Жакоб К.

р

Понятие предела в математике

С-Петербург
1905 г.

К. Жаковъ.

# ПОНЯТІЕ ПРЕДѢЛА ВЪ МАТЕМАТИКѢ

(СЪ ТОЧКИ ЗРѢНІЯ ЛОГИКИ).

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Училища Глухонѣмыхъ, Гороховая, 18.
1905.

# СОДЕРЖАНІЕ.



Дозволено цензурою. С.-Петербургъ, 5 Іюля 1905 года.

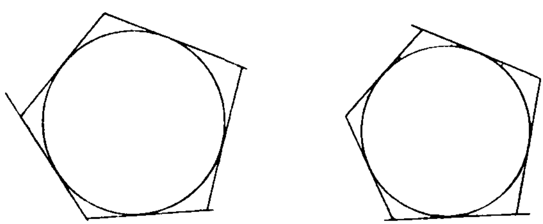
## I.

## Природа математическаго предѣла:

Въ теоріи предѣла и въ дифференціальномъ исчисленіи имѣютъ мѣсто два умственныхъ процесса — вычисленіе и умозаключеніе. Смѣшеніе ихъ, какъ увидимъ ниже, порождаетъ неправильный взглядъ на сущность этого великаго метода изученіи міра количестъ и міра явленій.

Возьмемъ конкрентные случаи, примѣры.

На нихъ уясняется сущность этого метода. Имѣются два правильныхъ многоугольника, описанныхъ около двухъ круговъ. Положимъ, что эти многоугольники измѣняются равномѣрно и всегда остаются при этомъ равными. Надо доказать, что круги равны (фиг. I).



Фигура. I.

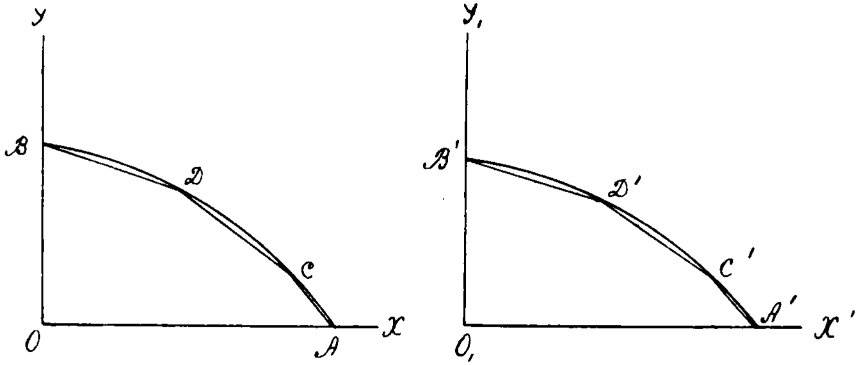
Даны двѣ прямоугольныя фигуры ACDB и A'C'D'B', площади ихъ равны. При удвоеніи числа хордъ онѣ остаются равными, измѣняясь, увеличиваясь въ площади. Доказать, что криволинейная фигуры BDCA и B'D'C'A' по площади равны (фиг. II).

Выражаясь символически, эти двѣ задачи можно такъ выразить. Дано $a + x = b + y$, *нужно* доказать $a = b$, при условіи, что $x$ и $y$ могутъ быть меньше всякой данной величины. Доказавши это положеніе для этого общаго, отвлеченнаго случая, мы докажемъ для всѣхъ конкретныхъ случаевъ.

Допустимъ, что $a$ не равно $b$.

$a - b = d$. Разность между конечными величинами конечна ($d$) и постоянна, такъ какъ $a$ и $b$ постоянны, какъ предѣлы.

Если $a + x = b + y$ при всѣхъ измѣненіяхъ $x$ и $y$, то $x - y = b - a = - d$, или $y - x = d$ при всѣхъ $x$ и $y$. Можетъ-ли разность безконечно убывающихъ величинъ равняться конечной постоянной величинѣ? $y = x + d$,




Фигура II.

считая $x$ и $y$ положительными (иначе можно знакъ перемѣтить), вопросъ поставимъ такъ: можетъ-ли величина, которая меньше всякой данной величины, равняться конечной постоянной величинѣ, сложенной съ безконечно - малою (произвольно малою)? Конечно, нѣтъ.

$y = x + d$ немыслимо, слѣд.

$a + x = b + y$ невозможно, если $a - b = d$. Необходимо допустить, что $a - b = o$. Итакъ предѣлы равны, если перемѣнныя равны.

Мы умозаключеніемъ (а не вычисленіемъ) нашли, что если двѣ перемѣнныя величины, отличающіяся отъ двухъ постоянныхъ величинъ разностями меньшими, нежели любая данная конечная величина, равны при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ, то эти постоянныя (предѣлы) равны.

Сколь-же малы $x$ и $y$? Что такое безконечно-малыя величины?

Мы говорили, что, хотя какую-бы величину мы ни представляли между нулемъ и какой конечной малой величиною, $x$ и $y$ все-таки могутъ быть меньше этой величины; $x$ и $y$ всегда меньше любой данной величины, а любая данная величина зависитъ отъ характера вопроса. При рѣшеніи астраномическихъ задачъ, любая данная, меньше которой $x$ и $y$, можетъ быть величина абсолютно очень немалая, напр. 1 верста при рѣшеніи разстоянія между солнцемъ и землей; а при задачѣ о волосности, о свойствахъ сцѣпленія частицъ, любая данная можетъ быть чрезвычайно малая дробь миллиметра или микрона.

Слѣд. $x$ и $y$ по природѣ своей перемѣнны и меньше допускаемой погрѣшности, какія-нибудь дроби, убывающія сколько намъ угодно.

Если представимъ мы рядъ величинъ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots$ то x и y могутъ быть любымъ членомъ этого ряда, идущаго въ нисходящемъ порядкѣ, но нулемъ никогда они не будутъ, потому (нуля) 0 нѣтъ ни въ какомъ нисходящемъ ряду величинъ, число которыхъ безконечно. Безконечное нельзя пройти, многоугольникъ никогда не будетъ равенъ кругу. Тутъ въ сужденіи по свойствамъ многоугольника о кругѣ всегда будетъ скорѣе логическій переходъ, а не вычисленіе.

Если $a + x = b + y$, то $a = b$, въ этихъ сужденіяхъ имѣетъ мѣсто умозаключеніе, но не превращеніе $x = 0$ (нуль) въ и $y = 0$. (нуль).

Первая посылка этого умозаключенія: $a + x = b + y$

$$a + x_1 = b + y_1$$
$$a + x_2 = b + y_2$$
и т. д.

(всѣ величины извѣстнаго порядка равны между собою).

Меньшая посылка: a и b величины того-же порядка.

Заключеніе: слѣд. $a = b$. Тутъ представляемъ два безконечныхъ ряда:

$$a + x,\ a + x_1,\ a + x_2,\ + \ldots\ldots\ a$$
$$b + y,\ b + y_1,\ b + y_2,\ + \ldots\ldots\ b$$

и говоримъ—всѣ члены этихъ двухъ рядовъ соотвѣтственно равны, a и b соотвѣтственные члены того-же ряда, слѣд. $a = b$.

На какомъ-же логическомъ основаніи мы круги причисляемъ къ рядамъ многоугольниковъ, числа сторонъ которыхъ увеличиваются? На какомъ основаніи предѣлы причисляемъ къ рядамъ перемѣнныхъ величинъ, приближающихся къ этимъ предѣламъ?

Въ этомъ вопросѣ заключается таинственность способа предѣловъ. Отвѣтъ на него содержится въ обобщающей силѣ мысли.

Всѣ открытія ума совершены путемъ отожествленія различныхъ вещей. Ньютонъ взглянулъ на луну, какъ на камень, падающій на землю, т. е. причислилъ луну къ земнымъ предметамъ, и этимъ открылъ законъ тяготѣнія. Математикъ причисляетъ предѣлъ къ ряду перемѣнныхъ величинъ, къ нему стремящихся, и тѣмъ создастъ теорію предѣловъ. Значитъ основа здѣсь общелогическая: въ свойствѣ ума открывать тождественные элементы въ различныхъ предметахъ. Это свойство ума не что иное, какъ расширеніе закона тожество $A = A$.

Всякая вещь равна самой себѣ, она равна себѣ хотя-бы перемѣняла мѣсто и разсматривалась въ разное время, наконецъ она равна себѣ, заключенная въ другой вещи: $A = A$, хотя-бы второе $A$ было въ $B$, слѣд. $A. = B$.

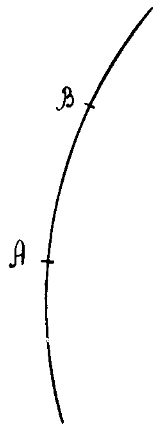
Мы говорили, что $x$ и $y$, такъ называемыя безконечно-малыя, никогда не бываютъ нулями, а какой-нибудь малой дробью, меньшей любой данной величины, меньшей допускаемой въ данной системѣ величинъ погрѣшности.

Но развѣ перемѣнная величина не можетъ обратиться въ нуль?

Развѣ въ математикѣ нѣтъ такихъ переходовъ? Есть. Разстояніе $A\ B$ на какой-либо кривой линіи при движеніи $A$ къ $B$, есть перемѣнная величина, которая будетъ равняться 0, при совпаденіи $A$ съ $B$. (Фиг. III). Но въ теоріи предѣловъ никогда этого не бываетъ. Многоугольникъ никогда не будетъ кругомъ.

Рядъ $1/2 + 1/4 + 1/8 \ldots.$ никогда не будетъ единицей, если послѣднему члену ряда, на которомъ мы остановились, не придать величину, равную этому числу.

$$1/2 + 1/4 + 1/4 = 1.$$
$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/8 = 1.$$
$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots\ldots.\ 1.$$



Фигура III.

Въ этомъ заключается свойство перемѣнной и предѣла, а именно, что никогда перемѣнная не будетъ предѣломъ, а только приближается къ ней на величину, сколько—угодно малую, хотя и конечную. Въ этомъ-же и красота теоріи предѣла, какъ особаго математическаго метода.

Мнѣ возразятъ, почему-же этотъ способъ даетъ точные результаты, разъ $x$ и $y$, разности между перемѣнными и предѣлами, всегда, являются дробями, а никогда не нулями?

Потому что предѣлъ мы никогда не находимъ вычисленіемъ, а мы къ нему умозаключаемъ отъ свойствъ перемѣннаго.

Напр. $\dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$ при приближеніи $x$ къ $a$ имѣли предѣломъ $2a$. $2a$ мы находимъ умозаключеніемъ, а не вычисленіемъ. Въ самомъ дѣлѣ допустимъ $x = a + \varepsilon$, тогда наша функція $\dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = \dfrac{(a + \varepsilon)^2 - a^2}{a + \varepsilon - a} =$

$\frac{2a\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon} = 2a + \varepsilon$; слѣд. чѣмъ x ближе къ a, чѣмъ меньше $\varepsilon$, тѣмъ $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$ ближе 2a, отличаясь отъ него только на $\varepsilon$. Очевидно (умозаключаемъ) предѣлъ 2a.

Но математики этотъ логическій процессъ представляютъ процессомъ вычислительнымъ: они говорятъ, когда $x = a$, а $\varepsilon = 0$, то $\frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a + \varepsilon = 2a$. Это очень хорошо для техники, но совершенно не вѣрно по существу: $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$ никогда не будетъ равнымъ 2a, потому-что перемѣнная никогда не будетъ предѣломъ, но о предѣлѣ мы умозаключаемъ на основаніи перемѣнной. Что невѣрно сужденіе о равенствѣ при $x = a$ и $\frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$, это ясно изъ того, что тогда и числитель и знаменатель были-бы нулями, а нули не могутъ дать результата при вычисленіи.

Выраженіе $\frac{0}{0}$ очень хорошее, какъ символъ, но съ точки зрѣнія логики оно не возможно, дѣленіе возможно только числа на числа и больше никогда.

Сейчасъ-же мы занимаемся не символами, очень удобными для вычисленій, механическихъ выкладокъ, а логикой математики, и въ частности логикой теоріи предѣла.

Всѣ математическіе софизмы основаны на различныхъ толкованіяхъ выраженій $\frac{0}{0}$ и $\infty\ 0$, при логическомъ пониманіи софизмы въ наукѣ невозможны.

$$\text{(Напр. } 4 = 5?\quad 0.\,4 = 0$$
$$0.\,5 = 0$$
$$0.\,4 = 0.\,5;\ \frac{0.\,4}{0} = \frac{0.\,5}{0} = 4 = 5$$
$$\text{или } \frac{a}{\infty} = 0,\ \frac{b}{\infty} = 0$$
$$a = \infty\ 0;\ b = 0\ \infty$$
$$a = b \text{ и т. д.).}$$

Теперь уяснивши природу математическаго предѣла, разсмотримъ принципъ дифференціальнаго исчисленія, чѣмъ еще болѣе уяснится великій методъ предѣла.

## II.

Сначала я выскажу принципы дифференціальнаго исчисленія, какъ я ихъ понимаю съ точки зрѣнія логики; дальнѣйшее-же изложеніе будетъ доказательствомъ толкованія, принятаго мною.

Дифференціальное исчисленіе не что иное, какъ теорія предѣла въ области малыхъ величинъ, меньшихъ, чѣмъ допускаемая погрѣшность въ данной системѣ вычисленій. Однако и здѣсь надо отличать случаи малыхъ погрѣшностей и игнорированія ими отъ умозаключеній отъ перемѣннаго къ предѣлу. Дифференціалъ (dx) малая конечная величина, меньшая допускаемой прогрѣшности. Прибавка ея къ величинѣ, къ высшей, чѣмъ предѣлъ погрѣшности, не увеличиваетъ этой величины $5 + dx = 5$; $5 - dx = 5$. Отношенія-же двухъ дифференціаловъ, такъ какъ они могутъ быть неравны, какъ перемѣнныя величины, могутъ быть разными числами $\frac{dy}{dx} = a$, а можетъ быть меньше и больше единицы и какой-угодно величины

$$1 > a > 1.$$

Теперь спрашивается, какая можетъ быть польза отъ введенія въ анализъ подобныхъ малыхъ величинъ, меньшихъ допускаемой погрѣшности, меньшихъ любой заранѣе данной величины?

Посредствомъ дифференціаловъ изучается непрерывность измѣненія количествъ (явленій), если не въ абсолютномъ смыслѣ, то, по крайней мѣрѣ съ такой точностью, съ какой намъ желательно, а благодаря понятіямъ предѣла, который вводится въ дифференціальное исчисленіе, достигаются во многихъ случаяхъ точные результаты, такъ что этотъ способъ анализа имѣетъ всѣ совершенства точнаго метода $\frac{dy}{dx} = z$. Это выраженіе, какъ перемѣнная, можетъ имѣть предѣлъ, который обозначается $f^1(x)$, если $y = f(x)$.

Объяснимъ эти символы и ихъ значеніе, $y = f(x)$, $x$ есть независимая перемѣнная, $y$ — функція. Независимая перемѣнная есть какая-нибудь данная природой или условіемъ задачи величина. Такъ разстояніе между двумя тѣлами природы A и B можемъ назвать независимой перемѣнной, какъ данное природой, а сила тяготѣнія или другія свойства (сила лучеиспусканія) будутъ функціями. $F = \frac{mm^1}{r^2}$, если $r = AB$. F — сила тягчѣнія, $m$ и $m^1$ массы A и B. $F = f(r)$.

Радіусъ измѣняющейся планеты, имѣющей формы эллипсоида вращенія, будетъ тоже независимая величина, а величина поверхности, или вѣсъ планеты будутъ функціями. Зависимая-же перемѣнная, тоже, что и функція, получается отъ независимой перемѣнной и другихъ данныхъ величинъ постоянныхъ путемъ вычисленія. Такъ, площадь эллипса $y = \pi xz$, гдѣ x и z полуоси эллипса.

Объемъ эллипсоида $u = \frac{4}{3}\pi abc$, гдѣ a и b и c полуоси его.

Положимъ, что $BD = y = \frac{x^2}{2p} = \frac{OB^2}{2p}$; площ. $ODB = \frac{1}{3}$ x y; это площадь параболическаго сегмента O D B, гдѣ O D

(фиг. IV).

часть параболы. $O\,D\,B = f\,(x, y) = \frac{1}{3}$ x y, гдѣ $O\ B = x$ $B\,D = y$, эта площадь функція O B и B D, т. е. x и y. (объясненіе ниже на стр. 12).

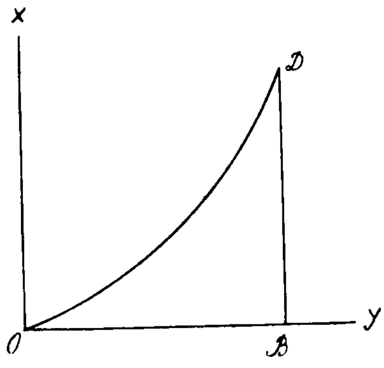
Возьмемъ функцію $y = x^2$ пусть x возростетъ на нѣкоторую величину $\Delta$ x.

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\,.\,\Delta x + \Delta x^2,$$

y измѣнилось на $\Delta$ y.

$$\Delta y = 2x\,.\,\Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$




Фигура IV.

передъ нами двѣ перемѣнныя величины $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и $2x + \Delta x$, равныя при всѣхъ измѣненіяхъ $\Delta$ x; если $\Delta$ x безпредѣльно будетъ уменьшаться, выраженія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и $2x + \Delta x$ будутъ приближаться къ нѣкоторому предѣлу.

Если перемѣнныя равны при всѣхъ измѣненіяхъ, то равны и ихъ предѣлы. $2x + \Delta x$ при $\Delta$ x приближающемся къ нулю, имѣетъ, очевидно, предѣломъ 2 x; таковой-же предѣлъ слѣд. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. предѣлъ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$. Въ математикѣ изображается предѣлъ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, что какъ символъ мнѣ кажется неудобнымъ, потому-что $\frac{dy}{dx}$ не имѣетъ реальнаго смысла при $\Delta x = dx = o$; несравненно лучше символъ $y^1$, разъ $y = x^2$, то $y^1 = 2x$, или если $y = f(x)$ $y^1 = f^1(x) = 2x$.

Величина $y' = 2x$ получается не вычисленіемъ (не черезъ дѣленіе $\left.\frac{dy}{dx}\right\}$, а умозаключеніемъ отъ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. Возьмемъ функцію $y = x^3$, $y' = 3x^2$; $y^1$ получается но умозаключенію къ предѣлу и наз. производною функціей отъ у. Можно получить производную отъ $y'$, это будетъ $y'' = 6x$,

слѣд. $y = x^3 =$ функція
$y' = 3x^2 =$ первая производная,
$y'' = 6x =$ вторая производная,
$y''' = 6 =$ третья производная.

Ученіе о функціи, о производныхъ функціяхъ, приложеніе ихъ къ механикѣ, къ геометріи и есть сущность дифференціальнаго исчисленія.

Почему велико значеніе функціи, и ея производныхъ? Потому что онѣ имѣютъ реальное значеніе.

Возьмемъ тонкій листъ пирамиды, (фиг. V).

объемъ его $a \,.\, \Delta x$.
$ABC = b$; $SO = L$
$So' = x$

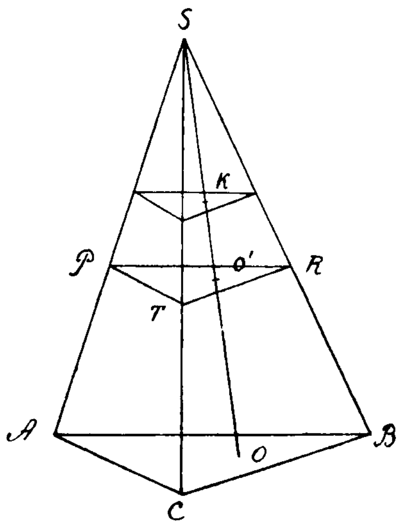
$\left\{\begin{array}{l} PTR = a \\ ABC = b \\ ko' = \Delta x = \text{толщина листа.}\end{array}\right.$

$$\frac{L^2}{x^2} = \frac{b}{a};\quad \frac{L^2 a}{b} = x^2$$

$$a = \frac{b\,x^2}{L^2}$$

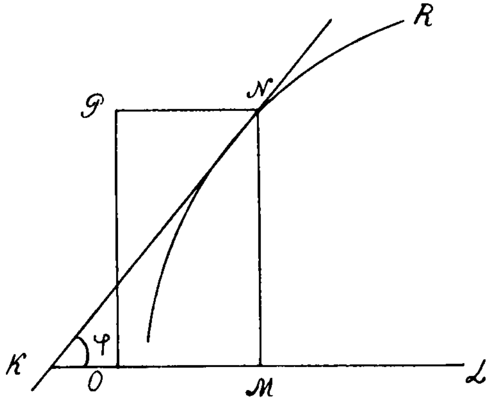
объемъ листа $\frac{b\,x^2}{L^2}\Delta x = .\, a\,\Delta x$

Мы видѣли, что если $y = x^3$, то $y' = 3x^2$, объемъже листа $\frac{x^2\,b}{L^2} \,.\, \Delta x = .$ $= 3x^2 \,.\, \frac{b}{3L^2} \,.\, \Delta x = y' \frac{b}{3L^2} \Delta x$. Въ это выраженіе входитъ производная $y'$. Если вмѣсто $y' \Delta x$ подставимъ первоначальную функцію $y = x^3$, то получимъ $\frac{x^3 b}{3L^2}$, а




Фигура V.

при $x = L$, $\frac{L^3 b}{3 L^2} = \frac{L b}{3}$ объемъ всей пирамиды, а $\frac{x^3 b}{3 L^2}$ выражало объемъ пирамиды SPTR. Слѣдовательно между производной функціей и первоначальной есть зависимость, если $y'$. $\Delta$ x выражаетъ объемъ листа пирамиды, то у выражаетъ объемъ всей пирамиды.



Фигура VI.

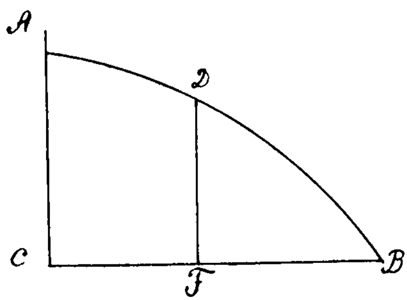
Если $y = f(x)$ выражаетъ кривую линію (фиг. VI).

$$N P = x$$
$$N M = y,$$

то $y' = f'(x)$ выражаетъ $t g \varphi$, гдѣ $\varphi$ есть уголъ между касательной и осью x. O L; $\varphi = N K L$. N R кривая линія съ уравненіемъ $y = f(x)$.

Если $y = f(x)$ выражаетъ величину площади BDF (фиг. VII), то $y'$ — ординату. DF; другими словами — первоначальная функція равна площади, а производная равна прямой, назыв. ординатой.

Поэтому, если мы умѣемъ по данной функціи найти производныя функціи, или наоборотъ, то, зная однѣ величины, можемъ вычислять другія.



Фигура VII.

Причемъ способы нахожденія по данной функціи ея производныхъ составляютъ дифференціальное исчисленіе, а способы нахожденія по производнымъ функціямъ ихъ первоначальной—интегральное исчисленіе.

$У = x^3$. Если я получаю:

$$y' = 3 x^2,\ y'' = 6 x.$$

Это будетъ дифференціальное исчисленіе, а если я по данной $y'' = 6 x$, умѣю получить $3 x^2$, а потомъ $x^3$, это будетъ интегральное.

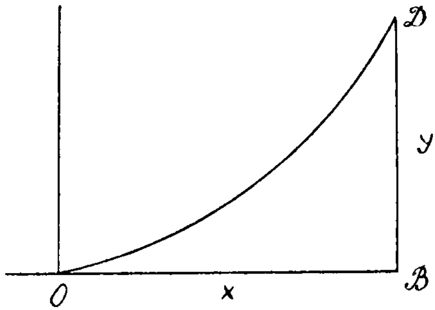
Эти простые процессы затруднены у насъ символами (въ учебникахъ),

$$y' = \frac{d\,y}{d\,x},\ y'' = \frac{d^2\,y}{d\,x^2}$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 3\,x^2;\ d\,y = 3\,x^2\,d\,x.$$

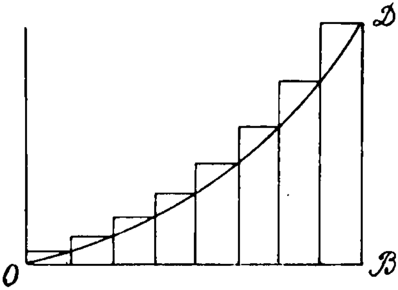
$\int 3\,x^2\,d\,x = x^3$. Хотя по существу я просто по $3\,x^2 = y'$ беру прямо $x^3$, ибо знаю, что производная $x^3$ есть $y' = 3x^2$. Слѣд. все основано на *умозаключенiи* отъ перемѣннаго къ предѣлу; это *логика*, а не *исчисленiе*, оттого и даетъ точные результаты, гдѣ мы знаемъ предѣлъ по перемѣнному. Вотъ истинная сущность этого исчисленiя, и тутъ нѣтъ ничего таинственнаго.

Положимъ, что $= DB = y'$ $y' = \frac{x^2}{2\,p}$, а $x = OB$, (фиг. VIII) то $y = \frac{x^3}{6\,p}$ (по производной первоначальная), $y'$ (производная) выражала ординату B D, а y выражаетъ площадь ODB. Изъ этого примѣра видимъ полезность этого метода.




Фигура VIII.

Вмѣсто суммы параллеграммовъ мы беремъ *по умозаключенiю* предѣлъ суммы, т. е. площадь O D B. И это дѣлается по силлогизму:




Фигура IX.

1. Всѣ суммы параллеграммовъ имѣютъ извѣстное свойство, выражаемое формулой $\frac{x^3}{6\,p} + \varepsilon$

2. Площадь ODB относится къ этимъ-же суммамъ, хотя толщина параллеграммовъ здѣсь равна O.

Слѣд. площадь ODB имѣетъ тѣ-же свойства, выражаемыя формулой $\frac{x^3}{6\,p} + \varepsilon$ (только $\varepsilon$, связанное съ толщиной параллеграммовъ, здѣсь отсутствуетъ).

$$y = \frac{x^3}{6\,p} + 0 = ODB.$$

III.

## Значеніе въ логикѣ и въ теоріи познанія метода предѣла.

Наше знаніе, говорятъ, относительно, а не абсолютно. Это сужденіе основано на многовѣковомъ опытѣ. Исторія такъ наз. точныхъ наукъ показываетъ, что наше знаніе всегда было и теперь есть приблизительное. Оно нѣкоторая перемѣнная величина, приближающаяся къ какому-то предѣлу. Чѣмъ ближе оно подойдетъ къ своему предѣлу, тѣмъ меньше, вѣроятно, будетъ противорѣчій и неясностей между разными научными дисциплинами. Если возьмемъ мы уравненіе

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_3 x^3 + a_4 x^4 \ldots$$

которое обозначило-бы законъ природы, выраженный идеально точно, то наше знаніе въ разные вѣка представилось-бы приблизительными уравненіями.

$$y = a_0$$
$$y = a_0 + a_1 x$$
$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$
и т. д.

Другими словами наша формулировка законовъ природы въ большей части случаевъ есть перемѣнная величина, идущая къ нѣкоторому предѣлу.

Въ какомъ отношеніи находятся $a_0$, $a_0 + a_1 x$, $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ и т. д.

ко всей функціи $y$?

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots \quad (1)$$

при $x = o$, $y = a_0$, слѣд. $f(o) = a_0$.

Взявши производныя отъ обѣихъ частей уравненія (1), получимъ $y' = f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots\ldots$, откуда $f'(o) = a_1$

Еще разъ взявши производными, вторыя получимъ

$$y'' = f''(x) = 1 \,.\, 2a_2 + 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, x + \ldots\ldots$$
$$f''(o) = 1 \,.\, 2a_2$$
$$a_2 = \frac{f''(o)}{1 \,.\, 2}$$
и т. д.

$$y = f(x) = f(o) + f'(o)\, x + \frac{f''(o)}{1 \,.\, 2} x^2 + \frac{f'''(o)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} x^3$$

(рядъ Маклорена).

Слѣд. величины $a_0$, $a_0 + a_1 x$, $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

суть

$$f(o),\ f(o+)+f'(o)\,x,$$

$$f(o)+f'(o)\,x+\frac{f''(o)}{1\,.\,2}\,x^2$$

и т. д.

Другими словами приблизительныя величины оказываются частными выраженіями неизвѣстной функціи, вѣрными формулами, но только для частнаго случая, когда $x = o$.

И дѣйствительно многія законы природы точно выражены въ частномъ видѣ. Такъ законъ Маріотта вѣрнъ для газовъ, очень отдаленныхъ отъ точки температуры ожиженія.

Что наше знаніе всюду является перемѣнной величиной, при неизвѣстности предѣла, это можно иллюстрировать данными всѣхъ наукъ.

Въ математикѣ изъ трехъ способовъ доказателъствъ (наложенія, или, вообще говоря, замѣщенія одной величиною другую, пропорціональности и способа предѣловъ) тотъ методъ, о которомъ мы въ этой статьѣ говоримъ, является наиважнѣйшимъ. Тамъ постоянно берутся перемѣнныя величины вмѣсто предѣловъ.

Вмѣсто log 2 мы беремъ произвольное число членовъ ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots.,$$

потому что весь этотъ безконечный рядъ равенъ log 2. Но предѣлъ мы взять не можемъ и довольствуемся перемѣнной величиной. (Здѣсь log натуральный, а не обыкновенный или Бригговъ, т. е. при основаніи e).

Весь рядъ $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\ldots..$ меньше единицы, но въ точности знать сумму не можемъ.

Также число $\pi$ не доступно (отношеніе окружности къ діаметру)

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\ldots\ldots.$$

Мы можемъ взять произвольное число членовъ этого ряда, и эту перемѣнную считать за предѣлъ.

Также въ геометріи многоугольники мы постоянно беремъ за кривыя фигуры, которыя въ предѣлѣ не доступны намъ.

Въ приложеніи математики къ изученію природы (въ астрономіи, физики и т. д.) мы постоянно имѣемъ въ виду теорію перемѣннаго и предѣла.

Мы считаемъ пространство съ нулевой кривизной, такъ какъ на доступныхъ разстояніяхъ погрѣшности не наблюдается отъ такого предположенія.

Малыя поверхности земли считаются за плоскость въ геодезическихъ измѣреніяхъ и т. д. Всюду, въ сущности, или завѣдомо или при незнаніи, нѣкоторую величину считаемъ за предѣлъ, который трудно или невозможно изслѣдовать. Тоже самое въ физикѣ и въ химіи. Недѣлимыя при настоящихъ условіяхъ изслѣдованія части вещества считаются простыми, недѣлимыми, неразложимыми, хотя онѣ могутъ быть очень сложны.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ наше знаніе только грубо приблизительно (въ біологіи, исторіи и т. д.).

Это все говорится за то, что математическая теорія предѣла должна быть важнѣйшимъ отдѣломъ логики, имѣющей цѣлью понять и усовершенствовать технику человѣческаго мышленія и научные пріемы изслѣдованія природы и духа.

Въ гносеологіи и въ философскихъ дисциплинахъ теорія предѣла можетъ оказать свои услуги.

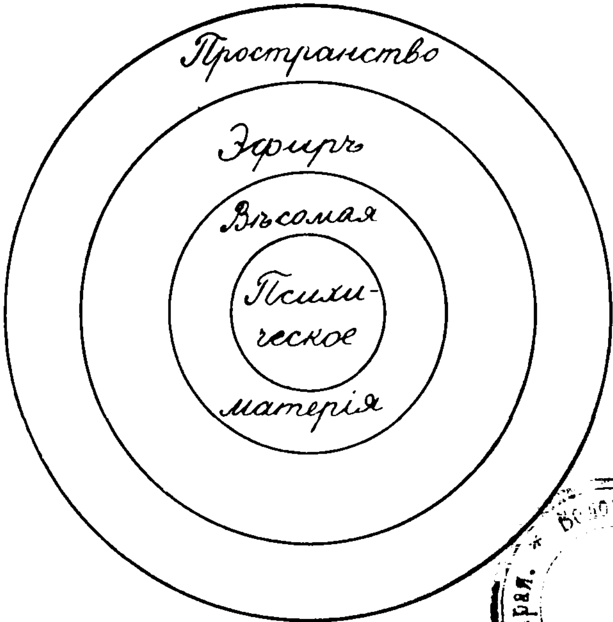
Историческій ростъ человѣческаго познанія есть перемѣнная величина, несомнѣнно стремящаяся къ нѣкоторому предѣлу.

Жизнь міра въ этомъ смыслѣ есть созидающаяся гармонія между микрокосмосомъ (познающимъ субъектомъ) и макрокосмосомъ (бытіемъ вообще).

Мы при этомъ видимъ, что міръ ощущеній и познанія черезъ внѣшнія чувства стремится къ нѣкоторому протяженно-многообразному предѣлу (стóитъ вспомнить развитіе астрономическихъ идей. Сначала Вселенная была куполомъ надъ плоской землей, потомъ сферою, эвклидовскою безконечностью), а внутреннее испытываніе при самоуглубленіи отрѣшается отъ протяженнаго многообразованія, приходитъ къ познанію такой сферы явленій, къ которой категорія протяженности не приложима. Слѣд. двѣ перемѣнныя—міръ физическій, по скольку его мы знаемъ, и міръ психическій не равны при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ и не по одинаковому закону идутъ, а это значитъ и предѣлы ихъ не равны. Отсюда выходитъ, что, если предѣломъ внѣшняго, видимаго міра назвать объективную реальность, и предѣломъ психическихъ явленій назвать субстанцію духа, то основа физическихъ явленій и душа не одно и тоже по существу, другими словами, мы приходимъ не къ одному, а къ двумъ принципамъ. Міръ двойственъ (по скольку мы его знаемъ). Это, конечно, въ томъ случаѣ, если мы вѣсомую матерію эфиръ и пространство сочтемъ за выраженія одной и той-же реальности, а иначе міръ представалъ-бы въ четырехъ концентрическихъ кругахъ (выражаясь въ символахъ), не сводимыхъ одинъ на другой (фиг. X).

Впрочемъ этотъ вопросъ требуетъ спеціальнаго изслѣдованія въ области гносеологіи и метафизики. Я-же сей часъ хотѣлъ только указать, что теорія предѣла можетъ быть прилагаема и въ гносеологіи и въ метафизикѣ.

Итакъ, мнѣ кажется, мы уяснили въ нѣкоторой степени логическую сторону способа предѣловъ. Онъ основанъ на умозаключеніи, а не на вычисленіи: Предѣлъ включается въ совокупность, или въ систему перемѣнныхъ величинъ, и относительно его высказывается тоже самое, что формулой дается и для системы перемѣнныхъ величинъ. Я отвѣтилъ




Фигура X.



на слова Джевонса, который говоритъ, что „есть пункты математическаго ученія, которые остаются дѣломъ личнаго мнѣнія; напримѣръ, наилучшая форма опредѣленія и аксіомы относительно параллельныхъ линій или *настоящая природа предѣла*“ (основы науки стр. 151).

Значеніе теоріи предѣла обусловливается самой природой человѣческаго ума, эволюціонирующаго въ теченіи исторіи, умозаключающаго отъ величины A къ величинѣ B, если замѣчено между ними какое-нибудь сходство.