует $\theta=33^\circ53'=0{,}59137$ рад.

Если положим $c\theta=r$, так что r будет радиусом малого круга, измеренным вдоль сферической поверхности, то получим:

$$kr=\sqrt{42}\cdot 0{,}59137=3{,}8325.$$

Это уравнение связывает значение $k\,(=2\pi/\lambda)$ с кривым радиусом для случая малого круга, угловой радиус которого равен $33^\circ53'$. Если бы слой был плоским (§ 339), то значение kr было бы 3,8317, таким образом, разница в высоте основного тона в случае, когда радиус (r) данной длины прямолинеен или когда он изогнут по дуге в 33°, неощутима. Однако, результат сравнения был бы существенно отличен, если бы мы считали длину окружности одинаковой в обоих случаях, т. е. если бы заменили $c\theta=r$ через $c\nu=r$.

Для того чтобы получить симметричное решение для плоского слоя, необходимо только положить c бесконечным, причем так, чтобы $c\nu$ осталось конечным. Вследствие бесконечности h^2 решение принимает простой вид

$$\psi=A\left\{1-\frac{h^2\nu^2}{2^2}+\frac{h^4\nu^4}{2^2\cdot4^2}-\frac{h^6\nu^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\dots\right\}, \tag{4}$$

или, положив $c\nu=r$, где r — радиус-вектор в полярных координатах на плоскости,

$$\psi=A\left\{1-\frac{k^2r^2}{2^2}+\frac{k^4r^4}{2^2\cdot4^2}-\dots\right\}=AJ_0(kr), \tag{5}$$

как в (14) § 336.

Диференциальное уравнение для ψ, выраженного через ν, при c бесконечном и $c\nu=r$, имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+k^2\psi=0. \tag{6}$$

В следующем разделе мы проведем независимое исследование для плоской задачи и дадим решение.

338. Если s отлично от нуля, то диференциальное уравнение, которому удовлетворяют коэфициенты при $\sin s\omega$ и $\cos s\omega$, есть

$$\nu^2(1-\nu^2)\frac{\partial^2\psi_s}{\partial\nu^2}+\nu(1-2\nu^2)\frac{\partial\psi_s}{\partial\nu}+\nu^2h^2\psi_s-s^2\psi_s=0, \qquad (1)$$

и легко найти решение, удовлетворяющее условию конечности при $\nu=0$ [1]),

$$\psi_s=A\nu^s\left\{1+\frac{s(s+1)-h^2}{2(2s+2)}\nu^2+\right.$$
$$\left.+\frac{s(s+1)-h^2}{2(2s+2)}\cdot\frac{(s+2)(s+3)-h^2}{4(2s+4)}\nu^4+\ldots\right\},$$

или, полагая $h^2=n(n+1)$,

$$\psi_s=A\nu^s\left\{1+\frac{(s-n)(s+n+1)}{2\cdot(2s+2)}\nu^2+\right.$$
$$\left.+\frac{(s-n)(s-n+2)(s+n+1)(s+n+3)}{2\cdot4\cdot(2s+2)(2s+4)}\nu^4+\ldots\right\}. \qquad (2)$$

Это — полное решение задачи о колебаниях сферического слоя газа, ограниченного малой окружностью с радиусом, меньшим, чем квадрант. Для каждого значения s имеется совокупность возможных значений n, определяемых условием $\partial\psi_s/\partial\nu=0$. При каждом из этих значений n функция, стоящая в правой части выражения (2), помноженная на $\cos s\omega$ или $\sin s\omega$, представляет нормальную функцию системы. Совокупность всех нормальных функций, соответствующих всем допустимым значениям s и n, с произвольным коэфициентом для каждого значения дает выражение, которое может быть отождествлено с начальным значением ψ, т. е. с функцией, произвольно заданной по всей площади небольшого круга.

Когда радиус c бесконечно велик, то и h^2 бесконечно велико. При $c\nu=r$, $h^2\nu^2=k^2r^2$ и (2) принимает вид

$$\psi_s=A'r^s\left\{1-\frac{k^2r^2}{2\cdot(2s+2)}+\frac{k^4r^4}{2\cdot4\cdot(2s+2)(2s+4)}-\ldots\right\}, \qquad (3)$$

т. е. функции от r, пропорциональной $J_s(kr)$.

Выраженное через μ диференциальное уравнение, которому удовлетворяют коэфициенты при $\cos s\omega$ или $\sin s\omega$, есть

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\psi_s}{\partial\mu}\right\}+h^2\psi_s-\frac{s^2}{1-\mu^2}\psi_s=0. \qquad (4)$$

Полагая $\psi_s=(1-\mu^2)^{1/2s}\varphi_s$, находим уравнение для φ_s:

$$(1-\mu^2)\frac{\partial^2\varphi_s}{\partial\mu^2}-2(s+1)\mu\frac{\partial\varphi_s}{\partial\mu}+\{h^2-s(s+1)\}\varphi_s=0, \qquad (5)$$

с которым гораздо легче оперировать.

[1]) Решение можно было бы пополнить добавлением второй функции, полученной из (2), путем изменения знака при s, который входит в (1) только в квадрате; однако, если s — положительное целое число, необходимо изменение. Метод вычисления мы поясним на примере плоского слоя.

Для решения его положим

$$\varphi_s = \mu^\alpha + a_2\mu^{\alpha+2} + a_4\mu^{\alpha+4} + \ldots + a_{2m}\mu^{\alpha+2m} + \ldots$$

и подставим это в уравнение (5). Коэфициент при наименьшей степени μ есть $\alpha(\alpha-1)$, так что $\alpha=0$ или $\alpha=1$. Соотношение между a_{2m+2} и a_{2m} найдем, приравнивая нулю коэфициент при $\mu^{\alpha+2m}$:

$$a_{2m+2} = a_{2m}\frac{(\alpha+2m+s-n)(\alpha+2m+s+n+1)}{(\alpha+2m+1)(\alpha+2m+2)},$$

где $n(n+1)=h^2$.

Следовательно, полное значение φ_s есть

$$\varphi_s = A\left\{1 + \frac{(s-n)(s+n+1)}{1\cdot 2}\mu^2 + \right.$$
$$+\frac{(s-n)(s-n+2)(s+n+1)(s+n+3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\mu^4 +$$
$$\left.+\frac{(s-n)(s-n+2)(s-n+4)(s+n+1)(s+n+3)(s+n+5)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\mu^6+\ldots\right\}+$$
$$+B\left\{\mu+\frac{(s-n+1)(s+n+2)}{2\cdot3}\mu^3+\right.$$
$$\left.+\frac{(s-n+1)(s-n+3)(s+n+2)(s+n+4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\mu^5+\ldots\right\}, \qquad (6)$$

где A и B произвольные постоянные и

$$\psi_s = (1-\mu^2)^{1/2 s}\varphi_s. \qquad (7)$$

Теперь нам следует доказать, что условие, чтобы полюс не был источником, требует того, чтобы $n-s$ было целым положительным числом; в этом случае один или другой из входящих в выражение для φ_s рядов обрывается. Для этой цели недостаточно будет показать, что ряды (если только они не обрываются) бесконечны при $\mu=\pm1$; необходимо будет показать, что ряды остаются расходящимися после умножения на $(1-\mu^2)^{1/2 s}$ или, как это мы представим в более удобном виде, что они бесконечны при $\mu=\pm1$ *по сравнению с* $(1-\mu^2)^{-1/2 s}$. Достаточно будет подробно рассмотреть первый ряд.

Имеем

$$1+\frac{(s-n)(s+n+1)}{1\cdot2}+\frac{(s+n)(s-n+2)(s+n+1)(r+n+3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\ldots=$$
$$=1+\frac{\left(\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}n\right)\left(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)}{1\cdot\frac{1}{2}}+$$
$$+\frac{\left(\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}n\right)\left(\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}n+1\right)\left(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}+1\right)}{1\cdot2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}+\ldots,$$

что представляет стандартный вид (8) § 336:

$$1+\frac{ab}{cd}+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)d(d+1)}+\ldots,$$

при

$$a=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}n,\quad b=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\quad c=1,\quad d=\frac{1}{2}.$$

Степень расходимости определяется значением $a+b-c-d$, которое здесь равно $s-1$.

С другой стороны, теорема о разложении бинома дает для разложения $(1-\mu^2)^{-1/2 s}$

$$1+\frac{\frac{1}{2}s}{1}\mu^2+\frac{\frac{1}{2}s\left(\frac{1}{2}s+1\right)}{1\cdot 2}\mu^4+\ldots;$$

это выражение имеет стандартный вид, если $a=\frac{1}{2}s$, $c=1$ и $b=d$, что дает $a+b-c-d=\frac{1}{2}s-1$.

Так как $s-1>\frac{1}{2}s-1$, то оказывается, что ряды, входящие в выражение функции φ_s, представляют собой бесконечности высшего порядка по сравнению с $(1-\mu^2)^{-1/2 s}$, а потому остаются бесконечными после умножения их на $(1-\mu^2)^{1/2 s}$. Следовательно, ψ_s не может быть конечным на обоих полюсах, если ни один из рядов не обрывается, что возможно только тогда, когда $n-s$ есть нуль или положительное число. Если это целое число — четное, то нам следует еще положить $B=0$; если же оно нечетное, то нужно положить $A=0$ для того, чтобы обеспечить конечное значение ψ_s на полюсах.

В обоих случаях выражению φ_s для полной сферы можно придать вид

$$\varphi_s=\frac{\partial^{n+s}}{\partial\mu^{n+s}}(1-\mu^2)^n=\frac{\partial^s P_n(\mu)}{\partial\mu^s},\qquad(8)$$

где опущен постоянный множитель. Полное выражение для той части ψ, которая содержит в качестве множителя $\cos s\omega$ или $\sin s\omega$, имеет поэтому вид

$$\psi=\begin{matrix}\cos s\omega\\ \sin s\omega\end{matrix}\sum_{n=s}^{n=\infty}A_n\nu^s\frac{\partial^s}{\partial\mu^s}P_n(\mu),\qquad(9)$$

где A_n постоянно по отношению к μ и ω, но как функция времени изменяется пропорционально

$$\cos\left[\frac{\sqrt{n(n+1)}\,at}{c}+\varepsilon\right].\qquad(10)$$

Для большинства задач, однако, более удобно группировать вместе члены с одинаковыми n, чем члены с одинаковыми s. Так, для лю-

бого значения n

$$\psi = \sum_{s=0}^{s=n} \nu^s \frac{\partial^s P_n(\mu)}{\partial \mu^s} (A_s \cos s\omega + B_s \sin s\omega), \tag{11}$$

где каждый коэфициент A_s и B_s можно рассматривать как содержащий временной множитель вида (10).

В начале ψ является произвольной функцией μ и ω, а потому любая такая функция может быть представлена в виде

$$\psi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{s=0}^{s=n} \nu^s \frac{\partial^s P_n(\mu)}{\partial \mu^s} (A_s^n \cos s\omega + B_s^n \sin s\omega), \tag{12}$$

представляющем разложение Лапласа по сферическим функциям двух переменных.

Из диференциального уравнения (5), или из его общего решения (6), легко вывести, что φ_s имеет тот же вид, что и $\partial \varphi_{s-1}/\partial \mu$, так что мы можем написать

$$\varphi_s = \left(\frac{\partial}{\partial \mu}\right)^s \varphi_0 \tag{13}$$

(где не предполагается никакой связи между произвольными постоянными) или, выражая через ψ при помощи (7),

$$\psi_s = (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s} \left(\frac{\partial}{\partial \mu}\right)^s \psi_0. \tag{14}$$

Уравнение (13) представляет обобщение свойства функций Лапласа, использованного в выражении (8).

Соответствующие соотношения для плоской задачи можно вывести как прежде, приписывая бесконечное значение n, которое имеет произвольное значение в (13) и (14), и полагая $n\nu = kr$. Так как $\mu^2 + \nu^2 = 1$, то

$$\psi_s = \nu^s \left(-\frac{\mu}{\nu}\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^s \psi_0,$$

где ψ_0 рассматривается как функция от ν. В пределе μ (хотя и подлежащую диференцированию) можно считать равной единице и, таким образом, положить

$$\psi_s = (-2kr)^s \left(\frac{\partial}{\partial (kr)^2}\right)^s \psi_0. \tag{15}$$

Если полюс не есть источник, то ψ_s пропорциональна $J_s(kr)$. Постоянный коэфициент, оставшийся в выражении (15) неопределенным, можно легко найти путем сравнения главных членов. Таким образом, мы найдем, что

$$J_s(kr) = (-2kr)^s \left(\frac{\partial}{\partial (kr)^2}\right)^s J_0(kr), \tag{16}$$

т. е. хорошо известное свойство функции Бесселя [1].

[1] Todhunter, *Laplace's Functions*, § 390.

Несомненно, гораздо легче иметь дело с колебаниями плоского слоя газа, чем с колебаниями слоя конечной кривизны, но я предпочел привести косвенный и прямой методы исследования ради самой сферической задачи и соответствующего разложения по функциям Лапласа [1]), а также потому, что связь между функциями Бесселя и Лапласа, повидимому, не всегда понимается достаточно четко. Теперь же мы можем продолжать независимое исследование плоской задачи.

339. Если в общем уравнении простых колебаний воздуха

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

мы положим, что ψ не зависит от z, и введем полярные координаты на плоскости, то получим (§ 241)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + k^2\psi = 0, \tag{1}$$

или, разлагая ψ в ряд Фурье,

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \ldots + \psi_n + \ldots, \tag{2}$$

где ψ_n имеет вид $A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta$,

$$\frac{\partial^2\psi_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_n}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)\psi_n = 0\ ^2). \tag{3}$$

Это уравнение имеет такой же вид, как и уравнение, с которым мы имели дело при исследовании круглых мембран (§ 200); главное математическое различие между этими двумя задачами заключается в том, что в то время как в случае мембран условие, которому нужно удовлетворить на границе, есть $\psi = 0$, в данном случае нас скорее интересует граничное условие $\partial\psi/\partial r = 0$, соответствующее ограничению газа жесткой цилиндрической оболочкой [3]).

Так как в полюсе нет источника, то решение уравнения (3) есть

$$\psi_n = AJ_n(kr), \tag{4}$$

и уравнение, определяющее возможные периоды колебаний внутри цилиндра радиуса r, имеет вид

$$J_n'(kr) = 0. \tag{5}$$

Низшие значения kr, удовлетворяющие (5), даны в приведенной на стр. 292 таблице [4]), которая вычислена по таблицам Гансена для

[1]) Я в значительной мере пользовался книгой Heine, ***Handbuch der Kugelfunctionen***, Berlin, 1861 и статьями У. Томсона, по теории приливов Лапласа; W. Thomson, *Phil. Mag.*, том L, 1875.

[2]) Здесь я прибегаю к обычным обозначениям, но читатель поймет, что n соответствует s предыдущих параграфов; n в функциях Лапласа теперь бесконечно.

[3]) [Симметрические колебания внутри цилиндрической оболочки, соответствующие случаю $n = 0$, были рассмотрены Дюамелем (Duhamel, *Liouville Journ. Math.*, том 14, стр. 69, 1849).]

[4]) „Notes on Bessel's Functions", *Phil. Mag.*, ноябрь, 1872.

функций J при помощи соотношений, позволяющих выразить J_n через J_0 и J_1.

Число внутренних узловых окружностей	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0	3,832	1,841	3,054	4,201
1	7,015	5,332	6,705	8,015
2	10,174	8,536	9,965	11,344
3	13,324	11,706		
4	16,471	14,864		
5	19,616	18,016		

[Для корней уравнения $J_n'(z)=0$ профессор Мак-Магон [1]) находит

$$z_n^{(s)}=\beta'-\frac{m+3}{8\beta'}-\frac{4(7m^2+82m-9)}{3(8\beta')^3}-\frac{32(83m^3+2075m^2-3039m+3527)}{15(8\beta')^5}, \qquad (6a)$$

где $m=4n^2$ и $\beta'=\frac{1}{4}\pi(2n+4s+1)$. Можно убедиться, что при $n=0$ (6a) дает такой же результат, как (4) § 206 при $n=1$, в соответствии с тождеством $J_0'(z)=-J_1(z)$.]

Частное решение можно написать в виде

$$\psi_n=(A\cos n\theta+B\sin n\theta)J_n(kr)\cos kat+(C\cos n\theta+D\sin n\theta)J_n(kr)\sin kat, \qquad (6)$$

где A, B, C и D произвольны для всякого допустимого значения n и k. Так же, как и в соответствующих задачах для сферы и круглой мембраны, сумма всех частных решений должна быть достаточно общей, чтобы представлять произвольные значения ψ и $\dot{\psi}$ при $t=0$.

В качестве примера сложных колебаний мы можем предположить, так же как в § 332, что начальное условие для газа определяется соотношением

$$\dot{\psi}=0,\quad \psi=x=r\cos\theta.$$

При этих обстоятельствах выражение (6) приводится к виду

$$\psi=A_1\cos\theta J_1(k_1r)\cos k_1at+A_2\cos\theta J_1(k_2r)\cos k_2at+\ldots, \qquad (7)$$

и если мы предположим, что радиус цилиндра равен единице, то допустимые значения k будут корнями уравнения

$$J_1'(k)=0. \qquad (8)$$

[1]) McMahon, *Annals of Mathematics*, том IX, № 1.

Условием для определения коэфициентов A будет то, что для всех значений r, от $r=0$ до $r=1$,

$$r = A_1 J_1(k_1 r) + A_2 J_1(k_2 r) + \ldots, \tag{9}$$

откуда, так же, как в § 332,

$$A = \frac{2}{(k^2-1)J_1(k)}. \tag{10}$$

Поэтому полное решение будет иметь вид

$$\psi = \sum \frac{2\cos\theta J_1(kr)}{(k^2-1)J_1(k)} \cos kat, \tag{11}$$

где суммирование распространяется на все значения k, определяемые уравнением (8).

Если мы положим $t=0$ и $r=1$, то из (9) и (10) получим

$$\sum \frac{2}{k^2-1} = 1 \tag{12}$$

— уравнение, которое может быть проверено численно или аналитическим методом, подобным тому, который мы применили в случае уравнения (14) § 332. Мы можем доказать, что

$$\ln J_2'(z) = \text{const} + \sum \ln\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right),$$

откуда после диференцирования

$$\frac{J_1''(z)}{J_1'(z)} = -\sum \frac{2z}{k^2 - z^2}.$$

Отсюда мы можем получить (12), полагая $z=1$ и приняв во внимание основное диференциальное уравнение, удовлетворяющееся функцией J_1, что показывает, что

$$\frac{J_1''(1)}{J_1'(1)} = -1.$$

[Более обще, при $J_n'(k)=0$,

$$\sum \frac{2n}{k^2-n^2} = 1.\ ]$$

До сих пор мы предполагали, что цилиндр — полный, так что ψ повторяется после каждого оборота, что требует, чтобы n было целым числом; если же вместо полного цилиндра мы возьмем сектор, заключенный между $\theta=0$ и $\theta=\beta$, то вообще будут иметь место дробные значения n. Так как $\partial\psi/\partial\theta$ исчезает на обоих границах θ, то ψ должна иметь вид

$$\psi = A\cos(kat + \varepsilon)\cos n\theta J_n(kr), \tag{13}$$

где $n = \nu\pi/\beta$ и ν — целое число. Если β в целое число раз меньше π (или равно π), то полное решение содержит только целые значения n, как и можно было предвидеть заранее; но вообще необходимо ввести функции дробного порядка.

Интересный пример представляет случай $\beta = 2\pi$, соответствующий цилиндру, пересеченному жесткой стенкой, распространяющейся от центра до периферии (ср. § 207). Действие стенки заключается в том, что она создает возможность существования разности давлений по обе стороны от нее; если же такой разности нет, то стенку можно убрать, и получающиеся колебания не отличаются от колебаний, рассмотренных в теории полного цилиндра. Такое положение вещей получается при ν четном. Если же ν — нечетное, то n имеет вид $\left(\text{целое число} + \frac{1}{2}\right)$, и давление по обе стороны стенки различно. В последнем случае можно выразить J_n в конечном виде. Основной тон получается, если положить $\nu = 1$, или $n = \frac{1}{2}$, когда

$$\psi = A\cos(kat + \varepsilon)\cdot\cos\frac{1}{2}\theta\cdot\frac{\sin kr}{\sqrt{kr}}, \qquad (14)$$

и допустимые значения k являются корнями уравнения $\operatorname{tg} k = 2k$. Первый корень (после нуля) есть $k = 1{,}1655$, что соответствует тону, значительно более низкому, чем любой тон, который возможен для полного цилиндра.

Предыдущий анализ имеет интересное приложение к математически аналогичной задаче о колебаниях воды в цилиндрическом сосуде одинаковой повсюду глубины. Читатель может обратиться к статье о волнах, помещенной автором в *Philosophical Magazine* в апреле 1876 г. и к статьям профессора Гэтри (Guthrie), на которые там делается ссылка. Наблюдение периодов очень просто, и таким путем можно получить экспериментальное решение задач, теоретическое исследование которых выходит далеко за пределы мощности известных методов.

340. Возвращаясь к полному цилиндру, предположим, что он ограничен жесткими поперечными стенками на высотах $z = 0$ и $z = l$, и отбросим ограничение, состоящее в том, что движение должно быть одинаковым во всех поперечных сечениях. Общее диференциальное уравнение (§ 241) есть

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0. \qquad (1)$$

Разложим ψ по теореме Фурье в ряд

$$\psi = H_0 + H_1\cos\frac{\pi z}{l} + H_2\cos\frac{2\pi z}{l} + \ldots + H_p\cos\left(p\frac{\pi z}{l}\right) + \ldots, \qquad (2)$$

где коэфициенты H_p могут быть функциями r и θ. Такой вид обеспечивает выполнение граничных условий при $z = 0$, $z = l$ и каждый

член должен независимо удовлетворять дифференциальному уравнению. Таким образом,

$$\frac{\partial^2 H_p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H_p}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_p}{\partial \theta^2}+\left(k^2-p^2\frac{\pi^2}{l^2}\right)H_p=0 \qquad (3)$$

— уравнение, которое имеет такой же вид, как и в случае, когда движение независимо от z, причем k^2 заменено через $k^2-p^2\pi^2l^{-2}$. Поэтому частное решение можно написать в виде

$$\psi=(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\cdot\cos p\frac{\pi z}{l}\cdot J_n\left(\sqrt{k^2-p^2\pi^2l^{-2}}\cdot r\right)\cos kat+$$
$$+(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)\cos p\frac{\pi z}{l}\cdot J_n\left(\sqrt{k^2-p^2\pi^2l^{-2}}\cdot r\right)\sin kat, \qquad (4)$$

что следует обобщить в виде тройной суммы по всем целым значениям p и n, а также по всем значениям k, определяемым уравнением

$$J_n'\left(\sqrt{k^2-p^2\pi^2l^{-2}}\cdot r\right)=0. \qquad (5)$$

Если $r=1$ и если обозначить через K значения k, приведенные в таблице в § 339 и соответствующие чисто поперечным колебаниям, то будем иметь

$$k^2=K^2+\frac{p^2\pi^2}{l^2}. \qquad (6)$$

Чисто аксиальные (продольные) колебания соответствуют нулевому значению K, не включенному в таблицу.

341. Полный интеграл уравнения

$$\frac{\partial^2\psi_n}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_n}{\partial r}+\left(k^2-\frac{n^2}{r^2}\right)\psi_n=0, \qquad (1)$$

если нет никаких ограничений относительно отсутствия источника в полюсе, содержит вторую функцию от r, которую можно обозначить через $J_{-n}(kr)$. Таким образом, опуская несущественные постоянные множители, мы можем положить (§ 200)

$$\psi_n=Ar^{+n}\left\{1-\frac{k^2r^2}{2\cdot 2+2n}+\frac{k^4r^4}{2\cdot 4\cdot 2+2n\cdot 4+2n}-\dots\right\}+$$
$$+Br^{-n}\left\{1-\frac{k^2r^2}{2\cdot 2-2n}+\frac{k^4r^4}{2\cdot 4\cdot 2-2n\cdot 4-2n}-\dots\right\}; \qquad (2)$$

но второй ряд требует изменения, если n — целое число. При $n=0$ оба ряда становятся тождественными, а потому непосредственный результат подстановки $n=0$ в (2) лишен необходимой общности. Необходимое решение можно, однако, получить по обычным правилам, применимым к таким случаям. Обозначая коэфициенты при A и B в уравнении (2) через $f(n)$ и $f(-n)$, имеем по теореме Маклорена

$$\psi=Af(n)+Bf(-n)=$$
$$=(A+B)f(0)+(A-B)f'(0)\,n+(A+B)f''(0)\frac{n^2}{1\cdot 2}+\dots$$

Следовательно, приняв новые произвольные постоянные, мы можем предельную форму выражения (2) написать в виде

$$\psi_0 = Af(0) + Bf'(0).$$

В этом уравнении $f(0)$ есть $J_0(kr)$. Для определения $f'(0)$ имеем

$$f'(n) = r^n \ln r \left\{1 - \frac{k^2r^2}{2\cdot 2+2n} + \frac{k^4r^4}{2\cdot 4\cdot 2+2n\cdot 4+2n} - \dots\right\} +$$
$$+ r^n \frac{\partial}{\partial n}\left\{1 - \frac{k^2r^2}{2\cdot 2+2n} + \frac{k^4r^4}{2\cdot 4\cdot 2+2n\cdot 4+2n} - \dots\right\}.$$

Если обозначить через u общий член (содержащий r^{2m}) ряда, заключенного в скобки, без учета его знака, то

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \ln u}{\partial n} = -\frac{2}{2+2n} - \frac{2}{4+2n} - \dots - \frac{2}{2m+2n},$$

так что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{n=0} = -u_{n=0}S_m,$$

где

$$S_m = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}. \tag{3}$$

Таким образом,

$$f'(0) = \ln r \left\{1 - \frac{k^2r^2}{2^2} + \frac{k^4r^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{k^6r^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \dots\right\} +$$
$$+ \left\{\frac{k^2r^2}{2^2} - \frac{k^4r^4}{2^2\cdot 4^2}S_2 + \frac{k^6r^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}S_3 - \dots\right\},$$

и полный интеграл при $n = 0$ имеет вид

$$\psi_0 = (A + B\ln r)\left\{1 - \frac{k^2r^2}{2^2} + \frac{k^4r^4}{2^2\cdot 4^2} - \dots\right\} +$$
$$+ B\left\{\frac{k^2r^2}{2^2} - \frac{k^4r^4}{2^2\cdot 4^2}S_2 + \frac{k^6r^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}S_3 - \dots\right\}. \tag{4}$$

Для любых целых значений n соответствующее выражение можно получить при помощи (15) § 338

$$\psi_n = (-2kr)^n \left(\frac{d}{d(kr)^2}\right)^n \psi_0. \tag{5}$$

Формулу (5) можно получить и непосредственно из дифференциального уравнения (1). Заменив kr через z и положив

$$\psi_n = z^n \varphi_n, \tag{6}$$

найдем вместо (1)

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} + \frac{2n+1}{z}\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} + \varphi_n = 0. \tag{7}$$

Далее, уравнение (7) можно представить в виде

$$z^2 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial (z^2)^2} + (n+1)\frac{\partial \varphi_n}{\partial z^2} + \frac{1}{4}\varphi_n = 0, \tag{8}$$

откуда непосредственно следует, что

$$\varphi_n = \frac{\partial}{\partial z^2}\varphi_{n-1}, \tag{9}$$

так что

$$\varphi_n = \left(\frac{\partial}{\partial z^2}\right)^n \varphi_0, \tag{10}$$

или, в силу (6),

$$\psi_n = z^n \left(\frac{\partial}{\partial z^2}\right)^n \psi_0, \tag{11}$$

что эквивалентно выражению (5), поскольку постоянные в выражении для ψ_0 произвольны в обоих уравнениях.

Последовательные выражения для ψ_n, получаемые таким образом, сходятся для всех значений аргумента, но практически они бесполезны, если аргумент велик. В таких случаях мы должны были бы обратиться к полусходящемуся ряду, соответствующему (10) § 200.

Уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 (z^{1/2}\psi_n)}{\partial z^2} - \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{z^2}(z^{1/2}\psi_n) + z^{1/2}\psi_n = 0, \tag{12}$$

откуда, в силу выражений (4) и (12) § 323, находим общее решение уравнения (1) в виде:

$$\begin{aligned}\psi_n = {} & C(ikr)^{-1/2} e^{-ikr}\left\{1 - \frac{1^2-4n^2}{1\cdot 8ikr} + \frac{(1^2-4n^2)(3^2-4n^2)}{1\cdot 2\cdot (8ikr)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{(1^2-4n^2)(3^2-4n^2)(5^2-4n^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot (8ikr)^3} + \cdots\right\} + \\ & + D(ikr)^{-1/2} e^{+ikr}\left\{1 + \frac{1^2-4n^2}{1\cdot 8ikr} + \frac{(1^2-4n^2)(3^2-4n^2)}{1\cdot 2\cdot (8ikr)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{(1^2-4n^2)(3^2-4n^2)(5^2-4n^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot (8ikr)^3} + \cdots\right\}.\end{aligned} \tag{13}$$

При n целом эти ряды бесконечны и в конечном счете расходятся, но (см. §§ 200, 302) это обстоятельство не мешает им быть практически полезными.

Наиболее важным применением полного интеграла уравнения (1) является представление при его помощи возмущения, распространяющегося из полюса; эта задача была рассмотрена Стоксом в его статье о сообщении колебания газу. Условие того, что возмущение, представленное выражением (13), будет исключительно расходящимся, есть просто $D = 0$, как это непосредственно видно по введению фактора времени e^{ikat}, если предположить r очень большим; главным затруднением в этом вопросе является отыскание соотношения между коэфициентами возрастающего ряда, соответствующего этому условию; для этой цели Стокс применяет решение уравнения (1) в форме определенного интеграла. Мы достигнем той же цели, пожалуй, проще, применяя результаты § 302.

В силу (22) и (24) § 302,

$$-\left(\frac{\pi}{2iz}\right)^{1/2} e^{-iz}\left\{1-\frac{1^2}{1\cdot 8iz}+\frac{1^2\cdot 3^2}{1\cdot 2\cdot (8iz)^2}+\ldots\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\pi\left\{K(z)+iJ_0(z)\right\}-\int_0^\infty \frac{e^{-\beta}d\beta}{\sqrt{\beta^2+z^2}}, \qquad (14)$$

и таким образом задача сводится к определению вида правой части уравнения (14) при малом z. В силу (5) § 302 и (5) § 200, имеем

$$\frac{1}{2}\pi\{K(z)+iJ_0(z)\}=z+\frac{1}{2}i\pi+\text{члены высшей степени } z, \qquad (15)$$

так что остается только найти вид определенного интеграла в выражении (14) при малом z. Положив $\sqrt{\beta^2+z^2}=y-\beta$, имеем

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta}d\beta}{\sqrt{\beta^2+z^2}}=\int_z^\infty e^{-\frac{y^2-z^2}{2y}}\frac{dy}{y}=\int_z^\infty e^{\frac{1}{2}\frac{z^2}{y}}e^{-\frac{1}{2}y}\frac{dy}{y}.$$

При z малом $z^2/2y$ также мало во всей области интегрирования, и, таким образом, мы можем написать

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta}d\beta}{\sqrt{\beta^2+z^2}}=\int_z^\infty\left\{1+\frac{z^2}{2y}+\frac{1}{2}\frac{z^4}{4y^2}+\ldots\right\}\frac{e^{-\frac{1}{2}y}}{y}dy.$$

Первый интеграл правой части есть

$$\int_z^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}y}}{y}dy=\int_{\frac{1}{2}z}^\infty \frac{e^{-v}dv}{v}=-\gamma-\ln\left(\frac{1}{2}z\right)+\frac{1}{2}z+\ldots^{1}), \qquad (16)$$

где γ — постоянная Эйлера (0,5772...); и, как мы можем легко убедиться, интегрируя по частям, другие интегралы ничего не прибавляют к главным членам. Таким образом, если z весьма мало, то

$$-\left(\frac{\pi}{2iz}\right)^{1/2}e^{-iz}\left\{1-\frac{1^2}{1\cdot 8iz}+\frac{1^2\cdot 3^2}{1\cdot 2\cdot (8iz)^2}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot (8iz)^3}+\ldots\right\}=$$

$$=\gamma+\ln\left(\frac{1}{2}z\right)+\frac{1}{2}i\pi+\ldots \qquad (17)$$

Заменяя z через kz и сравнивая с видом выражения (4) при r малом, мы видим, что для того, чтобы сделать ряды тождественными, мы должны положить

$$A=\gamma+\ln\frac{1}{2}+\ln k+\frac{1}{2}i\pi, \quad B=1,$$

так что последовательность волн, расходящихся из полюса, которая

[1]) De Morgan, *Differential and Integral Calculus*, стр. 653.

выражается убывающим рядом

$$\psi_0 = -\left(\frac{\pi}{2ikr}\right)^{1/2} e^{-ikr}\left\{1 - \frac{1^2}{1\cdot 8ikr} + \frac{1^2\cdot 3^2}{1\cdot 2\cdot (8ikr)^2} - \ldots\right\}, \quad (18)$$

можно представить также в виде возрастающего ряда

$$\psi_0 = \left(\gamma + \ln\frac{ikr}{2}\right)\left\{1 - \frac{k^2r^2}{2^2} + \frac{k^4r^4}{2^2\cdot 4^2} - \ldots\right\} + \\ + \frac{k^2r^2}{2^2} S_1 - \frac{k^4r^4}{2^2\cdot 4^2} S_2 + \frac{k^6r^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} S_3 - \ldots \quad (19)$$

При применении формулы (11) к убывающему ряду части, содержащие e^{-ikr} и e^{+ikr} в качестве множителей, очевидно, будут оставаться заметными, и полный интеграл для общего значения n при условии, что часть, содержащая e^{+ikr}, не должна появляться, получится путем диференцирования из полного интеграла для $n = 0$, подчиненного тому же самому условию. Таким образом, поскольку в силу (5) $\psi_1 = \partial\psi_0/\partial r$, мы имеем

$$\psi_1 = \left(\frac{\pi i}{2kr}\right)^{1/2} e^{-ikr}\left\{1 - \frac{-1\cdot 3}{1\cdot 8ikr} + \frac{-1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot (8ikr)^2} - \right. \\ \left. - \frac{-1\cdot 1\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot (8ikr)^3} + \ldots\right\}, \quad (20)$$

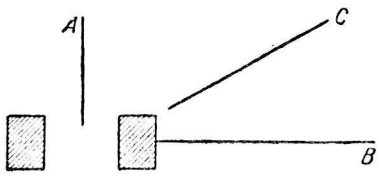
или, выражая в виде возрастающего ряда,

$$\psi_1 = \frac{1}{kr}\left\{1 - \frac{k^2r^2}{2^2} + \frac{k^4r^4}{2^2\cdot 4^2} - \ldots\right\} - \\ - \left(\gamma + \ln\frac{ikr}{2}\right)\left\{\frac{kr}{2} - \frac{k^3r^3}{2^2\cdot 4} + \frac{k^5r^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} - \ldots\right\} + \\ + \frac{kr}{2} S_1 - \frac{k^3r^3}{2^2\cdot 4} S_2 + \frac{k^5r^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} S_3 - \ldots \quad (21)$$

Эти выражения применены проф. Стоксом для того, чтобы показать, насколько слабо передаются окружающему газу колебания струны (соответствующие члену первого порядка). Для этой цели он сравнивает действительно получающийся звук и звук, который распространялся бы в том же самом направлении, если бы боковое движение газа вблизи струны было задержано. Для струны рояля, соответствующей среднему C, радиус проволоки может иметь размер около 0,02 дюйма, а λ равна приблизительно 25 дюймам; оказывается, что звук приблизительно в 40 000 раз слабее, чем он был бы, если бы движение частиц воздуха происходило в плоскостях, проходящих через ось струны. „Это показывает жизненную важность деки в струнных инструментах. Хотя амплитуда колебаний частиц деки крайне мала сравнительно с амплитудой колебания частиц струны, но поскольку дека представляет собой широкую поверхность, соприкасающуюся с воздухом, она способна возбуждать громкие и звучные колебания, в то время как струна, натянутая абсолютно жестко, возбуж-

дала бы непосредственно в окружающем воздухе колебания настолько малые, что они были бы почти или даже совсем не слышны.

„Усиление звука, создаваемое путем задержки бокового движения, легко показать при помощи очень простого эксперимента. Возьмем камертон и, держа его в руках, после того как его привели в колебание, поместим листок бумаги или лезвие широкого ножа так, чтобы его край был параллелен оси камертона и настолько близко к камертону, насколько это возможно без прикосновения к нему. Если плоскость препятствия совпадает с одной из плоскостей симметрии камертона, как это представлено на чертеже линиями, помеченными буквами A или B, то мы не получим никакого эффекта; если же мы поместим препятствие в среднем положении, например в положении C, то звук станет значительно сильнее [1])".



Фиг. 64.

342. Действительное выражение для потенциала скорости симметричных волн, распространяющихся в двух измерениях, получается из выражения (18) § 341, после введения фактора времени e^{ikat} путем отбрасывания мнимой части; оно имеет вид

$$\psi_0 = -\left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{1/2}\cos k\left(at - r - \frac{1}{8}\lambda\right)\left\{1 - \frac{1^2\cdot 3^2}{1\cdot 2\cdot (8kr)^2} + \ldots\right\} + \\ + \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{1/2}\sin k\left(at - r - \frac{1}{8}\lambda\right)\left\{\frac{1^2}{1\cdot 8kr} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot (8kr)^3} + \ldots\right\}, \quad (1)$$

где, как обычно, содержатся две произвольные постоянные — одна в виде множителя всего выражения, а другая — в качестве добавления ко времени.

Задачу о линейном источнике равномерной интенсивности также можно исследовать общим методом, применимым к трем измерениям. Так, в силу выражения (3) § 277 мы можем положить

$$\varphi = 2\int_0^\infty \frac{e^{-ik\rho}\,dx}{\rho} = 2\int_r^\infty \frac{e^{-ik\rho}\,d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}, \quad (2)$$

где ρ — расстояние от некоторого элемента dx до точки O, в которой надлежит определить потенциал, и r — наименьшее значение ρ, так что $\rho^2 = r^2 + x^2$; это выражение должно иметь такой же вид, как (1). Положив $y = \rho - r$, мы можем вместо (2) написать

$$\varphi = 2\int_0^\infty \frac{e^{-ikr}\,e^{-iky}\,dy}{\sqrt{y}\,\sqrt{2r + y}}, \quad (3)$$

[1]) Stokes, *Phil. Trans.*, том 158, стр. 447, 1868.

откуда вытекают различные выражения, как и в (14) § 341. Если kr велико, то можно получить приближенное значение интеграла, пренебрегая вариацией $\sqrt{2r+y}$, так как, учитывая быстрые изменения знака, вызываемые множителем e^{-iky}, мы должны брать только малые значения y. Но

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}} = \int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \tag{4}$$

так что

$$\varphi = \sqrt{\frac{\pi}{kr}}\, e^{-ikr}(1-i) = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}}\, e^{-ik\left(r+\frac{1}{8}\lambda\right)}. \tag{5}$$

Вводя множитель e^{ikat} и отбрасывая мнимую часть выражения, в конечном итоге получаем выражение

$$\varphi = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \cos k\left(at - r - \frac{1}{8}\lambda\right) \tag{6}$$

для потенциала скорости на большом расстоянии. Аналогичное рассуждение применимо и для того, чтобы показать, что выражение (1) представляет также выражение потенциала скорости по одну сторону от бесконечной плоскости (§ 278), получающегося при равномерном нормальном движении бесконечно малой полосы, ограниченной параллельными линиями.

Подобным же образом мы можем рассматривать и член первого порядка выражения (20) § 341, как выражение потенциала скорости, создаваемого двойными источниками, равномерно распределенными вдоль бесконечной прямой линии.

С точки зрения настоящего раздела становится понятным значение запаздывания на $\frac{1}{8}\lambda$, которое обнаруживается в выражении (1) и в результатах следующего параграфа (выражения (16) и (17)). При обычном интегрировании для поверхностного распределения по зонам Френеля (§ 283) полный эффект равен половине эффекта первой зоны, а фаза эффекта первой зоны находится посредине между фазами крайних частей, т. е. на $\frac{1}{4}\lambda$ позади фазы центральной точки. В настоящем случае запаздывание результирующей относительно центрального элемента меньше, вследствие преобладания центральных частей.

Из формул настоящего параграфа для потенциала скорости линейного источника мы можем путем интегрирования получить соответствующее выражение для источника, равномерно распределенного по *плоскости*. Волны, исходящие из этого источника, необходимо являются плоскими волнами, потенциал скоростей для которых можно выписать непосредственно, и сравнение результатов

приводит к оценке некоторых определенных интегралов, связанных с бесселевыми и родственными им функциями [1]).]

343. В виде иллюстрации к формулам § 341 мы можем взять задачу о возмущении плоских звуковых волн цилиндрическим препятствием, радиус которого мал сравнительно с длиной волн и ось которого параллельна плоскости волн (см. § 335).

Пусть плоские волны представлены функцией

$$\varphi = e^{ik(at+x)} = e^{ikat} \cdot e^{ikr\cos\theta}. \tag{1}$$

Легко провести обычное разложение функции φ в ряд Фурье, причем коэфициентами при различных членах, как легко предвидеть, будут просто функции Бесселя соответствующих порядков.

Таким образом, так же как в (12) § 272*a*,

$$e^{ikr\cos\theta} = J_0(kr) + 2iJ_1(kr)\cos\theta + \ldots + 2i^nJ_n(kr)\cos\theta.$$

Но, поскольку мы ограничиваемся здесь случаем, когда радиус цилиндра c мал, мы сразу разложим по степеням r.

Так, при $r = c$, если опустить e^{ikat}, мы будем иметь

$$\varphi = 1 - \frac{1}{4}k^2c^2 + ikc\cdot\cos\theta + \ldots, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{1}{2}k^2c + ik\cdot\cos\theta + \ldots. \tag{3}$$

Величина и даже самый закон возмущения зависят от характера препятствия. Начнем с предположения, что материалом цилиндра служит газ с плотностью σ' и сжимаемостью m'; решение задачи для жесткого препятствия можно в конечном итоге получить путем соответствующих предположений относительно σ' и m'. Если k' — внутреннее значение k, то внутри цилиндра из условия, что ось не является источником (§ 339), будем иметь

$$\psi = A_0\left\{1 - \frac{k'^2r^2}{2^2} + \frac{k'^4r^4}{2^2\cdot4^2} - \ldots\right\} +$$
$$+ A_1r\left\{1 - \frac{k'^2r^2}{2\cdot4} + \frac{k'^4r^4}{2\cdot4^2\cdot6} - \ldots\right\}\cos\theta;$$

так что при $r = c$

$$\psi\,(\text{внутри}) = A_0\left(1 - \frac{1}{4}k'^2c^2\right) + A_1c\left(1 - \frac{1}{8}k'^2c^2\right)\cdot\cos\theta, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}\,(\text{внутри}) = -\frac{1}{2}A_0k'^2c + A_1\left(1 - \frac{3}{8}k'^2c^2\right)\cos\theta. \tag{5}$$

---

[1]) „On Point-, Line-, and Plane-Sources of Sound", *Proc. Lond. Math. Soc.*, том XIX, стр. 504, 1888.

Вне цилиндра при $r = c$, в силу (19) и (21) § 341, имеем

$$\psi = B_0\left(\gamma + \ln\frac{ikc}{2}\right) + \frac{B_1\cos\theta}{kc}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{B_0}{c} - \frac{B_1\cos\theta}{kc^2}. \tag{7}$$

Следовательно, условия, которым нужно удовлетворить на поверхности раздела, суть

$$-A_0k'^2c^2 = -k^2c^2 + 2B_0, \tag{8}$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma}A_0\left(1 - \frac{1}{4}k'^2c^2\right) = 1 - \frac{1}{4}k^2c^2 + B_0\left(\gamma + \ln\frac{ikc}{2}\right), \tag{9}$$

$$A_1\left(1 - \frac{3k'^2c^2}{8}\right) = ik - \frac{B_1}{kc^2}, \tag{10}$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma}A_1c\left(1 - \frac{k'^2c^2}{8}\right) = ikc + \frac{B_1}{kc}, \tag{11}$$

откуда, исключая A_0, A_1, приближенно получаем

$$B_0 = \frac{1}{2}k^2c^2\left(1 - \frac{k'^2}{k^2}\cdot\frac{\sigma}{\sigma'}\right) = \frac{1}{2}k^2c^2\frac{m' - m}{m'}, \tag{12}$$

$$B_1 = ik^2c^2\frac{\sigma' - \sigma}{\sigma' + \sigma}. \tag{13}$$

Таким образом, на некотором расстоянии от цилиндра, в силу (18) и (20) § 341, имеем

$$\begin{aligned}\psi &= -B_0\left(\frac{\pi}{2ikr}\right)^{1/2}e^{-ikr} + B_1\left(\frac{\pi i}{2kr}\right)^{1/2}e^{-ikr}\cdot\cos\theta = \\ &= -k^2c^2e^{-ikr}\left(\frac{\pi}{2ikr}\right)^{1/2}\left\{\frac{m' - m}{2m'} + \frac{\sigma' - \sigma}{\sigma' + \sigma}\cos\theta\right\} = \\ &= -\frac{2\pi\cdot\pi c^2}{r^{1/2}\lambda^{3/2}}e^{-i(kr + 1/4\pi)}\left\{\frac{m' - m}{2m'} + \frac{\sigma' - \sigma}{\sigma' + \sigma}\cos\theta\right\}.\end{aligned} \tag{14}$$

Следовательно, первичной волне соответствует

$$\varphi = \cos\frac{2\pi}{\lambda}(at + x), \tag{15}$$

а отраженная расходящаяся волна приближенно выражается в виде

$$\psi = -\frac{2\pi\cdot\pi c^2}{r^{1/2}\lambda^{3/2}}\left\{\frac{m' - m}{2m'} + \frac{\sigma' - \sigma}{\sigma' + \sigma}\cos\theta\right\}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(at - r - \frac{1}{8}\lambda\right). \tag{16}$$

То, что ψ изменяется обратно пропорционально $\lambda^{3/2}$, можно было предвидеть, применив метод размерностей, как в соответствующей задаче для сферы (§ 296). Как и в том случае, симметрическая часть расходящейся волны зависит от изменения сжимаемости и исчезает при применении к действительному газу; член же первого порядка зависит от изменения плотности.

Предполагая, что σ' и m' обращаются в бесконечность таким образом, что отношение их остается конечным, получаем решение, соответствующее жесткому и неподвижному препятствию

$$\psi = -\frac{2\pi \cdot \pi c^2}{r^{1/2}\lambda^{3/2}}\left(\frac{1}{2} + \cos\theta\right)\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(at - r - \frac{1}{8}\lambda\right). \qquad (17)$$

Исключительная малость препятствия, оказываемого тонкими проволоками или нитями прохождению звука, ярко иллюстрируются некоторыми экспериментами Тиндаля. Кусок катаного войлока толщиной в полдюйма пропускает больше звука, чем *смоченный* носовой платок, который вследствие того, что его поры закрыты, ведет себя скорее как тонкая пластинка. По тем же соображениям туманы, и даже дождь и снег, оказывают лишь небольшое влияние на свободное распространение звуков средней длины волны. Для свистка, или очень острого звука, эффект, пожалуй, был бы заметным.

[Можно воспользоваться частичными отражениями от полотнищ муслина для иллюстрации одного важного принципа. Если чистый тон высокой (неслышимой) частоты отражается от одного полотнища, и затем встречает чувствительное пламя, то его интенсивность, вероятно, будет недостаточна для создания видимого эффекта. Однако, если расположить небольшое число подобных полотнищ параллельно одно другому и на таких (равных) расстояниях друг от друга, чтобы частичные отражения совпадали по фазе, то отражения окажут сильное воздействие на пламя. Параллельность и одинаковость расстояний между полотнищами можно поддерживать механически при помощи соответствующих приспособлений (равномерных зажимов), которые, однако, допускают изменение общего расстояния. Тогда легко проследить зависимость действия волн от подгонки расстояния между полотнищами к длине волны звука. Так, если бы волна падала перпендикулярно, то пламя получило бы наиболее сильное воздействие при интервале между двумя соседними полотнищами, равном *половине* волны; и хотя условия эксперимента требуют наклона под острым углом, это обстоятельство тоже легко может быть учтено [1].]

[1] „Iridescent Crystals", *Proc. Roy. Inst.*, апрель 1889. См. также *Phil. Mag.*, том XXIV, стр. 145, 1887; том. XXVI, стр. 256, 1888.

ГЛАВА XIX

ТРЕНИЕ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

344. Выведенные в главе XI уравнения и следствия из них были основаны на допущении (§ 236), что взаимодействие между двумя частями жидкости, разделенными воображаемой поверхностью, нормально к этой поверхности. Действительные жидкости, однако, не удовлетворяют этому идеальному условию; во многих явлениях существенную, и даже преобладающую, роль играет недостаточная текучесть, обычно называемая вязкостью или трением в жидкости. Поэтому целесообразно будет исследовать, заметно ли влияет вязкость на колебания воздуха, и если влияние вязкости заметно, то каким образом оно происходит.

Для того чтобы ясно понять природу вязкости, представим себе, что жидкость разделена на параллельные слои так, что, хотя каждый слой движется в своей плоскости с постоянной скоростью, однако, при переходе от одного слоя к другому наблюдается изменение скорости. Простейшее предположение, которое мы можем сделать, это — то, что скорости всех этих слоев имеют одинаковое направление, но равномерно возрастают по величине по мере передвижения вдоль перпендикуляра к граничным плоскостям слоев. При таких условиях между соприкасающимися слоями возникает тангенциальная сила в направлении относительного движения, пропорциональная по величине быстроте изменения скорости и коэфициенту вязкости, обычно обозначаемому через μ. Так, если слои параллельны плоскости xy, а направление их движения параллельно y, то тангенциальная сила, отнесенная (подобно давлению) к единице площади, равна

$$\mu = \frac{dv}{dz}. \qquad (1)$$

Размерность μ есть $ML^{-1}T^{-1}$.

Изучение происхождения этой тангенциальной силы относится к молекулярной физике. Максвелл объяснял ее, в соответствии с кинетической теорией газов, как результат обмена молекулами между слоями, вызывающего рассеяние количества движения. Как теоретически, так и экспериментально, было установлено замечательное положение, что эта сила в широких пределах не зависит от плотности

газа. Для воздуха при $\theta°$ стоградусной шкалы Максвелл нашел[1])

$$\mu = 0{,}0001878\,(1 + 0{,}00366\theta), \tag{2}$$

где за единицы приняты сантиметр, грамм и секунда.

345. Исследование уравнений движения жидкости с учетом сил вязкости едва ли можно считать относящимся к предмету настоящего труда, но для некоторых читателей может оказаться полезным подчеркнуть здесь его тесную связь с более широко известной теорией упругости твердого тела.

Потенциальная энергия единицы объема равномерно растянутого изотропного вещества может быть выражена в виде[2])

$$V = \frac{1}{2} m\delta^2 + \frac{1}{2} n\,(e^2 + f^2 + g^2 - 2fg - 2fe - 2ge + \\ + a^2 + b^2 + c^2) = \\ = \frac{1}{2} \varkappa\delta^2 + \frac{1}{2} n \left(2e^2 + 2f^2 + 2g^2 - \frac{2}{3}\delta^2 + a^2 + b^2 + c^2\right), \tag{1}$$

где $\delta\,(= e + f + g)$ — растяжение, e, f, g, a, b, c — шесть компонент деформации, связанных с действительными смещениями α, β, γ уравнениями

$$e = \frac{\partial\alpha}{\partial x}, \quad f = \frac{\partial\beta}{\partial y}, \quad g = \frac{\partial\gamma}{\partial z}, \tag{2}$$

$$a = \frac{\partial\beta}{\partial z} + \frac{\partial\gamma}{\partial y}, \quad b = \frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}, \quad c = \frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial x}, \tag{3}$$

а m, n, $\varkappa$ — упругие постоянные, связанные уравнением

$$\varkappa = m - \frac{1}{3} n, \tag{4}$$

где n — мера *жесткости*, или сопротивления *сдвигу*, а $\varkappa$ — мера сопротивления изменению *объема*. Компоненты напряжения P, Q, R, S, T, U, соответствующие e, f, g, a, b, c, определяются из V простым диференцированием по этим величинам. Так,

$$P = \varkappa\delta + 2n\left(e - \frac{1}{3}\delta\right) \text{ и т. д.}, \tag{5}$$

$$S = na \text{ и т. д.} \tag{6}$$

Если X, Y, Z — компоненты приложенной силы, отнесенной к единице объема, то уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} + X = 0 \text{ и т. д.}, \tag{7}$$

откуда можно непосредственно получить уравнения движения, пользуясь принципом Даламбера. Выраженные через смещения α, β, γ,

[1]) Maxwell „On the Viscosity or Internal Friction of Air and other Gases". *Phil. Trans.*, том 156, стр. 249, 1866.

[2]) Thomson and Tait, *Natural Philosophy*, Appendix C.

эти уравнения принимают вид

$$\varkappa\frac{\partial\delta}{\partial x}+\frac{1}{3}n\frac{\partial\delta}{\partial x}+n\nabla^2\alpha+X=0 \text{ и т. д.,} \tag{8}$$

где

$$\delta=\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}. \tag{9}$$

Обычная теория жидкого трения не содержит никаких восстанавливающих сил; но, с другой стороны, нам следует рассмотреть силы вязкости, отношение которых к скоростям элементов жидкости (u, v, w) имеет точно такой же характер, как отношение восстанавливающих сил к смещениям (α, β, γ) изотропного твердого тела. Так, если δ' — скорость растяжения, так что

$$\delta'=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}, \tag{10}$$

то сила, направленная параллельно x и создаваемая вязкостью, есть как и в (8)

$$\varkappa\frac{\partial\delta'}{\partial x}+\frac{1}{3}n\frac{\partial\delta'}{\partial x}+n\nabla^2u. \tag{11}$$

До сих пор $\varkappa$ и n были произвольными постоянными, но, как с большой убедительностью аргументировал проф. Стокс, нет никаких причин для того, чтобы равномерное во всех направлениях растяжение приводило к силе вязкости или создавало давление, отличающееся от статического давления, соответствующего действительной плотности. На основании этого аргумента нам нужно положить $\varkappa=0$; и, как вытекает из (6), n совпадает с величиной, обозначенной прежде через μ. Поэтому члены, зависящие от трения, суть

$$\mu\left\{\nabla^2u+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)\right. \text{ и т. д.,}$$

и (§ 237) уравнения движения принимают вид

$$\rho\left(\frac{Du}{Dt}-X\right)+\frac{dp}{dx}-\mu\nabla^2u-\frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)=0 \tag{12}$$

или, если приложенные силы отсутствуют и если пренебречь квадратом скорости,

$$\rho_0\frac{du}{dt}+\frac{dp}{dx}-\mu\nabla^2u-\frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)=0. \tag{13}$$

Мы можем заметить, что рассмотренные здесь диссипативные силы соответствуют диссипативной функции, имеющей такой же вид относительно u, v, w, какой имеет функция V относительно α, β, γ в теории изотропных твердых тел. Таким образом, полагая $\varkappa=0$, из (1)

имеем

$$F=\frac{1}{2}\mu\iiint\Big[2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+2\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2+ \\ +2\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)^2-\frac{2}{3}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2+ \\ +\Big(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\Big)^2+\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2\Big]dx\,dy\,dz \qquad (14)$$

в согласии с вычислением проф. Стокса [1]). Теория трения для случая сжимаемых жидкостей была впервые дана Пуассоном [2]).

346. Применим теперь диференциальные уравнения к исследованию плоских звуковых волн. Предполагая, что v и w равны нулю и что u, p и т. д. являются функциями только от x, получаем из (13) § 345

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{4\mu}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \qquad (1)$$

Уравнение непрерывности (3) § 238 в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad (2)$$

а соотношение между переменной частью давления δp и сгущением s, как обычно (§ 244), есть

$$\delta p=a^2\rho_0 s. \qquad (3)$$

Таким образом, исключая из (1), (2) и (3) δp и s, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{4\mu}{3\rho_0}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}=0, \qquad (4)$$

это и есть уравнение, данное Стоксом [3]).

Исследуем теперь, каким образом затухает с возрастанием x цуг гармонических волн с длиной волны λ, возникающих в начале ($x=0$). Предполагая, что u изменяется пропорционально e^{int}, найдем, как и в § 148,

$$u=Ae^{-\alpha x}\cos(nt-\beta x), \qquad (5)$$

где

$$\beta^2-\alpha^2=\frac{n^2a^2}{a^4+\dfrac{16\mu^2n^2}{9\rho_0^2}}, \qquad 2\alpha\beta=\frac{\dfrac{4\mu n^3}{3\rho_0}}{a^4+\dfrac{16\mu^2n^2}{9\rho_0^2}}. \qquad (6)$$

При применении к воздуху при обычных давлениях μ можно рассматривать, как весьма малую величину и пренебречь ее квадратом. Таким образом,

$$\beta=\frac{n}{a}, \qquad \alpha=\frac{2\mu n^2}{3\rho_0 a^3}. \qquad (7)$$

---

[1]) Stokes, *Cambridge Transaction*, том IX, § 49, 1851.
[2]) Poisson, *Journal de l'École Polytechnique*, том XIII, вып. 20, стр. 139.
[3]) Stokes, *Cambridge Transactions*, том VIII, стр. 287, 1845.

Оказывается, что при таком порядке приближения трение в жидкости не влияет на скорость звука. Заменив n через $2\pi a\lambda^{-1}$, мы придадим выражению для коэфициента затухания вид

$$\varkappa = \frac{8\pi^2\mu}{3\lambda^2\rho_0 a}, \tag{8}$$

показывающий, что вязкость оказывает наибольшее влияние на короткие волны. Амплитуда уменьшается в отношении $e:1$ при $x=a^{-1}$. В единицах *CGS* можно положить $\rho_0=0{,}0013$, $\mu=0{,}00019$, $a=33\,200$, откуда

$$x = 8800\lambda^2. \tag{9}$$

Следовательно, амплитуда волн длиной в 1 *см* уменьшается в отношении $e:1$ после прохождения расстояния в 88 *м*. Длина волны в 10 *см* соответствует примерно g четвертой октавы; для этого случая x равняется 8800 *м*. Таким образом, оказывается, что при атмосферном давлении влияние трения не должно быть заметным при обычных наблюдениях, за исключением только звуков, расположенных вблизи верхнего предела музыкальной гаммы. Смягчение звуков на расстоянии, как это замечается в гористых странах, пожалуй, следует приписать трению, благодаря которому более высокие и более резкие компоненты постепенно выключаются. Часто, должно быть, замечалось, что звук „с“ едва-едва передается, а то и вовсе не передается эхом, и я обнаружил [1]), что на расстоянии в 200 *м* сильный свист утрачивает свой характер даже при отсутствии отражения. Возможно, что и этот эффект также обязан вязкости.

В сильно разреженном воздухе значение α, определяемое выражением (8), сильно возрастает, так как μ остается постоянным. Тогда даже низкие тоны могут изменяться на небольших расстояниях.

Из наблюдений Колладона на Женевском озере следует, что в воде низкие звуки затухают быстрее, чем высокие. На небольшом расстоянии от колокола, возбуждаемого ударом под водой, он обнаружил, что звук становится коротким и резким, теряя музыкальный характер.

347. Эффект вязкости, заключающийся в изменении движения воздуха, соприкасающегося с колеблющимися твердыми телами, можно лучше всего понять из решения задачи, данного Стоксом для весьма простого случая. Предположим, что бесконечная плоскость yz совершает гармонические колебания в направлении y, параллельном самой плоскости. Так как движение происходит вдоль параллельных слоев, то u и w равны нулю, и переменные величины являются функциями только x. Первое из уравнений (13) § 245 показывает, что давление постоянно; соответствующее уравнение для v получает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{1}$$

---

[1]) „Acoustical Observations“, *Phil. Mag.*, том III, стр. 456, 1877.

подобный виду уравнения линейной теплопроводности. Если теперь предположить, что v пропорционально e^{int}, то получающееся уравнение для x будет

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = i\frac{n\rho}{\mu}v, \tag{2}$$

а его общее решение —

$$v = Ae^{-mx} + Be^{+mx}, \tag{3}$$

где

$$m = \sqrt{\frac{n\rho}{2\mu}}(1+i). \tag{4}$$

Если газ находится по положительную сторону плоскости, совершающей колебания, то движение должно прекратиться при $x = +\infty$. Следовательно, $B = 0$, и, отбрасывая мнимую часть, получим значение v

$$v = Ae^{-\sqrt{\frac{n\rho}{2\mu}}x}\cos\left\{nt - \sqrt{\frac{n\rho}{2\mu}}x\right\}, \tag{5}$$

соответствующее скорости

$$V = A\cos nt \tag{6}$$

при $x = 0$. Скорость жидкости, соприкасающейся с плоскостью, обычно принимается одинаковой со скоростью самой плоскости, исходя как будто бы из достаточного основания, а именно, что в противном случае предполагалась бы бесконечно бо́льшая гладкость жидкости по отношению к твердому телу, чем по отношению к самой этой жидкости. При этом предположении уравнение (5) выражает движение жидкости на положительной стороне плоскости, создаваемое движением плоскости, определяемым уравнением (6).

Тангенциальная сила на единицу площади, действующая на плоскость, равна

$$\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=0},$$

или, если $A = 1$,

$$\mu\sqrt{\frac{n\rho}{2\mu}}\{-\cos nt + \sin nt\} = -\sqrt{\frac{1}{2}n\rho\mu}\left(V + \frac{1}{n}\frac{\partial V}{\partial t}\right). \tag{7}$$

Первый член выражает диссипативную силу, стремящуюся остановить движение; второй член выражает силу, эквивалентную увеличению инерции колеблющегося тела. Величина обеих сил зависит от частоты колебания.

Полученным результатом мы воспользуемся для приближенного вычисления скорости звука в трубах, столь узких, что вязкость воздуха оказывает заметное влияние. Так же, как в § 265, допустим, что X обозначает полный поток жидкости сквозь сечение трубы в точке x. Сила гидростатического давления, действующая на участке

между x и $x+\delta x$, как обычно, равна

$$-S\frac{\partial p}{\partial x}\delta x = a^2\rho\,\delta x\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}. \tag{8}$$

Сила вязкости может быть определена из исследования, проведенного для плоскости, совершающей колебания, если только толщина слоя воздуха, прилегающего к стенкам трубы, мала сравнительно с диаметром. Так, если P — периметр трубы, а V — скорость течения на некотором расстоянии от стенок трубы, то тангенциальная сила, действующая на взятом участке, внутри которого заключен объем $S\,\delta x$, в силу уравнения (7), равна

$$-P\,\delta x\sqrt{\frac{1}{2}n\rho\mu}\left(V+\frac{1}{n}\frac{\partial V}{\partial t}\right),$$

или, заменяя V через $\frac{\partial X}{\partial t}/S$,

$$-\frac{P\,\delta x\sqrt{\frac{1}{2}n\rho\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial t}+\frac{1}{n}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}\right)}{S}. \tag{9}$$

Поэтому уравнение движения *для этого периода* есть

$$\rho\,\delta x\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}+\sqrt{\frac{1}{2}n\rho\mu}\frac{P\,\delta x}{S}\left(\frac{\partial X}{\partial t}+\frac{1}{n}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}\right)=a^2\rho\,\delta x\frac{\partial^2 X}{\partial x^2},$$

или

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}\left\{1+\frac{P}{S}\sqrt{\frac{\mu}{2n\rho}}\right\}+\frac{P}{S}\sqrt{\frac{n\mu}{\rho}}\frac{\partial X}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}. \tag{10}$$

Скорость звука приближенно равна

$$a\left\{1-\frac{1}{2}\frac{P}{S}\sqrt{\frac{\mu}{2n\rho}}\right\} \tag{11}$$

или, для случая круглой трубы радиуса r,

$$a\left\{1-\frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{2n\rho}}\right\}. \tag{12}$$

Результат, выраженный в формуле (12), впервые получен Гельмгольцем.

348 [1]. В исследовании Кирхгоффа [2], к которому мы теперь переходим, учтен не только эффект вязкости, но и одинаково важные эффекты, возникающие в результате выделения теплоты и ее передачи путем теплопроводности от газа к твердым стенкам узкой трубы, и обратно.

---

[1]) Этот и следующие параграфы впервые печатаются во втором издании. В первом издании, заканчивавшемся § 348, последний был посвящен вопросу динамического подобия.

[2]) Kirchhoff, *Pogg. Ann.*, том CXXXIV, стр. 177, 1868.

Пренебрегая квадратом перемещения, получим „уравнение непрерывности“ (3) § 237 в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{1}$$

так что динамические уравнения (13) § 345 можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\mu}{\rho_0}\nabla^2 u+\frac{\mu}{3\rho_0}\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial t}. \tag{2}$$

Относящиеся сюда термические вопросы уже были рассмотрены в § 247. В силу уравнения (4), имеем

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\beta\frac{\partial s}{\partial t}+\varkappa\nabla^2\theta, \tag{3}$$

где $\varkappa$ — постоянная, выражающая коэфициент температуропроводности.

В силу (3) § 247,

$$\frac{p}{\rho_0}=b^2(1+s+\alpha\theta), \tag{4}$$

где b — ньютоновское значение скорости звука, а именно $\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}$. Если обозначить лапласовское значение этой скорости через a, то

$$\frac{a^2}{b^2}=\gamma=1+\alpha\beta, \tag{5}$$

так что

$$\beta=\frac{a^2-b^2}{b^2\alpha}. \tag{6}$$

Мы упростим уравнение, введя вместо θ новый символ θ', связанный с ним соотношением $\theta'=\theta/\beta$. Тогда уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial\theta'}{\partial t}-\frac{\partial s}{\partial t}=\varkappa\nabla^2\theta, \tag{7}$$

и типичное уравнение (2) можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+b^2\frac{\partial s}{\partial x}+(a^2-b^2)\frac{\partial\theta'}{\partial x}=\mu'\nabla^2 u-\mu''\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial t}, \tag{8}$$

где μ' равно μ/ρ_0. μ'' выражает вторую постоянную, значение которой, согласно теории Стокса, есть $\frac{1}{3}\mu'$. Это соотношение находится в согласии с кинетической теорией Максвелла, которая, при введении более специальных предположений, дает, далее,

$$\varkappa=\frac{5}{2}\mu'. \tag{9}$$

Во всяком случае μ', μ'' и $\varkappa$ можно рассматривать как величины одинакового порядка.

Теперь, следуя Кирхгоффу, введем предположение, что переменные u, v, w, s, θ' являются функциями времени, определяемыми только множителем e^{ht}, где h — постоянная, которую далее мы будем считать мнимой. Дифференцирования по t теперь выражаются введением множителя h, и уравнения принимают вид

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}+hs=0, \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} hu-\mu'\nabla^2 u &= -\frac{dP}{dx},\\ hv-\mu'\nabla^2 v &= -\frac{dP}{dy},\\ hw-\mu'\nabla^2 w &= -\frac{dP}{dz}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$P=(b^2+h\mu'')\,s+(a^2-b^2)\theta', \tag{12}$$

$$s=\theta'-\frac{\nu}{h}\nabla^2\theta'. \tag{13}$$

Если исключить s, то, в силу (13), выражения (12) и (10) получат вид

$$P=(a^2+h\mu'')\,\theta'-\frac{\nu}{h}(b^2+h\mu'')\nabla^2\theta', \tag{14}$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}+h\theta'-\nu\nabla^2\theta'=0. \tag{15}$$

Дифференцируя уравнения (11) по x, y, z, складывая их и применяя затем выражения (14) и (15), находим для θ' уравнение

$$h^2\theta'-\{a^2+h(\mu'+\mu''+\nu)\}\nabla^2\theta'+$$
$$+\frac{\nu}{h}\{b^2+h(\mu'+\mu'')\}\nabla^4\theta'=0. \tag{16}$$

Решение уравнения (16) можно получить в виде

$$\theta'=A_1Q_1+A_2Q_2, \tag{17}$$

где Q_1 и Q_2 суть функции, удовлетворяющие соответственно выражениям

$$\nabla^2Q_1=\lambda_1Q_1 \quad\text{и}\quad \nabla^2Q_2=\lambda_2Q_2, \tag{18}$$

где λ_1 и λ_2 — корни уравнения

$$h^2-\{a^2+h(\mu'+\mu''+\nu)\}\lambda+$$
$$+\frac{\nu}{h}\{b^2+h(\mu'+\mu'')\}\lambda^2=0, \tag{19}$$

а A_1 и A_2 — произвольные постоянные.

В соответствии с этим значением θ' частные решения уравнений (11) получаются путем приравнивания u, v, w производным

$$B_1Q_1+B_2Q_2,$$

взятым по x, y, z. Отношение постоянных B_1 и B_2 к постоянным A_1 и A_2 получается непосредственно из (15), что дает

$$\nabla^2(B_1Q_2+B_2Q_2)+(h-\nu\nabla^2)(A_1Q_1+A_2Q_2)=0,$$

так что, в силу (18),

$$B_1=A_1\left(\nu-\frac{h}{\lambda_1}\right) \quad \text{и} \quad B_2=A_2\left(\nu-\frac{h}{\lambda_2}\right). \tag{20}$$

Более общие решения можно получить путем прибавления к u, v, w соответственно u', v', w', которые удовлетворяют соотношениям

$$\nabla^2u'=\frac{h}{\mu'}u', \quad \nabla^2v'=\frac{h}{\mu'}v', \quad \nabla^2w'=\frac{h}{\mu'}w'. \tag{21}$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} u&=u'+B_1\frac{\partial Q_1}{\partial x}+B_2\frac{\partial Q_2}{\partial x},\\ v&=v'+B_1\frac{\partial Q_1}{\partial y}+B_2\frac{\partial Q_2}{\partial y},\\ w&=w'+B_1\frac{\partial Q_1}{\partial z}+B_2\frac{\partial Q_2}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где B_1 и B_2 имеют значения, данные выше.

Подставляя значения u, v, w, определяемые выражениями (22), в уравнение (15), мы получим

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0. \tag{23}$$

349. Эти результаты Кирхгофф прежде всего применил к случаю плоских волн, предполагая, что они распространяются в бесконечном пространстве в направлении $+x$. Тогда v' и w' исчезают, а u', Q_1 и Q_2 независимы от y и z. Из (23) § 348 следует, что u' также исчезает. Уравнения для Q_1 и Q_2 суть

$$\frac{\partial^2Q_1}{\partial x^2}=\lambda_1Q_1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2Q_2}{\partial x^2}=\lambda_2Q_2 \tag{1}$$

так что мы можем положить

$$Q_1=e^{-x\sqrt{\lambda_1}} \quad \text{и} \quad Q_2=e^{-x\sqrt{\lambda_2}}, \tag{2}$$

где знаки при квадратных корнях следует выбрать так, чтобы действительные части были положительными. В соответствии с этим

$$u=A_1\lambda_1^{1/2}\left(\frac{h}{\lambda_1}-\nu\right)e^{-x\sqrt{\lambda_1}}+A_2\lambda_2^{1/2}\left(\frac{h}{\lambda_2}-\nu\right)e^{-x\sqrt{\lambda_2}}, \tag{3}$$

$$\theta'=A_1e^{-x\sqrt{\lambda_1}}+A_2e^{-x\sqrt{\lambda_2}}, \tag{4}$$

где постоянные A_1 и A_2 можно рассматривать как определяемые значениями u и θ' при $x=0$.

Решение, выражаемое соотношениями (3) и (4), — слишком общее для нашей теперешней цели, так как предполагает произвольную теплопередачу при $x=0$. Из квадратного уравнения для λ (19) § 348 мы видим, что, если считать μ', μ'', ν малыми величинами, то одно из значений λ, скажем λ_1, приближенно равно h^2/a^2, а другое значение, λ_2, весьма велико. Решение, которое нам нужно, это решение, которое соответствует просто λ_1. Вторым приближением для λ_1, в силу (19) § 348, будет

$$\lambda_1=\frac{h^2}{a^2+h(\mu'+\mu''+\nu)}+\frac{\nu b^2\lambda_1^2}{ha^2}=\frac{h^2}{a^2}\left\{1-\frac{h(\mu'+\mu''+\nu)}{a^2}\right\}+\frac{\nu b^2h^3}{a^6},$$

так что

$$\pm\sqrt{\lambda_1}=\frac{h}{a}-\frac{h^2}{2a^3}\left\{\mu'+\mu''+\nu\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\right\}. \tag{5}$$

Если теперь вместо h написать in, то мы увидим, что типичное решение имеет вид

$$u=e^{-m'x}e^{in\left(t-\frac{x}{a}\right)}, \tag{6}$$

где

$$m'=\frac{n^2}{2a^3}\left\{\mu'+\mu''+\nu\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\right\}. \tag{7}$$

В выражение (6) можно ввести, как обычно, произвольный множитель и произвольное слагаемое, добавляемое к t; можно также, при желании, получить еще решение, опустив мнимую часть.

Эти результаты находятся в согласии с результатами, уже полученными для частных случаев. Так, при $\nu=0$ выражение (7) дает

$$m'=\frac{n^2}{2a^3}(\mu'+\mu'')$$

в согласии с выражением (7) § 346, где

$$\mu''=\frac{1}{3}\mu'=\frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}.$$

С другой стороны, если не учитывать вязкости, так что $\mu'=\mu''=0$, то мы снова придем к выражению (18) § 247. Нам не приходится ничего добавлять к уже проведенному рассуждению.

В случае сферических волн, распространяющихся в направлении $+r$, Кирхгофф находит подобным же образом выражение для радиальной скорости

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{-m'r}}{r}\cdot e^{in\left(t-\frac{r}{a}\right)}, \tag{8}$$

где m' имеет такое же значение (7), как и выше.

350. Теперь перейдем к более важной задаче и предположим, что воздух заключен внутри цилиндрической трубы круглого сечения

и что движение симметрично относительно оси x. Если $y^2+z^2=r^2$ и

$$v=q\frac{y}{r}, \quad w=q\frac{z}{r},$$

$$v'=q'\frac{y}{r}, \quad w'=q'\frac{z}{r},$$

то u, u', q, q', Q_1, Q_2 следует рассматривать как функции от x и r. Предположим далее, что эти величины, как функции от x, пропорциональны e^{mx}, где m — комплексная постоянная, которую нужно определить. Уравнения (18) § 348 для Q_1 и Q_2 принимают вид

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q_1}{\partial r}=(\lambda_1-m^2)\,Q_1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 Q_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q_2}{\partial r}=(\lambda_2-m^2)\,Q_2. \tag{2}$$

Для u', q' уравнения (21) и (23) дают

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u'}{\partial r}=\left(\frac{h}{\mu'}-m^2\right)u', \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 q'}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial q'}{\partial r}-\frac{q'}{r^2}=\left(\frac{h}{\mu'}-m^2\right)q', \tag{4}$$

$$mu'+\frac{\partial q'}{\partial r}+\frac{q'}{r}=0. \tag{5}$$

Эти три уравнения удовлетворяются, если u' определяется из первого уравнения, а q' выбрано так, что

$$q'=-\frac{m}{\frac{h}{\mu'}-m^2}\frac{\partial u'}{\partial r}. \tag{6}$$

Последнее соотношение получается путем вычитания из уравнения (4) результата дифференцирования уравнения (5) по r. Решение уравнения (3) можно записать в виде $u'=AQ$, где A — постоянная, а Q — функция от r, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial r}=\left(\frac{h}{\mu'}-m^2\right)Q. \tag{7}$$

Таким образом, в силу (20) и (22) § 348,

$$u=AQ-A_1m\left(\frac{h}{\lambda_1}-\nu\right)Q_1-A_2m\left(\frac{h}{\lambda_2}-\nu\right)Q_2, \tag{8}$$

$$q=-A\frac{m}{\frac{h}{\mu'}-m^2}\frac{\partial Q}{\partial r}-A_1\left(\frac{h}{\lambda_1}-\nu\right)\frac{\partial Q_1}{\partial r}-A_2\left(\frac{h}{\lambda_2}-\nu\right)\frac{\partial Q_2}{\partial r}, \tag{9}$$

$$\theta'=A_1Q_1+A_2Q_2. \tag{10}$$

На стенках трубы u, q, θ' должны удовлетворять известным условиям. Мы будем предполагать здесь, что на стенках как движение газа, так и изменения температуры отсутствуют; таким образом, когда r

принимает значение, равное радиусу трубы, u, q, θ' равны нулю. Следовательно, искомое условие выражается в виде исчезновения детерминанта уравнений (8), (9) и (10), а именно,

$$\frac{m^2 h}{\frac{h}{\mu'} - m^2}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\frac{\partial \ln Q}{\partial r} + \left(\frac{h}{\lambda_1} - \nu\right)\frac{\partial \ln Q_1}{\partial r} - \left(\frac{h}{\lambda_2} - \nu\right)\frac{\partial \ln Q_2}{\partial r} = 0. \tag{11}$$

Три функции Q, Q_1, Q_2, которые должны оставаться конечными при $r = 0$, являются функциями Бесселя нулевого порядка (§ 200), так что мы можем написать в обычном обозначении

$$\left.\begin{aligned} Q &= J_0\left\{r\sqrt{m^2 - \frac{h}{\mu'}}\right\}, \\ Q_1 &= J_0\left\{r\sqrt{m^2 - \lambda_1}\right\}, \\ Q_2 &= J_0\left\{r\sqrt{m^2 - \lambda_2}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

В уравнении (11) значения λ_1 и λ_2 не зависят от r, так как определяются выражением (19) § 348. В применении к воздуху при нормальных условиях μ', μ'', ν можно рассматривать как малые; тогда приближенно будем иметь

$$\lambda_1 = \frac{h^2}{a^2}, \quad \lambda_2 = \frac{h a^2}{\nu b^2}. \tag{13}$$

Второе приближение к значению λ_1 уже было дано в выражении (5) § 349. Здесь предполагается, что скорость распространения эффектов вязкости для рассматриваемой высоты звука, а именно $\sqrt{2\mu' n}$, § 347, мала сравнительно со скоростью звука, так что $in\mu'/a^2$, или $h\mu'/a^2$, — малая величина.

При истолковании этого решения нужно отметить два крайних случая, заслуживающих особого внимания. Первый из них, случай, рассмотренный Кирхгоффом, возникает, когда μ', μ'', ν считаются весьма малыми, настолько малыми, что слой газа, на который непосредственно действуют стенки трубы, представляет лишь незначительную долю всего заключенного в трубе газа. Если μ' и т. д. равны нулю, то мы имеем

$$\lambda_1 = \frac{h^2}{a^2}, \qquad m^2 = \frac{h^2}{a^2},$$

так что $r\sqrt{m^2 - \lambda_1}$ является здесь малой величиной. С другой стороны, $r\sqrt{m^2 - \frac{h}{\mu'}}$ и $r\sqrt{m^2 - \lambda_2}$ велики.

Значение $J_0(z)$ при малом z дается возрастающим рядом (5) § 200; из этого ряда непосредственно следует, что

$$\frac{\partial \ln J_0(z)}{\partial z} = -\frac{1}{2}z.$$

Если z очень велико, и притом таково, что мнимая его часть положительна, то (10) § 200 дает

$$\frac{\partial \ln J_0(z)}{\partial z} = -\operatorname{tg}\left(z - \frac{1}{4}\pi\right) = -i.$$

Следовательно, если сохранить только члены высшего порядка, то будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \ln Q}{\partial r} &= \sqrt{\frac{h}{\mu'}}, \\ \frac{\partial \ln Q_1}{\partial r} &= \frac{1}{2} r(\lambda_1 - m^2), \\ \frac{\partial \ln Q_2}{\partial r} &= \sqrt{\frac{ha^2}{\nu b^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Подставив эти выражения в (11) и взяв приближенные значения λ_1 и λ_2 из (13), находим

$$m^2 = \frac{h^2}{a^2}\left(1 + \frac{2\gamma'}{r\sqrt{h}}\right), \tag{15}$$

где

$$\gamma' = \sqrt{\mu'} + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\sqrt{\nu}, \tag{16}$$

причем знак при $\sqrt{h}$ следует взять таким, чтобы действительная часть была положительной.

Напишем, далее,

$$h = ni, \tag{17}$$

так что частота равна $n/2\pi$. Таким образом,

$$\sqrt{h} = \sqrt{\frac{1}{2}n}\,(1+i) \tag{18}$$

и

$$m = \pm(m' + im''), \tag{19}$$

где в силу (15),

$$m' = \frac{\sqrt{n}\gamma'}{\sqrt{2}\,ar}, \qquad m'' = \frac{n}{a} + \frac{\sqrt{n}\gamma'}{\sqrt{2}\,ar}. \tag{20}$$

Если мы восстановим множители, зависящие от x и t, которые мы до сих пор опускали, то будем иметь

$$u = BRe^{ht+mx}, \quad q = BR'e^{ht+mx}, \quad \theta = BR''e^{ht+mx},$$

где B — произвольная постоянная, а R, R', R'' — определенные функции от r, исчезающие при r, равном радиусу трубы, и принимающие значения

$$R = 1, \quad R' = 0, \quad R'' = -\frac{1}{a}$$

для точек, лежащих на конечном расстоянии от стенок. Получаемое решение для u, применимое к точкам, расположенным на конечном

расстоянии от стенок, можно написать в виде

$$u = C_1 e^{m'x} \sin(nt + m''x + \delta_1) + C_2 e^{-m'x} \sin(nt - m''x + \delta_2), \quad (21)$$

где C_1, C_2, δ_1, δ_2 обозначают четыре действительные произвольные постоянные. В соответствии с этим m' определяет ослабление, которое испытывают волны при распространении, а m'' определяет скорость распространения. Эта скорость равна

$$\frac{n}{m''} = a\left\{1 - \frac{\gamma'}{\sqrt{2n}\cdot r}\right\} \quad (22)$$

в согласии с выражением (12) § 347.

Уменьшение скорости звука в узких трубах, обнаруживаемое по длине волны стоячих колебаний, было замечено Кундтом (§ 260) и специально изучено Шнеебели [1]) и Зеебеком [2]). Из их опытов следует, что уменьшение скорости пропорционально r^{-1} в согласии с (22), но что при изменении n уменьшение пропорционально скорее $n^{-3/2}$, чем $n^{-1/2}$. Так как μ не зависит от плотности (ρ), то в разреженном воздухе эффект был бы усилен.

Теперь обратимся к рассмотрению другого крайнего случая уравнения (11). Он возникает, когда труба такова, что слой, на который непосредственно влияет трение, образует не тонкую, прилегающую к стенкам, прослойку, а распространяется на все сечение, как это должно неизбежно случиться при достаточном уменьшении диаметра. При этих условиях hr^2/μ' — малая, а не большая, как это было в случае, рассмотренном Кирхгоффом, величина, и аргументы *всех трех* функций в выражении (12) следует рассматривать как малые.

Один из результатов исследования можно заранее предвидеть. По мере уменьшения диаметра трубы передача теплоты внутри столба воздуха от центра к периферии становится все свободнее и свободнее. В пределе температура твердых стенок определяет температуру заключенного внутри газа, и сгущения и разрежения происходят изотермически. При таких условиях уже нет рассеяния, создаваемого проводимостью, и все происходит так, как если бы теплота не образовывалась вовсе. Следовательно, коэфициент теплопроводности не входит в результат, который, помимо того, содержит ньютоновское значение b скорости звука, а не лапласовское a.

При малом z

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2},$$

так что приближенно

$$\frac{d \ln J_0(z)}{dz} = -\frac{1}{2} z \left(1 + \frac{1}{8} z^2\right). \quad (23)$$

---

[1]) Schneebeli, *Pogg. Ann.*, том CXXXVI, стр. 296, 1869.
[2]) Seebeck, *Pogg. Ann.*, том CXXXIX, стр. 104, 1870.

Если ввести результаты приложения (23) к величинам Q, Q_1, Q_2 в выражение (11), то уравнение можно разделить на $\frac{1}{2}r$, и тогда левая сторона его будет состоять из двух частей, первая из которых не зависит от r, а вторая пропорциональна r^2. Первая часть приводится без дальнейших приближений к $\nu(\lambda_2 - \lambda_1)$. Для второй части следует удержать только главные члены. Таким образом, пользуясь выражениями (13), получаем

$$\nu(\lambda_2 - \lambda_1) - \frac{a^2 r^2}{8}\left\{\frac{m^2}{\mu'} + \frac{h^2(a^2 - b^2)}{\nu b^4}\right\} = 0,$$

откуда

$$m^2 = \frac{8\mu' h}{b^2 r^2} - \frac{h^2 \mu'(a^2 - b^2)}{\nu b^4}.$$

Отношение второго члена к первому имеет порядок hr^2/ν, т. е. по предположению есть малая величина, так что мы можем просто написать решение, применимое в предположенных условиях, в виде

$$m^2 = \frac{8\mu' h}{b^2 r^2} = \frac{8i\mu' n}{b^2 r^2}. \tag{24}$$

Прежде, чем покончить с этим вопросом, целесообразно будет вкратце рассмотреть аналогичную задачу для двух измерений, хотя она имеет меньшее значение, чем задача о трубе кругового сечения, рассмотренная Кирхгоффом. Анализ здесь несколько проще; но поскольку он практически идет тем же путем, нам достаточно будет ограничиться просто указанием необходимых изменений. Предполагается, что движение не зависит от z и происходит между параллельными стенками при $y = \pm y_1$.

Уравнения (1)—(11) предыдущего исследования можно считать все еще применимыми к настоящей задаче, если подставить v вместо q и y вместо r, опустив члены, в которых r входит в знаменатель. Общее решение уравнений, соответствующих (1), (2) и (7), содержит две функции, состоящие из синусов и косинусов аргументов, кратных y. Но из (8), (9) и (10) очевидно, что условия задачи при $y = 0$ требуют, чтобы функция синус отсутствовала, так что в выражении (12) мы можем просто заменить функцию J_0 косинусом.

В случае, когда μ' и т. д. рассматриваются как бесконечно малые, мы имеем, как и в (14), при $y = y_1$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \ln Q}{\partial y} &= \sqrt{\frac{h}{\mu'}},\\ \frac{\partial \ln Q_2}{\partial y} &= \sqrt{\frac{ha^2}{\nu b^2}},\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

но вместо второго из уравнений (14) получим

$$\frac{\partial \ln Q_1}{\partial y} = y_1(\lambda_1 - m^2). \tag{26}$$

При подстановке этих значений в (11) уравнение останется без изменения, за исключением того, что произойдет замена r через $2y_1$. Такую же подстановку следует сделать в (15), (20) и (22). Последнее уравнение дает для скорости звука

$$a\left\{1-\frac{1}{2y_1}\frac{\gamma'}{\sqrt{2n}}\right\}. \tag{27}$$

Стоит отметить, что выражение (27) представляет собой вид, который приняло бы выражение (11) § 347 для этого случая, если бы в нем заменить $\sqrt{\mu'}$ через γ'; можно еще, пожалуй, отметить, что того же самого изменения достаточно для того, чтобы сделать это уравнение применимым к сечению любой формы для случая, когда термическими эффектами нельзя пренебречь.

Во втором крайнем случае, когда расстояние между стенками $2y_1$ настолько мало, что величиной hy_1^2/ν приходится пренебречь, мы имеем вместо (23) следующее выражение:

$$\frac{\partial \ln\cos z}{\partial z}=-z\left(1+\frac{1}{3}z^2\right). \tag{28}$$

Таким образом, последующие уравнения могут быть приспособлены для нашей теперешней цели путем замены в них $\frac{1}{8}r^2$ через $\frac{1}{3}y_1^2$. Следовательно, аналогом выражения (24) будет

$$m^2=\frac{3\mu' h}{b^2y_1^2}=\frac{3i\mu' n}{b^2y_1^2}. \tag{29}$$

351. Результаты § 350 имеют важное значение для объяснения поведения пористых тел по отношению к звуку. Тиндаль показал, что во многих случаях звук проникает в подобные тела более свободно, чем можно было бы ожидать, хотя он отражается от тонких слоев непрерывного твердого вещества. С другой стороны, стог соломы, повидимому, представляет весьма совершенное препятствие. Возможно, что пористые стены дают ослабленное отражение, так что внутри здания, ограниченного такими стенами, резонанс менее продолжителен, чем он был бы в случае, если бы стены состояли из непрерывного вещества.

Если рассматривать вопрос с механической точки зрения, то очевидно, что звук не уничтожается подобными препятствиями. При отсутствии диссипативных сил та часть звука, которая не прошла сквозь препятствие, должна быть отражена. Уничтожение звука может быть обусловлено вязкостью или теплопроводностью, но влияние этих факторов в огромной степени увеличивается при соприкосновении с твердым веществом, обладающим обширной поверхностью. У такой поверхности как тангенциальное, так и нормальное движения задерживаются, и происходит переход тепла к стенке и от стенки,

поскольку соседний воздух нагревается и охлаждается при его сгущениях и разрежениях. При той быстроте изменения, с какой мы имеем дело в случае слышимых звуков, эти эффекты распространяются лишь на очень тонкий слой воздуха и твердого тела, и потому влияние их в значительной степени усиливается, если вещество разбито на тонкие поры.

Предположим, что стена, представляющая гладкую поверхность, разбита, будучи в других отношениях непрерывной, на большое число подобных узких каналов, равномерно распределенных и ограниченных поверхностями, всюду перпендикулярными к поверхности стены. Если число каналов достаточно велико, то переход, при соприкосновении звука со стеной, от простых плоских волн вне стены к колебаниям воздуха, соответствующим внутренности канала неограниченной длины, занимает пространство, небольшое сравнительно с длиной волны колебания, и тогда связь между положением вещей внутри и вне стены допускает простое выражение.

Рассматривая сначала внутренность одного из каналов и располагая ось x параллельно оси канала, предположим, что компоненты скорости u, v, w и сгущение s, если рассматривать их как функции от x, пропорциональны e^{ikx}, а если рассматривать их как функции от t — пропорциональны e^{int}, где n — действительное число. Соотношение между k и n зависит от природы газа и от размеров и формы канала и было определено для некоторых важных случаев в § 350, где ik обозначено через m. Предполагая это соотношение известным, мы теперь покажем, как подойти к проблеме отражения.

Для этой цели рассмотрим уравнение непрерывности, проинтегрированное по поперечному сечению σ канала. Поскольку стенки канала непроницаемы,

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint s\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial x}\iint u\,d\sigma = 0,$$

так что

$$n\iint s\,d\sigma + k\iint u\,d\sigma = 0. \tag{1}$$

Это уравнение применимо к точкам, отстоящим от отверстия на расстояние, превышающее более чем в несколько раз, диаметры каналов.

Расположив теперь начало оси x на поверхности стены, составим соответствующие выражения для волн вне стены; здесь мы можем пренебречь влиянием вязкости и теплопроводности. Если a — скорость звука в отверстии канала и $k_0 = n/a$, то для волн, падающих и отражающихся перпендикулярно, мы можем написать

$$s = (e^{ik_0x} + Be^{-ik_0x})\,e^{int}, \tag{2}$$

$$u = a\,(-e^{ik_0x} + Be^{-ik_0x})\,e^{int}, \tag{3}$$

так что падающая волна есть

$$s = e^{i(nt+k_0x)}, \tag{4}$$

или, отбрасывая мнимую часть,

$$s = \cos(nt + k_0 x). \tag{5}$$

Эти выражения применимы, когда x превосходит в несколько раз расстояние между каналами. Непосредственно вблизи поверхности движение будет более сложным; однако, нам нет необходимости исследовать его подробнее. Отношение u к s вблизи стены получим с достаточной точностью, положив в (2) и (3) $x = 0$,

$$\frac{u}{as} = \frac{B-1}{B+1}. \tag{6}$$

Предположим теперь, что пространство, заключенное между параллельными плоскостями, расположенными по одной с обеих сторон от $x = 0$, можно взять настолько тонким сравнительно с длиной волны, что средние давления существенно одинаковы на обеих границах и что поток внутрь этого пространства у одной границы практически равен потоку из внутреннего пространства наружу на другой границе, причем в то же время это пространство достаточно велико по сравнению с поперечными размерами каналов, так что допустимо применение соотношения (6) на одной граничной плоскости и соотношения (1) на другой граничной плоскости. Равенство потока не предполагает равенства средних скоростей, так как рассматриваемые площади различны. Средние скорости будут обратно пропорциональны соответствующим площадям, т. е. будут находиться в отношении $\sigma:(\sigma+\sigma')$, если через σ' обозначить площадь непробитой каналами части стены, соответствующей каждому каналу. В силу (1) и (6), связь между движением внутри и снаружи выражается в виде

$$-\frac{n}{k}\sigma = \frac{a(B-1)}{B+1}(\sigma+\sigma').$$

Обозначим отношение непробитой каналами части стены к пробитой ее части через g, так что $g = \sigma'/\sigma$. Таким образом,

$$\frac{1-B}{1+B} = \frac{k_0}{k(1+g)}. \tag{7}$$

Если $g = 0$, то $k = k_0$, т. е. если бы стена исчезла или если бы она была сведена к бесконечно тонким перегородкам между каналами и в то же время мы пренебрегли бы диссипативными эффектами, то отражение не имело бы места. Если совсем нет отверстий ($g = \infty$), то $B = 1$, что означает полное отражение. В общем случае вместо (7) мы можем написать

$$B = \frac{k(1+g) - k_0}{k(1+g) + k_0}, \tag{8}$$

что и является решением предложенной задачи. Предполагается, что волны, однажды вошедшие внутрь стены, не возвращаются назад.

В случае, когда действуют диссипативные силы, этому условию всегда можно удовлетворить, полагая каналы достаточно длинными. Необходимая длина канала или толщина стены будет зависеть от свойств газа и от размеров и формы каналов. Отражение, даже при отсутствии диссипативных сил, должно происходить, за исключением крайнего случая $g=0$. Полагая в (8) $k=k_0$, имеем

$$B=\frac{g}{2+g}. \tag{9}$$

Если $g=1$, т. е. если вырезана половина стены, то $B=\frac{1}{3}$, а $B^2=\frac{1}{9}$, так что отражение мало. Если каналы — круглого сечения и расположены в виде квадратной сетки насколько возможно близко один к другому, то $g=(4-\pi)/\pi$, откуда $B=0{,}121$, а $B^2=0{,}015$, и почти все движение проходит насквозь.

Если каналы имеют круговое сечение и настолько малы, что величиной nr^2/ν можно пренебречь, то мы имеем из (24) § 350

$$-k^2=m^2=\frac{8i\mu' n}{b^2r^2}, \tag{10}$$

так что (21) волна, распространяющаяся внутрь канала, пропорциональна

$$e^{m'x}\sin(nt+m''x+\delta_1), \tag{11}$$

где

$$m'=m''=\frac{2\sqrt{\mu' n}}{br}=\frac{2\sqrt{\mu'\gamma n}}{ar}, \tag{12}$$

а γ — отношение удельных теплот (§ 246).

В качестве числового примера предположим, что высота звука равна 256, так что $n=2\pi\cdot 256$. Значение μ' для воздуха равно 0,16 единиц *CGS*, а значение ν равно 0,256. Если положить $r=0{,}001$ *см*, то найдем, что $nr^2/8\nu$ равно примерно 0,001. Если бы r было в 10 раз больше, то приближение, принятое в (10), было бы, пожалуй, еще достаточным.

Из (12), в случае, если $n=2\pi\cdot 256$,

$$m'=m''=\frac{0{,}00115}{r}, \tag{13}$$

так что при $r=0{,}001$ *см*, $m=1{,}15$. В этом случае амплитуда уменьшается в отношении $e:1$ после прохождения расстояния $1/m'$, т. е. около 1 *см*. Расстояние, на которое проникает звук, пропорционально радиусу канала.

Амплитуда отраженной волны, в силу (8), равна

$$B=\frac{m'(1+g)(1-i)-k_0}{m'(1+g)(1-i)+k_0},$$

или, как мы можем написать,

$$B=\frac{M-1-iM}{M+1-iM}, \tag{14}$$

где

$$M=(1+g)\frac{m'}{k_0}. \tag{15}$$

Если обозначить интенсивность отраженного звука через I, а интенсивность падающего звука принять за единицу, то

$$I=\frac{2M^2-2M+1}{2M^2+2M+1}. \tag{16}$$

Интенсивность звука, вошедшего внутрь стены, определится соотношением

$$1-I=\frac{4M}{2M^2+2M+1}. \tag{17}$$

В силу (12) и (15),

$$M=\frac{2(1+g)\sqrt{\mu'\gamma}}{r\sqrt{n}}. \tag{18}$$

Если предположить, что $r=0{,}001$ *см* и $g=1$, то мы должны иметь стену достаточно плотной структуры. В этом случае, в силу (18), $M=47{,}4$ и $1-I=0{,}0412$. Потеря 4% может показаться незначительной; однако, нужно вспомнить, что при продолжительном резонансе мы имеем дело с накоплением эффекта от большого числа отражений, так что сравнительно малая потеря при одном отражении может оказаться существенной. Толщина пористого слоя, необходимая для того, чтобы вызвать такой эффект, меньше 1 *см*.

Допустим опять, что $r=0{,}01$ *см*, $g=1$. Находим $M=4{,}74$, $1-I=0{,}342$, и необходимая толщина должна быть меньше 10 *см*.

Если r значительно больше 0,01 *см*, то теплообмен между воздухом и стенками канала уже недостаточно свободен, чтобы можно было пользоваться выражением (24) § 350.

Если диаметр настолько велик, что тепловые и вязкостные эффекты проявляются в пределах лишь небольшой его части, то мы имеем случай, рассмотренный Кирхгоффом (15) § 350.

Здесь

$$k=\frac{n}{a}\left\{1+\frac{\gamma'(1-i)}{r\sqrt{2n}}\right\}. \tag{19}$$

Это значение следует подставить в (8). Если ради простоты мы положим $g=0$, то найдем

$$B=\frac{\gamma'(1-i)}{2r\sqrt{2n}}, \tag{20}$$

$$I=\frac{\gamma'^2}{4r^2n}. \tag{21}$$

Однако, условие $g=0$ несовместимо с круговым сечением; поэтому предпочтительнее пользоваться решением, соответствующим выражению (27) § 350, и применимым в случае, когда каналы имеют вид узких щелей [1]). Нам следует просто заменить r в (19), (20) и (21) через $2y_1$, где $2y_1$ — ширина щели. Падающий звук поглощается все более и более полно по мере возрастания ширины канала; но в то же самое время становится необходимой бóльшая длина канала или бóльшая толщина стены для того, чтобы предотвратить возврат звука от задней стороны. Если $g=0$, то теоретически нет предела поглощению; и, как мы видели, не очень большое значение g само по себе может обусловить лишь сравнительно малое отражение. Слабо сбитый стог соломы, повидимому, является настолько же хорошим поглощателем звука, как и любой другой подобный предмет.

В обширных помещениях, ограниченных непористыми стенами, потолком и полом и имеющих мало окон, продолжительный резонанс, повидимому, неизбежен. Заглушающее влияние толстых ковров в подобных случаях хорошо известно. Применение подобного материала для стен и потолка, повидимому, представляет наилучший путь к дальнейшему усовершенствованию.

352. Одним из наиболее любопытных следствий вязкости является образование в некоторых случаях правильных вихрей. Один из таких примеров, открытых Дворжаком, уже был упомянут в § 260. В теоретически невязкой жидкости подобное явление не могло бы возникнуть (§ 240), и даже если жидкость обладает вязкостью, это — явление второго порядка, т. е. определяется *квадратом* скорости. Три задачи подобного рода были рассмотрены автором [2]) в другом месте, но здесь мы должны ограничиться явлением Дворжака и упростить вопрос путем ограничения двухмерным случаем и пренебрегая членами, зависящими от образования тепла и от теплопроводности.

Если предположить, что $p=a^2\rho$ и вместо $\ln\frac{\rho}{\rho_0}$ писать s, то основные уравнения (12) § 345 будут иметь вид

$$a^2\frac{\partial s}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}+\mu'\nabla^2 u+\mu''\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right), \qquad (1)$$

а соответствующим уравнением для v и уравнением непрерывности § 238 будет

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial s}{\partial t}+u\frac{\partial s}{\partial x}+v\frac{\partial s}{\partial y}=0. \qquad (2)$$

---

[1]) Следует заметить, что даже в случае двухмерной задачи допущение $g=0$ предполагает бесконечную теплоемкость материала, составляющего поры.

[2]) „On the Circulation of Air observed in Kundt's Tubes, and on some allied Acoustical Problems", *Phil. Trans.*, том 175, стр. 1, 1883.

Каковы бы ни были действительные значения u и v, мы можем написать

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{3}$$

где

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y},\quad \nabla^2\psi=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4}$$

Из (1) и (2)

$$\left(a^2+\mu''\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial s}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial t}+\mu'\nabla^2u-$$
$$-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}-\mu''\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial s}{\partial x}+v\frac{\partial s}{\partial y}\right), \tag{5}$$

$$\left(a^2+\mu''\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial s}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial t}+\mu'\nabla^2v-$$
$$-u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial y}-\mu''\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial s}{\partial x}+v\frac{\partial s}{\partial y}\right). \tag{6}$$

Далее, из (5) и (6)

$$\left(a^2+\mu'\frac{\partial}{\partial t}+\mu''\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2s-\frac{\partial^2s}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(u\frac{\partial s}{\partial x}+v\frac{\partial s}{\partial y}\right)-$$
$$-(\mu'+\mu'')\nabla^2\left(u\frac{\partial s}{\partial x}+v\frac{\partial s}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{7}$$

В первом приближении члены второго порядка по u, v, s следует опустить. Если предположить, что все периодические функции, как функции от t, пропорциональны e^{int} и писать q вместо $a^2+in\mu'+in\mu''$, то уравнение (7) принимает вид

$$q\nabla^2s+n^2s=0. \tag{8}$$

Но, в силу (2) и (4), $\nabla^2\varphi=-ins=i\frac{q}{n}\nabla^2s$, так что

$$\varphi=\frac{iqs}{n}\,^{1}), \tag{9}$$

и

$$u=\frac{iq}{n}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=\frac{iq}{n}\frac{\partial s}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{10}$$

Подставляя в (5) и (6) и опуская члены второго порядка, получаем, учитывая (8),

$$(\mu'\nabla^2-in)\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,\quad (\mu'\nabla^2-in)\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,$$

---

[1]) Здесь нет необходимости добавлять дополнительную функцию φ', удовлетворяющую уравнению $\nabla^2\varphi'=0$, так как соответствующее движение можно рассматривать как выражающееся целиком функцией ψ.

откуда

$$(\mu'\nabla^2 - in)\,\psi = 0. \tag{11}$$

Если исключить s непосредственно из уравнений (1), то получим

$$\left(\mu'\nabla^4 - \frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\right)\psi = \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}(v\nabla^2\psi) + \frac{\partial}{\partial x}(u\nabla^2\psi) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\nabla^2\psi + u\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x} + v\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y}. \tag{12}$$

Если теперь мы предположим, что, как функции от x, величины s, ψ и т. д. пропорциональны e^{ikx}, то уравнения (8) и (11) можно написать в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k''^2\right)s = 0, \tag{13}$$

где $k''^2 = k^2 - n^2/q$, и

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k'^2\right)\psi = 0, \tag{14}$$

где $k'^2 = k^2 + in/\mu'$.

Если начало отсчета y-ов поместить посредине между двумя параллельными граничными плоскостями, то s должна быть четной функцией от y, а ψ должна быть нечетной функцией. Таким образом, можно написать

$$s = A\,\mathrm{ch}\,k''y\cdot e^{int}\cdot e^{ikx}, \quad \psi = B\,\mathrm{sh}\,k'y\cdot e^{int}\cdot e^{ikx}, \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \left(-\frac{kq}{n}\cdot A\,\mathrm{ch}\,k''y + k'B\,\mathrm{ch}\,k'y\right)e^{int}\cdot e^{ikx},\\ v &= \left(\frac{iqk''}{n}\cdot A\,\mathrm{sh}\,k''y - ikB\,\mathrm{sh}\,k'y\right)e^{int}\cdot e^{ikx}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Если неподвижные стенки расположены у $y = \pm y_1$, то u и v должны обращаться в нуль при этих значениях y. Исключая из (16) отношение A и B, получаем для определения k уравнение

$$k^2\,\mathrm{th}\,k'y_1 = k'k''\,\mathrm{th}\,k''y_1, \tag{17}$$

где k' и k'' функции от k, определенные выше. Уравнение (17) можно рассматривать как видоизмененную и упрощенную форму уравнения (11) § 350, видоизмененную ввиду перехода от осевой симметрии к двум измерениям, а упрощенную — вследствие отбрасывания термических членов, представленных через ν. Сравнение легко произвести. Так как $\lambda_2 = \infty$, то третий член в (11), содержащий Q_2, совсем исчезает, и тогда λ_1^{-1} выделяется. В уравнениях (11) и (12) r следует заменить через y, а J_0 — через косинус, как уже было объяснено. Далее,

$$m^2 = -k^2, \quad h = in.$$

Введем теперь дальнейшие приближения, зависящие от допущения, что непосредственное влияние вязкости распространяется на слой,

толщина которого представляет только небольшую часть y_1. В этом случае $k^2 \approx n^2/a^2$, так что $k''y_1$ есть малая величина, а $k'y_1$ — величина большая, и мы можем положить

$$\operatorname{th} k'y_1 = \pm 1, \quad \operatorname{th} k''y_1 = \pm k''y_1.$$

Уравнение (17) тогда принимает вид

$$k^2 = k'k''^2 y_1, \tag{18}$$

или, если подставить значения k' и k'' из (13) и (14), то

$$k^2 = y_1 \left(k^2 - \frac{n^2}{q}\right)\left(k^2 + \frac{in}{\mu'}\right)^{1/2}$$

Таким образом, приближенно

$$k = \pm \frac{n}{a}\left\{1 + \frac{1-i}{2y_1\sqrt{\frac{2n}{\mu'}}}\right\} \tag{19}$$

в согласии с уже указанным в § 350 результатом.

Беря приближенную форму уравнений (16), мы должны указать, какую половину симметричного движения мы рассматриваем. Если мы выберем ту половину, для которой y *отрицательно*, то мы заменим $\operatorname{ch} k'y$ и $\operatorname{sh} k'y$ через $\frac{1}{2}e^{-k'y}$. Вместо $\operatorname{ch} k''y$ мы можем писать единицу, а вместо $\operatorname{sh} k''y$ — просто $k''y$. Если мы изменим произвольный множитель так, что максимальным значением u будет u_0, а для настоящего случая положим u_0 равным единице, то будем иметь

$$\left.\begin{aligned} u &= [-1 + e^{-k'(y+y_1)}]\, e^{ikx} e^{int}, \\ v &= \frac{ik}{k'} \cdot \left[\frac{y}{y_1} + e^{-k'(y+y_1)}\right] e^{ikx} e^{int}, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

где, конечно, u и v равны нулю при $y = -y_1$.

Если в выражениях (20) заменить k на $-k$ и затем взять среднее, то получим

$$\left.\begin{aligned} u &= [-1 + e^{-k'(y+y_1)}] \cos kx\, e^{int}, \\ v &= -\frac{k}{k'}\left[\frac{y}{y_1} + e^{-k'(y+y_1)}\right] \sin kx\, e^{int}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Хотя k и не является абсолютно действительной величиной, мы можем с достаточным для нашей цели приближением считать ее таковой. Мы можем, таким образом, положить в (14)

$$k' = \sqrt{\frac{in}{\mu'}} = \beta(1+i), \tag{22}$$

где $\beta = \sqrt{\frac{n}{2\mu'}}$. Применив это приближение в выражениях (21), по-

лучим в действительных величинах

$$\left.\begin{aligned} u &= \cos kx\,[-\cos nt + e^{-\beta(y+y_1)}\cos\{nt-\beta(y+y_1)\}] \\ v &= -\frac{k\sin kx}{\beta\sqrt{2}}\left[\frac{y}{y_1}\cos\left(nt-\frac{1}{4}\pi\right)+\right. \\ &\left.+e^{-\beta(y+y_1)}\cos\left\{nt-\frac{1}{4}\pi-\beta(y+y_1)\right\}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Выражения, с которыми нам придется иметь дело, будут короче, если вместо того, чтобы отсчитывать y от плоскости симметрии, как до сих пор, отсчитывать их от стены (с отрицательной стороны), для чего нам нужно писать y вместо $y+y_1$. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \cos kx\,[-\cos nt + e^{-\beta y}\cos(nt-\beta y)], \\ v_1 &= \frac{k\sin kx}{\beta\sqrt{2}}\left[\frac{y_1-y}{y_1}\cos\left(nt-\frac{1}{4}\pi\right)-\right. \\ &\left.-e^{-\beta y}\cos\left(nt-\frac{1}{4}\pi-\beta y\right)\right], \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

где индексы указывают порядок членов.

Таковы значения скоростей, если пренебречь квадратами смещений. Переходя ко второму приближению, необходимо образовать выражения для правых частей уравнений (7) и (12), которыми при определении первого приближения мы совершенно пренебрегли. Дополнительные члены, зависящие от квадратов смещения, частично не зависят от времени, а частично имеют двойную частоту и содержат $2nt$. Последние не представляют большого интереса, так что мы ограничимся непериодической частью. Допустимы и дальнейшие упрощения ввиду малой толщины заторможенного слоя по сравнению с шириной канала $2y_1$ и тем более по сравнению с длиной волны λ. Таким образом, k/β представляет малую величину, и обычно ею можно пренебречь.

Из (24) имеем

$$\nabla^2\psi_1 = \beta\sqrt{2}\cos kxe^{-\beta y}\sin\left(nt-\frac{1}{4}\pi-\beta y\right), \quad (25)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y} = k\sin kx\cos nt, \quad (26)$$

$$u_1\frac{\partial\nabla^2\psi_1}{\partial x}+v_1\frac{\partial\nabla^2\psi_1}{\partial y} = \frac{1}{2}k\beta^3\sin 2kxe^{-\beta y}\times$$
$$\times(-\cos\beta y+e^{-\beta y})+\text{члены, содержащие } 2nt, \quad (27)$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\nabla^2\psi_1 = -\frac{1}{4}k\beta^3\sin 2kxe^{-\beta y}(\sin\beta y+\cos\beta y)+$$
$$+\text{члены, содержащие } 2nt. \quad (28)$$

Следовательно, для непериодической части ψ второго порядка из (12) имеем

$$\nabla^4\psi_2 = -\frac{k\beta}{4\mu}\sin 2kxe^{-\beta y}\{\sin\beta y+3\cos\beta y-2e^{-\beta y}\}. \quad (29)$$

Отождествим в этом выражении ∇^4 с $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^4$, так что

$$\psi_2 = \frac{k \sin 2kxe^{-\beta y}}{16\mu'\beta^3}\left\{\sin \beta y + 3\cos \beta y + \frac{1}{2}e^{-\beta y}\right\}; \qquad (30)$$

к этому выражению можно добавить произвольную функцию, удовлетворяющую условию $\nabla^4\psi_2 = 0$, вида

$$\psi_2 = \frac{\sin 2kx}{16\mu'\beta^3}\{A \operatorname{sh} 2k(y_1 - y) + B(y_1 - y)\operatorname{ch} 2k(y_1 - y)\}, \qquad (31)$$

или, как приближенно можно положить, если y_1 мало по сравнению с λ,

$$\psi_2 = \frac{k \sin 2kx}{16\mu'\beta^3}\{A'(y_1 - y) + B'(y_1 - y)^3\}. \qquad (32)$$

Уравнения (30) и (32) дают непериодическую часть ψ второго порядка.

Значение s во втором приближении следовало бы исследовать при помощи уравнения (7). Оно будет состоять из двух частей — первой, не зависящей от t, и второй — являющейся гармонической функцией аргумента $2nt$. При вычислении части $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, независимой от t, из

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\partial s}{\partial t} - u\frac{\partial s}{\partial x} - v\frac{\partial s}{\partial y},$$

член $\partial s/\partial t$ нам не дает ничего. В остальных членах правой части достаточно будет использовать значения u, v, s из первого приближения. Из

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$$

в комбинации с (26) мы получаем

$$s = -\frac{u_0}{a}\sin kx \sin nt,$$

откуда

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial(\beta y)^2} = \frac{ku_0^2}{2a\beta^2}\cos^2 kxe^{-\beta y}\sin \beta y.$$

Отсюда легко видеть, что часть u_2, обусловленная $\partial\varphi/\partial x$ в (3), имеет порядок k^2/β^2 по сравнению с частью (33), обусловленную ψ_2, и может быть опущена. Следовательно, в силу (30), введя значение β и (для восстановления однородности) u_0^2, получим

$$u_2 = -\frac{u_0^2 \sin 2kxe^{-\beta y}}{8a}\{4\sin \beta y + 2\cos \beta y + e^{-\beta y}\}, \qquad (33)$$

$$v_2 = -\frac{2ku_0^2 \cos 2kxe^{-\beta y}}{8\beta a}\left\{\sin \beta y + 3\cos \beta y + \frac{1}{2}e^{-\beta y}\right\}, \qquad (34)$$

а из (32)

$$u_2 = -\frac{u_0^2 \sin 2kx}{8\beta a}\{A' + 3B'(y_1 - y)^2\}, \tag{35}$$

$$v_2 = -\frac{2ku_0^2 \cos 2kx}{8\beta a}\{A'(y_1 - y) + B'(y_1 - y)^3\}. \tag{36}$$

Полные значения членов второго порядка по u и v получатся путем сложения (33) с (35) и (34) с (36). Постоянные A' и B' определяются из условия, что эти значения обращаются в нуль при $y = 0$. Таким образом, мы получаем в качестве полного выражения членов второго порядка

$$u_2 = -\frac{u_0^2 \sin 2kx}{8a}\left\{e^{-\beta y}(4 \sin \beta y + 2 \cos \beta y + e^{-\beta y}) + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{2} - \frac{9}{2}\frac{(y_1 - y)^2}{y_1^2}\right\}, \tag{37}$$

$$v_2 = -\frac{2ku_0^2 \cos 2kx}{8\beta a}\left\{e^{-\beta y}\left(\sin \beta y + 3 \cos \beta y + \frac{1}{2}e^{-\beta y}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{2}\beta(y_1 - y) - \frac{3}{2}\beta\frac{(y_1 - y)^2}{y_1^2}\right. . \tag{38}$$

Вне тонкой пленки воздуха, подверженной непосредственному влиянию трения, мы можем положить $e^{-\beta y} = 0$, и тогда

$$u_2 = -\frac{3u_0^2 \sin 2kx}{16a}\left\{1 - \frac{3(y_1 - y)^2}{y_1^2}\right\}, \tag{39}$$

$$v_2 = -\frac{3u_0^2 \cdot 2k \cos 2kx}{16a}\left\{y_1 - y - \frac{(y_1 - y)^3}{y_1^2}\right\}. \tag{40}$$

Из (39) мы видим, что u_2 изменяет знак при переходе от границы $y = 0$ к плоскости симметрии $y = y_1$, причем критическое значение y равно $y_1\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, или $0{,}423\, y_1$.

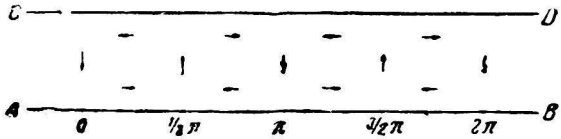
Значение u_1 из (24), соответствующее (39), есть

$$u_1 = -u_0 \cos kx \cos nt, \tag{41}$$

так что пучности соответствуют значениям $kx = 0, \pi, 2\pi, \ldots$, а узлы – значениям $kx = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$

Стационарное движение, выражаемое формулами (39) и (40), имеет очень простой характер. Оно состоит из ряда вихрей, периодичных по x с периодом $\frac{1}{2}\lambda$. Из соотношения (40) видно, что v положительно в узлах и отрицательно в пучностях, обращаясь, конечно, в нуль в обоих случаях у стенки, $y = 0$ и у плоскости симметрии $y = y_1$. На фиг. 65 AB изображает стенку, CD — плоскость

симметрии, а направление движения в вихрях показано стрелками. Следует особенно отметить, что скорость вихревого движения не зависит от μ', так что этот эффект нельзя устранить, принимая вязкость бесконечно малой. Таким путем можно, конечно, уменьшить тенденцию к вихреобразованию, но при этом одинаковом отношении облегчается сохранение вихрей, так что по достижении конечной стадии движения вихри столь же существенны при малой вязкости, как и при большой. Тот факт, что когда пренебрегают вязкостью с самого начала, то такие вихри совершенно не входят в решение, показывает, какая исключительная осторожность необходима при рассмотрении задач, относящихся к поведению слабо вязких жидкостей, соприкасающихся с твердыми телами.



Вычисляя среднее движение до второго порядка, следует рассмотреть еще один пункт, которого мы еще не касались. Значения u_1 и v_1 в выражениях (24), правда, строго периодичны, но это свойство не относится к определяемым ими движениям частиц жидкости. В нашем обозначении u является не скоростью какой-либо индивидуальной частицы жидкости, а скоростью той частицы, — независимо от ее индивидуальности, — которая в рассматриваемый момент занимает положение x, y (§ 237). Если действительное положение в момент t частицы, среднее положение которой на протяжении нескольких колебаний было (x, y), есть $x+\xi$, $y+\eta$, то действительные скорости этой частицы в момент t будут не u_1, v_1, а

$$u_1+\frac{\partial u_1}{\partial x}\xi+\frac{\partial u_1}{\partial y}\eta,\quad v_1+\frac{\partial v_1}{\partial x}\xi+\frac{\partial v_1}{\partial y}\eta,$$

и, следовательно, средняя скорость в направлении, параллельном x, не равна обязательно нулю, а равна среднему значению величины

$$\xi\frac{\partial u_1}{\partial x}+\eta\frac{\partial u_1}{\partial y}, \tag{42}$$

где опять

$$\xi=\int u_1 dt,\quad \eta=\int v_1 dt. \tag{43}$$

В нашем случае среднее значение величины (42) есть

$$-\frac{u_0^2}{4a}\sin 2kx e^{-\beta y}(e^{-\beta y}-\cos\beta y), \tag{44}$$

которое следует рассматривать как дополнение к (37). Однако, на небольшом расстоянии от стены можно пренебречь величиной (44), так что (39) остается справедливым.

Мы видели, что ширина прямого потока вдоль стенки $y=0$ равна $0{,}423y_1$, а ширина возвратного потока, измеренная до плоскости симметрии, равна $0{,}577y_1$. Отношение этих величин не изменится от введения второй половины канала, расположенной за плоскостью симметрии; таким образом, прямой поток заметно уже, чем возвратный. Эта диспропорция увеличивается в случае трубы круглого сечения. Рассматриваемый вопрос зависит в действительности только от дополнительной функции, аналогичной (32), и настолько прост, что пожалуй, стóит указать вкратце ход вычислений.

Уравнение для ψ_2 таково [1]):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-4k^2\right)^2\psi_2=0; \tag{45}$$

но если мы предположим, что радиус трубы мал по сравнению с λ, то можно опустить k^2. Общее решение имеет вид

$$\psi_2=\{A+Br^2+B'r^2\ln r+Cr^4\}\sin 2kx, \tag{46}$$

так что

$$u_2=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial r}=\{2B+B'(2\ln r+1)+4Cr^2\}\sin 2kx, \tag{47}$$

откуда $B'=0$ — из условия в точке $r=0$. Далее,

$$v_2=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial x}=-2k\{Ar^{-1}+Br+Cr^3\}\cos 2kx, \tag{48}$$

откуда $A=0$.

Поэтому мы можем положить

$$\left.\begin{aligned} u_2&=\{2B+4Cr^2\}\sin 2kx,\\ v_2&=-2k\{Br+Cr^3\}\cos 2kx.\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Если, как в выражении (40) $v_2=0$ при $r=R$, то $B+CR^2=0$, и

$$u_2=2C(2r^2-R^2)\sin 2kx. \tag{50}$$

Таким образом, u_2 равно нулю при

$$r=\frac{R}{\sqrt{2}}=0{,}707R,\quad R-r=0{,}293R.$$

Следовательно, прямой поток ограничен кольцом толщиною $0{,}293R$, а возвратный поток занимает всю внутреннюю часть и потому имеет диаметр $2.0{,}707R$, или $1{,}414R$.

---

[1]) Stokes, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, IX, 1856; Basset, *Hydrodynmics*, § 485.

ГЛАВА XX

КАПИЛЛЯРНОСТЬ

353. Темой настоящей главы является поведение невязкой несжимаемой жидкости, совершающей колебания под действием тяжести и капиллярной силы, в частности, последней. В силу первого условия, мы можем допустить наличие потенциала скоростей φ, который, в силу второго условия, должен всюду внутри жидкости удовлетворять (§ 241) уравнению

$$\nabla^2\varphi = 0. \tag{1}$$

Выраженное через φ уравнение для давления имеет вид (§ 244)

$$\frac{p}{\rho} = R - \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{2}$$

если допустить, что движение столь мало, что квадратом его можно пренебречь. Единственной приложенной силой, действующей на внутренность жидкости, которую нам приходится рассмотреть, является сила тяжести; таким образом, если z измеряется по вертикали вниз, то $R = gz$ и (2) принимает вид

$$\frac{p}{\rho} = gz - \frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь распространение волн по горизонтальной поверхности ($z = 0$) воды, или другой жидкости, постоянной глубины l, ограничивая рассмотрение двухмерным случаем, когда движение ограничено плоскостью zx. Общее решение уравнения (1) при этом условии и при условии, что смещение пропорционально e^{ikx}, есть

$$\varphi = e^{ikx}(Ae^{kz} + Be^{-kz}),$$

или, учитывая условие, что вертикальная скорость должна исчезать у дна, где $z = l$,

$$\varphi = C \operatorname{ch} k(z - l)\cdot e^{ikx}. \tag{4}$$

Если бы смещение было пропорционально также e^{int}, то, отбрасывая мнимую часть в (4), мы получили бы для волн, распространяющихся в отрицательном направлении, выражение:

$$\varphi = C \operatorname{ch} k(z - l)\cos(nt + kx), \tag{5}$$

в котором остается еще найти соотношение между n и k.

Если обозначить через h поднятие поверхности воды в точке x, а через T — капиллярную постоянную, то давление на поверхности, создаваемое капиллярностью, будет равно $-T\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$, и (3) принимает вид

$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = gh + \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

или, диференцируя по t и вспоминая, что $\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$

$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial z} = g\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \tag{6}$$

Применяя это уравнение к (5), где $z = 0$, получаем для скорости распространения выражение

$$V^2 = \frac{n^2}{k^2} = \left(\frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho}\right) \operatorname{th} kl, \tag{7}$$ [1]

где, как обычно,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{8}$$

Во многих случаях глубина жидкости достаточна, чтобы можно было положить $kl = 1$; тогда

$$V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\rho\lambda}$$ [2] (9)

определяет соотношение между U и λ. Если λ велико, то волны движутся, главным образом, под влиянием силы тяжести со скоростью, приблизительно равной $\sqrt{g\lambda/2\pi}$. С другой стороны, при малом λ влияние капиллярности становится преобладающим, и выражение для скорости принимает вид

$$V = \sqrt{\frac{2\pi T}{\rho\lambda}}. \tag{10}$$

Так как $\lambda = V\tau$, то соотношение между длиной волны и периодом, соответствующее (10), имеет вид

$$\frac{\lambda^3}{\tau^2} = \frac{2\pi T}{\rho}. \tag{11}$$

Если не обращать внимания на численный множитель, соотношения (10) и (11) можно вывести из соображений размерности, пользуясь тем, что размерность T есть сила, деленная на длину.

---

[1]) Более общая формула для скорости распространения (n/k) на поверхности раздела двух жидкостей дана в § 365 (7).

[2]) Kelvin, *Phil. Mag.*, том XLII, стр. 375, 1871.

Если мы станем исследовать, какое значение λ соответствует данному значению V, то из квадратного уравнения (9) получим

$$\lambda = \frac{\pi V^2}{g} \pm \frac{\pi}{g}\sqrt{V^4 - \frac{4Tg}{\rho}}, \qquad (12)$$

откуда видно, что ни для какой длины волны V не может быть меньше V_0, если

$$V_0 = \left(\frac{4Tg}{\rho}\right)^{1/4}. \qquad (13)$$

Значения λ и τ, соответствующие минимальной скорости, определяются соотношениями

$$\lambda_0 = 2\pi\left(\frac{T}{g\rho}\right)^{1/2}, \quad \tau_0 = 2\pi\left(\frac{T}{4g^3\rho}\right)^{1/4}. \qquad (14)$$

Если положить в единицах *CGS* $g = 981$ и принять для воды $\rho = 1$, $T = 76$, то будем иметь $V_0 = 23{,}1$, $\lambda_0 = 1{,}71$, $1/\tau = 13{,}6$.

Приводимая таблица содержит несколько соответствующих друг другу значений длины волны, скорости и частоты вблизи критической точки:

Длина волны	0,5	1,0	1,7	2,5	3,0	5,0
Скорость	31,5	24,7	23,1	23,9	24,9	29,5
Частота	63,0	24,7	13,6	9,6	8,3	5,9

Сравнение формулы Кельвина (9) с наблюдениями произвел Матиссен [1]); рябь на поверхности создавалась путем прикосновения к поверхности различных жидкостей нырков, прикрепленных к колеблющимся камертонам известной частоты. Среди испытывавшихся жидкостей были вода, ртуть, алкоголь, эфир, сероуглерод; было обнаружено удовлетворительное согласие. Наблюдения охватывали частоты до 1832 и длины волн до 0,04 *см*.

В некоторой степени аналогичные опыты были выполнены автором [2]) с целью определения T при помощи метода, независимого от какого бы то ни было предположения относительно углов соприкосновения между жидкостью и твердым телом и применимого к поверхностям, очищенным от жира до возможных пределов. Для того, чтобы волны были хорошо видимы, свет был сделан прерывистым с периодом, равным периоду волн (§ 42), а для того чтобы сделать видимыми малые отклонения от правильности плоских или сферических отражающих поверхностей, применялся метод Фуко. Из измеренных значений τ и λ можно определить T посредством (11), внеся в случае необходимости поправку на некоторое небольшое влияние силы тяжести. Таким способом были получены следующие значения: для чистой воды 74,0 *CGS*, для поверхности, загрязненной жиром до

[1]) Matthiessen, *Wied. Ann.*, том XXXVIII, стр. 118, 1889.

[2]) „On the Tension of Water Surfaces, clean and contaminated", *Phil. Mag.*, том XXX, стр. 386, 1890.

такой степени, что движения камфоры почти прекращаются, 53,0, для поверхности, насыщенной оливковым маслом, 41,0, для поверхности, насыщенной олеатом натрия, 25,0. Следует иметь в виду, что натяжение загрязненных поверхностей подвержено изменениям, зависящим от растяжения, которое уже произошло или происходит; но для целей, преследуемых в настоящем труде, нет необходимости входить дальше в рассмотрение вопроса о „поверхностной вязкости".

354. Другой метод создания капиллярных волн, или ряби (crispations), как назвал эти волны Фарадей, основывается на принципе, рассмотренном в § 68*b*. Если покрыть тонким слоем воды или другой подвижной жидкости стеклянную пластинку, которая удерживается в горизонтальном положении и приводится в колебание, как для получения хладниевых фигур, то легко наблюдать описываемые явления [1]). Над теми частями пластинки, которые совершают заметные колебания, поверхность собирается в мелкие складки, причем степень малости складок увеличивается с частотой колебаний. Такая же рябь наблюдается на поверхности жидкости в широком бокале или в рюмке, которые приводятся в колебание обычным способом путем движения мокрого пальца вдоль окружности верхнего края сосуда (§ 234). Для создания ряби существенно только, чтобы жидкость со свободной поверхностью была вынуждена совершать вертикальные колебания. При этом безразлично, возникает ли движение со дна, как в первом случае или как во втором случае, оно вызывается попеременным продвижением и отступлением боковой границы так, что ближайшая поверхность жидкости должна подниматься и опускаться для того, чтобы приспособиться к этим попеременным движениям.

Более шестидесяти лет назад природу этих колебаний с большим искусством и успехом исследовал Фарадей [2]). Простейшие условия получаются, когда колеблющаяся горизонтальная пластинка, на которой разлита жидкость, просто движется вверх и вниз без вращения. Для того чтобы достичь этого, Фарадей прикреплял пластинку к середине стеклянной полоски или елового бруска, подпертого в узлах, который он заставлял колебаться при помощи трения. Еще более удобен большой железный стержень, колебания которого поддерживаются электрически; к такому стержню пластинку можно прикрепить при помощи замазки.

Колеблющаяся жидкость на пластинке обнаруживает явления, которые на первый взгляд довольно трудно объяснить и которые значительно изменяются в зависимости от природы жидкости в отношении прозрачности и мутности и от угла падения света. Колеба-

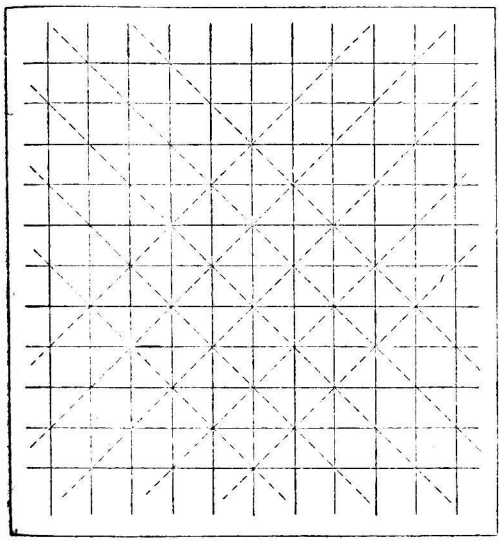
---

[1]) „On the crispations of Fluid resting upon a Vibrating Support". *Phil. Mag.*, том XVI, стр. 50, 1883.

[2]) Faraday, *Phil. Trans.*, 1831, стр. 290.

ния слишком быстры, чтобы можно было проследить за ними глазами; таким образом, наблюдаемый эффект представляет среднее, получающееся в результате наложения бесконечного числа элементарных впечатлений, соответствующих различным фазам.

Если пластинка — прямоугольная, то движение жидкости состоит из двух налагающихся рядов стоячих волн, причем гребни и впадины обоих рядов перпендикулярны друг к другу и обычно параллельны краям пластинки. Сосредоточив внимание в некоторый момент на одном ряде стоячих волн, посмотрим, каких явлений можно от него ожидать. На мгновение гребни образуют ряд параллельных и равноотстоящих линий с интервалом λ между ними. Посредине между ними расположены линии, представляющие в данный момент положение впадин. По истечении четверти периода поверхность — гладка; еще через $^1/_4$ периода гребни и впадины снова достигают максимального развития, но они взаимно обменялись местами. Поскольку наблюдается только средний эффект, ясно, что нельзя заметить никакого различия между гребнями и впадинами и что наблюдаемый эффект должен быть периодическим в пространстве, повторяясь через отрезки, равные $\frac{1}{2}\lambda$. Если жидкость на пластинке несколько замутить путем добавления анилиновой голубой краски и рассматривать ее в проходящем рассеянном свете, то линии гребней и впадин будут казаться более светлыми по сравнению с промежуточными узловыми линиями, где нормальная глубина сохраняется в течение всего времени колебаний. Выигрыш в свете в момент, когда толщина мала, будет, в соответствии с законом поглощения, перевешивать потерю света, происходящую через полупериода, когда впадина заменяется гребнем.



Фиг. 66.

В действительности, явление более сложно вследствие существования двух рядов гребней и впадин в перпендикулярных направлениях (x, y). На приложенной фиг. 66 толстые линии изображают гребни, а тонкие — впадины обеих систем в момент наибольшего смещения. Через четверть периода поверхность оказывается гладкой,

а еще через полпериода гребни и впадины обмениваются местами. Местами наибольших поднятий и опусканий являются пересечения толстых линий друг с другом и пересечения тонких линий друг с другом; эти места неразличимы простым глазом. Они представляются как бы ямками в слое краски. Узловые линии, где нормальная глубина цвета сохраняется в продолжение всего времени колебаний, изображены пунктиром; они проходят через пересечения тонких линий с толстыми и наклонены к ним под углом в 45°. Картина периодически повторяется в направлении осей x и y, причем в каждом случае с интервалом, равным действительной длине волны λ. Таким образом, расстояние между светлыми пятнами, измеренное параллельно x или y, равно λ; но кратчайшее расстояние между этими пятнами будет измеряться в направлениях, расположенных под углом в 45°, и равно $\lambda/\sqrt{2}$.

Как и во всех подобных случаях, эти стоячие волны можно соответствующим движением глаза разложить на их движущиеся компоненты. Рассмотрим, например, простой цуг волн, представляемых уравнением

$$2\cos kx\cos nt = \cos(nt + kx) + \cos(nt - kx).$$

Такое уравнение получается относительно начала, неподвижного в пространстве. Но отнесем явление к началу координат, движущемуся вперед со скоростью n/k так, чтобы получить впечатление, которое было бы создано в глазе или в фотографическом аппарате, продвигаемом вперед таким же образом. Подставляя $kx' + nt$ вместо kx, мы получаем

$$\cos(kx' + 2nt) + \cos kx'.$$

Средний эффект первого члена не зависит от x', так что то, что мы видим, есть просто последовательность бегущих волн, которая движется вместе с глазом.

Для того чтобы видеть бегущие волны, нет необходимости двигать всей головой, но нужно только поворачивать глаза как в том случае, когда мы следим за движением реального объекта. Сделать это (просто глазом) с первого раза не очень легко, в особенности, если площадь пластинки сравнительно мала. Но двигая какой-нибудь указатель с переменной быстротой, пока не будет найдена правильная скорость, и заставляя глаз следить за движением, можно приучить его двигаться так, как необходимо; а после нескольких успешных попыток повторение становится легким.

Утверждение Фарадея, что волны имеют период, вдвое больший, чем период подставки, было оспорено, но его можно проверить различными путями. Наблюдение при помощи стробоскопических методов, пожалуй, наиболее удовлетворительно. Сила колебаний и малая глубина жидкости препятствуют точному вычислению частоты на

основе наблюденной длины волны. Теория колебаний в частоте субоктавы уже была рассмотрена (§ 68).

355. Типичные стоячие волны образуются при наложении одинаковых бегущих положительных и отрицательных волн равной частоты. Если один цуг волн образуется из другого путем отражения, то равенство частот достигается автоматически; но если оба ряда волн происходят от различных источников, получение унисона требует специального приспособления, и возникает вопрос о влиянии незначительной ошибки. В качестве выражения, определяющего оба цуга распространяющихся волн одинаковой амплитуды и приближенно равной частоты, можно принять

$$\cos(kx - nt) + \cos(k'x + n't),$$

или, что то же самое,

$$2\cos\left\{\frac{1}{2}(k+k')x + \frac{1}{2}(n'-n)t\right\}\cdot\cos\left\{\frac{1}{2}(k'-k)x + \frac{1}{2}(n'+n)t\right\}. \qquad (1)$$

Если $n' = n$, $k' = k$, то волны абсолютно неподвижны; но теперь нам нужно истолковать выражение (1) для случая, когда $(n'-n)$, $(k'-k)$ просто малы.

Положение гребней и впадин почти стоячих волн в некоторый момент времени t определяется выражением

$$\frac{1}{2}(k+k')x + \frac{1}{2}(n'-n)t = m\pi, \qquad (2)$$

где m — целое число. Следовательно, скорость перемещения U равна

$$U = \frac{n-n'}{k+k'},$$

или приближенно

$$U = \frac{n-n'}{2k}\ ^{1}), \qquad (3)$$

откуда видно, что во всех случаях смещение происходит в направлении распространения волн более высокой частоты, или в направлении источника более низкой частоты. Если V — скорость (n/k) бегущих волн, то (3) можно переписать в виде

$$\frac{U}{V} = \frac{n-n'}{2n}. \qquad (4)$$

Медленное перемещение мест максимального смещения при таких обстоятельствах представляет общее явление, не зависящее от особенностей того или иного частного вида волн; но наиболее поразительным

[1]) *Phil. Mag.*, том XVI, стр. 57, 1883.

является пример капиллярных волн, описанный Лиссажу [1]). В его эксперименте два настроенных почти в унисон камертона касаются поверхности воды так, что создают приближенно стоячие волны в области между точками соприкосновения. Так как гребни и впадины неразличимы, то видимая картина состоит из волн, имеющих кажущуюся длину волны, вдвое меньшую действительной, и вся картина медленно смещается по направлению к более низкому камертону. Частота около 50 будет подходящей для удобного наблюдения.

Если волны — воздушные, то нет разницы скоростей; однако, уравнение (4) все же хорошо удовлетворяется и определяет быстроту, с которой должно перемещаться ухо, чтобы все время оставаться в пучности или в узле.

356. Одна из лучших возможностей для исследования капиллярных волн представляется в том случае, когда эти волны приводятся к покою путем встречного движения воды. Волны этого рода иногда описываются как стоячие волны, и обычно их можно наблюдать, когда равномерное движение потока возмущается препятствиями. Так, если касаться поверхности небольшим стержнем, или лёской, или смещать жидкость на поверхности прикосновением слабой воздушной струи, вытекающей из небольшого отверстия, то часто развертывается красивая картина, неподвижная относительно препятствия. Она была описана и изображена Скотт Рёсселем [2]), который отметил, что для интенсивности явления и области, захватываемой им, имеет большое значение чистота воды. Вверх по потоку от препятствия длина волны мала и, как впервые было ясно показано Кельвином, сила, управляющая колебаниями, есть, главным образом, сила сцепления. Вниз по потоку волны длиннее и управляются, главным образом, силой тяжести. Оба цуга волн движутся относительно воды с одной и той же скоростью (§ 353), именно с той скоростью, которая необходима для того, чтобы они могли оставаться в неподвижном состоянии относительно препятствия. То же условие определяет скорость, а тем самым и длину волны, в той части картины, где волновые фронты наклонны к направлению движения. Если обозначить угол между этим направлением и нормалью к волновому фронту через θ, то скорость распространения должна быть равна $v_0 \cos\theta$, где v_0 обозначает скорость воды.

Если v_0 меньше 23 *см* в секунду, то невозможна никакая волновая картина, так как никакие волны при этом не могут двигаться вдоль поверхности настолько медленно, чтобы сохранять неподвижное положение относительно препятствия. Когда v_0 превосходит 23 *см* в секунду, то образуется волновая картина; но угол θ имеет предел, определяемый соотношением $v_0 \cos\theta = 23$, и искривленный волновой фронт имеет соответствующую асимптоту.

---

[1]) Lissajous, *Compt. Rend.*, том XVII, стр. 1187, 1868.

[2]) Scott Russel, *Brit. Ass. Rep.*, 1844, стр. 375, в таблице 57. См. также Poncelet, *Ann. d. Chim.*, том XLVI, стр. 5, 1831.

Дальнейшее рассмотрение вопроса здесь завело бы нас слишком далеко; однако, можно упомянуть, что эта задача для двух измерений допускает аналитический подход [1]) и что решение удовлетворительно объясняет одну из специфических черт явления, а именно, ограничение меньших (капиллярных) волн частью поверхности, расположенной вверх по потоку по отношению к препятствию, а больших волн (гравитационных) — частью, расположенной вниз по потоку от препятствия.

357. Широкий класс явлений, не только интересных самих по себе, но и проливающих свет на другие, еще более темные явления, получает объяснение в связи с изменениями, которые претерпевает цилиндрическое жидкое тело, будучи медленно смещено из положения равновесия и затем отпущено. Такой цилиндр образуется при истечении жидкости под давлением сквозь круглое отверстие по крайней мере в случае, когда можно пренебречь силой тяжести; при этом поведение струи, изученное экспериментально Саваром, Магнусом, Плато и другими, практически независимо от общего движения вперед всех частей ее.

Во избежание повторений и для того, чтобы вести изложение в соответствии с общим характером настоящего труда, мы начнем исследование с теории бесконечного жидкого цилиндра, рассматриваемого как система, находящаяся в равновесии под действием силы капиллярности. Большинство экспериментальных результатов легко будет связать с решением этой механической задачи.

В цилиндрических координатах z, r, φ уравнение слегка возмущенной поверхности можно написать в виде

$$r = a_0 + f(\varphi, z), \tag{1}$$

где $f(\varphi, z)$ — всегда малая величина. По теореме Фурье произвольная функция f может быть разложена в ряд, состоящий из членов вида $\alpha_n \cos n\varphi \cos kz$; и, как мы увидим из дальнейшего исследования, каждый из этих членов можно рассматривать независимо от других. Каждый косинус можно заменить синусом; суммирование распространяется на все положительные значения k и на все целые положительные значения n, включая нуль.

Величина a_0 не остается абсолютно постоянной во время движения; ее значение должно определяться условием неизменности заключенного в цилиндре *объема*. Для поверхности

$$r = a_0 + \alpha_n \cos n\varphi \cos kz \tag{2}$$

находим

$$\text{объем} = \frac{1}{2}\int\int r^2 d\varphi\, dz = z\left(\pi a_0^2 + \frac{1}{4}\pi\alpha_n^2\right);$$

[1]) „On the form of Standing Waves on the Surface of Running Water", *Proc. Lond. Math. Soc.*, том XV, стр. 69, 1883.

таким образом, если обозначить через a радиус сечения невозмущенного цилиндра, то

$$a^2 = a_0^2 + \frac{1}{4}\alpha_n^2,$$

откуда приближенно

$$a_0 = a\left(1 - \frac{1}{8}\frac{\alpha_n^2}{a^2}\right). \tag{3}$$

Это соотношение хорошо удовлетворяется при $n = 1, 2, 3, \ldots$ При $n = 0$ формула (2) дает вместо (3)

$$a_0 = a\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\alpha_0^2}{a^2}\right). \tag{4}$$

Потенциальная энергия системы в любой конфигурации, создаваемая силой капиллярности, просто пропорциональна поверхности. В выражении (2)

$$\text{поверхность} = \int\int \left\{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right\}^{1/2} r\, d\varphi\, dz =$$
$$= z\left\{2\pi a_0 + \frac{1}{4}\pi k^2 \alpha_n^2 a + \frac{1}{4}\pi n^2 \frac{\alpha_n^2}{a}\right\},$$

так что, в силу (3), обозначая через σ поверхность, соответствующую в среднем единице длины,

$$\sigma = 2\pi a + \frac{1}{4}\pi (k^2a^2 + n^2 - 1)\frac{\alpha_n^2}{a}. \tag{5}$$

Следовательно, потенциальная энергия, связанная с силой капиллярности, определенная на единицу длины из равновесной конфигурации, есть

$$P = \frac{1}{4}\pi T (k^2a^2 + n^2 - 1)\frac{\alpha_n^2}{a}, \tag{6}$$

где T, как обычно, обозначает поверхностное натяжение.

В выражении (6) предполагается, что ни k, ни n не равны нулю. Если $k = 0$, то нужно удвоить (6), чтобы получить потенциальную энергию, соответствующую

$$r = a_0 + \alpha_n \cos n\varphi, \tag{7}$$

а если $n = 0$, то нужно положить

$$P = \frac{1}{2}\pi T (k^2a^2 - 1)\frac{\alpha_0^2}{a} \tag{8}$$

в соответствии с

$$r = a_0 + \alpha_0 \cos kz. \tag{9}$$

Из соотношения (6) следует, что когда n равно единице, или какому-нибудь большему целому числу, то P имеет положительное значение, что показывает, что при всех смещениях такого рода началь-

ное положение равновесия является устойчивым. Для случая смещений, симметричных относительно оси $n=0$, из (8) мы видим, что равновесие устойчиво или неустойчиво в зависимости от того, будет ли ka больше или меньше единицы, т. е. в зависимости от того, будет ли длина волны $(2\pi/k)$ симметрической деформации меньше или больше окружности цилиндра, — положение, впервые установленное Плато.

Если выражение (2) для r содержит несколько членов с различными значениями n и k и с произвольной заменой косинусов на синусы, то соответствующее выражение для P находится путем простого сложения выражений, соответствующих отдельным компонентам, и содержит только квадраты величины a (но не произведения их).

Нам нужно теперь рассмотреть кинетическую энергию движения. Поскольку жидкость предполагается невязкой, существует потенциал скоростей ψ, который удовлетворяет уравнению Лапласа в силу несжимаемости жидкости. Так, (4) § 241,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0,$$

или, если для получения соответствия с (2) мы предположим, что переменная часть пропорциональна $\cos n\varphi\cos kz$, то

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\left(\frac{n^2}{r^2}+k^2\right)\psi=0. \tag{10}$$

Решение уравнения (10) при условии, что нет притока и оттока жидкости вдоль оси симметрии, имеет вид (§ 200)

$$\psi=\beta_n J_n(ikr)\cos n\varphi\cos kz. \tag{11}$$

Постоянную β_n следует определить из условия, что радиальная скорость при $r=a$ совпадает со скоростью, предполагаемой в выражении (2). Таким образом,

$$ik\beta_n J_n'(ika)=\frac{\partial\alpha_n}{\partial t}. \tag{12}$$

Если плотность есть ρ, то кинетическая энергия движения, в силу теоремы Грина (2) § 242, равна

$$\frac{1}{2}\rho\int\int\left[\psi\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]_{r=a}a\,d\varphi\,dz=\frac{1}{4}\pi\rho z\cdot ika\cdot J_n(ika)\,J_n'(ika)\cdot\beta_n^2;$$

так что, если обозначить через K кинетическую энергию на единицу длины, то, в силу (12),

$$K=\frac{1}{4}\pi\rho a^2\,\frac{J_n(ika)}{ika\cdot J_n'(ika)}\left(\frac{\partial\alpha_n}{\partial t}\right)^2. \tag{13}$$

При $n=0$ вместо (13) следует принять

$$K=\frac{1}{2}\pi\rho a^2\,\frac{J_0(ika)}{ika\cdot J_0'(ika)}\left(\frac{\partial\dot{\alpha}_0}{\partial t}\right)^2. \tag{14}$$

Наиболее общее значение K получается из частных значений, определяемых выражениями (13) и (14), простым сложением. Поскольку выражения для P и K содержат только квадраты, а не произведения величин α, $\partial\alpha/\partial t$ и соответствующие величины, в которых косинусы заменены синусами, то отсюда следует, что движения, выражаемые соотношением (2), происходят совершенно независимо друг от друга, пока смещение в целом мало.

Для свободного движения получаем методом Лагранжа из (6) и (13)

$$\frac{\partial^2\alpha_n}{\partial t^2} + \frac{T}{\rho a^3}\frac{ika\cdot J_n'(ika)}{J_n(ika)}(n^2+k^2a^2-1)\,\alpha_n = 0, \tag{15}$$

что без всяких изменений применимо и к случаю $n=0$. Таким образом, если α_n изменяется пропорционально $\cos(pt-\varepsilon)$, то

$$p^2 = \frac{T}{\rho a^3}\frac{ika\cdot J_n'(ika)}{J_n(ika)}(n^2+k^2a^2-1)\ ^{1}) \tag{16}$$

определяет частоту колебаний в случаях устойчивости.

Если $n=0$, а $ka<1$, то решение меняет свой вид. Если предположить, что α_0 изменяется пропорционально $e^{\pm qt}$, то

$$q^2 = \frac{T}{\rho a^3}\frac{ika\cdot J_0'(ika)}{J_0(ika)}(1-k^2a^2). \tag{17}$$

Когда n больше единицы, то условия обычно таковы, что движение приближенно происходит только в двух измерениях. Тогда мы можем с успехом предположить в (16), что ka мало. Таким путем получим [(5) § 200]

$$p^2 = n(n^2-1+k^2a^2)\frac{T}{\rho a^3}\left[1+\frac{k^2a^2}{n(2n+2)}\right], \tag{18}$$

или, если совершенно пренебречь ka, то получим двухмерную формулу:

$$p^2 = (n^3-n)\frac{T}{\rho a^3}. \tag{19}$$

При $n=1$ нет восстанавливающей силы при чисто двухмерном смещении. Если обозначить через λ длину волны, измеренную по окружности, то $\lambda = 2\pi a/n$. Таким образом, в (19), при бесконечных n и a,

$$p^2 = \frac{T}{\rho}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^3 \tag{20}$$

в согласии с теорией капиллярных волн на плоской поверхности. Сравните с (7) § 353.

Аналогичное заключение можно вывести, рассматривая волны, длина которых измеряется по оси. Так, если $\lambda = 2\pi/k$ и $a=\infty$,

---

[1]) *Proc. Roy. Soc.*, том XXIX, стр. 94, 1879.

$n=0$, то (16) приводится к (20) в силу соотношения (§§ 302, 350)

$$\lim_{z=\infty}\frac{iJ_0'(iz)}{J_0(iz)}=1.$$

358. Много лет назад Бидон (Bidone) экспериментально исследовал поведение водяных струй, вытекающих под большим давлением горизонтально из отверстий в тонких пластинках. Если отверстие — круглое, то сечение струи, хотя и уменьшается по площади, но сохраняет круговую форму. Но если отверстие не круглое, то происходят любопытные трансформации. Особенности отверстия усиливаются в струе, но в обращенном виде. Так, в случае эллиптического отверстия с горизонтальной большой осью сечения струи с увеличением расстояния от отверстия постепенно теряют эллиптическую форму, пока, наконец, на известном расстоянии, не принимают круговую форму. Еще дальше от отверстия сечения снова принимают форму эллипса, но уже с вертикально расположенной большой осью, эллиптичность (в условиях, при которых производились эксперименты Бидона) усиливается, пока в конце концов струя не превращается в плоский слой, расположенный в вертикальной плоскости — очень широкий и тонкий. Этот слой сохраняет непрерывность на значительном расстоянии (например, шесть футов) от отверстия и, наконец, в него проникает воздух. Если отверстие имеет форму равностороннего треугольника, то струя расслаивается на три слоя, симметрично расположенных вокруг оси, причем так, что плоскости слоев перпендикулярны к сторонам отверстия; подобным же образом, если отверстие представляет собой правильный многоугольник с любым числом сторон, то образуется соответствующее число слоев, перпендикулярных к сторонам многоугольника.

Бидон объясняет образование этих слоев, пользуясь более простыми случаями встречи потоков. Так, одинаковые струи, движущиеся вдоль одной и той же прямой с равными и противоположно направленными скоростями, сплющиваются в диск, расположенный в перпендикулярной плоскости. Если оси струй пересекаются под углом, то образуется симметричный слой в плоскости, перпендикулярной плоскости встречных струй. Поведение тех частей струи, которые истекают из внешних частей одного и того же несимметричного отверстия, рассматривается им как в некотором отношении аналогичное поведение независимых пересекающихся струй.

Во многих случаях, в особенности при малых отверстиях и больших давлениях, расширение слоев достигает предела. Сечения струи на еще бо́льших расстояниях от отверстия обнаруживают постепенное слияние слоев, пока струя снова не принимает компактной формы, похожей на форму струи в месте первого сжатия. За этой точкой, если струя сохраняет когерентность, слои постепенно вновь выступают, но в направлениях, делящих пополам углы между направлениями

прежних слоев. Эти слои в свою очередь могут достигнуть предела развития, снова сжаться и т. д. Магнус тщательно изучил и изобразил те формы, которые принимает струя в случаях отверстий различной формы, включая прямоугольник, равносторонний треугольник и квадрат. Явления этого рода встречаются на каждом шагу; их можно обычно наблюдать, когда жидкость выливается через край сосуда, расположенного на небольшой высоте.

Как предположили впервые Магнус [1]) и Буфф [2]), причину сжатия слоев после их первоначального развития следует искать в капиллярной силе, благодаря которой жидкость ведет себя так, как будто бы она заключена в оболочку с постоянным натяжением; а повторяющаяся форма струи создается *колебаниями* столба жидкости около круговой равновесной конфигурации, налагающимися на общее движение текущей жидкости. Так как фаза колебания, начавшегося при прохождении жидкости сквозь отверстие, зависит от протекшего времени, она будет всегда одной и той же в данной точке пространства; таким образом, движение *стационарно* в гидродинамическом смысле, и граница струи представляет собой неизменяющуюся поверхность. По отношению к жидкости рассмотренные здесь волны движутся и представляют собой такие же волны, как волны, получающиеся при сложении двух систем стоячих волн; они движутся вверх по течению со скоростью, равной скорости движения воды, так что сохраняют неподвижное положение относительно внешних предметов, § 356.

Если отклонение от круговой формы мало, то колебания таковы же, как и рассмотренные в § 357, частота которых определяется уравнениями (16), (18), (19). Расстояние между последовательными соответственными точками повторяющейся фигуры, или, как можно его назвать, длина волны конфигурации, равно пути, пройденному потоком за время одного колебания. Отсюда следует соотношение между длиной волны и периодом. Если окружность струи мала по сравнению с длиной волны, так что уравнение (19) § 357 применимо, то период не зависит от длины волны; тогда длина волны прямо пропорциональна скорости струи или квадратному корню из давления. Бидон и Магнус заметили увеличение длины волны с возрастанием давления, но они не пришли ни к какому определенному закону.

В опытах автора [3]) с эллиптическим, треугольным и квадратным отверстиями струю заставляли истекать горизонтально, чтобы избежать усложнений, создаваемых тяжестью; и если давление не было слишком велико, установленный выше закон, как оказалось, подтверждается. При более высоких давлениях наблюдаемые длины волн имеют заметную тенденцию возрастать быстрее скорости струи. Этот результат

[1]) Magnus, „Hydraulische Untersuchungen", *Pogg. Ann.*, том XCV, стр. 1, 1855.

[2]) Buff, *Pogg. Ann.*, том C, стр. 168, 1857.

[3]) *Proc. Roy. Soc.*, том XX X, стр. 71, 1879.

указывает на отклонение от закона изохронности колебания. Строгого изохронизма следует ожидать только, если колебания бесконечно малы, т. е. если сечение струи никогда не отклоняется более, чем на бесконечно малую величину от круговой формы. При указанных высоких давлениях отклонения от круговой формы были весьма значительны, и нет никаких оснований ожидать, что такие колебания будут происходить точно в такое же время, как и колебания с бесконечно малой амплитудой.

Увеличение амплитуды при высоком давлении легко объяснить, поскольку боковые скорости, вследствие которых главным образом возникают колебания, изменяются прямо пропорционально продольной скорости струи. Следовательно, амплитуда изменяется приблизительно пропорционально квадратному корню из давления или пропорционально длине волны. В общем период колебания является четной функцией амплитуды (§ 67); таким образом, если обозначить через h высоту напора жидкости, то можно ожидать, что длина волны будет функцией от h вида $(M+Nh)\sqrt{h}$, где M и N — постоянные для данного отверстия. Опыт показывает, что N здесь положительно, чего, пожалуй, следовало ожидать.

Для сравнения с теорией необходимо держаться в рамках закона изохронизма; удобно пользоваться при вычислениях площадью сечения струи вместо среднего радиуса. Так, если $A=\pi a^2$, то (19) § 357 можно написать в виде

$$p=\pi^{3/4}T^{1/2}\rho^{-1/2}A^{-3/4}\sqrt{n^3-n}, \qquad (1)$$

где A должно быть определено экспериментально по скорости полного потока. Для воды (§ 353) мы можем принять в единицах CGS $T=74$, $\rho=1$; таким образом, для частоты наиболее низкого колебания ($n=2$), получаем из (1)

$$\frac{p}{2\pi}=7{,}91A^{-3/4}. \qquad (2)$$

Для площади сечения в 1 $см^2$ получаем, таким образом, около 8 колебаний в секунду. Высота в 256 колебаний соответствовала бы диаметру приблизительно в 1 миллиметр.

Вообще для значения n имеем:

$$\frac{p}{2\pi}=3{,}23A^{-3/4}\sqrt{n^3-n}. \qquad (3)$$

Если h — высота напора воды, в результате которого струя получает свою скорость, а λ — длина волны, то

$$\lambda=\frac{\sqrt{2gh}\cdot A^{3/4}}{3{,}23\sqrt{n^3-n}}. \qquad (4)$$

В одном опыте с эллиптическим отверстием ($n=2$) наблюденное значение λ было 3,95, а вычисленное по формуле (4) значение

равно 3,93. В случае треугольного отверстия ($n=3$) наблюденное значение λ было 2,3, а вычисленное равнялось 2,1. Далее, наблюденное значение для квадратного отверстия ($n=4$) было 1,85, а вычисленное 1,78. Превышение наблюденных значений над вычисленными в последних двух случаях объясняется, вероятно, слишком сильным отклонением от круговой формы.

Общая теория, не ограничивающаяся малыми амплитудами, была бы, несомненно, чрезвычайно сложной; однако, некоторые черты этой теории можно легко получить, пользуясь методом размерностей. Если *форма* отверстия дана, то λ можно рассматривать как функцию от T, ρ, A и H — давления, под которым струя вытекает. Из этих величин T есть сила, деленная на длину, так что ее размерность равна 1 по массе, 0 по длине, -2 по времени; ρ имеет размерность 1 по массе, -3 по длине, 0 по времени; A имеет размерность 0 по массе, 2 по длине, 0 по времени; и, наконец, H имеет размерность 1 по массе, -1 по длине, -2 по времени. Если положить

$$\lambda \sim T^x \rho^y A^z H^u,$$

то

$$x+y+u=0, \quad -3y+2z-u=1, \quad -2x-2u=0,$$

откуда

$$u=-x, \quad y=0, \quad z=\frac{1}{2}(1-x),$$

так что

$$\lambda \sim A^{1/2}(TA^{-1/2}H^{-1})^x.$$

Показатель x здесь неопределенный; а так как одновременно может встретиться любое число членов с различными значениями x, то самое большее, что мы можем заключить, — это то, что λ имеет вид

$$\lambda = A^{1/2} \cdot f(TA^{-1/2}H^{-1}),$$

или, если мы предпочтем иную форму,

$$\lambda = T^{-1/2}H^{1/2}A^{3/4} \cdot F(HA^{1/2}T^{-1}), \tag{5}$$

где f и F — символы произвольных функций. Таким образом, для данной жидкости и данной формы отверстия имеет место полное динамическое подобие, если взять давление обратно пропорциональным линейным размерам. Простой случай, рассмотренный выше, когда отклонение от круговой формы мало и колебания происходят приближенно в двух измерениях, соответствует $F=\text{const}$.

Метод определения T путем наблюдений над λ едва ли достаточно точен, чтобы соперничать с другими методами, которые можно применить для той же цели при постоянном натяжении. Однако, возможность такого экспериментирования над поверхностями, образовавшимися лишь за какие-нибудь доли секунды до этого, представляет значительный интерес. Таким путем можно очень легко доказать, что

натяжение мыльного раствора непосредственно после образования свободной поверхности сравнительно мало отличается от натяжения поверхности чистой воды, между тем как после истечения всего нескольких секунд разница становится очень большой [1]).

До сих пор ради простоты предполагалось, что струя после истечения из отверстия освобождается от действия тяжести. Если направить струю вертикально вниз, как часто бывает удобно, то скорость потока (v) непрерывно увеличивается, между тем как площадь сечения одновременно уменьшается, причем между ними существует соотношение $vA = \text{const}$. Однако, что касается λ, то возмущение, которое таким образом получается, меньше, чем можно было ожидать, так как изменения v и A в значительной степени компенсируют друг друга. В силу (1)

$$\lambda \sim \frac{v}{p} \sim v^{1/4} \sim h^{1/8},$$

где через h обозначена полная разность уровней между поверхностью жидкости в сосуде и местом, где измеряется λ.

359. В § 358 движение жидкости рассматривалось как стационарное: предполагалось, что каждая порция жидкости при прохождении через отверстие подвергается одинаковому воздействию. При этих обстоятельствах в математических выражениях не может появиться член, соответствующий $n = 0$; не следует, однако, забывать, что для некоторых возмущений такого типа цилиндрическая форма неустойчива, и потому струя не может долго сохраняться целой. Малые возмущения, достаточные для того, чтобы неустойчивость проявилась, таковы, что они действуют различно в различные моменты; они происходят в результате вихревого движения жидкости, создаваемого трением, и особенно в результате колебания, сообщаемого отверстию, такого характера, что оно заставляет скорость истечения периодически слегка изменяться. Если v — скорость струи, а τ — период колебания, то цилиндрический столб жидкости, истекающей из кругового отверстия, подвергается возмущению с длиной волны λ, равной $v\tau$. Если эта длина волны превосходит длину окружности отверстия $2\pi a$, то возмущение нарастает экспоненциально, пока, наконец, столб жидкости не разбивается на отдельные массы, разделенные одинаковыми промежутками λ и проходящими через фиксированные точки со скоростью v и частотой $1/\tau$. Хотя никакое правильное колебание не имеет доступа к отверстию, все же неустойчивость не может прекратиться, и случайные возмущения сложного характера будут приводить к разбиению струи. Удобно исследовать в первую очередь несколько детальнее теорию для случая, когда $n = 0$ в выражениях (16) и (17) § 357, а затем рассмотреть ее применение к удивительным явлениям, описанным Саваром и в значительной степени объясненным Плато.

---

[1]) „On the Tension of Recently Formed Liquid Surfaces", *Proc. Roy. Soc.*, том XLVII, стр. 281, 1890.

Если $ka = z$ и если ввести обозначения, принятые в § 221*a*, то уравнение (17) § 357 примет вид

$$q^2 = \frac{T}{\rho a^3} \frac{zI_1(z)}{I_0(z)} (1 - z^2). \tag{1}$$

В этом уравнении $I_1(z)$ и $I_0(z)$ оба положительны, так что с уменьшением z (или с увеличением λ) q впервые становится действительным при $z = 1$. В этой точке начинается неустойчивость, причем сначала степень неустойчивости бесконечно мала. Таким образом, когда z очень мало или λ очень велико, то в конце концов

$$q^2 = \frac{T}{\rho a^3} \frac{z^2}{2},$$

так что q опять мало. Для некоторого значения z, заключенного между 0 и 1, q имеет максимум, и исследование этого значения очень важно потому, что, как уже было показано в § 87, неустойчивое равновесие устраняется преимущественно таким путем.

Функция, максимум которой нужно найти, есть

$$\frac{z(1 - z^2) I_1(z)}{I_0(z)}, \tag{2}$$

или, разлагая в ряд по степеням z,

$$\frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{9}{8} z^4 + \frac{7}{2^4 \cdot 3} z^6 - \frac{25}{2^{10}} z^8 + \frac{91}{2^{11} \cdot 3 \cdot 5} z^{10} + \dots \right).$$

Для определения максимума находим путем дифференцирования

$$1 - \frac{9}{4} z^2 + \frac{7}{2^4} z^4 - \frac{100}{2^{10}} z^6 + \frac{91}{2^{11} \cdot 3} z^8 + \dots = 0.$$

Если пренебречь последними членами, то из биквадратного уравнения имеем $z^2 = 0{,}4914$. Если подставить это значение в малые члены, то уравнение примет вид

$$0{,}98928 - \frac{9}{4} z^2 + \frac{7}{16} z^4 = 0,$$

откуда

$$z^2 = 0{,}486, \quad z = 0{,}679\ ^{1}).$$

Значения выражения (2) или его квадратного корня, которому q пропорционально, можно вычислить из таблиц для I_0 и I_1, см. § 221*a*.

---

[1]) „On the Instability of Jets", *Proc. Lond. Math. Soc.*, том X, стр. 7, 1878.

Имеем:

Из этих значений находим по интерполяционной формуле Лагранжа максимум $z = 0{,}696$, соответствующий

$$\lambda = \frac{2\pi a}{z} = 4{,}51 \cdot 2a. \tag{3}$$

Следовательно, максимальная неустойчивость наступает, когда воз-

z	$[(2)]^{1/2}$	z	$[(2)]^{1/2}$	z	$[(2)]^{1/2}$	z	$[(2)]^{1/2}$
0,0	0,0000	0,3	0,2012	0,6	0,3321	0,9	0,2647
0,1	0,0703	0,4	0,2567	0,7	0,3433	1,0	0,0000
0,2	0,1382	0,5	0,3015	0,8	0,3269		

мущение имеет длину волны, равную примерно половине его длины волны в момент первого появления неустойчивости.

Принимая для воды в единицах CGS $T = 73$, $\rho = 1$, получаем в случае максимальной неустойчивости

$$q^{-1} = \frac{(2a)^{3/2}}{73^{1/2} \cdot 2^{3/2} \cdot 0{,}343} = 0{,}120(2a)^{3/2}. \tag{4}$$

В этот момент возмущение возрастает в отношения $e:1$. Так, в случае, если отверстие имеет диаметр 1 *см*, возмущение возрастает в 2,7 раза приблизительно за $^1/_8$ секунды. Если возмущение увеличивается в 1000 раз за время t, то $qt = 3 \ln 10 = 6{,}9$, так что $t = 0{,}828\,(2a)^{3/2}$. Например, если бы диаметр отверстия был равен одному миллиметру, то возмущение увеличилось бы в 1000 раз приблизительно за $^1/_{40}$ секунды. В свете этих оценок быстрое разбиение струи воды уже не представляется неожиданным.

Развитую выше теорию неустойчивости цилиндрической поверхности, отделяющей жидкость от газа, можно распространить на случай, когда жидкость находится снаружи цилиндрической поверхности, а газ, инерцией которого мы пренебрегаем, внутри ее. Этот случай представляет струя газа, выпускаемая под поверхностью жидкости; и оказывается, что уровень максимума неустойчивости даже выше, чем прежде, и что он наступает при $\lambda = 6{,}48 \cdot 2a$ [1]). Едва ли, однако, надо для нашей цели проводить дальнейшее исследование вопроса в этой части.

360. Применение наших математических результатов к действительным струям не представляет больших трудностей. Возмущения, благодаря которым равновесие нарушается, действуют на жидкость как только она оставляет отверстие, и длина непрерывной части струи представляет собой расстояние, проходимое струей за время, необходимое для того, чтобы произвести разбиение. Следовательно, длина непрерывной части необходимо зависит от характера возмуще-

[1]) „On the Instability of Cylindrical Fluid Surfaces", *Phil. Mag.*, том XXXIV, стр. 177, 1892.

ний в отношении амплитуды и длины волны. Эта длина может быть значительно увеличена, как показал Савар [1]), путем соответствующей изоляции сосуда от сотрясений, создаваемых как внешними источниками, так и прикосновением самой струи к сосуду, помещенному для приема жидкости. Однако, это удлинение, повидимому, нельзя продолжить очень далеко. Имеют ли остаточные возмущения внешнее происхождение, создаются ли они трением, или какими-нибудь другими особенностями движения жидкости внутри верхнего сосуда — не выяснено достаточно удовлетворительно. Объяснения Плато в этом пункте не очень ясны, и он иногда выражается так, как будто время, потребное для разбиения, зависит только от капиллярного натяжения, совершенно безотносительно к тому, каковы были начальные возмущения.

Савар сформулировал два закона относительно длины непрерывной части струи, которые были в известной мере объяснены Плато [2]). Для данной жидкости и данного отверстия эта длина приближенно пропорциональна квадратному корню из высоты напора. Это следует из теории непосредственно, если можно допустить, что возмущения сохраняют свой характер все время, так что время разбиения постоянно. Савар нашел, что если напор задан, то длина пропорциональна диаметру отверстия. Из выражения (4) § 359 видно, что время, в течение которого малое возмущение увеличивается в данном отношении, изменяется не пропорционально a, а пропорционально $a^{3/2}$. Далее, если переменить жидкость, то время это изменяется пропорционально $\rho^{1/2} T^{-1/2}$. Однако, можно с большим основанием усумниться в том, что длина непрерывной части струи подчиняется каким бы то ни было простым законам, даже когда внешние возмущения по возможности устранены.

Если струя падает вертикально вниз, то обстоятельства, от которых зависит ее устойчивость или неустойчивость, непрерывно изменяются, в особенности, если начальная скорость очень мала. Тип возмущения, к которому струя наиболее чувствительна по выходе из отверстия, это — возмущение, которое накладывает на струю волнообразные колебания, имеющие длину, приблизительно в $4^1/_2$ раза превышающую начальный диаметр. Но по мере падения скорость струи увеличивается, вследствие чего увеличивается длина волн колебаний, а диаметр струи уменьшается, так что степень неустойчивости скоро сильно снижается. С другой стороны, тот тип возмущения, который будет эффективным в дальнейшей стадии, совершенно не эффективен в начальной стадии. Таким образом, изменение условий во время падения имеет защитное влияние, и непрерывная часть стремится стать длиннее, чем в случае, если бы при тех же начальных возмущениях скорость была постоянной.

---

[1]) Savart, *Ann. de Chimie*, том LIII, стр. 337, 1883.

[2]) Plateau, „Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires", Paris, 1873.

Если обстоятельства таковы, что на сосуд (с водой) действуют толчки, вызываемые ударяющейся струей, то разбиение струи часто приобретает полную регулярность и сопровождается музыкальным тоном (Савар). Прикосновение правильной последовательности капель, которые ударяются в приемник жидкости, определяет разбиение на подобные же капли части струи, проходящей в этот момент сквозь отверстие. Высота тона, хотя она и не определена, не может сильно отличаться от высоты тона, соответствующей разбиению столба жидкости на части, равные длине волны максимальной неустойчивости. И действительно, Савар нашел, что частота прямо пропорциональна квадратному корню из высоты напора, обратно пропорциональна диаметру отверстия и не зависит от природы жидкости, т. е. законы, непосредственно вытекающие из теории Плато.

Из наблюденной высоты тона, вызываемого струей данного диаметра, вытекающей при данной высоте напора, можно непосредственно получить длину волны начинающегося дробления струи. Исходя из некоторых наблюдений Савара, Плато таким образом нашел значение 4,38, как отношение длины каждой части струи к ее диаметру. Но так как длину части можно определить a priori, то предпочтительнее обратить вычисления Плато и выразить частоту колебания через другие данные задачи. Так,

$$\text{частота} = \frac{v}{4{,}51 \cdot 2a}, \qquad (1)$$

и во многих случаях, когда струя не слишком тонка, можно с достаточной точностью заменить v через $\sqrt{2gh}$.

Однако, наиболее надежный метод для получения полной правильности разбиения струи это — воздействовать на сосуд внешним вибратором, частота которого приблизительно одинакова с частотой, свойственной струе. Магнус [1]) применил молоточек Нефа, прикрепленный к раме, поддерживающей сосуд. Еще лучше, пожалуй, электрически возбуждаемый камертон. Магнус показал, что наиболее существенная часть эффекта вызвана вынужденными колебаниями той стороны сосуда, в которой находится отверстие, и что только незначительная часть колебаний распространяется через воздух. Что касается пределов высоты тона, то Савар нашел, что тон может быть на квинту выше и более чем на октаву ниже, чем собственный тон струи. Теоретически нет точно определенного нижнего предела; а с другой стороны, внешние колебания не могут быть эффективными, если они стремятся создать деление на части, длина которых меньше окружности отверстия. Это дает для интервала, определяющего верхний предел, $\pi/4{,}51$, или приблизительно квинту. Для чисел, данных Плато ($\pi/4{,}38$), расхождение получается несколько большим.

361. Вопрос о влиянии колебаний низкой частоты трудно исследовать экспериментально вследствие осложнений, которые возникают

[1]) Magnus, *Pogg. Ann.*, том CVI, стр. 1, 1859.

в связи с почти неизбежным присутствием гармонических обертонов. Очевидно, что, например, октава основного тона, хотя и проявляющаяся весьма слабо, тем не менее может оказаться более важным определяющим поведение струи фактором, чем основной тон, если случайно ее частота лежит вблизи частоты максимума неустойчивости. В моих собственных опытах [1]) в качестве источников колебаний применялись камертоны, и в каждом случае поведение струи на горизонтальном участке исследовалось не только непосредственным наблюдением, но также и методом прерывистого освещения (§ 42), причем устройство было таково, что за каждый полный период можно было видеть наблюдаемое явление один раз. За исключением тех случаев, когда было важно ослабить октаву настолько, насколько это только возможно, колебание передавалось сосуду через стол, на котором стоял сосуд. Камертоны либо были привинчены к столу и приводились в колебание смычком, или возбуждались электрически; первый способ был вполне подходящим, когда требовался только один камертон. Условия истечения струи были таковы, что частота максимальной чувствительности, определяемая вычислением, была равна 259, а частота на границе перехода от устойчивости к неустойчивости 372.

При частотах, изменявшихся вниз от 370 до примерно 180, наблюдавшиеся явления были в совершенном согласии с недвусмысленными предсказаниями теории. Начиная от точки (определенно ниже 370), где впервые наблюдался правильный эффект, всегда на каждое полное колебание камертона приходилась одна капля и один поток, причем каждая капля отрывалась при тех же в точности условиях, что и предшествующая. После понижения частоты ниже 180 возникает вопрос, не может ли эффект вызываться также действием октавы тона камертона, наравне с действием основного тона. Если этот эффект достаточен, то число капель удваивается, а когда основной тон очень слаб, то наблюдается двойной поток, причем последовательные капли отрываются при различных условиях и (под влиянием силы тяжести) описывают заметно неодинаковые траектории. При этих экспериментах обычно влияния основного тона было достаточно для определения числа капель даже вблизи частоты 128. Иногда, однако, октава делалась преобладающей и удваивала число капель. Если октава недостаточно сильна, чтобы действительно удвоить число капель, она часто создает эффект, который очень хорошо заметен наблюдателю, исследующему изменения сквозь вращающиеся отверстия. В одном случае сильное возбуждение смычком камертона, благоприятствующее октаве, дало сначала двойную струю, которая, однако, через несколько секунд перешла в единую струю. Около точки разбиения струи те последовательные капли, которые в конце концов по мере затухания камертона срастаются, соединены перешейком.

[1]) *Proc. Roy. Soc.*, том XXXIV, стр. 133, 1882.

Если октава достаточно сильна, этот перешеек в дальнейшем обрывается, и капли отделяются друг от друга; в ином случае перешеек стягивает вместе наполовину оформившиеся капли, и струя становится единой. Переход от одного состояния к другому можно было легко наблюдать.

Для того чтобы полностью избавиться от влияния октавы, пришлось прибегнуть к иной установке. Было найдено, что желаемого результата можно достигнуть, если камертон с частотой 128 держать в руке над резонатором той же частоты, стоящим на столе. Изменения в этом случае были по виду вполне похожи на изменения, создаваемые камертоном с частотой 256, и единственное различие состояло в том, что капли были больше и занимали вдвое большее пространство, а шарик, получающийся в результате стягивания перешейка, был намного больше. Мы можем заключить, что причиной удвоения струи субоктавою собственной частоты струи следует считать наличие второй компоненты, от которой едва ли свободен любой музыкальный тон.

Заставляя одновременно звучать два камертона с частотами 128 и 256, можно было получать по желанию единую или двойную струю путем изменения относительной интенсивности. Всякое несовершенство настройки становилось вполне очевидным из поведения струи, которая претерпевала изменения, синхронные со слышимыми биениями. Это наблюдение, не требующее помощи стробоскопического диска, наводит на мысль, что описываемый эффект зависит в некоторой степени от соотношения фаз обоих тонов, как можно было ожидать a priori. В некоторых случаях влияние субоктавы обнаруживалось сильнее в том, что последовательные капли делались различными по величине, чем в том, что капли описывали весьма различные траектории.

Возвращаемся теперь к случаю одного камертона, привинченного к столу. Было найдено, что по мере понижения частоты ниже 128 двойная струя устанавливалась регулярно. Действие нижней дуодецимы основного тона ($85^1/_3$) требует особого рассмотрения. При этой частоте мы могли бы ожидать, что первые три компоненты сложного тона будут влиять на результат. Если бы третья компонента была достаточно интенсивной, то она определяла бы число капель, и результатом была бы тройная струя. В случае камертона, привинченного к столу, третья компонента тона, если она и не пропадает совершенно, должна быть исключительно слабой, но вторая компонента (октава) достаточно интенсивна и действительно определяет число капель ($190^2/_3$). В то же время влияние основного тона ($85^1/_3$) достаточно для того, чтобы заставить последовательные капли описывать различные траектории, так что наблюдается двойная струя.

Путем добавления камертона с частотой 256 нетрудно было получить тройную струю; однако, интереснее было исследовать, нельзя

ли свести двойную струю к одной струе с $85^1/_3$ каплями в секунду. Для того чтобы получить основной тон, возможно более интенсивный и возможно более чистый, и заставить его действовать на струю наиболее желательным образом, воздушное пространство над водой внутри сосуда (aspirator bottle) было настроено на тон камертона путем скольжения вдоль отверстия горлышка сосуда стеклянной пластинки так, что она частично закрывала горлышко (§ 305). Когда камертон удерживался над образованным таким способом резонатором, то давление, заставляющее вытекать струю, делалось переменным с частотой $85^1/_3$, и обертоны, насколько это возможно, исключались. Однако, невооруженному глазу струя все еще казалась двойной, хотя при более тщательном исследовании один ряд капель был на взгляд определенно меньше, чем другой. Пользуясь вращающимся диском, дающим около 85 просветов в секунду, можно было уяснить себе действительное положение вещей в этом случае. Меньшие капли представляли собой шарики, и струя была единой в том же смысле, что и струи, создаваемые чистыми тонами с частотами 128 и 256. Увеличение размеров шарика следует, несомненно, приписать большей длине перешейка, основные же капли в данном случае в три раза больше по объему, чем в случае, когда струя находилась под действием камертона с частотой 256.

При еще более низких камертонах, привинченных к столу, число капель продолжает соответствовать второй компоненте основного тона. Вторая октава основного тона (64) дала 128 капель в секунду, а влияние первого тона было настолько слабо, что двойственность струи была лишь едва заметна. Ниже частоты 64 наблюдения не производились, и даже при этой частоте попытки добиться единого потока капель были безуспешны.

362. Эксперименты Савара в этой области были далее развиты Бэллом, который показал, что струю можно заставить выполнять роль части телефонного приемника [1]). Внешние колебания могут сообщаться отверстию по веревочному телефону (§ 156*a*). Резиновая мембрана, натянутая на верхний конец металлической трубки, принимает струю и передает колебания, вызываемые меняющимся прикосновением, полости за мембраной, с которой можно соединить ухо. Диаметр и скорость струи должны быть приспособлены к общему характеру, то есть к частоте звуков, с которыми придется иметь дело. „Если мембрана удерживается под самым отверстием, из которого струя вытекает, то в наушнике не будет слышно никакого звука; но по мере постепенного удаления приемной трубки вниз вдоль траектории струи станет слышен звук, соответствующий по высоте и качеству возмущающему звуку — если, разумеется, струя находится под таким давлением, что она в состоянии отвечать на все высокие тоны, которым обязан своим тембром возмущающий звук. Интенсив-

[1]) Bell, *Phil. Trans.*, том 177, стр. 383, 1896.

ность этого звука возрастает по мере увеличения расстояния между отверстием и мембраной. Наконец, когда струя над мембраной еще непрерывна, достигается точка максимума интенсивности и чистоты тона; и если удерживать мембрану ниже этой точки, то слышимый звук сначала становится более громким, приобретая в то же время жесткий оттенок, а при еще более низких положениях — вырождается в немузыкальный шум. В последнем случае видно, что струя разбивается выше мембраны".

Из того факта, что небольшие струи, движущиеся с высокими скоростями, одинаково хорошо отвечают на звуки, высота которых изменяется в широких пределах, Бэлл заключает, что теория Плато недостаточна; он считает, что действительной причиной явлений, наблюдаемых в этих струях, скорее служит вихревое движение, зависящее от неодинаковости скоростей в центре и на периферии столба.

В качестве примера самовозбуждающей струи можно указать на прерыватель § 235*r*. В этом случае механизм, благодаря которому эффект возвращается обратно отверстию, — электрический. Но и обычные механические приспособления отвечают этой цели также хорошо. Введение резонатора, подобного камертону § 235*r*, или телефонной мембраны, которую можно заставить выполнять такую же роль, если привести телефон в соприкосновение с отверстием, придает бо́льшую правильность процессу и обычно также допускает больший диапазон частот. Не следует забывать, что во всех этих случаях самовозбуждения необходимо удовлетворить определенному условию в отношении фазы. Так, например, если в прерывателе § 235*r* (предполагая, что он хорошо работает) сместить платиновые точки на половину интервала между последовательными каплями, то очевидно, что действие его прекратится до тех пор, пока не будет достигнуто новое соответствие.

363. Если небольшая струя выбрасывается вверх почти вертикально, картина осложняется вследствие столкновений капель друг с другом. Такие столкновения неизбежны вследствие различия скоростей, приобретенных каплями, отрывающимися от непрерывной части столба жидкости нерегулярно. Даже если регулировать разбиение струи при помощи внешних колебаний подходящей частоты, капли все-таки должны столкнуться, прежде чем они достигнут вершины своей параболической траектории. В случае непрерывной струи, как показывает „уравнение непрерывности", по мере потери скорости на подъеме струя должна увеличиваться в сечении. Если поток состоит из капель, движущихся по одной и той же траектории вереницей одна за другой, то такое увеличение сечения невозможно, в этом случае постоянство полного потока требует постепенного сближения капель, которое при почти вертикальном направлении движения не может остановиться прежде действительного соприкосновения. Однако, правильные колебания вызывают задержку столкновений

и последующего рассеяния капель, а в случае, если направление струи менее близко к вертикальному, могут и совершенно предотвратить их.

Замечательным образом влияет на поведение почти вертикального фонтана соседство наэлектризованного тела. Можно производить эти опыты со струей, истекающей из отверстия с диаметром в 1 *мм* и поднимающейся приблизительно на 50 *см*. В нормальном состоянии струя сама распадается на капли, которые даже еще до достижения вершины, а еще больше после прохождения ее, рассеиваются на значительное пространство. Если поднести к струе слабо наэлектризованное тело, то струя подвергается замечательному изменению и становится на взгляд цельной; однако, под более сильным электрическим воздействием рассеяние становится даже бо́льшим, чем вначале. Второй эффект легко приписать взаимному отталкиванию наэлектризованных капель, действие же слабого электричества, создающего видимую цельность, основано на другом принципе.

Бетц [1]) показал, что цельность эта — только кажущаяся и что то место, где струя разбивается на капли, не смещается заметно электрическим воздействием. Экранируя различные части металлическими пластинками, соединенными с землей, Бетц доказал далее, что, вопреки мнению прежних наблюдателей, чувствительность сосредоточена не в основании струи, там где она покидает отверстие, а там, где она распадается на капли. Так же, как в аппарате с падающими каплями лорда Кельвина,—для исследования атмосферного электричества (капельный коллектор. *Прим. пер.*), капли уносят с собой электрический заряд, который можно собрать, принимая капли в изолированный сосуд.

Можно доказать путем мгновенного освещения, что обычное рассеяние капель вызывается отскакиванием их друг от друга при столкновениях. При умеренном электрическом влиянии нет существенных изменений ни в распадении на капли, ни в последующем движении капель вплоть до момента столкновения. Различие начинается здесь. Вместо отскакивания после столкновения, обычного для ненаэлектризованных капель чистой воды, наэлектризованные капли *сливаются*, и таким образом, струя более не рассеивается [2]).

Подробное обсуждение этого вопроса здесь было бы неуместно. Достаточно сказать, что этот эффект зависит от *разности* потенциалов между каплями в момент столкновения и что, когда эта разность слишком мала, чтобы вызвать слияние, то налицо полная электрическая изоляция между смежными массами.

Если струя выбрасывается вверх под небольшим углом к нормали, то рассеяние ограничивается вертикальной плоскостью. При этих обстоятельствах столкновения или вовсе отсутствуют или же их не-

---

[1]) Beetz, *Pogg. Ann.*, том CXLIV, стр. 443, 1872.

[2]) „The influence of Electricity on Colliding Water Drops", *Proc. Roy. Soc.*, том XXVIII, стр. 406, 1879.

много, поскольку капли имеют достаточное пространство для того, чтобы не касаться друг друга, и небольшое электрическое влияние не дает эффекта. При большем угле наклона капли начинают рассеиваться и вне вертикальной плоскости, что служит признаком наличия столкновений. Небольшое электрическое влияние приведет рассеяние к вертикальной плоскости, вызывая слияние капель, которые приходят в соприкосновение.

Если, как в прекрасных опытах Савара, разбиение на капли регулируется влиянием колебаний подходящей частоты, то основные капли следуют одной и той же траектории, и, если только направление выбрасывания не близко к вертикальному, то столкновения между ними отсутствуют. Однако, иногда случается, что шарики жидкости выбрасываются вбок отдельным потоком, образующим значительный угол с главным потоком. Это — результат столкновений между шариками и основными каплями. Может даже случиться, что первые отражаются вперед и назад по несколько раз, пока, наконец, не исчезают в боковом направлении. Во всех случаях поведение капель под слабым электрическим влиянием является критерием наличия столкновений.

В опыте, поставленном Магнусом [1]), шарики отклонялись от главного потока без столкновений путем электрического притяжения. Этот опыт дает то преимущество, что позволяет получать правильную последовательность капель, более мелких, чем этого возможно добиться каким-нибудь иным путем.

364. Разрозненные массы жидкости, на которые разбивается струя, не сразу принимают и удерживают сферическую форму, но испытывают ряд колебаний, попеременно сжимаясь и удлиняясь в направлении оси симметрии. Если разбиение струи осуществляется с точной периодичностью, то каждая капля, проходя через данную точку пространства, находится в одной и той же определенной фазе колебания; и отсюда возникает замечательное явление попеременных разбуханий и сжатий струи, описанное Саваром. Расстояние между двумя последовательными разбуханиями равно пути, пройденному каплей в течение одного полного колебания около фигуры равновесия, а потому, как показал Плато, скорость равна, оно пропорционально *корню квадратному* из высоты напора.

Период колебания, разумеется, является в свою очередь функцией природы жидкости (T, ρ) и величины капли, к вычислению которой мы теперь и переходим. Заметим, что достаточно соображений размерности, чтобы показать, что период (τ) бесконечно малого колебания любого типа пропорционален $\sqrt{\rho V/T}$, где V — объем капли.

В математическом исследовании малых колебаний жидкой массы около ее сферической фигуры равновесия мы ограничимся типами

[1]) Magnus, *Pogg. Ann.*, том CVI, стр. 27, 1859.

колебаний, симметричных относительно оси, чего достаточно для нашей задачи. Эти типы колебаний требуют для своего выражения только функций Лежандра P_n; более общую задачу, содержащую функции Лапласа, можно рассматривать таким же путем; она приводит к тем же результатам.

Радиус r поверхности, ограничивающей жидкость, можно в любой момент t разложить в ряд (§ 336)

$$r = a_0 + a_1 P_1(\mu) + \ldots + a_n P_n(\mu) + \ldots, \tag{1}$$

где a_1, a_2, ... — малые величины по сравнению с a_0, а μ, как обычно, выражает косинус полярного расстояния (ϑ).

Для объема V, заключенного внутри поверхности (1), мы имеем:

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{-1}^{+1} r^3 d\mu = \frac{4}{3}\pi a_0^3 \left[1 + 3\sum (2n+1)^{-1} \frac{a_n^2}{a_0^2}\right], \tag{2}$$

где суммирование начинается при $n = 1$. Так, если a радиус сферы равновесия, то

$$a = a_0 \left[1 + \sum (2n+1)^{-1} \frac{a_n^2}{a_0^2}\right]. \tag{3}$$

Потенциальная энергия капиллярности равна произведению натяжения T на поверхность S. Для вычисления S имеем:

$$S = 2\pi \int r \sin\vartheta \left\{ r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\right)^2 \right\}^{1/2} d\vartheta = 2\pi \int \left\{ r^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\right)^2 \right\} \sin\vartheta \, d\vartheta.$$

Для первой части

$$\int_{-1}^{+1} r^2 d\mu = 2a_0^2 + 2\sum (2n+1)^{-1} a_n^2.$$

Для второй части

$$\frac{1}{2}\int \left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\right)^2 \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (1-\mu^2)\left[\sum a_n \frac{\partial P_n}{\partial \mu}\right]^2 d\mu.$$

Значение выражения, стоящего в правой части, можно найти, пользуясь формулой

$$\int_{-1}^{+1} (1-\mu^2) \frac{\partial P_m}{\partial \mu} \frac{\partial P_n}{\partial \mu} d\mu = n(n+1) \int_{-1}^{+1} P_m P_n d\mu,$$

в которой m — целое число, равное n, или отличное от него. Таким

образом,

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2\sin\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(1-\mu^2)\sum a_n^2\left(\frac{\partial P_n}{\partial\mu}\right)^2 d\mu=$$

$$=\frac{1}{2}\sum n(n+1)a_n^2\int_{-1}^{+1}P_n^2\,d\mu=\sum n(n+1)(2n+1)^{-1}a_n^2.$$

Следовательно, в силу (3),

$$S=4\pi a_0^2+2\pi\sum(2n+1)^{-1}(n^2+n+2)\,a_n^2=$$
$$=4\pi a^2+2\pi\sum(n-1)(n+2)(2n+1)^{-1}a_n^2. \qquad (4)$$

Таким образом, если обозначить через T поверхностное натяжение, то соответствующая ему потенциальная энергия (P) может быть написана в виде

$$P=2\pi T\cdot\sum(n-1)(n+2)(2n+1)^{-1}a_n^2. \qquad (5)$$

Теперь нам следует подсчитать кинетическую энергию движения. Потенциал скорости ψ можно разложить в ряд

$$\psi=\beta_0+\beta_1 rP_1(\mu)+\ldots+\beta_n r^n P_n(\mu)+\ldots, \qquad (6)$$

таким образом, для кинетической энергии получаем

$$K=\frac{1}{2}\rho\int\int\psi\frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot a^2 d\varphi\,d\mu=2\pi\rho a^2\cdot\sum(2n+1)^{-1}na^{2n-1}\beta_n^2.$$

Но из сравнения значения $\partial\psi/\partial r$ из (6) и формулы (1) находим

$$na^{n-1}\beta_n=\frac{\partial a_n}{\partial t},$$

и, следовательно,

$$K=2\pi\rho a^3\cdot\sum(2n^2+n)^{-1}\left(\frac{\partial a_n}{\partial t}\right)^2. \qquad (7)$$

Так как в выражения для a_n и $\partial a_n/\partial t$ не входят произведения величин P и K за движения, выражаемые отдельными членами, происходят независимо друг от друга. Пользуясь методом Лагранжа (§ 87), находим уравнение для a_n:

$$\frac{\partial^2 a_n}{\partial t^2}+n(n-1)(n+2)\frac{T}{\rho a^3}a_n=0, \qquad (8)$$

так что, если $a_n\sim\cos(pt+\varepsilon)$, то

$$p^2=n(n-1)(n+2)\frac{T}{\rho a^3}\,^{1}). \qquad (9)$$

---

[1]) *Proc. Roy. Soc.*, том XXIX, стр. 97, 1879; Webb, *Mess. of Math.*, том IX, стр. 177, 1880.

Период равен $2\pi/p$, так что, выражая его через $V(=\frac{4}{3}\pi a^3)$, имеем

$$\tau = \frac{\sqrt{\frac{3\pi\rho V}{T}}}{\sqrt{n(n-1)(n+2)}}, \tag{10}$$

или, в частном случае, при $n=2$

$$\tau = \sqrt{\frac{3\pi\rho V}{8T}}. \tag{11}$$

Для того чтобы найти радиус водяной сферы, которая колеблется в течение секунд, полагаем в (9) $p=2\pi$, $T=74$, $\rho=1$, $n=2$. Таким образом, получаем $a=2{,}47$ *см*, или несколько меньше дюйма.

Попытка сопоставить (11) с явлениями, наблюдаемыми в струе, не привела к хорошему согласию. Поток в 19,7 *см*^{3} в секунду разрывался под действием камертона, дававшего 128 колебаний в секунду. Пренебрегая массой малых шариков, мы можем принять объем каждой основной капли равным 19,7/128 или 0,154 *см*^{3}. Отсюда, в силу (11), полагая $\rho=1$, $T=74$, имеем $\tau=0{,}0494$ сек. Таково вычисленное значение. При наблюдении колеблющейся струи расстояние между первым и вторым набуханиями, соответствующими максимальной сплющенности капель, равнялось 16,5 *см*. Уровень сжатия посредине между этими двумя набуханиями был на 36,8 *см* ниже уровня поверхности жидкости в сосуде, что соответствует скорости в 269 *см/сек*. Эти данные дают для периода колебаний

$$\tau = \frac{16{,}5}{269} = 0{,}0612 \text{ сек.}$$

Расхождение между обоими значениями τ, возможно, следует приписать слишком большой амплитуде, обусловливающей отклонение от закона изохронизма. Наблюдения над колебаниями отдельных капель, выбрасываемых по одиночке пипеткой, производились Ленардом [1]).

Тенденция капиллярной силы всегда направлена в сторону восстановления сферической фигуры равновесия. Электризуя каплю, мы можем ввести силу, действующую в противоположном направлении. Можно показать [2]), что если Q есть электрический заряд, измеренный в электростатических единицах, то формула, соответствующая (9), будет иметь вид

$$p^2 = \frac{n(n-1)}{\rho a^3}\left\{(n+2)\,T - \frac{Q^2}{4\pi a^3}\right\}. \tag{12}$$

Если $T > Q^2/16\pi a^3$, то сферическая форма устойчива для всех перемещений. Если Q велико, то сферическая форма становится не-

[1]) Lenard, *Wied. Ann.*, том XXX, стр. 209, 1887.
[2]) *Phil. Mag.*, том XIV, стр. 184, 1882.

устойчивой для всех значений n ниже некоторого предела, причем максимальная неустойчивость соответствует большому, но все еще конечному, значению n. При этих условиях жидкость разбивается на тонкие струи, тонкость которых, однако, имеет предел.

Наблюдения над разбуханиями и сжатиями регулярно разрывающейся струи можно производить стробоскопически, так чтобы один просвет соответствовал каждому полному периоду вибратора; или же можно делать фотографические снимки при помощи мгновенного освещения, даваемого мощной электрической искрой [1]).

В математических исследованиях настоящей главы вязкость совершенно не принималась во внимание. Плато придерживался того мнения, что различие между длиной волны спонтанного разделения струи ($4{,}5 \times 2a$) и критической длиной волны ($\pi \cdot 2a$) являлось следствием вязкости; но мы видели, что она достаточно учитывается *инерцией*. Введение вязкости значительно усложняет математическую задачу [2]), и здесь такой попытки не будет сделано. В результате можно показать, что в случае, когда вязкость преобладает, длинные нити не обнаруживают стремления разбиться на капли при взаимных расстояниях, сравнимых с диаметром нити, а скорее уничтожаются путем утоньшения в отдельных, далеко отстоящих, местах. Это, повидимому, находится в согласии с наблюдавшимся поведением очень вязких нитей из стекла или патоки, поддерживаемых только на концах. Разделение на многочисленные капли или узловатость, указывающую на такое разделение, можно, таким образом, считать свидетельством того, что текучесть жидкости достаточна, чтобы ввести в действие инерцию.

Еще более общее исследование, в котором рассматривается и влияние электричества, было проведено Бассетом [3]).

---

[1]) „Some Applications of Photography", *Proc. Roy. Soc. Inst.*, том XIII, стр. 261, 1891; *Nature*, том XLIV, стр. 249, 1891.

[2]) *Phil. Mag.*, том XXXIV, стр. 145, 1892.

[3]) Basset, *Amer. Journ. of Math.*, том XVI, № 1.

ГЛАВА XXI

ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ И ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЕ ПЛАМЕНА

365. Большая и важная группа акустических явлений имеет своим источником неустойчивость определенных движений жидкости, — движений того типа, который в гидродинамике классифицируется как стационарный. Движение, одинаковое в каждый момент времени, удовлетворяет динамическим условиям, и, следовательно, оно принципиально возможно; однако, малейшее отклонение от определенной таким образом идеальности имеет тенденцию самопроизвольно увеличиваться и обычно с большой быстротой — по закону сложных процентов. Примерами такой неустойчивости служат чувствительные струи и пламена, звуки эоловой арфы и трубы органа. Эти явления до сих пор еще совершенно недостаточно понимаются; однако, они столь важны, что требуют максимального внимания, которое мы можем им уделить.

До тех пор, пока мы рассматриваем жидкость как абсолютно невязкую, ничто не мешает возможности конечного скольжения на поверхности, по которой соприкасаются две массы. На такой поверхности завихренность (§ 239) бесконечна, и поверхность можно назвать вихревым слоем. Наличие вихревого слоя совместимо с динамическими условиями для стационарного движения; однако, как заметил уже давно Гельмгольц [1]), стационарное движение неустойчиво. Простейший случай имеет место, когда плоский вихревой слой разделяет две массы жидкости, движущиеся с различными скоростями, но без внутреннего относительного движения — задача, рассмотренная лордом Кельвином в его исследовании влияния ветра на волны [2]). В проведенном ниже рассуждении метод лорда Кельвина применен для определения закона отклонения от стационарного движения в некоторых простейших случаях плоской поверхности раздела.

Допустим, что ниже плоскости $z = 0$ находится жидкость постоянной плотности ρ, которая движется параллельно оси x со скоростью V, а выше этой плоскости плотность жидкости равна ρ', и скорость V'.

---

[1]) *Phil. Mag.*, том XXXVI, стр. 337, 1868.

[2]) Kelvin. *Phil. Mag.*, том XLII, стр. 368, 1871. См. также *Proc. Math. Soc.*, том X, стр. 4, 1878; Basset, *Hydrodynamics*, § 391, 1888; Lamb, *Hydrodynamics*, § 224, 1895.

Так же, как в § 353, будем отсчитывать z вниз, и положим, что имеются жесткие стенки, ограничивающие нижнюю жидкость при $z=l$, а верхнюю жидкость — при $z=-l'$. Предполагается, что возмущение содержит величины x и t только в виде множителей $e^{ikx}\,e^{int}$. Потенциал скорости $Vx+\varphi$ для нижней жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа, и, следовательно, φ, по условию $z=l$, принимает вид

$$\varphi = C \operatorname{ch} k(z-l)\cdot e^{i(nt+kx)}; \tag{1}$$

подобное же выражение

$$\varphi' = C' \operatorname{ch} k(z+l')\cdot e^{i(nt+kx)} \tag{2}$$

применимо к верхней жидкости, если полный потенциал скоростей в ней есть $V'_x+\varphi'$. Соотношение между φ и поднятием h у общей поверхности имеет вид

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\partial h}{\partial t} + V\frac{\partial h}{\partial x},$$

так что если

$$h = He^{i(nt+kx)}, \tag{3}$$

то

$$kC \operatorname{sh} kl = i(n+kV)H. \tag{4}$$

Подобным же образом

$$-kC' \operatorname{sh} kl' = i(n+kV')H. \tag{5}$$

Теперь нам следует выразить условие, касающееся давлений при $z=0$. Общее уравнение (2) § 244 дает для нижней жидкости

$$\frac{\delta p}{\rho} = -gh - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(V+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = -gh - in\varphi - ikV\varphi,$$

если пренебречь квадратами малых величин. Подобным же образом для верхней жидкости при $z=0$

$$\frac{\delta p'}{\rho} = -gh - in\varphi' - ikV'\varphi'.$$

Если нет капиллярного натяжения, то δp и $\delta p'$ равны. Если капиллярное натяжение равно T, то разность

$$\delta p - \delta p' = -T\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = k^2 Th,$$

так что

$$g(\rho-\rho')h + k^2Th = i\rho'(n+kV')\varphi' - i\rho(n+kV)\varphi. \tag{6}$$

Если подставить значения φ и φ' при $z=0$ из (1), (2), (4), (5), то это условие принимает вид

$$g(\rho-\rho')k^2T = k\rho\left(V+\frac{n}{k}\right)^2 \operatorname{cth} kl + k\rho'\left(V'+\frac{n}{k}\right)^2 \operatorname{cth} kl'. \tag{7}$$

Это — уравнение, определяющее значения n/k. Если корни этого квадратного уравнения действительны, то волны распространяются с соответствующими действительными скоростями; с другой стороны, если корни мнимые, то в решение входят экспоненциальные функции от времени, показывающие, что станционарное движение неустойчиво. Следовательно, критерий устойчивости имеет вид

$$(\rho \operatorname{cth} kl + \rho' \operatorname{cth} kl')\{g(\rho - \rho') + Tk^2\} - \\ - k\rho\rho' \operatorname{cth} kl \operatorname{cth} kl' (V - V')^2 > 0. \quad (8)$$

Если и g и T исчезают одновременно, то движение неустойчиво для всех возмущений, т. е. независимо от того, какое значение имеет k. Если исчезает T, то действие тяжести может обеспечить устойчивость для определенных значений k, но оно не может превратить стационарное движение в движение, полностью устойчивое. В самом деле, если k бесконечно велико, т. е. если рябь бесконечно мелка, то $\operatorname{cth} kl = \operatorname{cth} kl' = 1$, и член, содержащий g, исчезает из критерия. Несмотря на то, что приложенные силы стремятся придать устойчивость движению, оно необходимо неустойчиво для волн бесконечно малой длины; и этот вывод можно распространить на вихревые слои любого вида и на приложенные силы любого типа.

Если T — конечно, то, наоборот, необходимо имеется устойчивость для волн бесконечно малой длины, хотя возможна неустойчивость для волн конечной длины.

Для дальнейшего исследования мы можем принять более простые условия, получающиеся при бесконечных l и l'. Тогда критерий устойчивости принимает вид

$$(\rho + \rho')\{g(\rho - \rho') + Tk^2\} - k\rho\rho'(V - V')^2 > 0, \quad (9)$$

и критический случай определится путем приравнивания левой части нулю. Это дает квадратное уравнение по k. Если корни этого квадратного уравнения мнимы, то критерий (9) удовлетворяется для всех промежуточных значений k, так же как и для бесконечно малых и бесконечно больших значений, которые удовлетворяют ему во всех случаях, если только $\rho > \rho'$. Таким образом, условие полной устойчивости есть

$$4g(\rho - \rho')T > \frac{\rho^2\rho'^2(V - V')^4}{(\rho + \rho')^2}. \quad (10)$$

Пусть W обозначает минимальную скорость (§ 353) волн при $V = 0$ и $V' = 0$. Тогда, в силу (7),

$$(\rho + \rho')^2 W^4 = 4g(\rho - \rho')T, \quad (11)$$

и условие (10) можно записать в виде

$$W^4 > \frac{\rho\rho'(V - V')^2}{(\rho + \rho')^2}. \quad (12)$$

Если $(V - V')$ не превосходит определенного таким образом значения, то стационарное движение устойчиво для всех возмущений; в противном случае будут существовать некоторые конечные длины волн, для которых возмущения возрастают экспоненциально.

Если мы теперь опустим в уравнении (7) члены, зависящие от тяжести и от капиллярности, то это уравнение примет вид

$$\rho (n + kV)^2 \operatorname{cth} kl + \rho' (n + kV')^2 \operatorname{cth} kl' = 0. \tag{13}$$

При $l = l'$ или, когда обе эти величины бесконечны, мы имеем просто

$$\rho (n + kV)^2 + \rho' (n + kV')^2 = 0, \tag{14}$$

или

$$\frac{n}{k} = -\frac{\rho V + \rho' V' \pm i \sqrt{\rho\rho'}\,(V - V')}{\rho + \rho'}. \tag{15}$$

Из уравнения (15) мы видим, что, как и следовало ожидать, движение, общее для обеих частей жидкости, не имеет динамического значения. Прибавление одной и той же величины к V и V' равносильно вычитанию той же величины из n/k. При $\rho = \rho'$ уравнение (15) принимает вид

$$\frac{n}{k} = -\frac{1}{2}(V + V') \pm \frac{1}{2} i (V - V'). \tag{16}$$

Существенные черты этого случая обнаруживаются уже в простом случае, когда $V' = -V$, так что стационарные движения обеих масс жидкости равны и противоположны. Тогда мы имеем

$$\frac{n}{k} = \pm iV, \tag{17}$$

а для поднятия

$$h = He^{\pm kVt} \cos (kx + \varepsilon), \tag{18}$$

соответствующее начальному

$$h = H \cos (nx + \varepsilon). \tag{19}$$

Если при $t = 0$ $\partial h/\partial t = 0$, то

$$h = H \operatorname{ch} kVt \cos (nx + \varepsilon), \tag{20}$$

что показывает, что волны на поверхности раздела стационарны, и амплитуды их увеличиваются со временем по закону гиперболического косинуса. Быстрота возрастания члена с положительным показателем исключительно велика. Так как $k = 2\pi/\lambda$, то амплитуда умножается на e^{π}, или приблизительно на 23, за время, требующееся для того, чтобы тот или другой поток прошел расстояние λ.

Если $V' = V$, то корни уравнения (16) равны, однако, общее решение можно получить обычным методом. Таким образом, если мы положим

$$V' = V(1 + \alpha),$$

где α в пределе обращается в нуль, то

$$\frac{n}{k} = -V \pm \frac{1}{2} i\alpha V$$

и

$$h = e^{ik(x-Vt)} \left\{ Ae^{\frac{1}{2} ikVt\alpha} + Be^{-\frac{1}{2} ikVt\alpha} \right\}$$

где A и B — произвольные постоянные. Переходя теперь к пределу при $\alpha = 0$ и беря новые произвольные постоянные, мы получаем

$$h = e^{ik(x-Vt)} \{C + Dt\},$$

или, в действительных величинах,

$$h = \{C + Dt\} \cos k(x - Vt + \varepsilon).$$

Если первоначально $h = \cos kx$, $\partial h/\partial t = 0$, то

$$h = \cos k(Vt - x) + kVt \sin k(Vt - x). \tag{21}$$

Особенность этого случая состоит в том, что до смещения совершенно нет действительной поверхности раздела.

Общее решение, содержащее l и l', можно приспособить для представления определенных случаев возмущения двухмерной струи шириной в $2l$, вливающейся в стационарную жидкость. В самом деле, если возмущение *симметрично* — так, что средняя плоскость является плоскостью симметрии, то условия — такие же, как если бы была введена неподвижная стенка. Если окружающая жидкость безгранична, то $l' = \infty$ и $\operatorname{cth} kl' = 1$, и уравнение, определяющее n, при $V' = 0$ и $\rho' = \rho$ принимает вид

$$(n + kV)^2 \operatorname{cth} kl + n^2 = 0; \tag{22}$$

решение этого уравнения есть

$$\frac{n}{kV} = \frac{-1 \pm i\sqrt{\operatorname{th} kl}}{1 + \operatorname{th} kl}. \tag{23}$$

Следовательно,

$$h = He^{\pm k\mu Vt} \cos k \left\{ x - \frac{Vt}{1 + \operatorname{th} kl} \right\}, \tag{24}$$

где

$$\mu = \frac{\sqrt{\operatorname{th} kl}}{1 + \operatorname{th} kl}. \tag{25}$$

Это выражение представляет распространение симметричных возмущений в струе шириною $2l$, выливающейся в стационарную окружающую жидкость той же плотности.

Если kl весьма мало, так что длина волны велика по сравнению с толщиной струи, то

$$h = He^{\pm \sqrt{kl} \cdot kVt} \cos k \{x - Vt\}. \tag{26}$$

Исследование асимметрического возмущения струи требует решения задачи с одним вихревым слоем, в которой при $z = l$ должно быть удовлетворено условие $\varphi = 0$ вместо требовавшегося до сих пор условия $\partial\varphi/\partial z = 0$. Значение φ есть

$$\varphi = -i(n + kV) H \frac{\operatorname{sh} k(z-l)}{k \operatorname{ch} kl} e^{int} e^{ikx}, \tag{27}$$

откуда, если, как прежде, $\partial\varphi'/\partial z = 0$ при $z = -l'$,

$$\rho(n + kV)^2 \operatorname{th} kl + \rho'(n + kV')^2 \operatorname{cth} kl' = 0. \tag{28}$$

Если $l' = \infty$, $\rho' = \rho$, $V' = 0$, то

$$(n + kV)^2 \operatorname{th} kl + n^2 = 0. \tag{29}$$

Это уравнение можно применить к струе шириною $2l$, движущейся со скоростью V в спокойной жидкости и смещенной таким образом, что изгибы обеих ее поверхностей параллельны.

Если kl мало, то мы имеем приближенно

$$h = He^{\pm V\overline{kl}\cdot kVt} \cos k(x - kl \cdot Vt). \tag{30}$$

Комбинируя решения, представленные выражениями (26), (30), мы можем определить последствия любых смещений в двух измерениях обеих поверхностей тонкой струи, движущейся со скоростью V в спокойной жидкости той же плотности.

366. Можно считать, что исследование § 365 дает удовлетворительное общее объяснение чувствительности струй. В идеальном случае внезапных изменений скорости, образующих вихревые слои в жидкости, не обладающей трением, движение всегда неустойчиво и степень неустойчивости возрастает по мере уменьшения длины волны возмущения.

Непосредственное применение этого результата к действительным струям привело бы нас к выводу, что их чувствительность бесконечно возрастает с частотой. Действительно, в случае некоторых пламен частота наиболее сильно действующих звуков весьма велика и приближается к верхнему пределу человеческого слуха; однако, имеются другие типы чувствительных струй, на которые эти высокие звуки не оказывают действия и которые требуют для своего возбуждения средних или даже низких тонов.

Возможное объяснение этого расхождения напрашивается само собой. Наши вычисления основывались на предположении, что изменения скорости происходят с разрывом — предположение, которое, пожалуй, нельзя примирить с действительностью. Вследствие трения в жидкости поверхность разрыва, если бы даже она и могла образоваться, мгновенно исчезла бы, и переход от одной скорости к другой становился бы все более и более постепенным до тех пор, пока переходный слой не достиг бы заметной ширины. Когда эта ширина сравнима с длиной волны синусоидального возмущения, то

решение, полученное для внезапного перехода, перестает быть применимым, и мы не имеем оснований предполагать, что неустойчивость будет возрастать для значительно более коротких длин волн.

Общее представление о влиянии вязкости в смысле расширения струи можно получить из решения Фурье для этой задачи при условии, когда начальная ширина предполагается бесконечно малой. Так, если в общих уравнениях v и w исчезают, а u является функцией только от y, то уравнение, которому удовлетворяет u, имеет вид (так же как в § 347)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{1}$$

Решение этого уравнения для случая, когда u в начале имеет замкнутую величину только при $y = 0$, имеет вид

$$u = U_1 \frac{e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}}{2\sqrt{\pi\nu t}}, \tag{2}$$

где $\nu = \mu/\rho$, а U_1 есть начальное значение $\int u\,dy$. Если $y^2 = 4\nu t$, то значение u меньше значения, которое будет найдено для того же самого момента времени при $y = 0$, в отношении $e : 1$. Для воздуха $\nu = 0{,}16\ CGS$ и, следовательно, через промежуток времени t толщина $2y$ струи будет сравнима по величине с $1{,}6\sqrt{t}$; например, через одну секунду толщину струи можно считать равной приблизительно $1^1/_2$ *см*.

Таким образом, имеется полное основание полагать, что на явления чувствительности струи может сильно влиять трение жидкости, которое может существенно отклонить результаты от вычисленных, основанных на предположении разрывных изменений скорости. При этих обстоятельствах важно исследовать характер равновесия стратифицированного движения в случаях, более близко подходящих к тому, что встречается на практике. Полное исследование, которое учитывало бы все эффекты вязкости, наталкивалось бы на много больших трудностей. Для цели, которую мы преследуем здесь, мы будем считать жидкость лишенной трения и удовлетворимся получением решений для законов стратификации, свободных от разрыва. Для невозмущенного движения компоненты скорости v, w равны нулю, а u является функцией только y, которую мы будем обозначать через U. Кривая, ординатой которой служит U, а абсциссой y, представляет закон стратификации; ради краткости ее можно назвать кривой скорости. Завихренность Z (§ 239) стационарного движения равна $\frac{1}{2}\,\partial U/\partial y$.

Если в возмущенном движении, которое предполагается двумерным, обозначить скорости через $U + u$ и v, а завихренность через

$Z+\zeta$, то общее уравнение (4) § 239 принимает вид

$$\frac{\partial(Z+\zeta)}{\partial t}+(U+u)\frac{\partial(Z+\zeta)}{\partial x}+v\frac{\partial(Z+\zeta)}{\partial y}=0,$$

где

$$\frac{\partial Z}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial Z}{\partial x}=0.$$

Таким образом, если пренебречь квадратами возмущений, то уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+U\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial Z}{\partial y}=0; \tag{3}$$

уравнение же непрерывности для несжимаемой жидкости дает

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{4}$$

Если подставить в уравнение (3) значения Z и ζ, выраженные через скорости, то получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+v\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0. \tag{5}$$

Введем теперь предположение, что x и t, как функции от u и v, пропорциональны $e^{int}e^{ikx}$. Из уравнения (4) имеем

$$iku+\frac{\partial v}{\partial y}=0; \tag{6}$$

если это значение u подставить в уравнение (5), то получим

$$\left(\frac{n}{k}+U\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-k^2 v\right)-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}v=0. \tag{7}$$[1])

В уравнении (7) можно рассматривать k как действительную величину, а во всякой частной задаче, которую только можно себе представить, главной целью является определение соответствующего значение n, и, в частности, определение того, будет ли оно действительным или мнимым. Одно важное общее предложение относится к случаю, когда $\partial^2 U/\partial y^2$ не меняет знака, так что кривая скорости целиком выпукла или целиком вогнута на всем пространстве между двумя неподвижными стенками, у которых удовлетворяется условие $v=0$. Пусть $n/k=p+iq$, $v=\alpha+i\beta$, где p, q, α, β действительны. Подставляя в уравнение (7), получаем

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}+i\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}=\left[k^2+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{p+U-iq}{(p+U)^2+q^2}\right](\alpha+i\beta)=0,$$

---

[1]) *Proc. Math. Soc.*, том XI, стр. 68, 1880.

или, приравнивая нулю порознь действительную и мнимую части,

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} = k^2\alpha + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\,\frac{(p+U)\,\alpha + q\beta}{(p+U)^2+q^2}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2} = k^2\beta + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\,\frac{-q\alpha + (p+U)\,\beta}{(p+U)^2+q^2}. \tag{9}$$

Помножив (8) на β, (9) на α и вычтя одно из другого, получим

$$\beta\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} - \alpha\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \alpha\frac{\partial\beta}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\,\frac{q(\alpha^2+\beta^2)}{(p+U)^2+q^2}. \tag{10}$$

На границах значение v, а следовательно, и α и β, по предположению, равны нулю. Поэтому, интегрируя уравнение (10) между границами, мы находим, что q должно равняться нулю, если $\partial^2 U/\partial y^2$ имеет один и тот же знак во всей области интегрирования. Следовательно, n действительно, и движение, если не абсолютно устойчиво, то во всяком случае не является экспоненциально неустойчивым.

Из уравнения (7) можно вывести и другое общее заключение, заслуживающее внимания. Записывая это уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \left\{k^2 + \frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}}{U + \dfrac{n}{k}}\right\} v,$$

мы видим, что при действительном n, v не может перейти от одного нулевого значения к другому нулевому значению, если $\partial^2 U/\partial y^2$ и $n + kU$ не имеют где-нибудь противоположных знаков. Так, если мы предположим, что U всюду положительно, а $\partial^2 U/\partial y^2$ всюду отрицательно, и что V есть наибольшее значение U, то мы найдем, что $n + kV$ должно быть положительно.

367. Предполагая завихренность Z постоянной во всех слоях конечной толщины и изменяющей значение только при переходе ограниченного числа плоскостей, для каждой из которых y постоянно, мы получим класс задач, допускающих весьма простое решение. В этих случаях кривая скорости состоит из отрезков прямых, пересекающих друг друга под конечными углами. Предполагается, что такое положение вещей нарушается изгибанием поверхностей перехода.

На протяжении всего слоя постоянной завихренности $\partial^2 U/\partial y^2 = 0$, а потому, в силу (7) § 366, всюду, где $n + kU$ не равно нулю, мы имеем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k^2 v = 0; \tag{1}$$

решением этого уравнения является

$$v = Ae^{ky} + Be^{-ky}. \tag{2}$$

Если имеется несколько слоев, в каждом из которых Z постоянно, то следует скомбинировать вместе различные решения вида (2),

выбрав произвольные постоянные так, чтобы удовлетворить определенным граничным условиям. Первым из этих условий, очевидно, является непрерывность v или, как это можно выразить иначе,

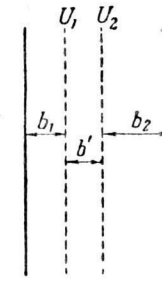
$$\Delta v = 0. \tag{3}$$

Другое необходимое условие можно получить путем интегрирования уравнения (7) § 366 по поверхности перехода. Таким образом получим

$$\left(\frac{n}{k} + U\right) \cdot \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) \cdot v = 0. \tag{4}$$

Таковы условия, необходимые, чтобы скорость была непрерывной в местах, где $\partial U/\partial y$ меняет свое значение.

В задачах, которые мы будем рассматривать, жидкость либо ограничена неподвижной плоскостью, у которой y постоянно, либо же имеет бесконечное протяжение. Для первого случая условие просто имеет вид $v = 0$. Если имеется слой, простирающийся в бесконечность в положительном направлении, то в выражении (2), применимом к этому слою, A должно быть равно нулю; если же слой имеет бесконечное протяжение в отрицательном направлении, то должно исчезать соответствующее B.



Фиг. 67.

В качестве примера первого случая мы рассмотрим задачу, имеющую довольно общий характер, когда ламинарное стационарное движение происходит между неподвижными стенками $y = 0$ и $y = b_1 + b' + b_2$.

Завихренность постоянна на протяжении каждого из трех слоев, ограниченных $y = 0$, $y = b_1$; $y = b_1$, $y = b_1 + b'$; $y = b_1 + b'$; $y = b_1 + b' + b_2$ (фиг. 67). Мы имеем, таким образом, две внутренние поверхности, на которых завихренность изменяется. Значения U у этих поверхностей можно обозначить через U_1, U_2.

В соответствии с условием (3) и при условии, что $v = 0$ при $y = 0$, мы можем положить в первом слое

$$v = v_1 = \operatorname{sh} ky; \tag{5}$$

во втором слое

$$v = v_2 = v_1 + M_1 \operatorname{sh} k(y - b_1); \tag{6}$$

в третьем слое

$$v = v_3 = v_2 + M_2 \operatorname{sh} k(y - b_1 - b'). \tag{7}$$

Условие, что $v = 0$ при $y = b_1 + b' + b_2$ теперь дает

$$0 = M_2 \operatorname{sh} kb_2 + M_1 \operatorname{sh} k(b_2 + b') + \operatorname{sh} k(b_2 + b' + b_1). \tag{8}$$

Нам остается еще выразить два других условия (4) у поверхностей перехода. У первой поверхности

$$v = \operatorname{sh} kb_1, \qquad \Delta\frac{\partial v}{\partial y} = kM_1;$$

у второй поверхности

$$v = M_1 \operatorname{sh} kb' + \operatorname{sh} k(b_1 + b'), \qquad \Delta \frac{\partial v}{\partial y} = kM_2.$$

Обозначив значения $\Delta(\partial U/\partial y)$ у обеих поверхностей соответственно через Δ_1, Δ_2, мы придадим нашим условиям вид

$$(n + kU_1)\, M_1 - \Delta_1 \operatorname{sh} kb_1 = 0, \tag{9}$$

$$(n + kU_2)\, M_2 - \Delta_2 \{ M_1 \operatorname{sh} kb' + \operatorname{sh} k(b_1 + b') \} = 0. \tag{10}$$

В силу (8), (9), (10) значения M_1, M_2, n определены.

Уравнения для n найдем, приравняв нулю определитель этих трех уравнений. Это уравнение можно записать в виде

$$An^2 + Bn + C = 0, \tag{11}$$

где

$$A = \operatorname{sh} k(b_2 + b' + b_1), \tag{12}$$

$$B = k(U_1 + U_2) \operatorname{sh} k(b_2 + b' + b_1) + \\ + \Delta_2 \operatorname{sh} kb_2 \operatorname{sh} k(b_1 + b') + \Delta_1 \operatorname{sh} kb_1 \operatorname{sh} k(b_2 + b'), \tag{13}$$

$$C = k^2 U_1 U_2 \operatorname{sh} k(b_2 + b' + b_1) + \\ + kU_1 \Delta_2 \operatorname{sh} kb_2 \operatorname{sh} k(b_1 + b') + kU_2 \Delta_1 \operatorname{sh} kb_1 \operatorname{sh} k(b_2 + b') + \\ + \Delta_1 \Delta_2 \operatorname{sh} kb_1 \operatorname{sh} kb_2 \operatorname{sh} kb'. \tag{14}$$

Для того чтобы определить характер корней, нам нужно образовать выражение $B^2 - 4AC$. Сделав приведение, получим

$$B^2 - 4AC = \{ k(U_1 - U_2) \operatorname{sh} k(b_2 + b' + b_1) + \\ + \Delta_1 \operatorname{sh} kb_1 \operatorname{sh} k(b_2 + b') - \Delta_2 \operatorname{sh} kb_2 \operatorname{sh} k(b_1 + b') \}^2 + \\ + 4\Delta_1 \Delta_2 \operatorname{sh}^2 kb_1 \operatorname{sh}^2 kb_2. \tag{15}$$

Следовательно, если Δ_1, Δ_2 имеют одинаковый знак, т. е. если кривая скорости (§ 366) направлена выпуклостью всюду в одну и ту же сторону, то $B^2 - 4AC$ положительно, и оба значения n действительны. При этих обстоятельствах возмущенное движение устойчиво.

Предположим теперь, что поверхности, на которых происходит изменение завихренности, расположены симметрично, так что $b_1 = b_2 = b$.

В этом случае находим

$$A = \operatorname{sh} k(2b + b'), \tag{16}$$

$$B = k(U_1 + U_2) \operatorname{sh} k(2b + b') + (\Delta_1 + \Delta_2) \operatorname{sh} kb \operatorname{sh} k(b + b'), \tag{17}$$

$$C = k^2 U_1 U_2 \operatorname{sh} k(2b + b') + k(U_1 \Delta_2 + U_2 \Delta_1) \operatorname{sh} kb \operatorname{sh} k(b + b') + \\ + \Delta_1 \Delta_2 \operatorname{sh}^2 kb \operatorname{sh} kb', \tag{18}$$

$$B_2 - 4AC = 4\Delta_1 \Delta_2 \operatorname{sh}^4 kb + \\ + \{ k(U_1 - U_2) \operatorname{sh} k(2b + b') + (\Delta_1 - \Delta_2) \operatorname{sh} kb \operatorname{sh} k(b + b') \}^2. \tag{19}$$

Здесь имеются два подслучая, которые можно отметить особо. Первый — это тот, в котором значения U одинаковы по обе стороны от средней плоскости, так что средний слой представляет область постоянной скорости без завихренности; кривая скорости для этого случая изображена на фиг. 68. Мы можем предположить, что в среднем слое $U = V$, а на стенках $U = 0$, не жертвуя общностью, поскольку любая постоянная скорость U_0, наложенная на эту систему, просто изменяет n на соответствующую величину $-kU_0$, как это очевидно из уравнения (7) § 366. Таким образом,

$$U_1 = U_2 = V, \qquad \Delta_2 = \Delta_1 = \Delta = -\frac{V}{b}$$

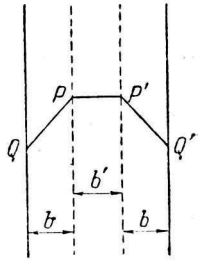
и

$$B^2 - 4AC = 4\Delta^2 \operatorname{sh}^4 kb;$$

следовательно,

$$n + kV = \frac{V}{b}\,\frac{\operatorname{sh} kb \operatorname{sh} k(b + b') \pm \operatorname{sh}^2 kb}{\operatorname{sh} k(2b + b')}. \tag{20}$$

Как и следовало ожидать, поскольку кривизна кривой скорости всюду одного знака, значения n в выражении (20) действительны. Легко видеть на основании симметрии, что оба нормальных возмущения таковы, что значения v на поверхностях раздела либо равны, либо противоположны для данного значения x. В первом случае поверхности изогнуты в одну и ту же сторону и (как это легко получить из уравнений или вывести из частного случая, который будет сейчас упомянут) соответствующее значение n в выражении (20) имеет верхний знак. Во втором случае движение симметрично относительно средней плоскости, которая ведет себя подобно неподвижной стенке.



Фиг. 68.

Если средний слой отсутствует ($b' = 0$), то одно из значений n — то, которое соответствует симметричному движению, — исчезает. Остающееся значение дается соотношением

$$n + kV = \frac{2\operatorname{sh}^2 kb}{\operatorname{sh} 2kb} = \frac{V \operatorname{th} kb}{b}. \tag{21}$$

Другой случай, который мы рассмотрим, — это случай, когда скорости U по обе стороны от средней плоскости противоположны друг другу, так что

$$U_1 = -U_2 = V, \quad \Delta_2 = -\Delta_1 = -\mu V. \tag{22}$$

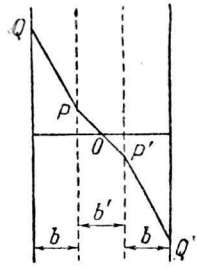
Здесь $B = 0$ и

$$C = -k^2 V^2 \operatorname{sh} k(2b + b') - 2k\mu V^2 \operatorname{sh} kb \operatorname{sh} k(b + b') - \\ - \mu^2 V^2 \operatorname{sh}^2 kb \operatorname{sh} kb'.$$

Ради краткости обозначим $kb=\beta$, $kb'=\beta'$, так что уравнение для n принимает вид

$$\frac{n^2}{k^2V^2}=\frac{k^2\operatorname{sh}(2\beta+\beta')+2k\mu\operatorname{sh}\beta\operatorname{sh}(\beta+\beta')+\mu^2\operatorname{sh}^2\beta\operatorname{sh}^2\beta'}{k^2\operatorname{sh}(2\beta+\beta')}=$$
$$=\frac{\{\mu\operatorname{sh}\beta\operatorname{sh}\beta'+k\operatorname{sh}(\beta+\beta')\}^2-k^2\operatorname{sh}^2\beta}{k^2\operatorname{sh}\beta'\operatorname{sh}(2\beta+\beta')}. \qquad (23)$$

Здесь оба значения n равны и противоположны; и поскольку Δ_1 и Δ_2 имеют противоположные знаки, постольку вопрос о том, является ли n действительным или мнимым, остается открытым.



Фиг. 69.

Непосредственно очевидно, что n действительно, если μ положительно, т. е. если Δ_1 и V имеют одинаковые знаки, как на фиг. 69.

Даже если μ отрицательно, n^2 необходимо положительно для больших значений k, т. е. для малых длин волн. В самом деле, в конечном счете мы имеем из (23)

$$n=\pm kV.$$

Теперь мы можем исследовать, для каких значений μ n^2 может быть отрицательным, если k очень мало, т. е. если длина волны очень велика. Приравнивая числитель выражения (23) нулю и разлагая в ряд гиперболические синусы, мы получаем в качестве квадратного уравнения для μ выражение

$$\mu^2b^2b'+2\mu b(b+b')+2b+b'=0,$$

откуда

$$\mu=\frac{1}{b}\quad\text{или}\quad\mu=-\frac{1}{b}-\frac{2}{b'}. \qquad (24)$$

Когда μ лежит между этими пределами (и только тогда) n^2 отрицательно, и возмущение (с большой длиной волны) возрастает со временем экспоненциально.

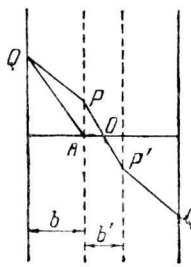
Мы можем выразить эти результаты через скорость V_0 у стенки, где $y=0$. Имеем

$$V_0=V\frac{b+\frac{1}{2}b'}{\frac{1}{2}b'}+\Delta_1 b=V\left(\frac{b+\frac{1}{2}b'}{\frac{1}{2}b'}+\mu b\right).$$

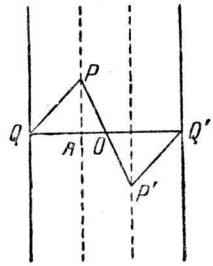
Следовательно, предельные значения V_0 суть $bV\left|\frac{1}{2}b'\right.$ и 0. Кривая скорости, соответствующая первому пределу, изображена на фиг. 70 линией $QPOP'Q'$; точку Q найдем, проведя прямую AQ параллельно OP до встречи со стенкой в Q. Если $b'=2b$, то QP параллельна OA, или скорость постоянна в каждом из крайних слоев.

У второго предела $V_0=0$; кривая скорости изображена на фиг. 71.

Существенно заметить, что движения, изображаемые кривыми скорости, промежуточными между этими предельными случаями, обладают неустойчивостью такого характера, который был бы невозможен для движения, кривая скорости которых имеет всюду кривизну одного знака, как на фиг. 68.



Фиг. 70.



Фиг. 71.

В первом приближении движение, изображенное на рис. 71, находится на границе между устойчивостью и неустойчивостью для возмущений с большой длиной волны; однако, если мы продолжим наши вычисления, то найдем, что в действительности оно неустойчиво. Если мы положим в (23)

$$\mu = -\frac{1}{b} - \frac{2}{b'},$$

то получим, после приведения,

$$\frac{n^2}{k^2V^2} = -\frac{k^2b^2}{3}, \tag{25}$$

что указывает на неустойчивость.

Из соотношения (23) в его второй форме мы видим, что, каково бы ни было значение k, можно μ определить так, чтобы возмущение было неустойчивым. Условием этого будет просто, чтобы μ было заключено между пределами

$$-\frac{\operatorname{sh} k(b+b') \pm \operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kb \operatorname{sh} kb'},$$

или

$$-k\left\{\operatorname{cth} kb + \operatorname{cth}\frac{1}{2}kb'\right\}, \qquad -k\left\{\operatorname{cth} kb + \operatorname{th}\frac{1}{2}kb'\right\}; \tag{26}$$

первое из этих условий соответствует верхнему пределу *численного значения* μ.

Если k очень велико, то пределы очень велики и близки друг к другу. Если k мало, то они принимают вид

$$-\frac{1}{b} - \frac{2}{b'} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{b},$$

что уже было доказано. По мере того, как k возрастает от 0 до ∞, численное значение верхнего предела непрерывно растет от $1/b + 2/b'$ до ∞, и подобным же образом численное значение нижнего предела растет от $1/b$ до ∞. Поэтому движение не может быть устойчивым для *всех значений* k, если μ (будучи отрицательным) превосходит по численному значению $1/b$. Окончательным условием полной устой-

чивости будет, следовательно, алгебраическое неравенство

$$\mu > -\frac{1}{b}. \tag{27}$$

В переходном случае

$$V_0 = \left(\mu - \frac{1}{b} + \frac{2}{b'}\right) Vb = \frac{2Vb}{b'}; \tag{28}$$

этот случай изображен на фиг. 70. Если PQ наклонена вниз больше, чем показано на этом рисунке, как например на фиг. 71, то стационарное движение заведомо неустойчиво.

Возвращаясь к общим уравнениям (11), (12), (13), (14), (15), предположим, что $\Delta_2 = 0$, что приводит к исчезновению соответствующей поверхности разрыва. Получаем

$$B = k(U_1 + U_2)\operatorname{sh} k(b_2 + b' + b_1) + \Delta_1 \operatorname{sh} kb_1 \operatorname{sh} k(b_2 + b'),$$
$$B^2 - 4AC = \{k(U_1 - U_2)\operatorname{sh} k(b_2 + b' + b_1) + \Delta_1 \operatorname{sh} kb_1 \operatorname{sh} k(b_2 + b')\}^2,$$

так что

$$n = -kU_2, \tag{29}$$

или

$$n = -kU_1 - \frac{\Delta_1 \operatorname{sh} kb_1 \operatorname{sh} k(b_2 + b')}{\operatorname{sh} k(b_1 + b' + b_2)}. \tag{30}$$

Последнее выражение представляет собой общее решение для двух слоев постоянной завихренности шириною b_1 и $b' + b_2$. Эквивалентный результат можно получить, полагая в уравнении (11) и т. д. $b' = 0$ или $b_1 = 0$.

Наличие соотношения (29) заставляет сделать вывод, что в качестве значения n допустимо любое значение $-kU$; смысл этого очевиден из фундаментального уравнения (7) § 366. В самом деле, в том месте, где $n + kU = 0$, уравнение (1) не должно удовлетворяться, т. е. произвольные постоянные в выражении (2) могут изменять свои значения. Очевидно, что при заданных значениях n и k можно найти решение, удовлетворяющее требуемым условиям у стенок и у поверхностей, где $\partial U/\partial y$ изменяет значение, так же как и уравнению (3) у плоскости, где $n + kU = 0$. В этом движении предполагается, что жидкости в рассматриваемой плоскости сообщается добавочная завихренность, которая движется вместе с жидкостью при скорости U.

Мы можем спросить, что же происходит во втором месте в жидкости там, где случайно скорость одинакова со скоростью в первом месте, месте добавочной завихренности. Второе место может находиться либо в слое с первоначально однородной завихренностью, либо на поверхности перехода. В первом случае не происходит ничего особенного. Если во втором месте нет новой завихренности, то значение v определено, как обычно, с точностью до некоторого произ-

вольного множителя. Однако, возможно наличие новой завихренности, совместной с заданным значением n, во втором месте, так же как и в первом, и тогда полное значение v для данного n можно рассматривать, как состоящее из двух частей, каждая из которых пропорциональна одной из новых завихренностей и каждая из которых имеет произвольный множитель.

Если второе место расположено на поверхности перехода, то из уравнения (4) следует, что $v=0$, поскольку $\Delta(\partial U/\partial y)$ конечно. Из этого факта мы могли бы попытаться сделать вывод, что рассматриваемая поверхность ведет себя подобно неподвижной стенке; однако, более подробное исследование показывает, что этот вывод не оправдывается. Для того чтобы понять это, полезно будет исследовать соотношение между v и смещением поверхности, которое предполагается пропорциональным $e^{int+ikx}$. Таким образом, если уравнение поверхности есть

$$F=y-he^{int+ikx}=0, \tag{31}$$

то условие, которому нужно удовлетворить, имеет вид [1])

$$\frac{\partial F}{\partial t}+U\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}=0, \tag{32}$$

так что искомое соотношение есть

$$-ih(n+kU)+v=0. \tag{33}$$

Следовательно, конечное h совместимо с исчезающим v.

368. В задачах, рассмотренных в § 367, жидкость была ограничена неподвижными стенками; в задачах, к которым мы сейчас переходим, мы будем предполагать жидкость неограниченной. В качестве первого примера предположим, что на верхней стороне слоя толщины b невозмущенная скорость U равна $+V$, а на нижней стороне она равна $-V$, внутри же слоя она равномерно изменяется (фиг. 72). Завихренность внутри слоя равна V/b, а вне слоя она равна нулю.



Фиг. 72.

Наиболее непосредственно ведущим к цели методом разрешения этой задачи является, пожалуй, метод, изложенный в § 367. От $y=-\infty$ до $y=0$ нам нужно взять выражение вида $v_1=e^{ky}$, удовлетворяющее необходимому условию при $y=-\infty$. Тогда от $y=0$ до $y=b$

$$v_2=v_1+M_1\operatorname{sh}ky,$$

а от $y=b$ до $y=+\infty$

$$v_3=v_2+M_2\operatorname{sh}k(y-b).$$

---

[1]) Lamb, *Hydrodynamics*, § 10.

Но, в силу условий, при $+\infty$ v_3 должна иметь вид e^{-ky}, так что

$$1+M_1+M_2e^{-kb}=0.$$

Два других условия можно тогда сформулировать, как в § 367, и исключив две постоянные M_1 и M_2, получить, наконец, уравнение для n. Однако, будет удобнее и поучительнее пойти по другому пути, открываемому теорией вихрей.

Если мы напишем основное уравнение

$$\left(\frac{n}{k}+U\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-k^2v\right)-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}v=0 \tag{1}$$

в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-k^2v=Y, \tag{2}$$

то мы увидим, что, если $Y=0$ от $y=-\infty$ до $y=+\infty$, то $v=0$. Следовательно, любое значение, возможное для v, можно рассматривать, как зависящее от Y и, далее — вследствие линейности, — как составленное путем простого сложения из значений, соответствующих частным значениям Y. В приложениях, которые мы имеем в виду, Y исчезает всюду, за исключением отдельных определенных мест — поверхностей разрыва, — где только $\partial^2U/\partial y^2$ отлично от нуля. Полное значение v можно, таким образом, найти путем сложения частных значений, каждое из которых соответствует единственной поверхности разрыва.

Для того чтобы найти частное значение, соответствующее поверхности разрыва, расположенной при $y=y_1$, нам нужно предположить в уравнении (2), что Y исчезает во всех других местах, а v исчезает при $\pm\infty$. Таким образом, при $y>y_1$, v должно быть пропорционально $e^{-k(y-y_1)}$, а при $y<y_1$, — пропорционально $e^{+k(y-y_1)}$. Кроме того, поскольку само v должно быть непрерывным при $y=y_1$, коэффициенты в показателях должны быть равны, так что искомое значение можно записать в виде

$$v=Ce^{\pm k(y-y_1)}, \tag{3}$$

где C — некоторая постоянная.

В частной задаче, предположенной выше, имеют место две поверхности разрыва — при $y=0$ и при $y=b$; соответственно полное значение v можно записать в виде

$$v=Ae^{\pm ky}+Be^{\pm k(y-b)}. \tag{4}$$

Теперь нам нужно удовлетворить условию непрерывности (4) § 367 на каждой поверхности. При $y=0$ из выражения (4) мы имеем

$$v_0=A+Be^{-kb}, \qquad \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0=-2kA,$$

причем

$$U=-V, \quad \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)=+\frac{2V}{b},$$

а при $y = b$

$$v_b = Ae^{-kb} + B, \qquad \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_b = -2kB,$$

причем

$$U = +V, \quad \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = -\frac{2V}{b}.$$

Условия, которым должны удовлетворять B/A и n, следовательно, таковы:

$$A\left(n - kV + \frac{V}{b}\right) + B\left(V\frac{e^{-kb}}{b}\right) = 0, \tag{5}$$

$$A\left(V\frac{e^{-kb}}{b}\right) - B\left(n + kV - \frac{V}{b}\right) = 0, \tag{6}$$

откуда, исключая B/A,

$$n^2 = \frac{V^2}{b^2}\left[(kb-1)^2 - e^{-2kb}\right]. \tag{7}$$

Если kb мало, т. е. если длина волны велика по сравнению с b, то этот случай приближается к случаю внезапного перехода от скорости $-V$ к скорости $+V$. Тогда, из соотношения (7),

$$n^2 = -k^2V^2, \tag{8}$$

в согласии с найденным уже [(17), § 365] значением. В этом случае стационарное движение неустойчиво. С другой стороны, если kb велико, то из (7) находим

$$n^2 = k^2V^2, \tag{9}$$

и так как оба значения n действительны, то движение устойчиво. Таким образом, оказывается, что при таком отдалении от неустойчивости, безгранично возрастающей с уменьшением до нуля длины волны, как это бывает при внезапном переходе от $-V$ к $+V$, уменьшение длины волны ниже определенного значения сопровождается неустойчивостью, которая постепенно уменьшается и, наконец, заменяется действительной устойчивостью. Приводимая таблица более детально показывает ход b^2n^2/V^2, взятый в функции kb.

kb	b^2n^2/V^2	kb	b^2n^2/V^2
0,2	— 0,03032	1,0	— 0,13534
0,4	— 0,08933	1,2	— 0,05072
0,6	— 0,14120	1,3	+ 0,01573
0,8	— 0,16190	2,0	+ 0,98168

Мы видим, что неустойчивость, наибольшая при $kb \approx$ $\approx 0{,}8$, т. е. при $\lambda = 8b$, и что переход от неустойчивости к устойчивости происходит при $kb \approx 1{,}3$ или при $\lambda = 5b$.

В соответствии с обоими значениями n имеются два отношения B/A, определяемые уравнениями (5) или (6), причем каждое из них дает нормальную частоту возмущения, а посредством этих нормаль-

ных частот можно представить произвольные начальные условия. Мы увидим, что для устойчивых возмущений отношение B/A действительно; это показывает, что изгибы обеих поверхностей в каждый момент находятся в одной и той же фазе.



Фиг. 73.

В качестве примера мы можем теперь взять струю толщиною $2b$, движущуюся в спокойной жидкости, предполагая, что скорость в середине струи равна V и что по обе стороны скорость равномерно падает до нуля (фиг. 73). Помещая начало оси y-ов на средней линии, мы можем написать

$$U = V\left(1 \mp \frac{y}{b}\right), \tag{10}$$

где знак минус относится к верхней, а знак плюс к нижней половине струи (фиг. 73). Теперь имеются три поверхности $y = -b$, $y = 0$, $y = +b$, на которых вид v испытывает разрыв. Так же как в (4), мы можем положить

$$v = Ae^{\pm k(y+b)} + Be^{\pm ky} + Ce^{\pm k(y-b)}, \tag{11}$$

так что при

$$y = -b, \quad U = 0, \quad \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{V}{b},$$

$$v = A + Be^{-kb} + Ce^{-2kb}, \quad \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -2kA;$$

при

$$y = 0, \quad U = V, \quad \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = -\frac{2V}{b},$$

$$v = Ae^{-kb} + B + Ce^{-kb}, \quad \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -2kB$$

и при

$$y = b, \quad U = 0, \quad \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{V}{b},$$

$$v = Ae^{-2kb} + Be^{-kb} + C, \quad \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -2kC.$$

Подстановка этих значений в уравнения условия (4) § 367 дает

$$mA + \gamma B + \gamma^2 C = 0, \tag{12}$$

$$\gamma A + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}m - kb\right)B + \gamma C = 0, \tag{13}$$

$$\gamma^2 A + \gamma B + mC = 0. \tag{14}$$

Эти уравнения определяют $A:B:C$ и n.

Из симметрии, характеризующей этот случай, или же из исследования уравнений (12), (13) и (14) мы видим, что одно из нормальных возмущений определяется соотношениями

$$B = 0 \text{ и } A + C = 0, \tag{15}$$

и что соответствующее значение m равно γ^2. Таким образом, для симметричного возмущения

$$n = -\frac{V}{2b}(1 - e^{-2kb}), \tag{16}$$

что указывает на устойчивость в случаях, когда речь идет об этой частоте.

Общий детерминант системы трех уравнений можно представить в форме

$$(m - \gamma^2)[m^2 + (\gamma^2 + 2kb - 3)m + \gamma^2(1 + 2kb)] = 0, \tag{17}$$

где первый множитель соответствует уже рассмотренному симметричному возмущению. Остальные два значения n будут действительны, если

$$(\gamma^2 + 2kb - 3)^2 - 4\gamma^2(1 + 2kb) > 0, \tag{18}$$

но не иначе. Если kb бесконечно велико, то $\gamma = 0$, и неравенство (18) удовлетворяется; таким образом, движение устойчиво, когда длина волны возмущения мала по сравнению с толщиной $2b$ струи. С другой стороны, как легко доказать, разлагая в ряд γ, или e^{-kb}, в выражении (18) движение неустойчиво, если длина волны велика по сравнению с толщиной струи.

Значения левой части неравенства (18) можно оценить легко, если представить эту часть в виде

$$(5 + 2kb - e^{-2kb})^2 - 16(1 + 2kb). \tag{19}$$

Некоторые соответствующие значения (19) и $2kb$ даны в таблице.

$2kb$	(19)	$2kb$	(19)
0,5	—0,054	2,5	— 0,975
1,0	—0,279	3,0	— 0,794
1,5	—0,599	3,5	— 0,263
2,0	—0,876	4,0	+ 0,671

Мнимая часть n, если она существует, пропорциональна квадратному корню из (19). Длина волны максимальной неустойчивости определяется, таким образом, приближенно значением $2kb = 2{,}5$ или $\lambda = 2{,}5 \cdot 2b$. Критическая длина волны дается значением $2kb \approx 3{,}5$ приблизительно, или $\lambda = 1{,}8 \cdot 2b$; более короткие длины волн, чем эта, приводят к устойчивости, а более длинные — к неустойчивости. В этом отношении здесь имеется очень близкая аналогия с цилиндрическими столбиками жидкости, находящейся под действием капиллярных сил (§ 357), хотя природа самого равновесия и характер отклонения от него совершенно различны.



Фиг. 74.

Можно сделать дальнейший шаг к обобщению, предполагая, что максимальная скорость V распространения на слой конечной толщины b' в середине струи (фиг. 74). В соответствии с этим в этом

слое нет завихренности, между тем как в прилежащих слоях, толщиною b, завихренность и скорость остаются прежними.

Взяв, как в выражении (11), четыре постоянные A, B, C, D, для того чтобы представить разрывы на четырех поверхностях, рассматривая их по очереди и положив $\gamma = e^{-kb}$ и $\gamma' = e^{-kb'}$, имеем на первой поверхности

$$U = 0, \quad \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = +\frac{V}{b},$$

$$v = A + \gamma B + \gamma\gamma' C + \gamma^2\gamma' D, \quad \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -2kA;$$

на второй поверхности

$$U = V, \quad \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = -\frac{V}{b},$$

$$v = \gamma A + B + \gamma' C + \gamma\gamma' D, \quad \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -2kB;$$

на третьей поверхности

$$U = V, \quad \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = -\frac{V}{b},$$

$$v = \gamma\gamma' A + \gamma' B + C + \gamma D, \quad \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -2kC$$

и на четвертой поверхности

$$U = 0, \quad \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = +\frac{V}{b},$$

$$v = \gamma^2\gamma' A + \gamma\gamma' B + \gamma C + D, \quad \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -2kD.$$

Воспользовавшись этими значениями в (4) § 367, получим

$$A\left[1 + \frac{2bn}{V}\right] + \gamma B + \gamma\gamma' C + \gamma^2\gamma' D = 0, \tag{20}$$

$$\gamma A + B\left[1 - 2b\left(k + \frac{n}{V}\right)\right] + \gamma' C + \gamma\gamma' D = 0, \tag{21}$$

$$\gamma\gamma' A + \gamma' B + C\left[1 - 2b\left(k + \frac{n}{V}\right)\right] + \gamma D = 0, \tag{22}$$

$$\gamma^2\gamma' A + \gamma\gamma' B + \gamma C + D\left[1 + \frac{2bn}{V}\right] = 0. \tag{23}$$

Исключение отношений $A:B:C:D$ дало бы биквадратное уравнение по n, которое, однако, можно разбить на два квадратных уравнения — одно, относящееся к симметричным возмущениям, для которых $A + D = 0$, $B + C = 0$, и другое, относящееся к возмущениям, для которых $A - D = 0$, $B - C = 0$. Результирующее уравнение по n можно написать в виде:

$$\left(\frac{2bn}{V}\right)^2 + (\pm\gamma' \mp \gamma'\gamma^2 + 2kb)\frac{2bn}{V} \pm$$
$$\pm\gamma' - 1 + 2kb + \gamma^2(1 \mp \gamma' \mp 2kb\gamma') = 0. \tag{24}$$

В уравнении (24) верхние знаки относятся к симметричным возмущениям. Корни действительны и соответствующие возмущения устойчивы, если

$$(\pm\gamma' \mp \gamma'\gamma^2 + 2kb)^2 - 4[\pm\gamma' - 1 + 2kb + \gamma^2(1 \mp \gamma' \mp 2kb\gamma')] \quad (25)$$

положительно.

В дальнейшем мы ограничимся симметричными возмущениями, т. е. верхними знаками в (25) и членами порядка не выше первого по b'. Выражение (25) можно тогда привести к виду

$$(1 - \gamma^2 - 2kb)^2 + 2kb'(1 + \gamma^2)(1 - \gamma^2 - 2kb). \quad (26)$$

Если kb очень мало, то это выражение обращается в

$$4k^4b^4 - 8kb' \cdot k^2b^2. \quad (27)$$

Если b' равно нулю, то выражение (27) положительно, и возмущение устойчиво, как мы нашли выше; если же b и b' — одного порядка величины и оба малы по сравнению с λ, то из (27) следует, что возмущение неустойчиво, хотя оно и симметрично.

Если положить в выражении (24) $b' = 0$, то мы снова возвратимся к предыдущей задаче. Для симметричных возмущений, полагая в (24) $\gamma' = 1$, получим

$$\left(\frac{2bn}{V}\right)^2 + (1 - \gamma^2 + 2kb)\frac{2bn}{V} + 2kb(1 - \gamma^2) = 0,$$

что показывает, что значения $2bn/V$ равны $\gamma^2 - 1$ и $-2kb$. Первое значение совпадает с (16), а второе дает $n + kV = 0$. Мы уже видели, что любое значение $-kU$ представляет возможное решение для n.

С другой стороны, если мы предположим, что $b = 0$, то мы вернемся к случаю струи с одинаковой повсюду скоростью V и с толщиною b', движущейся в спокойной жидкости. Уравнение для n после деления на b^2 принимает вид

$$n^2 + (1 \pm \gamma')kV \cdot n + \frac{1}{2}(1 \pm \gamma')k^2V^2 = 0,$$

или

$$(n + kV)^2 \frac{1 \pm \gamma'}{1 \mp \gamma'} + n^2 = 0. \quad (28)$$

В уравнении (28) $\frac{1+\gamma'}{1-\gamma'} = \operatorname{cth}\frac{1}{2}kb'$, $\frac{1-\gamma'}{1+\gamma'} = \operatorname{th}\frac{1}{2}kb'$, так что результат находится в согласии с (22) и (29) § 365, где величине $\frac{1}{2}kb'$ соответствует l.

Другой частный случай уравнения (24), сравнимый с предыдущими результатами, получится, если предположить, что b' бесконечно велико.

369. Если $\partial^2 U/\partial y^2$ конечно, то мы должны вернуться к общему уравнению § 366

$$\left(\frac{n}{k}+U\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-k^2 v\right)-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}v=0, \tag{1}$$

которое позволяет теоретически построить кривую, изображающую v как функцию от y, если известно n (которое действительно). В действительности мы можем рассматривать уравнение (1) как определяющее кривизну, которую мы будем иметь в какой-либо точке при следовании по кривой. В месте, где $n+kU$ исчезает, т. е. где скорость потока равна волновой скорости, кривизна становится бесконечной, если v не исчезает. Характер бесконечности в таком месте (предполагая, что $y=0$) можно было бы более удовлетворительно исследовать посредством полного решения для какого-нибудь частного случая. Однако, достаточно исследовать вид решения в соседстве с $y=0$, и для этой цели дифференциальное уравнение можно упростить. Так, если y мало, то можно рассматривать $n+kU$ как пропорциональное y, а d^2U/dy^2 — как приближенно постоянную. По сравнению с большим членом, k^2v^2 можно пренебречь, и достаточно рассмотреть уравнение

$$\frac{d^2v}{dy^2}+y^{-1}v=0, \tag{2}$$

где ради краткости опущен известный постоянный множитель при y. Это уравнение относится к типу уравнения Риккати

$$\frac{d^2v}{dy^2}+y^{\mu}v=0, \tag{3}$$

решением которого вообще является (m дробное) [1])

$$v=\sqrt{y}\,[AJ_m(\xi)+BJ_{-m}(\xi)], \tag{4}$$

где

$$m=\frac{1}{\mu+2}, \qquad \xi=2my^{1/2m}. \tag{5}$$

Если, как в данном случае, m целое, то $J_{-m}(\xi)$ следует заменить (§ 341) функцией второго рода $Y_m(\xi)$. Следовательно, общее решение уравнения (2) есть

$$v=\sqrt{y}\,[AJ_1(2\sqrt{y})+BY_1(2\sqrt{y})]. \tag{6}$$

При переходе через нуль y изменяет знак, а вместе с тем и характер функций. Если мы будем рассматривать решение (6) как применимое на положительной стороне, то на отрицательной стороне

---

[1]) Lommel, *Studien über die Besselschen Functionen*, § 31, Leipzig, 1868; Gray and Matthews, *Bessel Functions*, стр. 233, 1895.

мы можем написать

$$v = \sqrt{y}\,[CJ_1(2\sqrt{y}) + DY_1(2\sqrt{y})], \qquad (7)$$

причем аргументы функций в решении (7) — чисто мнимые.

Из известного вида функций (§ 341) мы можем вывести следующее решение, применимое при малом y:

$$v = A(y - \tfrac{1}{2}y^2) +$$

$$+ B\left[\tfrac{1}{2}(1 - y + \tfrac{1}{4}y^2) - \ln(2\sqrt{y})\cdot\left(y - \tfrac{1}{2}y^2\right) + y - \tfrac{3}{4}y^2\right], \qquad (8)$$

так что в конечном счете

$$v = \tfrac{1}{2}B, \quad \frac{dv}{dy} = A - \tfrac{1}{2}B\ln y, \quad \frac{d^2v}{dy^2} = -A - \tfrac{1}{2}By^{-1}, \qquad (9)$$

причем v остается конечным во всех случаях.

Покажем теперь, что любое значение $-kU$ является допустимым значением n в уравнении (1). Место, где $n + kU = 0$, примем за начало y-ов; в первый момент предположим, что $n + kU$ не исчезает нигде в другом месте. В непосредственном соседстве с $y = 0$ решениями, применимыми на обеих сторонах, будут (6) и (7), причем они подчиняются условию, что v должно быть непрерывным. Следовательно, в силу (9), $B = D$, а три постоянные остаются произвольными. Определив таким образом характер функций в начале, при $y = 0$, подчиняем дальнейший их ход первоначальному уравнению (1), которое полностью определяет их, если известны эти три произвольные постоянные. В данном случае заданы два соотношения условиями, которые должны выполняться на неподвижных стенках или других границах жидкости, и таким образом весь вид v определен с точностью до постоянного множителя. Если B и D конечны, то в начале имеется бесконечная завихренность.

Любые другие места, в которых $n + kU = 0$ можно рассматривать аналогичным образом, и самое общее решение будет содержать столько произвольных постоянных, сколько имеется мест с бесконечной завихренностью. Однако, завихренность не должна обязательно быть бесконечной только потому, что $n + kU = 0$; и действительно, можно получить частное решение с одной лишь бесконечной завихренностью. В любом другом критическом месте, например, в таком, каким мы можем считать начало, B и D могут исчезать, так что $v = 0$, $d^2v\,dy^2 = A$ или C.

На основании этих рассуждений казалось бы, что бесконечности, которые появляются при $n + kU = 0$, не оказывают серьезного влияния на применение общей теории, коль скоро мы пренебрегаем квадратом отклонения от стационарности движения.

Значительная часть предыдущих параграфов заимствована из известных статей автора [1]). Читатель должен обратиться также к работам лорда Кельвина [2]), в которых рассматриваются эффекты вязкости.

370. Остается описать явление чувствительного пламени и показать, насколько это возможно, применение теоретических принципов. В принципе комбинация пламени и резонатора, описанная в § 322*h*, может быть названа чувствительной; однако, в этом случае название это следует скорее отнести к резонатору, а роль пламени состоит только в поддержании путем периодического снабжения теплотой однажды начавшегося колебания резонатора. Следуя Тиндалю, мы можем с успехом ограничить применение этого термина изолированными пламенами и струями, в которых происхождение чувствительности следует, несомненно, искать в неустойчивости, сопровождающей вихревое движение.

Самым ранним наблюдением по этому вопросу было наблюдение профессора Леконта [3]), который заметил прыжки пламени обыкновенной двойной горелки, дающей пламя в форме рыбьего хвоста (fishtailburner) в ответ на определенные ноты виолончели. Условием чувствительности было, чтобы при отсутствии звука пламя было на границе вспышки. Когда давление газа уменьшалось, то чувствительность терялась.

Произведенное независимо наблюдение такого же рода привлекло внимание проф. Барретта к чувствительным пламенам; при этом он исследовал тип горелки, наилучшим образом подходящей для работы при обычных давлениях газа в газовой сети [4]). „Она состоит из стеклянной трубки приблизительно в $^3/_8$ дюйма (1 *см*) диаметром, сжатой в отверстии до $^1/_{16}$ дюйма (0,16 *см*) в диаметре. Весьма существенно, чтобы это отверстие было слегка V-образно... Нет ничего легче, чем сделать подобную горелку; необходимо только вытянуть на газовом пламени кусок стеклянной трубки и ножницами придать сжатию указанную форму".

Однако, значительно более поразительным является пламя высокого давления, примененное Тиндалем. Газ подавался из специального резервуара под давлением примерно в 25 *см* водяного столба к очень малому отверстию (pinhole) стеатитовой горелки, причем пламя увеличивалось по высоте, достигая примерно до 40 *см*. Под влиянием звука подходящей (очень высокой) частоты пламя гудит и спадает,

---

[1]) *Proc. Math. Soc.*, том XI, стр. 57, 1880; том XIX, стр. 67, 1887. Автор надеется опубликовать в скором времени дополнение.

[2]) Kelvin, *Phil. Mag.*, том XXIV, стр. 188, 272, 1887.

[3]) Leconte, „On the Influence of Musical Sound on the Flame of a Jet of Coalgas", *Phil. Mag.*, том XV, стр. 235, 1858. [Статья эта была помещена в *Sullivan's American Journal*, янв. 1858; русский перевод помещен в приложении к переводу книги Тиндаля *Звук* (пер.).]

[4]) Barrett, *Phil. Mag.*, том XXXIII, стр. 216, 1867.

пожалуй, до половины первоначальной высоты [1]). Тиндаль показал, что чувствительным местом является основание пламени. Звук, подводимый по трубке, не эффективен, если он подается к пламени несколько выше, а также, если он подходит к горелке ниже места, откуда выходит пламя.

Тиндалю мы обязаны также доказательством того, что эти необычайные явления следует приписать не самому пламени, как таковому. Такие же по существу явления получаются в случае, когда струя незажженного газа — углекислоты, водорода, или даже воздуха — вытекает из отверстия под соответствующим давлением. Их можно сделать видимыми двумя способами. Путем прибавления дыма можно сделать видимым весь путь струи; при этом обнаружилось, что подходящие струи дыма могут даже превзойти пламена в чувствительности. „Тоны, которые эффективны здесь, имеют значительно более низкую частоту, чем те, которые наиболее эффективны в случае пламени". Другой способ сделать видимой глазу чувствительность воздушной струи это — заставить ее касаться такого пламени, как например пламя свечи, которое просто играет роль индикатора.

В чувствительном пламени проф. Гови [2]) и Барри [3]) газ не горит у горелки, но загорается на внешней стороне проволочной сетки, удерживаемой на соответствующем расстоянии. На таком же принципе основано устройство, примененное автором [4]). Струя светильного газа, выходящая из горелки с малым отверстием, устремляется вертикально во внутренность полости, из которой воздух удален. Затем она проходит в латунную трубку длиною в несколько дюймов и по достижении верхушки зажигается в отверстии. Передняя стенка полости образована гибкой мембраной из шелковой бумаги (tissue-paper), сквозь которую внешние звуки могут достигать горелки. В этих случаях чувствительным агентом является незажженная часть струи. При этом способе горелка требует значительно меньшего давления газа, чем это необходимо в случае, когда пламени позволяют подойти к горелке, а звуки, которые оказывают наибольшее влияние, ниже.

Пораженные аналогией между этими явлениями и явлениями, происходящими в водяных струях, исследованных Саваром и Плато, первые наблюдатели, повидимому, приходили к поспешному заключению, что и характер разбиения также одинаков — симметричен относительно оси; а проф. Леконт зашел даже так далеко, что делал заключение о существовании силы сцепления в газах. Однако, поверхностное натяжение требует весьма резкого перехода от одних свойств вещества к другим по обе стороны, такого, который может существовать только мгновенно, если имеется стремление к смешиванию, так

---

[1]) Tyndall, *Phil. Mag.*, том XXXIII, стр. 92, 375, 1865; Sound, 3-е изд., гл. VI.

[2]) Govi, Torino, *Atti. Acad. Sci.*, том V, стр. 396, 1869.

[3]) Tyndall, *Sound.*, 3-е изд., стр. 240.

[4]) *Camb. Phil. Soc. Proc.*, том IV, стр. 17, 1883.

что кажется совершенно неправдоподобным, чтобы капиллярность играла здесь какую-нибудь заметную роль.

Вопрос о характере разбиения, — есть ли это постепенное увеличение узловатости, или постепенное увеличение извилистости, — имеет величайшее значение, и ответ все еще в некоторых случаях, пожалуй, сомнителен. Но то, что последнее вообще преобладает, следует из различных оснований. Необходимость несимметричного отверстия, как это отметил Барретт, решительно свидетельствует в пользу такого предположения. Такое же заключение вывел Риду [1]) на основании результатов некоторых остроумных опытов. Этот наблюдатель нашел, далее, что двойные пламена, образованные путем слияния направленных под малым углом друг к другу струй, выходящих из двух совершенно одинаковых стеклянных трубок, обнаруживают чувствительность, зависящую от направления звука. Если это направление лежит в плоскости симметрии, содержащей пламя (т. е. в плоскости, перпендикулярной к плоскости трубок), то пламя не отвечает.

Даже в случае длинного пламени высокого давления, выходящего из горелки с малым отверстием, когда по всей видимости как отверстие, так и пламя (когда оно не возмущено) вполне симметричны, есть основание считать, что характер разбиения извилистый, или несимметричный. Пожалуй, наиболее легким путем, приводящим к такому заключению, является исследование поведения пламени, предоставленного действию стоячих звуковых волн — таких, какие можно получить путем наложения на прямые волны, исходящие из источника, дающего чистый тон, волн, отраженных перпендикулярно от плоского препятствия, например от плоской стеклянной пластинки. На основании аналогии с капиллярными струями, — аналогии, которая распространялась многими писавшими по этому вопросу дальше, чем это допускалось обстоятельствами, — пламя должно было бы возбуждаться, когда отверстие находится в узле, где давление изменяется сильнее всего, и оставаться индифферентным в пучности, где давление совершенно не изменяется. Нетрудно было экспериментально [2]) показать, что фактически происходит как раз обратное. Источником звука служил птичий манок (§ 371), а наблюдения производились путем передвигания горелки вперед и назад перед отражателем до тех пор, пока не находилось положение, в котором пламя было наименее возмущено. Такие положения были очень хорошо определены, и измерения показали, что расстояния от отражателя пропорциональны натуральному ряду чисел: 1, 2, 3 и т. д., а следовательно, соответствуют узлам. Если бы эти положения совпадали с пучностями, то расстояния должны были бы образовать ряд, пропорциональный *нечетным* числам — 1, 3, 5 и т. д. Длина волны звука, определяе-

[1]) Ridout, *Nature*, том XVIII, стр. 604, 1878.
[2]) *Phil. Mag.*, том VII, стр. 153, 1879.

мая двойным интервалом между последовательными минимумами, равнялась 31,3 *мм*, что соответствует высоте $f\sharp^{VI}$.

Несколько наблюдений было произведено в то же время над положениями молчания, оценивавшимися ухом, слушавшим звук сквозь трубу. Как и следовало ожидать, они совпадали с пучностями, деля пополам интервалы, образованные пламенем. Когда пламя находилось в положении минимального эффекта и свободный конец трубы удерживался вблизи горелки на одном и том же расстоянии от отражателя, то слышимый звук имел максимум, и он уменьшался, когда конец трубы несколько смещался в том или другом направлении. Таким образом было установлено, что пламя подвергается воздействию там, где звук не оказывал бы действия на ухо, и наоборот.

Пламена, выходящие из горелок с малыми отверстиями, которые хорошо отзываются в других отношениях, повидимому, всегда обнаруживают заметное различие в зависимости от направления, в котором приходит звук. Если во время действия птичьего манка горелку непрерывно поворачивать вокруг ее оси, то можно найти два положения, отличающихся на 180°, в которых ответ очень слабый, или его совсем нет. Эта особенность может иногда приниматься во внимание в экспериментах [1]). Так, после того, как сделано приспособление, благодаря которому прямой звук не оказывает действия, сильная вспышка может все же происходить в результате прихода звука от того же самого источника после отражения от небольшой стеклянной пластинки, которая удерживается в таком положении, что направление прибытия звука образует угол в 90° с направлением прямого звука, — и это несмотря на то, что расстояние, проходимое отраженным звуком, больше.

Тиндаль [2]) выставляет в качестве существенного условия полного успеха наиболее тонких экспериментов с такими пламенами, „чтобы был открыт свободный путь для передачи колебаний от пламени *назад* через газопровод, который питает его. Отверстия кранов близ пламени должны быть по возможности шире". Этот совет, пожалуй, более оправдан, чем обоснование, данное ему. Проф. Барретт [3]) приписывает вредное действие частично открытого крана неправильному потоку и возникающему вследствие этого отталкиванию течения газа в трубке от стенки к стенке. В некоторых моих собственных экспериментах [4]) введение в подающую трубку стеклянной насадки, делающей течение газа в высшей степени неправильным, не оказывало влияния, как не оказывали влияния и другие препятствия, если только они не сопровождались шипящими звуками. Вредное действие частично открытого крана естественно было, таким обра-

[1]) *Proc. Roy. Inst.*, том XII, стр. 192, 1888; *Nature*, том XXXVIII, стр. 208, 1888.
[2]) Tyndall, *Phil. Mag.*, том XXXIII, стр. 99, 1867.
[3]) Barrett, *Phil. Mag.*, том XXXIII, стр. 288, 1867.
[4]) *Phil. Mag.*, том XIII, стр. 345, 1882.

зом, приписать возникновению внутренних звуков такого типа, к которым пламя чувствительно, и этот взгляд на вещи подтверждался некоторыми наблюдениями над давлением газа в соседстве с горелкой. „На пути газа были поставлены два крана, один — совсем недалеко за ответвлением к манометру, а другой — отделенный от него резиновой трубкой значительной длины. Когда первый кран был полностью открыт, а пламя подводилось близко к точке вспышки путем соответствующего регулирования дальнего крана, то чувствительность к внешним звукам была велика, и манометр указывал давление в 10 дюймов (25,4 *см*) водяного столба. Но когда дальний кран оставался полностью открытым, а регулирование производилось другим краном, нельзя было получить высокой чувствительности; объяснение было очевидно, и состояло в том, что пламя вспыхивало без внешнего возбуждения, в то время как давление все еще равнялось 1 дюйму (2,54 *см*), т. е. было меньше того, которое было при горении без вспыхивания в первом приспособлении. Открывая снова ближний кран полностью и регулируя дальний до тех пор, пока давление в манометре не достигло 9 дюймов (22,9 *см*), можно было обнаружить, что пламя сравнительно нечувствительно".

Наиболее непосредственное и удовлетворительное доказательство характера разбиения есть несомненно непосредственное наблюдение. Пользуясь струей фосфорного дыма, выходящего из стеклянного отверстия, и стробоскопическим диском, я сумел (1879) увидеть изгибы струи, когда она возмущается камертоном с частотою в 256, колеблющимся в соседстве со струей [1]). Кроме того, помещая отверстие точно в плоскость симметрии между ножками камертона, можно было убедиться, что необходимым возмущением является движение, поперечное к струе. В таком положении наблюдался лишь незначительный эффект, но малейшее смещение приводило к быстрому разрушению струи".

„Для того чтобы возбудить чувствительность струй к тонам умеренной частоты, оказалось выгодным, как я обнаружил, пользоваться резонаторами. Последние могут иметь форму гельмгольцовых резонаторов; но и соответственным образом подобранные широкогорлые склянки отвечают этому назначению. Существенно здесь, чтобы струя вытекала из отверстия в область быстрого обратного движения в устье резонатора, и притом в поперечном направлении".

„Хорошие результаты были получены при частоте 256. Если заставлять одновременно звучать два камертона приблизительно такой частоты, несколько расстроенных друг относительно друга, то эволюции струи дыма, соответствующие слышимым биениям, хорошо заметны. Постепенно повышая давление, под которым подавался дым, по способу, обычному для таких экспериментов, можно было добиться высокой степени чувствительности, как с вытянутым стеклянным от-

[1]) *Phil. Mag.*, том XVII, стр. 188, 1884.

верстием, так и со стеатитовой горелкой с малым отверстием, которой пользовался Тиндаль. В некоторых случаях (даже при частоте 256) комбинация струи и резонатора оказывались почти также чувствительными к звуку, как само ухо".

„Поведение чувствительной струи не зависит от частиц дыма, роль которых состоит только в том, чтобы сделать эффекты более легко видимыми. Я производил повторно эти наблюдения без дыма, просто заставляя струи воздуха, вытекающие из этих же отверстий, ударять в пламя свечи, помещенной на соответствующем расстоянии. В таких случаях, как было указано Тиндалем, пламя просто действует как индикатор состояния струи, иначе невидимой. Даже и без резонатора чувствительность таких струй к свистящим звукам может быть использована с успехом для постановки изящных опытов".

„Комбинация струи, резонатора и пламени обнаруживает иногда тенденцию звучать сама по себе; однако, мне не удавалось получать хорошо поддерживаемый звук. Как бы то ни было этот эффект в таком виде, пожалуй, соответствует эффекту, замеченному Саваром и Плато при наблюдении водяных струй, разрушающихся под действием капиллярного натяжения и при распадении на капли ударяющихся в твердое препятствие, как например, дно сосуда, механически связанное с отверстием, откуда вытекает начальная струя. Вследствие этой связи всякий правильный цикл с частотой разбиения способен, как это и было, распространяться сам по себе".

„Надеясь улучшить условия наблюдения над изменениями неустойчивых струй, я стал далее прибегать к окрашенной воде, текущей под водой. В этой форме экспериментом легче управлять, чем в случае струй дыма, которые трудно освещать и которые легко разрушаются при малейшем дуновении. В качестве окрашивающего вещества предпочтительно употреблялся марганцевокислый калий, причем окраску можно было устранять, примешивая к общей массе жидкости немного сернокислой закиси железа. Струи обычно сбрасывались вниз в широкий сосуд или в стеклянную ванну и освещались сзади сквозь кусок стекла".

„Оказалось, что тоны максимальной чувствительности для этих струй жидкости были значительно ниже, чем тоны, необходимые для дымовых струй или пламен. Камертоны, дающие от 20 до 50 колебаний в секунду, повидимому, вызывали максимальный эффект, для наблюдения которого необходимо только привести подставку камертона в соприкосновении со столом, на котором находится прибор. Общее поведение струи можно было наблюдать без стробоскопических приспособлений, — заставляя жидкость в сосуде вибрировать от стенки к стенке под действием тяжести. При этом было видно, что окрашенная линия, выходящая из отверстия, становится постепенно все более и более извилистой, а несколько ниже представляется в виде шнурка, самопроизвольно изгибающегося вперед и назад. Я проследил процесс разбиения при постепенно увеличивающихся

частотах колебательного возмущения — от 1 до 2 в секунду, примерно, до 24 в секунду, — пользуясь электромагнитными прерывателями, посылающими прерывистые токи с помощью электромагнита, который действовал на арматуру из мягкого железа, прикрепленную к отверстию. На каждой стадии давление, под которым подается струя, должно быть отрегулировано так, чтобы давать правильную степень чувствительности. Если давление слишком велико, то струя вспыхивает независимо от наложенного колебания, и изменения становятся неправильными; в противном случае, явления, хотя и наблюдаются обычно, но не так хорошо заметны, как в случае, когда произведено соответствующее регулирование. После некоторой практики можно достаточно хорошо истолковать то, что видно непосредственно; но для того чтобы иметь перед глазами картину того, что происходит в действительности, мы должны прибегнуть к прерывистому наблюдению. Наилучшие результаты получаются с двумя несколько выведенными из унисона камертонами, один из которых служит для того, чтобы создать разбиение струи, а другой (при помощи перфорированных пластинок, прикрепленных к его ножкам) — для того, чтобы осуществить прерывистое наблюдение. Разность частот должна быть равна примерно 1 колебанию в секунду. Если имеется возможность получить равномерное вращение, то вместо второго камертона можно взять стробоскопический диск[1]".

„Выполнение этих наблюдений, в особенности при желании их нарисовать, трудно, если мы не в состоянии управлять плоскостью изгибов. Для того чтобы прилично видеть фазы, необходимо, чтобы плоскость изгибов была перпендикулярна линии зрения; однако, при симметричном отверстии это может произойти только случайно. Эту трудность можно преодолеть, делая легкие зарубки на конце вытянутого стеклянного отверстия с двух противоположных сторон (Барретт). Таким способом обычно плоскость изгиба делается определенной, именно, как плоскость, содержащая зарубки, так что поворачивая отверстие вокруг оси, можно достаточно хорошо показать глазу изгибы струи".

„Иногда обнаруживается, что струя делится на две части, несовершенно связанные посредством как бы пленки. Это, повидимому, соответствует раздвоению пламен и дымовых струй под сильным звуковым действием и вызывается, повидимому, звуковыми импульсами, которые мы можем рассматривать как разорванные волны, принимающие попеременно различные направления".

„Как уже было отмечено, тоны, свойственные водяным струям, значительно ниже, чем тоны, свойственные струям воздуха, вытекающим из тех же самых отверстий. Кроме того, соответствующие скорости

---

[1]) В оригинальной статье (*Phil. Mag.*, том XVII, стр. 188, 1884) приведены рисунки госпожи Сиджвик. См. также *Proc. Roy. Inst.*, том XIII, стр. 261, 1891, где воспроизведены моментальные фотографии.

в первом случае значительно меньше, чем во втором. Причиной этой разницы является не бóльшая плотность, как это можно было, пожалуй, предположить сначала, но меньшая вязкость воды, разумеется, кинематическая. Нетрудно видеть, что плотность, которая предполагается одинаковой для струи и для окружающей жидкости, несущественна, если не считать, конечно, того, что более плотная жидкость требует большего давления для того, чтобы приобрести заданную скорость. Влияние вязкости жидкости на эти явления выяснено в указанной выше статье об устойчивости и неустойчивости определенных движений жидкости [1]), а законы динамического подобия в применении к жидкостному трению, изложенные Стоксом [2]), позволяют сравнивать поведение жидкостей друг с другом. Размерность кинематического коэфициента вязкости есть площадь, деленная на время. Если пользоваться одинаковым отверстием в обоих случаях, то следует сохранять ту же самую единицу длины. Таким образом, следует брать время обратно пропорциональным, а скорость — прямо пропорциональной коэфициенту вязкости. При переходе от воздуха к воде следует уменьшать частоту и скорость приблизительно в 10 раз. Однако, несмотря на меньшую скорость, водяная струя потребует большего давления, поскольку плотности различаются в отношении, превышающем 100:1".

Побуждаемый этими соображениями, я производил опыты для проверки того, будут ли струи вести себя иначе в теплой (менее вязкой) воде, а также для того чтобы обнаружить эффект замены воды смесью равных частей алкоголя и воды, которая, как известно, более вязка, чем каждая из ее составляющих. Обнаружилось, что эффект изменения вязкости различен. Струя, которая не выдерживала без возбуждения давления более чем $^1/_4$ дюйма (0,63 *см*) водяного столба, если жидкостью служила вода при температуре ниже точки кипения, требовала приблизительно 25 дюймов (63 *см*) давления для своего возбуждения, если вместо воды бралась алкогольная смесь. Этими явлениями была ярко установлена важная роль вязкости.

Характер действия вязкости, вероятно, следующий. У основания струи, в том месте, где она только что покидает отверстие, имеется хорошее приближение к разрывному течению и высокая степень неустойчивости. Если подходит возмущение достаточной интенсивности и соответствующего периода, то правильное движение нарушается и не может быть дальше восстановлено. Однако, неустойчивость имеет чрезвычайно короткий срок для того, чтобы произвести свое действие. Под влиянием вязкости изменения становятся более постепенными, и неустойчивость быстро уменьшается, если не исчезает вовсе. Таким образом, если возмущение недостаточно для того, чтобы вызвать разбиение за короткий период неустойчивости, то струя в

---

[1]) *Math. Soc. Proc.*, февраль, 12, 1880. См. § 366.

[2]) Stokes, *Camb. Phil. Trans.* 1850 „On the Effect of Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums" § 5. См. также Helmholtz, *Wied. Ann.*, том VII, стр. 337 (1879) или другое издание, том. I, стр. 891.

значительной степени может вести себя так, как будто бы она вовсе не была возмущена, и может достичь полного развития, наблюдаемого в длинных пламенах и дымовых струях. Этот временный характер неустойчивости представляет вторую черту, строго отличающую эти струи от струй Савара, в которых капиллярность имела неограниченное время действия.

Когда пламя зажигается у горелки, то имеются дальнейшие осложнения, которым трудно дать удовлетворительное объяснение. Высокая температура приводит, конечно, к увеличению вязкости, и это позволяет объяснить допустимость в этом случае более высокого давления и эффективность более низких тонов. Однако, возможно, что изменение, обязанное зажиганию, имеет еще более фундаментальную природу.

Для того чтобы получить ценные сведения относительно разбиения струй, можно применить остроумный метод наблюдения, которым мы обязаны Бэллу [1]); однако, результаты, полученные автором, не согласуются со взглядами Бэлла, придерживающегося теории симметричности. В этом методе прямо перед отверстием, из которого вытекает воздух, помещается второе подобное же отверстие, которое соединяется с ухом наблюдателя посредством резиновой трубки. Предусмотрены особые приспособления для того, чтобы отверстие, через которое звук воспринимается, было отрегулировано достаточно точно как в продольном, так и в поперечном направлении. Если расстояние подобрано правильно, то небольшие возмущения, действующие на струю, воспринимаются в увеличенных размерах. Так, слабо звучащий камертон, поднесенный к струе, слышен громко; то, что этот эффект обязан особым свойствам струи, доказывается непосредственно путем прекращения подачи воздуха: тогда звук становится слабым, если не совершенно неслышным. Бэлл доказал, что для эффективности этого приспособления требуется малая площадь отверстия для слушания; если последнее достаточно велико, чтобы пропускать полностью поток воздуха, сопровождающий струю, то слышимость сравнительно мала.

В нижеследующих экспериментах струя воздуха из хорошо отрегулированных мехов вытекала через стеклянную насадку и ударялась в подобную же слуховую трубку. Струя возбуждалась камертонами (c' или c''), удерживаемыми вблизи.

Если положение камертона было таково, что плоскость его ножек была перпендикулярна струе, а продолжение оси подставки пересекалось со свободным концом насадки, то слышимый звук был значительно слабее, чем когда камертон смещался вбок в его плоскости так, что отверстие приближалось к одной из ножек. Это, повидимому, доказывает, что и здесь также эффект создается не изменением давления, а поперечным движением, заставляющим изгибаться струю.

---

[1]) Bell, *Phil. Trans.*, том CLXXVII, стр. 383, 1886.

Очевидное подтверждение этого можно получить из наблюдений над эффектом малых движений слуховой насадки. Если расположить эту насадку аксиально, то основной тон камертона, поднесенного сбоку к отверстию струи, слышен лишь слабо, но октава этого тона слышна и часто очень сильно. Однако, если сместить вбок слуховую насадку, то основной тон камертона появляется и слышен громко.

371. Очень удобным источником звуков высокой частоты является птичий манок, в котором поток воздуха, выходящий из круглого отверстия в тонкой пластинке, ударяется центрально в подобное же отверстие в параллельной пластинке, прикрепленной на небольшом расстоянии. Условия, от которых зависит частота, исследовались Зондхауссом [1]), но остается еще много темного в вопросе о способе возбуждения колебаний.

Согласно Зондхауссу, частота относительно независима от размеров и формы пластинок, изменяясь прямо пропорционально скорости (v) струи и обратно пропорционально расстоянию (d) между пластинками. Если допустить независимость других элементов и считать, что частота n является функцией только от v, d и b — диаметра струи, то из динамического подобия следует, что

$$n = \frac{v}{d} \cdot f\left(\frac{b}{d}\right), \tag{1}$$

где f — произвольная функция. Таким образом, если b/d постоянно, то закон Зондхаусса должен выполняться. Вследствие очень малых размеров применяемых свистков можно с достаточным основанием заключить, что действие их должно быть приблизительно независимым от скорости звука, а следовательно (при данной v), — от плотности газа; возникает, однако, вопрос, не является ли существенным элементом вязкость. Если предположить, что соблюдается геометрическое подобие (b пропорционально d), то теоретическая формула, если сохранить вязкость, есть

$$n = \frac{v}{d} \cdot F\left(\frac{\nu}{vd}\right), \tag{2}$$

где ν — кинематический коэфициент вязкости, имеющий размерность 2 по длине и 1 — по времени. Но если обратиться к численному примеру, то кажется невероятным, чтобы степень вязкости играла большую роль в определении частоты. В единицах CGS $\nu = 0{,}16$ для воздуха; и если давление, которое гонит струю, равняется 1 *см* ртутного столба, то $v = 4000$ *см/сек*. Следовательно, если мы возьмем $d = 0{,}1$ *см*, то будем иметь $\nu/vd = 0{,}0004$, так что $F(\nu/vd)$ едва ли может сильно отличаться от $F(0)$.

Птичий манок очень легко сделать. Первая пластинка диаметром в 1 или 2 *см* прикрепляется или припаивается к концу короткой подающей трубки. Вторую пластинку свистка удобно сделать тре-

[1]) Sondhauss, *Pogg. Ann.*, том XCI, стр. 126, 1854.

угольной, причем отогнутые вниз углы припаиваются к первой пластинке. Для свистков со средней высотой тона отверстие можно сделать в жестяной пластинке, но если желательно получить очень высокий тон, то более подходящим материалом будет тонкая листовая латунь или листовое серебро. Отверстия в последнем случае можно уменьшить до $^1/_2$ *мм* в диаметре, а расстояния между ними до 1 *мм*. Во всяком случае края отверстий должны быть острыми и чистыми [1]).

Для испытания свисток должен быть соединен с хорошо регулируемой подачей воздушной струи и с манометром, позволяющим точно измерять действующее давление. Когда будет найдено, что свисток звучит хорошо, то следует записать давление и соответствующую длину волны. Если тоны высоки, или неслышны, то требуется чувствительное пламя с высоким давлением, а длина волны должна рассчитываться из интервала между положениями, в которых необходимо удерживать отражатель для того, чтобы пламя обнаруживало наименьшее возмущение (§ 370). Без всяких затруднений можно получить длины волн (полные) всего в 1 *см*, а с некоторыми предосторожностями можно достичь и длин волн в 0,6 *см*, соответствующих приблизительно 50 000 колебаниям в секунду. В опытах над минимальными длинами волн расстояние между свистком и пламенем не должно превышать 50 *см*, а пламя должно быть отрегулировано до уровня вспышки.

Во многих случаях птичий манок, который не звучит, можно заставить звучать при помощи отражающей пластинки, помещаемой на небольшом расстоянии перед ним. На практике отражатель можно с успехом заменить полоской металла, например в 1 *см* шириной; и в тех случаях, когда такое добавочное приспособление необходимо, правильное расстояние равно (четному или нечетному) кратному половины длины волны. В некоторых случаях необходимое положение полоски определяется весьма точно.

По вопросу о том, является ли возмущение струи, сопровождающее генерацию звука, узловатым или извилистым, можно получить некоторое свидетельство из наблюдений над характером излучения звука. Если принять последнюю точку зрения, то мы могли бы ожидать, что звук будет ослабевать или даже совершенно исчезать в аксиальном направлении, как это происходит, например, в случае звука, излучаемого колоколом (§ 282). Однако, насколько я мог наблюдать, звук, испускаемый птичьим свистком, звучащим без помощи отражающей полоски, однороден в пределах широкого угла; этот факт можно рассматривать как свидетельствующий строго в пользу того взгляда, что возмущение здесь симметрично по характеру, или узловато. Другое свидетельство в пользу такого же заключения дает поведение резонирующих трубок, которые заставляют звучать при помощи

[1]) Проф. А. М. Мейер сконструировал изящно отделанные свистки, в которых расстояние между пластинками регулируется движением винта.

птичьих свистков. Пара перфорированных пластинок располагается симметрично на одном конце трубки длиною в 40 или 50 *см*. Другой конец трубки акустически открыт; сквозь свисток заставляют проходить слабый поток воздуха, проще всего при помощи очень узкой трубки, вставленной в открытый конец, в которую вдувается воздух ртом. Тщательно регулируя силу дутья, можно заставить трубку звучать в тоне различных гармоник, и самый факт, что она вообще звучит, повидимому, показывает, что поток воздуха, проходящего сквозь манок, переменный.

Характер действия, вероятно, примерно следующий. Когда симметричное расширение достигает второй пластинки, то оно не в состоянии пройти свободно сквозь отверстие, и возмущение отбрасывается, вероятно, со скоростью звука, — назад к первой пластинке, — где оно дает начало новому возмущению, которое в свою очередь растет при продвижении струи. Однако, освещение этого и многих родственных явлений остается еще несовершенным.

372. Эоловы тоны, подобные звукам эоловой арфы, возникают при действии ветра на натянутую проволоку, могущую колебаться с различной быстротой; таким образом, возникновение этих тонов несомненно связано с неустойчивостью вихревых слоев. Однако, несущественно, чтобы проволока принимала участие в колебании, и Струхаль [1]) изучал это явление в общем виде под названием „тонов, создаваемых трением (Reibungstöne)".

В экспериментах Струхаля заставляли вращаться с равномерной скоростью вокруг параллельной оси вертикальную проволоку, прикрепленную к соответствующей раме. Обнаружилось, что высота эолова тона, генерируемого относительным движением проволоки и воздуха, не зависит от длины и от натяжения проволоки, но изменяется с изменением диаметра d и скорости v относительного движения. В определенных пределах можно выразить соотношение между частотой n и этими данными в виде

$$n = 0{,}185\,\frac{v}{d}, \qquad (1)$$

где за единицы приняты сантиметр и секунда.

Если скорость была такова, что эолов тон совпадает с одним из собственных тонов проволоки, которая закреплена так, что может совершать независимо свободные колебания, то звук значительно усиливался, и благодаря этому преимуществу Струхаль нашел возможность расширить диапазон наблюдений. При наиболее крайних условиях, которые можно было в то время осуществить, наблюдаемая частота заметно отклонялась от значения, определяемого формулой (1). Далее он показал, что при данном диаметре и данной скорости повышение температуры сопровождалось падением частоты.

---

[1]) Strouchal, *Wied. Ann.*, том V, стр. 216, 1878. См. также **W. Kohlrausch**, *Wied. Ann.*, том XIII, стр. 545, 1881.

Наблюдения над струной [1]), совершающей колебания на манер эоловой арфы, под действием потока воздуха в дымовой трубе показали, что вопреки обычно высказывавшемуся мнению колебания в плоскости, перпендикулярной направлению ветра, также возникают. По формуле (1) расстояние, проходимое воздухом за одно полное колебание, приблизительно в шесть раз больше диаметра проволоки.

Если, как это представляется вероятным, можно не учитывать сжимаемости жидкости, то можно рассматривать n как функцию от v, d и ν — кинематического коэфициента вязкости. В этом случае выражение для n необходимо должно иметь вид

$$n = \frac{v}{d} \cdot f\left(\frac{\nu}{vd}\right), \tag{2}$$

где f — представляет произвольную функцию; при этом, если $\nu \sim vd$, то имеется динамическое подобие. При наблюдениях над воздухом при одной и той же температуре ν постоянно; и если d изменяется обратно пропорционально v, то nd/v должно быть постоянным, — результат, находящийся в полном согласии с наблюдениями Струхаля. Далее, если температура растет, то ν увеличивается, и для того чтобы оставаться в согласии с наблюдением, мы должны предположить, что функция f уменьшается с увеличением аргумента.

Изучение действительных значений в экспериментах Струхаля показало, что ν/vd всегда мало; таким образом, мы приходим к выводу о возможности представления f несколькими членами ряда Маклорена. Если положить $f(x) = a + bx + cx^2$, то получим

$$n = a\frac{v}{d} + b\frac{\nu}{d^2} + c\frac{\nu^2}{vd^3}. \tag{3}$$

Если можно пренебречь третьим членом в (3), то соотношение между n и v будет линейным. Этот закон был сформулирован Струхалем, и его графики показали, что коэфициент b отрицателен, как и требовалось для того, чтобы выразить наблюдавшийся эффект от повышения температуры. Далее,

$$d \cdot \frac{dn}{dv} = a - \frac{c\nu^2}{v^2d^2}, \tag{4}$$

так что $d \cdot \frac{dn}{dv}$ очень близко к постоянной — результат, также данный Струхалем на основании его измерений.

В целом, повидимому, эти явления удовлетворительно отображаются формулами (2) или (3), однако, динамическую теорию еще предстоит разработать. Было бы также интересно произвести подобные же опыты с жидкостями.

[1]) *Phil. Mag.*, том VII, стр. 161, 1879.

ГЛАВА XXII

КОЛЕБАНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

373. В настоящем труде невозможно пытаться хотя бы приблизиться к полному рассмотрению проблем, связанных с колебаниями твердых тел; и все же простейшие части теории, повидимому, невозможно обойти. Мы ограничимся здесь случаем *изотропного* вещества.

Общие уравнения равновесия уже были приведены в § 345. Если ρ — плотность и

$$a^2 = \frac{k + \frac{4}{3} n}{\rho}, \quad b^2 = \frac{n}{\rho}, \tag{1}$$

то мы имеем

$$(a^2 - b^2) \frac{\partial \delta}{\partial x} + b^2 \nabla^2 \alpha + X' = 0 \text{ и т. д.}, \tag{2}$$

где X', Y', Z' — приложенные силы, отнесенные к единице *массы*.

Если выделить в этих уравнениях реакции, действующие против ускорения, то по принципу Даламбера получим

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = (a^2 - b^2) \frac{\partial \delta}{\partial x} + b^2 \nabla^2 \alpha + X' \tag{3}$$

и еще два аналогичных уравнения. В уравнении (3) δ есть *растяжение*, отнесенное к α, β, γ по формуле

$$\delta = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}. \tag{4}$$

Если α, β, γ и т. д. пропорциональны e^{ipt} и $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = -p^2 \alpha$, то уравнение (3) принимает вид

$$(a^2 - b^2) \frac{\partial \delta}{\partial x} + b^2 \nabla^2 \alpha + p^2 \alpha + X' = 0. \tag{5}$$

Дифференцируя уравнение (3) и аналогичные ему уравнения по x, y, z и складывая, получим, в силу (4),

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \delta + \frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z}. \tag{6}$$

Аналогичные уравнения можно получить для *вращений* (ср. § 239), определяемых соотношениями

$$\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}=2\tilde{\omega}',\quad \frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}=2\tilde{\omega}'',\quad \frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}=2\tilde{\omega}'''. \tag{7}$$

Таким образом, если мы продиференцируем третье из уравнений (3) по y, а второе — по z и вычтем одно из другого, то получим

$$\frac{\partial^2\tilde{\omega}'}{\partial t^2}=b^2\nabla^2\tilde{\omega}'+\frac{1}{2}\frac{\partial Z'}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial Y'}{\partial z} \tag{8}$$

и два аналогичных уравнения для $\tilde{\omega}''$ и $\tilde{\omega}'''$. Следует заметить, что $\tilde{\omega}'$, $\tilde{\omega}''$, $\tilde{\omega}'''$ связаны соотношением

$$\frac{\partial\tilde{\omega}'}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{\omega}''}{\partial y}+\frac{\partial\tilde{\omega}'''}{\partial z}=0. \tag{9}$$

Теперь рассмотрим вкратце некоторые случаи распространения плоских волн при отсутствии приложенных сил. В уравнении (6), если X', Y', Z' равны нулю, а δ является функцией только x,

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}; \tag{10}$$

решением этого уравнения, так же как в § 245, будет

$$\delta=f(x-at)+F(x+at). \tag{11}$$

Для этой волны $\delta=\partial\alpha/\partial x$, а β и γ равны нулю; таким образом, этот случай подобен случаю распространения волн в сжимаемой жидкости. Следует, однако, заметить, что, в силу (1), скорость зависит от коэфициента жесткости (n), так же как и от сжимаемости ($\varkappa$).

В волне растяжения (11) вращения $\tilde{\omega}'$, $\tilde{\omega}''$, $\tilde{\omega}'''$ исчезают, как непосредственно следует из их выражений в формулах (7). Теперь нам нужно рассмотреть волну поперечного колебания, для которого δ исчезает. Если, например, мы предположим, что α и β равны нулю и что γ есть функция только от x (и от t), то будем иметь

$$\delta=0,\quad \tilde{\omega}'=\tilde{\omega}'''=0,\quad 2\tilde{\omega}''=-\frac{\partial\gamma}{\partial x}.$$

Уравнение для $\tilde{\omega}''$ имеет вид

$$\frac{\partial^2\tilde{\omega}''}{\partial t^2}=b^2\frac{\partial^2\tilde{\omega}''}{\partial x^2}, \tag{12}$$

т. е. такой же вид, как уравнение (10); такое же уравнение получается для γ. Таким образом, поперечное колебание распространяется в виде плоских волн со скоростью b — *меньшей*, чем скорость a волн растяжения.

На образовании стоячих волн при наложении движущихся положительных и отрицательных волн одинаковой длины волны останавливаться не приходится. Если $k=\frac{2\pi}{\lambda}$, где λ — длина волны, то нало-

жение положительной волны $\gamma = \Gamma \cos k(bt - x)$ на отрицательную волну $\gamma = \Gamma \cos k(bt + x)$ дает

$$\gamma = 2\Gamma \cos kbt \cdot \cos kx. \tag{13}$$

Второй распространяющейся волной может быть *отражение* первой от граничной поверхности, непроницаемой для энергии волн. Такой поверхностью может быть либо свободная поверхность, либо такая, у которой изменение γ прекращается.

374. Задача о распространении в трех измерениях возмущения, первоначально ограниченного конечной областью твердого тела, была впервые успешно рассмотрена Пуассоном, а исчерпывающее исследование всего вопроса было проведено Стоксом [1]). В силу (6) и (8) § 373, растяжение и вращения удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 \hat{\delta}}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \hat{\delta}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\omega}''}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 \tilde{\omega}, \tag{1}$$

решения которых, применимые к нашей цели, уже были полностью рассмотрены в §§ 273, 274. Оказывается, что во внешнем направлении распространяются с различными скоростями отдельные волны растяжения и сдвига, так что на достаточном расстоянии от источника эти волны разделяются. Если мы посмотрим, что происходит в отдаленной точке, то увидим, что в начальный момент там нет ни растяжения, ни сдвига. Когда приходит волна растяжения, то эффект начинается, но сдвига еще нет. По прошествии некоторого времени волна растяжения проходит, и в течение некоторого промежутка времени нет ни растяжения, ни сдвига. Затем приходит волна сдвига и в течение некоторого времени производит определенный эффект, после которого опять нет ни растяжения, ни сдвига.

Полное рассмотрение требует выражения смещений через $\hat{\delta}$, $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$, для вывода которых у нас нет места. На основании этих выражений можно доказать, что до прихода волны растяжения и после прохождения волны сдвига среда остается в покое. Между обеими волнами среда не является абсолютно невозмущенной, хотя здесь нет ни растяжения, ни сдвига.

Если начальные возмущения таковы, что нет волны сдвига, то все возмущение полностью ограничивается волной растяжения.

375. Темой § 374 было свободное распространение волн, возникающих в результате произведенного в начале возмущения. По меньшей мере не менее важной является задача о расходящихся волнах, поддерживаемых гармоническими силами, действующими по соседству с данным центром.

Сначала мы можем взять случай гармонической силы такого рода, что она создает волны растяжения. В силу уравнения (6) § 373, мы можем предположить, что во всех точках, за исключением начала

[1]) Stokes, „Dynamical Theory of Diffraction", *Camb. Phil. Trans.*, том IX. стр. 1, 1849.

координат,

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} = a^2\nabla^2\delta, \tag{1}$$

или, если δ, рассматриваемая как функция x, y, z, зависит только от r или $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, а рассматриваемая как функция времени она пропорциональна e^{ipt} (§ 241)

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\delta}{\partial r} + h^2\delta = 0, \tag{2}$$

где $h = p/a$. Решение уравнения (2), так же как в § 277, есть

$$\delta = \frac{e^{-ikr}}{r}. \tag{3}$$

Выражая в действительных величинах, получим

$$\delta = \frac{A\cos(pt - hr + \varepsilon)}{r}, \tag{4}$$

где A и ε — произвольны.

Преобразуя выражение (4) § 373, можно показать, что соотношение между δ и радиальным смещением w имеет вид

$$\delta = r^{-2}\frac{\partial(r^2w)}{\partial r}, \tag{5}$$

или, на большом расстоянии от начала, просто

$$\delta = \frac{\partial w}{\partial r}. \tag{6}$$

Таким образом, если r велико, то в соответствии с выражением (4)

$$w = -\frac{A}{hr}\sin(pt - hr + \varepsilon). \tag{7}$$

В этих волнах чистого растяжения движение радиально, т. е. параллельно направлению распространения, а распределение симметрично относительно начала.

Еще более интересна теория вынужденных волн растяжения, распространяющихся наружу из некоторого центра. Простейшим случаем является тот, когда волны, создаваемые периодической силой, скажем Z', действуют в пространстве T вблизи начала. Если мы предположим, что в уравнении (8) § 373 X', Y' исчезают и что все величины пропорциональны e^{ipt}, то найдем

$$\nabla^2\tilde{\omega}' + k^2\tilde{\omega}' + \frac{1}{2}b^{-2}\frac{\partial Z'}{\partial y} = 0, \tag{8}$$

$$\nabla^2\tilde{\omega}'' + k^2\tilde{\omega}'' - \frac{1}{2}b^{-2}\frac{\partial Z'}{\partial x} = 0, \tag{9}$$

$$\nabla^2\tilde{\omega}''' + k^2\tilde{\omega}''' = 0, \tag{10}$$

где через k обозначено $\frac{p}{b}$.

Эти уравнения решаются так же, как в § 277. Получаем $\tilde{\omega}''' = 0$ и $\tilde{\omega}' = \frac{1}{8\pi b^2}\iiint \frac{\partial Z'}{\partial y}\frac{e^{-ikr}}{r}\,dx\,dy\,dz$, где через r обозначено расстояние между элементом с координатами x, y, z вблизи начала (O) и рассматриваемой точкой P. Если проинтегрировать это выражение по y, то найдем

$$\tilde{\omega}' = -\frac{1}{8\pi b^2}\iiint Z'\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dx\,dy\,dz; \tag{11}$$

проинтегрированный член исчезает вследствие условия, что Z' конечна только внутри пространства T. Кроме того, поскольку предполагается, что размеры T очень малы по сравнению с длиной волны, $\frac{\partial(r^{-1}e^{-ikr})}{\partial y}$ можно вынести из-под знака интеграла. Удобно будет также изменить значения x, y, z, так что теперь они будут представлять координаты точки P относительно O. Таким образом, если, считать теперь Z' средним значением Z' внутри пространства T, то

$$\tilde{\omega}' = +\frac{TZ'}{8\pi b^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\cdot\frac{y}{r}. \tag{12}$$

Подобным же образом,

$$\tilde{\omega}'' = -\frac{TZ'}{8\pi b^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\cdot\frac{x}{r} \tag{13}$$

и

$$\tilde{\omega}''' = 0. \tag{14}$$

Вследствие симметрии относительно оси z достаточно рассмотреть точки, лежащие в плоскости ZX. Тогда $\tilde{\omega}'$ исчезает, так что вращение происходит вокруг оси, перпендикулярной как к направлению распространения (r), так и к направлению силы (z). Если обозначить через θ угол между этими направлениями, то результирующие вращения, совпадающие с $\tilde{\omega}''$, суть

$$\tilde{\omega} = -\frac{TZ'\sin\theta}{8\pi b^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right). \tag{15}$$

Если ограничиться точками, находящимися на большом расстоянии, то это выражение принимает простой вид

$$\tilde{\omega} = \frac{ikTZ'\sin\theta}{8\pi b^2}\frac{e^{-ikr}}{r}. \tag{16}$$

Смещение, соответствующее (16), перпендикулярно к r и находится в плоскости zr. Его значение определяется формулой

$$-2\int\tilde{\omega}\,dr = \frac{TZ'\sin\theta}{4\pi b^2}\frac{e^{-ikr}}{r},$$

или, если мы восстановим множитель e^{ikbt} и отбросим мнимую часть решения,

$$-2\int\tilde{\omega}\,dr = \frac{TZ'\sin\theta\cos k(bt-r)}{4\pi b^2}\frac{}{r}. \tag{17}$$

Если обозначить через $Z_1 \cos kbt$ полную силу, приложенную в начале, то

$$Z_1 = TZ' \cdot \rho, \tag{18}$$

так что решение (17) можно записать в виде

$$-2\int \tilde{\omega}\, dr = \frac{Z_1 \sin\theta}{4\pi\rho b^2} \frac{\cos k(bt-r)}{r}. \tag{19}$$

Таким образом, амплитуда колебания, распространяющегося наружу, обратно пропорциональна расстоянию и прямо пропорциональна синусу угла между лучом и направлением, в котором действует сила. В последнем направлении не распространяется никакое поперечное колебание.

Эти выражения можно применить для нахождения вторичного колебания, рассеивающегося в различных направлениях, когда плоские волны ударяются в небольшое препятствие, имеющее плотность, отличную от плотности остальной части тела. Мы можем предположить, что плоские волны выражаются формулой

$$\gamma = \Gamma \cos k(bt - x) \tag{20}$$

и что они ударяются в начале о препятствие с объемом T и плотностью ρ'. Дополнительная инерция твердого тела в этом месте могла бы компенсироваться силой $(\rho' - \rho)\ddot{\gamma}$ или $-(\rho' - \rho) k^2 b^2 \Gamma \cos kbt$, действующей во всем пространстве T; и если бы такая сила была действительно приложена, то первичные волны распространялись бы без перерыва. Таким образом, можно рассматривать вторичные волны как создаваемые силой, равной и противоположной указанной и действующей в точке O в направлении, параллельном Z. Полная величина силы определяется выражением

$$Z_1 \cos kbt = (\rho' - \rho) k^2 b^2 T\Gamma \cos kbt, \tag{21}$$

так что, в силу (19), вторичное смещение в удаленной точке (r, θ) равно

$$\frac{(\rho' - \rho) k^2 T\Gamma \sin\theta}{4\pi\rho} \cdot \frac{\cos k(bt-r)}{r}. \tag{22}$$

Интенсивность рассеянного колебания, следовательно, обратно пропорциональна четвертой степени длины волны (Γ задано) и прямо пропорциональна квадрату синуса угла между лучом и направлением колебания первичных волн. Таким образом, если первичный луч направлен вдоль x, а вторичный — вдоль z, то вторичных колебаний совершенно не будет в случае, если (как предположено выше) первичные колебания параллельны z; но, если первичные колебания параллельны y, то имеются вторичные колебания с полной амплитудой ($\sin\theta = 1$), и эти колебания совершаются в направлении, параллельном y [1]).

[1]) „On the Light from the Sky, its Polarization and Colour", *Phil. Mag.*, том XLI, стр. 107, 274, 1871; см. также *Phil. Mag.*, том XLI, стр. 447, 1871, где помещено исследование случая, когда препятствие отличается по упругости и по плотности от остальной среды.

376. В § 375 мы исследовали эффект периодический силы $Z_1 \cos kbt$, локализованной в начале. Теперь мы перейдем к рассмотрению случая силы, равномерно распределенной вдоль бесконечной прямой.

Имеются два принципиально различных случая такой силы: первый — когда сила, оставаясь сама все время параллельной оси z, распределена вдоль оси z, второй — когда сила распределена вдоль оси y. В первом случае, с которого мы и начнем, все движение происходит в двух измерениях симметрично относительно OZ, причем оно таково, что α и β равны нулю, а γ — функция только (x^2+y^2). Если, — что вполне достаточно, — мы ограничимся точками, расположенными вдоль OX, то $\tilde{\omega}'$ и $\tilde{\omega}'''$ исчезают, и нам остается только найти $\tilde{\omega}''$.

Простейшим путем рассмотрения этого случая является интегрирование результата, представленного в выражении (16) § 375. $\rho TZ'$ заменится $Z_{11}dz$, величиной силы, распределенной на элементе dz; r обозначает расстояние от точки P на OX до элемента dz на OZ; θ — угол между r и z. Вращение $\tilde{\omega}''$ вокруг оси, параллельной y, вызываемое этим элементом силы, есть, таким образом,

$$\frac{ikZ_{11}dz}{8\pi b^2\rho}\frac{xe^{-ikr}}{r^2}. \tag{1}$$

При интегрировании x остается постоянным, и $r^2=x^2+z^2$; так что, если положить $r-x=h$, то нужно рассмотреть выражение

$$\int \frac{ie^{-ikr}dr}{r\sqrt{r^2-x^2}} \quad \text{или} \quad \int \frac{ie^{-ikx}\cdot e^{-ikh}\,dh}{(x+h)\sqrt{2x+h}\sqrt{h}}. \tag{2}$$

Из этого интеграла можно получить строгое решение, но мы удовлетворимся, так же как в § 342, ограниченной формой, получающейся при очень большом kx. Таким образом, в качестве эквивалента выражений (2) получим

$$\frac{2e^{-ikx}}{x\sqrt{2x}}\int_0^\infty \frac{ie^{-ikh}dh}{\sqrt{h}} = \frac{2\sqrt{\pi}e^{-i\left(kx-\frac{1}{4}\pi\right)}}{x\sqrt{2kx}}, \tag{3}$$

и, следовательно, в качестве интеграла выражения (1) будем иметь

$$\tilde{\omega}'' = \frac{kZ_{11}}{4\pi b^2\rho}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2kx}}e^{-i\left(kx-\frac{1}{4}\pi\right)}. \tag{4}$$

Отсюда можно непосредственно получить γ. Имеем

$$\gamma = -2\int\tilde{\omega}''dx = \frac{Z_{11}}{2\pi b^2\rho}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2kx}}e^{-i\left(kx+\frac{1}{4}\pi\right)}, \tag{5}$$

или, если мы восстановим временной множитель и опустим мнимую часть решения,

$$\gamma = \frac{Z_{11}}{2\pi b^2\rho}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2kx}}\cos k\left(bt-x-\frac{1}{8}\lambda\right). \tag{6}$$

Это соответствует силе $Z_{11}\cos kbt$ на единицу длины оси z. Вследствие симметрии мы можем применить выражение (6) к точкам, не расположенным на оси x, заменив x через $\sqrt{x^2+y^2}$. То, что значение γ обратно пропорционально квадратному корню из расстояния от оси z, можно было предвидеть на основании принципа энергии.

Можно было бы исследовать решение и непосредственно, выразив его через γ, без введения вращений $\tilde{\omega}$.

Остается рассмотреть случай, когда приложенная сила, все еще параллельная оси z, распределена вдоль OY, а не вдоль OZ. Точку P, в которой рассматривается эффект, можно считать расположенной в плоскости ZX на большом расстоянии R от O в таком направлении, что угол ZOP равен θ.

Вследствие двумерности силы $\beta=0$, а α и γ не зависят от y. Следовательно, $\tilde{\omega}'$ и $\tilde{\omega}''$ равны нулю. Однако, хотя эти компоненты вращения равны нулю в результирующем эффекте, действие отдельного элемента силы $Z_{11}dy$, расположенного на оси y, будет более сложным. Но мы можем не входить в его рассмотрение, ибо, как и прежде, в действительности эффект зависит только от элементов, расположенных в соседстве с точкой O. Таким образом вместо выражения (1) мы можем взять

$$\frac{ikZ_{11}dy\cdot\sin\theta}{8\pi b^2\rho}\,\frac{e^{-ikr}}{r}, \tag{7}$$

где r — расстояние между dy и P, так что

$$\frac{dy}{r}=\frac{dr}{y}=\frac{dr}{\sqrt{r^2-R^2}}.$$

Полагая $r-R=h$, получим, так же как в выражениях (2), (3) и (4),

$$\tilde{\omega}''=\frac{kZ_{11}\sin\theta}{4\pi b^2\rho}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2kR}}\,e^{-i\left(kR+\frac{1}{4}\pi\right)}, \tag{8}$$

а для смещения, перпендикулярного R,

$$-2\int\tilde{\omega}''dR=\frac{Z_{11}\sin\theta}{2\pi b^2\rho}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2kR}}\,e^{-i\left(kR+\frac{1}{4}\pi\right)}. \tag{9}$$

Следовательно, при силе $Z_{11}\cos kbt$ на единицу длины оси y мы имеем смещение, перпендикулярное R в точке (R, θ)

$$\frac{Z_{11}\sin\theta}{2\pi b^2\rho}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2kR}}\cos k\left(bt-R-\frac{1}{8}\lambda\right). \tag{10}$$

377. Так же, как в § 375, мы можем воспользоваться результатами § 376 для составления выражений вторичных волн, рассеиваемых малым, совпадающим с OZ и имеющим плотность ρ' цилиндрическим препятствием, о которое ударяются первичные параллельные волны. Если выражение первичных волн дается (20) § 375, то

мы имеем

$$Z_{11} = (\rho' - \rho)\, k^2 b^2 \cdot \pi c^2 \cdot \Gamma, \tag{1}$$

где πc^2 — площадь поперечного сечения препятствия. Таким образом, если обозначить $\sqrt{x^2+y^2}$ через r, то будем иметь из (6) § 376 в качестве выражения для вторичных волн

$$\gamma = \frac{(\rho' - \rho)\, k^2 \cdot \pi c^2 \cdot \Gamma}{2\pi\rho} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2kr}} \cos k\left(bt - r - \frac{1}{8}\lambda\right) =$$
$$= \frac{\pi(\rho' - \rho)\cdot \pi c^2 \cdot \Gamma}{\rho \lambda^{3/2} r^{1/2}} \cos \frac{2\pi}{\lambda}\left(bt - r - \frac{1}{8}\lambda\right), \tag{2}$$

где величина k заменена эквивалентной величиной $2\pi/\lambda$. В этом случае вторичные волны симметричны, а их интенсивность изменяется обратно пропорционально расстоянию и *кубу* длины волны.

Решение, представленное выражением (10) § 376, показывает, что если первичные волны

$$\beta = B \cos k\,(bt - x) \tag{3}$$

ударяются о то же самое цилиндрическое препятствие, то смещение, перпендикулярное к вторичному лучу, а именно r, будет

$$\frac{\pi(\rho' - \rho)\cdot \pi c^2 \cdot B \cdot \cos\theta}{\rho \lambda^{3/2} r^{1/2}} \cos \frac{2\pi}{\lambda}\left(bt - r - \frac{1}{8}\lambda\right), \tag{4}$$

где через θ обозначен угол между направлением первичного луча (x) и вторичного (r). В этом случае вторичное возмущение происходит в одном направлении, а именно, вдоль луча, параллельного первичным колебаниям.

Возвращаясь к первому случаю, когда α и β исчезают всюду, а γ есть функция только от x и y, предположим, что вещество цилиндрического препятствия отличается от окружающего вещества по жесткости n', а также по плотности ρ'. Условия, которые должны быть удовлетворены у цилиндрического препятствия, суть

$$\gamma\,(\text{внутри}) = \gamma\ (\text{снаружи}),$$
$$n' \frac{\partial \gamma}{\partial r}\,(\text{внутри}) = n \frac{\partial \gamma}{\partial r}\,(\text{снаружи}).$$

Во внешнем пространстве γ удовлетворяет уравнению (§ 373)

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} + k^2 \gamma = 0,$$

где $k = p/b$; а в пространстве внутри цилиндра γ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} + k'^2 \gamma = 0,$$

где $k' = p/b'$, а b' обозначает скорость поперечных колебаний в веществе цилиндра. Исследование вторичных волн, отбрасываемых препят-

ствием, когда первичные плоские волны ударяются в него, при этом аналогично проведенному в § 343; и мы приходим к заключению, что первичным волнам

$$\gamma = \Gamma \cos \frac{2\pi}{\lambda}(bt - x) \tag{5}$$

соответствуют вторичные волны, отбрасываемые малым цилиндром под углом θ с осью x, определяемые выражением

$$\gamma = \frac{2\pi \cdot \pi c^2 \cdot \Gamma}{\lambda^{3/2} r^{1/2}} \left\{ \frac{\rho' - \rho}{2\rho} - \frac{n' - n}{n' + n} \cos\theta \right\} \cos \frac{2\pi}{\lambda}\left(bt - r - \frac{1}{8}\lambda\right), \tag{6}$$

которое содержит выражение (2) как частный случай.

378. Теперь мы возвращаемся к фундаментальной проблеме, уже частично рассмотренной в § 375, — проблеме о колебаниях в безграничном твердом теле, вызываемых периодической силой, приложенной в начале координат. Уравнения (12), (13) и (14) § 375 дают решение, позволяющее оценить значения компонент вращения. Если, как мы в конце и предположим, твердое тело несжимаемо, то мы имеем в добавление к этому $\delta = 0$. На этом основании решение можно дополнить; однако, будет более поучительным провести независимое исследование.

Так как в обозначениях § 373 $X' = Y' = 0$, то, в силу (5), имеем

$$(a^2 - b^2)\frac{\partial \delta}{\partial x} + b^2\nabla^2\alpha + p^2\alpha = 0, \tag{1}$$

$$(a^2 - b^2)\frac{\partial \delta}{\partial y} + b^2\nabla^2\beta + p^2\beta = 0, \tag{2}$$

$$(a^2 - b^2)\frac{\partial \delta}{\partial z} + b^2\nabla^2\gamma + p^2\gamma = -Z'. \tag{3}$$

Положим

$$\alpha = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x\, \partial z}, \quad \beta = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y\, \partial z}, \quad \gamma = \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + w, \tag{4}$$

и соответственно

$$\delta = \frac{\partial (\nabla^2 \chi)}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{5}$$

Подстановка этих значений в уравнение (1) дает

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z}[a^2\nabla^2\chi + p^2\chi + (a^2 - b^2)\, w] = 0,$$

так что (1) и (2) будут удовлетворены, если

$$a^2\nabla^2\chi + p^2\chi + (a^2 - b^2)\, w = 0. \tag{6}$$

Та же подстановка в уравнение (3) дает

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}[a^2\nabla^2\chi + p^2\chi + (a^2 - b^2)\, w] + b^2\nabla^2 w + p^2 w + Z' = 0,$$

или, в силу (6),

$$b^2\nabla^2 w + p^2 w + Z' = 0. \tag{7}$$

Это уравнение определяет w и отсюда, в силу (6), χ.

В обозначениях § 375 $k = p/b$, $h = p/a$. Так как $Z' = 0$ во всех точках, кроме начала, то уравнение (7) принимает вид

$$(\nabla^2 + k^2)\, w = 0, \tag{8}$$

откуда, в силу (6),

$$(\nabla^2 + h^2)(\nabla^2 + k^2)\,\chi = 0 \tag{9}$$

должно удовлетворяться всюду за исключением начала. Решение уравнения (9) есть

$$\chi = A\frac{e^{-ikr}}{r} + B\frac{e^{-ihr}}{r}, \tag{10}$$

где A и B — постоянные. Соответствующие значения w и δ, в силу (6) и (5), суть

$$w = k^2 A\frac{e^{-ikr}}{r} \quad \text{и} \quad \delta = -h^2 B\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-ihr}}{r}\right). \tag{11}$$

Для того чтобы связать A и B с Z', имеем из уравнения (7), так же, как в § 375,

$$w = \frac{1}{4\pi b^2}\iiint Z'\frac{e^{-ikr}}{r}\,dx\,dy\,dz = \frac{Z_1}{4\pi b^2\rho}\frac{e^{-ikr}}{r},$$

так что

$$A = \frac{Z_1}{4\pi k^2 b^2 \rho}. \tag{12}$$

Далее, в силу (6) § 373,

$$\nabla^2\delta + h^2\delta^2 + a^{-2}\frac{\partial Z'}{\partial z} = 0,$$

так что, так же как в § 375,

$$\delta = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint\frac{\partial Z'}{\partial z}\frac{e^{-ihr}}{r}\,dx\,dy\,dz = \frac{Z_1}{4\pi a^2\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-ihr}}{r}\right).$$

Таким образом, сравнивая с (11), получаем

$$B = -\frac{Z_1}{4\pi h^2 a^2 \rho} = -A \tag{13}$$

и

$$\chi = \frac{Z_1}{4\pi k^2 b^2 \rho}\frac{e^{-ikr} - e^{-ihr}}{r}. \tag{14}$$

Из определенных таким образом полностью значений χ и w можно найти простым дифференцированием α, β, γ, как указано в (4). Имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) = \frac{xze^{-ikr}}{r^2}\left(-\frac{k^2}{r} + \frac{3ik}{r^2} + \frac{3}{r^3}\right), \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) = e^{-ikr}\left[\frac{z^2}{r^2}\left(-\frac{k^2}{r} + \frac{3ik}{r^2} + \frac{3}{r^3}\right) - \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right]. \tag{16}$$

Так как полные выражения довольно длинны, то мы ограничимся случаем несжимаемости ($h = 0$). Таким образом, если восстановить временной множитель e^{ipt} и отбросить мнимую часть решения, получится

$$\alpha = \frac{Ak^2xz}{r^3}\left[\left(-1+\frac{3}{k^2r^2}\right)\cos(pt-kr) - \frac{3}{kr}\sin(pt-kr) - \right.$$
$$\left. - \frac{3}{k^2r^2}\cos pt\right], \quad (17)$$

$$\gamma = \frac{Ak^2}{r}\left[\left(1-\frac{z^2}{r^2}+\frac{3z^2}{k^2r^4}-\frac{1}{k^2r^2}\right)\cos(pt-kr) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{kr}-\frac{3z^2}{kr^3}\right)\sin(pt-kr) - \left(\frac{3z^2}{k^2r^4}-\frac{1}{k^2r^2}\right)\cos pt\right]; \quad (18)$$

значение β отличается от значения α простой заменой x на y. Значение A определяется выражением (12), а $Z_1\cos pt$ – полная сила, действующая в начале в момент времени t.

На большом расстоянии от начала выражения (17) и (18) приводятся к виду

$$\alpha = -\frac{Z_1}{4\pi b^2\rho}\frac{xz}{r^2}\frac{\cos(pt-kr)}{r}, \quad (19)$$

$$\gamma = \frac{Z_1}{4\pi b^2\rho}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)\frac{\cos(pt-kr)}{r} \quad (20)$$

в согласии (19) § 375.

В. Кениг [1]) отметил несогласие полного решения в (17) и (18), впервые данного в другой форме Стоксом [2]), с результатами аналогичного в некоторой степени исследования Герца [3]), в которых отсутствуют члены, содержащие $\cos pt$ и $\sin pt$, причем он склонен был рассматривать результаты Стокса как ошибочные. Суть, однако, заключается в том, что рассмотренные обоими исследователями задачи существенно различны, ибо задача, рассмотренная Герцом, не имеет никакого отношения к упругим твердым телам. Источник расхождения находится в первых членах (1) и т. д., которые были опущены Герцом в его теории эфира. Но в теории упругих твердых тел эти члены, конечно, нужно сохранить. Если даже вещество предполагается несжимаемым, так что ϑ равна нулю, они все же должны быть сохранены, ибо, как это было полностью объяснено Стоксом в цитированной работе, множитель $(a^2 - b^2)$ оказывается в то же самое время бесконечным. Если предположить в (17) и (18), что p и k очень малы, и проследить предельный вид решения, то получится решение статической задачи о деформации несжимаемого твердого тела силой, локализованной во внутренней точке тела.

---

[1]) König, *Wied. Ann.*, том XXXVII, стр. 651, 1889.

[2]) Stokes, *Camb. Phil. Trans.*, том IX, стр. 1, 1849; *Collected Works*, том II, стр. 243.

[3]) Hertz, *Wied. Ann.*, том XXXVI, стр. 1, 1889.

379. В § 373 мы видели, что в однородной среде плоские волны поперечного колебания

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \Gamma \cos(pt - kx) \tag{1}$$

могут распространяться безгранично. Теперь мы предположим, что на положительной стороне плоскости $x = 0$ среда изменяется так, что плотность вместо ρ равна ρ_1, а жесткость вместо n равна n_1. В проходящей волне p остается тем же самым, но k переходит в k_1, причем

$$\frac{k_1^2}{k^2} = \frac{n\rho_1}{n_1\rho}. \tag{2}$$

Предполагая, как это будет сейчас доказано, что изменение фазы отсутствует, мы можем написать выражения для проходящих и отраженных волн в виде

$$\gamma_1 = \Gamma_1 \cos(pt - k_1 x), \quad \gamma = \Gamma' \cos(pt + kx), \tag{3}$$

так что полное значение γ в первой среде есть

$$\gamma = \Gamma \cos(pt - kx) + \Gamma' \cos(pt + kx), \tag{4}$$

а во второй

$$\gamma_1 = \Gamma_1 \cos(pt - k_1 x). \tag{5}$$

Условия, которые должны быть удовлетворены на промежуточной плоскости $x = 0$, не подверженной действию внешних сил, суть

$$\gamma_1 = \gamma, \quad n_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} = n \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \tag{6}$$

так что

$$\Gamma + \Gamma' = \Gamma_1, \quad nk(\Gamma - \Gamma') = n_1 k_1 \Gamma_1. \tag{7}$$

Если, что вполне возможно, Γ' и Γ_1 определяются в соответствии с (7), то все условия выполнены. Имеем

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma} = \frac{nk - n_1 k_1}{nk + n_1 k_1} = \frac{\sqrt{n\rho} - \sqrt{n_1\rho_1}}{\sqrt{n\rho} + \sqrt{n_1\rho_1}}, \tag{8}$$

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma} = \frac{\Gamma + \Gamma'}{\Gamma} = \frac{2\sqrt{n\rho}}{\sqrt{n\rho} + \sqrt{n_1\rho_1}}; \tag{9}$$

эти уравнения определяют отраженные и проходящие волны. Частные случаи, когда $\rho_1 = \rho$ или $n_1 = n$, можно отметить особо.

Когда падение волн на плоскость, разделяющую оба тела, происходит наклонно, то задача становится более сложной и распадается на две части, в зависимости от того, совершаются ли колебания (всегда перпендикулярные к падающему лучу) в плоскости падения или же в перпендикулярной плоскости. Мы не будем входить в рассмотрение этих вопросов, которые часто дискутировались с оптической точки зрения. Метод исследования, созданный в основном Грином, подобен

методу, примененному в § 270. Полное изложение его с необходимыми ссылками дано в книге Basset, *Treatise on Physical Optics*, гл. XII.

380. Колебания твердых тел, ограниченных свободными поверхностями, имеющими плоскую, цилиндрическую или сферическую форму, можно исследовать без больших затруднений; однако, этот вопрос относится скорее к теории упругости. Искомые функции координат для бесконечной пластинки постоянной толщины являются просто круговыми и экспоненциальными функциями [1]). Решение задачи для бесконечного цилиндра [2]) связано с функциями Бесселя и представляет интерес, так как дает более полный обзор продольных колебаний изгиба тонкого стержня.

Случай сферы важен потому, что сфера представляет собой тело, ограниченное во всех направлениях. Симметричные радиальные колебания, чисто дилатационные по характеру, были впервые исследованы Пуассоном и Клебшем [3]). Полная теория была дана Иеришем [4]) и особенно Лембом [5]). Изложение этой теории можно найти в уже цитированном труде Лява.

Вычисления частоты осложняются наличием *двух* упругих постоянных $\varkappa$ и n § 373 или q и μ § 214. Из принципа, изложенного в § 88, можно вывести, как заметил Лемб, что частота увеличивается при любом возрастании как $\varkappa$, так и n, ибо, как оказывается из (1) § 345, и то и другое изменение увеличивает потенциальную энергию данной деформации.

381 [6]). В настоящем труде мы часто имели случай отмечать важность заключений, получаемых методом размерностей. Теперь, когда мы в состоянии извлекать иллюстрации из большого числа разнообразных акустических явлений, относящихся к колебаниям как твердых тел, так и жидкостей, удобно будет резюмировать и несколько подробнее развить принципы, на которых основывается этот метод.

В случае таких систем, как колокола или камертоны, состоящих из однородного изотропного материала и совершающих колебания вследствие упругости, акустическими элементами являются форма, линейные размеры c, упругие постоянные q и μ (§ 149) и плотность ρ. Следовательно, на основании метода размерностей период при прочих равных пропорционален линейному размеру по крайней мере, если амплитуда колебаний находится в той же пропорции; если же допустить закон изохронизма, то последнее ограничение можно отбросить. Действительно, поскольку размерности q и ρ равны соответственно $[ML^{-1}T^{-2}]$ и $[ML^{-3}]$, а μ — отвлеченное число, то единственная ком-

---

[1]) *Proc. Lond. Math. Soc.*, том XVII, стр. 4, 1885; том XX, стр. 225, 1889.

[2]) Pochhammer, *Crelle*, том LXXXI, 1876; Chree, *Quart. Journ.*, 1886. См. также Ляв, *Теория упругости*, гл. XVII.

[3]) Klebsch, *Theorie der Elastizität fester Körper*, Lpz, 1862.

[4]) Järisch, *Crelle*, том LXXXIII, 1879.

[5]) Lamb, *Proc. Lond. Math. Soc.*, том XIII, стр. 189, 1882.

[6]) Этот раздел был в первом издании под номером 348.

бинация размерностей, которая может дать в результате размерность времени, есть $q^{-1/2} \cdot \rho^{1/2} \cdot c$.

Основание, на котором строится эта математическая стенография, — следующего рода. Рассмотрим два геометрически подобных тела, механическое строение которых в соответствующих точках одинаково, и пусть они совершают подобные движения таким образом, что соответствующие изменения требуют времени [1]), пропорционального линейным размерам, — скажем, в отношении $1/n$. Тогда, если одно движение возможно, как следствие упругих сил, то и другое будет возможным. В самом деле, массы, которые должны двигаться, находятся в отношении $1/n^3$, ускорения — в отношении $1/n^{-1}$, а потому необходимые силы находятся в отношении $1/n^2$; а так как напряжения одинаковы, то это отношение в действительности есть отношение упругих сил, создаваемых ими и отнесенных к соответствующим площадям. Если упругие силы в состоянии вызвать предположенное движение в первом случае, то они также в состоянии произвести предположенное движение во втором случае.

Динамическое подобие нарушается действием силы, подобной силе тяжести, пропорциональной кубам, а не квадратам, соответствующих линейных размеров; однако, в случаях, когда тяжесть является единственной движущей силой, динамическое подобие можно сохранить, введя другое соотношение между соответствующими пространственными и временными величинами. Так, если отношение соответствующих пространственных величин равно $1/n$, а отношение соответствующих времен равно $1/n^{1/2}$, то ускорения в обоих случаях одинаковы и могут являться эффектами сил, находящихся в отношении $1/n^3$ и действующих на массы, которые находятся в том же самом отношении. В качестве примеров, подходящих под эту рубрику, можно упомянуть простой маятник, морские волны, скорость которых изменяется прямо пропорционально корню квадратному из длины волны, и всю теорию подобия кораблей и их моделей, на основании которой Фрауд предсказывал поведение кораблей, исходя из экспериментов, проделанных над моделями небольших размеров.

То же самое сравнение, которое мы применяли выше к упругим телам, применимо также к воздушным колебаниям. В сравниваемых случаях давления одинаковы, а потому при действии на площади, находящиеся в отношении $1/n^2$, они дают силы, находящиеся в том же самом отношении. Эти силы действуют на массы, находящиеся в отношении $1/n^3$, а потому вызывают ускорения, находящиеся в отношении $1/n^{-1}$, которое представляет отношение действительных ускорений, когда пространственные и временные величины относятся

---

[1]) Понятие изменения масштаба в пространстве стало обычным вследствие широкого употребления карт и моделей; но соответствующее понятие для времени часто менее отчетливо. Воображению читателя может помочь ссылка на музыкальное произведение, исполняемое в различных темпах.

как $1/n$. В соответствии с этим периоды подобных друг другу резонирующих полостей, наполненных одним и тем же газом, прямо пропорциональны линейным размерам — чрезвычайно важный закон, впервые сформулированный Саваром.

Так как один и тот же метод сравнения применим как к упругим твердым телам, так и к упругим жидкостям, то можно распространить его на системы, в которых участвуют оба вида колебаний. Так, например, можно предположить, что при изменении масштаба системы, состоящей из камертона и воздушного резонатора, в движении произойдут только такие изменения, которые связаны с изменением времен колебания пропорционально изменению линейных размеров.

До сих пор изменение масштаба предполагалось одинаковым во всех направлениях, но бывают случаи, не подходящие под эту рубрику, когда можно очень плодотворно применить принцип динамического подобия. Рассмотрим, например, колебания изгиба системы, состоящей из тонкой упругой полоски, плоской или изогнутой. На основании §§ 214, 215 мы видим, что толщина полоски b и механические постоянные q и ρ будут входить только в комбинациях qb^3 и $b\rho$ и, следовательно, можно делать сравнения, хотя изменения толщины находятся в ином отношении, чем изменения других размеров. Если при пренебрежении толщиной линейная размерность есть c, то при прочих равных времена должны изменяться пропорционально $q^{-1/2} \cdot \rho^{1/2} \cdot c^2 \cdot b^{-1}$. Для данного вещества, данной толщины и формы времена поэтому пропорциональны *квадратам* линейной размерности. Не следует, однако, забывать, что подобные результаты, выражающие закон, только приближенно справедливый, находятся на ином уровне, нежели более непосредственные следствия принципа подобия.

ГЛАВА XXIII

ФАКТЫ И ТЕОРИИ СЛУХА

382. Тема настоящей главы имеет непосредственное отношение к уху как органу слуха, однако, она может быть рассмотрена здесь только с физической стороны. Обсуждение анатомических или физиологических вопросов выходило бы за рамки данной книги и не соответствовало бы квалификации автора. Мы не можем при этом избежать постоянных ссылок на большой труд Гельмгольца [1]). Хотя, как мы увидим, некоторые положения, выставленные автором, были отвергнуты (пожалуй, слишком поспешно) последующими исследователями, важность наблюдений и рассуждений, содержащихся в этом труде, а равно и изящество, с которым они изложены, надолго обеспечивают этому труду роль исходной точки всех рассуждений, касающихся звуковых ощущений.

383. Диапазон частот, в пределах которых ухо способно воспринимать звуки, очень широк. Естественно, что предел не может быть точно определен. Гельмгольц на основании своих опытов заключил, что ощущение музыкального тона начинается примерно с 30 колебаний в секунду, но что различение высоты начинается не ниже примерно 40 колебаний в секунду. Прейер [2]) уверен, что он слышал чистые тоны даже при 15 колебаниях в секунду, но нам представляется сомнительным, чтобы октава была абсолютно исключена. При обзоре последних данных и в свете некоторых новых экспериментов, ван-Шайк [3]) не видит оснований для больших отклонений от оценки Гельмгольца и определяет предел примерно в 24 колебания в секунду.

Относительно верхней границы расхождения еще больше. Несомненно, многое зависит от интенсивности колебаний. В экспериментах с „птичьими манками“ (§ 371) выше 10 000 колебаний ничего не было слышно, хотя чувствительные пламена отвечают на звук до 50 000. Однако, аккуратно возбужденные смычком камертоны или

[1]) Helmholtz, *Tonempfindungen*, 4 edition, 1877; *Sensations of Tone*, второе английское издание, переведенное с 4-го немецкого издания Эллисом. Ссылки делаются на это английское издание, которое было дополнено многочисленными ценными примечаниями переводчика.

[2]) Preyer, *Physiologische Abhandlungen*, Jena, 1876.

[3]) Van Schajk, *Arch. Néerl.*, том XXIX, стр. 87, 1895.

металлические стержни при ударе по ним молотком, повидимому, порождают слышимые звуки еще более высокой частоты. Прейер дает цифру 20 000 как приблизительный верхний предел для нормального уха.

В случае очень высоких звуков оценка частоты почти, или совершенно, исключается, так что для музыкальных целей не приходится рассматривать частоты выше 4000 сек.$^{-1}$.

Следующим вопросом является вопрос о том, насколько точно можно оценить высоту тона невооруженным ухом. Здесь предполагается, что звуки прослушиваются последовательно, так как (§ 59) при двух одновременно звучащих нотах точность сравнения, достигаемая методом биений, беспредельна. На основании ряда тщательно разработанных опытов Прейер [1]) заключает, что нигде на протяжении всей гаммы нельзя различить с определенностью звуки, отличающиеся на 0,20 колебаний в секунду. Чувствительность изменяется с частотой. Вблизи 120 колебаний разность в 0,4 колебания в секунду едва различима, при 500 колебаниях можно различить около 0,3 колебания; при 1000 колебаний 0,5 колебаний в секунду. В некоторых случаях, ощущая разницу в высоте, наблюдатель не мог решить, какой из двух звуков ниже.

384. При определениях пределов частоты или заметных отличий в частоте следует подбирать звуки подходящей интенсивности. Остается, однако, другой вопрос — о степени интенсивности звука данной высоты, необходимой для его слышимости. Самая ранняя оценка амплитуды едва слышимых звуков принадлежит, повидимому, Теплеру и Больцману [2]). Она связана с остроумным применением теории открытых органных труб (§ 313) Гельмгольца к экспериментальным данным этих авторов (§ 322*d*), относящимся к максимальному сгущению внутри трубы. Они приходят к заключению, что плоские волны с частотой 181, в которых максимум сгущения s равен $6{,}5 \cdot 10^{-8}$, едва слышны.

Очевидно, верхний предел амплитуды волн, дающей слышимый звук, можно вывести, зная энергию, которая должна быть затрачена в заданное время для их генерации, и размеры поверхности, на которую генерируемые волны распространяются в момент слушания. Оценка, полученная из этих данных, будет необходимо слишком высока, во-первых, потому, что звуковые волны должны испытывать некоторые потери при их распространении, а во-вторых, потому, что часть, а в некоторых случаях большая часть, израсходованной энергии не переходит вообще в форму звуковых волн.

При первом применении этого метода [3]) источником звука служил свисток, укрепленный на склянке Вульфа, с которым был связан си-

[1]) Обзор работы Прейера был дан Эллисом в *Proceedings of the Musical Association*, 3-rd session, стр. 1, 1877.

[2]) Töpler u. Boltzmann, *Pogg. Ann.*, том CXLI, стр. 321, 1870.

[3]) *Proc. Roy. Soc.*, том XXVI, стр. 248, 1877.

фонный манометр для измерения давления воздушной струи. В этот прибор вдували воздух при помощи легких, и при небольшой практике можно было без затруднений поддерживать достаточно постоянное дутье требуемой продолжительности. Наиболее подходящее давление было определено предварительными попытками и измерялось столбом воды в $9^1/_2$ *см* высоты.

Первым пунктом, подлежащим определению, было расстояние от источника, на котором звук оставался хорошо слышным. Эксперименты производились в тихий зимний день, и было установлено, что свисток можно без напряжения услышать (в обоих направлениях) на расстоянии 820 *м*.

Оставалась еще одна величина, которую надо было вычислить: это — количество воздуха, которое проходит сквозь свисток за данное время. Оно было определено лабораторным экспериментом, из которого обнаружилось, что это количество равно 196 $см^3$ в секунду.

При вычислении результатов наиболее удобно пользоваться последовательно системой *CGS*. В этой системе мер применявшееся давление было равно $9^1/_2 \cdot 981$ *дин/см*^{2}, а потому работа, затрачиваемая в секунду на генерацию волн, равнялась $196 \times 9^1/_2 \times 981$ эргов [1]).

Но (§ 245) механический эквивалент цуга распространяющихся волн равен кинетической энергии всей массы рассматриваемого воздуха, движущейся с максимальной скоростью v распространения колебаний; так что, если обозначить площадь рассматриваемого волнового фронта через S, скорость звука — через a и плотность воздуха — через ρ, то механический эквивалент волн, проходящих в единицу времени, выразится в виде $Sa\rho\frac{1}{2}v^2$, где численное значение a равно приблизительно 34 100, а численное значение ρ — около 0,0013. В нашем случае S есть площадь поверхности полушария с радиусом в 82 000 *см*; таким образом, если бы вся энергия уходящего воздуха превращалась в звук и по пути не было рассеяния, то значение v на расстоянии 82 000 *см* определялось бы уравнением

$$v^2 = \frac{2 \cdot 196 \cdot 9\frac{1}{2} \cdot 981}{2\pi (82\,000)^2 \cdot 34\,100 \cdot 0{,}0013},$$

откуда

$$v = 0{,}0014 \text{ см/сек}, \quad s = \frac{v}{a} = 4{,}1 \cdot 10^{-8}.$$

Этот результат не требует знания высоты звука. Если период равен τ, то соотношение между максимальным смещением x и максимальной скоростью v есть $x = v\tau/2\pi$. В рассматриваемом эксперименте применялась нота f^{IV} с частотой около 2730. Следовательно,

$$x = \frac{0{,}0014}{2\pi \cdot 2730} = 8{,}1 \cdot 10^{-8} \text{ см},$$

[1]) Приблизительно $2 \cdot 10^6$ эргов.

т. е. амплитуда частиц воздуха была менее одной десятимиллионной сантиметра. Было вычислено, что при благоприятных условиях амплитуда в 10^{-8} *см* была бы еще слышна.

В качестве возражения против вышеописанного метода можно указать, что при таких больших рассматриваемых расстояниях трудно быть уверенным, что в достаточной мере исключено возмущающее влияние атмосферной рефракции. В связи с этим были проведены попытки экспериментов с трубами более низких тонов, которые должны были бы быть слышны на меньшем расстоянии, но эти опыты не были успешны, и в конце концов пришлось снова возвратиться к камертонам.

„Камертон определенных размеров, совершающий колебания с определенной амплитудой, можно рассматривать как запас энергии, количество которой легко вычислить. Эта энергия постепенно затрачивается на внутреннее трение и генерацию звука. Когда употребляется резонатор, то последняя часть более существенна, и в некоторых случаях мы можем считать, что испускание звука в достаточной мере объясняет падение амплитуды. Придерживаясь здесь этого взгляда, мы можем вывести скорость испускания звуковой энергии из наблюдаемой амплитуды камертона в рассматриваемый момент и из быстроты падения амплитуды. Так, если закон падения амплитуды для камертона есть $e^{-1/2kt}$ или l^{-kt} для энергии и если полная энергия в момент t равна E, то скорость, с которой энергия испускается в данный момент, равна $-dE/dt$, или kE. Значение k можно вывести из наблюдений над скоростью затухания, например над временем, в продолжении которого амплитуда уменьшается наполовину. С такими приспособлениями можно без труда превращать энергию в звук в малых количествах и таким образом уменьшить расстояние слышимости до величины 30 *м*. При этих обстоятельствах значительно легче управлять наблюдениями, чем в случае, когда оба наблюдателя удалены друг от друга на полмили, и здесь нет оснований бояться возмущения вследствие атмосферной рефракции.

Камертон укреплен на штативе, к которому также жестко прикреплен микроскоп для наблюдения. Удобные световые точки получаются от зерен крахмала, а световая линия, в которую растягивается каждая точка под действием колебаний, определяется при помощи окулярного микрометра. Каждое деление шкалы микрометра соответствует 0,001 *см*. Если пользуются резонатором, то он располагается в положении максимального эффекта — с отверстием под свободными концами вибрирующих ножек камертона.

Ход эксперимента был таков. В первую очередь наблюдались скорости затухания с резонатором и без него, причем штатив располагался на земле в середине некоторой площадки. Камертон приводился в колебание смычком, и определялось время, потребное для того, чтобы двойная амплитуда упала до половины своего первоначального значения. Так, в случае камертона с частотой 256, время,

в течение которого амплитуда уменьшалась от 20 делений микрометра до 10 делений, составляло 16 секунд без резонатора и 9 секунд при наличии резонатора. Промежутки времени, за которые звук ослаблялся вдвое, насколько можно было наблюдать, не зависели от начальной амплитуды. Для того чтобы определить слышимый минимум, один наблюдатель (я) занимал позицию в 30 ярдах (27,4 *м*) от камертона, а другой (мистер Гордон) приводил в сильное колебание камертон. В момент, когда двойная амплитуда составляла 20 делений микрометра, второй наблюдатель давал сигнал и немедленно после этого удалялся на некоторое расстояние. Задачей первого наблюдателя было определить, в течение скольких секунд после сигнала звук оставался все еще слышным. В описываемом случае этот промежуток времени составлял 12 секунд. Когда расстояние уменьшалось до 15 ярдов (13,7 *м*), звук с начальной двойной амплитудой в 10 делений микрометра оставался слышным почти в точности столько же времени.

Эти оценки слышимости производились не без затруднений. Обычно бывали две или три секунды, в течение которых наблюдатель сомневался, слышит ли он или только воображает, что слышит, и различные индивидуумы решали вопрос различно. Конечно, здесь также имело место и действительное различие слуха, но это само по себе не оказывало большого влияния. Данный наблюдатель в данный день часто давал удивительно постоянные оценки, но точность, получаемая таким образом, мне кажется, является иллюзорной. Многое зависит от отсутствия мешающих шумов. Шелест деревьев под влиянием ветра или чирикание птиц мешали наблюдателю и более или менее отражались на точности результатов.

Проверялось также, одинаково ли испускается звук в различных горизонтальных направлениях, но никакой разницы между направлениями не удалось обнаружить. Звук исходит почти целиком из резонатора, и можно полагать, что этот последний действует, как простой источник.

Если считать время, в течение которого звук слышен, известным, то легко вывести амплитуду колебания камертона в момент, когда звук перестает воздействовать на наблюдателя. Отсюда вычисляется скорость испускания звуковой энергии и амплитуда колебаний воздуха в момент, когда они достигают наблюдателя.

Первым этапом вычисления является выражение полной энергии камертона в функции амплитуды колебания, измеренной у конца одной из ножек. Эта задача рассмотрена в § 164. Если длина равна l, плотность ρ, а площадь сечения стержня, закрепленного на одном конце и свободного на другом, равна ω, то кинетическая энергия T связана со смещением η_1 на свободном конце уравнением (10):

$$T = \frac{1}{8}\rho l\omega\left(\frac{d\eta_1}{dt}\right)^2.$$

В момент прохождения через положение равновесия $\eta = 0$ и $d\eta/dt$ имеет максимальное значение, так как в этот момент вся энергия — кинетическая. Максимальное значение $d\eta/dt$ связано с максимальным значением η уравнением

$$\left(\frac{d\eta}{dt}\right)_{\max} = \frac{2\pi}{\tau}\eta_{\max};$$

таким образом, если мы обозначим теперь двойную амплитуду через 2η, то полная энергия совершающего колебания стержня равна $\frac{1}{8}\rho\omega l\frac{2\pi}{\tau^2}(2\eta)^2$ или для двух стержней, составляющих камертон,

$$E = \frac{1}{4}\rho\omega l\,\frac{\pi^2}{\tau^2}(2\eta)^2, \qquad (A)$$

где $\rho\omega l$ есть масса каждой ножки.

Применение соотношения (A) к камертону с 256 колебаниями, вибрирующему с двойной амплитудой в 20 делений микрометра, дает следующее: имеем

$$l = 14{,}0\ см \quad \omega = 0{,}6 \cdot 1{,}1 = 0{,}66\ см^2,$$
$$\frac{1}{\tau} = 256, \quad \rho = 7{,}8, \quad 2\eta = 0{,}050\ см,$$

и, следовательно, $E = 4{,}06 \cdot 10^3$ эргов.

Такова полная энергия камертона, когда действительная двойная амплитуда на концах ножек равна 0,050 *см*.

Как уже было показано, теряемая в секунду энергия равна kE, если амплитуда изменяется пропорционально $e^{-\frac{1}{2}kt}$. Для нашей цели здесь можно рассматривать k как состоящую из двух частей: одной k_1, представляющей рассеяние, которое происходит при отсутствии резонатора, и другой k_2, соответствующей резонатору. Только эта последняя часть эффективна в смысле образования звука, так как в случае, если резонатор не применяется, камертон практически молчит; и если бы даже стоило внести поправку для учета остающегося еще звука, то его фаза только случайно совпадала бы с фазой звука, исходящего из резонатора.

Значения k_1 и k удобно получаются из времен t_1 и t, в течение которых амплитуда падает *до половины*. Так,

$$k = 2\ln 2 \cdot \frac{1}{t}, \quad k_1 = 2\ln 2 \cdot \frac{1}{t_1},$$

$$k_2 = 2\ln 2 \cdot \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_1}\right) = 1{,}386\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_1}\right),$$

и энергия, превращающаяся за каждую секунду в звук, равна k_2E.

Теперь мы можем применить эти формулы к уже упомянутому случаю, когда имеется камертон с 256 колебаниями, для которого $t = 9, t_1 = 16$. Следовательно, время t_2, которое потребовалось бы для уменьшения амплитуды вдвое, если бы рассеяние вызывалось целиком резонатором, равно 20,6 и $k_2 = 0{,}0674$.

Следовательно,

$$k_2 E = 267 \text{ эргов в секунду,}$$

что соответствует двойной амплитуде в 20 делений микрометра. В описанном эксперименте продолжительность слышимости составляла 12 секунд, в течение которых амплитуда должна была бы упасть в отношении $2^{12}/_9 : 1$, а энергия — в отношении $4^{12}/_9 : 1$. Следовательно, в момент, когда звук только что перестал быть слышным, энергия, испускаемая в виде звука, составляла 42,1 эргов в секунду [1]).

Теперь остается вопрос: какова соответствующая амплитуда или сгущение в распространяющихся воздушных волнах на расстоянии 27,4 *м* от источника? Если мы предположим, как в прежних моих вычислениях, что почва хорошо отражает, то мы должны считать волны полусферическими. Это, повидимому, в общем — наилучшее предположение, которое можно сделать, хотя отражение, несомненно, — несовершенное. Таким образом, площадь S, покрываемая на расстоянии, на котором находится наблюдатель, равна $2\pi \cdot 2740^2$ *см*^{2} и, поскольку (§ 245)

$$S \cdot \frac{1}{2} a\rho v^2 = S \cdot \frac{1}{2} \rho a^2 s^2 = 42{,}1,$$

то находим

$$s^2 = \frac{42{,}1}{\pi \cdot 2740^2 \cdot 0{,}00125 \cdot 34\,100^3}$$

и

$$s = 6{,}0 \cdot 10^{-9};$$

сгущение s здесь вычислено в атмосферах. Результат показывает, что ухо способно ощущать увеличение или уменьшение плотности на величины, значительно меньшие плотностей, которые встречаются в наших самых высоких вакуумах.

Амплитуда воздушного колебания определяется значением $as\tau/2\pi$, где $1/\tau = 256$, и, таким образом, равна $1{,}27 \cdot 10^{-7}$ *см*.

Следует заметить, что получаемые таким образом числа все еще имеют в некоторой степени характер верхних пределов, так как они основаны на предположении, что все рассеяние энергии, *вызываемое резонатором*, представляет затрату на генерацию звука. Это, строго

---

[1]) Интересно сравнить эту энергию с энергией излучения источника света. Электрическая лампа накаливания в 200 свечей поглощает около 1 лошадиной силы, или примерно 10^{10} эргов в сек. Из всего излучения только около $1/100$ части эффективно действует на глаз; следовательно, излучение соответствующего качества, поглощающее $5 \cdot 10^5$ эргов в секунду, соответствует мощности свечи. Это приблизительно в 10^4 раз больше, чем энергия, излучаемая в виде звука камертоном в описанном выше опыте. На расстоянии в $10^2 \cdot 30$ или 3000 *м* поток энергии от идеальной свечи был бы приблизительно равен потоку энергии, едва-едва воспринимаемому ухом. Таким образом оказывается, что потоки энергии, потребной для воздействия на глаз и на ухо, имеют одинаковый порядок величины — заключение, выведенное уже Теплером и Больцманом.

говоря, может не иметь места даже при рассматриваемых нами средних амплитудах, но неопределенность здесь значительно меньше, чем в случае резонаторов или органных труб, возбуждаемых воздухом. По самому характеру вычисления, при помощи которого выводилась амплитуда или сгущение воздушных волн, значительная потеря энергии не очень влияет на итоговые цифры.

Аналогичные эксперименты производились разновременно с камертонами, частоты которых были 384 и 512. Результаты не были настолько согласны, как можно было первоначально надеяться получить, однако, они достаточны для того, чтобы с некоторым приближением определить сгущение, необходимое для слышимости. Средние результаты были следующие:

$$\begin{aligned} c', &\quad \text{частота} = 256, \quad s = 6{,}0 \cdot 10^{-9}, \\ g', &\quad \text{„} \quad = 384, \quad s = 4{,}6 \cdot 10^{-9}, \\ c'', &\quad \text{„} \quad = 512, \quad s = 4{,}6 \cdot 10^{-9}; \end{aligned}$$

между последними двумя числами не обнаружилось твердого различия. Даже и различие между 6,0 и 4,6 следует принимать с осторожностью; таким образом, сравнение нельзя считать достаточным для доказательства чего бы то ни было, кроме того, что сгущение, необходимое для слышимости, изменяется лишь очень медленно в первой штрихованной октаве [1]).

Результаты такого же порядка величины были получены также Вином [2]), который пользовался совершенно иным методом.

385. Для многих экспериментальных целей и во многих случаях обыденной жизни довольно безразлично, пользуемся ли мы одним ухом или обоими; и все же нет никакого сомнения в том, что наиболее ценные сведения получаются при одновременном использовании обоих ушей. Как это осуществляется, — остается до сих пор очень неясным.

Хотя принимались самые большие предосторожности для того, чтобы обеспечить изолированное действие, очевидно, что звук, воспринимаемый одним ухом, может давать биения со вторым звуком несколько отличной высоты, воспринимаемым другим ухом. Разумеется, при этом не получается даже приблизительно такого молчания, которое имело бы место в момент противоположности фаз обоих звуков, если бы оба звука воспринимались одним и тем же ухом; однако, биения отлично слышны и остаются различными до тех пор, пока звуки не замирают настолько, что становятся едва слышными поодиночку [3]). Однако, обнаружилось, что комбинационные тоны (§ 391) не получаются при этих условиях [4]). Любопытные

---

[1]) *Phil. Mag.*, том XXXVIII, стр. 366, 1894.
[2]) Wien, *Wied. Ann.*, том XXXVI, стр. 834, 1889.
[3]) S. P. Thompson, *Phil. Mag.*, том IV, стр. 274, 1877.
[4]) См. также Dove, *Pogg. Ann.*, том CVII, стр. 652, 1859.

наблюдения с телефоном описаны проф. С. П. Томпсоном[1]) в следующих строках: „Почти все лица, экспериментировавшие с телефоном Бэлла и пользовавшиеся двумя приборами для восприятия звука, по одному на каждое ухо, в тот или иной момент времени замечали кажущуюся локализацию звуков телефона позади головы. Однако, повидимому, лишь немногие отдавали себе отчет в том, что это было результатом либо обратного порядка соединения проводов приборов с током, либо обратного порядка полярности магнита в одном из приемных приборов. Если оба вибрирующих диска совершают одинаковые колебания, одновременно выгибаясь вперед или назад, то звук слышен в ушах, как обычно; если же действие одного прибора обращено, так что когда один диск выгибается вперед, то другой выгибается назад, и колебания происходят с противоположными фазами, то кажется, что звук изменяет свое местоположение, уходя изнутри уха, и он слышен так, как будто он исходит откуда-то позади головы, или я бы скорее сказал, из вершины мозжечка“... „Я смонтировал микрофон Юза с двумя элементами батареи Фуллера и двумя телефонами Бэлла, один из которых имел коммутатор, которым я мог управлять. Приладив телефоны к ушам, я попросил моего помощника постукивать по деревянной подставке микрофона. Результат был оглушающий. Я ощущал как бы одновременные удары по барабанным перепонкам моих ушей. При обращении же тока в одном телефоне я испытывал только ощущение, которое можно описать как ощущение постукивания молотком *в заднюю часть черепа изнутри*“.

При оценке направления, в котором приходит к нам звук, мы в значительной степени зависим от ощущений, даваемых бинауральным восприятием звука. Это — одно из обычных и инстинктивных действий, часто представляющих особенные трудности для научного анализа. Наблюдатель с завязанными глазами, находящийся на открытом воздухе, обычно может указать направление звука с точностью до нескольких градусов, хотя бы звук был непродолжительным, как, например, произнесенная отдельная гласная или хлопок в ладоши. Определение производится с уверенностью и не требует движения головы.

Для того чтобы получить дальнейший материал, были произведены эксперименты с приблизительно чистыми тонами, полученными от камертонов с резонаторами; но для того чтобы устранить возражение, что первый звук камертона, в особенности при возбуждении ударом, может дать направление и тем исказить эксперимент, были взяты *два* подобных камертона и резонатора с частотой 256. Камертоны и резонаторы держали два помощника, посредине между которыми стоял наблюдатель. При каждом опыте ударяли оба камертона, а затем только *один* удерживался у своего резонатора. Результаты были совершенно ясны. Когда камертоны были расположены справа

[1]) Thompson, *Phil. Mag.*, том VI, стр. 385, 1878.

и слева, то наблюдатель мог различать их инстинктивно и безошибочно. Но когда он поворачивался на 90 градусов, так что камертоны оказывались в положениях впереди и позади него, то определение становилось невозможным и чувствовалось, что попытки назвать направление были просто гадательными.

То, что невозможно различить, подходит ли чистый тон спереди или сзади, — это достаточно понятно. Вследствие симметрии оба уха воспринимают одинаково в обоих случаях, и никакая разница в интенсивности, связанная с местоположением, не может возместить отсутствия сведений относительно начальной интенсивности. Труднее объяснить, как различают между направлениями спереди и сзади в других случаях, например в случае голоса, когда, как оказалось, это легко сделать. Можно только предположить, что качество сложного звука допускает модификацию при помощи внутреннего уха, которое расположено различно в обоих этих случаях.

Легкое различение между правой и левой стороной, даже когда рассматриваются только чистые тоны, естественно приписать различию в интенсивности восприятия звука обоими ушами. Однако, это объяснение не является таким полным, как это можно было бы предположить. В самом деле, очень высокие звуки, например свист, плохо слышны более отдаленному уху; но когда звук имеет умеренную частоту, например 256 в секунду, то разница в интенсивности для обоих ушей представляется не очень большой. Можно легко проделать грубый эксперимент, именно закрывая одно ухо пальцем и поворачиваясь вперед и назад, слушать постоянный звук. Более того, вычисление (§ 328) показывает, что голова человека, рассматриваемая как препятствие для звуковых волн, едва ли достаточно велика по сравнению с длиной волны, чтобы отбрасывать заметную тень. В качестве иллюстрации я вычислил интенсивность звука от отдаленного источника в различных точках поверхности неподвижного сферического препятствия. Результат зависит от отношения kc окружности сферы к длине волны. Если назвать точку на сферической поверхности, ближайшую к источнику, передним полюсом, а противоположную точку (в которой можно ожидать наибольшей тени) — задним полюсом, то результаты, получающиеся при трех предположениях об относительных размерах сферы и длины волны, приведены в табличке.

	$kc=2$	$kc=1$	$kc=\frac{1}{2}$
Передний полюс	0,69	0,50	0,29
Задний полюс .	0,32	0,28	0,26
Экватор	0,36	0,24	0,23

Если, например, окружность сферы составляет только половину длины волны, то интенсивность у заднего полюса только примерно на одну десятую меньше интенсивности у переднего полюса, а наименьшая интенсивность—в поперечном направлении. Если kc меньше,

чем $^1/_2$, то разность интенсивностей у обоих полюсов еще менее значительна, составляя около 1% при $kc = {}^1/_4$.

Случай головы и высоты тона c' соответствовал бы приблизительно $kc = 0{,}4$, так что разности интенсивностей, даваемые теорией, весьма малы. Объяснение способности различать, наблюдаемой в действительности, было бы легче, если бы можно было допустить различие фаз колебаний, воспринимаемых обоими ушами [1]).

386. Переходя к другому разделу нашей темы, мы должны теперь более близко рассмотреть влияние, оказываемое на ухо произвольной последовательностью воздушных давлений, колеблющихся около определенного среднего значения. Согласно буквальному утверждению закона Ома (§ 27) ухо способно воспринимать как отдельные тоны все простые колебания, на которые можно разложить последовательность давлений по теореме Фурье, если только частота этих компонент лежит внутри определенных пределов. Компоненты, высота которых лежит вне этих пределов, следует игнорировать. Кроме того, внутри пределов слышимости относительные фазы различных компонент должны быть безразличны.

Очевидно, что из закона, формулируемого в этой крайней форме, должны быть сделаны исключения. Невозможно допустить, чтобы ухо воспринимало как раздельные тоны компоненты, имеющие чрезвычайно близкую друг другу частоту. Такие компоненты, как хорошо известно, порождают биения, и их относительные фазы представляют существенный элемент в этом вопросе. Далее, очевидно, что определенный тон будет слышен только, если соответствующее колебание достигнет определенной интенсивности. Необходима была бы конечная интенсивность, даже если бы колебание установилось само собой; и следует ожидать, что интенсивность, необходимая для слышимости, должна быть больше при наличии других колебаний, в особенности, пожалуй, тогда, когда эти колебания соответствуют гармоническим унтертонам. Будет полезно рассмотреть несколько подробнее эти необходимые исключения из универсальной применимости закона Ома.

Ход явлений в случае, когда интервал между двумя простыми колебаниями постепенно увеличивается, был специально изучен Бозанке [2]). Так же, как в §§ 30 и 65*a*, если компоненты имеют вид $\cos 2\pi n_1 t$ и $\cos 2\pi n_2 t$, для результирующей имеем

$$u = \cos 2\pi n_1 t + \cos 2\pi n_2 t = 2\cos \pi (n_2 - n_1)\, t \cdot \cos \pi (n_2 + n_1)\, t, \quad (1)$$

что показывает, что результирующая двух простых колебаний одинаковой амплитуды и с частотами n_1 и n_2 может быть математически представлена одним колебанием, частота которого является средней из обеих частот, т. е. $^1/_2\ (n_2 + n_1)$, а амплитуда изменяется по

---

[1]) *Nature*, том XIV, стр. 32, 1876; *Phil. Mag.*, том III, стр. 456, 1877; том VII, стр. 149, 1879.

[2]) Bosanquet, *Phil. Mag.*, том XI, стр. 420, 1881.

закону косинуса, включая и изменения знака (§ 65*а*) с частотой $^1/_2 (n_2 - n_1)$. Это единое колебание — *не простое*. Теперь возникает вопрос, в какой из двух форм, представленных в (1), ухо воспримет звук? По точному смыслу закона Ома оба тона n_1 и n_2 должны были бы восприниматься раздельно. Мы знаем, что когда n_1 и n_2 почти равны, это не происходит и не может произойти. Тогда явление отображается второй формой; она указывает на *биения*, причем тон $^1/_2 (n_1 + n_2)$ имеет *интенсивность*, изменяющуюся между 0 и 4 с частотой $(n_2 - n_1)$, равной разности частот начальных тонов. Господин Бозанке нашел, что: „а) критический интервал, при котором оба тона начинают быть слышными рядом с их биениями, или результирующей смещений, равен приблизительно двум комам во всем среднем диапазоне гаммы, обычно применяемой в практической музыке; б) этот критический интервал, повидимому, не точно одинаков для всех ушей". Однако, в обоих исследованных случаях сами биения были слышны с интервалом в одну кому, а оба тона были совершенно ясны рядом с биениями и имели интервал в три комы. „По мере увеличения интервала отдельные ноты все более и более преобладают, а биения уменьшаются по громкости и четкости, пока, наконец, по достижении определенного интервала, равняющегося приблизительно малой терции в середине музыкальной гаммы, биения практически исчезают, и остаются только оба тона".

Относительно второго вопроса — о силе, с которой должно звучать составляющее простое колебание, достаточно отличимое по высоте, для того чтобы восприниматься в качестве отдельного тона, имеется мало данных, да и то не вполне совпадающих. Согласно экспериментам Брандта и Гельмгольца (§ 130) закон Юнга об отсутствии в некоторых случаях отдельных компонент струны, возбужденной щипком, подтверждается. Наблюдения этого рода легко производить при помощи резонаторов; но для нашей настоящей цели применение резонаторов недопустимо, так как вопрос относится к поведению невооруженного уха.

С другой стороны, А. Н. Мейер [1]) нашел, что звуки значительной интенсивности, если слушать их отдельно, могут быть полностью заглушены *более низкими* звуками достаточной силы. В некоторых опытах более низкий тон издавался открытой органной трубой, звучавшей непрерывно, а более высоким тоном был тон камертона, сильно возбуждаемого, а затем свободно затухающего. Действие камертона можно было сделать прерывистым, двигая рукой в ту и другую сторону перед отверстием резонирующего ящика камертона. Результаты описаны в следующих словах: „Сначала, всякий раз, как отверстие ящика открыто, звук камертона отчетливо слышен и изменяет тембр звука открытой трубы. Но по мере того как колебания камертона уменьшаются по амплитуде, восприятие его действия ста-

[1]) Mayer, *Phil. Mag.*, том II, стр. 500, 1876.

новится все меньше и меньше, пока не исчезает полностью, так что нельзя заметить ни малейшего изменения в тембре или интенсивности звука органной трубы, независимо от того, открыт или закрыт резонирующий ящик камертона. Конечно, в этой стадии опыта колебания камертона могут быть внезапно и полностью остановлены без того, чтобы ухо способно было это обнаружить. Но если вместо прекращения колебаний камертона, когда он делается неслышимым, мы прекратим звучание органной трубы, то невозможно не удивиться сильному звуку камертона, который был заглушен и ослаблен открытой трубой настолько, что потерял способность действовать на ухо".

Но „никакой звук, даже если он очень интенсивен, не может уменьшить или уничтожить ощущение одновременно слышимого другого звука более низкой частоты. Это было доказано опытами, подобными только что описанному, но отличавшимися тем, что более сильный звук был выше (а не ниже) по тону. В этом случае, когда ухо определяет, что звук (более низкого и слабого) камертона только что заглушен, обычно обнаруживалось путем прекращения более высокого звука, что *камертон*, который должен был производить более низкий звук, *перестал вибрировать*. Нужно проделать этот удивительный опыт для того, чтобы оценить его. Я хочу только отметить, что было проведено очень много подобных экспериментов в диапазоне, обнимающем четыре октавы с консонирующими и диссонирующими интервалами, и что десятки различных слушателей подтверждали это открытие".

Эти результаты, которые нетрудно проверить [1]), представляют серьезное исключение из универсального закона Ома и должны оказать серьезное влияние на другие неразрешенные вопросы, относящиеся к слуху. Следует отметить, что в опытах Мейера вопрос заключается не просто в том — можно ли слышать какой-нибудь частный тон как таковой. Более высокий звук, если он менее интенсивен, *вовсе* не слышен.

На слышимость звука, даже изолированного, оказывает влияние степень усталости уха. Этот эффект особенно очевиден при применении очень высоких тонов птичьего манка (§ 371). „Птичий манок" был смонтирован вместе с наполненным газовым мешком и водяным манометром, при помощи которых можно было сохранять постоянное давление в течение продолжительного времени. Если поместить ухо на небольшом расстоянии от инструмента, то сначала слышен неприятный звук, но по истечении короткого интервала времени, обычно не более трех-четырех секунд, он ослабляется и совершенно исчезает. Достаточно очень короткого перерыва для хотя бы частичного восстановления слуха. Достаточно быстрое движение руки,

---

[1]) Я обнаружил, что вместо ящика, привинченного к камертону, лучше пользоваться независимым резонатором, к отверстию которого определенным способом приближают или удаляют от него камертон.

экранирующей ухо в течение доли секунды, позволяет вновь услышать звук"[1]).

Однако, хотя закон Ома имеет существенные ограничения, едва ли можно сомневаться, что ухо способно произвести грубое разложение сложного колебания на простые составляющие. Природа обычно встречающихся затруднений уже была указана (§§ 25, 26); однако здесь следует сделать несколько дальнейших замечаний.

При разложении сложных нот главным требованием является определенный контроль над вниманием, и Гельмгольц нашел, что музыкально тренированное ухо не всегда имеет преимущество. Перед выслушиванием определенного тона необходимо, чтобы он звучал так, чтобы запоминался и оставался в памяти, но не чересчур громко, чтобы не ослабить напрасно чувствительности уха. Как правило, нечетные составляющие тоны — дуодецима, верхняя терция (децима) и т. д., — легче распознаются, нежели октавы.

Возьмем, например, сначала тихо g' на рояли и, как только отпустим клавиш, заставим сильно звучать c. Тон g', на котором должно все время сосредоточиваться внимание, можно теперь услышать как часть сложного тона c. Аналогичный опыт можно проделать с верхней терцией e'', и тонкое ухо может заметить небольшое понижение тона. Это является следствием равномерно темперированной настройки (§ 19) и ясно показывает, что явная пролонгация тона не является продуктом воображения. В современных роялях седьмой и девятый составляющие тоны часто слабы или совершенно отсутствуют, но в фисгармонии эти тоны обычно легко услышать.

Еще лучше, если подлежащий выслушиванию тон сначала получается, как гармоника, из самой струны c. Так, например, в случае дуодецимы, нажмите слегка клавиш, слегка касаясь в то же время струны на расстоянии одной трети ее длины, а затем, сняв палец, нажмите более сильно. Соответствующую точку на струне удобно найти, скользя медленно пальцем вдоль струны при непрерывном нажатии клавиша. Когда достигается точка деления на целое число равных частей, то соответствующая гармоника звучит четко; иначе звук — слабый и глухой. Таким образом, Гельмгольцу удалось услышать обертоны тонких струн вплоть до шестнадцатого. Начиная от этой точки, они лежат близко друг к другу, чтобы их можно было легко различить.

Гельмгольц особенно рекомендует некоторое дальнейшее видоизменение этого метода. Вместо использования пальца к узловой точке прикасаются небольшой щеткой из верблюжьего волоса. Это позволяет произвольно изменять степень демпфирования и достигать постепенного перехода от чистой гармоники, свободной от всякой примеси компонент, не имеющих узла в данной точке прикосновения к струне, к собственному тону струны.

---

[1]) *Phil. Mag.*, том XIII, стр. 344, 1882.

Но, именно, при помощи резонаторов легче всего услышать обертоны в первый момент. Для этой цели выбирают резонатор, настроенный, например, на g', а ухо помещают так, что оно сообщается с полостью резонатора. Когда звучит c либо на фортепиано, либо на фисгармонии, либо в человеческом голосе, обычно можно слышать тон g' весьма громко и четко. Правда, на многих фортепиано можно слышать тон g' в его гармонических унтертонах g или c так же громко, как из самой струны g'. Как только обертон услышан, помощь резонатора должна постепенно устраняться, что можно сделать или отодвигая его от уха, или расстраивая его при помощи препятствия (например пальца), удерживаемого вблизи отверстия резонатора.

387. Если допустить, что ухо способно разлагать музыкальную ноту на составляющие, или частичные тоны, то отсюда почти необходимо следует, что эти более элементарные ощущения соответствуют простым колебаниям. До тех пор, пока мы остаемся в рамках принципа суперпозиции, это — тот вид разложения, который осуществляется в механических приспособлениях, — как, например, в резонаторах, — и все наиболее очевидные факты доказывают, что ухо разлагает звук по таким же законам. Кроме того, априорные вероятности для этого случая, повидимому, дают указания в этом же направлении. Трудно предположить, что физиологические эффекты — электрической, химической или еще какой-нибудь неизвестной природы — создаются непосредственно прикосновением звуковых волн, представляющих просто периодическое изменение давления в жидкости. Теория слуха Гельмгольца основана на более естественном предположении, — что непосредственный эффект волн состоит в сообщении простого механического колебания определенным внутренним вибраторам [1]), а нервное возбуждение следует затем как вторичное явление.

Предполагается, что способ действия — следующий. Когда простой тон достигает уха, то все части его, способные двигаться, вибрируют синхронно с источником. Если имеется некоторая часть, приблизительно изолированная, собственный период которой почти совпадает с периодом звука, то колебания этой части значительно интенсивнее, чем они были бы в ином случае. Практически, мы можем сказать, что эта часть системы отвечает только на тоны, высота которых лежит внутри некоторых узких пределов. Далее, предполагается, что с вибрирующими частями описанного вида связаны слуховые нервы, собственные частоты которых располагаются с небольшими интервалами между пределами слышимости таким образом, что когда вибрирует какая-нибудь часть, соответствующий нерв возбуж-

---

[1]) Барабанная перепонка и прилегающие к ней части рассматриваются здесь как внешние по отношению к истинному слуховому механизму. Как бы ни была велика их роль, она скорее аналогична роли слуховой трубки или диска (мембраны) механического телефона.

дается и передает восприятие мозгу. В случае простого тона возбуждается один (или, самое большее, сравнительно малое число) нервов из всей серии, и возбуждение этого нерва служит ближайшей причиной слышимости тона.

В этом пункте возникает вопрос — не может ли один и тот же нерв возбуждаться более, чем одним колебанием? A priori такой случай вполне возможен, так как вибрирующие части могут быть восприимчивы более, чем к одной частоте колебания, а следовательно, иметь более чем один собственный период. Если бы мы предположили, что собственные периоды любой вибрирующей части образуют гармоническую шкалу, так что один и тот же слуховой нерв возбуждается как основным тоном, так и его октавой, то это предположение давало бы, конечно, готовое объяснение замечательному сходству октав и позволило бы уменьшить некоторые из трудностей, которые в настоящее время мешают признанию теории Гельмгольца, как полностью объясняющей явления слуха [1]). Как мы сейчас увидим, Гельмгольц допускал, или скорее утверждал, что *если звуки сильны*, то два первоначально простых колебания, как c и c', возбуждают в известных пределах один и тот же нерв; однако, он рассматривает это, как результат нарушения закона суперпозиции, вследствие чрезмерной силы колебаний.

388. Очевидно, что теория Гельмгольца вполне естественно учитывает закон Ома, так же как и исключения из этого закона, в случае, когда действуют два простых колебания приблизительно одинаковой частоты. В последнем случае некоторые из внутренних вибраторов находятся под влиянием обеих возмущающих причин и, следовательно, возбуждаются прерывисто, приводя к возникновению биений, когда период велик, и к ощущению неровности звука, когда биения становятся столь частыми, что нелегко воспринимаются раздельно. Но по мере увеличения интервала между обоими колебаниями вскоре достигается положение, при переходе за пределы которого уже нет ни одного внутреннего вибратора, который бы одновременно заметно возбуждался под влиянием обоих возмущающих факторов, так что, начиная с этой точки и далее, возникающее ощущение свободно от биений или шероховатости, или, по крайней мере, должно быть таким согласно строгому толкованию закона. К этому пункту мы вернемся позже.

Существенно важным элементом теории является величина интервала, на протяжении которого заметно отвечает отдельный внутренний вибратор. Уже было указано (§ 49), что величина этого интервала связана с числом свободных колебаний, которые может совер-

[1]) Здесь напрашивается любопытный вопрос: что происходило бы в случае, если бы колебания, способные возбуждать один и тот же нерв, отклонялись заметно или значительно от гармонической шкалы. Следуя по этому пути, легко представить себе уши, от природы расстроенные по отношению к восприятию музыкальных соотношений.

шать вибрирующее тело. Так, если интервал между собственной частотой и частотой вынужденного колебания, необходимый для того, чтобы снизить резонанс до $^1/_{10}$ от максимума, равен полутону, то это значит, что после 9,5 свободных колебаний интенсивность снизится до $^1/_{10}$ первоначального значения, и то же самое для других интервалов. На основании рассмотрения эффектов трелей в музыке Гельмгольц заключает, что случай уха в некотором отношении соответствует вышеописанному; он дает нижеприводимую таблицу, показывающую получающееся в этом случае соотношение между разностью свободной и вынужденной частот и интенсивностью резонанса, измеряемого квадратом амплитуды колебания.

Разность частот	Интенсивность резонанса	Разность частот	Интенсивность резонанса
0,0	100	0,6	7,2
0,1	74	0,7	5,4
0,2	41	0,8	4,2
0,3	24		
0,4	15	0,9	3,3
полутон	10	целый тон	2,7

Хотя по теории Гельмгольца ощущение диссонанса причиняется прерывным возбуждением тех вибрирующих частей, которые находятся в диапазоне двух или более элементов звука, но не следует делать отсюда вывода, что число биений является достаточной мерой диссонанса. Напротив, обнаружено, что если число биений сохранять постоянным, например 33 в секунду, то эффект биений все больше и больше освобождается от шероховатости по мере того, как звуки делаются полнее, при соответствующем увеличении *интервалов*.

Высота тона (n)	Частота разрывов (m)
64	23,1
128	36
256	62
320	73
384	88
512	108
640	126
768	143
1023	170

Эксперименты А. М. Мейера [1]) распространяются на значительный диапазон частот, причем они были проведены двумя методами. В первом методе звук, который иначе представлял бы чистый тон, делается прерывистым, и степень прерывистости постепенно повышается до той точки, при которой эффект звука на слух снова становится ровным. Результаты приведены в нижепомещаемой таблице, где в первом столбце приведена высота звука, а во втором — минимальное

[1]) Mayer, *Phil. Mag.*, том XLIX, стр. 352, 1875; том XXXVII, стр. 259, 1894.

число разрывов в секунду, необходимое для того, чтобы исключить шероховатость.

Теория прерывных колебаний уже была дана в § 65*а*. Следует помнить, что по самой природе вещей прерывистое колебание не может быть простым. В первом приближении можно предположить, что оно эквивалентно *трем* простым колебаниям с частотами $n - m$, n, $n + m$, а шероховатость, ощущаемую ухом, можно рассматривать, как создаваемую биениями этих трех тонов.

Высота тона (n_1)	Необходимые добавочные колебания ($n_2 - n_1$)	Наименьшие консонирующие интервалы в полутонах
48	....	нет
64	....	нет
96	41	6,15
128	38	4,50
192	48	3,86
256	58	3,53
316	68	3,34
432	85	3,12
575	107	2,95
766	130	2,70
1707	210	2,00
2304	245	1,76
2560	256	1,64
2806	266	1,54

Мейер экспериментировал также и с „наименьшими консонирующими интервалами между простыми тонами", т. е. с интервалами, при которых шероховатость, создаваемая биениями, только что исчезает; интервалы здесь употребляются во множественном числе, потому что оказалось, что необходимый интервал изменяется в различных частях гаммы.

Различные наблюдатели сходятся весьма близко в отношении точки, при которой исчезает шероховатость.

Согласно теории прерывистых звуков следует ожидать, что для данной частоты m в первой серии опытов должно быть приблизительно таким же, как $(n_2 - n_1)$ во второй серии; это достаточно хорошо подтверждается числами Мейера, по крайней мере в среднем диапазоне гаммы.

389. Из степени затухания, определенной выше, следует, что собственная частота внутренних вибраторов, которые заметно отвечают на данный простой звук, охватывает почти целый тон, и может показаться удивительным, что мы в состоянии сравнивать с такой точностью высоту музыкальных звуков, слышимых последовательно. Объяснение этого, пожалуй, в значительной степени зависит от симметрии эффектов по обе стороны от максимума.

Поучительно будет сравнение с возможностями глаза в аналогичном случае. Устанавливая крест нитей в телескопе на центр симметричной освещенной полосы, например на полосу интерференции, нашли, что ошибка не может превосходить $^1/_{100}$ ширины. Аналогичное точное определение центра области, возбужденной данной музыкальной нотой, привело бы к оценке высоты тона с точностью около $^1/_{1000}$, что достаточно хорошо согласуется с требующими объяснения фактами.

В свете того же принципа мы можем определить, насколько было бы ухудшено восприятие высоты тона при ограничении числа колебаний, совершенных за время звучания тона. Согласно определению Гельмгольца, уже приведенному выше (§ 388), внутренние колебания, возбужденные и затем предоставленные самим себе, остаются заметными в продолжение приблизительно 10 периодов. Число импульсов, необходимых для создания почти полного эффекта, имеет этот порядок величины. Если увеличить это число сверх 20 или 30, то дальнейшее усиление концентрации эффекта вблизи максимума будет невелико, а потому мало оснований ожидать большей точности в оценке высоты тона.

Опыты в этой области были произведены Зеебеком [1]), Пфаундлером [2]), С. Экснером [3]), Ауэрбахом [4]) и Кольраушем [5]), причем опыты последнего были наиболее обширны. Дуга окружности с вырезанным на ней ограниченным числом зубцов прикреплялась к маятнику, который можно было запускать при определенных условиях. При качании зубцы задевали соответствующим образом удерживаемую игральную карту; создаваемый таким путем звук сравнивался со звуком от монохорда. Изменяя обычным способом длину струны, ее настраивали так, что ее тон был едва заметно выше или едва заметно ниже, чем звук, создаваемый картой, а интервал между обоими тонами, называемый характеристическим интервалом, определял точность, с которой можно было оценить высоту тона при данном полном числе колебаний. Наилучшие результаты получались только после значительной практики и при полном отсутствии посторонних звуков.

Шестнадцать зубцов, повидимому, определяли высоту тона со всей возможной точностью, причем характеристический интервал (средний, полученный из ряда опытов) был в этом случае равен 0,9922. Даже при 9 зубцах характеристический интервал составлял 0,9903, показывая, что это малое число колебаний достаточно для определения высоты тона с точностью до $^1/_{200}$. Однако, наиболее поразительны результаты, полученные при очень малом количестве зубцов. Для трех зубцов характеристический интервал составлял 0,9790, а для двух зубцов 0,9714.

Тот факт, что высота тона может быть определена со значительной точностью такой малой последовательностью колебаний, иногда рассматривался как возражение против теории слуха Гельмгольца. Я не думаю, чтобы такое мнение имело какое-нибудь основание. Затруднение, заключенное здесь, такого характера, что будет возражением против любой другой теории, которая могла бы быть предложена.

---

[1]) Seebeck, *Pogg. Ann.*, том LIII, стр. 417, 1841.
[2]) Pfaundler, *Wien. Ber.*, том LXXVI, стр. 561, 1877.
[3]) Exner, *Pflüger's Archiv*, том XIII, стр. 228, 1876.
[4]) Auerbach, *Wied. Ann.*, том VI, стр. 591, 1879.
[5]) Kohlrausch, *Wied. Ann.*, том X, стр. 1, 1880.

Повидимому, определению границ частоты в опытах Кольрауша сильно способствовала приближенная разрывность импульсов. В самом деле, вспомним, что рассматриваемые внутренние вибраторы — не только такие, период которых располагается вблизи интервала между ударами, но и такие, периоды которых представляют приближенно делители этого количества. Для вибраторов с частотой в октаву число импульсов практически удваивается, для дуодецимы утраивается и т. д. — точно так же, как в оптике разрешающая сила решетки с ограниченным числом линий увеличивается для спектров второго и высших порядков.

Иногда колебания, ограниченные малым числом периодов, создаются отражением коротких звуков от решеток перил или ступенек. В Терлинге имеется лестница, приблизительно ступенек в 20, которая отражает хлопок в ладоши в виде звука, напоминающего чирикание воробья. Во всех таких случаях явление аналогично наблюдающемуся в оптической решетке.

390. Когда два звука, приблизительно звучащих в унисон, накладываются друг на друга, то следует учитывать не только биения их первых составляющих, но также и биения обертонов. Биения октав вдвое, а биения дуодецимы втрое чаще одновременных биений, тоник. В некоторых случаях, особенно когда звук очень низок, легко ошибиться, упустив биения тоник, лишь слабо действующих на слух. Если за биения тоник будут приняты биения октав то разность частот получится двойной против истинного ее значения.

Но только в случае нарушения консонансов, отличных от октавы, особенно чувствуется важное значение верхних составляющих, или обертонов. Возьмем, например, квинту $c - g$. Третья составляющая c и вторая составляющая g совпадают в g'. Если интервал точный, то биения отсутствуют; но если он несколько отклоняется от точного отношения 3:2, то два прежде совпадающих тона разделяются и порождают биения. Частота биений получается непосредственно из самого способа их возникновения. Так, если нижняя нота отклоняется от первоначальной частоты на одно колебание в секунду, то ее третья составляющая изменяется на три колебания в секунду, и, следовательно, частота биений равна трем биениям в секунду. Если же верхняя нота испытывает отклонение на одно колебание в секунду, в то время как нижняя нота остается без изменения, то частота биений равна 2. Это правило, очевидно, имеет общий характер. Если консонанс таков, что h-тая составляющая нижней ноты совпадает с k-той гармоникой верхней ноты, то при изменении нижней ноты на одно колебание в секунду частота биений равна h, а при изменении верхней ноты на такое же число колебаний частота биений равна k.

„Мы установили, что слышимые биения представляют биения таких составляющих тонов обеих слагаемых, которые почти совпадают.

Но не всегда легко, слушая несколько расстроенную квинту или октаву, ясно определить невооруженным ухом, какая из составляющих полного звука попеременно усиливается и ослабляется. Однако, ухо, привыкшее различать верхние составляющие тоны, будучи направленным со вниманием на слушание общих (верхних) составляющих, о которых идет речь, легко услышит сильные биения именно этих тонов и отличит непрерывное и ненарушенное звучание основных тонов. Заставьте звучать ноту c, прислушайтесь к ее верхней составляющей g', а затем заставьте звучать темперированную квинту g; биения g' будут явственно слышны. Нетренированному уху окажут большую помощь уже описанные резонаторы. Примените резонатор для g', и указанные биения будут слышны весьма четко. С другой стороны, если применяется резонатор, настроенный на один из основных тонов c или g, то биения слышны значительно менее явственно, так как при этом усиливается непрерывная часть тона" [1]).

Опыты подобного рода удобно производить с фисгармонией. Малые изменения высоты тона можно получить частичным (вместо полного) нажатием на клавиш, в результате чего звук делается более низким. Биения общего обертона легко слышны, если заставить звучать (темперированную) квинту; биения равномерно темперированной терции несколько быстры.

Фисгармония является подходящим инструментом также и для опытов, иллюстрирующих точную настройку. Звук какой-либо трубы можно понижать, нагружая свободный конец язычка кусочком воска, и повышать легким спиливанием в этом же месте. Легко, особенно при помощи резонаторов, точно настроить аккорды $c' - e' - g'$, $f' - a' - c''$, консонанс которых тогда будет выгодно контрастировать с неизменным темперированным аккордом $g' - b' - d''$. Подробное рассмотрение вопросов темперирования и точного звучания выходит за рамки настоящей работы. Подробности можно найти в английском издании книги Гельмгольца (с примечаниями Эллиса) и в труде Бозанке.

Согласно теории Гельмгольца обычные консонирующие интервалы определяются, главным образом, биениями верхних составляющих, всякое отклонение от которых обнаруживается благодаря биениям прежде совпадавших обертонов. Но даже если оба тона настроены точно, различные консонансы различаются по степени вследствие нарушений, могущих возникнуть от слишком близких друг к другу обертонов.

Унисон, октаву, дуодециму, двойную октаву и т. д. можно рассматривать как абсолютные консонансы, в которых вторая компонента не вносит новых элементов, а только усиливает часть первой.

Остальные консонирующие интервалы, — такие, как квинта и большая терция, несколько нарушаются благодаря близкому их соседству

[1]) Helmholtz, *Sensations of Tone*, 2-е изд., стр. 181.

с другими консонирующими интервалами. Например, в случае точно настроенной квинты с частотами, представляемыми числами 3 и 2, имеется совпадение между второй гармоникой верхней ноты и третьей гармоникой нижней, но составляющие, образующие кварту, с частотой $3 \cdot 3 = 9$ и $4 \cdot 2 = 8$, находятся в пределах интервала полного тона друг с другом и, следовательно, достаточно близки, чтобы вызвать возмущение. Аналогичным образом можно считать, что большая терция нарушается соседством с квартой и точно так же в случае других интервалов.

Важность этих нарушений, а следовательно, и порядок, в котором располагаются интервалы по степени консонанса, изменяются с изменением тембра звуков. В качестве примера, в котором присутствуют обертоны значительной силы, Гельмгольц определил степень консонанса различных интервалов скрипки и представил результаты в форме кривой [1]).

391. Применимость принципа суперпозиции (§ 83), принимаемого в обычных акустических рассуждениях, зависит от допущения, что рассматриваемые колебания бесконечно малы или во всяком случае подобны по характеру бесконечно малым колебаниям; только при этом предположении закон Ома находит непосредственное применение. Одно явное исключение из этого закона было известно давно. Это — комбинационные тоны, открытые Зорге и Тартини в прошлом [XVIII] столетии. Если заставить одновременно сильно звучать два тона с интервалом, например в большую терцию, то будет слышен в добавление к двум звукам еще один низкий звук. В указанном частном случае,

Производящие тоны	Комбинационный тон	Относительная частота	
		производящие тоны	комбинационный тон
b f'	B	2:3	1
f' b'	B	3:4	1
b d'	B_{-1}	4:5	1
d' f'	B_{-1}	5:6	1
f' as'	B_{-1}	6:7	1
b g'	es	3:5	2
d' as'	B	5:7	2
d' b'	f	5:8	3

когда первичные, или производящие, как их удобно назвать, звуки могут быть представлены числами 4 и 5, комбинационный тон представляется единицей, будучи таким образом на две октавы ниже, чем низший из производящих тонов.

В вышеприведенном примере новый тон имеет период цикла производящих тонов; однако, Гельмгольц нашел, что это правило во

[1]) Helmholtz, *Sensations of Tone*, стр. 193.

многих случаях нарушается. В приводимой на стр. 440 таблице [1]) сведены его результаты, полученные при помощи камертонов.

В последних трех случаях период слышимых тонов не совпадал с полным циклом, но их частоты равны разностям частот производящих тонов. В силу этого правила, которое оказалось применимым во всех случаях [2]), рассматриваемые комбинационные тоны называются разностными тонами.

По Гельмгольцу для четкой слышимости комбинационных тонов необходимо, чтобы производящие тоны были *сильны*. Сейчас мы увидим, что это утверждение было оспорено. „Их легче всего услышать, если два производящих тона отделены друг от друга интервалом, меньшим октавы, так как в этом случае разностный тон ниже, чем каждый из двух производящих. Для того чтобы услышать его в первый раз, выберите два тона, которые можно заставить звучать с большой силой в течение некоторого времени и которые образуют точный гармонический интервал. Сначала заставьте звучать более низкий тон, а затем — более высокий. При достаточно напряженном внимании в момент возбуждения более высокого тона будет слышен слабый низкий тон; это и есть искомый комбинационный тон. Для некоторых инструментов, как например фисгармонии, комбинационный тон можно сделать более слышным при помощи резонаторов, настроенных соответствующим образом. В этом случае тоны образуются в воздухе, содержащемся внутри инструмента. Но в других случаях, когда эти тоны генерируются только внутри уха, резонаторы приносят мало пользы“ [3]).

Опираясь на некоторые наблюдения Бозанке и Прейера, некоторые авторы выражали сомнения в правильности утверждения Гельмгольца, что комбинационные тоны могут существовать вне уха; довольно странно, что эти сомнения разделялись Эллисом. Этот вопрос имеет важное значение для теории комбинационных тонов; он был исследован недавно Рюккером и Эдсером [4]), применявшими приборы, совершенно независящие от уха. Они приходят к заключению, что „Гельмгольц был прав, утверждая, что сирена создает два объективных тона, частоты которых соответственно равны сумме и разности частот основных тонов“. Мои собственные наблюдения производились с фисгармонией и привели меня к тому, что я отказываюсь понимать, каким образом возможны здесь два мнения. Резонатор удерживается так, что отверстие его расположено насколько возможно близко к трубам, издающим производящие тоны и настраивается или расстраивается по отношению к разностному тону легкими движениями пальца; если настройка хороша, то разностный тон выдается со значительной силой, но легкая расстройка (вероятно, порядка полутона) приводит его почти к молчанию. В некоторых случаях, например, когда интервал между

[1]) Helmholtz, *Berlin. Monatsber.*, 1856.
[2]) Это, однако, оспаривается другими авторами.
[3]) Helmholtz, *Sensations of Tone*, стр. 153.
[4]) Rücker a. Edser, *Phil. Mag.*, том XXXIX, стр. 357, 1895.

производящими тонами составляет (темперированную) квинту, слышны *биения* разностного тона.

Последнее наблюдение доказывает, что в некоторых случаях существуют два разностных тона приблизительно одинаковой частоты. Гельмгольц находит объяснение этого в сложной природе звуков. Так, в случае квинты, выражаемой числами 2 и 3, мы должны рассматривать не только тоники, но и обертоны. 2×2, 3×2 и т. д., 2×3, 3×3 и т. д. Соответственно этому разностный тон 1 может быть получен из $2 \times 2 = 4$ и 3, так же как из 3 и 2, а так как составляющий тон, образующий октаву, обыкновенно интенсивен, то как один, так и другой источники разностного тона могут быть одинаково важными. Но если мы подставим большую терцию 5:4 вместо квинты, то мы получим второй разностный тон 1, только дойдя до четвертой гармоники 16 нижнего тона и третьей 15 — верхнего тона, а эти составляющие обычно слишком слабы, чтобы производить большой эффект.

Для исследования частоты биений вернемся к случаю квинты, предполагая, что она расстроена так, что частоты равны 200 и 301. Разностный тон, образуемый тониками, равен $301 - 200 = 101$, а разностный тон, создаваемый октавой, есть

$$2 \times 200 - 301 = 99;$$

эти разностные тоны, звучащие одновременно, дадут биения с частотой 2. Легко заметить, что это — такое же число биений, какое создается общим обертоном, именно $2 \times 301 - 3 \times 200$; но в то время как последние биения имеют тон 600, биения комбинационного тона происходят при частоте 100.

392. Согласно взглядам прежних теоретиков — Хладни, Лагранжа, Юнга и т. д. — объяснение разностного тона не представляло особенных затруднений. Поскольку производящие тоны различаются по частоте, биения учащаются и в конце концов становятся слишком частыми, чтобы быть воспринятыми как таковые, переходя в разностный тон, частота которого совпадает с частотой биений. Этот взгляд на существо дела, который получил одобрение многих авторов, был отброшен Гельмгольцем как несовместимый с законом Ома; Гельмгольц разработал иную теорию, по которой выходило, что нарушается не закон Ома, а принцип суперпозиции.

Вычисления Гельмгольца для эффекта отсутствия симметрии восстанавливающих сил в случае, когда колебания системы нельзя рассматривать как бесконечно малые, уже были приведены (§ 68). Оказывается, что в дополнение к членам, содержащим pt, qt, к соответствующим генерирующим силам необходимо добавить другие члены второго порядка по $2pt$, $2qt$, $(p+q)t$, $(p-q)t$; последний из них представляет собой разностный тон. Это объяснение, как заметил Германн [1]), связано с допущенным отсутствием симметрии. Если мы пред-

[1]) Hermann, *Pflüger's Archiv*, том XLIX, стр. 507, 1891.

положим, как в § 67, что восстанавливающая сила пропорциональна частично первой степени, а частично — кубу смещения, то мы *не* получим члена, содержащего $(p-q)t$, но вместо него получим члены *третьего* порядка, содержащие $(2p-q)t$, $(2q-p)t$ и т. д. Практическое значение этого возражения, однако, невелико, так как нарушение симметрии происходит почти всегда. Достаточно указать, в качестве примера, на все важные случаи колебаний воздуха. Будем ли мы рассматривать бегущие волны, исходящие из источника, или стоячие волны резонатора — всегда мы будем иметь существенное нарушение симметрии между сгущением и разрежением, и образование в известной мере октав и комбинационных тонов является математической необходимостью.

Возникновение внешних, или объективных, комбинационных тонов требует одновременного наличия производящих тонов в том месте, где они сильны [1]). Это обычно бывает только в тех случаях, когда возникающие звуки расположены очень близко друг к другу, как в полифонической (двойной) сирене и в фисгармонии. В этих случаях условия исключительно благоприятны, так как ограниченная масса воздуха внутри инструмента по необходимости подвергается сильному воздействию обоих тонов. Если порождающими звук источниками являются две органные трубы, то, хотя они и стоят достаточно близко друг к другу, разностный тон не усиливается заметно резонатором, откуда мы можем заключить, что вне уха существует лишь незначительная его часть.

До сих пор мы еще ничего не сказали о суммовом тоне, соответствующем члену, содержащему $(p+q)t$. Существование этого тона было доказано Гельмгольцем теоретически; и впоследствии ему удалось услышать его не только в звуках сирены и фисгармонии, где он существует объективно и усиливается резонаторами, но также и в звуках камертонов и органных труб. Гельмгольц рассказывает также об одном опыте, в котором он заставлял мембрану колебаться в ответ на суммовой тон; аналогичные эксперименты были недавно выполнены с успехом Рюккером и Эдсером (loc. cit).

Тем не менее, следует допустить, что услышать суммовные тоны исключительно трудно. Германн (loc. cit.) утверждает, что он не может ни сам услышать их, ни найти кого-либо, кто был бы в состоянии их услышать; он считает эту трудность серьезным возражением против теории Гельмгольца, согласно которой суммовой и разностный тоны должны быть приблизительно одинаково интенсивны.

Возражение другого рода выставил Кениг [2]). Он замечает, что если даже существует тон с частотой суммового тона, то в действительности он может быть разностным тоном, полученным из высших

[1]) Оценки сгущения (§ 384) для едва слышимых звуков делают весьма невероятным предположение, что принцип суперпозиции может оказаться неприменимым к звукам такого порядка величины.

[2]) König, *Pogg. Ann.*, том 157, стр. 177, 1876.

составляющих тонов производящих. С точки зрения арифметики такой аргумент оспорить нельзя; в самом деле, если p и q соизмеримы, то всегда возможно найти целые числа h и k такие, что

$$p + q = hp - kq.$$

Однако, это объяснение допустимо только, когда h и k *малые* целые числа.

Мне кажется, что сравнительная трудность услышать суммовые тоны в значительной мере, если не полностью, объясняется наблюдениями Мейера (§ 386). Эти тоны необходимо имеют более высокую частоту, чем производящие тоны, а потому они могут быть подавлены и стать неслышными. С другой стороны, разностный тон, будучи обычно ниже, и часто значительно ниже, каждого из производящих тонов, обладает способностью быть слышным, несмотря на звучание производящих тонов. Но даже и в отношении разностных тонов уже Гельмгольц заметил, что их труднее слышать, если они не составляют наиболее низкого элемента звука благодаря тому, что интервал между производящими превосходит октаву.

393. Во многих случаях, когда слышны разностные тоны, не усиливаемые резонаторами, для того чтобы сохранить теорию Гельмгольца, необходимо предположить, что разностные тоны имеют источником вибрирующие части внешнего уха, — барабанную перепонку и связанные с ней части. Гельмгольц считает, что строение этих частей настолько несимметрично, что в таком предположении нет ничего искусственного. Очевидно, однако, что такое объяснение допустимо только в случае, когда производящие звуки громки, т. е. мощны в момент, когда они достигают уха. Но противники взглядов Гельмгольца, в лице Германна, считают, что это условие вовсе не необходимо для восприятия разностных тонов. Здесь мы упираемся в факты, удовлетворительное разъяснение которых требует лучших опытов, — преимущественно количественных, — чем все те, которые выполнены до сих пор. Мой собственный опыт скорее склоняется в пользу взглядов Гельмгольца, что необходимы громкие производящие звуки. В некоторых опытах в закрытые органные трубы d''', e''' вдувался постоянный поток воздуха, причем трубы были настроены так, что разностный тон создавал медленные биения с электрически возбуждаемым камертоном частоты 128, смонтированным вместе с резонатором той же частоты. Когда ухо подставлялось вблизи отверстий труб, то разностный тон был таким громким, что требовалась полная интенсивность камертона для того, чтобы создать возможно более четкие биения. Эти биения можно было сделать столь медленными, что можно было наблюдать мгновенное исчезновение низкого звука, если интенсивности подобраны правильно, чтобы допустить достаточно точное наблюдение. При этом положении оба тона с частотой 128, один — разностный, а другой — тон, извлекаемый из камертона, были одинаково интенсивны в момент прихода к наблюдателю; при удалении уха так, чтобы оба звука ослаблялись с рассто-

янием, казалось, что комбинационный тон спадал быстрее, чем обыкновенный тон камертона. Возможно было бы произвести опыт подобного рода, который дал бы решительный ответ на вопрос о том, является ли комбинационный тон действительно эффектом второго порядка или нет.

При отсутствии решающих опытов мы должны попытаться взвесить априорные вероятности в данном вопросе. Согласно взглядам прежних теоретиков, защищавшихся Кенигом, Германном и другими критиками Гельмгольца, биения производящих тонов с их попеременными пучностями и паузами переходят в разностный тон той же частоты без того нарушения суперпозиции, к которому прибегал Гельмгольц. Критики идут дальше и утверждают, что ухо способно воспринимать в качестве тона любую периодичность в известных пределах частот [1]).

Как ни вероятно это построение с известных точек зрения, но более детальное исследование покажет, я думаю, что оно изобилует трудностями. Среди этих трудностей есть и двусмысленность, о которой говорилось в § 12, в вопросе о том, что именно следует точно подразумевать под периодом. Периодичность с частотой 128 есть также периодичность с частотой 64. Должен ли последний тон быть также хорошо слышным, как первый? Поскольку дело касается теории, закон Ома удовлетворительно отвечает на такие вопросы. Опыт может заставить нас оставить этот закон, но полезно помнить, что нет ничего, что могло бы занять его место. Далее, рассматривая частные случаи, нетрудно доказать, что формулированная выше общая теория не может быть истинной. Возьмем вышеупомянутый пример, когда две органные трубы дают разностный тон с частотой 128. Здесь имеется периодичность с частотой 128, и соответствующий тон слышен [2]). До сих пор все хорошо. Но опыт доказывает также, что стоит только наложить на этот тон другой тон с частотой 128, извлекаемый из камертона, для того чтобы нейтрализовать комбинационный тон и заставить его замолчать. Периодичность с частотой 128 остается с еще большей четкостью, чем прежде, но соответствующий тон *не* слышен.

Я думаю, что в дискуссиях по этому поводу часто упускают из виду, что разностный тон представляет собою не просто ощущение, но содержит *колебание* с определенной амплитудой и фазой. Сразу же возникает вопрос: как определяется фаза? Казалось бы, естественно предположить, что максимум биений соответствует тому или другому крайнему смещению в разности тона, но обсуждаемые принципы, повидимому, не дают никаких оснований для выбора в этой альтернативе. Далее, как определяется амплитуда? Конечно, тон исчезает с исчезновением каждого из производящих тонов. Отсюда, казалось

---

[1]) Hermann, loc. cit., стр. 514.

[2]) Строго говоря, периодичность неполная, если p и q не являются кратными ($p - q$).

бы, следует, что амплитуда разностного тона должна быть пропорциональна произведению амплитуд производящих тонов, точно так же, как в теории Гельмгольца. Если так, то мы возвращаемся к разностным тонам второго порядка, а приписываемая им легкая слышимость при слабых производящих тонах уже не является возражением ни против одной теории, ни против другой.

Кениг и Мейер сделали наблюдение, имеющее большой интерес само по себе и способное, быть может, оказать влияние на обсуждаемый нами вопрос [1]). Экспериментируя как с камертонами, так и с птичьими манками, они нашли, что слышные разностные тоны могут порождаться тонами, частота которых настолько высока, что порознь они не слышны. Этому, вероятно, можно дать не одно объяснение, однако, переход от неслышного биения к слышному разностному тону кажется легче объяснимым на базе теории Гельмгольца.

В целом эта теория, повидимому, дает наилучшее объяснение рассмотренных до сих пор фактов, но она предполагает большую свободу отклонения от суперпозиции колебаний внутри уха, чем можно было ожидать.

394. В § 390 мы видели, что в случае обычных сложных звуков, содержащих хорошо развитые верхние составляющие, признанные консонирующие интервалы отличаются от соседних интервалов хорошо заметными явлениями, которым нетрудно было дать удовлетворительное толкование. Теперь мы должны рассмотреть более трудный вопрос о консонансе между чистыми тонами; мы встретимся здесь со значительными различиями в мнениях не только по части теоретических объяснений, но и в отношении данных наблюдения. И здесь, как в других местах книги, удобно будет начать с изложения взглядов Гельмгольца [2]), согласно которым биения таких расстроенных консонансов вызываются комбинационными тонами.

„Если не принимать во внимание комбинационных тонов, то два простых тона — такие, как тоны камертонов, или закрытых органных труб, — не могли бы вызвать биений, если только они не весьма близки по частоте, а такие биения сильны, когда интервал их равен малой или большой секунде, но слабы для терции, и тогда их можно заметить только в нижних регистрах гаммы, причем четкость их постепенно ослабевает по мере увеличения интервала, не обнаруживая каких-либо отличий для самих гармонических интервалов. При бо́льших интервалах между двумя простыми тонами никаких биений не было бы вообще, если бы не было верхних составляющих или комбинационных тонов, и следовательно, консонирующие интервалы...никак нельзя было бы отличить от соседних интервалов; не было бы, в самом деле, никакого различия между хорошо консонирующими и абсолютно диссонирующими интервалами.

---

[1]) Mayer, *Rep. Brit. Ass.*, стр. 573, 1894.

[2]) Приписываемых ему Гельстремом (Hällström) и Шайблером.

„Но, как известно, такие большие интервалы простых тонов создают биения, хотя и намного более слабые, чем рассмотренные до сих пор, так что даже для таких тонов имеется различие между консонансами и диссонансами, хотя оно значительно более несовершенно, чем различие для сложных тонов“ [1]).

Опыты на эту тему трудно выполнить удовлетворительно. Во-первых, не легко получить простые тоны. В качестве источников обычно прибегали к закрытым органным трубам или к камертонам, однако, необходимо принимать много предосторожностей. От свободных ножек колеблющегося камертона обычно можно слышать много обертонов [2]). Далее, если применять камертон по способу музыкантов — упирая его подставкой в резонирующую доску, то октава громка и часто преобладает [3]). Наилучший способ — это держать свободные ножки над соответственно настроенным резонатором. Но даже и в этом случае мы не можем быть уверены, что получаемый таким образом громкий звук абсолютно свободен от октавы.

В случае октавы достаточен разностный тон, уже рассмотренный выше. „Если нижний тон дает 100 колебаний в секунду, между тем как несовершенная октава дает 201, то первый разностный тон дает $201 - 100 = 101$ и, следовательно, почти совпадает с нижним тоном, дающим 100 колебаний, вызывая одно биение через каждые 100 колебаний. Нетрудно услышать эти биения, и таким образом можно легко отличить несовершенные октавы от совершенных даже для простых тонов — при помощи биений, создаваемых первыми“.

Частота биений — такая же, как если бы они создавались обертонами; однако, есть важное различие между обоими случаями, отмеченное Эллисом, хотя оно едва ли вообще замечено Гельмгольцем. В последнем случае биения будут воздействовать на октаву, между тем как, согласно вышеописанной теории, биения относятся к нижнему тону. Бозанке, Кениг и другие соглашались, что в этом отношении теория подтверждается.

Далее, если биения создаются комбинационными тонами, то они должны стремиться исчезнуть по мере замирания звуков. Опыт очень легко провести с камертонами, и, согласно моим наблюдениям, факты согласуются с этим положением. При значительном ослаблении звуков расстройку не удается заметить.

---

[1]) *Sensations of Tone*, стр. 199.

[2]) Эксперименты Кенига показали, что имеет место особенно в случае тонких ножек. König, *Wied. Ann.*, том XIV, стр. 373, 1881.

[3]) Основной тон может даже совершенно исчезнуть. Если в нормальном положении ножки камертона сближены больше всего внизу, то движение, направленное наружу во время колебания, понизит центр инерции при неподвижной подставке, но если ножки сближены более всего вверху, то может произойти обратное. Должна быть какая-то промежуточная конструкция, для которой центр инерции будет оставаться в покое во время колебаний. В этом случае звук от резонансной доски будет второго порядка и подавляется основным тоном.

„Для квинты первый порядок разностных тонов уже недостаточен. Возьмем неточную квинту с отношением 200:301; тогда разностный тон первого порядка дает 101, что очень далеко от частот основных тонов, чтобы создать биения. Но этот тон образует неточную октаву с тоном 200, а, как мы только что видели, в этом случае наступают биения. Здесь они создаются разностным тоном 99, получающимся из тонов 101 и 200, и этот тон 99 дает два биения в секунду с тоном 101. Теперь эти биения служат для отличия неточной квинты от точной даже в случае двух простых тонов. Таким образом, число таких биений совпадает с числом биений, создаваемых верхними составляющими тонами. Но для того, чтобы заметить эти биения, оба основных тона должны быть громкими, и ухо не должно отвлекаться никаким посторонним шумом. При благоприятных обстоятельствах, однако, их нетрудно услышать".

Важно внести ясность в вопрос о порядке величины рассмотренных различных разностных тонов. Если первичные тоны с частотами, обозначаемыми p и q, имеют соответственно амплитуды e и f — величины первого порядка, — то (§ 68) первые разностные и суммовые тоны имеют частоты, соответствующие

$$2p,\ 2q,\ p+q,\ p-q,$$

и имеют второй порядок относительно e и f. Полное исследование вторых разностных тонов требует сохранения еще члена βu^3 (§ 67) в выражении для восстанавливающей силы. Отсюда возникнут члены третьего порядка по e и f с частотами, соответствующими

$$3p,\ 2p \pm q,\ p \pm 2q,\ 3q\ ^1);$$

кроме того, имеются еще другие члены с такими же частотами и тем же порядком величины, независимые от β и возникающие при полном разложении до третьего порядка величины αu^2. В случае расстроенной квинты, приведенном выше, биения происходят между тоном $2q - p = 99$, представляющим величину третьего порядка, и тоном $p - q = 101$ второго порядка. Приведенная выдержка из Гельмгольца относится к последним упомянутым членам, не зависящим от β.

Биения расстроенной кварты или большой терции зависят от разностных тонов еще более высокого порядка величины и согласно наблюдениям Гельмгольца они едва слышны, если вообще слышны, даже когда первичные тоны сильны. В этом нет ничего неожиданного; трудно понять скорее то, почему биения расстроенной квинты заметны и почему биения расстроенной октавы так легко слышать.

Если одновременно звучат более чем два простых тона, то возникают новые условия. „Мы видели, что октавы точно ограничены, даже для простых тонов, биениями первого разностного тона с нижним первичным тоном. Предположим теперь, что октава была настроена точно

[1]) Bosanquet, *Phil. Mag.*, том XI, стр. 497, 1881.

и что затем был наложен третий тон, настроенный на квинту. Тогда, если квинта неточна, возникнут биения с первым разностным тоном.

„Пусть тоны, образующие точную октаву, имеют частоты 200 и 400, и пусть частота неточной квинты есть 301. Разностные тоны суть:

$$\begin{array}{l} 400 - 301 = 99 \\ 301 - 200 = 101 \\ \hline \text{Число биений } 2 \end{array}$$

„Эти биения квинты, расположенной между двумя октавами, слышны значительно лучше, чем биения одной квинты без своей октавы. Последние зависят от слабых разностных тонов второго порядка, а первые — от разностных тонов первого порядка. Отсюда Шайблер несколько времени тому назад вывел правила настройки камертонов: сначала надо настроить два камертона точно на октаву, а затем заставить их звучать одновременно, вместе с квинтой — для того, чтобы настроить последнюю. Если и квинта и октава обе вполне точны, то они дают вместе также точную кварту.

„Аналогичное положение получается, когда два простых тона настроены на точную квинту, и мы добавляем между ними новый тон, составляющий большую терцию с нижним. Пусть точная квинта имеет частоту 400 и 600. Вставляя неточную большую терцию с числом колебаний 501 вместо 500, получим разностные тоны:

$$\begin{array}{l} 600 - 501 = 99 \\ 501 - 400 = 101 \\ \hline \text{Число биений } 2 \end{array}$$

395. В теории неточных консонансов Гельмгольца слышимые циклы рассматриваются как подъем и падение интенсивности одной или более составляющих звука, независимо от того, имеются ли они с самого начала или образуются путем трансформации, — применяя выражение Бозанке, — в передающем механизме уха. Согласно закону Ома, такие изменения интенсивности являются единственным явлением, которое могло бы быть слышным, так как считается, что относительные фазы составляющих (предполагая, что они достаточно далеки друг от друга по частоте) безразличны.

Этот вопрос о независимости фазовых соотношений исследовался Гельмгольцем в связи с его исследованиями гласных звуков (§ 397). Можно сделать так, чтобы различные камертоны, приводимые в действие электрически от одного и того же прерывателя (§ 64), издавали тонику, октаву, дуодециму и т. д. сложного тона, и можно было бы регулировать интенсивности и фазы составляющих путем небольших изменений основного (собственного) тона камертонов и связанных с ними резонаторов.

По наблюдениям Гельмгольца изменения фазы не оказывали заметного влияния на тембр сложного звука.

Однако, очевидно, что вопрос о действии на ухо изменения фазовых соотношений различных составляющих звука, если такое действие существует, может быть с большим успехом изучен методом слегка расстроенных консонансов. Если, например, интервал в октаву между двумя чистыми тонами очень мало расстроен, то действие его на ухо в любой данный момент будет равно действию точного интервала с известным соотношением фаз, но после истечения короткого времени фазовые соотношения изменятся и будут принимать поочередно все возможные значения. Следовательно, слышимость цикла является критерием в вопросе о том, воспринимает ли ухо или нет фазовые соотношения; отмеченные самим Гельмгольцем результаты, которые легко повторить, показали, что в известном смысле ответ должен быть положительным. В противном случае не были бы слышны биения неточной октавы. Объяснение посредством комбинационных тонов не изменяет того факта, что ухо воспринимает фазовое соотношение двух первоначально простых тонов, по крайней мере, когда они умеренно громки [1]).

По наблюдениям лорда Кельвина [2]) „биения неточных гармонических интервалов", иных, чем октава и квинта, не так трудно услышать, как это предполагал Гельмгольц. Применявшиеся камертоны были смонтированы на резонаторах ящичного типа, и, конечно, можно было бы возразить, что звуки, проводившиеся по подставке, не были полностью очищены от компонент, составляющих с ними октаву. Но это заключение едва ли окажет влияние на результат в каком-либо из упомянутых случаев. Оказалось, что при приближении к каждому из гармонических интервалов 2:3, 3:4, 4:5, 5:6, 6:7, 7:8, 1:3, 3:5 можно было явственно слышать биения и что все они „удовлетворяли тому условию, что в качестве периода имели полный период неточности, а не какой-нибудь делитель этого периода", — то же самое правило, которое имеет место, если биения создаются почти совпадающими обертонами. Что касается необходимости громких звуков, то Кельвин нашел, что биения неточно настроенных аккордов 3:4:5 были иногда последними слышимыми звуками во время замирания колебаний камертонов, если случайно интенсивности трех тонов аккорда имели к концу соответствующие пропорции.

Последнее наблюдение трудно, конечно, примирить с теорией, которая приписывает биения комбинационным тонам. Но, с другой стороны, можно заметить, что сравнительно легкая слышимость биений расстроенной октавы и расстроенного аккорда, состоящего из трех тонов (3:4:5), которая зависела бы от первого разностного тона, находится в хорошем согласии с этой теорией и, повидимому, не объяснена никакой другой теорией.

---

[1]) König, *Wied. Ann.*, том XIV, стр. 375, 1881.
[2]) Kelvin, *Proc. Roy. Soc. Edin.*, том IX, стр. 602, 1878.

396. Труднее всего, однако, согласовать с теорией Гельмгольца наблюдения, описанные Кенигом [1]), который находит тоны, описываемые как биения, не входящие в состав комбинационных тонов; эти наблюдения, принадлежащие столь искусному и столь хорошо вооруженному исследователю, должны иметь большой вес. Основные заключения подытожены Эллисом [2]) в таком виде. „Если два простые тона, называемые производящими, и различающиеся по высоте либо очень мало, либо очень сильно, заставить звучать вместе, то число колебаний более высокого тона необходимо лежит между двумя кратными числами колебаний более низкого тона, одним меньшим и другим — бóльшим, чем число колебаний верхнего тона, и разности между этими кратными числами колебаний нижнего производящего тона и числом колебаний верхнего тона дают два числа, которые либо определяют частоту двух биений, которые могут быть слышны, либо высоту тонов, возникающих из биений, которые могут быть слышны вместо биений.

„Частота, возникающая из меньшего кратного нижнего производящего тона, называется *нижней* частотой биения или частотой нижнего тона биений, а частота, возникающая из большего кратного, называется *верхней* частотой биения или частотой верхнего тона биений, без всякого предположения о том, что одна последовательность биений должна быть сильнее или слабее другой или что один тон, возникающий из биений, должен быть выше или ниже чем другой. В действительности бывает иногда одно, а иногда другое.

„Обе серии биений или оба тона, возникающие из биений, обыкновенно слышны не одновременно. Если разбить изученные интервалы на группы: 1) от 1:1 до 1:2; 2) от 1:2 до 1:3; 3) от 1:3 до 1:4; 4) от 1:4 до 1:5 и т. д., то нижние частоты и нижние тоны биений распространяются немного более, чем на нижнюю половину каждой группы, а верхние частоты и верхние тоны биений распространяются немного более, чем на верхнюю половину. На некотором промежутке в середине каждого периода слышны обе серии или оба тона биений, и эти тоны биений дают опять биения, представляющие вторичные биения, или же заменяются новыми или вторичными тонами биений".

В некоторых случаях тоны, возникающие из биений, совпадают с разностным тоном, но Кениг считает, что наличие комбинационных тонов не было определенно доказано. Следует заметить, что в этих опытах производящие тоны были настолько просты, насколько только Кениг мог этого достичь; остается, однако, возможность, что внутри уха в результате преобразования могли появиться обертоны, слышимые только в биениях. Такого взгляда придерживается Бозанке,

[1]) König, *Pogg. Ann.*, том CLVII, стр. 177, 1876.
[2]) *Sensations of Tone*, стр. 529.

который произвел также и независимые наблюдения, получив результаты, которые менее трудно согласовать со взглядами Гельмгольца.

Мы видим, что Кениг придерживается полностью того мнения, что достаточно частые биения переходят в тоны. Некоторые возражения против такого представления уже были приведены; этот вопрос все еще следует считать открытым. Опыты на эту тему до сих пор имели чисто качественный характер. Трудности на пути дальнейшего продвижения, без сомнения, велики; однако, я склонен думать, что в настоящее время прежде всего необходима более точная оценка интенсивности различных наблюдаемых и исследуемых тонов. Если бы, например, можно было показать, что интенсивность тона биений пропорциональна интенсивности производящих тонов, то стало бы ясно, что одних комбинационных тонов недостаточно для объяснения этих эффектов.

Кениг исследовал также вопрос о зависимости тембра от фазовых соотношений, пользуясь особой сиреной собственной конструкции [1]). Он пришел к заключению, что хотя тембр определяется, главным образом, числом и относительной интенсивностью гармоник, все же не следует игнорировать влияния фазы. Изменение фазы создает также различия, которые встречаются в различных инструментах, принадлежащих одному и тому же классу или в различных голосах, поющих одну и ту же гласную. Полное определение таких малых различий требует ряда нот, из которых можно составить мелодию, а когда воспринимается только одна нота, они могут ускользнуть от наблюдения. Мне лично кажется, что эти результаты находятся в согласии с тем взглядом, который приписывает отклонение от закона Ома, предполагаемое во всяком признании фазовых соотношений, вторичным причинам.

397. Зависимость тембра музыкальных звуков данной частоты от отношений различных составляющих тонов исследовалось Гельмгольцем для многих музыкальных инструментов. Дальнейшие наблюдения над духовыми инструментами можно найти в статье Блэйкли [2]). Однако, наиболее интересным, но и наиболее спорным, применением теории является применение ее к гласным звукам человеческой речи.

Можно считать, что акустической трактовке этой темы положил начало замечательный мемуар Виллиса [3]). Его опыты проводились при помощи свободного мундштука и язычка, изобретенного Кратценштейном (1780), а впоследствии Гренье (Grenié) и с большой точностью имитирующего действие гортани. Успешно повторив сначала эксперимент Кемпелена, воспроизводившего гласные звуки путем экранирования в различной степени отверстия воронкообразной полости, соединенной с мундштуком, он перешел далее к изучению влияния раз-

[1]) König, *Wied. Ann.*, том XIV, стр. 392, 1881.

[2]) Blaikley, *Phil. Mag.*, том VI, стр. 119, 1878.

[3]) Willis, „On the Vowel Sounds, and on Reed Organ-pipes", *Camb. Phil. Trans.*, том III, стр. 231, 1829.

личной длины цилиндрической трубки, причем устройство было похоже на устройство, применяемое в органных трубах. Результаты обнаружили, что тембр гласных зависит от длины трубы. Из этих и из других экспериментов он заключил, что полости, издающие (при независимом звучании) одинаковые тоны „придадут тот же оттенок гласной данному мундштуку и, конечно, всякому мундштуку, если тон мундштука ниже, чем тон полости". Виллис продолжает (стр. 243): „Небольшое теоретическое рассуждение покажет, что некоторых из этих эффектов, пожалуй, можно было ожидать. Согласно Эйлеру, если возбудить одиночное колебание у дна трубы, закрытой на одном конце, то оно распространится до отверстия трубы со скоростью звука. Здесь образуется эхо колебания, которое побежит обратно, отразится от дна трубы и затем снова появится у отверстия, где образуется новое эхо, и так далее, последовательно, до тех пор, пока движение не расстроится вследствие трения и несовершенства отражения... Следовательно, эффект выразится в виде распространения от отверстия трубы последовательности равноотстоящих пульсаций, состоящих в попеременном сгущении и разрежении, через интервалы, соответствующие времени, потребному для прохождения импульса по трубе до дна и обратно; иначе говоря, возникнет короткий звук музыкального тона, соответствующего закрытой трубе рассматриваемой длины.

„Попытаемся теперь применить этот результат Эйлера к нашему случаю вибрирующего язычка, приделанного к трубе некоторой длины, и исследовать характер ряда пульсаций, которые должны быть созданы такой системой согласно этой теории.

„Вибрирующий язычок мундштука создает ряд пульсаций одинаковой силы, разделенных равными интервалами времени и представляющих собой попеременные сгущения и разрежения, которые мы можем назвать первичными пульсациями; с другой стороны, за каждым из этих колебаний последует ряд вторичных пульсаций убывающей силы, но также через одинаковые интервалы от соответствующих им первичных тонов, причем интервал между ними, как мы видели, регулируется длиной прикрепленной трубы".

И далее (стр. 247): „Опыт показывает, что ряд созданных эффектов характеризуется и отличается друг от друга тем качеством, которое мы называем гласным звуком; опыт показывает еще больше, — он показывает нам, что не только высота произведенного звука всегда есть высота тона мундштука или первичного импульса, но и что издаваемый гласный звук всегда один и тот же для одинаковых значений s [периода вторичных импульсов]. Так, в только что цитированном примере g'' свойственно гласной „Å", как она произносится в английских словах Paw, Nought [долгое открытое „о"]; если она повторяется 512 раз в секунду, то высота звука будет c', гласная — та же; если бы импульс повторялся при помощи другого мундштука, действующего на ту же самую трубу 340 раз в секунду, то

высота была бы *f*, но гласная — все та же. Таким образом, оказывается, что ухо, потеряв возможность распознать высоту для периода *s*, все еще способно опознать его по свойственной ему *гласной*".

Вследствие важности полученных Виллисом результатов, а также и того, что первые томы журнала *Cambridge Transactions* не всем доступны, я счел желательным позволить Виллису говорить самому за себя. Мы увидим, что, поскольку дело касается общих принципов, он оставил своим преемникам немного дела. Немного ниже, в той же работе (стр. 249) он дает отчет о специальном опыте, предпринятом для проверки его теории. „Показав вероятность того, что данный гласный звук представляет собой просто быстрое повторение свойственного ему тона, мы должны вывести отсюда, что если мы сможем произвести это быстрое повторение каким-нибудь другим путем, то можно ожидать, что мы услышим гласные звуки. Робисон и другие показали, что если держать перо навстречу вращающемуся зубчатому колесу, то возникнет музыкальный тон, создаваемый быстрыми повторениями, через равные промежутки времени, щелчков пера по зубцу. Я заменил перо куском часовой пружины, оказывавшей легкое давление на встречные зубцы колеса, так что каждый щелчок превращался в музыкальный тон пружины. В то же время пружина была зажата щипцами так, чтобы можно было произвольно изменять длину вибрирующей части. Такая система, очевидно, создает сложный звук, похожий на звук трубы с мундштуком, а потому изменение длины пружины должно создавать такой же эффект, как изменение длины трубы. Действительно, издаваемый звук сохраняет одну и ту же высоту все время, пока колесо вращается равномерно, но воспроизводит последовательно оттенки всех гласных по мере изменения эффективной длины пружины, причем делает это со значительной четкостью, если принять во внимание жесткость и неприятный тембр самого звука".

В своем изложении теории гласных Гельмгольц, следуя Уитстону [1]), излагает вопрос несколько иначе. Воздушные колебания, составляющие естественные или искусственные гласные, при достижении равномерного режима (§§ 48, 66, 322*k*) просто периодичны, и периодом является период язычковой трубы мундштука. По теореме Фурье их можно разложить на простые колебания, периоды которых представляют собой точные делители периода мундштука. Эффект от присоединения резонатора может выразиться только в изменении интенсивности и фазы некоторых составляющих, периоды которых уже заданы.

Если тон резонирующей полости — тон рта — совпадает с одним из составляющих тонов голосовой или гортанной ноты, то эффектом должно быть усиление в особо сильной степени интенсивности этого

---

[1]) *London and Westminster Review*, окт., 1837; *Wheatstone's Scientific Papers*, London, 1879, стр. 348.

тона; и независимо от наличия совпадения или нет, те составляющие тоны, высота которых близка к высоте тона рта, будут усилены.

Такая точка зрения на действие резонатора, несомненно, совершенно правильна; но на первый взгляд может показаться, что она существенно отличается, или даже несовместима с изложением вопроса, данным Виллисом. Так, например, согласно Виллису, тон рта может быть, и вообще будет, негармоничным по отношению к тону гортани. Для того чтобы понять этот вопрос, мы должны усвоить две вещи, которые часто недооцениваются. Первая — это различие между вынужденными и свободными колебаниями. Хотя *собственные* колебания полости рта могут быть негармоническими, *вынужденные* колебания способны содержать одни только гармонические составляющие гортанной ноты. Далее, важно помнить определение простых колебаний, согласно которому никакое колебание не может быть простым, если оно не поддерживается постоянным, без изменения амплитуды или фазы. Вторичные колебания Виллиса, замирающие по истечении нескольких периодов, — не просты. Если разложить по теореме Фурье полную последовательность их, то эти колебания будут представлены не одним простым колебанием, но бо́льшим или бесконечным числом таких колебаний.

Из этих рассуждений можно видеть, что оба способа рассмотрения этого вопроса законны и совместимы друг с другом. Если относительная частота тона рта низка, так что, например, составляющая гортанной ноты, получающая наибольшее усиление, есть секунда или терция, то анализ при помощи ряда Фурье является подходящим методом исследования. Но если частота тона рта высока и каждая серия колебаний обнимает только небольшую часть полного периода, то мы можем согласиться с Германном, что разложение в ряд Фурье неестественно и что лучше будет сосредоточить внимание на действительной форме кривой, выражающей полное колебание. Мы были бы особенно склонны придерживаться такого направления в том случае, если бы мы сомневались в применимости закона Ома к составляющим тонам высокого порядка.

Со времени опубликования труда Гельмгольца много споров вызывал вопрос о том, характеризуется ли данная гласная преобладанием составляющих данного *порядка* (теория относительной частоты) или преобладанием составляющих данной *частоты* (теория постоянной частоты), и всякое возможное заключение находило своих защитников. Мы видели, что Виллис решил этот вопрос, даже не давая четкой формулировки его, в пользу теории постоянной частоты. Сам Гельмгольц, если и не совсем явно, все же, повидимому, придерживался такого же мнения, пожалуй, больше на основании априорных соображений, чем в результате опытов. Действительно, если, как это обычно допускается авторами по фонетике, определенный гласный звук связан с данной конфигурацией рта, то вопрос едва ли остается открытым. Затем под наблюдением Гельмгольца вопрос был далее

изучен Ауэрбахом [1]), который наряду с другими методами применил и прямой анализ различных гласных при помощи резонаторов, присоединенных к уху. Заключение Ауэрбаха по этому спорному вопросу было промежуточным — что *обе* характеристики имеют место. Анализ также показал, что во всех случаях первый, или основной, тон был сильнейшим элементом звука.

Несколькими годами позже прекрасное изобретение Эдисона, фонограф, стимулировало новые исследования по этому вопросу, вследствие предоставившейся фонографом кажущейся легкой возможности произвести решающий эксперимент (experimentum crucis). Если гласные характеризуются постоянной частотой, то они должны претерпевать изменение при увеличении скорости механизма; с другой стороны, если истинна теория относительной частоты, то гласные должны оставаться теми же, и только высота тона должна изменяться. Однако, вероятно, вследствие несовершенства первых инструментов, результаты, к которым пришли различные наблюдатели, были все-таки еще расходящимися. В общей сумме свидетельства перевешивали, пожалуй, свидетельства в пользу теории постоянной частоты [2]). Дженкин и Юинг [3]) анализировали записи, сделанные на записывающем валике, и полученные ими результаты заставили их принять промежуточный взгляд, похожий на взгляд Ауэрбаха. Ясно, говорят они — „что характер гласного звука не зависит ни только от абсолютной частоты усиленных составляющих тонов, ни только от простого группирования относительных составляющих, независимо от частоты. Прежде, чем можно было бы определить составляющие гласного звука, необходимо дать частоту основного тона; а с другой стороны, одной лишь частоты наиболее резко усиленной составляющей недостаточно для того, чтобы можно было назвать гласную".

Улучшенные фонографы последних лет позволяют исследовать вопрос с бо́льшим успехом; наблюдения были сделаны Мак Кендриком (Mc Kendrick) и другими, но все еще с различными результатами. Особенно следует отметить обширные исследования Германна, опубликованные в *Pflüger's Archiv*. Германн недвусмысленно высказывается в пользу характеристики гласной постоянной частотою, как во всяком случае значительно более важной, и его опыты, повидимому, оправдывают это заключение. Он находит, что гласные, звучащие в фонографе, заметно изменяются при изменении скорости вращения валика.

Общая точка зрения Германна, к которой он пришел независимо, тождественна с точкой зрения Виллиса. „Характер гласной определяется тоном полости рта, амплитуда которого изменяется периодически с периодом гортанного тона" [4]). Справедливость этой точки зрения можно,

[1]) Auerbach, *Pogg. Ann.*, Ergänzungsband, VIII, стр. 177, 1876.
[2]) Graham Bell, *Ann. Journ. of Otology*, том 1, июль, 1879.
[3]) Jenkin a. Ewing, *Edinb. Trans.*, том XXVIII, стр. 745, 1878.
[4]) Hermann, *Pflüg. Arch.*, том XLVII, стр. 351, 1890.

пожалуй, считать установленной, но Германн несколько преувеличивает различие между этой точкой зрения и точкой зрения Гельмгольца.

Гласная „А"

	Порядковый номер составляющего тона									
Нота	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G						0,12 d^2	0,37 $< f^2$	0,42 g^2	0,11 a^2	0,12 h^2
A					0,13 cis^2	0,30 e^2	0,33 $< g^2$	0,10 a^2	0,09 h^2	0,08 cis^3
H	0,05 H		0,09 fis'	0,22 h'	0,37 dis^2	0,45 fis^2	0,10 $< a^2$	0,15 h^2		
c	0,11 c			0,19 c^2	0,54 e^2	0,38 g^2	0,16 $< ais^2$	0,09 c^3	0,10 d^3	
d				0,29 d^2	0,52 fis^2	0,08 a^2	0,18 $< c^3$		0,06 e^3	
e			0,13 h'	0,55 e^2	0,28 gis^2	0,24 h^2	0,07 $< d^2$			
fis			0,30 cis^2	0,61 fis^2	0,07 ais^2	0,11 cis^2	0,11 $< e^2$			
g	0,11 g		0,39 d^2	0,55 g^2	0,21 h^2	0,11 d^3	0,08 $< f^3$			
a			0,71 e^2	0,18 a^2	0,18 cis^3	0,09 e^3				
h			0,74 fis^2	0,17 h^2	0,13 dis^3					
c'		0,41 c^3	0,54 g^2	0,40 c^3	0,11 e^3					
d'		0,71 d^2	0,31 a^2	0,26 d^3						

Он изучал автоматически регистрируемые кривые различными способами. Для случая гласной „А" [1]) в приводимой таблице даны ампли-

[1]) Написание гласных относится к континентальному произношению (т. е. в данном случае *A*, читаемому, как по-русски. *Прим. пер.*).

туды различных составляющих, определяемые анализом при помощи рядов Фурье; из этой таблицы видно, что превалирующий составляющий тон лежит всюду между e^2 и g^2.

Анализ кривых путем разложения их в ряд Фурье требует довольно больших вычислений, и Германн придерживается того мнения, что главный результат, частоту, характеризующую гласную, можно получить с такой же точностью и значительно проще прямым измерением на графике длины волны прерывистых колебаний. Применение этого метода к кривым для гласной „А", взятой нами ранее, дало

Гласная „А"

Нота	L мм	l мм	Характеристический тон	
			частота	нота
G 98	18,5	2,4	756	$> fis^2$(740)
A 110	16,3	2,5	717	$> f^2$ (698,5)
H 123,5	14,9	2,6	708	$> f^2$ (698,5)
c 130,8	13,6	2,55	698	f^2
d 146,8	11,6	2,4	710	$< f^2$ (698,5)
e 164,8	10,9	2,3	781	$< g^2$ (784)
fis 185	9,8	2,5	725	$< fis$ (744)
g 196	9,1	2,5	714	$> f^2$ (698,5)
a 220	8,2	2,5	714	$> f^2$ (698,5)
h 246,9	7,3	2,6	693	$< f^2$ (698,5)
c' 261,7	6,8	?	?	
o' 293,7	6,2	?	?	

Здесь L — двойной период полного колебания, а l — двойной период характеристики гласной. Ясно видно, что l сохраняет почти постоянное значение, в то время как L изменяется в значительных пределах.

Гласная	Характеристический тон, снятый с графика (Германн)	Тоны полости рта по			
		Дондерсу	Гельмгольцу	Кенигу	Ауэрбаху
A	$e^2 - gis^2$	b'	b^2	b^2	f^2
E	$h^3 - c^4$	cis^3	f_1, b^3	b^3	a' (— g')
I	$d^4 - g^4$	f^3	f, d^4	b^4	f'
O	$d^2 - e^2$	d'	b'	b'	a'
U	$c^2 - d^2$	f'	f	b	f'

Германн дает общее сравнение своих результатов с результатами, полученными другими методами, из которого видно, что остается еще многое сделать, прежде чем можно будет устранить недоразумения, связанные с этим вопросом.

Некоторые из встречающихся расхождений, быть может, вытекают из действительных различий в произношении, которые достаточно четко воспринимаются лишь экспертами в области фонетики [1]). Далее следует рассмотреть вопрос о двойном резонансе, так как известные формы рассматриваемой полости заставляют считать возможным, что полное определение гласной по самой своей природе многозначно (§ 310). Следует заметить, что, с точки зрения Ллойда, двойная характеристика существенна и что опознавание гласной зависит не от абсолютной частоты одного или более резонансов, но от относительной частоты двух или более резонансов. Таким путем он объясняет трудность, возникающую из того факта, что артикуляция для данной гласной оказывается одинаковой для ребенка и для взрослого, хотя ввиду большого различия в размерах резонирующих полостей, абсолютная частота должна была бы изменяться в широких пределах.

Было бы несовместимо с планом настоящего труда входить в дальнейшие детали, касающиеся отдельных гласных; но одно замечательное расхождение между результатами Германна и Ауэрбаха следует указать: измерения регистрируемых графиков, произведенные Германном, обнаружили во всех случаях почти полное отсутствие первого, или основного тона, в общем звуке в то время как Ауэрбах, пользовавшийся резонаторами, наоборот, нашел, что этот тон — наиболее выдающийся из всех. Германн, допуская, что этот тон слышен, рассматривает его, как возникающий внутри уха наподобие комбинационных тонов (§ 393). Я попытался повторить некоторые из наблюдений Ауэрбаха и нашел, что для всех главных гласных (за исключением может быть гласной *A*) основной тон громко выделяется, причем контраст делается очень заметным, если, двигая пальцем перед отверстием резонатора, попеременно настраивать его в тон и расстраивать. Это следует считать доказательством того, что рассматриваемый тон существует вне уха, впрочем едва ли это могло быть иначе, если учесть способ генерации звука; противоположное же свидетельство записей должно быть объяснено каким-нибудь другим путем.

Важной стороной данного вопроса является вопрос об искусственной имитации гласных звуков. Действительный синтез был осуществлен Гельмгольцем [2]), складывавшим различные составляющие с соответствующими интенсивностями. Он пользовался для этой цели камертонами и резонаторами, причем все камертоны приводились в действие одним и тем же прерывателем (§§ 63, 64). Эти опыты трудны и, повидимому, не были повторены. Гельмгольц в некоторых случаях удовлетворялся полученным воспроизведением, хотя в других случаях имитация была неполной. Менее удовлетворительные результаты получались при замене камертонов органными трубами.

---

[1]) Lloyd, *Phonetische Studien*, том III, часть I.
[2]) *Sensations of Tone*, гл. VI.

Гласные звуки успешно имитировались Присом и Штро [1]), применявшими прибор, основанный на принципе фонографа, в котором движением мембраны управлял зубец особой формы, вырезанный на окружности вращающегося колеса. Они нашли, что характер гласной претерпевает существенные изменения с изменением скорости вращения.

Для искусственного воспроизведения гласной, иллюстрирующего его особые взгляды, Германн рекомендовал полифоническую сирену (§ 11). Если при действии серии из 12 отверстий по достижении соответствующей скорости попеременно то вводить в действие, то выключать серию из 18 отверстий, то очень громко слышен разностный тон (6), причем он явственно принимет оттенок гласной „О". При большей скорости получается оттенок гласной „А о", а при еще более высокой скорости — точное А.

Пользуясь соответствующим образом подобранными двойными резонаторами, Ллойд с успехом имитировал некоторые гласные, произносимые *шопотом*.

В приведенном здесь обзоре состояния вопроса о гласных можно было коснуться лишь нескольких наиболее общих его сторон. Читателю, который желает составить себе суждение о противоположных точках зрения и проследить в деталях этот вопрос, следует обратиться к оригинальным трудам новейших авторов, среди которых можно особо упомянуть Германна, Пиппинга (Pipping) и Ллойда. Область эта привлекательна; но те, кто будет работать в этой области, должны быть хорошо вооружены знаниями как в области физики, так и в области фонетики.

---

[1]) Preece a. Stroh, *Proc. Roy. Soc.*, том XXVIII, стр. 358, 1879.

ПРИМЕЧАНИЕ К § 86 [1])

Можно заметить, что движение любой точки, принадлежащей к системе с n степенями свободы, совершающей гармоническое движение, вообще прямолинейно. В самом деле, если x, y, z — пространственные координаты этой точки, то мы имеем

$$x = X\cos nt, \quad y = Y\cos nt, \quad z = Z\cos nt,$$

где X, Y, Z — определенные постоянные; таким образом, в каждый данный момент

$$x : y : z = X : Y : Z.$$

Если имеется более одной частоты в рассматриваемом случае, то координаты не будут находиться обязательно в одинаковой фазе. Тогда наиболее общие значения x, y, z, подчиненных данной периодичности, суть

$$\begin{aligned} x &= X_1\cos nt + X_2\sin nt, \\ y &= Y_1\cos nt + Y_2\sin nt, \\ z &= Z_1\cos nt + Z_2\sin nt; \end{aligned}$$

эти уравнения указывают на эллиптическое движение в плоскости

$$x(Y_1Z_2 - Z_1Y_2) + y(Z_1X_2 - X_1Z_2) + z(X_1Y_2 - Y_1X_2) = 0.$$

ДОБАВЛЕНИЕ К ГЛАВЕ V [2]).

О КОЛЕБАНИЯХ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ В СЛУЧАЕ, КОГДА АМПЛИТУДЫ НЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫ.

В §§ 67, 68 мы нашли второе приближение для колебаний систем с одной степенью свободы, как в случае, когда колебания — свободные, так и в случае, когда они создаются данными приложенными силами, действующими извне. Теперь мы предполагаем распространить наше исследование на случаи, когда имеется более, чем одна степень свободы.

При отсутствии диссипативных и приложенных сил можно все движение выразить (§ 80) посредством функций T и V. В случае бес-

[1]) Это примечание впервые появилось во II издании.
[2]) Это добавление впервые появилось во II издании.

конечно малого колебания около положения равновесия T и V приводятся к квадратичным функциям скоростей и перемещений с постоянными коэфициентами и соответствующим выбором координат можно заставить исчезнуть (§ 87) члены, содержащие *произведения* координат. Даже несмотря на то, что мы намерены включить члены высшего порядка, мы можем все же удовлетвориться этим упрощением, выбирая в качестве координат такие, которые обладают свойством приведения членов второго порядка к суммам квадратов. Таким образом, можем написать

$$T=\frac{1}{2}A_{11}\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}A_{22}\dot{\varphi}_2^2+\ldots+A_{12}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2+A_{13}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3+\ldots, \quad (1)$$

где $A_{11}, A_{22}, \ldots$ — функции от $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, включающие постоянные члены, $a_1, a_2, \ldots$, между тем как $A_{12}, A_{13}, \ldots$ — функции тех же переменных, но *без постоянных членов*;

$$V=\frac{1}{2}c_1\varphi_1^2+\frac{1}{2}c_2\varphi_2^2+\ldots+V_3+V_4+\ldots, \quad (2)$$

где через $V_3, V_4, \ldots$ обозначены части V, имеющие степени $3, 4, \ldots$ по $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$

В качестве первого приближения, применимого к бесконечно малым колебаниям, имеем

$$A_{11}=a_1,\ A_{22}=a_2,\ \ldots\ A_{12}=0,\ A_{13}=0\ldots,$$
$$V_3=0,\ V_4=0,\ \ldots,$$

так что уравнения Лагранжа (§ 87) имеют вид

$$a_1\ddot{\varphi}_1+c_1\varphi_1=0,\ \ a_2\ddot{\varphi}_2+c_2\varphi_2=0 \text{ и т. д.}, \quad (3)$$

где координаты разделены. Решение относительно φ_1 можно принять в виде

$$\varphi_1=H_1\cos nt,\quad \varphi_2=0,\quad \varphi_3=0 \text{ и т. д.}, \quad (4)$$

где

$$c_1-n^2a_1=0. \quad (5)$$

Аналогичные решения существуют и для других координат.

Второе приближение, к которому мы теперь переходим, должно быть основано на (4) и (5); таким образом, следует рассматривать $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ как малые величины сравнительно с φ_1.

Коэфициенты в уравнении (1) мы пишем в виде:

$$A_{11}=a_1+a_{11}\varphi_1+a_{12}\varphi_2+\ldots, \quad (6)$$
$$A_{12}=a_2\varphi_1+\ldots,\ \ A_{13}=a_3\varphi_1+\ldots,$$

а в уравнении (2)

$$V_3=\gamma_{11}\varphi_1^3+\gamma_{12}\varphi_1^2\varphi_2+\ldots, \quad (7)$$

так что для дальнейшего приближения

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = (a_1 + a_{11}\varphi_1)\dot{\varphi}_1 + a_2\varphi_1\dot{\varphi}_2 + a_3\varphi_1\dot{\varphi}_3 + \ldots,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = (a_1 + a_{11}\varphi_1)\ddot{\varphi}_1 + a_{11}\dot{\varphi}_1^2 +$$

$$+ a_2\varphi_1\ddot{\varphi}_2 + a_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + a_3\varphi_1\ddot{\varphi}_3 + a_3\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3 + \ldots,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \frac{1}{2}a_{11}\dot{\varphi}_1^2 + a_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 = a_3\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3 + \ldots$$

Таким образом, сохраняя члены порядка φ_1^2, получаем в качестве уравнения для φ_1 (§ 80)

$$(a_1 + a_{11}\varphi_1)\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2}a_{11}\dot{\varphi}_1^2 + c_1\varphi_1 + 3\gamma_1\varphi_1^2 = 0. \tag{8}$$

При этом порядке приближения координата φ_1 выделяется из других координат, и решение получается, как в случае только одной степени свободы (§ 67). Из (4) имеем:

$$\varphi_1\ddot{\varphi}_1 = -n^2H_1^2\cos^2 nt = -\frac{1}{2}n^2H_1^2(1 + \cos 2nt),$$

$$\dot{\varphi}_1^2 = n^2H_1^2\sin^2 nt = \frac{1}{2}n^2H_1^2(1 - \cos 2nt),$$

$$\varphi_1^2 = H_1^2\cos^2 nt = \frac{1}{2}H_1^2(1 + \cos 2nt),$$

так что уравнение (8) принимает вид

$$a_1\ddot{\varphi}_1 + c_1\varphi_1 + \left(-\frac{1}{4}n^2a_{11} + \frac{3}{2}\gamma_1\right)H_1^2 +$$

$$+ \left(-\frac{3}{4}n^2a_{11} + \frac{3}{2}\gamma_1\right)H_1^2\cos 2nt = 0. \tag{9}$$

Решение уравнения (9) можно выразить в виде

$$\varphi_1 = H_0 + H_1\cos nt + H_2\cos 2nt + \ldots, \tag{10}$$

и сравнение даст

$$c_1H_0 = \left(\frac{1}{4}n^2a_{11} - \frac{3}{2}\gamma_1\right)H_1^2,$$

$$(c_1 - n^2a_1)H_1 = 0,$$

$$(c_1 - 4n^2a_1)H_2 = \left(\frac{3}{4}n^2a_{11} - \frac{3}{2}\gamma_1\right)H_1^2.$$

Таким образом, во втором приближении

$$\varphi_1 = \frac{\left(\frac{1}{4}n^2a_{11} - \frac{3}{2}\gamma_1\right)H_1^2}{c_1} + H_1\cos nt +$$

$$+ \frac{\left(\frac{3}{4}n^2a_{11} - \frac{3}{2}\gamma_1\right)H_1^2}{c_1 - 4n^2a_1}\cos 2nt, \tag{11}$$

причем значение n такое же, как и в первом приближении, т. е. $\sqrt{c_1/a_1}$. Теперь нам нужно выразить соответствующие значения $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$

Из соотношений (6) имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = a_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_1 + a_2\dot{\varphi}_2 + \ldots, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = \frac{1}{2}\alpha_{12}\dot{\varphi}_1^2 + \ldots,$$

и уравнение Лагранжа при сохранении членов порядка φ_1^2 принимает вид

$$a_2\ddot{\varphi}_2 + c_2\varphi_2 + a_2\varphi_1\ddot{\varphi}_1 + (\alpha_2 - \tfrac{1}{2}\alpha_{12})\dot{\varphi}_1^2 + \gamma_2\varphi_1^2 = 0,$$

или, подставляя в малые члены значения (4),

$$a_2\ddot{\varphi}_2 + c_2\varphi_2 + \left(-\tfrac{1}{4}n^2\alpha_{12} + \tfrac{1}{2}\gamma_2\right)H_1^2 + \\ + \left(-n^2\alpha_2 + \tfrac{1}{4}n^2\alpha_{12} + \tfrac{1}{2}\gamma_2\right)H_1^2\cos 2nt = 0. \quad (12)$$

Следовательно, если

$$\varphi_2 = K_0 + K_1\cos nt + K_2\cos 2nt + \ldots, \quad (13)$$

то путем сравнения с (12) находим

$$c_2K_0 = \left(\tfrac{1}{4}n^2\alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\gamma_2\right)H_1^2, \quad (14)$$

$$(c_2 - n^2a_2)K_1 = 0, \quad (15)$$

$$(c_2 - 4n^2a_2)K_2 = \left(n^2\alpha_2 - \tfrac{1}{4}n^2\alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\gamma_2\right)H_1^2. \quad (16)$$

Таким образом, $K_1 = 0$ и, подставляя значения K_0 и K_2 из (14) и (16) в выражение (13), мы получаем полное значение φ_2 во втором приближении.

Значения φ_3, φ_4 и т. д. получаются аналогичным путем, и, таким образом, мы находим во втором приближении полное выражение для таких колебаний системы с любым числом степеней свободы, которые в первом приближении выражались уравнением (4).

Главные результаты, вытекающие из второго приближения, следующие: 1) движение остается периодическим с неизменной частотой; 2) к значению координаты, остающейся конечной в первом приближении, а также к тем координатам, которые в первом приближении равны нулю, прибавляются постоянные члены, пропорциональные $\cos 2nt$.

Теперь мы переходим к третьему приближению; однако, ради краткости, мы ограничимся случаями: α) когда имеются только две системы свободы и β) когда кинетическая энергия полностью выражается в виде суммы квадратов скоростей с постоянными коэфициентами. Этот случай включает колебания частицы, движущейся в двух измерениях вблизи точки равновесия.

Имеем

$$T = \tfrac{1}{2}a_1\dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{1}{2}a_2\dot{\varphi}_2^2, \qquad V = \tfrac{1}{2}c_1\varphi_1^2 + \tfrac{1}{2}c_2\varphi_2^2 + V_3 + V_4,$$

где

$$V_3 = \gamma_1\varphi_1^3 + \gamma_2\varphi_1^2\varphi_2 + \gamma'\varphi_1\varphi_2^2 + \ldots, \quad (17)$$

$$V_4 = \delta_1\varphi_1^4 + \delta_2\varphi_1^3\varphi_2 + \ldots, \quad (18)$$

так что уравнения Лагранжа имеют вид

$$a_1\ddot{\varphi}_1 + c_1\varphi_1 + 3\gamma_1\varphi_1^2 + 2\gamma_2\varphi_1\varphi_2 + 4\delta_1\varphi_1^3 = 0, \quad (19)$$

$$a_2\ddot{\varphi}_2 + c_2\varphi_2 + \gamma_2\varphi_1^2 + 2\gamma'\varphi_1\varphi_2 + \delta_2\varphi_1^3 = 0. \quad (20)$$

Как и прежде, в качестве первого приближения, мы должны принять

$$\varphi_1 = H_1\cos nt, \quad \varphi_2 = 0. \quad (21)$$

В качестве решения уравнений (19) и (20) мы можем написать

$$\varphi_1 = H_0 + H_1\cos nt + H_2\cos 2nt + H_3\cos 3nt + \ldots, \quad (22)$$

$$\varphi_2 = K_0 + K_1\cos nt + K_2\cos 2nt + K_3\cos 3nt + \ldots \quad (23)$$

В выражениях (22) и (23) H_0, H_2, K_0, K_2 — величины второго порядка по H_1, значения которых уже были даны, а K_1, H_3, K_3 — величины третьего порядка. Сохраняя члены третьего порядка, имеем:

$$\varphi_1^2 = \frac{1}{2}H_1^2 + (2H_0H_1 + H_1H_2)\cos nt + \frac{1}{2}H_1^2\cos 2nt + H_1H_2\cos 3nt,$$

$$\varphi_1\varphi_2 = \left(H_1K_0 + \frac{1}{2}H_1K_2\right)\cos nt + \frac{1}{2}H_1K_2\cos 3nt,$$

$$\varphi_1^3 = \frac{3}{4}H_1^3\cos nt + \frac{1}{4}H_1^3\cos 3nt.$$

Подставляя эти значения в малые члены уравнений (19) и (20), а значения из (22) и (23) — в первые два члена, получаем следующие 8 уравнений, справедливых до третьего порядка:

$$c_1H_0 + \frac{3}{2}\gamma_1H_1^2 = 0, \quad (24)$$

$$c_1 - n^2a_1 + 3\gamma_1(2H_0 + H_2) + 2\gamma_2\left(K_0 + \frac{1}{2}K_2\right) + 3\delta_1H_1^2 = 0, \quad (25)$$

$$(c_1 - 4n^2a_1)H_2 + \frac{3}{2}\gamma_1H_1^2 = 0, \quad (26)$$

$$(c_1 - 9n^2a_1)H_3 + 3\gamma_1H_1H_2 + \gamma_2H_1K_2 + \delta_1H_1^3 = 0, \quad (27)$$

$$c_2K_0 + \frac{1}{2}\gamma_2H_1^2 = 0, \quad (28)$$

$$(c_2 - n^2a_2)K_1 + \gamma_2H_1(2H_0 + H_2) + \gamma'H_1(2K_0 + K_2) + \frac{3}{4}\delta_2H_1^3 = 0, \quad (29)$$

$$(c_2 - 4n^2a_2)K_2 + \frac{1}{2}\gamma_2H_1^2 = 0, \quad (30)$$

$$(c_2 - 9n^2a_2)K_3 + \gamma_2H_1H_2 + \gamma'H_1K_2 + \frac{1}{4}\delta_2H_1^3 = 0. \quad (31)$$

Из этих уравнений (24), (26), (28), (30) дают непосредственно значения H_0, H_2, K_0, K_2, которые совпадают с их значениями во втором приближении, а подстановка этих значений в уравнения (27), (29), (31) определяет H_1, K_1, K_3, как величины третьего порядка. Остающееся уравнение (25) служит для определения n. Мы находим соотношение, справедливое до этого порядка:

$$\frac{n^2a_1-c_1}{H_1^2}=-\frac{3}{2}\gamma_1^2\left(\frac{6}{c_1}+\frac{3}{c_1-4n^2a_1}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\gamma_2^2\left(\frac{2}{c_2}+\frac{1}{c_2-4n^2a_2}\right)+3\delta_1. \qquad (32)$$

При $\gamma_2=0$ мы обнаружим, что этот результат согласуется с (9) § 67, если сделать изменения в обозначениях и подставить первое приближение n в малые члены.

Колебание, определенное выше, есть колебание, выражаемое в первом приближении уравнениями (21). Другую форму, для которой приближенно $\varphi_1=0$, можно исследовать аналогичным образом.

Если V — четная функция как от φ_1, так и от φ_2, то исчезают γ_1, γ_2, γ', δ_2, и третье приближение выражается формулами:

$$H_0=0,\quad H_2=0,\quad H_3=-\frac{\delta_1H_1^3}{c_1-9n^2a_1};$$
$$K_0=0,\quad K_1=0,\quad K_2=0,\quad K_3=0;$$
$$n^2a_1-c_1=3\delta_1H_1^2.$$

В самом деле, при этом условии φ_2 исчезает при любом порядке приближения.

Этих примеров достаточно для освещения процесса приближения. Исследование природы его в общем случае показывает, что как бы далеко ни шло приближение, следующие заключения сохраняют полную силу:

a) Решение, получаемое при таком процессе, периодично, а частота является *четной* функцией амплитуды главного члена (H_1).

b) Разложение в ряд Фурье для каждой координаты содержит только косинусы аргументов, кратных nt, но не содержит синусов. Таким образом, вся система приходит в состояние покоя в один и тот же момент времени, например $t=0$, а затем повторяет свое движение.

c) Коэфициент при $\cos rnt$ в этом ряде для любой координаты имеет r-й порядок (по меньшей мере) относительно амплитуды H_1 главного члена. Так, например, для третьего приближения, в котором пренебрегают высшими, чем H_1^3, степенями H_1, ряд обрывается на $\cos 3nt$.

d) Имеется столько же типов решений, сколько степеней свободы; но едва ли нужно говорить о том, что различные решения не суперпонируемы.

Остается сделать еще одну важную оговорку. Мы предполагали, что все множители, подобные $(c_2 - 4n^2a_2)$ в (30) — конечны, т. е. что совпадение какой-нибудь гармоники действительной частоты с собственной частотой какой-нибудь другой формы бесконечно малого колебания не имеют места. В противном случае некоторые коэфициенты, первоначально предполагавшиеся второстепенными, например K_2 в (30), становятся бесконечными, и приближение нарушается. Таким образом, мы лишены возможности получить решение в некоторых случаях, когда нам больше всего хотелось бы его получить.

В качестве примера такой невозможности мы можем кратко отметить случай наиболее низких колебаний одного измерения в газе, подчиняющемся закону Бойля и находящемся в цилиндрической трубе с закрытыми концами. Уравнение, которое должно удовлетворяться всюду [(4) § 249], имеет вид:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

а процесс, вытекающий из общей теории, состоит в том, что следует положить

$$y = x + y_0 + y_1 \cos nt + y_2 \cos 2nt + \ldots,$$

где

$$\begin{aligned} y_0 &= H_{01} \sin x + H_{02} \sin 2x + H_{03} \sin 3x + \ldots, \\ y_1 &= H_{11} \sin x + H_{12} \sin 2x + H_{13} \sin 3x + \ldots, \\ y_2 &= H_{21} \sin x + H_{22} \sin 2x + H_{23} \sin 3x + \ldots \end{aligned}$$

и т. д. В первом приближении

$$y = x + H_{11} \sin x \cos nt,$$

причем $n = 1$. Но когда мы переходим ко второму приближению, мы находим

$$(4n^2 - 4)\, H_{22} = -\frac{1}{2} n^2 H_{11}^2,$$

причем n все еще равно 1, так что метод оказывается бессильным. Член $H_{22} \sin 2x \cos 2nt$ в выражении для y, первоначально предполагавшийся второстепенным, входит с бесконечным коэфициентом.

Возможно, что здесь мы имеем объяснение того, почему так трудно заставить длинные узкие трубы звучать в низшем присущем им тоне.

Поведение системы, совершающей колебания под действием приложенной силы, можно рассмотреть совершенно аналогичным способом Взяв, например, случай двух степеней свободы, уже рассмотренный в отношении свободных колебаний, предположим, что приложенные силы суть

$$\Phi_1 = E_1 \cos pt, \quad \Phi_2 = 0, \tag{33}$$

так что решение в первом приближении есть

$$\varphi_1 = \frac{E_1 \cos pt}{c_1 - p^2 a_1}, \quad \varphi_2 = 0. \tag{34}$$

При подстановке p вместо n уравнения (22), (23) все еще применимы, так же как и результирующие уравнения (24) — (31), за исключением того, что в уравнении (25) следует умножить левую часть на H_1, а в правой части — вместо нуля подставить E_1. Теперь это уравнение служит для определения H_1 вместо того, чтобы, как прежде, определять n.

Очевидно, что таким путем всегда можно построить действительно периодическое решение. Периодом будет период силы, а фазы — таковы, что вся система приходит в состояние покоя в момент, когда сила имеет максимум (положительный или отрицательный). После этого следует итти прежним путем, как в случае свободных колебаний, причем каждый ряд, состоящий из косинусов, остается без изменения при перемене знака t на противоположный.

ПРИМЕЧАНИЕ К § 273[1])

Метод получения пуассонова решения (8), данный Лиувиллем [2]), заслуживает быть отмеченным.

Если r — радиус-вектор, отсчитываемый от некоторой точки O, и если проинтегрировать общее диференциальное уравнение по объему, заключенному между сферическими поверхностями с радиусами r и $r + dr$, то после преобразования второго интеграла по теореме Грина, найдем

$$\frac{\partial^2 (r\lambda)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (r\lambda)}{\partial r^2}, \tag{α}$$

где $\lambda = \int\int \varphi \, d\sigma$, т. е. пропорциональна среднему значению φ, вычисленному для сферической поверхности радиуса r. Уравнение (α) можно рассматривать как обобщение уравнения (1) § 279; это можно также доказать, исходя из выражения (5) § 241 для $\nabla^2\varphi$, выраженного в обычных полярных координатах r, θ, ω.

Общее решение уравнения (α) есть

$$r\lambda = \chi(at + r) + \theta(at - r), \tag{β}$$

где χ и θ — произвольные функции; но так же в как § 279, если полюс не является источником, $\chi(at) + \theta(at) = 0$, так что

$$r\lambda = \chi(at + r) - \chi(at - r). \tag{γ}$$

---

[1]) Это примечание было в первом издании.

[2]) Liouville, том I, стр. 1, 1856.

Из (γ) следует, что при $r=0$, в точке O, $\lambda=2\chi'(at)$, что является поэтому также значением $4\pi\varphi$ в точке O в момент t. Далее, из (γ)

$$2\chi'(at+r)=\frac{\partial(r\lambda)}{\partial(at)}+\frac{\partial(r\lambda)}{\partial r},\ \text{так что}\ 2\chi'(r)=\left[\frac{\partial(r\lambda)}{\partial(at)}+\frac{\partial(r\lambda)}{\partial r}\right]_{(t=0)},$$

или, в обозначениях § 273,

$$2\chi'(r)=\frac{r}{a}\iint F(r)\,d\sigma+\frac{\partial}{\partial r}\left[r\iint f(r)\,d\sigma\right]. \qquad (\delta)$$

Записывая at вместо r в выражении (δ), получаем значение $2\chi'(at)$ или $4\pi\varphi$, которое согласуется с (8) § 273.

ДОБАВЛЕНИЕ А (§ 307) [1])

О ПОПРАВКЕ ДЛЯ ОТКРЫТОГО КОНЦА

Задача определения поправки для открытого конца трубы представляет значительную трудность, даже когда имеется бесконечный фланец. В тексте (§ 307) доказано, что эта поправка α больше, чем $\frac{1}{4}\pi R$ и меньше, чем $\frac{8}{3\pi}R$. Последнее значение получено путем вычисления энергии движения в предположении, что параллельная оси скорость постоянна по всей плоскости отверстия, и сравнения этой энергии с квадратом полного потока. Действительная скорость, несомненно, возрастает от центра наружу, становясь бесконечной у острой кромки; а предположение постоянного ее значения несколько искусственно. Тем не менее вычисленное таким образом значение α, как оказывается, не выходит далеко за пределы истины. Очевидно, что мы вправе ожидать очень хорошего результата, если допустим, что аксиальная скорость имеет вид

$$1+\frac{\mu r^2}{R^2}+\frac{\mu' r^4}{R^4},$$

где через r обозначено расстояние от рассматриваемой точки до центра отверстия, и затем определим μ и μ' так, чтобы полная энергия обращалась в минимум. Определенная таким образом энергия, хотя необходимо с избытком, но должна давать очень хорошее приближение к истине.

Выполняя этот план, мы встречаемся с двумя различными задачами: определением движения, во-первых, — вне, и во-вторых, — внутри цилиндра. Мы возьмемся сначала за первую задачу, как более легкую.

По условию φ равно нулю в бесконечности, а при $x=0$ $\partial\varphi/\partial x$ равно нулю всюду, за исключением площади круга $r=R$, где

---

[1]) Это добавление было в первом издании.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 1 + \frac{\mu r^2}{R^2} + \frac{\mu' r^4}{R^4}. \qquad (1)$$

При этих обстоятельствах, как мы знаем (§ 278),

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\iint \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{d\sigma}{\rho}, \qquad (2)$$

где ρ обозначает расстояние от точки, в которой следует определять φ, до элемента площади $d\sigma$. Имеем [1]):

$$2\ (\text{кинетическая энергия})^2 = -\frac{1}{2}\iint \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\iint\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{d\sigma}{\rho}\cdot d\sigma = \frac{P}{\pi},$$

если P представляет потенциал на самого себя диска радиуса R, у которого

$$\text{плотность} = 1 + \frac{\mu r^2}{R^2} + \frac{\mu' r^4}{R^4}.$$

Значение P следует определить методом, примененным в тексте (§ 307) для случая однородной плотности. На краю диска, если его обрезать до радиуса a, имеем потенциал

$$V = 4a + \frac{20}{9}\frac{\mu a^3}{R^2} + \frac{356}{225}\frac{\mu' a^5}{R^4}, \qquad (3)$$

и таким образом, выполняя интегрирование, получаем

$$P = \int_0^R 2\pi a\, da\, V\left\{1 + \mu\frac{a^2}{R^2} + \mu'\frac{a^4}{R^4}\right\} =$$

$$= \frac{8\pi R^3}{3}\left\{1 + \frac{14}{15}\mu + \frac{5}{21}\mu^2 + \frac{314}{525}\mu' + \frac{214}{675}\mu\mu' + \frac{89}{825}\mu'^2\right\}. \qquad (4)$$

Эта величина, деленная на π, дает двойную кинетическую энергию движения, определяемую соотношением (1).

Полный поток равен

$$\int_0^R 2\pi r\, dr\left(1 + \mu\frac{r^2}{R^2} + \mu'\frac{r^4}{R^4}\right) = \pi R^2\left(1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\mu'\right). \qquad (5)$$

Теперь нам следует рассмотреть задачу определения движения несжимаемой жидкости внутри жесткого цилиндра при условиях, что осевая скорость равномерна при $x = -\infty$, а при $x = 0$ она имеет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 1 + \mu\frac{r^2}{R^2} + \mu'\frac{r^4}{R^4}.$$

Мы внесем ясность, выделив из φ ту часть ее, которая соответ-

[1]) Предполагается, что плотность жидкости равна единице.

ствует равномерному течению. Так, если мы примем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=1+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{3}\mu'+\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

то ψ будет соответствовать движению, которое исчезает при больших численных значениях x. При $x=0$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\mu\left(r^2-\frac{1}{2}\right)+\mu'\left(r^4-\frac{1}{3}\right), \tag{6}$$

если, ради краткости, положить $R=1$.

Но ψ можно разложить в ряд

$$\psi=\sum a_p e^{px}J_0(pr), \tag{7}$$

где p обозначает корень уравнения [1])

$$J_0'(p)=0. \tag{8}$$

Каждый член этого ряда удовлетворяет тому условию, что он не дает радиальной скорости при $r=1$ и не дает никакого движения при $x=-\infty$. Остается определить коэфициенты a_p так, чтобы удовлетворить соотношению (6) при $x=0$. От $r=0$ до $r=1$ мы должны иметь

$$\sum pa_p J_0(pr)=\mu\left(r^2-\frac{1}{2}\right)+\mu'\left(r^4-\frac{1}{3}\right),$$

откуда, умножая на $J_0(pr)\,r\,dr$ и интегрируя в пределах от 0 до 1,

$$pa_p[J_0(p)]^2=2\int_0^1 rd\,rJ_0(pr)\left\{\mu\left(r^2-\frac{1}{2}\right)+\mu'\left(r^4-\frac{1}{3}\right)\right\}.$$

В левой части каждый член, за исключением одного, исчезает по свойству самих функций. В правой части имеем

$$\int_0^1 r\,drJ_0(pr)=0,$$

$$\int_0^1 r^3\,drJ_0(pr)=\frac{2}{p^2}J_0(p),$$

$$\int_0^1 r^5\,drJ_0(pr)=\left(\frac{4}{p^2}-\frac{32}{p^4}\right)J_0(p),$$

---

[1]) Численные значения корней приближенно равны

$p_1=3{,}831705$, $p_2=7{,}015$, $p_3=10{,}174$,
$p_4=13{,}324$, $p_5=16{,}471$, $p_6=19{,}616$.

так что

$$a_p = \frac{4}{p^3 J_0(p)} \left\{ \mu + 2\mu' \left(1 - \frac{8}{p^2} \right) \right\}. \qquad (9)$$

Таким образом, потенциал скоростей φ всего движения есть

$$\varphi = \left(1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\mu' \right) x + 4 \sum \frac{\mu + 2\mu' (1 - 8p^{-2})}{p^3 J_0(p)} e^{px} J_0(pr), \qquad (10)$$

где суммирование распространяется на все допустимые значения p. Теперь нам следует найти энергию движения такого количества жидкости, которое заключено между $x = 0$ и $x = -l$, где l настолько велико, что скорость там можно считать постоянной.

По теореме Грина

$$2\ (\text{кинетическая энергия}) = \int_0^1 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} 2\pi r\, dr_{(x=0)} - \int_0^1 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} 2\pi r\, dr_{(x=-l)}.$$

Но при $x = -l$

$$\varphi = -\left(1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\mu' \right) l,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\mu',$$

так что второй член есть $\pi l \left(1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\mu' \right)^2$.

При вычислении первого члена мы должны помнить, что если p_1 и p_2 — два различных значения p, то

$$\int_0^1 2\pi r\, dr J_0(p_1 r)\, J_0(p_2 r) = 0.$$

Таким образом,

$$\int_0^1 2\pi r\, dr \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}_{(x=0)} = 16 \sum \frac{\left\{ \mu + 2\mu' (1 - 8p^{-2}) \right\}^2}{p^5 \left| J_0(p) \right|^2} \int_0^1 2\pi r\, dr \left[J_0(pr) \right]^2 =$$

$$= 16\pi \sum \left\{ \mu + 2\mu' \left(1 - \frac{8}{p^2} \right) \right\}^2 p^{-5}.$$

Следовательно, восстанавливая R, имеем

$$2\ (\text{кинетическая энергия}) = \pi R^2 l \left(1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\mu' \right)^2 + 16\pi R^3 \sum \left\{ \mu + 2\mu' \left(1 - \frac{8}{p^2} \right) \right\}^2 p^{-5}.$$

К этому следует прибавить энергию движения по положительную сторону от $x=0$. В целом

$$\frac{2\text{ кинетические энергии}}{(\text{поток})^2}=\frac{l}{\pi R^2}+\frac{16}{\pi R\left(1+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{3}\mu'\right)^2}\times$$
$$\times\sum\left\{\mu+2\mu'\left(1-\frac{8}{p^2}\right)\right\}^2 p^{-5}+$$
$$+\frac{8}{3\pi^2 R}\frac{1+\frac{14}{15}\mu+\frac{5}{21}\mu^2+\frac{314}{525}\mu'+\frac{214}{675}\mu\mu'+\frac{89}{825}\mu'^2}{\left(1+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{3}\mu'\right)^2}.$$

Следовательно, если α есть поправка к длине, то

$$\frac{3\pi\alpha}{8R}=\left[1+\frac{14}{15}\mu+\frac{314}{525}\mu'+\left(6\pi\sum p^{-5}+\frac{5}{21}\right)\mu^2+\right.$$
$$+\left\{24\pi\left(\sum p^{-5}-8\sum p^{-7}\right)+\frac{214}{675}\right\}\mu\mu'+$$
$$\left.+\left\{24\pi\left(\sum p^{-5}-16\sum p^{-7}+64\sum p^{-9}\right)+\frac{89}{825}\right\}\mu'^2\right]:$$
$$:\left(1+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{3}\mu'\right)^2.$$

Численное определение из значений p дает

$$\sum p^{-5}=0{,}00128266;\quad \sum p^{-5}-8\sum p^{-7}=0{,}00061255,$$
$$\sum p^{-5}-16\sum p^{-7}+64\sum p^{-9}=0{,}00030351,$$

и, таким образом,

$$\frac{3\pi\alpha}{8R}=[1+0{,}9333333\mu+0{,}5980951\mu'+0{,}2622728\mu^2+$$
$$+0{,}363223\mu\mu'+0{,}1307634\mu'^2]:\left(1+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{3}\mu'\right)^2=$$
$$=1-\frac{0{,}0666667\mu+0{,}0685716\mu'-0{,}0122728\mu^2-}{\left(1+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{3}\mu'\right)^2}$$
$$\frac{-0{,}029890\mu\mu'-0{,}0196523\mu'^2}{\left(1+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{3}\mu'\right)^2}.\qquad(11)$$

Дробь в правой части выражения представляет собой отношение двух квадратичных функций от μ и μ', и нашей целью является определение ее максимального значения. Вообще, если S и S' — две квадратичные функции, то максимальное и минимальное значения $\varepsilon=S/S'$ даются кубичным уравнением

$$-\Delta z^{-3}+\Theta z^{-2}-\Theta' z^{-1}+\Delta'=0,$$

где

$$S=a\mu^2+b\mu'^2+c+2f\mu'+2q\mu+2h\mu\mu',$$
$$S'=a'\mu^2+b'\mu'^2+c'+2f'\mu'+2q'\mu+2h'\mu\mu',$$

$$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = \frac{(h^2 - ab)(g^2 - ac) - (hg - af)^2}{a},$$

$$\Theta = (bc - f^2)a' + (ca - g^2)b' + (ab - h^2)c' + \\ + 2(gh - af)f' + 2(hf - bg)g' + 2(fg - ch)h',$$

а Θ' и Δ' получают из Θ и Δ путем взаимного обмена штрихованных и нештрихованных букв.

В данном случае, поскольку S' есть произведение линейных множителей, $\Delta' = 0$; а поскольку оба множителя одинаковы, $\Theta' = 0$, так что просто $z = \Delta/\Theta$. Подставляя численные значения и производя вычисления, находим $z = 0{,}0289864$, что является максимальным значением дроби, совместимым с действительными значениями μ и μ'.

Соответствующее значение α есть $0{,}82422R$; истинная поправка не может превышать этого значения.

Если мы положим $\mu' = 0$, то наибольшее возможное тогда значение z есть 0,024363, что дает [1])

$$\alpha = 0{,}828146R.$$

С другой стороны, если мы положим $\mu = 0$, то максимальное значение z получается равным 0,027653, откуда

$$\alpha = 0{,}825353R.$$

Из этого результата видно, что переменная часть нормальной скорости в отверстии лучше выражается членом, пропорциональным r^4, чем членом, пропорциональным r^2.

Значение $\alpha = 0{,}8242R$, вероятно, достаточно близко к истине. Если считать нормальную скорость постоянной, то $\alpha = 0{,}848826R$; если считать, что она имеет вид $1 + \mu r^2$ то $\alpha = 0{,}82815R$, где μ определено соответствующим образом; если же в основу вычислений положен вид $1 + \mu r^2 + \mu' r^4$, содержащий другую произвольную постоянную, то получаем $\alpha = 0{,}8242R$.

Истинное значение α, вероятно, около $0{,}82R$.

В случае, когда $\mu = 0$, минимальная энергия соответствует значению $\mu' = 1{,}103$, так что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1 + 1{,}103\,\frac{r^4}{R^4}.$$

При этом предположении нормальная скорость кромки ($r = R$) была бы приблизительно вдвое большей, чем скорость вблизи от центра.

[1]) „Notes on Bessel's functions", *Phil. Mag.*, ноябрь, 1872.

УКАЗАТЕЛЬ

Акустические облака 136
Аналогия между движением жидкости и теплотой и электричеством 24
Атмосферная рефракция 134

Белла опыты 398, 358
Бидона наблюдения 347
Биения 430; — высших составляющих 438, 447, 448; — несовершенных гармоник 450
Бинауральный эффект 426
Вихри в трубках Кундта 333
Влажности действие на скорость звука 40
Водородное пламя 223
Воздушные колебания 13;— —в камере 77; общие уравнения 97; поддержание теплотой 222
Волны 109; — вторичные, обязанные изменениям среды 152; — плоские поперечных колебаний 404; — плоские воздушных колебаний 15; — на воде 336, 337, 342; — плоские 28, 41; — постоянного типа 42; — растяжения 404, 406; — расходящиеся 128, 234; — стоячие на бегущей воде 342; — сферические 15
Высота, граница слышимости 419;
Высота, ее оценка ухом 420, 437
Вязкая жидкость, нити ее 365; поперечные колебания в ней 309; распространение плоских волн 398, 314
Вязкость, определение 305; аналогия с упругим натяжением 306; — воздуха 306

Галлереи шепчущие 127
Гармоническое эхо 152
Гельмгольца обратная теорема 145; — расширение теоремы Грина 147; — теория слуха 434, 435
Гласная „А" 457, 458
Гласные, вопросы двойного резонанса 459; высота характеристик 455; Виллиса опыты и теория 452; искусственное воспроизведение 453, 459; исследование фонографом 456; присутствие первичного тона 459; теории Уитстона и Гельмгольца 454
Грина исследование отражения и преломления 85
Грина теорема, расширение Гельмгольца 147
Гюйгенса принцип 119

Движение без вращения 21
Действие взрыва на окна 118
Диапазон слышимых частот 419
Динамическое подобие 417
Диссипативная функция для вязкой жидкости 307
Диффракционные спектры 96
Диффракция 143
Допплера принцип 156
Дымовые струи 394

Жидкий цилиндр 343
Жидкость, идеальная 13

Завихренность 375—387; устойчивая завихренность 373, 374, 375
Затухание колебаний внутри уха 435

Зональные сферические функции 245
Зоны Гюйгенса и Френеля 125, 145

Излучение, действие его на распространение звука 35
Исследование Стокса о передаче колебания от звучащего тела газу 234
Источник гармонического типа 111
Источник звука, направление его 427
Источники простые и двойные 150

Камертон 123, 300, 447
Капель колебания 361
Капиллярное натяжение, определение по ряби 338
Капиллярность 335
Квинке трубка 208
Кирхгоффа исследование распространения звука в узких трубках 311
Колебания в закрытом цилиндре 292, 294
Колебания второго порядка (нелинейные) 461
Колокольчик, звучание в водороде 234; молчание вдоль оси 117
Коническая труба 118, 120
Консонансы 438, 447
Круговая решетка 145, 146
Кундта трубка 57, 333

Лагранжа теорема для движения жидкости 18
Лапласа формула скорости звука 30, 31
Лапласа функции 231
Лесли опыт 234
Линейный источник 409
Лиссажу явление 341

Минимальная амплитуда слышимого звука 420
Многократные источники 242
Многосвязные пространства 22
Молчания точки, интерференционные 116

Наименьший консонирующий интервал 436
Наэлектризованные капли 364
Несжимаемая жидкость 20
Неустойчивость вихревого движения 368
Неустойчивость наэлектризованных капель 364
Неустойчивость струй 351
Низкие звуки, издаваемые пламенем 223

Обертоны, способ выслушивания 432
Оболочка, колебания в круглой О. 291; колебания в сферической О. 257, 261; колебания между сферической О. 257, 261; колебания между сферическими слоями 264
Ома закон, исключения из него 429
Органные трубы 215; действие дутья на высоту 215; взаимное влияние 218; обертоны 217; поддержание колебаний 216
Открытые трубы, теория 195, 197, 200
Отражение волн в упругом теле 415; от воздушной пластинки 87; от волнистой поверхности 96; от изогнутых поверхностей 130; от пористых стен 322; от стены 84; от ступенек 438; от фиксированной стены 77, 108; плоских волн 415

Отражение и преломление на слоях меняющейся температуры 90; — плоских волн 85
Паровой свисток 220
Пизанская баптистерия 133
Пламя, отражение звука от него 90; — поющее 223; — чувствительное 145, 390
Плато теория струй 355
Плоская колеблющаяся круглая пластинка 164
Подвешенный диск 54
Поддержание воздушных колебаний теплом 222
Полное отражение 91
Поперечные колебания в упругих телах 404
Пористая стенка 321
Потенциал скорости 15, 20, 26
Преломление атмосферное 134; — звука ветром 137, 139
Препятствие в упругом теле 408; — линейное 410; — из ткани 304; — сферическое 265, 274; — цилиндрическое 302
Прерыватель струй 358
Притяжение благодаря движению 53
Проводимость горл 182; — отверстий 175, 177; — приближенно цилиндрических труб 184
Произвольное начальное возмущение 105, 405
Прямоугольная воздушная пластинка 74
Прямоугольный сосуд 159
Птичий манок 145, 399
Пуассона интеграл 48, 50; — решение 104
Разветвленная труба 70
Размерностей метод 416
Разностные тоны 440, 441, 442, 444, 446, 448
Разрывы при $n + ku = 0$ 388
Расходящиеся волны 128, 233; — — в двух измерениях 297
Резонанс в зданиях 133, 326; — многократный 189
Резонатор 433; бесконечно малый Р. на пути волн 276; возбуждение Р. 215; возбуждение посредством пламени 223; вынужденное колебание Р. 194; высота Р. 201; два или более Р. 213; двойной источник и Р. 211; отталкивание Р. 52; поглощение звука Р. 207; потеря энергии Р. 192; смежный с источником Р. 208; сравнение с опытом 187; теория Р. 172; собственный тон Р. 175
Рийке звук 227
Римана уравнения 48
Рэнкина вычисление теплоемкости 34
Рябь (Фарадей) 338
Свист ртом 220
Сигналы в тумане 141
Скорость звука в воде 40; — — в воздухе 56; — — по Ньютону 29
Слышимость одного звука в присутствии другого 430
Столкновения капель 359
Стоячие струи жидкости в жидкости 395
Струи, колебания около округлой формы 348; максимально неустойчивая длина волны 353; наблюдения Бидона 347; наблюдения Савара 351, неустойчивость струй 351, 370; опыты Белла 358; применение к определению натяжения свежеобразованных поверхностей 350; электричества действие 359
Струи чувствительные 366
Струна, применение для анализа звука ухом 430
Струхаля наблюдения над эоловыми звуками 401
Суммовой тон 443
Сферические слои воздуха 280, 284, 292
Твердые тела 403, 405, 407
Температуры влияние на вязкость 397
Тени 124
Тень круглого диска 146
Тень, отбрасываемая шаром 249
Теорема взаимности 148
Теплоемкость 31
Теплопроводности действие 311
Теплоты аналогия с движением жидкости 24
Тиндаля чувствительное пламя высокого давления 390
Тревелиана прибор 221
Трение в жидкости 305
Труба неограниченная с простым источником 160; — переменного сечения 73; — прямоугольная 81
Трубы, колебания в них 58; разветвленные Т. 71; слуховые Т. и рупоры 119, 142; — с малой вязкостью 318
Узкие трубки 311
Узлы и пучности 60, 84, 392
Упругое тело, потенциал напряжений в нем 306; сила, приложенная в одной точке 412
Уравнение давления 14, 25; — непрерывности 15
Условия для открытого конца 60, 195
Усталость уха 431
Фазы, влияние на звук 449, 452
Фарадеевы исследования ряби 338
Ферма принцип наименьшего времени 131
Фонограф 456
Френеля выражения для отраженных и преломленных волн 82
Френеля зоны 125
Функция тока 16
Характер звука 450, 451, 452
Характеристика гласных 455
Число импульсов, необходимое для определения высоты 437
Чувствительные дымовые струи 391; — струи жидкости в жидкости 395
Эллиптическое отверстие 177; сравнение его с круглым 180
Энергии закон, проверенный отражением 92
Энергии передача плоскими воздушными волнами 27
Энергия, испускаемая колеблющейся сферической поверхностью 246; — потенциальная конденсации 28; — сферических волн 118
Эолова арфа 402
Эоловы тоны 401
Эхо гармоническое 155
Явления второго порядка 51
Язычковые инструменты 229