

ISSN 0013-5380

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

1999

7

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Секция теоретических основ электротехники, преобразовательной техники, электротехнических материалов

Бутырин П.А., председатель секции (Объединенный институт высоких температур РАН), Булатов О.Г. (Московский энергетический институт), Козлов В.Н. (С.-Петербургский государственный технический университет), Лагарьков А.Н. (Объединенный институт высоких температур РАН), Макашкин Б.Д., ответственный секретарь редакции, Мионов В.Г. (Московский энергетический институт), Розанов Ю.К. (Московский энергетический институт), Чечурин В.Л. (С.-Петербургский государственный технический университет).

Научный редактор — Макашкин Б.Д.

Секция электроэнергетики

Строев В.А., главный редактор, председатель секции (Московский энергетический институт), Дьяков А.Ф. (Корпорация «Единый электроэнергетический комплекс РФ»), Железко Ю.С. (Научно-исследовательский институт электроэнергетики), Ишкин В.Х. (РАО «ЕЭС России»), Кошечев Л.А. (Научно-исследовательский институт постоянного тока), Мамиконянц Л.Г. (Научно-исследовательский институт электроэнергетики), Никитин О.А. (РАО «ЕЭС России»), Семенов В.А. (ЦДУ ЕЭС России).

Научный редактор — Кудинова Л.С.

Секция техники высоких напряжений, электрических аппаратов, трансформаторов

Лоханин А.К., председатель секции (Всероссийский электротехнический институт), Александров Г.Н. (С.-Петербургский государственный технический университет), Белкин Г.С. (Всероссийский электротехнический институт), Митькин Ю.А. (Ивановская государственная энергетическая академия).

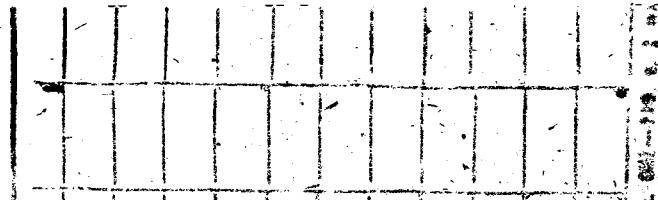
Научный редактор — Кудинова Л.С.

Секция электрических машин

Иванов-Смоленский А.В., председатель секции (Московский энергетический институт), Бут Д.А. (Московский государственный авиационный институт), Данилевич Я.Б. (Отдел (институт) электроэнергетических проблем РАН), Евсеев Б.Н., заместитель главного редактора, Шакарян Ю.Г. (Научно-исследовательский институт электроэнергетики).

Научный редактор — Евсеев Б.Н.

Секция электропривода и автоматизации технологических процессов



ий энергетический институт, ответственный электротехнический энергетический объединение «Антей»).

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

7
ИЮЛЬ
1999

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

УЧРЕДИТЕЛИ: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК (Отделение физико-технических проблем энергетики),
ФЕДЕРАЦИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ ОБЩЕСТВ

СОДЕРЖАНИЕ

Алиевский Б.Л., Мизюрин С.Р. Обобщение математического описания процессов заряда накопителей энергии в автономных электрических системах	2
Акимов Л.В., Долбня В.Т., Колотило В.И. Динамика двукратноинтегрирующей системы подчиненного регулирования скорости с наблюдателем состояния	12
Гашимов М.А. Логические методы диагностики технического состояния электрических машин	20
Смолин В.И., Топольский Д.В., Гудаев Н.Н. Об одном методе определения вращающего момента электрических машин	27
Струнский М.Г. Эффективный метод расчета электрической емкости	31
Колесников Э.В., Колесников В.Э. Применение интеграла Дюамеля для анализа проводящего слоя с магнитными потерями	40
Шувалов М.Ю., Овсиенко В.Л. Анализ структуры экструдированной изоляции высоковольтных кабелей методом видеомикроскопии	51
Данилкин Н.П., Кирьянов Д.В. К оценке энергетической возможности конвертера Солнце—Ионосфера—Земля	59

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Ларионов В.П. Молниезащита. Часть II	64
--------------------------------------	----

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

Базанов В.П. Вращающийся гироскоп как самовозбуждающийся униполярный генератор	69
--	----

ХРОНИКА

Ирина Владимировна Литкенс (К 80-летию со дня рождения)	70
Станислав Иванович Гамазин (К 60-летию со дня рождения)	71
Анатолий Дмитриевич Поздеев (Некролог)	72

CONTENTS

B.L. Aliyevskii and S.R. Mizyurin, Generalization of a Mathematical Description of Charge Processes of Energy Storage in Autonomous Electrical Systems	2
L.V. Akimov, V.T. Dolbnya and V.I. Kolotilo, Dynamics of a Double-Integration Subordinate Speed Control System Closed Via a State Observer	12
M.A. Gashimov, Logical Methods for Diagnosing Technical State of Electrical Machines	20
V.I. Smolin, D.V. Topol'skii and N.N. Gudayev, On a Method for Determining a Torque of Electrical Machines	27
M.G. Strunskii, An Effective Method for Calculating Electric Capacitance	31
E.V. Kolesnikov and V.E. Kolesnikov, Application of Duamel Integral for an Analysis a Conducting Layer with Magnetic Losses	40
M.Yu. Shuvalov and V.L. Ovsienko, Analysis of the Structure an Extruded Insulation of High-Voltage Cables by a Videomicroscopy Method	51
N.P. Danilkin and D.V. Kir'yanov, On Estimation of the Energy Capability of a Converter «Sun—Ionsphere—Earth»	59

METHODICAL MATERIALS

V.P. Larionov, Protection Against Lightning. Part II	64
--	----

NOTES AND LETTERS

V.P. Bazanov, Rotating Gyroscope as Self-Excited Unipolar Generator	69
---	----

CHRONICLE

Irina Vladimirovna Litkens (to Mark the 80th Anniversary)	70
Stanislav Ivanovich Gamazin (to Mark the 60th Anniversary)	71
Anatolii Dmitriyevich Pozdeyev (Notice Obituary)	72

Обобщение математического описания процессов заряда накопителей энергии в автономных электрических системах¹

АЛИЕВСКИЙ Б.Л., МИЗИУРИН С.Р.

Для статических и динамических накопителей энергии проведен анализ управляемых процессов заряда в автономной системе постоянного тока с ограниченным энергоресурсом. Методом вариационного исчисления получены зависимости основных переменных от времени зарядного процесса с наименьшим уровнем потребляемой электроэнергии или минимальной энергией суммарных потерь. В безразмерной форме даны обобщенные функциональные соотношения, которые целесообразно учитывать при разработке регулируемых преобразователей — источников электропитания, а также при эксплуатации накопителей энергии различных типов.

Ключевые слова: накопитель энергии, зарядный процесс, регулирование напряжения, анализ

Накопители энергии (НЭ) применяются для согласования параметров электрической системы генерирования и параметров импульсных потребителей (ИП). Для НЭ характерны режимы заряда (аккумулирования энергии), хранения энергии и разряда (отдачи энергии к ИП). Различают две группы НЭ: со статической и с динамической активной зоной [1]. Примерами НЭ первой группы служат индуктивные и емкостные накопители (ИН и ЕН), второй группы — электромеханические и механические накопители (ЭМН и МН). Любой НЭ является усилителем (обострителем) мощности, так как продолжительность зарядного режима всегда больше разрядного. Это свойство используется в автономных системах генерирования для отстройки влияния ИП на показатели качества электроэнергии, необходимые для большинства стационарных потребителей в системе. В соответствии с требованиями ИП к параметрам электроэнергии для усиления напряжения применяются ИН, для усиления тока — ЕН. При повышенных уровнях энергии в обоих этих случаях целесообразно применение ЭМН, объединяющих в своей структуре зарядный электродвигатель, инерционный МН (маховик) и разрядный генератор с импульсным отбором мощности. В автономных системах с ограниченным энергетическим ресурсом (запасом компонентов топлива, емкостью аккумуляторных батарей и

An analysis of controlled charge processes in an autonomous DC system with the limited resource is carried out for static and dynamic energy storages. Using a variational calculation method, dependencies of the main variables (subject to the duration of a charge process with the least level of consumed energy or with the minimum energy of total losses) are obtained. Generalized functional correlations which are expedient to take into account when designing controlled converters — power supply sources as well as during exploitation of energy storage units of various types are given in a dimensionless form.

Key words: energy storage, charge process, voltage control, analysis

т.п.) весьма существенна проблема энергосбережения. Она определяет актуальность решения оптимизационных задач по синтезу зарядных процессов в ЭМН, ЕН или ИН с минимальным потреблением энергии за время заряда НЭ [2, 3].

Согласно методу динамических аналогий [4, 5] переходным процессам в электрических и механических системах соответствуют сходственные дифференциальные уравнения. Данное свойство обуславливает постановку задачи по обобщению математических описаний управляемых зарядных процессов для различных типов НЭ. Регулирование напряжения зарядной цепи $u(t)$ должно обеспечить минимум потребляемой ЭМН, ЕН или ИН за время заряда t_3 электроэнергии:

$$W_3 = \int_0^{t_3} u(t) i(t) dt. \quad (1)$$

Зависимость $u = u(t)$ определяет изменение тока $i(t)$ в зарядной цепи. Интеграл (1) рассматривается в качестве функционала, минимизация которого осуществляется по методу вариационного исчисления [6]. Дополнительное условие вариационной задачи формулируется в виде

$$v(t_3) = V_3, \quad (2)$$

где V_3 — достигаемое за время t_3 заданное значение характерного для конкретного типа НЭ параметра $v(t)$ — угловой скорости ротора ЭМН, напряжения батареи конденсаторов ЕН, тока в обмотке ИН.

¹ Работа выполнена при поддержке Конкурсного центра грантов по энергетике и электротехнике при Московском энергетическом институте.

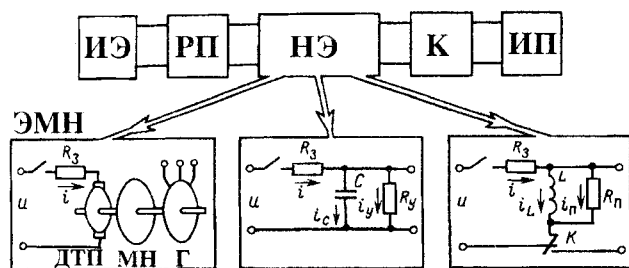


Рис. 1

На рис. 1 показана структурная схема автономной системы генерирования с НЭ, в состав которой входят следующие блоки: источник электроэнергии (ИЭ) — батарея топливных элементов, аккумуляторная батарея, газотурбинная или дизельная генераторная установка; регулируемый преобразователь (РП) — программно управляемое полупроводниковое устройство; коммутатор (К) — вентильный или электромеханический переключатель режимов НЭ; накопитель энергии (ЭМН, ЕН или ИН); импульсный потребитель (ИП) — электронная или лазерная система, электродинамический ускоритель масс, технологический агрегат для электросварки, резки или наплавки металлов, электроштамповки и других операций. Подобную структуру может иметь и автономная система аккумулирования кинетической энергии на базе инерционного МН с зарядным устройством в виде двигателя, управляемого по моменту [7]. Механическим блоком К служит муфта для соединения или разъединения МН и потребителя механической энергии: инерционного стартера и авиадвигателя; МН и двигателя транспортного средства — винта беспилотного самолета или вертолета, приводного колесного моста наземного транспортного средства и др. [1].

Проведем анализ зарядных процессов в указанных видах НЭ с единых методических позиций на базе оптимизационного подхода при учете соотношений типа (1) и (2).

Заряд электромеханического накопителя. Расчетная схема представлена на левом фрагменте рис. 1. В качестве зарядного электродвигателя применен двигатель постоянного тока (ДПТ). Разрядным генератором (Г) в ЭМН служит, например, синхронный импульсный или ударный униполярный генератор. Переходные процессы ДПТ описываются системой уравнений

$$u = c_e \Phi \Omega + R_3 i + (L di/dt); \quad (3)$$

$$c_e \Phi i - k_M \Omega = J d\Omega/dt. \quad (4)$$

Эквивалентные значения сопротивления R_3 и индуктивности L зарядной цепи суммируют параметры ИЭ и якоря ДПТ. Коэффициент c_e определяется параметрами обмотки якоря и маг-

нитной системы ДПТ. Магнитный поток Φ создается в ДПТ постоянным магнитом индуктора. Механическое сопротивление k_M учитывает потери трения в подшипниковых опорах ЭМН и газодинамические потери МН (маховика), заключенного в кожух. Приведенный момент инерции J характеризует динамические качества ротора ЭМН при изменении угловой скорости Ω . Переменные u , i , Ω зависят от времени t , параметры R_3 , L , Φ , k_M , J приняты постоянными. Магнитные потери ДПТ и момент сопротивления ЭМН при неподвижном роторе не учитываются.

Необходимое условие существования экстремума функционала в (1) требует, чтобы подынтегральная функция $P(\Omega, \Omega', \Omega'', t) = u(t)i(t)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению Эйлера—Пуассона [6], которое в рассматриваемой задаче с учетом (3) и (4) преобразуется по изложенной в [2] методике к эквивалентному уравнению

$$\Omega'' - m^2 \Omega = 0, \quad (5)$$

где $\Omega'' = d^2\Omega/dt^2$; $m^2 = \tau_M^{-1} \tau_{ЭМ}^{-1} + \tau_M^{-2}$; $\tau_M = J/k_M$ и $\tau_{ЭМ} = JR_3/(c_e \Phi)^2$ — механическая и электромеханическая постоянные времени ЭМН.

Для определения оптимизационных зависимостей $u(t)$ и $i(t)$ требуется решить уравнение (5) при ограничительных условиях $\Omega(0) = \Omega_0$ и $\Omega(t_3) = \Omega_3$, причем Ω_0 , Ω_3 — начальное и конечное значения угловой скорости ротора в режиме заряда ЭМН; t_3 — время заряда. Решение (5) получается в форме

$$\Omega = \Omega_3 \frac{\text{sh } mt}{\text{sh } mt_3} + \Omega_0 \frac{\text{sh } m(t_3 - t)}{\text{sh } mt_3}. \quad (6)$$

В [2] проверены достаточные условия достижения экстремума W_3 на кривой $\Omega(t)$ типа (6) и установлен вид экстремума — сильный минимум согласно [6].

Зарядный ток ЭМН на основании (4), (6) составляет $i(t) = i_3(t) - i_0(t)$, причем

$$i_3(t) = \frac{I_3}{\text{sh } mt_3} \left(\tau_{ЭМ} m \text{ch } mt + \frac{\tau_{ЭМ}}{\tau_M} \text{sh } mt \right); \quad (7)$$

$$i_0(t) = \frac{I_0}{\text{sh } mt_3} \left[\tau_{ЭМ} m \text{ch } m(t_3 - t) - \frac{\tau_{ЭМ}}{\tau_M} \text{sh } m(t_3 - t) \right], \quad (8)$$

где $I_3 = U_3/R_3$; $I_0 = U_0/R_3$; $U_3 = c_e \Phi \Omega_3$, $U_0 = c_e \Phi \Omega_0$.

В соответствии с (6) динамический момент ЭМН

$$M_J = J \frac{d\Omega}{dt} = M_{М.3} \tau_M m \frac{\text{ch } mt}{\text{sh } mt_3} - M_{М.0} \tau_M m \frac{\text{ch } m(t_3 - t)}{\text{sh } mt_3}; \quad (9)$$

момент потерь трения

$$M_M = k_M \Omega = M_{М.3} \frac{\text{sh } mt}{\text{sh } mt_3} + M_{М.0} \frac{\text{sh } m(t_3 - t)}{\text{sh } mt_3}, \quad (10)$$

где $M_{м.3} = k_m \Omega_3$, $M_{м.0} = k_m \Omega_0$.

Примем в целях упрощения нулевое начальное условие $\Omega(0) = \Omega_0 = 0$. При этом угловая скорость

$$\Omega(t) = \Omega_3 \operatorname{sh} mt / \operatorname{sh} mt_3, \quad (11)$$

а ток $i(t) = i_3(t)$ изменяется согласно (7). С учетом соотношений (3), (7) и (11) напряжение питания ЭМН следует регулировать по закону

$$u(t) = \frac{U_3}{\operatorname{sh} mt_3} \left[\left(1 + \frac{\tau_{эм}}{\tau_m} + \tau_m \tau m^2 \right) \operatorname{sh} mt + \left(1 + \frac{\tau}{\tau_m} \right) \tau_{эм} m \operatorname{ch} mt \right],$$

где $\tau = L/R_3$ — электромагнитная постоянная времени зарядной цепи.

Заметим, что $\tau_m \tau m^2 = (\tau/\tau_m) + \tau/\tau_{эм}$ и на практике $\tau/\tau_m \ll 1$, $\tau/\tau_{эм} \ll 1$, поэтому напряжение питания

$$u(t) \approx \frac{U_3}{\operatorname{sh} mt_3} \left[\left(1 + \frac{\tau_{эм}}{\tau_m} \right) \operatorname{sh} mt + \tau_{эм} m \operatorname{ch} mt \right]. \quad (12)$$

Для уменьшения потерь трения в высококачественных ЭМН применяют магнитные или газовые подшипниковые опоры ротора, снижают давление во внутренней полости кожуха МН посредством откачивания воздуха (вакуумирования) или заполнения этой полости легким газом (водородом, гелием) под небольшим избыточным давлением. В данных конструкциях можно пренебрегать действием момента M_m (10), считая $k_m = 0$. При этом $\tau_m \rightarrow \infty$, параметр $m^2 = 0$, а уравнение (5) приобретает вид $\Omega'' = 0$. Решение такого уравнения с учетом условий $\Omega(0) = \Omega_0$, $\Omega(t_3) = \Omega_3$ дает следующие зависимости:

$$\Omega(t) = \Omega_0 + [(\Omega_3 - \Omega_0)t/t_3]; \quad (13)$$

$$i = (I_3 - I_0) \tau_{эм}/t_3 = \text{const}; \quad (14)$$

$$u(t) = U_0 + [(U_3 - U_0)(\tau_{эм} + t)/t_3], \quad (15)$$

которые при нулевых начальных условиях ($\Omega_0 = 0$, $U_0 = 0$, $I_0 = 0$) соответственно упрощаются. Совпадающие с (13)–(15) выражения получают и посредством предельных переходов с раскрытием неопределенностей для $m \rightarrow 0$ из уравнений (6)–(8). Для цепи с индуктивностью условие (14) может быть технически реализовано только приближенно с учетом неравенства $\tau \ll \tau_{эм}$. В качестве источника питания, обеспечивающего совместное выполнение соотношений (14), (15) рекомендуется применять индуктивно-емкостный преобразователь ИЕП [3].

Покажем, что при решении вариационных задач для процесса заряда с использованием функционала

$$W_d = \int_0^{t_3} (R_3 i^2 + k_m \Omega^2) dt \quad (16)$$

получаются результаты, совпадающие с (6)–(10) или (13)–(15). Интеграл (16) определяет суммарную энергию диссипации за время t_3 при заряде ЭМН. На основании (3), (4) и (16) функционал (1) преобразуется в сумму двух интегралов:

$$W_э = W_d + \int_0^{t_3} (Lii' + J\Omega\Omega') dt.$$

Заключенная в скобки подынтегральная функция представляет собой производную по времени от суммы магнитной и кинетической энергий, т.е. мощность

$$P = \frac{d}{dt} \left(\frac{Li^2}{2} + \frac{J\Omega^2}{2} \right).$$

Она приводит к интегралу от полного дифференциала, который равен постоянной, зависящей исключительно от пределов интегрирования. Следовательно, в общем виде установлена возможность минимизации потребляемой от ИЭ энергии $W_э$ посредством нахождения экстремали только для W_d . Данный вывод распространяется на анализ зарядных процессов всех рассматриваемых нами разновидностей НЭ.

В случаях малых значений $k_m \neq 0$ квазиоптимальный процесс заряда ЭМН реализуется с помощью РП типа источника тока, имеющего ВАХ $i = I = \text{const}$ при $u = \text{var}$. Из (4) получается уравнение

$$\Omega' + (\Omega/\tau_m) = c_e \Phi I / J, \quad (17)$$

решение которого при $\Omega(0) = 0$ имеет вид

$$\Omega(t) = \frac{R_3 I \tau_m}{c_e \Phi \tau_{эм}} (1 - e^{-t/\tau_m}). \quad (18)$$

Для больших значений $\tau_m = J/k_m < \infty$ разложение в степенной ряд экспоненциальной функции из (18) дает

$$1 - e^{-t/\tau_m} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{t^\nu}{\nu! \tau_m^\nu} \approx \frac{t}{\tau_m}. \quad (19)$$

Введя обозначения $U_\pi = R_3 I$, $\Omega_\pi = U_\pi / c_e \Phi$, на основании (18), (19) находим

$$\Omega(t) = U_\pi t / c_e \Phi \tau_{эм} = \Omega_\pi t / \tau_{эм}. \quad (20)$$

С учетом равенств $U_3 = c_e \Phi \Omega_3$ и $I_3 = U_3 / R_3$ необходимое для достижения заданного уровня $\Omega = \Omega_3$ за время t_3 значение неизменяющегося тока РП составляет

$$I = I_3 \tau_{эм} / t_3. \quad (21)$$

Подставив (20), (21) в (3), получим для напряжения РП зависимость

$$u(t) = U_3(t + \tau_{эм})/\tau_3.$$

Для рассматриваемого процесса заряда с током $i = I = \text{const}$ подстановка (20), (21) в (16) приводит к выражению

$$W_d = (R_3 I_3^2 \tau_{эм}^2 / \tau_3) + k_m \Omega_3^2 \tau_3 / 3. \quad (22)$$

Исследование (22) на экстремум позволяет найти оптимальное время заряда

$$t_{30} = \sqrt{3\tau_m \tau_{эм}}, \quad (23)$$

которому соответствуют минимум энергии диссипации

$$W_{\text{dmin}} = 2R_3 I_3^2 \tau_{эм} \sqrt{\tau_{эм} / 3\tau_m} \quad (24)$$

и значение тока РП по (21)

$$I = I_3 / \sqrt{3\tau_m / \tau_{эм}}. \quad (25)$$

Поскольку $k_m \Omega_3^2 / R_3 I_3^2 = \tau_{эм} / \tau_m$, то согласно (22), (23) при $t_3 = t_{30}$ энергии электрических и механических потерь в ЭМН одинаковы и составляют по $0,5W_{\text{dmin}}$ из (24). Интегрирование (16) в случае $i(0) = 0$, $\Omega(0) = 0$ с подстановкой $i(t)$ по (7) и $\Omega(t)$ по (11) дает для $W_d(t_3)$ соотношение

$$W_d = R_3 I_3^2 \tau_{эм} \left(\frac{\tau_{эм}}{\tau_m} + \frac{\tau_{эм}}{\tau_m} \sqrt{1 + \frac{\tau_m}{\tau_{эм}}} \text{cth} m t_3 \right),$$

из которого следует, что при возрастании времени заряда снижается W_d . В пределе для $t_3 \rightarrow \infty$ получается наименьшее значение энергии потерь:

$$W_{d0} = R_3 I_3^2 \frac{\tau_{эм}^2}{\tau_m} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\tau_m}{\tau_{эм}}} \right).$$

Если механическое сопротивление имеет достаточно малое значение $k_m \neq 0$, то $\tau_m \gg \tau_{эм}$ и

$$W_{d01} = R_3 I_3^2 \tau_{эм} \sqrt{\tau_{эм} / \tau_m}.$$

Разделив последнее выражение на (24), получим $W_{d01} / W_{\text{dmin}} \approx 0,85$. Таким образом, в случаях малого k_m процесс заряда ЭМН при токе $I = \text{const}$ по (25) приближается к оптимальному для $t_3 = t_{30}$. Однако при $t_3 > t_{30}$ заряд следует проводить согласно зависимостям (7), (11), (12). Подобный же результат установлен в [3] применительно к заряду ЕН. В целом между оптимизационными соотношениями ЭМН и ЕН существует четкая аналогия, которую можно использовать при электрическом моделировании.

Заряд емкостного накопителя. Расчетная схема показана на среднем фрагменте рис. 1. Для ана-

лиза исходными являются соотношения [3]:

$$u = R_3 i + u_C; \quad i = i_C + i_y;$$

$$i_C = C du_C / dt; \quad i_y = u_C / R_y, \quad (26)$$

где u , i и u_C , i_C — напряжения и токи выхода РП и емкости C батареи конденсаторов; R_3 , R_y — сопротивления цепей заряда и эквивалентного тока i_y , учитывающего эффекты утечки и поляризации диэлектриков.

В автономной системе заряд ЕН может производиться при его питании от вентильного генератора (ВГ) с неуправляемым выпрямителем. Регулирование напряжения осуществляется при варьировании тока возбуждения ВГ. В этом случае в состав мощности $p_y(t) = R_y i_y^2 = u_C^2 / R_y$, выделяющейся на сопротивлении R_y (рис. 1), можно условно включить и магнитные потери ВГ. Их мощность $p_{\text{mag}}(t)$ тоже пропорциональна $u_C^2(t)$ на интервале t_3 (соответствующий анализ проведен в [1]).

Применительно к ЕН условие (2) имеет вид $u_C(t_3) = U_{C3}$, а уравнение Эйлера для функционала (1) преобразуется к эквивалентному уравнению

$$u_C'' - m^2 u_C = 0, \quad (27)$$

в котором $m^2 = \tau_y^{-2} + \tau_y^{-1} \tau_3^{-1}$; $\tau_y = R_y C$, $\tau_3 = R_3 C$.

Решение (27) при начальном условии $u_C(0) = U_{C0}$ с учетом (2) и (26) позволяет получить следующую группу зависимостей:

$$u_C(t) = U_{C3} \frac{\text{sh} m t}{\text{sh} m t_3} + U_{C0} \frac{\text{sh} m (t_3 - t)}{\text{sh} m t_3}; \quad (28)$$

$$i_C(t) = I_{C3} \tau_3 m \frac{\text{ch} m t}{\text{sh} m t_3} - I_{C0} \tau_3 m \frac{\text{ch} m (t_3 - t)}{\text{sh} m t_3}; \quad (29)$$

$$i(t) = \frac{I_{C3}}{\text{sh} m t_3} \left(\tau_3 m \text{ch} m t + \frac{\tau_3}{\tau_y} \text{sh} m t \right) - \frac{I_{C0}}{\text{sh} m t_3} \times \\ \times \left[\tau_3 m \text{ch} m (t_3 - t) - \frac{\tau_3}{\tau_y} \text{sh} m (t_3 - t) \right], \quad (30)$$

где $I_{C3} = U_{C3} / R_3$, $I_{C0} = U_{C0} / R_3$.

С учетом значений $I_y = U_{C3} / R_y$, $I_{y0} = U_{C0} / R_y$ и зависимости $u_C(t)$ по (28) ток утечки составляет

$$i_y(t) = \frac{u_C(t)}{R_y} = I_y \frac{\text{sh} m t}{\text{sh} m t_3} + I_{y0} \frac{\text{sh} m (t_3 - t)}{\text{sh} m t_3}. \quad (31)$$

При упрощающем условии $u_C(0) = 0$ напряжение РП

$$u(t) = \frac{U_{C3}}{\text{sh} m t_3} \left[\left(1 + \frac{\tau_3}{\tau_y} \right) \text{sh} m t + \tau_3 m \text{ch} m t \right]. \quad (32)$$

Если сопротивление утечки велико и можно принять $R_y \rightarrow \infty$, то $\tau_y \rightarrow \infty$, $m^2 = 0$, а уравнение (27) приобретает вид $u_C'' = 0$. Решение этого уравнения при условиях $u_C(0) = U_{C0}$, $u_C(t_3) = U_{C0}$ приводит к зависимостям:

$$u_C(t) = U_{C0} + [(U_{C3} - U_{C0})t/t_3]; \quad (33)$$

$$i = i_C = (I_{C3} - I_{C0})\tau_3/t_3 = \text{const}; \quad (34)$$

$$u(t) = U_{C0} + [(U_{C3} - U_{C0})(\tau_3 + t)/t_3]. \quad (35)$$

Совпадающие с (33)–(35) выражения получаются и посредством предельного перехода при $m \rightarrow 0$ из уравнений (28)–(30).

В случае больших, но конечных значений R_y и $\tau_y = R_y C$ заряд ЕН можно осуществлять от РП с током выхода $i = I = \text{const}$. Согласно [3] при учете соотношений $1 - \exp(-t/\tau_y) \approx t/\tau_y$, $u_C(0) = 0$ напряжение $u_C = It/C$.

Для $i = I$, $u_C(t_3) = U_{C3}$ напряжения и ток i_y по (26):

$$u(t) = U_3 [1 + (t/\tau_3)] = U_{C3}(\tau_3 + t)/t_3;$$

$$u_C(t) = U_3 t/\tau_3 = U_{C3} t/t_3; \quad U_3 = R_3 I; \quad (36)$$

$$i_y(t) = It/\tau_y. \quad (37)$$

Энергия диссипации в ЕН

$$W_d = \int_0^{t_3} (R_3 I^2 + R_y i_y^2) dt \quad (38)$$

достигает минимума, если t_3 равно оптимальному значению [3]

$$t_{30} = \sqrt{3\tau_y \tau_3}. \quad (39)$$

Интегрирование (38) с подстановкой i_y по (37) и $t_3 = t_{30}$ по (39) дает минимальное значение энергии потерь

$$W_{d\min} = 2R_3 I_{C3}^2 \tau_3 \sqrt{\tau_3/3\tau_y}; \quad I_{C3} = U_{C3}/R_3. \quad (40)$$

На основании (36), (39) заданное напряжение

$$U_{C3} = u_C(t_{30}) = U_3 \sqrt{3\tau_y \tau_3}$$

получается при $W_d = W_{d\min}$, если ток зарядной цепи

$$I = U_{C3} \tau_3 / R_3 t_{30} = I_{C3} \tau_3 / \sqrt{3\tau_y \tau_3}. \quad (41)$$

Зарядный процесс при $i = I = \text{const}$ по (36), (37) отличается от оптимального процесса по (33)–(35), но приближается к таковому согласно данным [3], если $t_3 = t_{30}$.

Сопоставление итогов проведенного анализа зарядных процессов ЭМН и ЕН показывает, что имеет место аналогия основных соотношений (5) и (27); (6) и (28); (7), (8) и (30); (9) и (29); (10) и (31); (13) и (33); (14) и (34); (15) и (35); (16) и (38); (23) и (39); (24) и (40).

Заряд индуктивного накопителя. Расчетная схема представлена на правом фрагменте рис. 1. Современные ИН выполняются без ферромаг-

нитопровода [1] с обмотками из провода большого сечения прямоугольной или круговой формы. Эквивалентное сопротивление $R_3 = R_{об} + R_{доп}$ складывается из сопротивления обмотки $R_{об}$ и дополнительного сопротивления зарядной цепи $R_{доп}$. Параллельное сопротивление R_{Π} введено для приближенного учета мощности потерь из-за явлений коронного и поверхностного разрядов, которые могут иметь место в ИН высокого напряжения. Сильная концентрация электрического поля в окрестности крайних витков обмотки способствует возникновению коронного разряда на конструктивные элементы ИН. Большая разность потенциалов по высоте обмотки приводит к поверхностному разряду. В конструкциях ИН со стальным сердечником [8] R_{Π} учитывает вихревую составляющую мощности магнитных потерь для апериодического процесса заряда. Если обмотка ИН выполнена из сверхпроводникового (СП) композита, то $R_{об} = 0$ при соответствующей температуре криоагента. В СПИН R_{Π} приближенно учитывает мощность вихревых и кооперативных потерь [9], возникающих в композите при изменении тока заряда.

Для анализа зарядных процессов ИН исходными служат следующие соотношения:

$$u = R_3 i + u_L; \quad u_L = L di_L/dt; \quad i = i_L + i_{\Pi};$$

$$i_{\Pi} = u_L/R_{\Pi}, \quad (42)$$

где u , i и u_L , i_L — напряжения и токи выхода РП и индуктивности L накопителя; i_{Π} — ток параллельной цепи.

Условие (2) для ИН формулируется как $i_L(t_3) = I_{L3}$, начальное условие принимается нулевым (при $t=0$ ток $i_L=0$).

На основании (42) находим подынтегральную функцию для (1) и соответствующее уравнение Эйлера, которое преобразуется к эквивалентной форме:

$$i_L'' - m^2 i_L = 0, \quad (43)$$

где $m^2 = (\tau_{\Pi}^2 + \tau_{\Pi} \tau_3)^{-1}$, $\tau_{\Pi} = L/R_{\Pi}$, $\tau_3 = L/R_3$.

Решение (43) при условиях $i_L(0) = 0$, $i_L(t_3) = I_{L3}$ дает зависимости:

$$i_L(t) = I_{L3} \text{sh } mt / \text{sh } mt_3; \quad (44)$$

$$u_L(t) = U_{L3} \tau_3 m \text{ch } mt / \text{sh } mt_3; \quad (45)$$

$$i_{\Pi}(t) = I_{\Pi} \tau_3 m \text{ch } mt / \text{sh } mt_3; \quad (46)$$

$$i(t) = I_{L3} (\tau_{\Pi} m \text{ch } mt + \text{sh } mt) / \text{sh } mt_3; \quad (47)$$

$$u(t) = U_{L3} [\text{sh } mt + (\tau_{\Pi} + \tau_3) m \text{ch } mt] / \text{sh } mt_3, \quad (48)$$

где $I_{L3} = U_{L3}/R_3$, $I_{\Pi} = U_{L3}/R_{\Pi}$.

Проведем анализ зарядного процесса СПИН.

Минимизация W_d полезна в целях экономии дорогостоящего ожиженного криогента: объем испаряющегося гелия пропорционален уровню тепловыделения W_d . Если в СПИН с $R_{об}=0$ сопротивление $R_{доп}$ незначительно, то допустимо принять $R_3=0$. В этом случае $\tau_3 \rightarrow \infty$, $m^2=0$, и на основании (42) с учетом предельного перехода при $m \rightarrow 0$ в (44) получаются выражения:

$$i_L = I_{L3} t / t_3; \quad I = I_{L3} (\tau_n + t) / t_3;$$

$$u = u_L = u_n = U_{п.з} \tau_n / t_3 = U = \text{const}, \quad (49)$$

причем $U_{п.з} = R_n I_{L3}$, $i_n = I_{L3} \tau_n / t_3$.

На практике заряд СПИН от РП с $u = U = \text{const}$ можно осуществлять также при малых значениях сопротивления $R_3 = R_{доп} \neq 0$. Согласно (42) находим при $u = U$, $i_L(0) = 0$ зависимость

$$I_L = I \{ 1 - \exp[-t/(\tau_n + \tau_3)] \}, \quad I = U/R_3. \quad (50)$$

С учетом достаточно больших значений $\tau_3 = L/R_{доп}$ на основании (42) и разложения (50) в степенной ряд типа (19) находим

$$i_L = It/(\tau_3 + \tau_n); \quad i_n = I\tau_n/(\tau_3 + \tau_n);$$

$$I = I(\tau_n + t)/(\tau_3 + \tau_n).$$

Поскольку $i_L(t_3) = I_{L3}$, то для $\tau_3 \gg \tau$

$$i_L = I_{L3} t / t_3; \quad i_n = I_{L3} \tau_n / t_3; \quad I = I_{L3} (\tau_n + t) / t_3. \quad (51)$$

Необходимое для получения тока $i_L(t_3) = I_{L3}$ напряжение питания СПИН равно

$$U = U_{L3} (\tau_3 + \tau_n) / t_3 \approx U_{L3} \tau_3 / t_3, \quad U_{L3} = R_3 I_{L3}. \quad (52)$$

Ток I_{L3} не должен превышать критического значения, которое недопустимо для обмоточного провода СПИН при максимальной индукции $B_{\max} = \beta I_{L3}$ на внутренней поверхности обмотки (β — коэффициент пропорциональности). Энергия потерь в СПИН с учетом (51) и соотношения $R_n/R_3 = \tau_3/\tau_n$ определяется выражением

$$\begin{aligned} W_d &= \int_0^{t_3} (R_3 i^2 + R_n i_n^2) dt = \\ &= R_3 I_{L3}^2 \left(\tau_n + \frac{t_3}{3} + \frac{1}{m^2 t_3} \right). \end{aligned} \quad (53)$$

Следуя методике [8], по (53) находим время $t_3 = t_{30}$ и соответствующий ему минимум энергии диссипации:

$$t_{30} = \sqrt{3/m^2} \approx \sqrt{3\tau_3 \tau_n};$$

$$W_{\text{дmin}} \approx R_3 I_{L3}^2 (\tau_n + 2\sqrt{\tau_3 \tau_n}/3). \quad (54)$$

За время $t_3 = t_{30}$ на сопротивлениях R_3 и R_n выделяются равные части энергии дисси-

пации (54):

$$0,5W_{\text{дmin}} \approx R_3 I_{L3}^2 \sqrt{\tau_3 \tau_n}/3. \quad (55)$$

Последнее выражение соответствует уровню энергии потерь для оптимального процесса заряда ИН при $t_3 = t_{30}$ вследствие сходства соотношений токов i , i_L , i_n по (49) и (51). Таким образом, заряд ИН при $R_3 \neq 0$ и $U = \text{const}$ приближается к оптимальному, если $t_3 = t_{30}$.

Рассмотрим схему ИН без учета тока i_n , т.е. при $R_n \rightarrow \infty$, $\tau_n = 0$, $m \rightarrow \infty$, когда (43) превращается в уравнение $i_L = i = 0$. В этой трактовке вариационная задача (1), (2) не имеет решений в классе непрерывных функций [6], как и задача для функционала типа W_d . Попытка предельного перехода при $m \rightarrow \infty$ в (44)–(48) тоже не приводит к решению.

Пользуясь дуальной аналогией между ИН и ЕН, при $R_n \rightarrow \infty$ примем с учетом (34) в процессе заряда ИН напряжение $u_L = U_L = \text{const}$. На основании (42) и условий $i_L(0) = 0$, $i_L(t_3) = I_{L3}$ находим

$$i(t) = i_L(t) = I_{L3} t / t_3; \quad u(t) = U_{L3} (\tau_3 + t) / t_3;$$

$$u_L = U_L = U_{L3} \tau_3 / t_3, \quad U_{L3} = R_3 I_{L3}. \quad (56)$$

Выделяющаяся за время t_3 на сопротивлении R_3 энергия

$$W_d = \int_0^{t_3} R_3 i^2(t) dt = R_3 I_{L3}^2 t_3 / 3 \quad (57)$$

соответствует уровню энергии потерь по (55), если время заряда выбрать равным t_{30} из (54). Таким образом, и в случае $R_n \rightarrow \infty$, $u_L = U_L$ заряд ИН можно приблизить к оптимальному процессу. Выбирая t_3 , следует учитывать требование усиления напряжения при осуществлении разряда ИН.

Из сопоставления результатов анализа ИН и ЕН (при нулевых начальных условиях) является дуальная аналогия основных расчетных соотношений (28) и (44), (29) и (45), (30) и (48), (33)–(35) и (49), а также аналогия (39), (40) и (54).

О заряде механического накопителя. Уравнение вращательного движения ротора МН имеет вид

$$M = k_m \Omega + M_J, \quad (58)$$

где M — внешний момент, создаваемый на валу МН приводным (зарядным) двигателем; $M_J = J d\Omega/dt$ — динамический момент; J — момент инерции ротора МН; k_m — механическое сопротивление (момент M_0 сопротивления неподвижного ротора не учитывается, что допустимо для ряда конструктивных исполнений МН).

Следуя аналогии уравнений для напряжения $u(t)$ ИН (42) и момента $M(t)$ (58), принимаем на основании (56) $M_J = \text{const}$ в зарядном процессе МН. С учетом начального условия $\Omega(0) = 0$ получаем зависимости:

$$\Omega(t) = M_J t / J; \quad M(t) = M_J [1 + (t/\tau_M)]; \quad \tau_M = J/k_M. \quad (59)$$

Согласно условию $\Omega(t_3) = \Omega_3$ из (59) находим

$$\Omega(t) = \Omega_3 t / t_3; \quad M(t) = M_{M.3} (\tau_M + t) / t_3; \\ M_J = J\Omega_3 / t_3; \quad M_3 = k_M \Omega_3 \quad (60)$$

и энергию диссипации вследствие трения

$$W_D = \int_0^{t_3} k_M \Omega^2(t) dt = k_M \Omega_3^2 t_3 / 3 = M_{M.3} \Omega_3 t_3 / 3. \quad (61)$$

Из проведенного анализа следует аналогия сходственных выражений (56) и (60), (57) и (61), приближающихся к оптимизационным зависимостям. Выбирая t_3 , надо учитывать требование усиления мощности и момента при переводе МН в разрядный режим.

Обобщение анализа накопителей энергии. На основании оптимизационных соотношений (11), (28) при $U_{C0} = 0$ и (44) можно записать обобщенное выражение характерной зависимой переменной регулируемых зарядных процессов НЭ разных типов:

$$v(t) = V_3 \text{sh } mt / \text{sh } mt_3, \quad (62)$$

где $v(t)$, V_3 соответствуют: $\Omega(t)$, Ω_3 для ЭМН; $u_C(t)$, U_{C3} для ЕН; $i_L(t)$, I_{L3} для ИН.

Зависимость (62) является уравнением экстремали, вдоль которой достигается минимум энергетического функционала (1). Выполнение достаточных условий получения такого экстремума проверено в [2] при решении подобной задачи вариационного исчисления. Следуя разработанной для ЕН методике [3], введем безразмерный параметр $\alpha = mt_3$ и относительные значения переменных $v_* = v/V_3$, $t_* = t/t_3$. Параметрическое семейство функций $v_* = v_*(t_*)$ по α построено на рис. 2 в результате расчетов, выполненных согласно найденному из (62) соотношению

$$v_* = \text{sh } \alpha t_* / \text{sh } \alpha. \quad (63)$$

График при $\alpha = 0$ представляет собой прямуюлинейную зависимость $v_* = t_*$, которая соответствует выражениям: (13) при $\Omega_0 = 0$; (33) при $U_{C0} = 0$; (49) $i_L(t)$. Этот график характеризует режимы заряда НЭ в предельных случаях $m = \alpha/t_3 = 0$, когда $k_M \Omega^2 = 0$ в ЭМН, $R_y i_y^2 = 0$ в ЕН или $R_3 i^2 = 0$ в ИН. Образованная осью абсцисс и правой границей сетки ломаная при

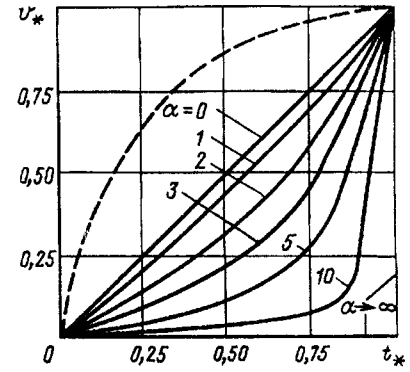


Рис. 2

$\alpha \rightarrow \infty$ (рис. 2) характеризует другие предельные состояния: $k_M \rightarrow \infty$ или $R_3 \rightarrow \infty$ в ЭМН; $R_y \rightarrow 0$ или $R_3 \rightarrow 0$ в ЕН; $R_{II} \rightarrow \infty$ или $R_3 \rightarrow \infty$ в ИН. В промежутке между этими пределами располагаются все остальные зависимости (63) при $0 < \alpha < \infty$.

Рассмотрим нерегулируемые зарядные процессы (НЗП) различных НЭ при напряжении питания $u = U = \text{const}$ в целях сопоставления энергий диссипации в НЗП с указанными выше оптимизационными значениями W_{D0} и оценки эффективности регулирования $u(t)$.

Анализ ЭМН. Полагаем электромагнитную постоянную времени $\tau = L/R_3 \rightarrow 0$. При условии $\Omega(0) = 0$ по (3), (4) находим:

$$\Omega(t) = \left(1 + \frac{\tau_{ЭМ}}{\tau_M}\right)^{-1} \Omega_x \left[1 - e^{-t(\tau_M^{-1} + \tau_{ЭМ}^{-1})}\right];$$

$$i(t) = I \left\{1 - \frac{\tau_M}{\tau_M + \tau_{ЭМ}} \left[1 - e^{-t(\tau_M^{-1} + \tau_{ЭМ}^{-1})}\right]\right\},$$

где $\Omega_x = U/c_e \Phi$; $I = U/R_3$.

Для конструкций ЭМН с малым значением $k_M \neq 0$ справедливо $\tau_M \gg \tau_{ЭМ}$, поэтому на основании условия $\Omega(t_3) = \Omega_3$ устанавливаем приближенные соотношения $U \approx U_3$, $I \approx I_3$ и

$$\Omega(t) \approx \Omega_3 (1 - e^{-t/\tau_{ЭМ}});$$

$$i(t) \approx I_3 e^{-t/\tau_{ЭМ}}. \quad (64)$$

Используя (64) и равенство $k_M \Omega_3^2 = R_3 I_3^2 \tau_{ЭМ} / \tau_M$, рассчитываем энергию диссипации за время $t_3 = 4\tau_{ЭМ}$ в НЗП:

$$W_{Д.Н} = \int_0^{t_3} (R_3 i^2 + k_M \Omega^2) dt \approx \\ \approx R_3 I_3^2 \tau_{ЭМ} [0,5 + (2,5\tau_{ЭМ}/\tau_M)].$$

Если принять $\tau_M/\tau_{ЭМ} = 10$, то $W_{Д.Н} = 0,75 R_3 I_3^2 \tau_{ЭМ}$, $W_{D0} = 0,43 R_3 I_3^2 \tau_{ЭМ}$, следовательно, $W_{Д.Н}/W_{D0} = 1,74$.

Анализ ЕН. Для НЗП при условии $u_C(0) = 0$ на основании (26) получаем

$$u_C(t) = \left(1 + \frac{\tau_3}{\tau_y}\right)^{-1} U \left[1 - e^{-t(\tau_3^{-1} + \tau_y^{-1})}\right]. \quad (65)$$

С учетом соотношения $\tau_y \gg \tau_3$, значения $u_C(t_3) = U_{C3}$ и равенств $R_y = R_3 \tau_y / \tau_3$, $I_y = I_{C3} \tau_3 / \tau_y$ находим по (26), (65):

$$u_C \approx U_{C3} (1 - e^{-t/\tau_3}); \quad i_y \approx I_{C3} \frac{\tau_3}{\tau_y} (1 - e^{-t/\tau_3});$$

$$i \approx I_{C3} \left(\frac{\tau_3}{\tau_y} + e^{-t/\tau_3} \right).$$

Энергия диссипации в НЗП длительностью $t_3 = 4\tau_3$ составляет

$$W_{д.н} = \int_0^{t_3} (R_3 i^2 + R_y i_y^2) dt \approx \\ \approx R_3 I_{C3}^2 \tau_3 \left(0,5 + 4 \frac{\tau_3}{\tau_y} \right).$$

Заметим, что без учета тока утечки ($\tau_y = R_y C \rightarrow \infty$) энергия $W_{д.н}$ равняется энергии $W_3 = 0,5 C U_{C3}^2$ заряженного ЕН или половине потребляемой за время t_3 энергии $W_3 = W_3 + W_{д.н}$, а КПД в НЗП не превышает 0,5 независимо от значения R_3 .

Для регулируемого зарядного процесса ЕН оптимизационное выражение энергии потерь из [3] можно представить в виде

$$W_d = R_3 I_{C3}^2 \tau_3 \left(\frac{\tau_3}{\tau_y} + \frac{\tau_3}{\tau_y} \sqrt{1 + \frac{\tau_y}{\tau_3}} \operatorname{cth} m t_3 \right).$$

При $t_3 \rightarrow \infty$ достигается наименьший уровень этой энергии:

$$W_{д0} = R_3 I_{C3}^2 \frac{\tau_3^2}{\tau_y} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\tau_y}{\tau_3}} \right).$$

Полагая $\tau_y / \tau_3 = 10$, получаем $W_{д0} \approx 0,43 R_3 I_{C3}^2 \tau_3$, $W_{д.н} \approx 0,9 R_3 I_{C3}^2 \tau_3$, поэтому $W_{д.н} / W_{д0} \approx 2,1$.

Анализ ИН. Принимая $i_L(0) = 0$, согласно (42) находим

$$i_L(t) = I_L \left[1 - e^{-t/(\tau_3 + \tau_n)} \right].$$

Учитывая соотношения $\tau_n \ll \tau_3$, $i_L(t_3) = I_{L3}$, $R_n = R_3 \tau_3 / \tau_n$, можем записать:

$$i_L \approx I_{L3} \left(1 - e^{-t/\tau_3} \right); \quad i_n \approx I_{L3} \frac{\tau_n}{\tau_3} e^{-t/\tau_3}; \quad i \approx i_L.$$

За время $t_3 = 4\tau_3$ в НЗП выделяется энергия диссипации

$$W_{д.н} = \int_0^{t_3} (R_3 i^2 + R_n i_n^2) dt \approx 2,5 R_3 I_{L3}^2 \tau_3 \left(1 + 0,2 \frac{\tau_n}{\tau_3} \right).$$

Заметим, что без учета тока i_n (при $\tau_n = L/R_n \rightarrow 0$) энергия $W_{д.н}$ соответствует $2,5 L I_{L3}^2$, что

в 5 раз больше энергии заряженного ИН и составляет 0,83 потребляемой за время t_3 энергии W_3 независимо от значения R_3 . Таким образом, КПД в НЗП не превосходит 0,17. Энергетически НЗП в ИН менее эффективен, чем в ЕН.

Применительно к регулируемому заряду ИН в [8] выведено оптимизационное соотношение энергии потерь:

$$W_d = R_3 I_{L3}^2 (\tau_n + m^{-1} \operatorname{cth} m t_3).$$

Эта энергия при $t_3 \rightarrow \infty$ имеет наименьшее значение:

$$W_{д0} = R_3 I_{L3}^2 \tau_n \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\tau_3}{\tau_n}} \right).$$

Если принять $\tau_3 / \tau_n = 10$, то $W_{д.н} = 2,55 R_3 I_{L3}^2 \tau_3$, $W_{д0} = 0,43 R_3 I_{L3}^2 \tau_3$, следовательно, в данном случае $W_{д.н} / W_{д0} \approx 5,8$.

Обобщенное выражение приближенных зависимостей $\Omega(t)$ для ЭМН, $u_C(t)$ для ЕН и $i_L(t)$ для ИН в НЗП имеет безразмерную форму:

$$v_* \approx 1 - \exp(-4t_*), \quad (66)$$

причем $v_* = v/V_3$, $t_* = t/t_3$; в ЭМН $\tau_{эм} = t_3/4$, в ЕН и ИН $\tau_3 = t_3/4$. График, соответствующий (66), показан штриховой линией на рис. 2. Таким образом, на примере анализа НЭ, характеризуемых соотношениями постоянных времени $\tau_n / \tau_{эм} = \tau_y / \tau_3 = 10$ для ЭМН, ЕН и $\tau_3 / \tau_n = 10$ для ИН, установлено следующее. Управляемый процесс заряда НЭ при регулировании напряжения питания в соответствии с оптимизационной зависимостью (63) обеспечивает приблизительно двукратное снижение энергии потерь $W_{д0}$ в ЭМН, ЕН и шестикратное — в ИН по сравнению с уровнем энергии диссипации $W_{д.н}$ в НЗП. Если указанные отношения постоянных времени больше 10, то значения $W_{д.н} / W_{д0}$ увеличиваются. Регулирование напряжения питания позволяет существенно влиять на повышение КПД заряда НЭ

$$\eta_3 = [1 + (W_d / W_3)]^{-1}$$

при заданном уровне аккумулируемой энергии $W_3 = W_3 - W_d$.

Далее приведены примеры расчетов, в которых сопоставлены регулируемые и нерегулируемые зарядные процессы (РЗП и НЗП) для конкретных разновидностей НЭ.

Пример 1. Сопоставление РЗП и НЗП в ИН. Рассмотрим применение в качестве ИН мощного токоограничивающего масляного реактора ТОРМ-110-650-16 (класс напряжения 110 кВ) Московского электрозавода [10]. Реактор выполнен без ферромагнитопровода. Внутри стального масляного бака реактора установлен полоцилиндрический электромагнитный экран из алюминиевого сплава для уменьшения мощности добавочных потерь. Основные параметры реактора: ин-

дуктивность обмотки $L \approx 0,06$ Гн, активное сопротивление $R_{06} \approx 0,1$ Ом, действующее значение тока $I = 650$ А, электромагнитная постоянная времени $\tau = L/R_{06} \approx 0,6$ с, число витков обмотки $w_{06} = 330$.

При экспоненциальном НЗП для ИН примем $I_{L3} = I = 650$ А, $\tau_3 = \tau = 0,6$ с, $R_3 = R_{06} = 0,1$ Ом (дополнительное сопротивление зарядной цепи $R_{доп} = 0$), напряжение $U_{L3} = I_{L3} R_3 = 65$ В, сопротивление $R_{п} = 2$ Ом. Для учета энергии электрических потерь в электромагнитном экране при НЗП в качестве $R_{п}$ принято приведенное к числу витков w_{06} сопротивление экрана $R'_{эк} = 2$ Ом. Постоянная времени $\tau_{п} = L/R_{п} = 0,03$ с. Наибольшее значение запасенной энергии $W_3 = 0,5 L I_{L3}^2 \approx 12,7 \cdot 10^3$ Дж. В режиме разряда на сопротивление $R_p = 100 R_3 = 10$ Ом (при допущении равенства начального тока разряда $I_p = 650$ А току I_{L3}) наибольшее напряжение ИН составляет $U_{Lp} = I_p R_p = 6500$ В, постоянная времени $\tau_p = L/R_p = 0,006$ с.

Энергия потерь ИН в НЗП за время $t_3 = 4\tau_3 = 2,4$ с равна

$$W_{дн} = 2,5 R_3 I_{L3}^2 \tau_3 \left(1 + 0,2 \frac{\tau_{п}}{\tau_3} \right) = 64 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Оптимизационное значение энергии диссипации ИН за время $t_3 = 2,4$ с в РЗП составляет

$$W_{д} = R_3 I_{L3}^2 (\tau_{п} + m^{-1} \text{cth} m t_3) \approx 7,1 \cdot 10^3 \text{ Дж,}$$

где $m = (\tau_{п}^2 + \tau_{п} \tau_3)^{-0,5} \approx 7,27 \text{ с}^{-1}$.

Практически $W_{д}$ совпадает с минимальным значением $W_{до}$ при $t_3 \rightarrow \infty$. Таким образом, в рассматриваемом ИН при НЗП выделяется энергия потерь, которая в $W_{дн}/W_{д} = 64/7,1 \approx 9$ раз больше, чем энергия $W_{д} = W_{до}$ при РЗП.

Пример 2. Сопоставление РЗП и НЗП в ЕН. Примем в ЕН значение запасенной энергии и уровень напряжения такими же, как W_3 и U_{Lp} в рассмотренном ИН (см. пример 1): $W_3 = 12,7 \cdot 10^3$ Дж и $U_{C3} = 6500$ В. Емкость батареи конденсаторов ЕН составляет $C = 2W_3/U_{C3}^2 = 600$ мкФ. Эти параметры ЕН можно получить, например, собрав батарею из 18 конденсаторов типа ИС-2,8-300 с номинальным напряжением 2,8 кВ и электрической емкостью по 300 мкФ [11]. Батарея должна содержать шесть параллельных ветвей, в каждой из которых последовательно включены три конденсатора указанного типа.

Выберем для зарядной цепи ЕН сопротивление $R_3 = 1000$ Ом, при этом наибольший ток заряда $I_{C3} = U_{C3}/R_3 = 6,5$ А, а постоянная времени $\tau_3 = R_3 C = 0,6$ с. Полагаем сопротивление цепи утечки $R_y = 20 R_3 = 2 \cdot 10^4$ Ом, тогда $\tau_y = R_y C = 12$ с. В режиме разряда ЕН на сопротивление $R_p = 0,01 R_3 = 10$ Ом при напряжении $U_{Cp} = U_{C3} = 6500$ В начальное значение тока $I_p = U_{Cp}/R_p = 650$ А, постоянная времени $\tau_p = R_p C = 0,006$ с (значения I_p и τ_p такие же, как в ИН, рассмотренном в примере 1).

Энергия диссипации ЕН в НЗП за время $t_3 = 4\tau_3 = 2,4$ с равна

$$W_{дн} = R_3 I_{C3}^2 \tau_3 \left(0,5 + 4 \frac{\tau_y}{\tau_3} \right) \approx 17,7 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Оптимизационное значение энергии потерь ЕН за время $t_3 = 2,4$ с в РЗП составляет

$$W_{д} = R_3 I_{C3}^2 \tau_3 \left(\frac{\tau_y}{\tau_3} + \frac{\tau_y}{\tau_3} \sqrt{1 + \frac{\tau_y}{\tau_3}} \text{cth} m t_3 \right) \approx 9,3 \cdot 10^3 \text{ Дж,}$$

где

$$m = (\tau_y^{-2} + \tau_y^{-1} \tau_3^{-1})^{-0,5} = 0,383 \text{ с}^{-1}.$$

При $t_3 \rightarrow \infty$ достигается наименьшее значение $W_{д}$:

$$W_{до} = R_3 I_{C3}^2 \frac{\tau_y^2}{\tau_3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\tau_y}{\tau_3}} \right) \approx 7,1 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Таким образом, для ЕН получены соотношения:

$$W_{дн}/W_{д} = 17,7/9,3 \approx 1,9; \quad W_{дн}/W_{до} = 17,7/7,1 \approx 2,5.$$

Для РЗП оптимизационные значения $W_{д}$ в рассматриваемых ИН и ЕН имеют небольшое различие, а минимальные уровни $W_{до}$ в указанных частных случаях совпадают. Для НЗП энергия потерь $W_{дн}$ в ИН существенно больше, чем в ЕН.

Пример 3. Сопоставление РЗП и НЗП в ЭМН. Состав ЭМН: зарядный ДПТ, инерционный МН, разрядный асинхронный генератор (АГ). Запасенная кинетическая энергия ЭМН

$$W_3 = 0,5 J \Omega_3^2 = 25 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

где $J = J_M + J_{дв} + J_a$ — суммарный момент инерции ротора ЭМН; J_M , $J_{дв}$, J_a — моменты инерции маховика, роторов ДПТ и АГ; $\Omega_3 = 2\pi n_3 = 330$ рад/с, $n_3 = 3150$ об/мин = 52,5 об/с — угловая скорость и частота вращения ротора ЭМН, достигаемые за время заряда t_3 .

Инерционный МН. Стальной дисковый маховик с защитным кожухом имеет радиус $r_M = 0,2$ м, толщину $b_M = 0,02$ с, массу $G_M = 19,6$ кг, момент инерции $J_M = 0,5 \times G_M r_M^2 = 0,39$ кг·м². Осевой зазор между кожухом и каждым из торцов диска $\delta = 0,02$ м. Согласно [1, форм. (4.9)] мощность потерь трения диска о воздух в кожухе $P_M = 2030$ Вт.

Зарядный ДПТ. Двигатель типа 2ПН100Л с независимым возбуждением и расширенным диапазоном регулирования частоты вращения характеризуют номинальные параметры [12]: мощность $P_N = 2200$ Вт, частота вращения $n_N = 3150$ об/мин, напряжение $U_N = 220$ В, КПД $\eta_N = 0,81$. Согласно [12] для 2ПН100Л напряжение цепи возбуждения $U_B = 220$ В; сопротивления (при температуре $T_0 = 288$ К) обмоток: якоря $R_y = 0,52$ Ом, добавочных полюсов $R_d = 0,51$ Ом, возбуждения $R_B = 295$ Ом; индуктивность цепи якоря $L_{я.ц} = 21 \cdot 10^{-3}$ Гн; момент инерции $J_{дв} = 0,012$ кг·м². На основании этих данных по известным соотношениям определены: сопротивления (при ожидаемой температуре $T = 388$ К) цепи якоря $R_{я.ц} = R_y T + R_d T = 1,44$ Ом, обмотки возбуждения $R_{BT} = 413$ Ом; мощность возбуждения $P_B = U_B^2/R_{BT} = 117$ Вт; частичная мощность потерь $P_{п1} = P_{п2} - P_B = 400$ Вт, где $P_{п1} = P_N (1 - \eta_N)/\eta_N = 516$ Вт — полная мощность потерь ДПТ; условный КПД $\eta_1 = P_N/(P_N + P_{п1}) = 0,846$; ток цепи якоря $I_y = P_N/U_N \eta_1 = 11,8$ А; мощность магнитных и механических потерь $P_0 \approx 0,5 P_{п1} = 200$ Вт; электромагнитный момент $M_3 = (P_N + P_0)/\Omega_3 = 7,27$ Н·м; произведение коэффициента ЭДС (c_e) и магнитного потока $c_e \Phi = M_3/I_y = 0,616$ Вб; мощность механических потерь двигателя $P_{м.д} \approx 0,67 P_0 = 134$ Вт.

Разрядный АГ. В качестве АГ применена работающая в генераторном режиме с емкостным самовозбуждением (или вентильным независимым возбуждением опережающим током) двухполюсная трехфазная асинхронная машина — двигатель типа 4АС132М с частотой вращения поля 3000 об/мин при $f = 50$ Гц. Технические данные этого двигателя [12]: мощность (при ПВ 15%) $P = 17 \cdot 10^3$ Вт, напряжение $U_d/U_{\phi} = 660/380$ В, кратность пускового тока $k_{п} = 7,5$, энергетические показатели (при ПВ 40%) $\eta = 0,84$, $\cos \varphi = 0,89$, момент инерции $J_a = 0,0125$ кг·м². Согласно этим данным для режима разряда АГ через мостовой выпрямитель рассчитаны: генерируемое напряжение $U_p \approx 2,34 U_{\phi} = 890$ В, допустимый ток $I_p \approx 1,25 k_{п} I_{\phi} \approx 190$ А, при-

чем $I_\Phi = P/3U_\Phi \eta \cos \varphi = 20$ А. Если при разряде с КПД $\eta_p = 0,9$ принять электрическую энергию $W_p = 0,5W_k \eta_p \approx 11,2 \times 10^3$ Дж, то можно оценить время разряда ЭМН как $t_p \leq W_p/U_p I_p = 0,07$ с. Полагаем мощность механических потерь $AG^* P_{M,Г} \approx 170$ Вт.

Параметры процессов заряда ЭМН. При $\Omega = \Omega_3$ общая мощность механических потерь агрегата $P_{M,О} = P_M + P_{M,Д} + P_{M,Г} \approx 2330$ Вт, причем сумма $P_M + P_{M,Г} = 2200$ Вт равна P_H для ДПТ. Механические параметры ЭМН: момент трения $M_{M,О} = P_{M,О}/\Omega_3 \approx 7,1$ Н·м, сопротивление трения $k_M = M_{M,О}/\Omega_3 = 0,021$ Н·м·с, момент инерции $J = J_M + J_{ДВ} + J_A = 0,414$ кг·м², постоянная времени $\tau_M = J/k_M = 19,7$ с. Примем для зарядной цепи $R_3 = 1,6R_{Я,Ц} = 2,3$ Ом, $L = L_{Я,Ц} = 21 \cdot 10^{-3}$ Гн, тогда постоянные времени:

$$\tau_{ЭМ} = JR_3/(c_e \Phi)^2 = 2,5 \text{ с} \approx \tau_M/8; \quad \tau = L/R_3 \approx 0,01 \text{ с} \ll \tau_{ЭМ}.$$

Расчетные параметры $U_3 = c_e \Phi \Omega_3 = 203$ В, $I_3 = U_3/R_3 = 88,4$ А позволяют проверить соотношение

$$k_M \Omega_3^2 / R_3 I_3^2 = \tau_{ЭМ} / \tau_M = 0,127.$$

При $\tau_{ЭМ} \approx \tau_M/8$ энергия диссипации ЭМН в НЗП за время $t_3 = 4\tau_{ЭМ} = 10$ с составляет

$$W_{д,Н} \approx R_3 I_3^2 \tau_{ЭМ} \left(0,5 + 2,5 \frac{\tau_{ЭМ}}{\tau_M} \right) = 3,67 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Для РЗП продолжительностью $t_3 = 10$ с в ЭМН энергия потерь

$$W_{д,Р} = R_3 I_3^2 \tau_{ЭМ} \left(\frac{\tau_{ЭМ}}{\tau_M} + \frac{\tau_{ЭМ}}{\tau_M} \sqrt{1 + \frac{\tau_M}{\tau_{ЭМ}} \operatorname{cth} mt_3} \right) = 24,4 \cdot 10^3 \text{ Дж},$$

где

$$m = (\tau_M^{-1} \tau_{ЭМ}^{-1} + \tau_M^{-2})^{0,5} = 0,15 \text{ с}^{-1}, \quad \operatorname{cth} mt_3 = 1,1.$$

При $t_3 \rightarrow \infty$ значение $W_{д,О} = 22,7 \cdot 10^3$ Дж $= 0,93W_{д,Р}$. Таким образом, $W_{д,Н}/W_{д,Р} = 36,7/24,4 = 1,5$, т.е. в рассматриваемом ЭМН эффективность РЗП характеризуется уменьшением энергии потерь в 1,5 раза по сравнению с $W_{д,Н}$.

Выводы. 1. Установленные с помощью метода вариационного исчисления функциональные зависимости от времени для характерных параметров зарядных процессов основных разновидностей накопителей энергии позволили синтезировать закономерности регулирования напряжения питания, которые обеспечивают наименьший уровень потребляемой энергии или минимальное значение энергии потерь в течение времени заряда. Эти результаты целесообразно учитывать при разработке регулируемых преобразователей — источников электропитания накопителей в автономных системах генерирования с ограниченным энергоресурсом.

2. Минимизация полной потребляемой электроэнергии или суммарной энергии потерь при заряде накопителя приводит к одинаковым функциональным зависимостям от времени для ос-

новных параметров зарядных процессов, поэтому для конкретных оптимизационных задач, подобных рассмотренным, следует выбирать такую постановку, которая может упростить решение этих задач вариационным методом.

3. Полученные в безразмерной форме обобщенные зависимости для характерных параметров зарядных процессов полезно учитывать при эксплуатации различных типов накопителей энергии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бут Д.А., Алиевский Б.Л., Мизюрин С.Р. и др. Накопители энергии / Под ред. Д.А. Бута. — М.: Энергоатомиздат, 1991.
2. Алиевский Б.Л., Мизюрин С.Р. Процессы заряда электромеханического накопителя энергии в автономной системе генерирования постоянного тока. — Электричество, 1997, № 10.
3. Пентегов И.В. Основы теории зарядных цепей емкостных накопителей энергии. — Киев: Наукова думка, 1982.
4. Ольсен Г. Динамические аналогии / Пер. с англ. под ред. М.А. Айзермана. — М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1947.
5. Гарднер М.Ф., Бэрнс Дж.Л. Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными постоянными / Пер. с англ. под ред. Г.И. Атабекова и Я.З. Цыпкина. — М.: Физматгиз, 1961.
6. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1965.
7. Ильинский Н.Ф. Электроприводы постоянного тока с управляемым моментом. — М.: Энергоиздат, 1981.
8. Пентегов И.В., Волков И.В. Оптимизация зарядного процесса индуктивных накопителей энергии. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1969, № 1.
9. Алиевский Б.Л. Расчет потерь мощности в сверхпроводниковых соленоидах на переменном токе. — Электричество, 1984, № 11.
10. Матрюков Л.А. Электромагнитное экранирование мощных реакторов без стали. — Электричество, 1968, № 1.
11. Электротехнический справочник. Т. 2. — М.: Энергоатомиздат, 1986.
12. Справочник по электрическим машинам. Т. 1. / Под ред. И.П. Копылова и Б.К. Клокова. — М.: Энергоатомиздат, 1988.

[21.09.98]

Авторы: Алиевский Борис Львович окончил в 1956 г. электромеханический факультет Московского энергетического института. Докторскую диссертацию по электрическим машинам защитил в 1989 г. в Московском авиационном институте (МАИ). Профессор кафедры электроэнергетических и электромеханических систем МАИ.

Мизюрин Станислав Романович окончил в 1951 г. факультет систем управления, информатики и электроэнергетики МАИ. Докторскую диссертацию по автономным системам электроснабжения защитил в 1975 г. в МАИ. Профессор кафедры электроэнергетических и электромеханических систем МАИ.

Динамика двукратноинтегрирующей системы подчиненного регулирования скорости с наблюдателем состояния

АКИМОВ Л.В., ДОЛБНЯ В.Т., КОЛОТИЛО В.И.

Предложен новый способ повышения точности работы двукратноинтегрирующей СПР скорости за счет увеличения порядка астатизма по возмущающему воздействию путем введения в систему обратных связей по току двигателя и его скорости от наблюдателя состояния полного порядка. Обеспечено отсутствие статической и скоростной ошибок по возмущению, а также нулевая площадь регулирования скорости при ступенчатом изменении возмущающего сигнала. Доказано, что включение в состав двукратноинтегрирующей СПР скорости редуцированного наблюдателя второго порядка способствует уменьшению имеющей место статической ошибки по отношению к однократноинтегрирующей СПР скорости более чем на два порядка. Приведены результаты моделирования электроприводов, а также численные примеры, иллюстрирующие инженерный метод синтеза наблюдателей состояния полного и пониженного порядков.

Ключевые слова: электропривод, двукратноинтегрирующая СПР скорости, обратная связь, наблюдатель состояния, моделирование

Постановка задачи. Внедрение современных технологий предъявляет повышенные требования к точности работы электромеханических систем (ЭМС). Для решения этой проблемы используются многоканальные системы [1], работающие по принципу грубого и точного управления, одно из основных свойств которых заключается в суммировании порядков астатизма по управлению v_{ii} отдельных каналов. Однако многоканальные системы имеют астатизм по возмущению v_m , обусловленный особенностями структуры последнего n -го канала, значительно усложняют механическую часть электропривода, что приводит к их резкому удорожанию.

Другим способом повышения астатизма, а следовательно, точности работы электропривода, является использование трехкратноинтегрирующей системы подчиненного регулирования (СПР) с ПИ²-регулятором скорости (РС) [2]. Данная система имеет астатизм второго порядка ($v_m = 2$) по возмущающему воздействию и нулевую площадь регулирования скорости при ступенчатом изменении нагрузки. При этом использование ПИ²-РС приводит к снижению быстродействия, ухудшению устойчивости, повышению колебательности системы [3], что вызывает необходимость установки на входе заграждающего фильтра. Кроме того, система оказывается весьма чувствительной к нелинейностям, поэтому в ней возможно появление значительных колебатель-

A new method of improving the operational precision of a double-integration subordinate speed control system (SSCS) is proposed, which involves increasing the order of astatism with respect to the disturbances by introducing a state observer of the full order into the feedback system of the motor current and speed. The method ensures zero area of speed control with a step-by-step change of the disturbing signal as well as eliminating the static and speed errors with respect to the disturbing action. It is shown that the incorporation of a reduction observer of the second order into a double-integration SSCS results in a decrease in static error more than two orders of magnitude larger than in the case of application of a single-integration SSCS. Results of modelling of electric drives are given together with a large number of examples illustrating an engineering method of synthesising state observers of full and lower orders.

Key words: electric drive, double-integration subordinate speed control system, feedback, state observer, modelling

ных и даже автоколебательных режимов.

Не менее важным, а может быть и основным, направлением увеличения точности работы ЭМС является использование инвариантных систем, построенных по принципу комбинированного управления, но требующих прямого или косвенного [4] измерения возмущающего воздействия и его производных. Для создания таких систем предложено использовать: наблюдатель с большими коэффициентами усиления и дополнительной компенсирующей обратной связью [7]; цифровые наблюдающие устройства [8, 9], требующие введения согласующих элементов в аналоговых системах; принцип прогнозирования и тестовые сигналы [10]. Наиболее полная библиография по этому вопросу дана в [11] и связана с проблемой создания робастных систем управления.

Все предложенные методы в той или иной степени решают задачу повышения точности работы ЭМС, однако не исключают возможности использования новых подходов и способов, в основе которых лежит условие минимальной реконструкции СПР с помощью простейших наблюдателей, не требующих какой-либо существенной перестройки ее структуры и параметров.

В связи с изложенным представляет интерес поиск новых способов повышения точностных характеристик наиболее распространенной двукратноинтегрирующей СПР скорости путем увеличения ее астатизма по возмущению v_m за

счет использования обнаруженных в [12] итерационных свойств ЭМС по возмущению при условии, что обратные связи в системе формируются не по действительным, а по восстановленным наблюдателем состояния (НС) координатам — току якорной цепи \hat{I} и скорости двигателя $\hat{\omega}$.

Следует отметить, что выбор двукратноинтегрирующей СПР не случаен. Во-первых, использование НС для придания астатизма 1-го порядка по возмущению в однократноинтегрирующей СПР с П-РС рассмотрен в [3]. Во-вторых, приведенный в [14] сравнительный анализ различных по типу РС СПР, замкнутых через НС, убеждает в том, что наилучший компромисс между быстродействием и точностью достигается именно в двукратноинтегрирующей системе.

Цель исследования — улучшение точностных характеристик двукратноинтегрирующей СПР скорости за счет придания системе астатизма 2-го порядка по возмущению путем замыкания ее обратными связями через наблюдатель состояния.

Синтез НС5 полного порядка для двукратноинтегрирующей СПР скорости. В верхней части рис. 1 с учетом пункта показана структурная

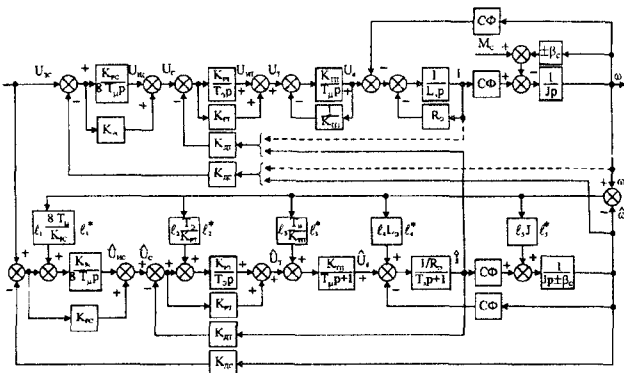


Рис. 1. Структурная схема двукратноинтегрирующей СПР скорости с наблюдателем состояния полного порядка НС5

схема двукратноинтегрирующей СПР с ПИ-РС, предназначенная для анализа методом переменных состояния. Отметим, что исходно система имеет по возмущающему воздействию порядок астатизма $\nu_m = 1$, а следовательно, ошибку по скорости его изменения.

На структурной схеме трение в механической части представлено коэффициентом $\pm\beta_c$, что дает возможность рассматривать систему как на восходящем, так и на нисходящем участках характеристики нагрузки (трения). На схеме искусственно выделены интегрирующие звенья ПИ-регуляторов тока (РТ) и скорости, выход которых $U_{ис}$ и $U_{ит}$ принимается в качестве переменных состояния. Кроме того, показаны выходные напряжения U_c и U_t соответственно ПИ-РТ и РС.

Таким образом, под вектором переменных состояния X в данной системе, имеющей порядок оператора $n=5$, принимается $X = [U_{ис} U_{ит} U_d I \omega]^T$.

Для представления системы в пространстве состояния [5] следует учесть, что:

$$U_{ис} = \frac{K_{рс}}{8T_{\mu}p}(U_{зс} - K_{дс}\omega); \quad (1)$$

$$U_c = U_{ис} + K_{рс}(U_{зс} - K_{дс}\omega); \quad (2)$$

$$U_{ит} = \frac{K_{рт}}{T_3 p}(U_c - K_{дт}I) = \frac{K_{рт}}{T_3 p}(U_{ис} - K_{дт}I - K_{дс}K_{рс}\omega + K_{рс}U_{зс}); \quad (3)$$

$$U_t = U_{ит} + K_{рт}(U_c - K_{дс}I); \quad (4)$$

$$U_d = \frac{K_{тп}}{T_{\mu} p + 1} U_t = \frac{K_{тп}}{T_{\mu} p + 1} (K_{рт} U_{ис} + U_{ит} - K_{дт} K_{рт} I - K_{дс} K_{рс} K_{рт} \omega + K_{рт} K_{рс} U_{зс}). \quad (5)$$

На основании уравнений (1), (3), (5) и рис. 1 могут быть записаны окончательные уравнения, представляющие двукратноинтегрирующую СПР скорости в пространстве состояния:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ис} &= -\frac{K_{рс}K_{дс}}{8T_{\mu}}\omega + \frac{K_{рс}}{8T_{\mu}}U_{зс}; \\ \dot{U}_{ит} &= \frac{K_{рт}}{T_3}U_{ис} - \frac{K_{рт}K_{дт}}{T_3}I - \frac{K_{рт}K_{дс}K_{рс}}{T_3}\omega + \frac{K_{рт}K_{рс}}{T_3}U_{зс}; \\ \dot{U}_d &= \frac{K_{тп}K_{рт}}{T_{\mu}}U_{ис} + \frac{K_{тп}}{T_{\mu}}U_{ит} - \frac{1}{T_{\mu}}U_d - \frac{K_{тп}K_{дт}K_{рт}}{T_{\mu}}I - \\ &\quad - \frac{K_{тп}K_{дс}K_{рс}K_{рт}}{T_{\mu}}\omega + \frac{K_{тп}K_{рт}K_{рс}}{T_{\mu}}U_{зс}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\dot{I} = \frac{1}{L_3}U_d - \frac{1}{T_3}I - \frac{C\Phi}{L_3}\omega;$$

$$\dot{\omega} = \frac{C\Phi}{J}I \pm \frac{\beta_c}{J}\omega - \frac{1}{J}M_c.$$

С учетом (6) и значений коэффициентов усиления РС и РТ

$$K_{рт} = \frac{T_3}{2T_{\mu}K_{тп}K_{дт}1/R_3}; \quad K_{рс} = \frac{T_m}{4T_{\mu}\frac{1}{K_{дт}}\frac{R}{C\Phi}K_{дс}} \quad (7)$$

могут быть записаны представленная в блочном виде матрица состояния системы A , а также матрицы управления B_u , возмущения B_m и выхода C , имеющие вид:

$$A = \begin{array}{c|ccc|ccc} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{JK_{\text{ДТ}}}{32T_{\mu}^2(C\Phi)} & & \\ \hline & \frac{R_{\text{э}}}{2T_{\mu}K_{\text{ТП}}K_{\text{ДТ}}} & 0 & 0 & \frac{R_{\text{э}}}{2T_{\mu}K_{\text{ТП}}} & -\frac{T_{\text{М}}(C\Phi)}{8T_{\mu}^2K_{\text{ТП}}} & & \\ & & A_{\text{I-I}} & & A_{\text{I-II}} & & & \\ \hline & \frac{L_{\text{э}}}{2T_{\mu}^2K_{\text{ДТ}}} & \frac{K_{\text{м}}}{T_{\mu}} & -\frac{1}{T_{\mu}} & -\frac{L_{\text{э}}}{2T_{\mu}^2} & -\frac{(C\Phi)}{\Omega_{\text{О.ДВ}}^2 8T_{\mu}^3} & & \\ \hline & 0 & 0 & \frac{1}{L_{\text{э}}} & -\frac{1}{T_{\text{э}}} & -\frac{(C\Phi)}{L_{\text{э}}} & & \\ & & A_{\text{I-II}} & & A_{\text{II-II}} & & & \\ \hline & 0 & 0 & 0 & \frac{(C\Phi)}{J} & \pm \frac{\beta_{\text{с}}}{J} & & \end{array};$$

$$B_{\mu} = \begin{array}{c|c} \frac{K_{\text{РС}}}{8T_{\mu}} \\ \frac{K_{\text{РТ}}K_{\text{РС}}}{T_{\text{э}}} \\ \frac{K_{\text{ТП}}K_{\text{РТ}}K_{\text{РС}}}{T_{\mu}} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array};$$

$$B_m = \left| 0 \ 0 \ 0 \ 0 -\frac{1}{J} \right|^T; \quad C = |0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1|, \quad (8)$$

где $\Omega_{\text{О.ДВ}}^2 = 1/T_{\text{М}}T_{\text{э}}$ — квадрат частоты недемпфированных колебаний в двигателе, с^{-2} .

Для синтеза НС5 полного порядка ($n=5$) введем матрицу модальной обратной связи в наблюдателе $L_1 = |l_1 \ l_2 \ l_3 \ l_4 \ l_5|^T$ и определим характеристический полином:

$$H_5(p) = \det(pI - A + L_1 C) =$$

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} p & 0 & 0 & 0 & \frac{JK_{\text{ДТ}}}{32T_{\mu}^2(C\Phi)} + l_1 \\ -\frac{R_{\text{э}}}{2T_{\mu}K_{\text{ТП}}K_{\text{ДТ}}} & p & 0 & \frac{R_{\text{э}}}{2T_{\mu}K_{\text{ТП}}} & \frac{T_{\text{М}}(C\Phi)}{8T_{\mu}^2K_{\text{ТП}}} + l_2 \\ -\frac{L_{\text{э}}}{2T_{\mu}^2K_{\text{ДТ}}} & -\frac{K_{\text{ТП}}}{T_{\mu}}p + \frac{1}{T_{\mu}} & \frac{L_{\text{э}}}{2T_{\mu}^2} & -\frac{(C\Phi)}{\Omega_{\text{О.ДВ}}^2 8T_{\mu}^3} & + l_3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_{\text{э}}} & p + \frac{1}{T_{\text{э}}} & \frac{(C\Phi)}{L_{\text{э}}} + l_4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(C\Phi)}{J} & p + \left(l_5 \pm \frac{\beta_{\text{с}}}{J}\right) \end{array} \right| = \\ = p^5 + p^4 \left(l_5 + \frac{T_{\mu} + T_{\text{э}}}{T_{\mu}T_{\text{э}}} \pm \frac{\beta_{\text{с}}}{J} \right) + p^3 \left(l_4 \frac{(C\Phi)}{J} + \Omega_{\text{О.ДВ}}^2 + \right. \\ \left. + \Omega_{\text{О.э}}^2 + \frac{1}{2T_{\mu}^2} + \frac{T_{\mu} + T_{\text{э}}}{T_{\mu}T_{\text{э}}} \left(l_5 \pm \frac{\beta_{\text{с}}}{J} \right) \right) + p^2 \left(l_3 \frac{(C\Phi)}{JL_{\text{э}}} + l_4 \frac{(C\Phi)}{JT_{\mu}} + \right. \\ \left. + \frac{\Omega_{\text{О.ДВ}}^2}{T_{\mu}} + \frac{\Omega_{\text{О.э}}^2}{2T_{\mu}} + \frac{1}{8T_{\mu}^3} + \left(\Omega_{\text{О.э}}^2 + \frac{1}{2T_{\mu}^2} \right) \left(l_5 \pm \frac{\beta_{\text{с}}}{J} \right) \right) + \end{array}$$

$$+ p \left(l_1 \frac{(C\Phi)}{2T_{\mu}^2K_{\text{ДТ}}} + l_2 \frac{K_{\text{ТП}}(C\Phi)}{T_{\mu}L_{\text{э}}J} + \frac{1}{64T_{\mu}^4} + \frac{\Omega_{\text{О.э}}^2}{8T_{\mu}^2} + \frac{\Omega_{\text{О.э}}^2}{2T_{\mu}} \left(l_5 \pm \frac{\beta_{\text{с}}}{J} \right) \right) + \\ + \left(l_1 \frac{(C\Phi)}{2T_{\mu}^2T_{\text{э}}JK_{\text{ДТ}}} + \frac{1}{64T_{\mu}^4T_{\text{э}}} \right) = 0, \quad (9)$$

где $\Omega_{\text{О.э}}^2 = 1/T_{\mu}T_{\text{э}}$ — квадрат частоты колебаний электрической части системы, с^{-2} .

Для придания НС5 желаемых динамических свойств зададимся стандартной формой Баттерворта 5-го порядка [15]:

$$H_{5\text{ж}}(p) = p^5 + 3,24\omega_{\text{ОН}}p^4 + 5,24\omega_{\text{ОН}}^2p^3 + \\ + 5,24\omega_{\text{ОН}}^3p^2 + 3,24\omega_{\text{ОН}}^4p + \omega_{\text{ОН}}^5, \quad (10)$$

где $\omega_{\text{ОН}}$ — значение среднегеометрического корня в НС5, с^{-1} , принимаемое равным

$$\frac{1}{T_{\mu}} \leq \omega_{\text{ОН}} \leq K \frac{1}{T_{\mu}}, \quad K \in [1 \div 4]. \quad (11)$$

Из сравнения сомножителей при одинаковых степенях p уравнений (9) и (10) находим аналитические выражения для коэффициентов обратных связей матрицы L_1 :

$$l_1 = \frac{2T_{\mu}^2T_{\text{э}}JK_{\text{ДТ}}}{(C\Phi)} \left(\omega_{\text{ОН}}^5 - \frac{1}{64T_{\mu}^4T_{\text{э}}} \right); \quad (12)$$

$$l_2 = \frac{T_{\mu}L_{\text{э}}J}{K_{\text{ТП}}(C\Phi)} \left[3,24\omega_{\text{ОН}}^4 \left(\frac{\Omega_{\text{О.э}}^2}{8T_{\mu}^2} + \frac{1}{64T_{\mu}^4} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\Omega_{\text{О.э}}^2}{2T_{\mu}} \left(3,24\omega_{\text{ОН}} - \frac{T_{\mu} + T_{\text{э}}}{T_{\mu}T_{\text{э}}} \right) - T_{\text{э}} \left(\omega_{\text{ОН}}^5 - \frac{1}{64T_{\mu}^4T_{\text{э}}} \right) \right] < 0; \quad (13)$$

$$l_3 = \frac{JL_{\text{э}}}{(C\Phi)} \left[5,24\omega_{\text{ОН}}^3 - \left(\frac{\Omega_{\text{О.ДВ}}^2}{T_{\mu}} + \frac{\Omega_{\text{О.э}}^2}{2T_{\mu}} + \frac{1}{8T_{\mu}^3} \right) - l_4 \frac{(C\Phi)}{JT_{\mu}} - \right. \\ \left. - \left(\Omega_{\text{О.э}}^2 + \frac{1}{2T_{\mu}^2} \right) \left(3,24\omega_{\text{ОН}} - \frac{T_{\mu} + T_{\text{э}}}{T_{\mu}T_{\text{э}}} \right) \right]; \quad (14)$$

$$l_4 = \frac{J}{(C\Phi)} \left[5,24\omega_{\text{ОН}}^2 - \left(\Omega_{\text{О.ДВ}}^2 + \Omega_{\text{О.М}}^2 + \frac{1}{2T_{\mu}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{T_{\mu} + T_{\text{э}}}{T_{\mu}T_{\text{э}}} \left(3,24\omega_{\text{ОН}} - \frac{T_{\mu} + T_{\text{э}}}{T_{\mu}T_{\text{э}}} \right) \right]; \quad (15)$$

$$l_5 = 3,24\omega_{\text{ОН}} - \frac{T_{\mu} + T_{\text{э}}}{T_{\mu}T_{\text{э}}} \pm \frac{\beta_{\text{с}}}{J}. \quad (16)$$

Найдем матрицу состояния НС5 $A_{\text{н}} = A - L_1 C$ и запишем уравнения состояния наблюдателя в развернутой форме:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \hat{U}_{nc} \\ \hat{U}_{нг} \\ \hat{U}_d \\ \hat{I} \\ \hat{\omega} \end{pmatrix} = \\
 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_{pc}K_{дс}}{8T_{\mu}}l_1 \\ \frac{K_{рт}}{T_{\mu}} & 0 & 0 & -\frac{K_{рт}K_{дт}}{T_{\mu}} & -\frac{K_{рт}K_{дс}K_{pc}}{T_{\mu}}l_2 \\ \frac{K_{тп}K_{рт}}{T_{\mu}} & \frac{K_{тп}}{T_{\mu}} & -\frac{1}{T_{\mu}} & -\frac{K_{тп}K_{дт}K_{рт}}{T_{\mu}} & -\frac{K_{тп}K_{дс}K_{pc}K_{рт}}{T_{\mu}}l_3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_3} & -\frac{1}{T_3} & -\frac{(C\Phi)}{L_3}l_4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(C\Phi)}{J} & \pm \frac{\beta_c}{J}l_5 \end{pmatrix} \times \\
 & \begin{pmatrix} \hat{U}_{nc} \\ \hat{U}_{нг} \\ \hat{U}_d \\ \hat{I} \\ \hat{\omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \end{pmatrix} \omega(t) + \begin{pmatrix} \frac{K_{pc}}{8T_{\mu}} \\ \frac{K_{рт}K_{pc}}{T_{\mu}} \\ \frac{K_{тп}K_{рт}K_{pc}}{T_{\mu}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} U_{зс}(t). \quad (17)
 \end{aligned}$$

На основании (17) в нижней части рис. 1 приведена структурная схема НС5 для СПР с ПИ-РС и показаны обратные связи по току двигателя \hat{I} и его скорости $\hat{\omega}$, введенные от наблюдателя. На структурной схеме коэффициенты обратной связи в НС5 представлены величинами:

$$\begin{aligned}
 l_1^* &= l_1 \frac{8T_{\mu}}{K_{pc}}; \quad l_2^* = l_2 \frac{T_3}{K_{рт}}; \quad l_3^* = \frac{T_{\mu}}{K_{тп}}; \quad l_4^* = l_4 L_3; \\
 l_5^* &= l_5 J. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Необходимо отметить независимость коэффициентов обратных связей $l_1(12)$, $l_2(13)$, $l_3(14)$ и $l_5(15)$ от $\pm\beta_c$ и слабую зависимость от нее коэффициента $l_5(16)$, которая легко ослабляется соответствующим выбором значения среднегеометрического корня наблюдателя $\omega_{он}$ (11). Кроме того, следует обратить внимание на отрицательное значение коэффициента l_2 .

Для определения порядка астатизма по возмущению с использованием метода графов [16] найдена передаточная функция исследуемой ЭМС 10-го порядка по возмущающему воздействию при $\beta_c=0$:

$$W_1(p)_{M_c} = \frac{\omega(p)}{M_c(p)} = -\frac{8T_{\mu}T_3J^2p^6(T_{\mu}p+1)^2(T_3p+1)^2N_1(p)}{8T_{\mu}T_3J^2p^4(T_{\mu}p+1)(T_3p+1)D_1(p)} =$$

$$= -p^2 T_3 (T_{\mu}p+1) (T_3p+1) \frac{N_1(p)}{D_1(p)}, \quad (19)$$

где полином числителя

$$\begin{aligned}
 N_1(p) &= 8T_{\mu}T_3Jp^3(T_{\mu}p+1)(T_3p+1) + 8T_{\mu}T_3p^2 \times \\
 &\times (T_{\mu}p+1) \left[l_4 T_3 (C\Phi) + l_5 J (T_3p+1) + \frac{(C\Phi)^2}{R_3} \right] + \\
 &+ 4T_3p \left[J l_5 (T_3p+1) + 2T_{\mu}K_{тп} \frac{1}{R_3} (C\Phi) (l_3 T_{\mu}p - \right. \\
 &\left. - l_2 K_{тп}) + \frac{(C\Phi)}{K_{дт}} l_1 (T_3p+1) \right] + \frac{JT_3}{8T_{\mu}^2} (T_3p+1) \times \\
 &\times (32T_{\mu}^2 p^2 + 8T_{\mu}p+1) \quad (20)
 \end{aligned}$$

и характеристический полином 10-й степени замкнутой ЭМС

$$\begin{aligned}
 D_1(p) &= 1 + K_{дс} K_{pc}^* ABE D (C\Phi) \left(1 + \frac{l_5}{p} + Q \right) + \\
 &+ K_{дт} ABE [1 + Q - l_5 J D ((C\Phi) + ABK_{дс} K_{pc}^*)] + \\
 &+ (1+S) D [l_5 J + pJQ + E (C\Phi)^2] + \\
 &+ S \{ 1 + ABE [K_{дт} (1 + l_5 J D) + K_{дс} K_{pc}^* D (C\Phi)] \} + \\
 &+ K_{дт} ABE l_5 J D \left(1 + K_{дс} K_{pc}^* ABE (C\Phi) \frac{1}{Jp} \right),
 \end{aligned}$$

в котором:

$$\begin{aligned}
 K_{pc}^* &= K_{pc} \frac{(8T_{\mu}p+1)}{8T_{\mu}p}; \quad A = K_{рт} \frac{(T_3p+1)}{T_3p}; \\
 B &= \frac{K_{тп}}{T_{\mu}p+1}; \quad E = \frac{1/R_3}{T_3p+1}; \quad D = \frac{1}{Jp \pm \beta_c}; \\
 Q &= \frac{E(C\Phi)}{Jp} \left[l_4 L_3 + \frac{BT_{\mu}l_3}{K_{тп}} + \frac{B}{p} (l_2 - Al_1) \right]; \quad N = \frac{(C\Phi)^2 E}{Jp}.
 \end{aligned}$$

Из (19) следует, что включение в состав двукратноинтегрирующей СПР с ПИ-РС наблюдателя состояния НС5 полного порядка доводит астатизм по возмущающему воздействию в рассматриваемой ЭМС до 2-го порядка ($\nu_m=2$). Следствием увеличения астатизма по возмущению должно явиться отсутствие как статической ошибки $\Delta\omega_{ст}$, вызванной действием момента статического сопротивления типа $M_c = \text{const}$, так и ошибки $\Delta\omega_{ск}$, связанной с линейным изменением момента нагрузки, например, вида $M_c = \beta_c \omega$, когда скорость двигателя в процессе его разгона изменяется по линейному закону.

Необходимо отметить, что система рис. 1 сохраняет астатизм 2-го порядка $\nu_n=2$ по управляющему воздействию, т.е. остается двукратноинтегрирующей.

Синтез редуцированного наблюдателя НС2 2-го порядка. Исследуем точностные характери-

стики двукратноинтегрирующей СПР скорости, в которой обратные связи по току якорной цепи I и скорости двигателя ω заведены от восстановленных их значений \hat{I} , $\hat{\omega}$ редуцированным наблюдателем 2-го порядка НС2.

Для синтеза НС2 воспользуемся клеточной матрицей A_{II-II} (см. (8)), примем матрицу выхода $C_{II} = [0 \ 1]$ и матрицу модальной обратной связи в наблюдателе $L_2 = [l_1 \ l_2]^T$, тогда характеристическое уравнение НС2 может быть представлено в виде [5]:

$$H_2(p) = (pI - A_{II-II} + L_2 C_{II}) = \begin{vmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1/T_3 & -\frac{(C\Phi)}{L_3} \\ \frac{(C\Phi)}{J} & \pm \frac{\beta_c}{J} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} p + \frac{1}{T_3} & \frac{(C\Phi)}{L_3} + l_1 \\ -\frac{(C\Phi)}{J} & p + \left(l_2 \pm \frac{\beta_c}{J}\right) \end{vmatrix} = p^2 + p \left(l_2 + \frac{1}{T_3} \pm \frac{\beta_c}{J}\right) + \frac{1}{T_3} \left(l_2 \pm \frac{\beta_c}{J}\right) + \Omega_{0.дв}^2 + \frac{C\Phi}{J} l_1 = 0. \quad (21)$$

Для придания НС2 желаемых динамических свойств зададимся фильтром Баттерворта 2-го порядка

$$H_{2ж}(p) = p^2 + 1,41\omega_{он}p + \omega_{он}^2 \quad (22)$$

и из сравнения сомножителей при одинаковых степенях p уравнений (21) и (22) найдем аналитические выражения для коэффициентов матрицы обратной связи в редуцированном наблюдателе L_2 :

$$l_1 = \frac{J}{(C\Phi)} \left(\omega_{он}^2 - \Omega_{0.дв}^2 - \frac{1}{T_3} \left(1,41\omega_{он} - \frac{1}{T_3} \right) \right); \quad (23)$$

$$l_2 = 1,41\omega_{он} - \frac{1}{T_3} \pm \frac{\beta_c}{J}. \quad (24)$$

Следует отметить, что СПР зачастую рассматриваются без учета влияния обратной связи по ЭДС двигателя. В этом случае коэффициенты обратных связей l_1 и l_2 в НС2 при $C\Phi\omega = 0$ и $\beta_c = 0$ будут иметь значения:

$$l_{10} = \frac{J}{(C\Phi)} \left(\omega_{он}^2 - \frac{1}{T_3} \left(1,41\omega_{он} - \frac{1}{T_3} \right) \right); \quad (25)$$

$$l_{20} = 1,41\omega_{он} - \frac{1}{T_3}. \quad (26)$$

Уравнения состояния НС2 в развернутой форме:

$$\begin{vmatrix} \hat{I} \\ \hat{\omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{T_3} & -\frac{C\Phi}{L_3} - l_1 \\ \frac{C\Phi}{J} & \pm \frac{\beta_c}{J} - l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{I} \\ \hat{\omega} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \omega(t) + \begin{vmatrix} \frac{1}{L_3} \\ 0 \end{vmatrix} U_d(t), \quad (27)$$

где $U_d(t)$ — напряжение тиристорного преобразователя, поступающее на вход НС2.

На рис. 2 представлена структурная схема двукратноинтегрирующей СПР скорости с редуцированным наблюдателем НС2, где

$$l_1^* = l_1 L_3; \quad l_2^* = l_2 J. \quad (28)$$

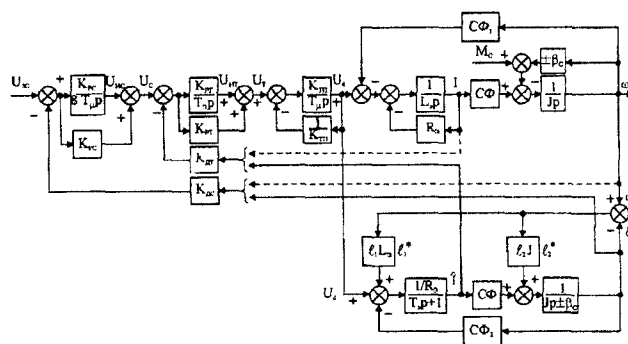


Рис. 2. Структурная схема двукратноинтегрирующей СПР скорости с редуцированным наблюдателем 2-го порядка НС2

Для определения динамических свойств данной ЭМС при действии момента статического сопротивления ($\beta_c = 0$) найдена передаточная функция по возмущающему воздействию:

$$W_2(p)_{M_c} = \frac{\omega(p)}{M_c(p)} = - \frac{8T_\mu T_3 J^2 p^4 (T_\mu p + 1)(T_3 p + 1)^2 N_2(p)}{8T_\mu T_3 J^2 p^4 (T_\mu p + 1)(T_3 p + 1) D_2(p)} = - (T_3 p + 1) \frac{N_2(p)}{D_2(p)}. \quad (29)$$

Формулы для полиномов числителя $N_2(p)$ и знаменателя $D_2(p)$ здесь не приводятся.

Анализ (29) показывает, что двукратноинтегрирующая СПР скорости совместно с НС2 имеет нулевой астатизм по возмущающему воздействию. Следовательно, она должна иметь статическую ошибку при действии момента сопротивления M_c на вал двигателя. Для определения статической ошибки примем в (29) $p=0$, получим

$$W_2 = \frac{\omega(0)}{M(0)} = - \frac{1}{l_2 + \frac{1}{R_3} (C\Phi) (l_1 L_3 + (C\Phi)_1)},$$

откуда для статической ошибки с учетом значений коэффициентов обратных связей в НС2 $l_1(23)$ и $l_2(24)$ при $\beta_c = 0$ найдем

$$\Delta\omega_{ст} = - \frac{Rl}{(C\Phi)} \frac{\Omega_{0.дв}^2}{\omega_{он}^2}. \quad (30)$$

Если пренебречь, как это обычно делается, влиянием обратной связи по ЭДС двигателя и не учитывать ее также при синтезе НС2, когда коэффициенты обратных связей в нем соответствует выражениям (25) и (26), то это не изменит статической ошибки, которая по-прежнему будет определяться соотношением (30). Таким образом, можно заключить, что обратная связь по ЭДС двигателя не влияет на значение статической ошибки в двукратноинтегрирующей СПР, дополненной НС2.

Проведем сравнительный анализ статических ошибок в рассматриваемой ЭМС с НС2 в традиционной однократноинтегрирующей СПР скорости, настроенной на модульный оптимум [17], и в однократноинтегрирующей СПР с НС2, синтез которой выполнен авторами в [13].

Последние две системы имеют статические ошибки:

$$\Delta\omega_{\text{ст СПР П-РС}} = -\frac{RI}{(CF)} \frac{4T_\mu}{T_M}; \quad (31)$$

$$\Delta\omega_{\text{ст СПР с НС2}} = -\frac{RI}{(CF)} \frac{\left(1 + 4T_\mu \left(1,41\omega_{\text{он}} - \frac{1}{T_3}\right)\right) \Omega_{\text{одв}}^2}{\omega_{\text{он}}^2}, \quad \beta_c = 0. \quad (32)$$

Найдем степень ξ_i уменьшения статической ошибки $\Delta\omega_{\text{ст}}$ в ЭМС с НС2 по отношению к СПР с П-РС ξ_1 и к СПР с П-РС дополненной НС2. В результате для ξ_1 получим

$$\xi_1 = \frac{\Delta\omega_{\text{ст СПР П-РС}}}{\Delta\omega_{\text{ст}}} = 4T_\mu T_3 \omega_{\text{он}}^2 = 4 \frac{T_3}{T_\mu} K^2. \quad (33)$$

Если принять $K=2$, $T_3=10T_\mu$, то статическая ошибка в рассматриваемой ЭМС (рис. 2) с редуцированным наблюдателем НС2 по сравнению с традиционной однократноинтегрирующей СПР скорости уменьшится в 160 раз, т.е. более чем на два порядка. Ошибка еще может быть уменьшена ($K>2$) при соответствующем увеличении среднегеометрического корня $\omega_{\text{он}}$ (11) в НС2.

Для степени уменьшения статической ошибки ξ_2 найдено

$$\xi_2 = 1 + 4T_\mu \left(1,41\omega_{\text{он}} - \frac{1}{T_3}\right) \approx 1 + 4\sqrt{2} K. \quad (34)$$

Если принять $K=2$, то ошибка $\Delta\omega_{\text{ст}}$ в данном случае по сравнению с $\Delta\omega_{\text{ст СПР с НС2}}$ уменьшается более чем в 10 раз, т.е. на порядок.

Для определения астатизма ЭМС с НС2 по управляющему воздействию найдена передаточная функция разомкнутой системы рис. 2, имеющая вид

$$W_{\text{раз}}(p)_u = \frac{(T_3 p + 1) N_3(p)}{8T_\mu p D_3(p)}. \quad (35)$$

Из (35) следует, что, как и в случае традиционной двукратноинтегрирующей СПР скорости, учет обратной связи по ЭДС двигателя фактически делает систему однократноинтегрирующей. Однако, если принять $(CF)_1 = (CF)_2 = 0$, то для передаточной функции разомкнутой системы рис. 2 в случае с редуцированным наблюдателем НС2 и пренебрежением влияния ЭДС двигателя можно записать

$$W_{\text{раз}}^*(p)_u = \frac{T_3 p + 1}{8T_\mu p^2 D_3^{**}(p)} N_3^*(p). \quad (36)$$

Легко видеть, что с общепринятым допущением $(CF)_{\omega=0} = 0$ рассматриваемая ЭМС с НС2 остается двукратноинтегрирующей, т.е. имеет астатизм второго порядка ($\nu_u = 2$) по управляющему воздействию, а следовательно, сохраняет все динамические свойства по управлению, присущие исходной двукратноинтегрирующей СПР с ПИ-РС.

Таким образом, можно заключить, что двукратноинтегрирующая СПР с ПИ-РС и НС2 не изменяет астатизм по управлению, но теряет астатизм 1-го порядка по возмущающему воздействию. Это приводит к появлению статических ошибок, которые по сравнению с аналогичными ошибками в других системах существенно уменьшаются.

Исследования проводились, как и в [9], при следующих параметрах силовой части электропривода ТП-Д: $K_{\text{тп}}=51,3$, $T_\mu=0,004$ с, $R_3=0,087$ Ом, $L_3=6,873 \cdot 10^{-3}$ Гн, $T_3=0,079$ с, $J=20$ кг·м², $(CF)=2,68$ В·с, $T_M=0,242$ с, $U_H=440$ В, $I_H=400$ А, $\omega_H=157$ с⁻¹, $M_H=1070$ Н·м, $\Omega_{\text{одв}}^2=52,2$ с⁻², $\Omega_{\text{о.у.}}^2=3164,5$ с⁻².

Были определены параметры СПР с ПИ-РС: $U_{\text{зс}}=10$ В, $K_{\text{дт}}=0,005$ В/А, $K_{\text{дс}}=0,0638$ В·с, $K_{\text{рт}}=3,35$, $K_{\text{рс}}=36,5$, $4T_{\mu\text{с}}=8T_\mu=0,032$ с, $\pm U_{\text{огр.с}}=10$ В, $\pm U_{\text{огр.тока}}=K_{\text{дт}} \lambda I_H=0,005 \cdot 2,5 \cdot 400=5$ В, время работы задатчика интенсивности (ЗИ) $T_{\text{зи}}=t_{\text{разг}}=2$ с.

При синтезе наблюдателей НС5 ($n=5$) и НС2 ($n=2$) принято значение среднегеометрического корня $\omega_{\text{он}}=K/T_\mu=2/T_\mu=500$ с⁻¹ и найдены следующие значения матриц L_1 и L_2 обратных связей:

$$L_{1-500} = |2,9478 \cdot 10^6 \quad -9,0661 \cdot 10^6 \quad 1,9384 \cdot 10^7 \quad 6,8583 \cdot 10^6 \quad 1,357 \cdot 10^3|;$$

$$L_{2-500} = |1,8 \cdot 10^6 \quad 6,923 \cdot 10^2|.$$

Системы на рис. 1 и 2 исследовались при трех видах возмущающего воздействия (нагрузки): $M_{c1}=1070=\text{const}$; $M_{c2}=\omega t=1070t$; $M_{c3}=\varepsilon t^2/2=535t^2/2$.

На приведенных ниже осциллограммах (рис. 3–8), полученных при моделировании, показаны результаты некоторых экспериментов.

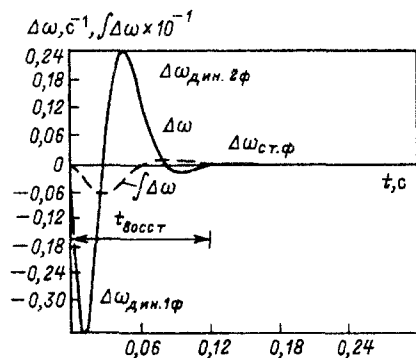


Рис. 3. Переходная характеристика статической ошибки и ее интегральное значение для ЭМС с НС5 при $M_{c1} = 1070 \text{ Н·м}$

На рис. 3 — переходная характеристика ошибки и ее интегральное значение в ЭМС рис. 1 с НС5 при подаче возмущающего воздействия M_{c1} и $\omega_{он} = 500 \text{ с}^{-1}$. При теоретическом значении статической ошибки $\Delta\omega_{ст.т} = 0$ фактически получено $\Delta\omega_{ст.ф} = -4,3 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1} \approx 0$, $\Delta\omega_{дин.1ф} = -0,37 \text{ с}^{-1}$, $\Delta\omega_{дин.2ф} = +0,24 \text{ с}^{-1}$; время восстановления скорости составляет $t_{восст} = 0,12 \text{ с}$.

Интересно отметить, что в трехкратноинтегрирующей СПР скорости [2] $\Delta\omega_{дин.1} = -7,63 \times 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $\Delta\omega_{дин.2} = 6,7 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, а время восстановления скорости $t_{восст.3} = 0,16 \text{ с} = 1,33 t_{восст}$.

Следует сказать, что анализируемая ЭМС оказалась практически нечувствительной к значению среднегеометрического корня НС5. Так, при $\omega_{он} = 750 \text{ с}^{-1}$ ($k=3$) и $\omega_{он} = 1000 \text{ с}^{-1}$ ($k=4$) получены следующие результаты:

$L_{1-750} = |2,2384 \cdot 10^7 - 7,0878 \cdot 10^7 7,9395 \cdot 10^7 1,7484 \cdot 10^8 2,167 \cdot 10^3|$
и $\Delta\omega_{ст.ф} = -4,3 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$, $\Delta\omega_{дин.1ф} = -0,37 \text{ с}^{-1}$,
 $\Delta\omega_{дин.2ф} = 0,2419 \text{ с}^{-1}$, $t_{восст} = 0,12 \text{ с}$;

$L_{1-1000} = |9,4328 \cdot 10^7 - 3,0295 \cdot 10^8 2,0668 \cdot 10^8 3,3 \cdot 10^7 2,977 \cdot 10^3|$
и $\Delta\omega_{ст.ф} = -4,3 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$, $\Delta\omega_{дин.1ф} = -0,37 \text{ с}^{-1}$,
 $\Delta\omega_{дин.2ф} = 0,2422 \text{ с}^{-1}$, $t_{восст} = 0,12 \text{ с}$.

На рис. 4 — то же, что и в опыте 1, но при M_{c2} и $\omega_{он} = 500 \text{ с}^{-1}$. Видно фактическое отсутствие ошибки $\Delta\omega_{ск}$ по скорости изменения момента сопротивления ($\Delta\omega_{ск.ф} \approx 3,221 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$), что подтверждает доказанный астатизм 2-го порядка

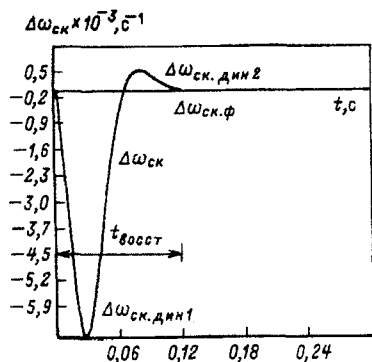


Рис. 4. Переходная характеристика ошибки по скорости изменения момента сопротивления для ЭМС с НС5 при $M_{c2} = 1070 \text{ Н·м}$

$\nu_m = 2$ ЭМС с НС5 по возмущающему воздействию. При этом для динамических ошибок получено $\Delta\omega_{ск.дин1} = -6,606 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ и $\Delta\omega_{ск.дин2} = +5,028 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$; время восстановления скорости также составляет величину $t_{восст} = 0,12 \text{ с}$.

На рис. 5 — то же, что и в опыте 1, но при M_{c3} и $\omega_{он} = 500 \text{ с}^{-1}$. Система рис. 1 имеет ошибку $\Delta\omega_{\varepsilon} = -1,097 \cdot 10^{-4}$ при наличии ускоре-

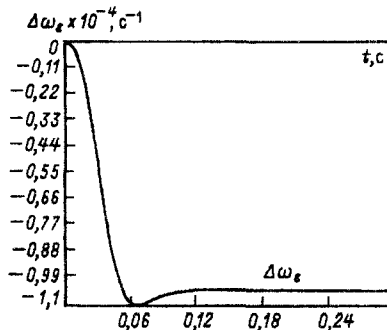


Рис. 5. Переходная характеристика ошибки по ускорению изменения момента сопротивления для ЭМС с НС5 при $M_{c3} = 535 t^2 / 2 \text{ Н·м}$

ния ε в изменении момента сопротивления, действующего на вал двигателя. Это еще раз свидетельствует об астатизме 2-го порядка по возмущающему воздействию в ЭМС с НС5.

На рис. 6 — переходная характеристика для скоростной ошибки $\delta_{ск}$ при разгоне ЭМС рис. 1 от ЗИ на холостом ходу и $\omega_{он} = 500 \text{ с}^{-1}$. Для фактического значения скоростной ошибки получено $\delta_{ск} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1} = 0$, что подтверждает астатизм 2-го порядка $\nu_u = 2$ данной системы по управляющему воздействию. При этом динамические значения скоростной ошибки $\delta_{ск.дин1} = -\delta_{ск.дин2} = 0,07058 \text{ с}^{-1}$.

На рис. 7 — то же, что и в опыте 1, но для ЭМС рис. 2 с НС2.

При различных значениях среднегеометрического корня получены следующие расчетные и фактические значения для статической и динамических ошибок:

$\omega_{он} = 500 \text{ с}^{-1}$: $\Delta\omega_{ст.расч}(33) = -2,7 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$,
 $\Delta\omega_{ст.ф} = -2,714 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $\Delta\omega_{дин.1} = -0,489 \text{ с}^{-1}$,

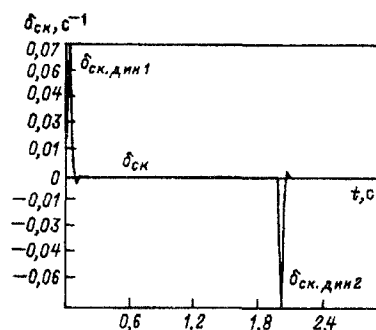


Рис. 6. Переходная характеристика скоростной ошибки по управлению для ЭМС с НС5 при $U_{3с} = 5t$

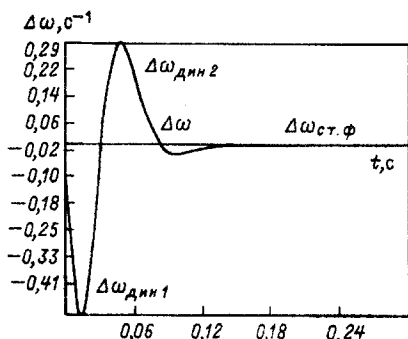


Рис. 7. Переходная характеристика статической ошибки для ЭМС с НС2 при $M_{c1}=1070 \text{ Н}\cdot\text{м}$

$$\Delta\omega_{\text{дин.2}} = 0,294 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{\text{он}} = 750 \text{ с}^{-1}; \Delta\omega_{\text{ст.расч}}(33) = -1,2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1},$$

$$\Delta\omega_{\text{ст.ф}} = -1,208 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}, \Delta\omega_{\text{дин.1}} = -0,451 \text{ с}^{-1},$$

$$\Delta\omega_{\text{дин.2}} = 0,277 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{\text{он}} = 1000 \text{ с}^{-1}; \Delta\omega_{\text{ст.расч}}(33) = -6,77 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1},$$

$$\Delta\omega_{\text{ст.ф}} = -6,81 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}, \Delta\omega_{\text{дин.1}} = -0,43 \text{ с}^{-1},$$

$$\Delta\omega_{\text{дин.2}} = 0,267 \text{ с}^{-1}.$$

Видно полное совпадение расчетных и фактических значений для статической ошибки, а также малая зависимость динамических ошибок от среднегеометрического корня НС2.

На рис. 8 — аналогичный по всем параметрам процесс изменения тока при разгоне двигателя

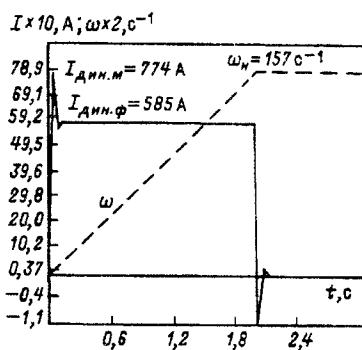


Рис. 8. Процесс разгона двигателя в ЭМС с НС5, НС2 и двукратноинтегрирующей СПР

до скорости $\omega_n = 157 \text{ с}^{-1}$ на холостом ходу от ЗИ ($t_{\text{разг}} = 2 \text{ с}$) для традиционной двукратноинтегрирующей СПР с ПИ-РС, ЭМС (рис. 1) с НС5 и ЭМС (рис. 2) с НС2. Расчетное значение динамического тока составляет $I_{\text{дин.расч}} = 585 \text{ А}$ и совпадает с фактическим. При этом пере-регулировании по току для всех систем $\sigma_I = 32,6\%$, которое легко уменьшается известными методами. Можно заключить, что введение в состав СПР с ПИ-РС наблюдателей НС5 и НС2 не влияет на динамические характеристики, вызываемые изменением управляющего воздействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов Б.И., Подлесный Н.И., Рюмшин Н.П. и др. Многоканальные системы повышенной точности и живучести. — Киев: Вища школа, 1994.
2. Миткевич В.Г., Церазова Е.А., Ямпольский Д.С. Динамика трехкратноинтегрирующей системы подчиненного регулирования привода постоянного тока. — Электричество, 1981. № 1.
3. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1972.
4. Акимов Л.В., Колотило В.И. Формирование сигнала, пропорционального моменту нагрузки, в электроприводах с системами подчиненного регулирования и наблюдателями состояния. — Электротехника, 1998. № 2.
5. Борцов Ю.А., Соколовский Г.Г. Автоматизированный электропривод с упругими связями. — СПб.: Энергоатомиздат, 1992.
6. Потапенко Е.М. Сравнительная характеристика робастных систем управления с различными типами наблюдателей. — Изв. РАН. Теория и системы управления, 1995. № 1.
7. Потапенко Е.М. Робастные комбинированные системы управления с наблюдателями. — НАН Украины. Проблемы управления и информатики, 1995. № 2.
8. Алферов В.Г., Ха Куанг Фуок. Цифровое наблюдающее устройство с прогнозированием. — Электротехника, 1992. № 3.
9. Старостин С.С. Наблюдатель-предиктор состояния в цифровой системе регулирования скорости электропривода. — В сб.: Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика / Под ред. В.Б. Клепикова, Л.В. Акимова. — Харьков: Основа, 1997.
10. Алферов В.Г., Елисеев Д.А. Принципы построения систем электроприводов позиционных механизмов с прогнозированием. — В сб.: Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика / Под ред. В.Б. Клепикова, Л.В. Акимова. — Харьков: Основа, 1996.
11. Потапенко Е.М. Робастное управление роботами. — Изв. РАН. Техническая кибернетика, 1993. № 3.
12. Акимов Л.В., Долбня В.Т., Клепиков А.В. Об итерационности по возмущению модальных систем, замкнутых по вектору состояния через наблюдатель. — В сб.: Автоматизированные электромеханические системы с модальными регуляторами и наблюдателями состояния. — Харьков: ХГПУ, 1997.
13. Акимов Л.В., Долбня В.Т., Колотило В.И. Об астатических свойствах и ошибках СПР скорости, замкнутой через наблюдатель состояния. — В сб.: Автоматизированные электромеханические системы с модальными регуляторами и наблюдателями состояния. — Харьков: ХГПУ, 1997.
14. Акимов Л.В., Долбня В.Т., Колотило В.И. Обобщенный анализ быстродействия СПР скорости, замкнутых через наблюдатели состояния. — Вестник ХГПУ, вып. 10. — Харьков: ХГПУ, 1998.
15. Соколов Н.Н. Синтез линейных систем автоматического регулирования при случайных воздействиях. — М.: Энергия, 1964.
16. Долбня В.Т. Топологические методы анализа и синтеза электрических цепей и систем. — Харьков: Вища школа, 1974.
17. Лебедев Е.Д., Неймарк В.Е., Пистрак М.Я., Слежановский О.В. Управление вентильными электроприводами постоянного тока. — М.: Энергия, 1970.

[18.11.97]

Авторы: Акимов Леонид Владимирович окончил электромашиностроительный факультет Харьковского государственного политехнического университета (ХГПУ) в 1961 г. В 1989 г. защитил докторскую диссертацию в Московском энергетическом институте по теме «Оптимальное управление электроприводами постоянного тока». Профессор кафедры «Автоматизированные электромеханические системы» ХГПУ.

Долбня Виктор Тимофеевич окончил электромашиностроительный факультет ХГПУ в 1955 г. В 1980 г. защитил докторскую диссертацию в Институте электродинамики АН УССР по теме «Топологические методы исследования сложных электромеханических систем». Профессор кафедры «Автоматизированные электромеханические системы» ХГПУ.

Колотило Виталий Иванович окончил электромашиностроительный факультет ХГПУ в 1996 г. Аспирант кафедры «Автоматизированные электромеханические системы» ХГПУ.

Логические методы диагностики технического состояния электрических машин

ГАШИМОВ М.А.

С помощью физического моделирования наиболее часто встречающиеся в практике неисправности электрических машин исследованы в режимах холостого хода и нагрузки машины. Установлено влияние отдельных неисправностей на электромагнитные, вибрационные и акустические процессы и определены параметры контроля соответствующих неисправностей. Предложен алгоритм диагностической процедуры, позволяющий сделать экспресс-оценку технического состояния и определить неисправности в электрических машинах на начальных этапах их возникновения в рабочих условиях.

Ключевые слова: электрические машины, неисправности, диагностика технического состояния, параметры контроля, моделирование

Немногочисленные методы диагностического контроля технического состояния, определения работоспособности и поиска повреждений электрических машин оказываются малоэффективными для применения на работающей машине и не могут предупреждать о возникновении неисправностей.

Главная трудность в решении данной задачи заключается в том, что пока недостаточно исследованы отдельные неисправности электрических машин на предмет получения диагностирующей информации и не определены специальные информативные параметры или признаки (диагностические параметры), характеризующие изменение величин и характеристик электромагнитного, вибрационного и акустического процессов их функционирования при возникновении соответствующих неисправностей. Важность решения данной проблемы поднимается в [1], в которой проводятся конкретные исследования по определению параметров диагностического контроля электрических машин. Знание таких параметров позволит предложить новые эффективные способы диагностического контроля непосредственно в процессе работы машины и при этом применить методы общетехнической диагностики [2, 3, 4].

В настоящей статье рассматривается возможность применения достижений общетехнической диагностики контроля технического состояния электрических машин в условиях работы и получения диагностирующей информации для этих целей.

В отличие от ряда других технических устройств, динамические свойства которых харак-

The most frequent faults of electrical machines are analysed with a help of a physical simulation under load and no-load regimes. The influence of certain faults on electromagnetic, vibrational and acoustic processes is established. Control parameters of corresponding faults are determined. An algorithm for a diagnostic procedure which makes it possible to estimate the technical state and to detect faults in electric machines at initial stages of their appearance under operating conditions.

Key words: electrical machines, diagnostic of technical state, control parameters, simulation

теризуются лишь отдельными процессами (магнитными, механическими, акустическими, тепловыми и др.), в электрической машине динамические свойства функционирования характеризуются совокупностью всех этих процессов. Между главными функциональными узлами машины (обмотка статора, сердечник, воздушный зазор, ротор, подшипниковые узлы) существуют не только тесные электромагнитные и механические связи, имеется взаимозависимость между техническими состояниями этих узлов (динамическая связь). Это означает, что при возникновении физического повреждения (непосредственной неисправности) в каком-либо одном узле в других диагностически связанных узлах появляются условные неисправности. Они проявляются как результат изменения электромагнитных, вибрационных и акустических процессов функционирования связанных узлов. Действия условных неисправностей обусловлены, например, нарушением равномерности распределения индукции в зазоре, напряжения и токов в катушечных группах и параллельных ветвях обмотки статора, появлением дополнительных высших гармоник, неравномерным магнитным притяжением и др.

Здесь следует напомнить о широко используемой медицинской диагностике, когда болезнь одного органа определяется по отклонениям в других.

В общем случае техническое состояние электрической машины, как и техническое состояние любого технического объекта [2, 3], может быть описано множеством параметров или признаков, характеризующих свойство процессов функцио-

пирования. Обозначая символом X n -мерный вектор, составляющими которого являются значения параметров x_1, x_2, \dots, x_n , характеризующих действия внешних (входных) факторов возмущения (например, приложенного напряжения), символом Y — m -мерный вектор параметров y_1, y_2, \dots, y_m , характеризующих энергетические показатели работы, а символом Z — k -мерный вектор параметров z_1, z_2, \dots, z_k , характеризующих свойство технического состояния (процессов функционирования), запись результатов измерения вида

$$R = f(X_n, Y_m, Z_k, t) \tag{1}$$

может рассматриваться как модель исправного состояния заданной формы (табличной, аналитической и т.д.). Подобные модели характеризуют зависимость результатов диагностических проверок от параметров входного возмущения (X), энергетических показателей (Y), параметров и характеристик технического состояния (Z).

Практика эксплуатации электрических машин показывает, что на начальных этапах возникновения неисправностей главные энергетические показатели могут оставаться в заданных значениях, но резко меняются при явно выраженных повреждениях. С учетом этого при нормальных параметрах входного возмущения отклонение параметров технического состояния в отдельных узлах от начальных (эталонных) при возникновении i -й неисправности может быть представлено в виде

$$R_{s(i)} = f(X_n, Y_m, Z_{s(i)}, Z_{s(j/i)}, t), \tag{2}$$

где $Z_{s(i)}$ — множество (набор) параметров или признаков, характеризующих изменения технического состояния поврежденного узла при i -й неисправности $s(i)$; $Z_{s(j/i)}$ — множество параметров или признаков, характеризующих изменение технического состояния других узлов, обусловленное действиями j -х условных неисправностей $s(j/i)$.

Следовательно, при заданной i -й неисправности множество неисправностей в машине может быть выражено так:

$$S = f\{s(i), s(j/i)\}. \tag{3}$$

Множество технических состояний машины с учетом исправного состояния и состояний при неисправности определяется состояниями как поврежденного узла, так и других узлов, в которых проявляются действия условных неисправностей:

$$E = f\{e_n, e_{s(i)}, e_{s(j/i)}\}. \tag{4}$$

Множество неисправностей и обусловленное им множество технических состояний в машине

может быть описано с помощью набора (множества) соответствующих диагностических параметров или признаков:

$$Z = f\{Z_n, Z_{s(i)}, Z_{s(j/i)}\}. \tag{5}$$

Располагая набором диагностических параметров, характеризующих соответствующие неисправности, или набором контрольных измерений, результаты (R_j) которых могут иметь только положительный (1) и отрицательный (0) исходы, удобно построить математическую модель технического состояния электрической машины, имеющую логический характер [2, 3], например, в виде булевой матрицы (таблицы функции неисправностей):

R		Множество элементарных проверок $\{\Pi\}$					
		π_1	π_2	...	π_i	...	π_n
Множество неисправностей электрической машины $\{S\}$	$S(1)$	$R_{1(1)}$	$R_{2(1)}$...	$R_{i(1)}$...	$R_{n(1)}$
	$S(2)$	$R_{1(2)}$	$R_{2(2)}$...	$R_{i(2)}$...	$R_{n(2)}$

	$S(j)$	$R_{1(j)}$	$R_{2(j)}$...	$R_{i(j)}$...	$R_{n(j)}$
	$S(n)$	$R_{1(n)}$	$R_{2(n)}$...	$R_{i(n)}$...	$R_{n(n)}$

Булевая матрица очень удобна для построения минимальных диагностических тестов, включающих набор некоторых элементарных проверок, определение которых, как известно, заключается в том, что для заданной булевой матрицы необходимо найти минимальное множество столбцов, так чтобы каждая строка имела 1, по крайней мере, в одном из столбцов матрицы:

$$T_i = \{\pi_i, \pi_j, \dots\}. \tag{6}$$

Реализовав такие диагностические тесты, можно определить соответствующие неисправности машины. В частности, это можно сделать в результате тестовых элементарных проверок типа*:

$$\exists \pi_i \in \Pi (R \neq 0) \vee Z_i = 1 \rightarrow S(i), \tag{7}$$

означающих, что результат некоторой элементарной проверки (π_i) из множества проверок (Π) будет отличаться от нуля ($R \neq 0$), или для заданного диагностического параметра имеется положительный исход ($Z_i = 1$), если в машине возникла $S(i)$ неисправность.

Как видно, в решении поставленной задачи важное значение имеет определение информативных параметров, характеризующих соответ-

* В (7) использованы символики математической логики: \exists (некоторые из); \in (входящие в); \vee (дизъюнкция (или)); \rightarrow (импликация (если)).

ствующие неисправности диагностически взаимосвязанных узлов.

Для предварительного определения диагностических параметров и последующей их экспериментальной проверки считается целесообразным построить логическую (диагностическую) модель электрической машины с учетом диагностических взаимосвязей между ее функциональными узлами. Следует отметить, что существующие в настоящее время в небольшом количестве логические модели построены главным образом для объектов автоматизированных и электронных систем [3], для энергетических объектов такие модели практически отсутствуют.

При построении диагностической модели электрической машины она рассматривается как конечное множество связанных между собой функциональных узлов — объектов диагноза, для которых построены диагностические модели [5]. Свойства технического состояния каждого узла зависят от совокупности возникающих в нем воздействий, в число которых могут входить также косвенные воздействия других узлов. Два узла машины диагностически связаны между собой, если неисправность первого вызывает определенную неисправность в техническом состоянии второго; такая модель может быть построена для каждой заданной неисправности.

Для примера на рис. 1 предлагается обобщенная диагностическая модель электрической машины переменного тока, построенная для случая, когда в обмотке статора возникают электрические повреждения (междувитковые или междуфазные замыкания). Диагностические воздействия поврежденного узла на другие узлы показаны стрелками. Для наглядности диагностические воздействия от токов в КЗ контуре, который образуется в обмотке статора при междувитковых и междуфазных замыканиях, пока-

заны пунктирными стрелками, хотя отклонения параметров в функциональных узлах являются результатом совместных действий всех токов в обмотке статора.

Для примера рассмотрим подход к определению набора предварительных параметров, характеризующих изменения электромагнитного и вибро-акустических процессов при электрических повреждениях в обмотке статора, допуская, что в данном случае нет необходимости глубокого аналитического анализа физических процессов.

Основные признаки междувиткового и междуфазного замыканий: обмотка статора местами сильно нагревается; токи в отдельных фазах неодинаковы; усиливаются шум и вибрации машины и др. [6]. Однако явно эти признаки проявляются только на окончательных этапах повреждений, когда возникает соединение металла в местах замыкания и токи в короткозамкнутом контуре достигают больших значений, т.е. при выходе машины из строя. На начальных же стадиях возникновения этих неисправностей требуются определенные усилия по их диагностированию. Известно, что МДС обмотки каждой фазы статора представляет собой сумму неподвижных в пространстве и пульсирующих во времени гармоник:

$$F_{\phi} = \sum_{\nu=1,3,5,\dots} F_{\phi\nu} \sin \omega t \cos \nu \alpha, \quad (8)$$

при этом в отличие от первой и ряда высших гармоник результирующая МДС от третьей гармоники (и кратных ей) в пространстве воздушного зазора машины отсутствует, так как из-за симметрии трехфазной обмотки МДС, созданные токами третьей гармоники, совпадают по фазе и их сумма равна нулю.

Однако при междувитковом и междуфазном замыкании МДС, созданные токами третьей гармоники в трех фазах статора, создают уже несимметричную систему и их сумма не равняется нулю. В результате в воздушном зазоре появляется результирующая МДС частоты $3f_1$ (f_1 — основная частота), вращающаяся в направлении основной гармоники и индуцирующая в обмотке статора ЭДС частоты $3f_1$:

$$E_{\nu=3} = 4,44 w_1 k_{об \nu=3} 3f_1 \Phi_{\nu=3}. \quad (9)$$

При рассматриваемых неисправностях в обмотке статора образуется отдельный КЗ контур, в котором должна происходить ча-

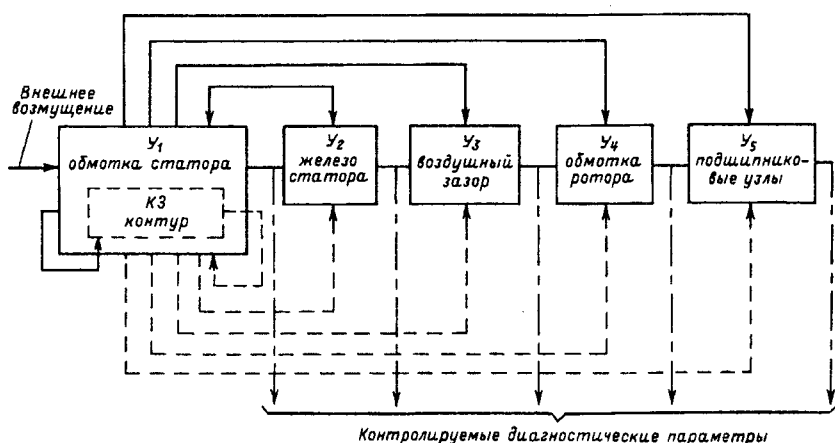


Рис. 1. Пример обобщенной диагностической модели электрической машины переменного тока

стичная компенсация третьей гармоники, т.е. ее значение должно уменьшаться. По мере усугубления неисправностей (увеличения токов в КЗ контуре) усиливается несимметрия токов в фазах и, как следствие, увеличивается результирующий поток третьей гармоники в зазоре, что приводит к росту ЭДС (9) и одновременно к увеличению третьей гармоники в неповрежденных фазах.

В синхронной машине ток в КЗ контуре может имитировать некоторую индуктивную нагрузку, т.е. создавать дополнительную реакцию якоря статора и оказывать определенное влияние на основной поток возбуждения, особенно в режиме холостого хода (ХХ).

При работе поврежденной машины в режиме ХХ, когда ток в фазах статора отсутствует, поток реакции якоря обусловлен только токами повреждения, т.е. токами в КЗ контуре. Амплитуду МДС реакции якоря от данного тока можно принять равной:

$$F_{ak} \approx \frac{m\sqrt{2}}{\pi} w_k \frac{1}{p} I_k, \quad (10)$$

где w_k — число короткозамкнутых витков в поврежденных фазных обмотках; I_k — ток в КЗ контуре.

Учитывая, что при междувитковом и междуфазном замыканиях ток в КЗ контуре, в основном, имеет индуктивный характер, обусловленный им поток реакции якоря будет оказывать продольно-размагничивающее действие основному потоку возбуждения. По этой причине при заданном возбуждении индуктированная в фазных обмотках ЭДС (в частности, основной гармоники) должна несколько уменьшаться. Очевидно, степень такого влияния должна зависеть от значения тока в КЗ контуре.

Вышеупомянутые параметры электромагнитного процесса, в том числе его гармонические составляющие, к которым можно добавить также переменные величины, индуктируемые в обмотке возбуждения при рассматриваемых повреждениях, являются предварительными параметрами диагностического контроля. Аналогично могут быть выделены параметры, обусловленные влияниями повреждений на вибрационные и акустические процессы функционирования [7].

Из вышеизложенного следует, что при электрических КЗ в обмотке статора (неисправности узла Y_1) условные неисправности могут возникать в других узлах, что на модели рис. 1 показано стрелками, направленными от поврежденного узла к соответствующим узлам:

$$S(Y_1) \rightarrow S(Y_2/Y_1) \wedge S(Y_3/Y_1) \wedge S(Y_4/Y_1) \wedge S(Y_5/Y_1), \quad (11)$$

где \wedge — знак логического умножения (конъюнкция) означает «и».

конъюнкция) означает «и».

Важное значение имеет экспериментальная проверка предварительных диагностических параметров и определение данных количественного и качественного изменения их при соответствующих неисправностях. С этой целью по специально разработанной методике с применением физического моделирования проведены натурно-экспериментальные исследования ряда неисправностей электрических машин (междувитковые и междуфазные замыкания в обмотке статора, неравномерность воздушного зазора между статором и ротором, обрыв стержней короткозамкнутого ротора).

Сущность методики заключается в том, что, задавая отдельные неисправности искусственно в условиях работы машины в режимах ХХ и нагрузок, определены степень и характер влияния их на параметры и характеристики электромагнитного, вибрационного и акустического процессов функционирования.

Эксперименты проводились как на машинах, работающих на электростанциях, так и на отдельных образцах; предварительно проверялась их исправность.

Установлено влияние междувиткового и междуфазного замыканий на вибросмещение (A), вибрационную скорость (v), вибрационное ускорение (a), средний уровень шума (L), а также на гармонические составляющие указанных параметров. Получены временные функции всех этих величин [8, 9].

Для примера в табл. 1 приведена часть экспериментальных данных, полученных на асинхронном двигателе типа А160 МОЧ, 18,5 кВт, а на рис. 2 — осциллограммы вибрационного

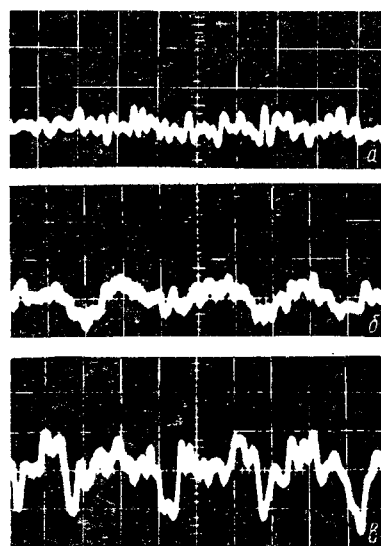


Рис. 2. Осциллограммы вибрационного ускорения при междувитковом замыкании: а — неисправность отсутствует; б — неисправность задана (ток в КЗ контуре 15 А); в — неисправность задана (ток в КЗ контуре 40 А)

Таблица 1

Параметры вибрационного и акустического процессов фун- кционирования	Режим холостого хода, состояние обмотки						Режим нагрузки $I=0,5I_{н\text{.}}$ состояние обмотки				
	исправ- ное	междувитковое за- мыкание в фазе С, токи в КЗ контуре, А			междуфазное замы- кание в фазах А и В, токи в КЗ контуре, А		исправ- ное	междувитковое за- мыкание в фазе С, токи в КЗ контуре, А		междуфазное замыка- ние в фазах А и В, токи в КЗ контуре, А	
		15	30	40	15	30		15	30	15	30
Вибросмещение, А, мкм	45	55	60	65	55	60	100	120	130	120	150
Вибрационная скорость, v , мм/с	2	3	3,7	4,8	3,5	4,6	3	3,5	4,5	4	5,3
Вибрационное ускорение, a , $\text{м}^2/\text{с}$	4	5,5	7,5	9	6	9	5	6,5	8	6,5	9,2
Уровень шума, L, дБ	58	69	72	76	69	72	57	60	68	60	64

Таблица 2

Сумма модулей коэффициентов ряда Фурье	Состояние обмотки статора				
	исправное	междувитковое замыкание (токи в КЗ контуре)		междуфазное замыкание (токи в КЗ контуре)	
		15 А	40 А	15 А	40 А
$\sum a_k$	26	56	104	53	140
$\sum b_k$	24	52	119	60	165

ускорения при междувитковом замыкании в обмотке статора данного двигателя.

В табл. 2 приведены данные, полученные из обработки осциллограммы вибрационного ускорения при междувитковом и междуфазном замыканиях.

Анализ результатов данного исследования показывает, что наиболее чувствительными к электрическим повреждениям являются гармонические составляющие.

Экспериментальные исследования междувиткового и междуфазного замыканий на асинхронном электродвигателе типа ЧА160МОЧ, 18,5 кВт (обмотка статора соединена в треугольник) и синхронном генераторе типа ЕС, 12,8 кВт (обмотка статора соединена в звезду) показали, что указанные неисправности приводят к уменьшению третьей гармоники (происходит ее частичная компенсация) в поврежденных фазах С, В при междувитковом замыкании, в фазах А, В и В, С при междуфазном замыкании, одновременно она увеличивается в неповрежденных фазах. Поэтому несимметрия третьих гармоник в фазных величинах проявляется в большей степени (в 2÷2,5 раза), чем несимметрия полных фазных величин. В синхронной машине при заданном токе в КЗ контуре уменьшение первой гармоники в большей степени происходит при междуфазном замыкании и составляет до 15% ее значения при исправной обмотке, в то время как полное фазное напряжение уменьшается всего на 3%.

Изменение значений гармонических составляющих при междувитковом и междуфазном замыканиях определенным образом влияет и на

форму кривой фазных величин, что подтвердили снятые автором осциллограммы фазных токов в обмотке статора асинхронного двигателя ЧА160МОЧ. Следует отметить, что при заданной степени тяжести повреждений явных изменений главных энергетических показателей машины практически не наблюдалось. Подобным образом проведены исследования и других неисправностей, результаты которых опубликованы ранее.

Суть натурно-экспериментального исследования неисправности, обусловленной обрывом стержней короткозамкнутого ротора в асинхронных электродвигателях, заключается в том, что, предварительно создавая ее искусственно путем сверления стержня в пазу, в процессе различных режимов работы машины измерены и проанализированы пульсации фазных токов и их гармонические составляющие. Установлено, что по сравнению с амплитудами пульсаций полного фазного тока и его первой гармоники амплитуда пульсаций третьей гармоники почти в 3,5 раза больше, что, как наиболее информативный признак, предложено для диагностического контроля данной неисправности в короткозамкнутых асинхронных электродвигателях [10]. Установлено также, что при эксцентриситете искажается симметрия фазных токов и нарушается равномерность распределения напряжения в катушечных группах и токов в параллельных ветвях обмотки статора, появляются дополнительные гармоники, а также неравномерно растут их значения относительно первой гармоники, увеличиваются значения индуктивного сопротивления дифференциального рассеяния и входного сопротив-

ления z_k . Если при равномерном зазоре ($\epsilon=0\%$) третья гармоники в фазных напряжениях составляет 0,47; 0,42; 0,47%, то при эксцентриситете ($\epsilon=75\%$) она неравномерно возрастает во много раз, достигая значений 5% в фазе *A*, 4,1% в фазе *B* и 8,1% в фазе *C* [11].

Таким образом, экспериментальная проверка дает набор некоторых информативных параметров и признаков диагностического контроля неисправностей в электрических машинах. Как было указано выше, каждый из этих параметров или признаков (z_i) можно контролировать с помощью соответствующих элементарных проверок (π_i). В частности, для рассматриваемого набора такими элементарными проверками могут быть следующие:

π_1 — проверка признака неравномерного увеличения значений третьей гармоники в фазных величинах обмотки статора (z_1);

π_2 — проверка признака пульсации третьей гармоники в фазных величинах обмотки статора (z_2);

π_3 — проверка признака частичной компенсации третьей гармоники в фазных величинах одной фазной обмотки статора (z_3);

π_4 — проверка признака частичной компенсации третьей гармоники в фазных величинах двух фаз обмотки статора (z_4);

π_5 — проверка признака уменьшения основной гармоники в фазных величинах обмотки статора (z_5);

π_6 — проверка признака увеличения вибросмещения (*A*, мкм) в функциональных узлах (z_6);

π_7 — проверка признака увеличения скорости вибрации *v*, мм/с (z_7);

π_8 — проверка признака увеличения вибрационного ускорения *a*, мм/с² (z_8);

π_9 — проверка признака увеличения среднего шума в машине *L*, дБ (z_9);

π_{10} — проверка признака увеличения суммы абсолютных значений коэффициентов спектрального анализа (ряда Фурье) реализаций временных функций $v=f(t)$; $a=f(t)$ (z_{10});

π_{11} — проверка увеличения суммы абсолютных значений коэффициентов спектрального анализа (ряда Фурье) реализаций временных функций $L=f(t)$ (z_{11});

π_{12} — проверка признака увеличения сопротивления z_k обмотки статора (z_{12}).

В множество неисправностей пока включаются только вышеназванные неисправности электрических машин, т.е.:

$S(\epsilon)$ — неравномерность воздушного зазора (эксцентриситет);

S (обр.р.) — обрыв стержня короткозамкнутого ротора;

S (МВ) — междувитковое замыкание в обмотке статора;

S (МФ) — междуфазовое замыкание в обмотке

статора.

Булева матрица электрической машины, построенная для названного множества исследованных неисправностей, приведена ниже. На пересечении строк и столбцов представлены реальные результаты проверок цифрами 1 и 0, характеризующие положительную или отрицательную реакции параметров (признаков) диагностического контроля при реализации соответствующих элементарных проверок:

<i>R</i>		Множество элементарных проверок (Π)											
		π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}
Множество неисправностей (<i>S</i>)	$S(\epsilon)$	1	0	0	0	0	1	×	×	1	×	×	1
	S (обр.р.)	0	1	0	0	0	1	×	×	1	×	×	×
	S (МВ)	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	×
	S (МФ)	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	×

Результаты неисследованных реакций отдельных проверок при соответствующих неисправностях в матрице опущены и обозначены крестиками.

В общем случае множество элементарных проверок, необходимых для диагностического контроля неисправностей из данной матрицы, определяются следующим образом:

$\Pi(\epsilon) = \{\pi_1, \pi_6, \pi_9, \pi_{12}\};$ (12)

$\Pi(\text{обр.р.}) = \{\pi_2, \pi_6, \pi_9\};$ (13)

$\Pi(\text{МВ}) = \{\pi_3, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9, \pi_{10}, \pi_{11}\};$ (14)

$\Pi(\text{МФ}) = \{\pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9, \pi_{10}, \pi_{11}\}.$ (15)

Понятно, что для диагностического контроля указанных неисправностей использование элементарных проверок в объеме множества (12)–(15) не оправдано. Решение этой задачи требует построения минимальных диагностических тестов, для чего, как было отмечено, из матрицы необходимо найти минимальное множество столбцов, чтобы каждая строка имела 1, по крайней мере, в одном из столбцов. При этом требуемые операции диагностической процедуры при реализации элементарных проверок $\{\pi_1-\pi_4\}$ почти совпадают, так как во всех случаях контролируемым параметром является третья гармоника, выделяемая из фазных величин обмотки статора, различен только характер ее изменения. Поэтому можно использовать одну проверку, например π_1 , и только ее занести в матрицу неисправностей. С учетом отмеченного булеву матрицу можно упростить и показать в следующем виде:

<i>R</i>	π_1	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}
$S(\epsilon)$	1	0	1	0	0	1	0	0	1
S (обр.р.)	1	0	1	0	0	1	0	0	0
S (МВ)	1	1	1	1	1	1	1	1	0
S (МФ)	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Об одном методе определения вращающего момента электрических машин

СМОЛИН В.И., ТОПОЛЬСКИЙ Д.В., ГУДАЕВ Н.Н.

Описан метод определения вращающего и тормозного моментов электрических машин постоянного и переменного тока по их собственным параметрам: току, напряжению, частоте вращения и другим. Решается задача выбора алгоритмов обработки информации в измерительном устройстве, работающем в комплексе с электрической машиной. Анализируются возможности достижения современных требований по точности измерения с ошибкой на уровне 0,5...3,0%. Подобный метод определения вращающего момента позволяет во многих случаях отказаться от применения сложных измерительных устройств на валу машины.

Ключевые слова: электрическая машина, вращающий момент, измерение

Методы приближенной оценки механического (вращающего или тормозного) момента и мощности на валу электрических машин по собственным электрическим параметрам широко используются на практике. Вращающий и тормозной моменты часто определяют по току. Иногда применяют более сложные оценки, принимая во внимание ток возбуждения машин постоянного тока и скольжение ротора асинхронных машин. В представленной статье анализируется метод более точного определения механического момента электрических машин по их собственным параметрам, ориентированный на применение в этих целях современных измерительных и вычислительных средств. Решается задача выбора наиболее оптимальных алгоритмов обработки информации в измерительном устройстве, работающем в комплексе с электрической машиной, с точки зрения физической реализуемости устройства и получения максимально достоверной информации о механическом моменте на валу машины.

Метод решения задачи. Известные уравнения электромагнитного момента электрических машин содержат трудно контролируемые параметры, в частности магнитный поток, и не учитывают ряда факторов, что затрудняет непосредственное использование их для определения механического момента. Предлагаемый метод базируется на контроле энергетических преобразований, происходящих в машине [1]. Алгоритм механического момента содержит следующие уравнения [2]:

$$P_2 = P_1 \pm \sum_{i=1}^n \Delta P_i; \quad (1)$$

A method for determining a torque as well as a braking torque of DC and AC electrical machines by their own parameters: current, voltage, speed etc. is described. The problem of choosing algorithms for data processing in a measurement device operating in complex with an electrical machine is solved. The possibilities of meeting up-to-date requirements for the measurement accuracy with an error at the level 0,5—3% are analysed. Such a method for determining the torque makes it possible in many cases to refuse the application of complicated measurement devices on a machine shaft.

Key words: electrical machine, torque, measurement

$$P_2 = \omega M; \quad (2)$$

$$M = \frac{P_1 \pm \sum_{i=1}^n \Delta P_i}{\omega}, \quad (3)$$

где P_2 — механическая мощность на валу машины; P_1 — электрическая мощность; ω — угловая частота вращения; M — механический момент; $\sum_{i=1}^n \Delta P_i$ — сумма потерь мощности (знак «плюс» соответствует генераторному режиму, «минус» — двигательному).

Уравнение (3), полученное на основании энергетических преобразований в машине, является наиболее удобной математической моделью для физической реализации измерительного устройства. Объясняется это тем, что две наиболее весомые величины P_1 и ω , входящие в (3), можно достаточно точно контролировать. Третья

величина $\sum_{i=1}^n \Delta P_i$ составляет лишь малую часть

общей мощности. Требования к точности определения этой величины менее жесткие, зависят от КПД машины и существенно снижаются с его ростом. Параметры, от которых зависят суммарные потери мощности, относятся к группе факторов, не подлежащих точному учету. Начальные отклонения и случайные вариации этих параметров в процессе эксплуатации могут быть значительными. В то же время имеется устойчиво закономерная зависимость отдельных составляющих потерь мощности от ряда контролируемых величин: тока, напряжения, частоты вращения,

температуры обмоток и др. [3]. Такие зависимости удобно учитывать программным путем, имея в составе измерительного устройства микроконтроллер.

Точный контроль величин P_1 и ω , учет закономерных изменений суммы потерь мощности программными методами и оптимизация начальных значений параметров создают вполне реальные предпосылки для удовлетворения современным требованиям по точности определения механического момента. Дополнительные устройства на валу электрических машин при этом не требуются.

Алгоритм работы измерительного устройства. Рассмотрим более подробно алгоритмические основы работы измерительного устройства, ориентированного на широкий класс трехфазных электрических машин и машин постоянного тока. Принципы работы измерительного устройства базируются на известных аналитических описаниях энергетических процессов в машинах. Приводимые ниже аналитические зависимости следует рассматривать в контексте с поставленной задачей как средство ее решения.

Мощность P_1 целесообразно контролировать путем численного интегрирования мгновенной мощности:

$$P_1 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (u_{AB}(k) i_A(k) - u_{BC}(k) i_C(k)); \quad (4)$$

$$P_1 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (u_{\text{я}}(k) i_{\text{я}}(k)), \quad (5)$$

где $u_{AB}(k)$, $u_{BC}(k)$, $i_A(k)$, $i_C(k)$ — мгновенные значения линейных напряжений и токов трехфазной машины, соответствующие k -му измерению их на периоде T с постоянным шагом T/N ; N — количество измерений за период; $u_{\text{я}}(k)$, $i_{\text{я}}(k)$ — мгновенные значения напряжения и тока якоря машины постоянного тока.

Аналогично решается задача определения эффективных и средних значений токов и напряжений электрических машин, например:

$$I_A = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N i_A^2(k)}, \quad (6)$$

$$U_{\text{я}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_{\text{я}}(k). \quad (7)$$

Интегральная оценка электрических сигналов позволяет учесть энергетические составляющие высших гармоник. Применение цифровой фильтрации повышает помехоустойчивость и быстродействие измерительного устройства.

Суммарные потери мощности машин переменного и постоянного тока представлены в виде суммы трех составляющих:

$$\sum_{i=1}^n \Delta P_i = \Delta P_{\text{эл}} + \Delta P_{\text{магн}} + \Delta P_{\text{мех}}, \quad (8)$$

где $\Delta P_{\text{эл}}$ — электрические потери мощности; $\Delta P_{\text{магн}}$ — потери мощности в магнитопроводе на гистерезис и вихревые токи; $\Delta P_{\text{мех}}$ — механические потери на трение и вентиляцию.

Применение программного метода контроля потерь мощности позволяет учесть их зависимость от параметров электрической машины:

$$\Delta P_{\text{эл}} = c_1 I^2 (1 + \alpha (t - t_{\text{ном}})) + \Delta U_{\text{щ}} I; \quad (9)$$

$$\Delta P_{\text{магн}} = c_2 U^2 \omega^2; \quad (10)$$

$$\Delta P_{\text{мех}} = \omega (c_3 + c_4 \omega), \quad (11)$$

где I , U — линейные ток и напряжение трехфазной машины или ток якоря и напряжение обмотки возбуждения машины постоянного тока; t , $t_{\text{ном}}$ — измеряемая и номинальная температуры машины; α — температурный коэффициент сопротивления; $\Delta U_{\text{щ}}$ — суммарное падение напряжения на переходах «щетка—коллектор»; c_1, \dots, c_4 — константы, посредством которых устройство адаптируется к конкретному типу электрической машины. В качестве таких констант приняты величины, определяемые из опытов холостого хода и короткого замыкания. Ориентировочные значения констант можно определить по основным данным машин.

Квадратичная аппроксимация в (10) и (11) является компромиссным решением, упрощающим техническую реализацию устройства. Применение более точного описания магнитно-механических потерь мощности [4] не исключено, но может оказаться малоэффективным из-за отмеченного ранее фактора случайности.

Структура измерительного устройства. Предлагаемый метод определения механического момента может быть реализован на стандартном оборудовании. На рис. 1 показана структурная схема измерительного устройства. Это устройство включает измерительные преобразователи (ИП)

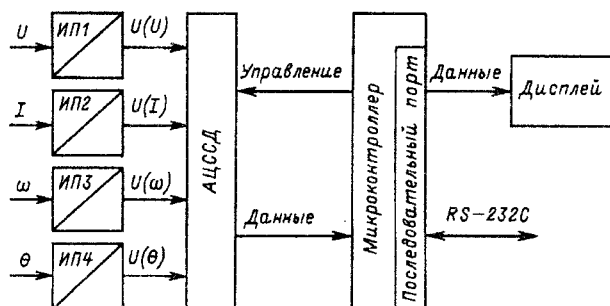


Рис. 1

тока, напряжения, частоты вращения и температуры, а также многоканальную аналого-цифровую систему сбора данных (АЦССД) и однокристалльную микроЭВМ. Результаты измерения выводятся на светодиодный дисплей. Устройство имеет возможность обмена информацией с внешними устройствами посредством последовательного интерфейса. Благодаря такой структуре измеритель механического момента может быть использован отдельно или как компонент испытательного стенда.

Моделирование. При моделировании определялась область допустимых изменений основных параметров моментомера, при которых погрешность измерения не превышает заданного уровня. По результатам исследования выбраны приемлемые для технической реализации допуски δI , δU , $\delta \omega$, δt° на погрешность измерения токов, напряжений, частоты вращения и температуры обмоток машины. Допуск δt° непосредственно связан с допуском δr на погрешность измерения сопротивления обмоток. Аналогично назначены допуски $\delta P_{\text{магн}}$ и $\delta P_{\text{мех}}$ на погрешность программного учета магнитных и механических потерь мощности. Полученные в результате моделирования области отклонения параметров измерительного устройства приведены ниже:

$\delta I, \delta U,$ $\delta \omega, \%$	$\delta t^\circ,$ $^\circ\text{C}$	$\delta r,$ $\%$	$\Delta P_{\text{мех}},$ $\%$	$\Delta P_{\text{магн}},$ $\%$	$\delta M,$ $\%$
$\pm 0,5$	± 10	$\pm 4,0$	$\pm 1,5$	± 10	$\pm 2,5$

На рис. 2 показана зависимость приведенной погрешности измерительного устройства δM от КПД машины.

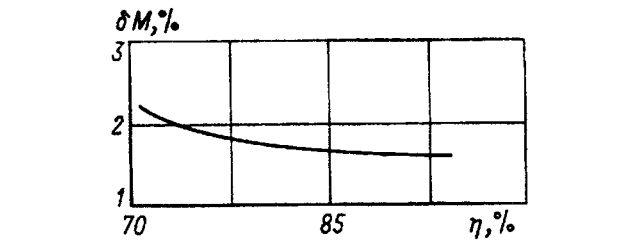


Рис. 2

Моделирование выполнено методом статистических испытаний. Константы c_1, c_2, c_3, c_4 , входящие в (9)–(11), для каждого типа электрических машин получены по техническим данным приближенно [5]. Кривая получена с помощью аппроксимации результатов моделирования каждого типа машин для вышеуказанной области параметрических возмущений.

Испытания. Испытания измерительного устройства проводились на экспериментальном образце, предназначенном для работы с нерегулируемым асинхронным двигателем в составе

автомобильного испытательного стенда. Устройство должно обеспечивать измерение вращающего момента в диапазоне от 0 до 1,2 номинального значения с погрешностью, не превышающей 3%. В соответствии с этими требованиями измерительные преобразователи имеют проектный класс точности 0,5%, а цифровая информация передается в микроконтроллер в 8-разрядном цифровом коде. Показания предварительно настроенного измерителя сравнивались с тормозным моментом нагрузочного устройства асинхронного двигателя (индукционно-вихревого тормоза). Погрешность измерительного устройства (рис. 3) содержала аддитивную составляющую. За вычетом этой составляющей отклонения момента имели разброс в пределах 1,8–2,0%.

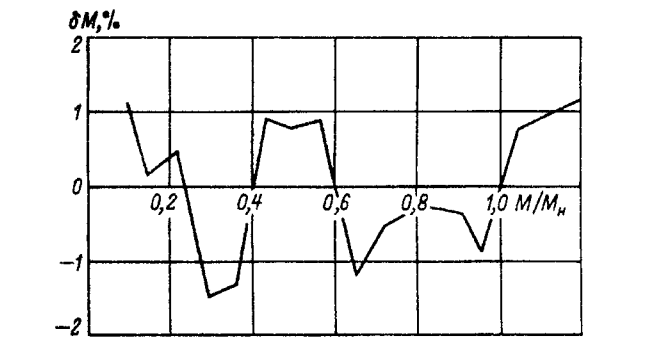


Рис. 3

Закономерность разброса повторными испытаниями не подтвердилась. Существенная мультипликативная составляющая погрешности, а также систематический характер отклонения характеристики от линейной не обнаружены. Значения констант следующие:

$c_1,$ Ом	$c_2,$ (Вт·с ²)/(В ² ·рад ²)	$c_3,$ Н	$c_4,$ с ² /(Ом·рад ²)
16,021	0,627	$3,211 \cdot 10^{-8}$	0

Экспериментальный образец измерителя состоит из двух блоков А1 и А2 (рис. 4).

Блок А1 содержит первичные измерительные преобразователи. Посредством этого блока электрическая машина М1 соединена с трехфазной

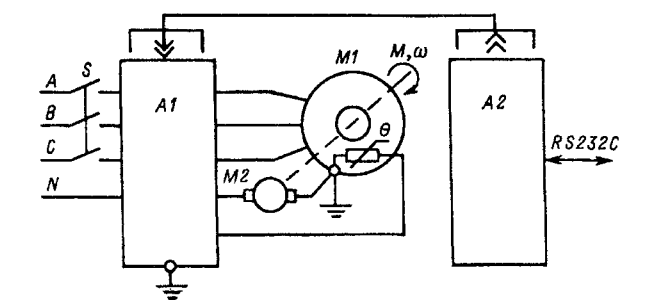


Рис. 4

электрической сетью. Блок А1 имеет габаритные размеры 250×190×90 мм и массу 2,4 кг. Эти показатели в основном определяются конструкцией измерительных преобразователей тока. В процессе работы блок располагается рядом с электрической машиной или непосредственно на ней.

Блок А2 содержит систему сбора данных, микроконтроллер, дисплей и органы управления. Он устанавливается в месте наблюдения и соединяется с блоком А1 линией связи. Микроконтроллер обеспечивает связь измерителя с периферийными устройствами посредством интерфейса RS-232C. Блок А2 может быть соединен с внешней системой управления. Габаритные размеры блока вместе с источником питания 320×200×600 мм, масса 2,5 кг. Частота вращения ротора измеряется тахогенератором постоянного тока М2. Датчик температуры θ вмонтирован в обмотку статора асинхронного двигателя М1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов-Смоленский А.В. Электрические машины. — М.: Энергия, 1980.
2. Smolin V.I., Topolsky D.V., Gudaev N.N. Measurement of a torque of the electrical machines according to their electrical parameters. EPE Conference'97, 1997, Proceedings, vol. 3.

3. Копылов И.П. Проектирование электрических машин. — М.: Энергия, 1980.

4. Специальные электрические машины / Под ред. А.И. Бертинова. — М.: Энергоиздат, 1982.

5. Справочник по электрическим машинам / Под ред. И.П. Копылова и Б.К. Клокова. — М.: Энергоиздат, 1988.

[20.02.98]

Авторы: Смолин Виктор Иванович окончил приборостроительный факультет Челябинского политехнического института в 1967 г. В 1977 г. защитил кандидатскую диссертацию по теме «Исследование и разработка методов повышения точности индукционных фазовращателей» в Московском институте радиотехники, электроники и автоматики. Доцент кафедры электротехники Южно-Уральского государственного университета (ЮУГУ).

Топольский Дмитрий Валерианович окончил приборостроительный факультет Челябинского государственного технического университета в 1994 г. Старший преподаватель кафедры электротехники ЮУГУ.

Гудаев Николай Николаевич окончил приборостроительный факультет Челябинского политехнического института в 1981 г. Инженер I категории кафедры радиотехнических систем ЮУГУ.

Вниманию предприятий, организаций, НИИ, вузов стран СНГ и зарубежных фирм!

Журнал «Электричество» предоставляет свои страницы для

- РЕКЛАМЫ ИЗДЕЛИЙ отечественных предприятий и зарубежных фирм в области энергетики, электротехники, электроники, автоматики
- ПУБЛИКАЦИИ ОБЪЯВЛЕНИЙ о научных симпозиумах, конференциях, совещаниях, семинарах
- ДРУГОЙ ИНФОРМАЦИИ, соответствующей тематике журнала

Сообщаем, что журнал поступает к зарубежным подписчикам во многих странах мира на русском и английском языках. Реклама в черно-белом изображении может быть помещена на страницах журнала или на его обложке. Напоминаем наш адрес: 103012 Москва, К—12, Б. Черкасский пер., 2/10 или 101000 Москва, Главпочтамт, абонементный ящик № 648. Телефоны для справок: 924-24-80, 928-88-69.

Эффективный метод расчета электрической емкости

СТРУНСКИЙ М.Г.

Предложен аналитический метод расчета емкости (применимый к весьма широкому классу уединенных пластин), основанный на задании фиктивного распределения заряда по поверхности тела, заменяющего проводник, и принятии в качестве потенциала проводника его значения в одной характерной точке. Установлен знак погрешности, допускаемой при расчете, и рекомендована методика определения приближенных значений емкости проводников. Количественные результаты сопоставлены с данными, получаемыми существующими методами, что позволило подтвердить значительное повышение точности определения емкости с помощью предлагаемого метода.

Ключевые слова: электрическая емкость, потенциал, пластина, расчет, погрешность

Для точного расчета электрической емкости системы проводников требуется в общем случае строгое решение соответствующей электростатической задачи. Сложность аналитического решения большинства электростатических задач обусловила появление и развитие ряда приближенных методов расчета электрической емкости, в том числе основанных на задании определенного распределения заряда по поверхности тела, заменяющего проводник [1].

Различные способы выбора фиктивного распределения заряда довольно широко используются при расчете электрической емкости с помощью метода площадок и его модификаций, а также путем решения интегральных уравнений, описывающих распределение заряда по поверхности проводника (например, [2–4]); все эти методы являются по существу численными. Так называемые «прямые методы» нахождения функции распределения заряда на поверхности проводников [5, 6], как правило, приводят к ошибочным результатам; достаточно указать, что предлагаемое как точное выражение для функции распределения заряда на поверхности проводящей прямоугольной пластины ([6] с. 99) не удовлетворяет доказанному условию [7] о порядке обращения плотности заряда в бесконечность при приближении к вершинам пластины.

Среди указанных методов наиболее широкое распространение получил метод Хоу, в основе которого лежат следующие два допущения:

распределение заряда по поверхности тела равномерно: $\sigma = \text{const}$;

потенциал поверхности тела равен среднему

An analytical method for calculating an electric capacitance is proposed. The method is applicable to a wide class of secluded plates. The method proposed is based on using fictitious charge distribution a long the surface of a body which substitutes a conductor. As a potential of a conductor its value in one characteristic point is taken. The sign of an error which is permissible for determining approximate condutor capacitance values are recommended. Quantative results are compared with data obtained by mean of existend methods. That made it possible to confirm a significant increase in the accuracy of a capacitance calculation with a help of the method proposed.

Key words: electric capacitance, potential, plate, calculation, error

арифметическому значений потенциала во всех его точках.

Метод Хоу получил теоретическое обоснование лишь после более пятидесятилетнего успешного использования; он всегда (за исключением нескольких частных случаев, когда истинное распределение заряда равномерно) дает заниженные значения емкости.

Исходя из стремления уменьшить погрешность метода Хоу, в [8] было предложено определить распределение плотности заряда по поверхности проводника соотношением

$$\sigma(S) = 4\pi\epsilon A \left[\int_S \frac{dS}{r} \right]^{-1} \quad (1)$$

(где S — поверхность проводника; A — некоторая постоянная величина; r — расстояние между фиксированной и текущей точками поверхности S), а потенциал проводника находить путем приравнивания его постоянной A . Формулы для расчета емкости, полученные на основании (1), в отдельных случаях показали большую их точность по сравнению с формулами, следующими из метода Хоу. Распространения указанный метод не получил главным образом из-за его сложности и громоздкости: даже в простейшем случае определения емкости диска приходится выполнять численное интегрирование.

В настоящей работе предлагается аналитический метод, основанный также на задании фиктивного распределения заряда по поверхности проводника, однако если в методе Хоу задаваемое распределение заряда противоречит физическому

смыслу задачи, то в предлагаемом методе, как будет показано, оно характеризуется сравнительно близким приближением к реальной физической картине.

Ограничим класс рассматриваемых проводников уединенными пластинами¹, расположенными в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ϵ , представляющими собой геометрически ограниченные замкнутые односвязные области с кусочно-гладкими контурами без узловых точек и точек самоприкосновения. Пластины должны обладать симметрией вращения (с осью симметрии, как правило, второго или четвертого порядка), а их контур может описываться как одной, так и несколькими алгебраическими кривыми. Если кривая, определяющая контур пластины или его часть, имеет изолированную особую точку, то пластина должна характеризоваться осью симметрии четвертого порядка, т.е. иметь одинаковую форму относительно обеих осей декартовой системы координат, лежащих в одной плоскости с пластиной.

Указанные ограничения носят не принципиальный характер; они введены с целью более четкого выявления существа метода и обозримости результатов, так как решение задач для более широкого класса проводников требует привлечения ряда дополнительных соображений и существенно более детального анализа особенностей построения функции распределения заряда по поверхности проводника. Кроме того, существенную роль играет способ определения принимаемого при расчете емкости потенциала проводника.

Предлагаемый метод основан на следующих допущениях:

распределение заряда по поверхности пластины задается таким образом, что плотность заряда монотонно возрастает от центра пластины к контуру, где она обращается в бесконечность того же порядка, что и у пластины с выпуклым гладким контуром:

в качестве потенциала проводника принимается его потенциал в точке, расположенной в начале координат (для выделенного класса проводников эта точка совпадает с центром симметрии).

Пусть контур пластины описывается одной алгебраической кривой порядка k , уравнение ко-

торой в прямоугольных декартовых координатах имеет вид

$$P^{(k)}(x, y) = 0. \quad (2)$$

Путем выполнения соответствующих алгебраических операций (например, возведением в степень $2/k$) полином порядка k в (2) может быть приведен к полиному второй степени, что даст:

$$P^{(2)}(x, y) \equiv p_1 x^2 + p_2 xy + p_3 y^2 + q_1 x + q_2 y + M = 0, \quad (3)$$

где p_i , q_m , M — постоянные коэффициенты.

Тогда на основании допущения о распределении плотности заряда с учетом «условия на ребре» [12, 7], характеризующего порядок возрастания плотности при приближении к краю пластины и обеспечивающего сходимость соответствующих интегралов, выражение для распределения плотности заряда по поверхности пластины σ может быть представлено в виде

$$\sigma = \frac{A}{\sqrt{P^{(2)}(x, y)}}, \quad (4a)$$

где $P^{(2)}(x, y)$ — левая часть уравнения (3); A — постоянная, определяемая либо через суммарный заряд пластины, либо через значение ее потенциала в начале координат.

Если при использовании криволинейных координат u , v в точке с координатами $x=x_1=x(u_1, v)$, $y=y_1=y(u_1, v)$, $\sigma(x_1, y_1) \neq \text{const}$ (в частности, это имеет место, когда уравнение контура содержит изолированную особую точку), то плотность заряда определяется по формуле

$$\sigma = \frac{f}{\sqrt{P^{(2)}(x, y)}}, \quad (4b)$$

в которой выражение для функции f находится из очевидного условия

$$\sigma \Big|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} = \frac{f}{\sqrt{P^{(2)}(x_1, y_1)}} = \text{const}. \quad (5)$$

Когда контур пластины описывается несколькими кривыми, область, занимаемая пластиной, разделяется на ряд подобластей (по числу ограничивающих проводник кривых), и для каждой из них по формулам (4) находятся выражения для σ , которые затем должны быть «сшиты» на границах выделенных подобластей. Граничные линии между подобластями назовем линиями сшивания. Их уравнения, вообще говоря, не известны и находятся путем приравнивания выражений для σ в смежных подобластях. Пусть, для простоты, контур пластины ограничен двумя кривыми и в каждой подобласти $\sigma(x_1, y_1) = \text{const}$;

¹ Несмотря на практическую значимость, наименьшее число задач по расчету емкости решено для проводников в форме пластин; число полученных точных решений исчерпывается тремя — для эллиптической пластины, кругового кольца [1, 9] и круговой луночки [10, 11], причем значения емкости кольца определяются только после численного решения интегрального уравнения, а в последнем случае практическое использование результатов возможно лишь для симметричной луночки — либо весьма узкой, либо близкой к диску.

в этом случае выражения для распределения заряда в подобластях имеют вид

$$\sigma_1 = \frac{A_1}{\sqrt{P_1^{(2)}(x,y)}}; \quad \sigma_2 = \frac{A_2}{\sqrt{P_2^{(2)}(x,y)}}. \quad (4в)$$

Удобно представить постоянную A_1 как $A_1 = A_2 \alpha \equiv A \alpha$, где параметр α легко определяется при каких-либо значениях x и y , заведомо принадлежащих линии сшивания, обычно при $x=y=0$.

Тогда

$$\alpha = \sqrt{\frac{P_1^{(2)}(0,0)}{P_2^{(2)}(0,0)}}, \quad (6)$$

а уравнение линии сшивания находится из соотношения

$$P_1^{(2)}(x,y) = \alpha^2 P_2^{(2)}(x,y), \quad (7)$$

следующего из условия $\sigma_1 = \sigma_2$.

Располагая аналитическими выражениями для распределения заряда по поверхности проводника, не составляет труда вычислить его суммарный заряд

$$q = 2 \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \frac{f_i dS_i}{\sqrt{P_i^{(2)}(x,y)}} \quad (8)$$

и потенциал u_0 в точке поверхности пластины, расположенной в начале координат,

$$u_0 \equiv u(0,0,0) = \frac{2}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \frac{f_i dS_i}{\sqrt{P_i^{(2)}(x,y)} \sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (9)$$

В последних формулах S_i — односторонняя площадь поверхности каждой из n подобластей, $dS_i = dx_i dy_i$ — элементы площади, а остальные обозначения использовались ранее.

Если распределение заряда определено во всех без исключения точках поверхности пластины (в частности, кривые, ограничивающие контур пластины, не имеют изолированных особых точек), то $f_i = A_i$. Для проводников, контур которых описывается одним уравнением, $n=1$.

На основании второго лежащего в основе метода допущения о принимаемом потенциале проводника в соответствии с (8) и (9) емкость пластин рассматриваемого класса определяется формулой

$$C_B = 4\pi\epsilon \frac{\sum_{i=1}^n \int_{S_i} \frac{f_i dS_i}{\sqrt{P_i^{(2)}(x,y)}}}{\sum_{i=1}^n \int_{S_i} \frac{f_i dS_i}{\sqrt{P_i^{(2)}(x,y)} \sqrt{x^2 + y^2}}}. \quad (10)$$

Как следует из существа метода, значения емкости, находимые согласно (10), являются приближенными, за исключением единичных

случаев, когда линии постоянной плотности заряда при истинном его распределении подобны контуру пластины; для таких проводников выражение (10) приводит к точным значениям емкости. В общем же случае возникает вопрос о погрешности метода и, соответственно, формулы (10). На первый взгляд может показаться, что отказ от усреднения потенциала на поверхности пластины (операции, благодаря которой становится целесообразным практическое использование метода Хоу) и принятие в качестве потенциала проводника значения его потенциала в одной точке должны привести к значительным и незакономерным погрешностям. Фактически же, как будет видно из примеров, это допущение обуславливает сравнительную легкость получения и простой вид формул, определяющих емкость, обеспечивает (в совокупности с выбранным распределением заряда по поверхности проводника) незначительные погрешности и, что особо существенно при использовании любого приближенного метода, позволяет установить знак допустимой погрешности.

Для решения последнего вопроса следует проанализировать изменение потенциала по поверхности пластины, который при плотности заряда, характеризуемой (для простоты) выражением (4а), находится по формуле

$$u(x_0, y_0) = \frac{2A}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{dx dy}{\sqrt{P^{(2)}(x,y)} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}, \quad (11)$$

где $x_0, y_0 \in S$.

В силу условий симметрии достаточно ограничиться рассмотрением распределения потенциала в первом квадранте, причем для удобства — вдоль лучей, выходящих из начала координат и заканчивающихся на контуре.

Из условий симметрии следует также, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_0} u(x_0, y_0) \right|_{x_0=0} = \left. \frac{\partial}{\partial y_0} u(x_0, y_0) \right|_{y_0=0} = 0,$$

т.е. в начале координат потенциал имеет экстремум². Так как кривая изменения потенциала в плоскости $z=0$ в точках контура имеет излом, то и на контуре пластины потенциал принимает экстремальные значения. В принципе пока нет оснований исключать наличие экстремумов и в других точках области, занимаемой пластиной.

Если среди всех экстремумов функции $u(x_0, y_0)$ разыскать ее наименьшее u_{\min} и наибольшее u_{\max} значения, то при известном суммарном заряде проводника q согласно неравенствам [1, 13]

² Строго говоря, приведенное условие не является достаточным, однако в физических задачах равенство нулю производной в какой-либо точке свидетельствует о наличии в этой точке экстремума.

$$\frac{q}{u_{\max}} < C_0 < \frac{q}{u_{\min}} \quad (12)$$

будут определены границы, в которых находится истинная емкость проводника C_0 .

Для нахождения u_{\min} и u_{\max} исследуем функцию $u(x_0, y_0)$ более подробно.

Подынтегральная функция в (11) положительна и имеет особенности:

а) во всех точках контура — по условию задания плотности заряда σ ;

б) в точках $M(x_0, y_0) = M_0(x_0, y_0)$ — из-за равенства нулю расстояния между фиксированной $M_0(x_0, y_0)$, в которой определяется потенциал, и текущей $M(x, y)$ точками расположения элементарного заряда.

Обе эти особенности — интегрируемые, поэтому функция $u(x_0, y_0) > 0$ непрерывна в рассматриваемой замкнутой области. Учитывая непрерывность $u(x_0, y_0)$, на поверхности пластины могут быть выделены эквипотенциальные линии, характеризующиеся уравнениями

$$u(x_0, y_0) = \text{const.}$$

Пусть произвольная эквипотенциальная линия проходит через обыкновенную точку $M_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ функции $u(x_0, y_0)$. Уравнение этой эквипотенциали

$$u(x_0, y_0) - u(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$$

представляет собой неявное уравнение кривой. На основании теорем о существовании неявной функции можно утверждать, что, если в точке кривой $M_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ выполняется условие

$$u'_{x_0}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \neq 0 \quad \text{или} \quad u'_{y_0}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \neq 0,$$

то, по крайней мере, в окрестности этой точки кривая может быть выражена явным уравнением $x=f(y)$ или $y=g(x)$, причем функции f или g и их производные непрерывны. Геометрически это означает, что данная эквипотенциальная линия является кривой без пересечений и самокасаний, т.е. семейство эквипотенциальных линий, на которых нет особых точек, состоит из замкнутых гладких кривых. Поэтому во внутренних точках области, занимаемой пластины, отсутствуют экстремумы функции $u(x_0, y_0)$, иначе говоря, эта функция имеет экстремумы только в начале координат и на контуре пластины. Отсюда следует, что вдоль рассматриваемых лучей функция $u(x_0, y_0)$ будет монотонной, достигая как наименьшего, так и наибольшего значения на концах промежутка.

Использование установленных свойств распределения потенциала по поверхности пластины позволяет избежать довольно сложного и громоздкого аналитического исследования, направ-

ленного на выявление характера экстремумов функции $u(x_0, y_0)$. В самом деле, при установлении монотонности этой функции не конкретизировались ни формы контура пластины, ни, как следствие, вид подынтегральной функции в формуле (11). Поэтому для разыскания наименьшего или наибольшего значения $u(x_0, y_0)$ на поверхности пластины произвольной формы достаточно сопоставить значения потенциала в начале координат и на контуре лишь для одной из пластин рассматриваемого класса. Более того, возможно ограничиться нахождением потенциала в единственной точке контура, так как экстремумы противоположного смысла на контуре существовать не могут, ибо в противном случае эквипотенциальные линии должны были пересекаться или быть незамкнутыми, что, как показано, невозможно.

Ввиду того, что подынтегральная функция в (11) имеет на контуре особенности более высокого порядка, что в начале координат, можно предполагать, что имеет место неравенство $u(0, 0) < u(x_{0K}, y_{0K})$, где x_{0K}, y_{0K} — координаты точек контура. Это неравенство подтверждается результатами детальных расчетов распределения потенциала по поверхности прямоугольной пластины размерами $2a \times 2b$ (из методических соображений, приведенных в конце настоящей работы). Здесь укажем вычисленные, например, при $a/b=2$ значения потенциала пластины $u^*(x_0, y_0) \equiv u(x_0, y_0) \varepsilon / A$ в начале координат $u_0^*(0, 0)$, середине меньшей стороны $u_1^*(a, 0)$, вершине $u_2^*(a, b)$ и середине большей стороны $u_3^*(0, b)$: $u_0^*=2,40606$; $u_1^*=3,80992$; $u_2^*=3,53512$; $u_3^*=3,58566$. Как видно, в начале координат функция $u(x_0, y_0)$ действительно имеет минимум, а на контуре — максимумы. Физически это объясняется особенностями формирования потенциала в данной точке пластины: в окрестности точки $M_0(0, 0)$, расположенной в начале координат, большим значениям величины $1/r = [\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}]^{-1}$ соответствуют меньшие значения величины $\sigma/A = [P^{(2)}(x, y)]^{-1}$, а в окрестностях точек контура велики значения и σ/A и $1/r$. Так как потенциал в какой-либо точке формируется в результате суммирования потенциалов элементарных зарядов, т.е. произведения $\sigma/A \cdot 1/r$, то наличие в подынтегральной функции выражения (11) величины σ/A , возрастающей по мере приближения к контуру, а согласно (4) обращаемой на нем в бесконечность, и приводит к максимальным значениям потенциала на контуре пластины. Но если на правом конце промежутка потенциал максимален, а характеризующая его функция монотонна, то на левом конце промежутка — в начале координат — потенциал минимален. Учитывая, что структура

подынтегральной функции в (11) одина для всех пластин выделенного класса, вывод о минимальности потенциала в точке $M(0,0)$ является общим; от формы пластины будут зависеть только значения экстремумов и координаты максимумов потенциала на контуре.

В связи с тем, что минимум функции $u(x_0, y_0)$ единственный, в начале координат потенциал достигает нижней границы $u_{\min} = u_0$ [формула (9)] и, соответственно, на контуре — верхней. Тогда на основании (12) можно заключить, что формула (10) обеспечивает получение верхней оценки емкости пластины $C_B = q/u_0$.

Что касается нижней оценки, то наибольшее значение потенциала u_{\max} может быть найдено тем или иным путем, например, прямым расчетом, однако в большинстве случаев целесообразно ограничиться нахождением данным методом лишь верхней границы емкости. Объясняется это как необходимостью выполнения гораздо более громоздких вычислений значений потенциала на контуре по сравнению с расчетом его в центре пластины, так и возможностью получения нижних оценок емкости более простыми существующими способами [1].

При практическом использовании формулы (10) следует учитывать два обстоятельства. Во-первых, эффективность вычислений по этой формуле существенно зависит от правильного выбора системы координат. Для конкретности и в связи с определением алгебраической кривой [14] все предыдущие соотношения записывались в прямоугольной декартовой системе координат. Фактические же вычисления следует выполнять в той координатной системе, которая адекватна геометрическим особенностям проводника и описывающим его контур уравнениям.

Во-вторых, объем вычислений по формуле (10) может быть значительно сокращен за счет использования условий симметрии, которые должны учитываться как при построении функции распределения заряда, так и в ходе выполнения интегральных операций.

Перейдем к решению конкретных задач по расчету емкости предлагаемым методом. Следующие далее примеры имеют двоякую цель: с одной стороны, проиллюстрировать методику расчета, а с другой — определить с известной погрешностью емкости проводников сложной конфигурации. Одновременно будут подтверждены указанные выше преимущества и особенности метода и проведены возможные сопоставления.

Значения емкостей находятся как среднее гармоническое их предельных оценок $C_0 \approx \frac{2C_B C_H}{C_B + C_H}$, верхняя из которых C_B вычисляется по формуле (10), а нижняя C_H (при отсутствии соответ-

ствующих указаний) — на основе метода симметризации [1]. Численные результаты в таблицах даются в безразмерном виде — по отношению к емкости диска, внутри которого находится данный проводник, что отмечается индексом 1. Погрешность определения емкости рассчитывается по формуле

$$\delta = \frac{C_0 - C_H}{C_0} 100\%.$$

Найдем емкость C_0 эллиптической пластины с полуосями a и b . Контур такой пластины описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (13)$$

которое, как видно, является частным случаем уравнения (3).

Введем обобщенные полярные координаты

$$x = \frac{a}{c} r \cos \psi, \quad y = \frac{b}{c} r \sin \psi$$

и перейдем к ним в (13), что даст:

$$c^2 - r^2 = 0.$$

Тогда согласно (4а) распределение плотности заряда по поверхности эллиптической пластины имеет вид

$$\sigma = \frac{A}{\sqrt{c^2 - r^2}}. \quad (14)$$

На основании (8) и (9) определим суммарный заряд проводника и его потенциал в начале координат:

$$q = 2 \frac{ab}{c^2} A \int_0^c \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\psi}{\sqrt{c^2 - r^2}} = 4\pi \frac{ab}{c} A;$$

$$u_0 = \frac{2A}{\pi\epsilon} \frac{ab}{c} \int_0^c \frac{dr}{\sqrt{c^2 - r^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi}} = \frac{b}{c} \frac{K(k)}{\epsilon} A,$$

откуда в соответствии с (10)

$$C_B \equiv C_0 = \frac{4\pi\epsilon a}{K(k)}, \quad (15)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $k = \sqrt{1 - (b/a)^2}$.

Формула (15) совпадает с известной точной формулой [1]; объясняется это тем, что у эллиптической пластины линии постоянной плотности заряда при истинном его распределении являются эллипсами, подобными эллипсу, ограничивающему пластину. Разумеется, в этом случае формула (14) также является точной и легко приводится к известной.

Определим емкость проводника в форме пра-

в связи с чем область, занимаемая пластиной, подразделяется на четыре подобласти 1—4. Исходя из тривиальных уравнений для ограничивающих каждую подобласть отрезков контура пластины, с учетом условий симметрии на основании (4в) будем иметь:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{A\alpha}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad \sigma_2 = \sigma_4 = \frac{A}{\sqrt{b^2 - y^2}}. \quad (20)$$

Параметр α находится согласно (6):

$$\alpha = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{b^2 - y^2}} \Big|_{x=y=0} = \frac{a}{b},$$

уравнение линии сшивания — по (7):

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2),$$

откуда

$$y = \pm \frac{b}{a}x,$$

то следует и из общих геометрических представлений.

Соображения симметрии позволяют использовать формулы (8)—(10) при $n=2$ (вместо $n=4$); в результате простых вычислений получим:

$$q = 2 \cdot 4 \left(\int_{S_1} \sigma_1 dS_1 + \int_{S_2} \sigma_2 dS_2 \right) = 8A \left(\frac{a}{b} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{(b/a)x} dy + \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} \int_0^{(a/b)y} dx \right) = 16aA;$$

$$u_0 = \frac{2 \cdot 4}{4\pi\epsilon} \left(\int_{S_1} \frac{\sigma_1 dS_1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \int_{S_2} \frac{\sigma_2 dS_2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{2A}{\pi\epsilon} \times \\ \times \left(\frac{a}{b} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_0^{(b/a)x} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} \int_0^{(a/b)y} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \\ = \frac{A}{\epsilon} \left(\frac{a}{b} \operatorname{Ar sh} \frac{b}{a} + \operatorname{Ar sh} \frac{a}{b} \right); \quad (21)$$

$$C_B = 8\epsilon a \frac{2}{\frac{a}{b} \operatorname{Ar sh} \frac{b}{a} + \operatorname{Ar sh} \frac{a}{b}}. \quad (22)$$

В частности, для квадратной пластины

$$C_B \Big|_{a/b=1} = \frac{8\epsilon a}{\ln(1+\sqrt{2})} = 8\epsilon a 1,13459 = 8\epsilon R 0,80228, \quad (23)$$

где $R = a\sqrt{2}$ — радиус описанного круга.

Выражение (23) совпадает с (18) (после учета различия в обозначениях длин сторон и расположения проводников относительно осей координат).

Если ориентироваться на приведенную в [16] нижнюю оценку емкости квадратной пластины

$C_H = 8\epsilon R 0,8022$, полученную модифицированным методом площадок при их числе $N=196$, то $C_0|_{a/b=1} \approx C_{ср.г} \approx 8\epsilon R 0,80224$ с погрешностью $\delta < 0,005\%$. Однако в [16] указано, что наилучшей нижней оценкой является найденная тем же методом при $N=400$ $C_H = 8\epsilon R 0,8180$, что противоречит установленной верхней границе (23). Кроме того, большинство значений емкости квадратной пластины, полученных методом площадок, с ростом N все больше превышает верхнюю оценку (23) не только при приближенном, но и при точном определении потенциальных коэффициентов [3]. Поэтому численные данные по емкости проводников, рассчитанные по методу площадок или его различным модификациям, особенно трактуемые как нижняя граница емкости, нуждаются в дальнейшем уточнении.

Результаты расчета верхних и нижних границ емкости прямоугольной пластины, а также приближенные значения емкости и погрешности ее определения представлены в табл. 2, где C'_{B1} — лучшие верхние оценки из получаемых существующими методами: на основании неравенства $C_0 \leq \frac{4\epsilon}{\pi} L$ (при $1 \leq a/b \leq 2$) и с помощью метода интегральных геометрических параметров [1] ($a/b \geq 3$), а δ' — соответствующая им погрешность. Нижние оценки C_{H1} вычислены по методам симметризации (при $1 \leq a/b \leq 2$)

$$C_H = 8\epsilon R \sqrt{\frac{4b/a}{\pi(1+b^2/a^2)}}$$

и Хоу [1, пример 1-1, с. 28] ($a/b \geq 3$).

Таблица 2

Относительные значения и погрешности определения емкости прямоугольной пластины

$\frac{a}{b}$	C'_{B1}	C_{B1}	C_{H1}	$C_{01} \approx C_{ср.г.1}$	$\delta, \%$	$\delta', \%$
1	0,90032	0,80228	0,79788	0,80008	0,27	5,7
1,5	0,88283	0,78036	0,76658	0,77343	0,9	6,6
2	0,85412	0,74348	0,71365	0,72826	2,0	8,2
3	0,78603	0,67744	0,62136	0,64819	4,1	10,5
4	0,71894	0,62903	0,57286	0,59963	4,5	10,2
5	0,66956	0,59323	0,53714	0,56379	4,8	9,9
7,5	0,58910	0,53442	0,47882	0,50510	5,2	9,4
10	0,53980	0,49795	0,44295	0,46884	5,5	9,0

Все значений емкостей отнесены к емкости диска радиусом $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Приведенные данные показывают, что формула (22) позволяет существенно снизить погрешность определения емкости пластины, особенно при небольших отношениях a/b .

Найдем распределение потенциала по поверхности прямоугольной пластины при плотности

заряда, заданной согласно (20). Выражение для потенциала в любой точке поверхности пластины ($M_0(x_0, y_0)$) имеет вид (см. приложение)

$$u^*(x_0, y_0) \equiv u(x_0, y_0) \frac{\varepsilon}{A} = \frac{1}{2\pi} \left(B + \frac{1}{k} J_1 + J_2 \right), \quad (24)$$

где

$$B = 2\pi \left[\left(\frac{1}{k} + 1 \right) \ln 2 - \ln k \right]; \quad k = b/a;$$

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \ln [(k\beta_1 + \sqrt{k^2\beta_1^2 + \beta_3^2})(k\beta_2 + \sqrt{k^2\beta_2^2 + \beta_3^2}) \times \\ \times (k\beta_1 + \sqrt{k^2\beta_1^2 + \beta_4^2})(k\beta_2 + \sqrt{k^2\beta_2^2 + \beta_4^2})] dt;$$

$$J_2 = \int_0^{\pi/2} \ln [(\beta_3 + \sqrt{k^2\beta_1^2 + \beta_3^2})(\beta_4 + \sqrt{k^2\beta_1^2 + \beta_4^2}) \times \\ \times (\beta_3 + \sqrt{k^2\beta_2^2 + \beta_3^2})(\beta_4 + \sqrt{k^2\beta_2^2 + \beta_4^2})] dt;$$

$$\beta_1 = \left| \sin t - \frac{y_0}{b} \right|; \quad \beta_2 = \left| \sin t + \frac{y_0}{b} \right|;$$

$$\beta_3 = \left| \sin t - \frac{x_0}{a} \right|; \quad \beta_4 = \left| \sin t + \frac{x_0}{a} \right|.$$

В частности, при $x_0 = y_0 = 0$ из (24) следует формула (21) для $u(0, 0) \equiv u_0$.

Расчеты по формуле (24) были выполнены в широком диапазоне изменения геометрических параметров³; некоторые из полученных результатов в безразмерном виде (по отношению к потенциалу пластины в начале координат) представлены в табл. 3 и 4. В вершинах, т.е. при $\varphi = \varphi_0$, $x_0/a = y_0/b = 1$, потенциал характеризуется следующими значениями:

a/b	1	2	5	10
φ_0 , град.	45	26,56	11,31	5,71
u/u_0	1,44095	1,46926	1,58895	1,73930

Таблица 3

Относительные значения потенциала квадратной ($a/b=1$) пластины

$\frac{x_0}{a}$	u/u_0 при φ , град.					
	0	10	20	30	40	45
0,0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,2	1,09044	1,09042	1,09036	1,09025	1,09003	1,08986
0,4	1,18336	1,18322	1,18279	1,18191	1,18020	1,17875
0,6	1,28148	1,28111	1,27987	1,27720	1,27152	1,26618
0,8	1,38832	1,38775	1,38573	1,38091	1,36813	1,35254
1,0	1,51206	1,51193	1,51129	1,50889	1,49719	1,44095

³ Вычисления проводились на ЭЦВМ БЭСМ-6 Н.В. Ляховой, которой автор выражает свою искреннюю признательность.

Относительные значения потенциала прямоугольной пластины

$\frac{a}{b}$	$\frac{x_0/a}{y_0/b}$	u/u_0 при φ , град.					
		0	10	30	50	70	90
2	0,1	1,04565	1,04564	1,04558	1,04558	1,04558	1,04558
	0,5	1,24075	1,23941	1,23031	1,23104	1,23105	1,23105
	1,0	1,58347	1,57891	1,50578	1,49624	1,49143	1,49026
5	0,1	1,04757	1,04753	1,04744	1,04744	1,04744	1,04744
	0,5	1,25872	1,25197	1,24046	1,23949	1,23925	1,23920
	1,0	1,77271	1,69104	1,50996	1,50034	1,49803	1,49750
10	0,1	1,04928	1,04916	1,04912	1,04912	1,04912	1,04912
	0,5	1,27162	1,25248	1,24774	1,24738	1,24729	1,24727
	1,0	1,99442	1,56288	1,51458	1,51136	1,51057	1,51039

Очевидно, что диагональ пластины делит первый квадрант на две области: $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ и $\varphi_0 < \varphi \leq 90^\circ$, причем $\varphi_0 = \arctg b/a$. В первой из этих областей при данном угле φ основной переменной является x_0/a (тогда $y_0/b = a/b \operatorname{tg} \varphi x_0/a$), а во второй — y_0/b (соответственно $x_0/a = b/a \operatorname{ctg} \varphi y_0/b$). Поэтому в табл. 4 координаты x_0/a относятся к $\varphi = 0$ и 10° (при $a/b = 2$ и 5), а также $\varphi = 0^\circ$ ($a/b = 10$).

Для квадратной пластины значения потенциала в областях $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ и $\varphi_0 < \varphi \leq 90^\circ$ в симметричных точках совпадают.

Как следует из полученных данных, в начале координат потенциал имеет наименьшее значение $u_{\min} = u_0$, а затем монотонно возрастает по любому из лучей, достигая максимума на контуре; следовательно, результаты расчета распределения потенциала по поверхности прямоугольной пластины полностью подтверждают проведенный выше анализ.

Решенные конкретные задачи не исчерпывают всех методических особенностей применения предлагаемого метода. Вместе с тем, они показывают, что простота расчетных формул для нахождения верхних оценок емкости и несложность их вывода связаны главным образом с принятым способом определения потенциала проводника, позволяющим вместо двукратного интегрирования по его поверхности обойтись одной квадратурой. Что касается сравнительно близкого приближения рассчитываемых емкостей к точным, то оно существенно зависит также и от задания заряда, отражающего характерные особенности его истинного распределения.

Приложение. Вывод формулы для потенциала поверхности прямоугольной пластины.

В соответствии с (11), (20) и рисунком имеем:

$$u(x_0, y_0) = \frac{A}{2\pi\varepsilon} \left[\frac{a}{b} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-\frac{b}{a}x}^{\frac{b}{a}x} \frac{dy}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} + \right.$$

$$\left. + \int_{-b}^b \frac{dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} \int_{-\frac{a}{b}y}^{\frac{a}{b}y} \frac{dx}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \right] .$$

В результате несложных, но довольно громоздких вычислений с использованием подстановок $x = a \sin t$, $y = b \sin t$ и формулы

$$\int_0^{\pi/2} \ln(p^2 - \sin^2 z)^2 dz = -2\pi \ln 2 \quad (p^2 \leq 1)$$

найдем:

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) = & \frac{A}{2\pi\epsilon} \left[\frac{a}{b} \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{Arsh} \frac{|b \sin t - y_0|}{|a \sin t - x_0|} + \right. \right. \\ & + \operatorname{Arsh} \frac{|b \sin t + y_0|}{|a \sin t - x_0|} + \operatorname{Arsh} \frac{|b \sin t - y_0|}{|a \sin t + x_0|} + \\ & + \left. \operatorname{Arsh} \frac{|b \sin t + y_0|}{|a \sin t + x_0|} \right) dt + \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{Arsh} \frac{|a \sin t - x_0|}{|b \sin t - y_0|} + \right. \\ & + \operatorname{Arsh} \frac{|a \sin t - x_0|}{|b \sin t + y_0|} + \operatorname{Arsh} \frac{|a \sin t + x_0|}{|b \sin t - y_0|} + \\ & + \left. \operatorname{Arsh} \frac{|a \sin t + x_0|}{|b \sin t + y_0|} \right) dt \Big] = \frac{A}{2\pi\epsilon} \times \\ & \times \left\{ \left(\frac{a}{b} + 1 \right) 2\pi \ln 2 + \frac{a}{b} \int_0^{\pi/2} \ln \left[\left(\left| \frac{b}{a} \sin t - \frac{y_0}{a} \right| + \right. \right. \right. \\ & + \sqrt{\left| \frac{b}{a} \sin t - \frac{y_0}{a} \right|^2 + \left| \sin t - \frac{x_0}{a} \right|^2} \right) \left(\left| \frac{b}{a} \sin t + \frac{y_0}{a} \right| + \right. \\ & + \sqrt{\left| \frac{b}{a} \sin t + \frac{y_0}{a} \right|^2 + \left| \sin t - \frac{x_0}{a} \right|^2} \right) \times \\ & \times \left(\left| \frac{b}{a} \sin t - \frac{y_0}{a} \right| + \sqrt{\left| \frac{b}{a} \sin t - \frac{y_0}{a} \right|^2 + \left| \sin t + \frac{x_0}{a} \right|^2} \right) \times \\ & \times \left. \left(\left| \frac{b}{a} \sin t + \frac{y_0}{a} \right| + \sqrt{\left| \frac{b}{a} \sin t + \frac{y_0}{a} \right|^2 + \left| \sin t + \frac{x_0}{a} \right|^2} \right) \right] dt + \\ & + \int_0^{\pi/2} \ln \left[\left(\left| \frac{a}{b} \sin t - \frac{x_0}{b} \right| + \sqrt{\left| \frac{a}{b} \sin t - \frac{x_0}{b} \right|^2 + \left| \sin t - \frac{y_0}{b} \right|^2} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(\left| \frac{a}{b} \sin t - \frac{x_0}{b} \right| + \sqrt{\left| \frac{a}{b} \sin t - \frac{x_0}{b} \right|^2 + \left| \sin t + \frac{y_0}{b} \right|^2} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(\left| \frac{a}{b} \sin t + \frac{x_0}{b} \right| + \sqrt{\left| \frac{a}{b} \sin t + \frac{x_0}{b} \right|^2 + \left| \sin t - \frac{y_0}{b} \right|^2} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(\left| \frac{a}{b} \sin t + \frac{x_0}{b} \right| + \sqrt{\left| \frac{a}{b} \sin t + \frac{x_0}{b} \right|^2 + \left| \sin t + \frac{y_0}{b} \right|^2} \right) \right] dt \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\left| \frac{a}{b} \sin t + \frac{x_0}{b} \right| + \sqrt{\left| \frac{a}{b} \sin t + \frac{x_0}{b} \right|^2 + \left| \sin t - \frac{y_0}{b} \right|^2} \right) \times \\ & \times \left(\left| \frac{a}{b} \sin t + \frac{x_0}{b} \right| + \sqrt{\left| \frac{a}{b} \sin t + \frac{x_0}{b} \right|^2 + \left| \sin t + \frac{y_0}{b} \right|^2} \right) dt \Big\} . \end{aligned}$$

Перейдя к более удобным для расчета параметрам и записав последнее выражение в компактной форме, получим формулу (24).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г. Расчет электрической емкости. — Л.: Энергия, 1981.
2. Милуков В.С., Стадник И.П. Расчет распределения заряда на уединенной проводящей пластине сложной формы. — Электромеханика, 1981, № 5.
3. Вишневский А.М. К расчету трехмерных электрических полей. — Электричество, 1981, № 8.
4. Милуков В.В., Стадник И.П. Расчет емкости системы двух пластин сложной формы. — Электромеханика, 1986, № 3.
5. Дружкин Л.А. Интегральные уравнения электростатики и краевые задачи. — М.: Советское радио, 1967.
6. Дружкин Л.А. Красные задачи электростатики для уединенных проводников. — В сб.: Новые вопросы электродинамики. — М.: Изд. МГУ, 1973.
7. Лебедев Н.Н., Скальская И.П. Распределение плотности электрического заряда вблизи угловой точки тонкой проводящей секториальной пластины. — ЖТФ, 1987, т. 57, вып. 11.
8. Русин Ю.С. Метод приближенного расчета электрической емкости. — Электричество, 1960, № 11.
9. Cooke J.C. Triple integral equations. — Quart Journ. of Mech. and Appl. Math., 1963, vol. 16, № 2.
10. Лебедев Н.Н., Скальская И.П. Распределение электричества на тонкой проводящей пластине, имеющей форму симметричной круговой луночки. — ЖТФ, 1980, т. 50, вып. 7.
11. Лебедев Н.Н., Скальская И.П. Распределение электричества на тонкой проводящей пластине, имеющей форму произвольной круговой луночки. — ЖТФ, 1986, т. 56, вып. 3.
12. Миттра Р., Ли С., Аналитические методы теории волноводов. — М.: Мир, 1974.
13. Полна Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. — М.: Физматгиз, 1962.
14. Савелов А.А. Плоские кривые. — М.: Физматгиз, 1960.
15. Казанцев В.П. Вариационные оценки емкостей проводящих пластин. — ЖТФ, 1983, т. 53, вып. 3.
16. Иоссель Ю.Я., Гусева Е.И. Методы расчета емкости пластин. — Электричество, 1984, № 4.

[05.11.97]

Автор: Струнский Михаил Григорьевич в 1951 г. окончил Ленинградский электротехнический институт и в 1958 г. физический факультет Ленинградского государственного университета. В 1963 г. в ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова защитил кандидатскую диссертацию по вопросам судовой электротехники. Ведущий научный сотрудник ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова.

Применение интеграла Дюамеля для анализа проводящего слоя с магнитными потерями

КОЛЕСНИКОВ Э.В., КОЛЕСНИКОВ В.Э.

Рассмотрен плоский слой проводящего намагничивающегося вещества, подверженного действию переменного во времени продольного электромагнитного поля, заданного различными граничными или интегральными условиями. Предложена и проанализирована линейная модель, учитывающая вихревые токи, магнитную вязкость и анизотропию. Даны явные связи граничных значений полей, тока и магнитного потока в форме интегралов Дюамеля, переходные функции которых вычислены операторным методом. Указаны относительные единицы, приводящие задачу к критериальной форме. Алгоритм служит основой для компьютерной модели, имитирующей связи между полями слоя при различных выборах возбуждающих функций и реакций слоя.

Ключевые слова: проводящий слой, магнитные потери, переходные функции, интегралы Дюамеля

A flat layer of a conducting magnetic substance, subjected to the action of a longitudinal electromagnetic field with changes in time and is set by various boundary or integral conditions is considered. A linear model allowing for eddy currents, magnetic viscosity and anisotropy is proposed and analysed. Explicit relationships of boundary values of fields, current and magnetic flux are given in the form of Duamel integrals, transition functions of which are calculated by means of an operator method. The algorithm serves as basis for a computer model simulating relations between the layer fields at various choices of exciting functions and layer reactions.

Key words: conducting layer, magnetic losses, transition function, Duamel integral

1. Постановка задачи. В практических устройствах роль слоя могут играть пластины шихтованного магнитопровода, ленточные ферромагнитные проводники, элементы экранирующих оболочек и т.д. при условии, что они работают без насыщения. Предполагается, что поля внутри слоя имеют пренебрежимо малые поперечные x -компоненты и слабо зависят от продольных y, z -координат (рис. 1), так что любое из полей E, J, B, H в слое может быть описано функциями вида

$$E(x, t) = E_y(x, t) \cdot e_y + E_z(x, t) \cdot e_z \text{ и т.д.} \quad (1)$$

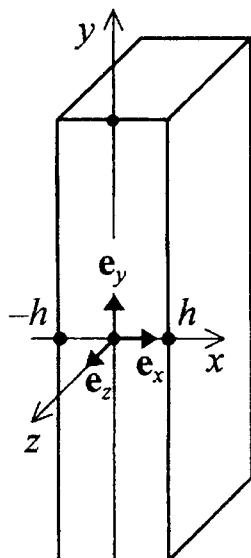


Рис. 1. Система координат

При анизотропии направим оси y, z по главным осям (например, ось y — по оси проката листа). В этом случае линейные модели материальных уравнений слоя будут содержать диагональные матрицы тензоров электропроводности $\hat{\gamma}$, магнитной проницаемости $\hat{\mu}$ и магнитной вязкости $\hat{\alpha}$. Будем исходить из следующего вида этих уравнений [1], [2]:

$$J = \hat{\gamma} E, \quad H = \hat{\mu}^{-1} B + \hat{\alpha} \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (2)$$

Матрицы тензоров имеют вид

$$\hat{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_y & 0 \\ 0 & \gamma_z \end{bmatrix}, \quad \hat{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_y & 0 \\ 0 & \mu_z \end{bmatrix}, \quad \hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_y & 0 \\ 0 & \alpha_z \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Их элементы предполагаются известными из опыта. В частности, числа α_y, α_z могут быть найдены по потерям при синусоидальном перемагничивании вдоль главных осей. Для электротехнических сталей в диапазоне промышленных частот они имеют порядок $10^{-2} \div 10^{-1}$ м/Ом.

Элементы $\gamma_y, \gamma_z, \mu_y, \mu_z, \alpha_y, \alpha_z$ и толщина слоя $2h$ образуют набор первичных параметров задачи. Линейные материальные уравнения (2), (3), дополненные уравнениями Максвелла $\text{rot } H = J, \text{rot } E = -\partial B / \partial t$ и любыми линейными граничными и начальными условиями, образуют линейную векторную краевую задачу, содержащую семь числовых параметров.

Эта задача легко сводится к двум скалярным,

каждая из которых содержит четыре числовых параметра. Первая включает компоненты полей E_z, J_z, B_y, H_y и параметры $\gamma_z, \mu_y, \alpha_y, h$, а вторая — E_y, J_y, B_z, H_z и $\gamma_y, \mu_z, \alpha_z, h$. Это разложение получается при координатной записи всех уравнений задачи. Для полей E, H вида (1) ротор выражается через производные по поперечной координате x , поэтому уравнения указанных скалярных задач таковы:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = J_z, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad (4)$$

$$J_z = \gamma_z E_z, \quad H_y = \frac{B_y}{\mu_y} + \alpha_y \frac{\partial B_y}{\partial t};$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad (5)$$

$$J_y = \gamma_y E_y, \quad H_z = \frac{B_z}{\mu_z} + \alpha_z \frac{\partial B_z}{\partial t};$$

Уравнения (4) и (5) идентичны. Они содержат скалярные функции двух переменных $E(x, t)$, $J(x, t)$, $B(x, t)$, $H(x, t)$ и константы γ, μ, α , связанные уравнениями

$$\frac{\partial H}{\partial x} = J, \quad \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t}, \quad J = \gamma E, \quad H = \frac{B}{\mu} + \alpha \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (6)$$

Дальше мы будем рассматривать систему вида (6). Граничные значения будем отмечать индексами (\pm), например

$$E^+(t) \equiv E(h, t), \quad B^-(t) \equiv B(-h, t) \text{ и т.д.}$$

Кроме того, будут использованы интегральные функции — ток $I(t)$ и магнитный поток $\Phi(t)$ на единицу длины слоя:

$$I(t) \equiv \int_{-h}^h J(x, t) dx, \quad \Phi(t) \equiv \int_{-h}^h B(x, t) dx. \quad (7)$$

В качестве заданных могут выступать различные пары таких функций, например, $E^+(t)$ и $E^-(t)$, либо $H^+(t)$ и $H^-(t)$, либо $I(t)$ и $\Phi(t)$ и т.д. Мы будем трактовать их как входные воздействия на слой. Напротив, другие (не заданные) функции (на границе или во внутренней точке x могут рассматриваться как выходные функции реакции слоя. Известно, что воздействие и реакция линейного объекта связаны интегралом наложения (интегралом Дюамеля), имеющим вид свертки функции-воздействия (или ее производных) с переходной функцией слоя, имеющей смысл реакции на единичный импульс, единичный скачок, единичный излом и т.д. Нахождение переходных функций и вида интегралов Дюамеля для слоя при различных выборах входных и выходных функций составляет основное содержание данной работы. Кроме того, затро-

нуты численные аспекты, необходимые для создания компьютерной модели слоя.

Отметим, что задача проникновения изменений электромагнитного поля вглубь проводящего слоя аналогична задаче диффузии тепла через плоскую стенку, где роль входного воздействия играют, например, поверхностные изменения температуры, а выходной реакцией служит температура в любой внутренней точке. Последняя задача рассматривалась неоднократно и обсуждается, например, в книгах [3] и [4]. Известно, что ядра свертки в такой задаче выражаются через удобные для вычислений *тэта-функции Якоби* [5]. Эти решения применимы и к поставленной выше задаче, но лишь в случае отсутствия магнитных потерь (при $\alpha=0$). Оказывается, однако, что принять $\alpha=0$ можно только при достаточно большой толщине слоя $2h$, иначе потери моделируются плохо (конкретный критерий получен ниже). Отметим, что в случае $\alpha=0$ аналитические представления ядер свертки в форме рядов (аналогичным рядам для *тэта-функций*) не известны. Поэтому используется обратное интегральное преобразование Лапласа и дается для него численная процедура, основанная на интегрировании быстроосциллирующих функций методом Филона [6].

Замечание. Начальные условия считаются нулевыми. Это можно оправдать тем, что ненулевое поле в слое можно получить из нулевого путем некоторого возбуждения. Вид же решения при нулевых условиях существенно упрощается.

2. Относительные единицы и критерии подобия. Задачу можно упростить рациональным выбором базисных значений $x_b, t_b, E_b, J_b, B_b, H_b$. Сохраним за относительными значениями обычные (безындexсные) обозначения и отметим индексом «*si*» значения в СИ. Тогда $x_{si} = x x_b$, $t_{si} = t t_b$, $E_{si} = E E_b$ и т.д. Подставив такие соотношения в систему (6), получим уравнения для относительных значений x, t, E, J, B, H :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{J_b x_b}{H_b} \right) J; \quad \frac{\partial E}{\partial x} = \left(\frac{B_b x_b}{E_b t_b} \right) \frac{\partial B}{\partial t}; \quad (8)$$

$$J = \left(\frac{\gamma E_b}{J_b} \right) E; \quad H = \left(\frac{B_b}{\mu H_b} \right) B + \left[\frac{\alpha B_b}{t_b H_b} \right] \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Выберем базисные значения так, чтобы придать уравнениям простейшую форму. Положим

$$x_b = h, \quad (9)$$

приведем диапазон изменения относительной координаты x внутри любого слоя к одному и тому же отрезку $[-1, 1]$. Потребуем далее обращения в единицу коэффициентов, заключенных в круглые скобки. Получим четыре уравнения для шести базисных значений:

$$\frac{J_b h}{H_b} = 1, \quad \frac{\gamma E_b}{J_b} = 1, \quad \frac{B_b h}{E_b t_b} = 1, \quad \frac{B_b}{\mu H_b} = 1.$$

Перемножив первые два и поделив последние, получим

$$\gamma h \frac{E_b}{H_b} = 1, \quad \frac{t_b}{\mu h} \frac{E_b}{H_b} = 1.$$

Поэтому необходимым следствием условий (8) является равенство

$$t_b = \gamma \mu h^2. \quad (10)$$

После такой замены третье уравнение становится зависимым от остальных, так что имеем три независимых ограничения для выбора четырех базисных значений полей. Одно из них можно выбрать произвольно. Удобно принять $B_b = 1$ Тл (это значение ограничивает обычно диапазон линейного намагничивания ферромагнетиков). Тогда последовательно получаем все базисные значения полей:

$$B_b = 1, \quad H_b = \frac{B_b}{\mu}, \quad J_b = \frac{H_b}{h}, \quad E_b = \frac{J_b}{\gamma}. \quad (11)$$

Ток и магнитный поток в слое также удобно описывать относительными значениями. Введем их равенствами

$$I(t) \equiv \int_{-1}^1 J(x, t) dx, \quad \Phi(t) \equiv \int_{-1}^1 B(x, t) dx. \quad (12)$$

Базисными значениями служат при этом произведения

$$I_b = J_b h, \quad \Phi_b = B_b h.$$

Обратимся к последнему коэффициенту уравнений (8), записанному в квадратных скобках. Он безразмерен и при сделанном выборе базисных величин равен

$$a \equiv \frac{\alpha B_b}{t_b H_b} = \frac{\alpha}{\gamma h^2}. \quad (13)$$

Это число не зависит от остающегося свободным одного базисного значения поля, т.е. является единственным истинным параметром данной задачи. Назовем его *параметром магнитных потерь* и отметим, прежде всего, сильную зависимость числа a от толщины слоя. Хотя знаменатель α может быть мал, он все же отличен от нуля, так как запаздывание намагниченности всегда существует. Поэтому при достаточно малой толщине h параметр a становится большим. Он характеризует соотношение между потерями от магнитной вязкости и вихревых токов и возрастает за счет уменьшения последних. Типичные значения параметра a лежат в пределах от нуля до нескольких единиц.

Рассмотрим важный вопрос о *подобии* рассматриваемых задач. Два слоя с различными первичными параметрами h , γ и α назовем *подобными*, если их параметры магнитных потерь (13) численно равны. В случае анизотропии слоев *критериев подобия* два:

$$a_1 \equiv \frac{\alpha_z}{\gamma_y h^2} = \text{idem}, \quad a_2 \equiv \frac{\alpha_y}{\gamma_z h^2} = \text{idem}.$$

После выбора для каждого из подобных слоев своих базисных величин (9)–(10) уравнения для относительных значений полей в слоях принимают одинаковый вид:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = J, \quad \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t}, \quad J = E, \quad H = B + a \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (14)$$

где $a = a_1$ для случая системы, соответствующей уравнениям (4), и $a = a_2$ — в случае системы (5).

Граничные (или интегральные) условия двух слоев назовем *подобными*, если в относительных единицах они численно совпадают. *Подобные* слои, возбуждаемые *подобными* граничными (интегральными) условиями, описываются в относительных единицах идентичными краевыми задачами, решения которых совпадают.

Различие подобных слоев проявляется при возврате к единицам СИ путем умножения относительных значений на базисные. Их отличает, прежде всего, *временной масштаб* процессов, зависящий от константы

$$\beta \equiv t_b = \gamma \mu h^2 \quad (с).$$

Она может быть названа *постоянной времени слоя*. Время затухания переходных процессов в слое имеет порядок $(1+3)\beta$.

3. Решение задачи для изображений полей по Лапласу. Применим к уравнениям (14) преобразование Лапласа, отметив изображения точкой сверху. При нулевых начальных условиях получаем

$$\frac{\partial \dot{H}}{\partial x} = \dot{J}, \quad \frac{\partial \dot{E}}{\partial x} = p \dot{B}, \quad \dot{J} = \dot{E}, \quad \dot{H} = (1 + ap) \dot{B}. \quad (15)$$

Отсюда для любого из полей (например, для \dot{H}) получаем уравнение вида

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial x^2} = k^2 \dot{H}, \quad k^2 \equiv \frac{p}{1 + ap}. \quad (16)$$

Дальше под $k = \sqrt{p/(1+ap)}$ будем понимать одно из двух значений корня, например, то, для которого $\text{Re } k \geq 0$ при $\text{Re } p \geq 0$.

Общее решение уравнения (16) можно выразить через экспоненциальные или гиперболические функции. Для дальнейшего удобнее последние. Другие поля легко выразить через

\dot{H} из равенств (15). Таким образом получаем

$$\begin{aligned}\dot{H}(x, p) &= C_1 \operatorname{sh} kx + C_2 \operatorname{ch} kx, \\ J(x, p) &= (C_1 \operatorname{ch} kx + C_2 \operatorname{sh} kx) k, \\ \dot{E}(x, p) &= (C_1 \operatorname{ch} kx + C_2 \operatorname{sh} kx) k, \\ \dot{B}(x, p) &= (C_1 \operatorname{sh} kx + C_2 \operatorname{ch} kx) k^2/p.\end{aligned}\quad (17)$$

Будем использовать краевые значения этих функций, а также изображения тока $\dot{I}(p)$ и потока $\dot{\Phi}(p)$ слоя, которые получаются интегрированием (12):

$$\dot{H}^+(x, p) = C_1 \operatorname{sh} k + C_2 \operatorname{ch} k, \quad (18)$$

$$\dot{H}^-(x, p) = -C_1 \operatorname{sh} k + C_2 \operatorname{ch} k, \quad (19)$$

$$\dot{E}^+(x, p) = (C_2 \operatorname{sh} k + C_1 \operatorname{ch} k) k, \quad (20)$$

$$\dot{E}^-(x, p) = (-C_2 \operatorname{sh} k + C_1 \operatorname{ch} k) k, \quad (21)$$

$$\dot{I}(p) = 2C_1 \operatorname{sh} k, \quad (22)$$

$$\dot{\Phi}(p) = 2C_2 \operatorname{sh} kk/p. \quad (23)$$

Здесь все функции выражены через одни и те же константы C_1, C_2 . Исключая их, получим несколько вариантов явной связи между изображениями граничных функций, тока и потока.

3.1. Связь между граничными значениями \dot{H}^\pm и \dot{E}^\pm . В этом случае нужно исключить константы C_1, C_2 , используя выражения (18)–(21). Краткость выкладок достигается использованием следующего легко проверяемого факта: для любой обратимой матрицы A второго порядка матрица S вида

$$S \equiv A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A^{-1} \quad (24)$$

совпадает со своей обратной: $S^{-1} = S$. Если положить, что

$$A \equiv \begin{bmatrix} \operatorname{sh} k & \operatorname{ch} k \\ -\operatorname{sh} k & \operatorname{ch} k \end{bmatrix}, \quad (25)$$

то пары выражений (18), (19) и (20), (21) можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{H}^+ \\ \dot{H}^- \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_1 \end{bmatrix} = \\ &= A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A^{-1} A \begin{bmatrix} C_2 \\ C_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{k} S \begin{bmatrix} \dot{E}^+ \\ \dot{E}^- \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Следовательно, искомые связи таковы:

$$\begin{bmatrix} \dot{H}^+ \\ \dot{H}^- \end{bmatrix} = \frac{1}{k} S \begin{bmatrix} \dot{E}^+ \\ \dot{E}^- \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{E}^+ \\ \dot{E}^- \end{bmatrix} = kS \begin{bmatrix} \dot{H}^+ \\ \dot{H}^- \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Остается вычислить матрицу S подстановкой (25) в (24). Получаем

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \operatorname{cth} k + \operatorname{th} k & -\operatorname{cth} k + \operatorname{th} k \\ \operatorname{cth} k - \operatorname{th} k & -\operatorname{cth} k - \operatorname{th} k \end{bmatrix}.$$

Далее вместо входящих в (26) матриц S/k и kS будут использованы матрицы M и K , элементы которых имеют нулевую асимптотику при $p \rightarrow \infty$:

$$\dot{M} \equiv \frac{2}{pk} S, \quad \dot{K} \equiv \frac{2k}{p} S.$$

(Последнее важно для численного выполнения обратного преобразования Лапласа.) Элементы матриц M и K есть линейные комбинации следующих функций комплексного переменного p :

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_0(p) &\equiv \frac{\operatorname{cth} k}{pk}, & \dot{\eta}_1(p) &\equiv \frac{\operatorname{th} k}{pk}, \\ \dot{z}_0(p) &\equiv \frac{k \operatorname{cth} k}{p}, & \dot{z}_1(p) &\equiv \frac{k \operatorname{th} k}{pk},\end{aligned}\quad (27)$$

где $k \equiv \sqrt{p/(1+ap)}$. При этом

$$\begin{aligned}\dot{M}(p) &\equiv \begin{bmatrix} \dot{\eta}_0(p) + \dot{\eta}_1(p) & -\dot{\eta}_0(p) + \dot{\eta}_1(p) \\ \dot{\eta}_0(p) - \dot{\eta}_1(p) & -\dot{\eta}_0(p) - \dot{\eta}_1(p) \end{bmatrix}, \\ \dot{K}(p) &\equiv \begin{bmatrix} \dot{z}_0(p) + \dot{z}_1(p) & -\dot{z}_0(p) + \dot{z}_1(p) \\ \dot{z}_0(p) - \dot{z}_1(p) & -\dot{z}_0(p) - \dot{z}_1(p) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (28)$$

Теперь вместо (26) можно записать следующие окончательные выражения связи между изображениями полей H и E на границах слоя:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{H}^+ \\ \dot{H}^- \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \dot{M} \begin{bmatrix} p\dot{E}^+ \\ p\dot{E}^- \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \dot{E}^+ \\ \dot{E}^- \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \dot{K} \begin{bmatrix} p\dot{H}^+ \\ p\dot{H}^- \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (29)$$

3.2. Связь между значениями \dot{H}^\pm и $\dot{I}, \dot{\Phi}$. Исключая константы C_1, C_2 из выражений (22), (23), (18), (19), получаем

$$\dot{H}^\pm = \frac{1}{2} \left(\pm \dot{I} + p\dot{\Phi} \frac{\operatorname{cth} k}{k} \right).$$

Используя функцию $\dot{\eta}_0(p)$ (27), запишем результат в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{H}^+ \\ \dot{H}^- \end{bmatrix} = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{\dot{\eta}_0(p)}{2} p^2 \dot{\Phi} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dot{z}_1(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{H}^+ - \dot{H}^- \\ \dot{H}^+ + \dot{H}^- \end{bmatrix}. \quad (31)$$

3.3. Связь между значениями \dot{E}^\pm и $\dot{I}, \dot{\Phi}$. Используем выражения (22), (23), (20), (21). Ис-

ключая из них постоянные C_1, C_2 , найдем, что

$$\dot{E}^{\pm} = \frac{1}{2}(\pm p\dot{\Phi} + \dot{k} \operatorname{cth} k).$$

Используя функцию $\dot{z}_0(p)$ (27), перепишем это выражение в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{E}^+ \\ \dot{E}^- \end{bmatrix} = \frac{p\dot{\Phi}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{\dot{z}_0(p)}{2} p \dot{I} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p\dot{\eta}_1(p) \\ 1/p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}^+ - \dot{E}^- \\ \dot{E}^+ + \dot{E}^- \end{bmatrix}. \quad (33)$$

4. Решения для функций времени. Интегралы Дюамеля. Начальным моментом $t=0$ будем считать такой, раньше которого все функции возбуждения и поля в слое равны нулю.

Выделенные выше функции (27) $\dot{\eta}_0(p), \dot{\eta}_1(p), \dot{z}_0(p), \dot{z}_1(p)$, зависящие также от параметра магнитных потерь a , являются аналитическими функциями переменного p и убывают до нуля при $p \rightarrow \infty$ ($\operatorname{Re} p > 0$) со скоростью $1/p$. Эти функции имеют оригиналы $\eta_0(p), \eta_1(p), z_0(p), z_1(p)$, которые можно найти с помощью обратного преобразования Лапласа. Оригиналами матриц (28) служат матрицы

$$M(t) \equiv \begin{bmatrix} \eta_0(t) + \eta_1(t) & -\eta_0(t) + \eta_1(t) \\ \eta_0(t) - \eta_1(t) & -\eta_0(t) - \eta_1(t) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$K(t) \equiv \begin{bmatrix} z_0(t) + z_1(t) & -z_0(t) + z_1(t) \\ z_0(t) - z_1(t) & -z_0(t) - z_1(t) \end{bmatrix}.$$

Обратимся к решениям (29)–(33). Все они содержат произведения изображений и по известному свойству имеют оригиналом свертку оригиналов сомножителей (интегралы Дюамеля). Обозначив для краткости

$$\vec{H}(t) \equiv \begin{bmatrix} H^+(t) \\ H^-(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{E}(t) \equiv \begin{bmatrix} E^+(t) \\ E^-(t) \end{bmatrix},$$

получим следующие решения для функций от носительного времени t :

$$\vec{H}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t M(t-\tau) \vec{E}'(\tau) d\tau,$$

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t K(t-\tau) \vec{H}'(\tau) d\tau,$$

$$\vec{H}(t) = \frac{I(t)}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^t \eta_0(t-\tau) \Phi''(\tau) d\tau \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\vec{E}(t) = \frac{\Phi'(t)}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^t z_0(t-\tau) I'(\tau) d\tau \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$I(t) = [1, -1] \vec{H}(t), \quad (35)$$

$$\Phi(t) = \int_0^t z_1(t-\tau) [1, 1] \vec{H}(\tau) d\tau,$$

$$I(t) = \int_0^t \eta_1(t-\tau) [1, 1] \vec{E}'(\tau) d\tau,$$

$$\Phi(t) = \int_0^t [1, -1] \vec{E}(\tau) d\tau,$$

где $\vec{E}', \vec{H}', I', \Phi', \Phi''$ — производные по от носительному аргументу t .

Таким образом, математическое моделирование проводящего слоя с магнитными потерями, как линейного объекта с выделенными «входом» и «выходом» сведено к двум вычислительным проблемам — нахождению оригиналов функций (27) и значений интегралов Дюамеля (35). Связанные с этим вопросы рассмотрены в пп. 6–9.

Замечание. Ядро интеграла Дюамеля называют *импульсной реакцией* (при свертке с входной функцией), *реакцией на скачок* (при свертке с первой производной), *реакцией на излом* (при свертке со второй производной). Для краткости мы будем называть все функции $\eta_0(t), \eta_1(t), z_0(t), z_1(t)$ *переходными функциями слоя*.

5. Мгновенная потребляемая мощность слоя. В соответствии с теоремой Пойнтинга относительную потребляемую мощность слоя $p(t)$ введем равенством

$$p(t) = E^+(t) H^+(t) - E^-(t) H^-(t). \quad (36)$$

(для верности знака скалярные функции E, H должны иметь смысл одной из пар E_z, H_y или $E_y, -H_z$). Базисное значение мощности равно произведению $E_b H_b$ или, в соответствии с равенствами (11),

$$p_b = E_b H_b = h E_b J_b = h J_b^2 / \gamma = h B_b H_b / t_b \quad (\text{Вт/м}^2).$$

Произведение $p_b p(t)$ выражает мощность, потребляемую в 1 м^2 слоя, равную сумме мощностей джоулевых потерь от протекающих в слое токов, мощности потерь на перемагничивание и скорости изменения энергии магнитного поля в этом объеме.

Отметим, что при ортогональном разложении векторной задачи на две скалярные, выполненном в п. 1, справедлив принцип наложения для мощностей потерь. В самом деле, по теореме Пойнтинга для суммарной потребляемой мощности имеем

$$p(t) = (\mathbf{E}^- \times \mathbf{H}^- - \mathbf{E}^+ \times \mathbf{H}^+)_{\text{х}} = \begin{vmatrix} E_y & E_z \\ H_y & H_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E_y & E_z \\ H_y & H_z \end{vmatrix},$$

де определители выражают мощности, потребляемые в каждой из отдельных задач.

С помощью интегралов Дюамеля (35) потребляемую мощность $p(t)$ можно выразить через одну любую пару функций (E^+, E^-) , (H^+, H^-) , (I, Φ) .

6. Переходные функции $\eta_0(t)$, $\eta_1(t)$, $z_0(t)$, $z_1(t)$ при отсутствии магнитных потерь ($a=0$). Это единственный случай, допускающий аналитическое решение. Говоря точнее, при $a=0$ переходные функции представимы быстро сходящимися тэта-рядами Якоби [5], что важно для контроля точности общей численной процедуры.

При $a=0$ формулы (27) дают:

$$\begin{aligned} \dot{z}_0(p) &= \frac{\text{cth} \sqrt{p}}{p}, & \dot{\eta}_0(p) &= \frac{z_0(p)}{p}; \\ \dot{z}_1(p) &= \frac{\text{th} \sqrt{p}}{p}, & \dot{\eta}_1(p) &= \frac{z_1(p)}{p}. \end{aligned} \quad (37)$$

Оригиналы функций $\dot{z}_0(p)$ и $\dot{z}_1(p)$ известны ([2], стр. 417, 161). Это тэта-функции Якоби $\theta_0(t)$ и $\theta_1(t)$:

$$\begin{aligned} z_0(t) &= \theta_0(t) \equiv 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\pi^2 k^2 t), \\ z_1(t) &= \theta_1(t) \equiv 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-\pi^2 (k+1/2)^2 t]. \end{aligned} \quad (38)$$

Если $t > 0,15$, можно ограничиться двумя членами каждого ряда. Для малых t существует другое представление тех же функций ([3], стр. 334):

$$\begin{aligned} \theta_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-k^2/t) \right], \\ \theta_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp(-k^2/t) \right], \end{aligned} \quad (39)$$

причем при $t \leq 0,15$ можно ограничиться членом $1/\sqrt{\pi t}$.

Из равенств (37) следует, что оригиналами и служат интегралы

$$\eta_0(t) = \int_0^t \theta_0(t) dt, \quad \eta_1(t) = \int_0^t \theta_1(t) dt.$$

Они вычисляются почленным интегрированием рядов (38), (39).

Таким образом, получаем следующие формулы для переходных функций слоя при отсутствии магнитных потерь (при $a=0$):

$$\eta_0(t) \approx \begin{cases} 2\sqrt{t/\pi}, & t \leq 0,15 \\ t - 2e^{-\pi^2 t/\pi^2} + N_1, & t > 0,3 \\ t - (2e^{-\pi^2 t} + e^{-4\pi^2 t/2})/\pi^2 + N_2, & \text{else} \end{cases}$$

$$\eta_1(t) \approx \begin{cases} 2\sqrt{t/\pi}, & t \leq 0,15 \\ -8e^{-\pi^2 t/4/\pi^2} + N_3, & t > 0,3 \\ -8(e^{-\pi^2 t/4} + e^{-9\pi^2 t/4/9})/\pi^2 + N_4, & \text{else} \end{cases}$$

$$z_0(t) \approx \begin{cases} 1/\sqrt{\pi t}, & t \leq 0,15 \\ 1 + 2e^{-\pi^2 t}, & t > 0,3 \\ 1 + 2e^{-\pi^2 t} + e^{-4\pi^2 t}, & \text{else} \end{cases}$$

$$z_1(t) \approx \begin{cases} 1/\sqrt{\pi t}, & t \leq 0,15 \\ 2e^{-\pi^2 t/4}, & t > 0,3 \\ 2e^{-\pi^2 t/4} + e^{-9\pi^2 t/4}, & \text{else} \end{cases}$$

где $N_1=0,3332635$, $N_2=0,3332638$, $N_3=0,9999509$, $N_4=1,000066$. Графики этих функций показаны на рис. 2. Относительное время практического установления их асимптотики < 3 .

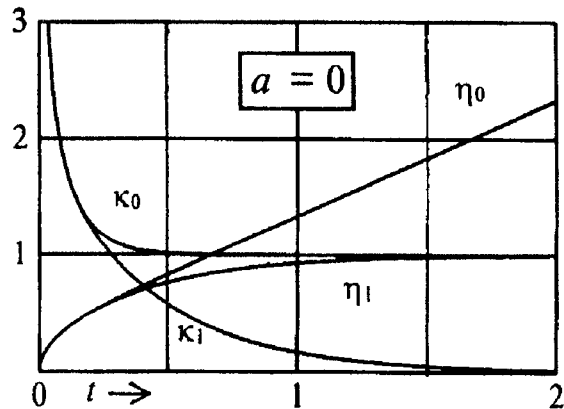


Рис. 2. Переходные функции слоя при $a=0$

7. Вычисление переходных функций при $a \neq 0$. При учете магнитной вязкости ($a \neq 0$) оригиналы функций (27) можно найти с помощью обратного преобразования Лапласа (интеграл Римана—Меллина). Поскольку речь идет о конкретных функциях, мы не будем затрагивать общие вопросы метода (погрешность, устойчивость решения и т.д.), а приведем конкретный алгоритм, численно отработанный на компьютере.

На рис. 3 изображена плоскость комплексного переменного $p=x+jy$. Все функции (27) содержат множитель $\text{cth} k$ или $\text{th} k = 1/\text{cth} k$ при $k = \sqrt{p/(1+ap)}$. Поскольку [7]

$$\text{cth} k = \sum_k \frac{1}{(k + j\pi n)}, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

то его полюсами служат мнимые числа $j\pi n$, а нулями (т.е. полюсами $\text{th} z$) — числа $j\pi(n + 1/2)$. И те и другие лежат на мнимой оси, т.е. имеют вид

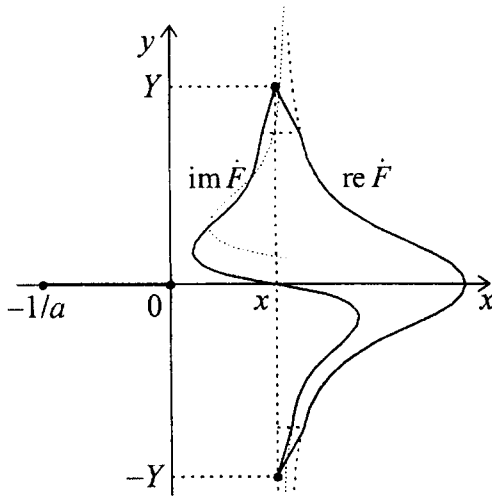


Рис. 3. Непрерывное линейное обрезание изображения на концевой части отрезка интегрирования

$z_n = jm$, где m — вещественно. Соответствующие точки p определяются уравнением $p/(1+ap) = -m^2$. Это есть комплексное уравнение линии полюсов. Из него следует, что $p = -m^2/(1+am^2)$. Если m^2 изменяется от 0 до ∞ , то p пробегает отрезок $[0, -1/a]$ (рис. 3). Он содержит все особые точки функций (27), так как стоящий перед \sinh или \tanh множитель влияет только на особенность в точке $p=0$.

Пусть $F(p) = F(x+jy)$ — любая из функций (27). В соответствии с известной теоремой обращения оригиналом $F(t)$ этой функции служит предел [7]

$$F(t) = \lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-Y}^Y \dot{F}(x+jy) e^{(x+jy)t} dy, \quad (41)$$

где x — любое вещественное число, лежащее правее всех особых точек функции $F(p)$. Таким образом, при обращении используются значения $F(p)$ на отрезке $[x+jY, x-jY]$ с фиксированным $x > 0$ и достаточно большим Y (рис. 3). Легко проверить, что вещественная часть $\operatorname{re} F$ есть четная, а $\operatorname{im} F$ — нечетная функции y , поэтому мнимая часть интеграла равна нулю, а действительная — получается интегрированием по отрезку $[0, Y]$ и умножением на 2. Таким образом, вместо (41) получаем

$$F(t) \approx \frac{\exp(xt)}{\pi} \int_0^Y [\operatorname{re} \dot{F}(x+jy) \cos yt - \operatorname{im} \dot{F}(x+jy) \sin yt] dy. \quad (42)$$

При конечном Y проявляется зависимость результата от выбора x , усиливающаяся с ростом t и ослабевающая с ростом Y . В данной задаче можно ограничиться значениями $t < 3$, поскольку при больших t устанавливается асимптотическое изменение оригинала. Оптимальным для рас-

считываемых функций является выбор $x \sim 0,1$ и $Y \sim 800$.

Отметим, что $\dot{F}(x+jy)$ является Фурье-спектром функции $F(t) \exp(-xt)$. Ограничение Y равносильно представлению спектра в виде суммы двух функций, одна из которых равна нулю вне отрезка $[-Y, Y]$, а другая — внутри него («хвост» спектра), и отбрасыванию «хвоста». Разрывный в точках $x \pm jY$ «хвост» имеет оригинал с осцилляциями, отражения которых наблюдается в функции (42). Гашение этих колебаний достигается выделением и отбрасыванием непрерывного «хвоста», для чего функция $\dot{F}(x+jy)$ обрывается не скачком, а линейно сводится до нуля на концевой трети отрезка $[-Y, Y]$ (рис. 3).

Обратимся к технике вычисления интеграла (42). При наибольшем значении $t=3$ и $Y=800$ подынтегральная функция содержит около 400 периодов синусоиды, модулированной относительно медленно изменяющимся множителем $\operatorname{re} F(y)$ или $\operatorname{im} F(y)$. При обычном применении квадратурных формул необходимо иметь порядка 10^2 точек на периоде или $4 \cdot 10^4$ точек на отрезке $[0, Y]$. Это число можно уменьшить примерно в 10 раз применением метода Филона, при котором число точек выбирается так же, как при интегрировании модулирующей функции. Приведем основанные на этом методе рабочие формулы вычисления интеграла (42).

Пусть отрезок $[0, Y]$ разбит на m равных элементов точками y_k ($k=0, 1, \dots, m$). Средние точки элементов обозначим y'_k ($k=0, 1, \dots, m-1$). Выбрав значение t , вычислим для всех точек y_k, y'_k числа

$$q_k \equiv ty_k, \quad s_k \equiv \sin q_k, \quad c_k \equiv \cos q_k;$$

$$q'_k \equiv ty'_k, \quad s'_k \equiv \sin q'_k, \quad c'_k \equiv \cos q'_k.$$

Далее найдем значения функции $\dot{F}(p)$ в точках y_k, y'_k и обозначим

$$\operatorname{re} F_k \equiv \operatorname{re} \dot{F}(x+jy_k), \quad \operatorname{im} F_k \equiv \operatorname{im} \dot{F}(x+jy_k),$$

$$\operatorname{re} F'_k \equiv \operatorname{re} \dot{F}(x+jy'_k), \quad \operatorname{im} F'_k \equiv \operatorname{im} \dot{F}(x+jy'_k).$$

Вычислим также следующие коэффициенты

$$q \equiv \frac{tY}{2m}, \quad s \equiv \sin q, \quad c \equiv \cos q,$$

$$a \equiv q^2 + qsc - 2s^2,$$

$$b \equiv 2[q(1+c^2) - 2sc],$$

$$g \equiv 4(s - qc).$$

Тогда интеграл (42) приближенно равен

$$F(t) \approx \frac{Y \exp(xt)}{2\pi m q^3} \left\{ a(c_m \operatorname{im} F_m - s_m \operatorname{re} F_m) + \frac{b}{2}(s_m \operatorname{re} F_m - \right.$$

$$-c_m \operatorname{im} F_m + \operatorname{re} F_0) + g(c'_0 \operatorname{re} F'_0 - s'_0 \operatorname{im} F'_0) + \\ + \sum_{k=1}^{m-1} [b(c_k \operatorname{re} F_k - s_k \operatorname{im} F_k) + (c'_k \operatorname{re} F'_k - s'_k \operatorname{im} F'_k)] \}. \quad (43)$$

Этот алгоритм предполагает равномерный шаг $\Delta y = Y/m$. Однако целесообразно выбрать шаг малым в зоне $[0, Y/10]$ быстрого изменения функции $F(p)$ и укрупнить на остальной части отрезка $[0, Y]$ в 10 раз. При этом можно использовать описанный выше алгоритм с равномерным шагом. Если обозначить через $F(t, Y, m)$ результат вычисления оригинала F в момент t при использовании отрезка $[0, Y]$, разделенного на m частей, а через $F(t)$ — результат при указанном выше неравномерном разбиении, то

$$F(t) = F(t, Y, m) - F(t, Y/10, m/10) + F(t, Y/10, m).$$

При этом общее число точек и объем вычислений примерно удваивается при сгущении точек в основной части отрезка в 10 раз.

Полученные описанным способом графики переходных функций слоя при различных значениях параметра магнитных потерь a показаны на рис. 4. Контроль точности осуществлен по результату в частном случае $a=0$ (п. 6), а также по предельным значениям, приведенным ниже.

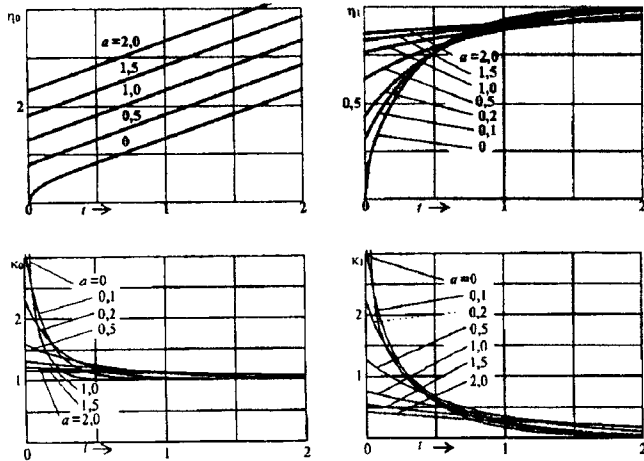


Рис. 4. Графики переходных функций $\eta_0(t)$, $\eta_1(t)$, $\zeta_0(t)$, $\zeta_1(t)$ при различных значениях параметра a

8. Предельные соотношения. Значения переходных функций при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ могут быть найдены с помощью известных предельных соотношений [7]:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \dot{F}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} F(t),$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \dot{F}(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t).$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} \eta_0(+0) &= \lim_{p \rightarrow \infty} p \dot{\eta}_0(p) = \sqrt{a} \operatorname{cth} \frac{1}{\sqrt{a}}, \\ \eta_1(+0) &= \lim_{p \rightarrow \infty} p \dot{\eta}_1(p) = \sqrt{a} \operatorname{th} \frac{1}{\sqrt{a}}, \\ \zeta_0(+0) &= \lim_{p \rightarrow \infty} p \dot{\zeta}_0(p) = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{cth} \frac{1}{\sqrt{a}}, \\ \zeta_1(+0) &= \lim_{p \rightarrow \infty} p \dot{\zeta}_1(p) = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{th} \frac{1}{\sqrt{a}}. \end{aligned} \quad (44)$$

Зависимости этих значений от параметра a показаны на рис. 5.

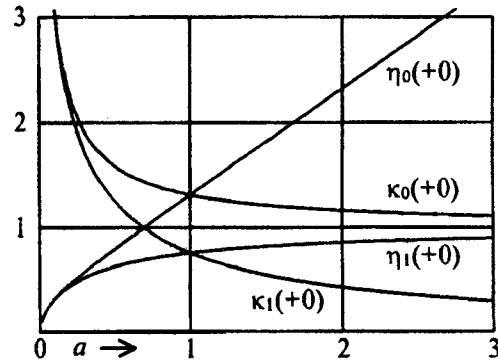


Рис. 5. Зависимости пределов переходных функций от параметра a

Пределы переходных функций при $t \rightarrow \infty$ равны

$$\begin{aligned} \eta_0(\infty) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \dot{\eta}_0(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cth} \sqrt{p}}{\sqrt{p}} = \infty, \\ \eta_1(\infty) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \dot{\eta}_1(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} \sqrt{p}}{\sqrt{p}} = 1, \\ \zeta_0(\infty) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \dot{\zeta}_0(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \sqrt{p} \operatorname{cth} \sqrt{p} = 1, \\ \zeta_1(\infty) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \dot{\zeta}_1(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \sqrt{p} \operatorname{th} \sqrt{p} = 1. \end{aligned} \quad (45)$$

Аналогично найдем предельные значения производной от $\eta_0(t)$ и интеграла от $\zeta_1(t)$:

$$\begin{aligned} \eta'_0(\infty) &= \lim_{p \rightarrow 0} p^2 \ddot{\eta}_0(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \sqrt{p} \operatorname{cth} \sqrt{p} = 1, \\ \int_0^\infty \zeta_1(t) dt &= \lim_{p \rightarrow 0} \dot{\zeta}_1(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} \sqrt{p}}{\sqrt{p}} = 1. \end{aligned} \quad (46)$$

9. Вычисление интегралов Дюамеля. Формулы (35) содержат интегралы вида свертки:

$$c(t) \equiv \int_0^t F(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t F(\tau) f(t-\tau) d\tau. \quad (47)$$

Ядро $F(t)$ выражается через переходные функции слоя и может быть либо скалярнозначной функцией, либо функциональной матрицей размером 2×2 . Сомножитель $f(t)$ связан с фун-

кцией-воздействием на слой $v(t)$ одним из ра-
венств

$$f(t) = v(t), \quad f(t) = v'(t), \quad f(t) = v''(t), \quad (48)$$

причем, если $F(t)$ — матрица, то $v(t)$ и $f(t)$ — двумерные столбцы. Матричный характер подынтегрального умножения в (47) не играет в дальнейшем особой роли, следует только пом-
нить, что в этом случае умножение неком-
мутативно, т.е. сомножитель F всегда должен сто-
ять *перед* сомножителем f .

В компьютерных моделях функция $v(t)$ по-
ступает на вход дискретно с некоторым шагом Δt и синхронно с этим должна вычисляться
свертка $c(t)$. Значения $v(t)$ внутри шага неиз-
вестны и результат свертки может быть ин-
терпретирован в зависимости от предполагаемого
вида функции $v(t)$. Для численного нахождения
свертки введем равномерный шаг $\Delta \tau$ и с тем
же шагом $\Delta t = \Delta \tau$ будем изменять верхний предел.

Интеграл (47) есть сумма интегралов по ша-
говым приращениям времени $\Delta \tau_k \equiv \tau_k - \tau_{k-1}$. Если $t = n \Delta t$, а переменная интегрирования τ пробегает k -й шаг, то разность $t - \tau$ лежит внутри шага с номером $n - k + 1$. Обозначив через F_k и f_{n-k+1} некоторые *средние* значения функций F и f на отмеченных индексами шагах, получим для интеграла по одному шагу значение

$$\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} F(\tau) f(t - \tau) d\tau \approx \Delta \tau F_k f_{n-k+1},$$

а для всей свертки приближенное выражение в форме интегральной суммы

$$c_n \equiv c(n \Delta t) \approx \Delta \tau \sum_{k=1}^n F_k f_{n-k+1}. \quad (49)$$

Заметим, что это равенство является *точным*, если функция $f(t)$ на каждом шаге *постоянна*, а F_k есть *средние интегральные значения* ядра:

$$F_k = \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} F(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (50)$$

Пусть $v_k \equiv v(k \Delta t)$ — значения функции-воз-
действия в узловых точках τ_k . Тогда в зави-
симости от случая (48) примем, что

$$f_k = \frac{1}{2} (v_k + v_{k-1}); \quad (51)$$

$$f_k = \frac{1}{\Delta t} (v_k - v_{k-1}); \quad (52)$$

$$f_k = \frac{1}{(\Delta t)^2} (v_k - 2v_{k-1} + v_{k-2}). \quad (53)$$

Отметим, что совместное применение формул

(50) и (52) дает *точный* результат при кусочно-
линейном воздействии $v(t)$, так как в этом случае
производная $f(t) = v'(t)$ кусочно-постоянна.

Вторая производная в том же случае вы-
ражается суммой δ -функций с импульсами в
точках излома τ_k :

$$v''(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta \tau \delta(\tau - \tau_k) f_{k+1},$$

где значения f_{k+1} определяются равенством (53).
Фильтрующее свойство δ -функций позволяет вы-
числить свертку *точно*:

$$c(t) = \int_0^t F(t - \tau) v''(\tau) d\tau = \Delta \tau \sum_{k=0}^{n-1} F(t - \tau_k) f_{k+1}.$$

Здесь $F(t - \tau_k) = F((n - k) \Delta t) \equiv F_{n-k}^*$ есть значение $F(t)$ в *конце отрезка* $\Delta \tau_{n-k}$. Результат можно переписать в виде

$$c(t) = \Delta \tau \sum_{k=1}^n F_{n-k+1}^* f_k = \Delta \tau \sum_{k=1}^n F_k^* f_{n-k+1}. \quad (54)$$

Возвращаясь к приближенному равенству (49) и выражению (53) для значений f_k , видим, что получаемое при этом значение свертки $c(t)$ мож-
но интерпретировать как реакцию на кусочно-
линейное воздействие с точностью равенств $F_k \approx F_k^*$, где F_k — среднее, а F_k^* — конечное зна-
чение ядра F на отрезке $\Delta \tau_k$.

При программировании вычислений удобнее находить приращения свертки на каждом n -м шаге: $\Delta c_n \equiv c(n \Delta t) - c((n - 1) \Delta t)$. Из равенства (49) получаем

$$\begin{aligned} \Delta c_n &= \Delta \tau \sum_{k=1}^n F_k f_{n-k+1} - \Delta \tau \sum_{k=1}^{n-1} F_k f_{n-k} = \\ &= \Delta \tau \sum_{k=1}^n (F_k - F_{k-1}) f_{n-k+1}, \end{aligned} \quad (55)$$

где следует принять $F_0 = 0$.

Поскольку переходные функции имеют от-
резок установления, следует использовать зна-
чения F_k лишь для $k \leq m$, где m — число шагов Δt на отрезке установления. Пусть вне этого отрезка (т.е. при $t > m \Delta t$) известно асимпто-
тическое значение производной $F' \equiv F'(t) = \text{const}$. Тогда для значений $k > m$ имеет место очевидное равенство

$$F_k - F_{k-1} = \Delta t F'$$

и, следовательно, при $n > m$ вместо равенства (55) можем записать:

$$\Delta c_n = \Delta t \sum_{k=1}^m (F_k - F_{k-1}) f_{n-k+1} + \Delta t F' \sum_{k=1}^{n-m} f_k. \quad (56)$$

Из предельных соотношений (45), (46) следует, что значение $F'=1$ для функции $\eta_0(t)$ и равно нулю для остальных переходных функций. Равенства (56), (51), (52), (53) являются основными формулами для вычисления интегралов Дюамеля (35).

10. Частотные характеристики слоя связывают комплексные амплитуды входных и выходных функций в синусоидальных режимах. Они интересны сами по себе и могут служить средством контроля точности работы программ, вычисляющих интегралы Дюамеля. Магнитные потери делают частотные характеристики необычными. Например, толщина скин-слоя с ростом частоты не убывает до нуля, а имеет предельное значение $h\sqrt{a} = \sqrt{a/\gamma}$ (м), из-за чего активное электрическое сопротивление скин-слоя не превосходит значения $1/\sqrt{\gamma a}$ (Ом).

Для получения частотных характеристик можно использовать полученные в п. 3 решения для изображений, положив всюду $p=0+j\omega$. Число ω имеет смысл относительной круговой частоты, причем базисным значением частоты служит значение

$$\omega_b \equiv 2\pi/t_b = 2\pi/(\mu\gamma h^2) \quad (1/c).$$

Частота ω и параметр магнитных потерь a влияет на распределение комплексных амплитуд полей внутри слоя через коэффициент распространения $k(\omega, a)$, который в соответствии с определением (16) равен

$$k(\omega, a) = \sqrt{\frac{j\omega}{1+j\omega a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{j\Omega}{1+j\Omega}} \quad (\Omega \equiv \omega a).$$

Его вещественная часть $\text{Re } k$ (коэффициент затухания) и мнимая часть $\text{Im } k$ (коэффициент фазы) равны:

$$\text{Re } k = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{\Omega}{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\Omega^2} + \Omega}{1+\Omega^2}},$$

$$\text{Im } k = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{\Omega}{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\Omega^2} - \Omega}{1+\Omega^2}}.$$

Эти функции изображены на рис. 6 как зависимости $\sqrt{a} \text{Re } k$ и $\sqrt{a} \text{Im } k$ от $\sqrt{\Omega} = \sqrt{\omega a}$. Начальная линейная часть кривых ($\sqrt{\Omega} < 0,3$) соответствует режимам с пренебрежимо малыми магнитными потерями. Для первичных параметров слоя это условие выглядит так:

$$\omega a = \frac{\omega_{si}}{\omega_b} \frac{\alpha}{\gamma h^2} = \frac{\mu \omega_{si}}{2\pi} < 0,1.$$

Решения (17) содержат экспоненты $\exp(\pm xk) =$

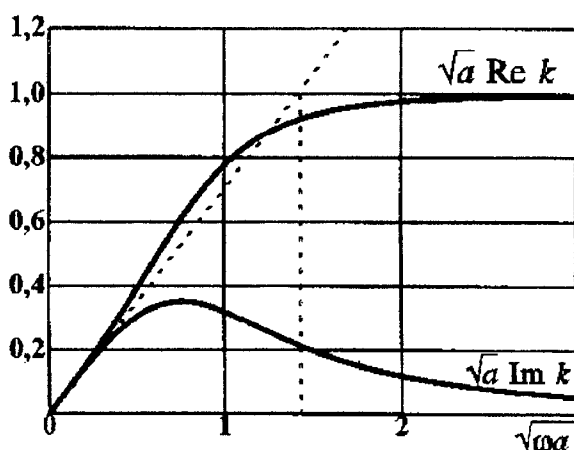


Рис. 6. Зависимости $\sqrt{a} \text{Re } k$ и $\sqrt{a} \text{Im } k$ от $\sqrt{\omega a}$.

$= \exp(\pm(x \text{Re } k)) \exp(\pm jx \text{Im } k)$. Затухание амплитуд характеризуется множителем, содержащим $\text{Re } k$. На глубине $\delta = 1/\text{Re } k$ от границ слоя амплитуды затухают в e раз. Это число δ называют глубиной проникновения поля или условной толщиной скин-слоя. Зависимость отношения δ/\sqrt{a} от $\sqrt{\omega a}$ показана на рис. 7.

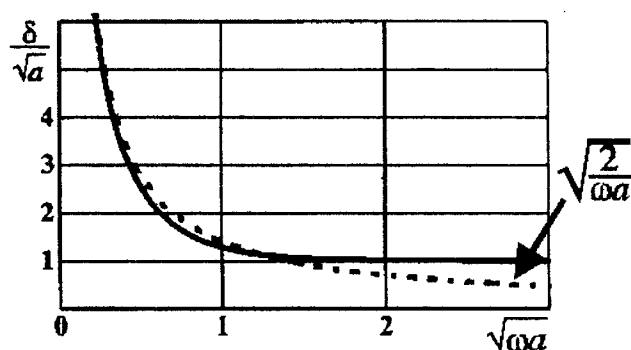


Рис. 7. Зависимость отношения δ/\sqrt{a} от $\sqrt{\omega a}$

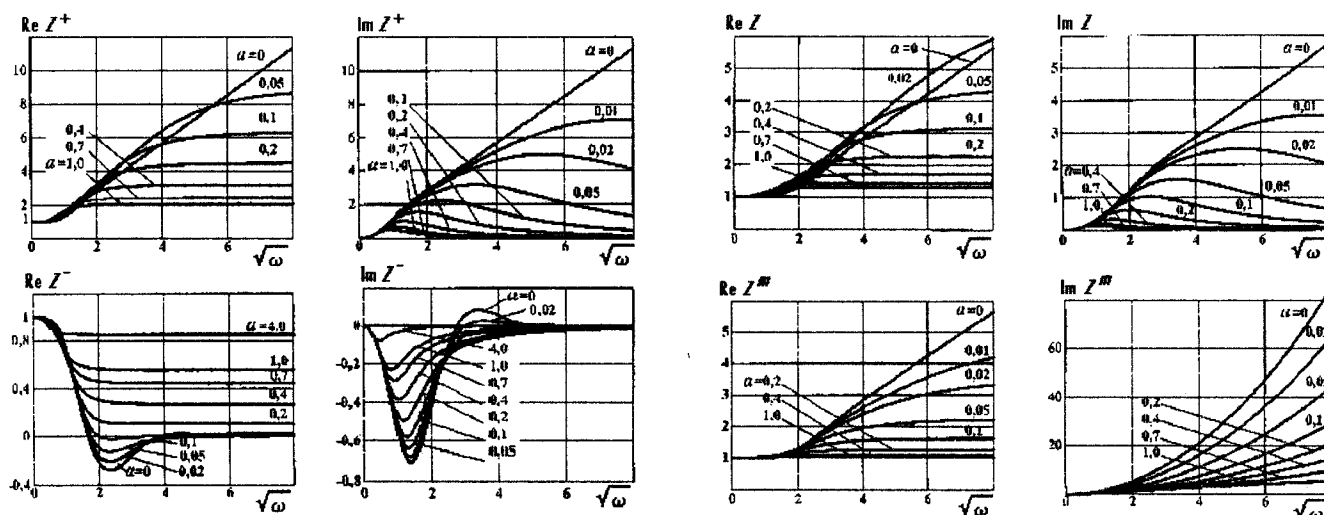
Расчетные характеристики слоя получим из выражений (26), (30), (32):

$$\begin{bmatrix} \dot{E}^+ \\ \dot{E}^- \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Z^+ & -Z^+ \\ Z^- & -Z^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{H}^+ \\ \dot{H}^- \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} Z^+ \equiv k(\text{cth } k + \text{th } k) \\ Z^- \equiv k(\text{cth } k - \text{th } k) \end{matrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{E}^+ \\ \dot{E}^- \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Z & j\omega \\ Z & -j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix}, \quad Z \equiv k \text{cth } k;$$

$$\begin{bmatrix} \dot{H}^+ \\ \dot{H}^- \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & Z^m \\ -1 & Z^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix}, \quad Z^m \equiv \frac{j\omega \text{cth } k}{k}.$$

Зависимости относительных сопротивлений Z^+ , Z^- , Z , Z^m от частоты ω и параметра потерь a показаны на рис. 8. Для электрических сопротивлений Z^+ , Z^- , Z служит отношение $E_b/H_b = E_b/I_b$, а для магнитного сопротивления Z^m — отношение $H_b/\Phi_b = H_b/(hB_b)$. С учетом ра-

Рис. 8. Графики зависимостей Z^+ , Z^- , Z , Z^m от $\sqrt{\omega}$

венств (11) получаем

$$Z_b = \frac{1}{\gamma h} \text{ (Ом)}, \quad Z_b^m = \frac{1}{\mu h} \text{ (1/Гн)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колесников Э.В., Ткачев А.Н. Численное моделирование планарного перемангничивания холоднокатанной стали. — Изв. вузов. Электромеханика, 1984. № 8.
2. Колесников Э.В., Бурцев Ю.А. Численное моделирование плоских электромагнитных волн в ферромагнетике с учетом вихревых токов гистерезиса и магнитной вязкости. — Изв. вузов. Электромеханика, 1995. № 5–6.
3. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. 2. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1958.
4. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, т. 1. — М.: Физматгиз, 1969.
6. Filon Z.N.G. — Proc. Roy. Soc. Ebin., XLIX, 38–47 (1928–1929).
7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз, 1973.

[06.01.98]

Авторы: Колесников Эрио Викторович окончил электромеханический факультет Новочеркасского политехнического института в 1959 г. и физико-математический факультет Ростовского государственного университета в 1961 г. Защитил докторскую диссертацию в Ленинградском политехническом институте по теме «Переходные и стационарные электромагнитные поля магнитопроводов и токопроводов». Профессор кафедры «Электротехника» Волгоградского государственного технического университета (ВГТУ).

Колесников Виктор Эриович окончил машиностроительный факультет ВГТУ в 1996 г. Аспирант кафедры «Автоматизация производственных процессов» ВГТУ.

К ЧИТАТЕЛЯМ ЖУРНАЛА «Электричество»

Бесплатно получать оглавления нашего журнала можно через электронные сети. Эту услугу оказывает служба ИНФОМАГ, организованная в Московском физико-техническом институте. Все материалы службы ИНФОМАГ доступны в режиме ON-LINE через сервер РосНИИРОС по следующим URL:

<http://www.ripn.net>

<gopher://gopher.ripn.net>

Для получения материалов службы ИНФОМАГ по подписке через электронную почту следует направить письмо с командой

HELP по адресу ims@ripn.net

Полная информация о службе ИНФОМАГ может быть получена в ответ на команду HELP, направленную по адресу infomag@igrant.mipt.msk.su

Анализ структуры экструдированной изоляции высоковольтных кабелей методом видеомикроскопии

ШУВАЛОВ М.Ю., ОВСИЕНКО В.Л.

Приведены результаты исследования морфологии полимерной изоляции силовых кабелей, выполненного с применением компьютерной видеоусиленной микроскопии. Для изучения морфологии использованы методы темного поля, фазового и дифференциального интерференционного контраста, аноптральной и поляризационной микроскопии, контраста асимметричного освещения. Установлено, что структура изоляции неоднородна и анизотропна, что приводит к неоднородности и анизотропии локальной электрической прочности (стойкости и электрическим трингам). Установление связи между электрической прочностью и морфологией позволяет определить пути усовершенствования технологии, обеспечивающие повышение надежности кабеля.

Ключевые слова: высоковольтные кабели, полимерная изоляция, структура изоляции, анализ морфологии, видеомикроскопия

Основную долю кабелей высокого напряжения, производимых в настоящее время, составляют изделия, изолируемые химически сшиваемым полиэтиленом низкой плотности, накладываемым методом экструзии. Изучение морфологии изоляции таких кабелей представляет практический интерес, так как этот фактор оказывает значительное влияние на электрическую прочность, что подтверждается работами [1, 2] и также будет показано ниже.

В принципе для исследования морфологии полимерных материалов, в том числе кабельных диэлектриков могут применяться различные методы — электронной микроскопии [3], термического анализа [4], рассеяния рентгеновских лучей [5] и пр. Эти методы несут значительную

The results of an investigation of the morphology of a polymer insulation of power cables, carried out with the help of a computer video enhanced microscopy are stated. To study the morphology the following methods have been used: a method of dark field, a method of phase and differential interference contrast, a method of an anoptroptal and polarisation microscopy and a method of an asymmetric illumination contrast. It is established that insulation structure is heterogeneous and anisotropic. That leads to inhomogeneity and the anisotropy of the local electric strength (electric treeing resistance). The establishment of a relationship between the electric strengths and the morphology makes it possible to determine the ways for improving a technology ensuring an increase in the cable reliability.

Key words: power cables, polymer insulation, insulation structure, analysis morphology, videomicroscopy

информацию о природе изучаемого объекта и хорошо дополняют друг друга.

Мы, со своей стороны, рассмотрим изучение структуры (С) изоляции высоковольтных кабелей методом видеомикроскопии. Компьютерная видеоусиленная микроскопия уже применялась нами в ряде работ для исследования различных форм старения и разрушения изоляции [6, 7]. Метод основан на объединении светового микроскопа, телевизионной камеры и монитора, аналогового и/или цифрового видеопроцессора и компьютера в одно устройство — анализатор изображений (рис. 1). Большое разнообразие методов собственно микроскопии, аналоговой и цифровой обработки изображений — как в реальном времени, так и ранее записанных в память ЭВМ —

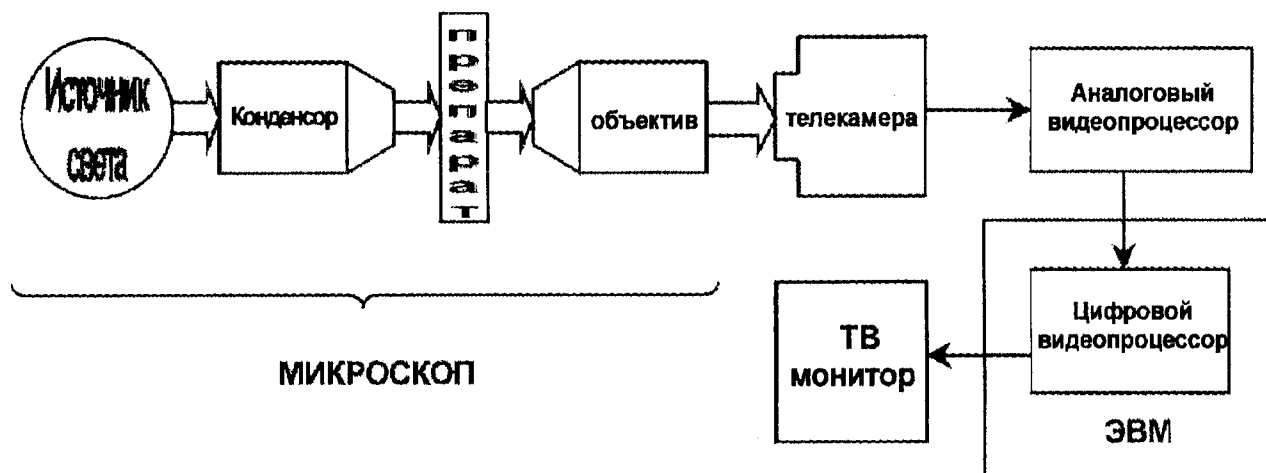


Рис. 1. Принципиальная схема анализатора изображения

позволяет получить весьма обширный набор методик для качественного и количественного исследования.

Структура изоляции формируется как результат основных этапов технологического процесса изолирования — экструзии, вулканизации и охлаждения. Она характеризуется различными уровнями пространственной организации.

Правоммерно выделить три таких уровня:

(1) самый высший, структурные элементы которого характеризуются пространственными размерами в диапазоне от единиц до сотен микрометров (эти размеры определяются для поперечного сечения кабеля);

(2) средний, морфологические единицы которого имеют размеры приблизительно 1 мкм;

(3) низший, морфология которого проявляется в масштабах порядка десятков нанометров.

В данной работе мы остановимся в основном на первом, и отчасти на втором уровнях. Что же касается третьего, то он находится за пределами разрешения светового микроскопа. В этом случае для исследования С применяются другие методы, указанные выше. В частности, электронная микроскопия показывает, что кабельную изоляцию можно характеризовать большим периодом, состоящим из аморфных прослоек и кристаллитов-ламелей [3].

Макроскопически С представляет собой сформированную в экструзионной головке «картину потока» (flow pattern); наиболее типичный, хотя и не единственно возможный, пример такой картины схематически показан на рис. 2. Последовательно более полное представление о С можно получить, наращивая увеличение микроскопа

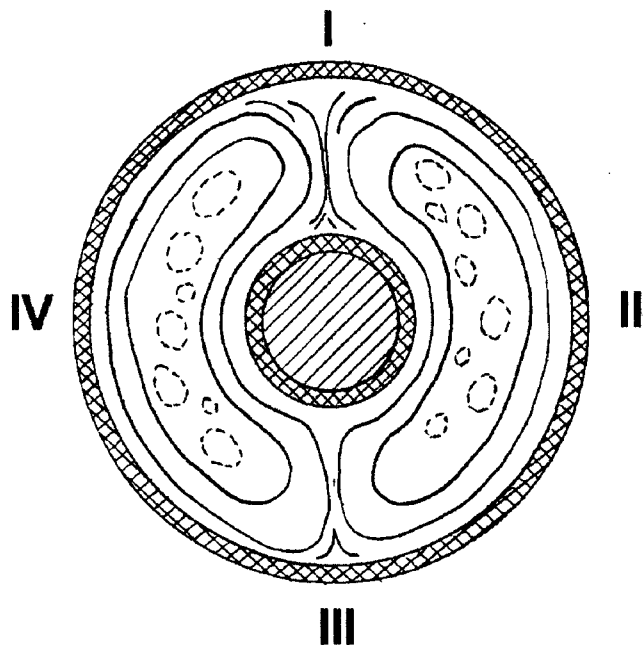


Рис. 2. Схематическое изображение картины потока

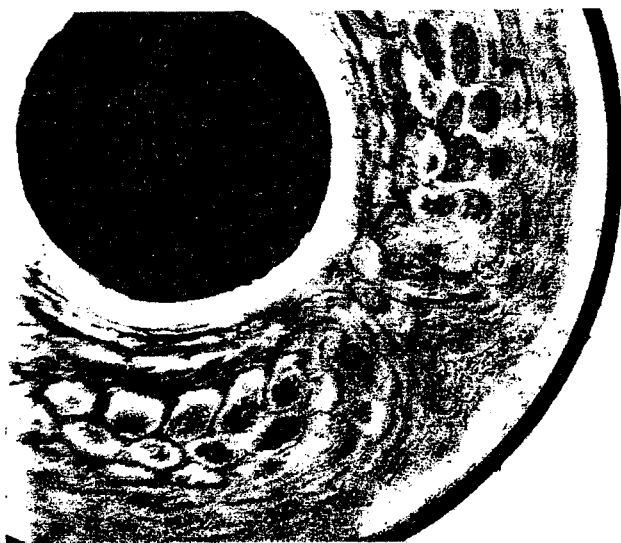


Рис. 3. Изображение макроскопически наблюдаемой структуры изоляции, полученное в рассеянном свете

и используя разные приемы наблюдения. В качестве первого шага на рис. 3 показано макроизображение С, полученное в рассеянном проходящем свете с использованием схемы рис. 1, в которой, однако, вместо оптики микроскопа использован обычный фотообъектив.

Попытка исследовать С с помощью обычной, т.е. светлопольной микроскопии оказывается мало успешной ввиду того, что изоляция, прозрачная в микротомных срезах, практически совершенно не поглощает и сравнительно весьма мало рассеивает свет. Тем не менее, для ее изучения удастся с большим или меньшим успехом применять довольно широкий спектр методов световой микроскопии. Конкретно, мы используем: темное поле, фазовый контраст, аноптику, поляризационную технику, сочетание последней с двумя предыдущими, дифференциальный интерференционный контраст, контраст асимметричного освещения. Каждый из этих методов имеет свои достоинства и ограничения, поэтому более полное представление о предмете исследования можно получить, используя разные методики в комплексе.

Изложение последующего материала построено следующим образом. Приводится краткая характеристика очередного применяемого метода с точки зрения поставленной задачи, дается пример применения. Затем делаются общие выводы.

Оговоримся, что представленные в статье данные получены на основе изучения кабелей, изготовленных разными фирмами, как в России, так и за рубежом, и отражают общие морфологические черты изоляции силовых кабелей.

Темное поле. Этот метод позволяет получить исключительно высококонтрастные изображения



Рис. 4. Структура изоляции в темном поле при небольшом увеличении. Ширина поля зрения 1 мм

элементов структуры (ЭС) — рис. 4. Однако успех его применения, согласно нашему опыту, ограничивается специальным сухим (т.е. не иммерсионным) конденсором с числовой апертурой порядка 0,7 и, соответственно, объективами с малыми и средними увеличениями, примерно до $\times 30$. Данное ограничение связано, по видимому, с тем, что при использовании высокоапертурного иммерсионного конденсора в объектив микроскопа попадает слишком много света, рассеиваемого основным объемом материала, которые не удается эффективно скомпенсировать с помощью имеющихся в нашем распоряжении аналогового и цифрового видеопроцессоров. Соответственно, происходит «засвечивание» С и освещение темного поля.

Фазовый контраст. Фазово-контрастное изображение представляет собой карту коэффициентов преломления в образце. В отличие от предыдущего, данный метод можно использовать



Рис. 5. Элемент структуры, выявленный с помощью фазового контраста. Видна зернистость структурного элемента. На рис. 5—8 ширина поля зрения 150 мкм

в широких диапазонах увеличений и числовых апертур, с объективами от $\times 10$ до $\times 100$; последние имеют апертуру 1,25—1,30. Пример ЭС, выявленного с помощью фазового контраста, показан на рис. 5. Сам факт визуализации свидетельствует о различных коэффициентах преломления, а значит, плотности ЭС и окружающего материала.

К недостаткам метода следует отнести то, что он более эффективен при работе с тонкими срезами, получение которых представляет известные трудности.

Прежде чем перейти к дальнейшему, необходимо объяснить, что понимается под ЭС. Наблюдения показывают, что «картина потока» при более детальном рассмотрении действительно напоминает как бы застывший поток, отчасти турбулентный, отчасти ламинарный, состоящий из отдельных линий и фигур сложной формы, наблюдаемых в поперечном сечении кабеля (с учетом того, что реальная С в действительности трехмерная, правомерно говорить о трубках тока). Эти фигуры и линии как бы заморожены в основной объем материала и в разных участках изоляции имеют различную ориентацию. Так, в областях I и III на рис. 2 они ориентированы преимущественно вдоль радиуса кабеля, а в областях II и IV — перпендикулярно ему.

Аноптральная микроскопия. Этот не получивший должного распространения метод занимает, вероятно, промежуточное положение между негативным фазовым контрастом и методом темного поля [8, 9]; он чувствителен к малым фазовым сдвигам и в видеоварианте обеспечивает прекрасный контраст. Нам удалось повысить его еще больше, введя в оптическую схему микроскопа поляризатор и анализатор. Степень их скрещенности подбирается таким образом, чтобы максимально подавить светимость окружающего «основного материала», одновременно увеличивая яркость ЭС — рис. 6 (результатирующий контраст оказывается, таким образом, отчасти фазово-темнопольным (аноптральным), а отчасти — поляризационным.)

Обращает на себя внимание своеобразная зернистая субструктура «трубки тока», видимая на рис. 6 (а также с помощью других методов — рис. 5, 8). Мы склонны считать образующие ее зерна микроскопическими сферолитами с размерами 2—3 мкм. Понятно, что речь идет о структуре второго уровня. Для исследования изоляции аноптральная микроскопия оказалась вообще ценным методом: с ее помощью мы успешно изучаем водные триинги, микропримеси в кабельных маслах и пр. При этом, настраивая по-разному схему рис. 1, удастся получить изображения, близкие как к темнопольным, так и



Рис. 6. Элемент структуры, выявленный с помощью аноптрального микроскопа, дополнительно оснащенного поляризатором и анализатором

к фазово-контрастным.

Недостатком аноптральной микроскопии является еще большая, чем в случае фазового контраста, требовательность к толщине срезов.

Дифференциальный интерференционный контраст (ДИК) — отражает распределение в образце оптических путей, т.е. поставляет в принципе ту же информацию, что и фазовый контраст, при этом метод свободен от характерных недостатков последнего. Изображения структурных элементов получаются как бы объемными — рис. 7, причем направление оттенения и впечатление о выпуклости или впадинности объекта зависят от его ориентации и от настройки микроскопа. С помощью ДИК хорошо наблюдаются линии тока. Необходимо, однако, что исследования этим поляризационно-интерференционным методом осложнены собственным двойным лучепреломлением полиэтилена, создающим нежелательный рассеянный свет (см. ниже), ко-



Рис. 7. Линии тока, визуализированные по методу ДИК. Видна «объемность»

торый представляет собой как бы оптический шум. Этого ограничения не имеет фазовый контраст, дополняющий ДИК при исследовании неоднородностей распределения коэффициентов преломления в материале.

Поляризационная микроскопия. Эта техника традиционно широко используется для наблюдения сферолитов в полимерах [10]. Однако для наших целей прямое применение поляризационной микроскопии для исследования «технологически обусловленной» С затруднено из-за значительного двойного лучепреломления основного объема материала. Это двойное лучепреломление складывается из собственного двулучепреломления диэлектрика и из того, которое создается внутренними механическими напряжениями технологического происхождения. Кроме того, микротомные срезы как правило характеризуются колебаниями толщины (а значит и разности оптических путей) вследствие несовершенства процесса резания, что также сильно мешает наблюдениям. Тем не менее, с помощью поляризационного микроскопа можно получать интересные данные, в частности если его объединить с нагревательным столиком.

Доведение образца до плавления показывает, что ЭС плавятся при немного более высокой (примерно на 1°C) температуре, чем основной материал, а при последующем охлаждении восстанавливаются. Подобное явление значительно раньше было замечено при исследовании сферолитов в изотактическом полипропилене [11]. В нашем случае подобный эффект «морфологической памяти» можно предположить связь с наличием в материале химических сшивок¹. Таким образом, рассматриваемые структурные элементы можно охарактеризовать как форму организации кристаллической фазы материала, зафиксированную сшивками. Соответствующие изображения здесь не приводятся, так как они весьма похожи на видеомикрографии, полученные по методу темного поля: ЭС сравнительно ярко светится на фоне основного объема материала. Это естественно, поскольку последний находится уже в аморфном состоянии, тогда как ЭС еще обладают некоторой степенью кристалличности и, следовательно, двойным лучепреломлением.

Нагрев образцов до температуры выше точки аморфизации приводит также к релаксации механических напряжений в нем, и, кроме того, к сглаживанию его поверхности. Это значительно облегчает наблюдение ЭС после отжига с применением поляризационного микроскопа. Сле-

¹ Эффект памяти формы сшитого полиэтилена на макроуровне хорошо известен и используется, например, в технологии термоусаживаемых изделий.

дует, однако, иметь в виду, что если ЭС после цикла нагрев—охлаждение восстанавливаются, то тонкая структура материала, т.е. структура второго и третьего уровней, вообще говоря, нет (строго говоря, вносимые изменения будут зависеть от различий в режимах первичной и повторной кристаллизации). Говоря о влиянии термического воздействия на морфологию, стоит добавить также следующее. Прогрев части изоляции до температуры выше точки фазового перехода может иметь место при испытаниях или эксплуатации кабеля, если он подвергался действию токовых перегрузок.

Границу между проплавленной и непроплавленной областями изоляции можно увидеть и невооруженным глазом в виде тонкого кольца, наблюдая на просвет срезы толщиной около $1 \div 3$ мм, при условии, что их поверхность достаточно гладкая. Эта граница хорошо видна при микрофотографировании по методу темного поля; при использовании поляризационного микроскопа зоны, подвергавшиеся и не подвергавшиеся расплавлению кристаллической фазы, можно различить по разнице в величине двойного лучепреломления. При освещении образца белым светом отличаются поляризационные цвета, а при применении монохроматического освещения — интенсивность светимости.

Контраст асимметричного освещения (КАО). Это оригинальный метод косого освещения, предложенный в 1985 г. Качаром [12]. Он основан на специальной настройке системы освещения, которая достижима практически в любом исследовательском микроскопе.

Принципиальная особенность метода состоит в том, что он осуществим только в рамках видеомикроскопии; однако только микроскопа в данном случае недостаточно. Получаемые при этом изображения обладают рельефным контрастом и похожи на те, что получаются с помощью ДИК — рис. 8. Метод КАО эффективен в широком диапазоне увеличений и обеспечивает высокое пространственное разрешение. Фазовые и двухлучепреломляющие объекты, расположенные выше и ниже плоскости фокусировки, практически не ухудшают изображения; метод, таким образом, обладает возможностью оптического секционирования и позволяет работать с толстыми срезами, толщиной порядка 100—200 мкм, что в данном случае очень важно. Таким образом, КАО свободен от ряда недостатков и ограничений, присущих другим рассматриваемым здесь методам. Он наиболее хорошо приспособлен для наблюдений фазовых и фазово-амплитудных объектов и для исследования С полимерной изоляции кабелей высокого напряжения в рамках видеомикроскопии как об-



Рис. 8. «Трубка» тока; визуализация по методу КАО

щего направления является, вероятно, наилучшим. Тем не менее, он не заменяет собой все описанные ранее методы, но эффективно дополняет информацию, получаемую с их помощью. В порядке обсуждения данного метода и его взаимосвязи с другими методами интересно отметить следующее.

При исследовании С средствами фазового контраста и аноптральной микроскопии, в тех случаях, когда конденсатор был несколько децентрирован, мы обнаружили, что получаемые изображения неожиданно приобретают рельефность, аналогичную той, что характерна для методов ДИК и КАО. Первоначально это было воспринято как артефакт, но воспроизводимость такого рода наблюдений показала, что этот эффект закономерен и его целесообразно использовать. Позднее в старой монографии [13], посвященной медицинским приложениям фазового контраста, мы нашли не только упоминание о таком явлении, но и краткое теоретическое объяснение его, соответствующее теоретическому обоснованию метода КАО, данному в [12].

На рис. 9 показана видеомикрофотография микроструктуры материала (структуры второго уровня), полученная по методу КАО. Как и в случае с сюжетами, показанными на рис. 5, 6 и 8, мы интерпретируем эту С как состоящую из зародышевых или микроскопических сферолитов; стоит при этом отметить, что внутри ЭС эти зародышевые сферолиты крупнее, чем в окружающем материале². В [4] подобные образования характеризуются термином «sheaves», т.е. «снопы».

² Из этого становится ясно, почему ЭС плавятся при несколько более высокой температуре, чем основной материал (см. выше). Такое объяснение вполне соответствует общепринятому толкованию кривых плавления кристаллоаморфных полимеров, получаемых методом дифференциальной сканирующей калориметрии: сначала плавятся более мелкие кристаллы, а затем — более крупные.

Данное понятие, используемое как в кристаллографии, минералогии, так и в физике полимеров [15], обозначает предварительную, незавершенную стадию развития сферолита. Чтобы убедиться, в какой мере такие структурные единицы действительно являются сферолитами, мы применили для их анализа метод малоуглового рассеяния поляризованного света. Идея использования этого метода в микроскопическом варианте кратко изложена в [16]; видеомикроскопические изображения, получаемые нами, являются непосредственным развитием этой идеи. В качестве объекта сравнения мы использовали образцы чистого (т.е. не содержащего добавок, в том числе сшивающего агента) полиэтилена низкой плотности, отпрессованные в лаборатории. Микротомные срезы этих образцов, наблюдаемые в поляризационный микроскоп, показывают характерную сферолитную С. Соответствующие диффрактограммы, получаемые с использованием как обычного, так и лазерного освещения, показывают характерную же четырехлепестковую картину. В то же время попытка применить этот метод к срезам изоляции промышленно изготовленного кабеля, в объеме которого наблюдается С, показанная на рис. 9, таких диффракционных картин не обнаруживает. Если это наблюдение — не артефакт, то показанные на рис. 9 зерна не являются, во всяком случае, вполне развитыми сферолитами.

Размеры этих зерен зависят от термической предыстории материала. Если изоляция кабеля или ее часть подвергались отжигу при температуре ниже пика плавления, скажем, 70–90°C,

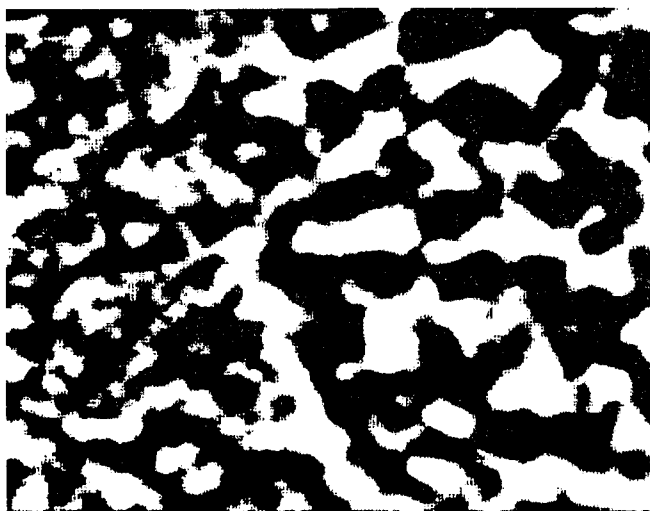


Рис. 9. Зародышевые сферолиты: визуализация по методу КАО с последующим цифровым увеличением. Величина поля зрения составляет 12 мкм. В правой части микрографии видны более крупные сферолитные зародыши, относящиеся к элементу структуры, в левой части — зародыши, относящиеся к основному объему материала

то размеры зерен увеличиваются. Следует ожидать, что при этом электрическая прочность изоляции будет падать, так как с ростом сферолитов увеличиваются и размеры аморфных прослоек между ними, имеющих более пористую, дефектную структуру. Подобная зависимость между прочностью и размерами сферолитов наблюдалась в [2].

Следует отметить, что использованная нами процедура получения изображения типа показанного на рис. 9 хорошо иллюстрирует возможности компьютерной видеомикроскопии как общего метода. Эта процедура включает в себя следующие этапы.

1. Получение «первичного» видеоизображения. При этом следует использовать большие увеличения, в том числе объективы $\times 60$ – $\times 100$, систему промежуточного увеличения типа «оптовар» и/или фотоокуляры и располагая телекамеру на тубусе достаточной длины. Так как изображение формируется с применением видеоусиления контраста (что является неотъемлемой частью метода КАО), то на нем обычно проступают такие характерные дефекты, как неравномерность освещения по полю зрения и крап. Последний представляет собой расфокусированное изображение частиц пыли, расположенных в труднодоступных местах оптического тракта, и поэтому трудноустранимых. При этом неравномерность освещения на этом же этапе можно частично скомпенсировать, используя аналоговую шейдинг-коррекцию [6, 7]; полученное изображение записывается в память видеопроцессора.

2. Запись в видеопамять изображения крапа; при этом препарат должен быть выведен из поля зрения. Вычитание изображения крапа из первичного изображения объекта. Изображение — разность, таким образом, не содержит крапа.

3. Цифровая компенсация неравномерности сигнала по полю зрения. Результирующее изображение оказывается, таким образом, свободным от дефектов, содержащихся в первичном.

4. Дополнительное, цифровое увеличение изображения (если это необходимо).

5. Завершающим этапом является дополнительное контрастирование изображения с использованием таких функций, как выравнивание гистограммы уровней серого, высокочастотная фильтрация и пр. Конечный результат можно считать удовлетворительным, если можно оценить размеры зерен — «микросферолитов».

Обобщая приведенные данные, можно сказать, что неоднородности структуры проявляют себя как фазово-амплитудные (в основном фазовые) и двулучепреломляющие объекты. Иными словами, отдельные микрообъемы изоляции по-разному рассеивают и преломляют свет и, кроме

того, проявляют оптическую анизотропию, также зависящую от положения выделенного микрообъема и определяемую ориентацией полимерных цепей.

Эти выводы являются качественными. Возможно, однако, проведение измерений оптических характеристик ЭС, хотя для количественного определения коэффициентов преломления и двойного лучепреломления в рамках видеомикроскопии требуется отработка специальных методик. Тем не менее, имеется параметр, который может быть легко измерен для любого из применяемых методов. Этот параметр — контраст изображения; мы будем рассматривать его как характеристику *С* изоляции. Смысл ее состоит в следующем. Анализ морфологии изоляционного слоя различных кабелей показывает, что обладая в целом общими свойствами, ЭС разных кабелей обладают разной степенью выраженности, проявленности, и то, что очень хорошо видно для одного кабеля, может быть едва различимо для другого.

Кроме того, разные формулы структурной организации материала в пределах одного и того же изделия также обладают разным контрастом. Так, например, компактные и более контрастные элементы, показанные на рис. 5–8 в ряде кабелей оказываются как бы наложенными на более крупномасштабную, «размытую» и менее контрастную структуру потока, которую можно представить как своего рода застывшую волну (волнистую текстуру), характеризующую низкими пространственными частотами (соответствующие периоды составляют по порядку величин 0,1 мм и более).

Контраст определяется, как известно [17], соотношением

$$K = \frac{I_{об} - I_{ф}}{I_{ф}},$$

где $I_{об}$ — величина сигнала, исходящего от объекта (ЭС); $I_{ф}$ — величина фоновых сигнала, исходящего от окружающего материала.

Измеренная посредством видеомикроскопии с видеоусилением контраста, с использованием схемы рис. 1, величина K для сравниваемых объектов может отличаться во много раз, ее характерные значения могут достигать 10 и более, в особенности для таких методов, как темное поле, аностральная микроскопия и ограничиваются динамическим диапазоном телекамеры. Разумеется, при проведении сравнительных измерений необходимо всякий раз применять один и тот же метод микроскопии и одинаковую настройку всех входящих в измерительную схему приборов.

Правомерен вопрос: высокий контраст — это хорошо или плохо? По-видимому, дать общий

ответ невозможно, так как контраст структуры является мерой ее неоднородности, но в то же время и мерой упорядоченности. Если же ориентироваться на картину потока, принципиальная схема которой показана на рис. 2, то можно, хотя и не безоговорочно, допустить, что большой контраст — скорее плохо, чем хорошо. Действительно, реально наблюдаемая структурная неоднородность и анизотропия должны приводить к неоднородности и анизотропии электрической. Это подтверждается следующим фактом.

Испытания образцов кабелей напряжением на пробой при комнатной температуре показывают, что каналы пробоя группируются в зонах *I* и *III* (см. рис. 2), т.е. там, где линии потока ориентированы преимущественно радиально, вдоль силовых линий электрического поля и, таким образом, зоны *I* и *III* оказываются электрически слабыми местами. Напротив, в зонах *II* и *IV* линии потока расположены азимутально, перпендикулярно вектору напряженности электрического поля и, как следствие, пробоев в этих зонах почти не происходит. Интересно отметить, что это явление полностью исчезает при повышенных температурах, например при 90–95°C. При таких температурах кристаллическая фаза полимера уже частично расплавлена, структура разупорядочивается, становится более однородной и изотропной. В результате каналы пробоя распределяются по разным азимутам равномерно.

Вывод о том, зоны *I* и *III* оказываются слабее зон *II* и *IV* подтверждается также экспериментами по зарождению и выращиванию электрических триингов, проведенными нами на образцах различных кабелей.

В качестве примера в таблице приводятся данные, полученные для симметричных зон *II* и *IV*, а также для зоны *I*. В таблице отражены такие параметры триингостойкости изоляции, как среднее напряжение зарождения триингов \bar{U} и средняя скорость их роста \bar{V} , минимальные значения напряжений зарождения $\min U$ и максимальные скорости роста $\max V$. Экстремальные значения U и V приводятся здесь потому, что за выход изделия из строя ответственны те области изоляции, которые при прочих равных условиях характеризуются наименьшими значениями U и/или наибольшими значениями V .

Зона	Результаты испытаний на стойкость к электрическим триингам			
	\bar{U} , кВ	$\min U$, кВ	\bar{V} , мкм/мин	$\max V$, мкм/мин
<i>II</i> и <i>IV</i>	18	10	30	40
<i>I</i>	11	6	70	110

Высоковольтные электроды в виде вольфрамовых игл с радиусом кривизны острия 1—3 мкм вводились со стороны внутреннего электропроводящего экрана; внешний экран заземлялся. Межэлектродное расстояние составляло 15 мм. Напряжение на образец подавалось ступенями 1 кВ/мин; значения V усреднялись за время наблюдений 1 ч. Дополнительные сведения исследований на трингостойкость представлены в [18].

Как видно из таблицы, различие в трингостойкости между зонами II/IV и зоной I достигает 64% по параметру U ; по остальным параметрам различия оказываются еще большими. Подобная неравнопрочность кабельной изоляции в разных направлениях является ее недостатком, так как прочность изделия определяется прочностью его наиболее слабых мест.

Выводы. 1. Структура экструдированной изоляции силовых кабелей высокого напряжения из химически сшитого полиэтилена, как правило, обладает значительной неоднородностью и анизотропией. Особенности структуры поддаются эффективному исследованию компьютерной видеоконтрастной микроскопией с использованием таких методов, как темное поле, фазовый и дифференциальный интерференционный контраст, аноптральная и поляризационная микроскопия, контраст асимметричного освещения. С оптической точки зрения структурные единицы диэлектрика проявляют себя как фазово-амплитудные и двулучепреломляющие.

2. Неоднородность и анизотропия структуры, в свою очередь, приводят к неоднородности и анизотропии электрической прочности кабеля, причем в типичном случае это приводит к уменьшению надежности изделия.

3. Установление связи между технологически обусловленной структурой изоляции и ее электрической прочностью позволяет выявить структурно-слабые места в изоляции и наметить пути усовершенствования структуры в целях повышения ее электрической прочности. К этим путям можно отнести разработку как соответствующего технологического оборудования, например, экструзионной головки, так и технологических режимов изготовления кабеля — скорости охлаждения и т.п.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kazuya K., Nobuyashi K., Tohru T. et al. The influence of morphology on the dielectric breakdown strength of crystalline polyolifin. — Fujikura Technical review, 1986, March, № 15.

2. Kolesov S.N. The influence of morphology on the electric strength of polymer insulation. — IEEE Transactions, 1980, vol. EI-15, № 5.

3. Stevens G.C., Swingle S.G. The morphology of low density and crosslinked polyethylene. 4th. International Conference on dielectric materials, measurements and applications. Lancaster, UK, 10—13 September 1984.

4. Kao I.M., Phillips P.J. Crystallinity in chemically crosslinked low density polyethylenes: 1. Structural and fusion studies. — Polymer, 1986, vol. 27, № 11.

5. Марихин В.А., Мясникова Л.П. Надмолекулярная структура полимеров. — Л.: Химия, 1974.

6. Шувалов М.Ю., Ромашкин А.В., Маврин М.А., Овсиенко В.Л. Видео микроскопия тринга. — Электричество, 1996, № 3.

7. Шувалов М.Ю., Маврин М.А., Овсиенко В.Л., Ромашкин А.В. Видео микроскопия электрических и водных трингов. — Электричество, 1997, № 7.

8. Wilska A. Observations with the anoptal microscope. — Microscopie, 1954, N. 1—4, B. 9.

9. Пешков М.А. Аноптральный микроскоп-новый оптический прибор для исследования мало контрастных объектов. — Успехи современной биологии, т. 39, вып. 2, 1955.

10. Вундерлин Б. Физика микромолекул. Кристаллическая структура, морфология, дефекты / Пер. с англ. — М.: Мир, 1976.

11. Баргнев Г.М., Френкель С.Я. Физика полимеров. — Л.: Химия, 1990.

12. Kachar B. Asymmetric illumination contrast: a method of image formation for video light microscopy. — Science, 1985, vol. 27.

13. Ганзен Г., Ромингер А., Михель К. Фазово-контрастная микроскопия в медицине / Пер. с нем. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955.

14. Bernstein B.S., Marks J. Morphology of Extruded Dielectric Cable Insulation. — IEEE Electrical Insulation Magazine, 1988, vol. 4, № 6.

15. Бани Ч. Кристаллы, их роль в природе и науке. — М.: Мир, 1970.

16. Applied polymer light microscopy. Edited by D.A. Hemsley. London and New York: Elsevier Applied Science, 1989.

17. Световая микроскопия в биологии. Методы: Под ред. А.Лэйси / Пер. с англ. — М.: Мир, 1992.

18. Овсиенко В.Л., Шувалов М.Ю., Колосков Д.В., Ромашкин А.В. Возможности микроэксперимента в исследовании электрической изоляции кабелей высокого напряжения. — Кабельная техника, 1997, № 10—11.

[25.05.98]

Авторы: Шувалов Михаил Юрьевич окончил электромеханический факультет Московского энергетического института (МЭИ) в 1980 г. В 1985 г. защитил кандидатскую диссертацию «Исследование кабелей постоянного тока высокого напряжения с пропитанной бумажной изоляцией» во Всесоюзном научно-исследовательском институте кабельной промышленности. Заведующий лабораторией кабелей высокого напряжения во Всероссийском научно-исследовательском институте кабельной промышленности (ВНИИ КП).

Овсиенко Владимир Леонидович окончил электромеханический факультет МЭИ в 1986 г. и аспирантуру МЭИ в 1992 г. Научный сотрудник ВНИИ КП.

К оценке энергетической возможности конвертера Солнце—Ионосфера—Земля*

ДАНИЛКИН Н.П., КИРЬЯНОВ Д.В.

Приводятся электротехнические оценки энергетической производительности предполагаемой электростанции будущего, которая будет работать на принципах сверхпроводимости и станет черпать энергию из земной ионосферы. Оценки подразумевают потенциальность ионосферы как источника энергии и принципиальную возможность создания сверхпроводящей линии большой протяженности. Показано, что с учетом геофизических факторов способ получения энергии будет коммерчески оправданным.

Ключевые слова: Земля, геомагнитные поля, ионосферные токи, электростанция будущего, расчет

Известно, что ионосферные токи, текущие на высотах более 100 км над поверхностью Земли, обладают большим запасом мощности. В [1] обсуждается возможность преобразования энергии этих быстропеременных токов в электрический ток технического назначения. Принцип работы предполагаемого конвертера энергии основан на законе магнитной индукции Фарадея, согласно которому в рассматриваемом на поверхности Земли однопроводном контуре (с очень малым сопротивлением R) под действием быстрых изменений геомагнитного поля B индуцируется ЭДС

$$\oint E dl + \iint \frac{\partial B}{\partial t} dA = 0, \quad (1)$$

где dA — элемент интегрирования по площади внутри контура.

Можно сказать, что ионосферные токи и ток в гипотетическом сверхпроводящем конвертере образуют гигантский трансформатор с воздушным сердечником (слоем атмосферы). Предварительные оценки выходной мощности такой установки даны в [1]; в статье приводится расчет мощности конвертера с учетом реальных особенностей геомагнитного поля и конкретного принципа преобразования энергии.

Конвертер с малым сопротивлением. Для оценки мощности конвертора рассчитаем ток I , возникающий в контуре площадью A и индуктивностью L (рис. 1) под действием быстропеременных флуктуаций магнитного поля Земли, характерных для магнитной суббури. Если сопротивление нагрузки $r \gg R$ достаточно мало, что-

Electrotechnical estimations of the energy productivity of a probable future electrical power station which will operate using superconductivity principles and will draw energy from the earth ionosphere are given. The estimations mean the potentiality of creating a lengthy superconducting line. It is shown that taking into consideration geophysical factors such a method of obtaining energy will be commercially justified.

Key words: Earth, geomagnetic fields, ionosphere currents, power plant of future, calculation

бы обеспечить большие значения тока, выделяющееся в нагрузке джоулево тепло можно использовать в технических целях. Для оценки используем реальные экспериментальные записи нормальной составляющей магнитного поля Земли $B(t)$ (рис. 2), сделанные в провинции Квебек, Канада [2]. Будем также считать, что напряженность магнитного поля мало изменяется в пределах контура и поэтому будем пользоваться усредненным значением ЭДС (1), возникающей в контуре:

$$E(t) = - \frac{\partial B}{\partial t} A. \quad (2)$$

Такое предположение оправдано с экспериментальной точки зрения, поскольку характерные натурные данные [3] подтверждают примерно одинаковое направление магнитного поля на большой территории.

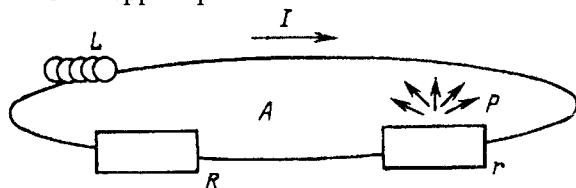


Рис. 1. Цепь конвертера

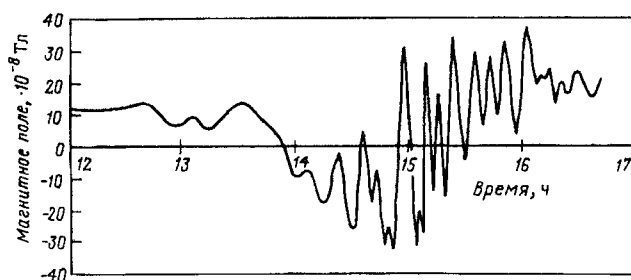


Рис. 2. Запись геомагнитного поля

* Публикуется в порядке обсуждения.

Для простейшей электрической цепи контура, представленной на рис. 1, изменение тока со временем выражается решением соответствующего дифференциального уравнения:

$$L \frac{dI}{dt} + (R + r)I = E(t). \quad (3)$$

Соответственно, полезная мощность, рассеиваемая в среднем за некоторый промежуток времени T на активном сопротивлении, равна

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) r dt. \quad (4)$$

На рис. 3 представлен график зависимости текущей мощности (4) конвертера (при $T=20$ мин) от времени, полученный на основе численного решения дифференциального уравнения (3) методом Рунге—Кутты с ЭДС в правой части, соответствующей согласно (2) экспериментальным данным и следующим электрическим параметрам конвертера: $R=0$; $r=10^{-3}$ Ом; $B_0=3 \cdot 10^{-7}$ Тл; $A=10000$ км² (сверхпроводящий контур небольшого размера). Полученные результаты на рис. 3 сглажены с помощью скользящего усреднения. Из графика рис. 3 видно, что мощность конвертера, скачкообразно возрастающая в периоды наибольших возмущений геомагнитного поля, достигает для данной суббури 150–200 кВт и падает практически до нуля в спокойные часы.

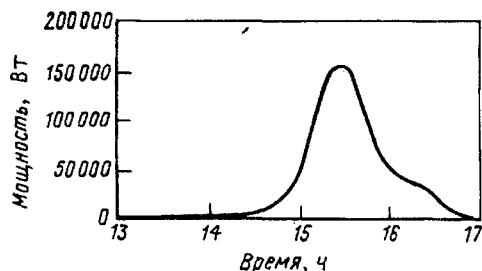


Рис. 3. График зависимости текущей мощности конвертера от времени

Теоретические оценки. Из приведенного видно, что наибольшие энергетические возможности конвертера заключены на участках скачкообразных изменений $B(t)$ большой амплитуды. Поэтому для дальнейшего анализа примем в качестве модели типичного поведения геомагнитного поля во время суббури пилообразную за-

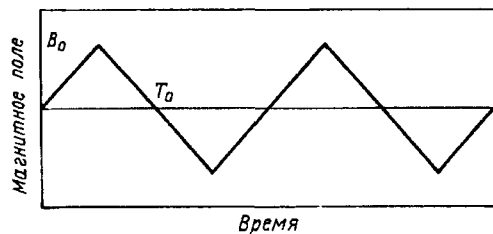


Рис. 4. Зависимость $B(t)$ как модель типичного поведения геомагнитного поля

висимость $B(t)$ (рис. 4). Разложение этой функции в ряд Фурье выглядит следующим образом:

$$B(t) = \frac{8B_0}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \omega_n t; \quad \omega_n = \frac{2n+1}{T} \pi.$$

Соответственно ЭДС, возникающая в цепи,

$$E \approx - \frac{\partial B(t)}{\partial t} A = \frac{8AB_0}{\pi T_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \cos \omega_n t$$

будет суммой гармонических составляющих с частотами ω_n и амплитудами $E_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \frac{8AB_0}{\pi T_0}$. Следовательно ток, возникающий в контуре, будет суммой синусоидальных токов I_n , для определения амплитуды которых применимы законы цепи переменного тока:

$$I_n = \frac{E_n}{Z_n} \cos(\omega_n t - \varphi_n),$$

где

$$Z_n = \sqrt{(R+r)^2 + X_n^2}$$

— импеданс на n -й частоте;

$$X_n = \omega_n L - 1/\omega_n C$$

— реактивное сопротивление;

$$\varphi_n = \arctg \frac{X_n}{R+r}$$

— фазовый сдвиг тока относительно ЭДС.

В соответствии с изложенным точным решением для тока в контуре будет ряд

$$I(t) = \frac{8AB_0}{\pi T_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos\{\omega_n t - \varphi_n\}}{Z_n}. \quad (5)$$

С помощью последней формулы можно оценить энергетический выход предполагаемого конвертера:

$$P = \langle I^2 \rangle r \equiv \frac{1}{2T_0} \int_0^{2T_0} I^2(t) r dt. \quad (6)$$

Оценим мощность, которую рассеивают две первые гармоники:

$$P = \langle (I_1 + I_2)^2 \rangle r = \langle I_1^2 \rangle r \pm \langle I_2^2 \rangle r = \frac{4AB_0}{\pi T_0} \times \{1/Z_0^2 \pm 1/9Z_1^2\}.$$

Знак «+» в последнем выражении соответствует случаю, когда первые два члена ряда (5) одного знака, а «−» — если они разного знака. [Ряд (3) — знакопеременный, но не знакоче-

редующийся, поскольку наряду с фактором $(-1)^{n+1}$ имеется косинусоидальный множитель, начальная фаза которого зависит от номера члена ряда.]

Если принять, что реактивное сопротивление положительно, т.е. преимущественно индуктивное, то $X_0 < X_1$ (при $1/C=0$ $X_1=3\omega_0 L$), и соответственно вклад второй гармоники в суммарную площадь конвертера будет на порядок меньше вклада главной гармоники.

Следовательно, хорошей оценкой мощности конвертера будет мощность главной гармоники:

$$P_{\text{est}} = \frac{1}{2} \left(\frac{8AB_0}{\pi T_0} \right)^2 \frac{r}{Z_0}. \quad (7)$$

На рис. 5 приведена зависимость оценки мощности (7) и точного значения мощности (6) (в зависимости от индуктивности контура для тех же характерных параметров конвертера, приведенных ранее) радиус контура — 57 км и для периода $T_0=6$ мин. При выбранных параметрах (в основном соответствующих натурным данным) и $L \approx 0,1$ Гн на сопротивлении нагрузки рассеивается мощность $P \approx 150$ кВт, естественно, такого же порядка, как и для экспериментальной зависимости $B(t)$, поскольку к ним близки параметры пилообразной модели.

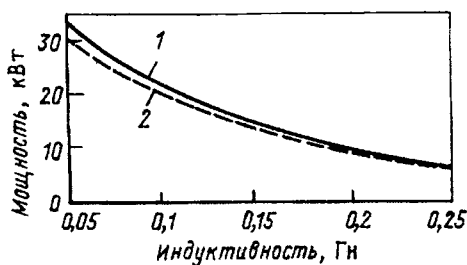


Рис. 5. Зависимость мощности конвертера от индуктивности контура: ———— — оценочная; - - - - - точная

Возможности увеличения мощности конвертера. На примере пилообразной зависимости видно, что одним из негативных проявлений «пикового» характера изменения геомагнитного поля является некоторая потеря мощности в точках экстремума $B(t)$ (при изменении знака производной). Действительно, при проходе $B(t)$ через экстремум, ЭДС в контуре согласно закону индукции меняет свой знак так, что после этого момента индуцированный полем ток должен течь в противоположную сторону. Фактически описанный эффект проявляется в том, что изменения тока на старте каждого прямолинейного участка пилообразной модели (рис. 4) начинаются не с нуля, а с некоторого противоположного по знаку значения $I(0)$. Точное решение дифференциального уравнения (3) на каждом таком

участке (т.е. при постоянной ЭДС E_0)

$$I(t) = I(0) \exp\left(-\frac{R+r}{L}t\right) + \frac{E_0}{R+r} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{R+r}{L}t\right) \right\}. \quad (8)$$

Таким образом, в указанные периоды конвертер работает некоторое время не с накоплением, а с потерей мощности, пока электрический ток в конвертере не дойдет до нулевого значения. На основании данного наблюдения возможно предложить пути повышения энергетической отдачи конвертера.

Если ввести в цепь конвертера некоторый нелинейный элемент, который будет в момент перехода геомагнитного поля через нуль размыкать на некоторое время цепь (т.е. скачком повышать сопротивление контура), то это и даст определенный выигрыш в мощности. Тепло, выделяющееся при этом, можно также использовать для дальнейшего преобразования в техническую энергию. Размыкание цепи должно быть как можно более кратковременным, однако достаточным для того, чтобы ток в контуре прекратился.

Рис. 6 иллюстрирует разницу в мощности обычного конвертера и конвертера с нелинейным элементом в зависимости от полупериода пилообразных колебаний при постоянстве их амплитуды (т.е. фактически от скорости изменения магнитного потока) для контура радиусом 57 км. При расчетах предполагалось, что цепь размыкается на бесконечно малое время в точный момент экстремумов $B(t)$. Кроме того, энергией затухающего в эти моменты тока пренебрегалось, хотя в реальности мощность конвертера за счет этой энергии была бы еще больше, чем приведено на рис. 6.

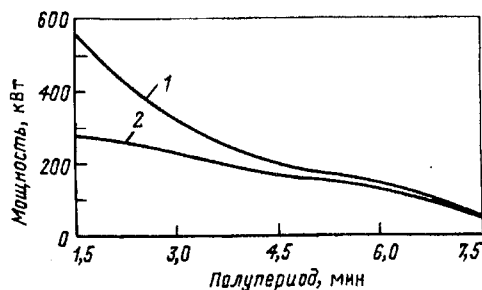


Рис. 6. Зависимость мощности конвертера от полупериода пилообразных колебаний при отсутствии нелинейного элемента (1) и при его наличии (2)

Расчеты $I(t)$ проводились по формуле (8) для каждого прямоугольного участка пилообразной модели, причем I_0 всегда считался равным нулю из-за действия нелинейного размыкающего элемента. Соответствующая $I(t)$ мощность конвертера определялась по формуле (4). Видно, что выигрыш от включения нелинейного элемента может быть весьма существенным.

Необходимо отметить, что технологических

трудностей для практического воплощения процедуры размыкания быть не должно. С помощью дополнительной дифференцирующей цепи, анализирующей геомагнитное поле, возможно точно определить моменты прохождения производной $B(t)$ через нуль (а самого поля — соответственно через экстремум). Далее, не представляет проблемы введение в цепь контура устройства, к примеру, разрушающего сверхпроводящее состояние контура в эти моменты времени.

Другим способом повышения мощности может быть включение в цепь конвертера дополнительного сопротивления в резонанс с главной гармоникой пилообразных колебаний. Теоретической основой для повышения мощности является обратная зависимость в оценках (7) от полного сопротивления (импеданса) цепи. Поскольку активное сопротивление фиксировано, то уменьшение полного сопротивления может быть проведено при уменьшении реактивного сопротивления.

Если в цепь контура помимо индуктивности включена еще некоторая емкость C , то реактивное сопротивление (соответствующее какой-либо гармонике) равно

$$X_n = \omega_n L - 1/\omega_n C.$$

Поскольку доминирующей согласно приведенному анализу является нулевая гармоника, то, естественно, следует уменьшить реактивное сопротивление, соответствующее ей. Действительно, если принять, что реактивное сопротивление положительно, т.е. преимущественно индуктивное, то $X_0 < X_1$ (при $1/C=0$ $X_1=3\omega_0 L$), и соответственно вклад второй гармоники в суммарную площадь конвертера будет на порядок меньше вклада главной гармоники.

Нетрудно видеть, что реактивное сопротивление, соответствующее нулевой гармонике, уменьшается до нуля, если емкость подобрана из условия резонанса $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

На рис. 7 показаны две резонансные кривые (как функции емкости). Видно, что для определенной частоты основной гармоники существует некоторое оптимальное значение емкости. Однако в реальных условиях использование дан-

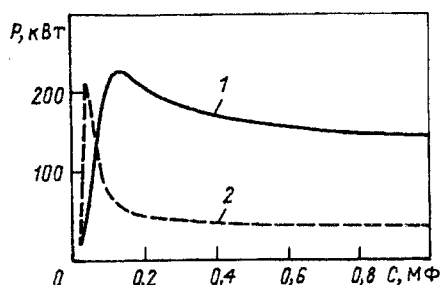


Рис. 7. Резонансные кривые мощности в функции емкости: 1 — $L=0,1$ Гн; 2 — $L=0,3$ Гн

ного механизма сопряжено с тем, что требуется, по крайней мере, приблизительно прогнозировать периодичу вариаций геомагнитного поля. Кроме того, расчет выполнен для пилообразной модели, тогда как в натуральных условиях геомагнитное поле представляет собой спектральный набор различных частот, так что использование резонанса выглядит проблематичным. Между тем, включение дополнительной емкости, снижающей (не обязательно до нуля) реактивное сопротивление конвертера, практически вполне реализуемо. Значение этой емкости, видимо, следует подбирать исходя из реальных геофизических условий.

Реактивный канал перекачки энергии. Пока рассуждения относились к определению параметров, обеспечивающих отдачу максимального джоуля тепла на внешнем сопротивлении r . Понятно, что для этого требуется, чтобы ток (8) на каждом квазипрямолинейном участке вышел на стационарное значение как можно раньше, т.е. отношение r/L должно быть как можно меньше. Как уже обсуждалось, хотелось бы иметь по возможности малую индуктивность кольца L и по возможности максимальное выделение тепла на внешнем сопротивлении.

С другой стороны, возможен иной, реактивный, канал перекачки энергии. При наличии достаточно большой индуктивности конвертера и достаточно малого его сопротивления существенная часть энергии изменяющегося геомагнитного поля переходит в реактивную мощность контура. Для такого способа необходимо иметь как можно меньшее внутреннее сопротивление конвертера и вообще не нужно сопротивление нагрузки. Вопрос о дальнейшем преобразовании реактивной энергии, запасенной в индуктивности, может быть решен по-разному. В настоящее время известны проекты использования сверхпроводящих контуров для аккумулирования электроэнергии (именно в реактивной ее части). Подходы для технической осуществимости данных проектов разрабатываются.

Для реактивного канала перекачки энергии сопротивление контура должно быть как можно меньше. Практически, при возможно малых сопротивлениях конвертера (а они могут быть доведены с помощью современных сверхпроводников до 10^{-9} Ом) такие токи могут разрушать сверхпроводящее состояние контура. (При характерных ЭДС в единицы вольт максимальный ток возрастает до миллионов килоампер. Учитывая, что ток в 10 кА выдерживает сверхпроводник сечением в 20 мм², для тока в миллионы ампер нужен проводник сечением около десятка квадратных метров.)

Реактивная энергия, запасенная к некоторому моменту времени в конвертере, равна $W=LI^2(t)$.

При этом максимальное значение тока определяется некоторым предельным значением, при котором происходит разрушение сверхпроводящего состояния контура. Если взять практически интересный случай $RT_0 \ll L$, то электрический ток согласно (8) на каждом из полупериодов возрастает почти линейно: $I(T_0) \approx \frac{E_0}{L} T_0$. Если R мало, то мощность конвертера определится следующим образом:

$$P = \frac{W}{T_0} \sim \frac{LI^2(T_0)}{2T_0} \sim \frac{E^2 T_0}{L}.$$

Результаты расчета данного режима ($R=0$; $r=10^{-3}$ Ом; $B_0=3 \cdot 10^{-7}$ Тл; $A=10000$ км², приведены в таблице.

Длительность элементарного цикла T_0 , с	Индуктивность контура L , Гн	Мощность (кВт) при различной ЭДС	
		30 В	16000 В
30	1	15	более 10^7
100	1	50	
100	0,1	500	

Полученные цифры демонстрируют явную предпочтительность последнего способа перекачки энергии по сравнению с первым (через активное сопротивление). Преимущество объясняется тем, что ток, возникающий в конвертере, ограничивается только током разрушения сверхпроводящего состояния. Однако вопрос преобразования полученной таким образом реактивной электрической энергии в электроэнергию технического назначения недостаточно ясен.

Заключение. Основную энергетическую выгоду несет понижение активного сопротивления контура (создание глубокой сверхпроводимости) и его индуктивности. При этом даже небольшой контур (с радиусом менее 60 км) будет давать более сотни киловатт. Если же увеличивать размеры конвертера, то реально существенно повысить его мощность (которая растет пропорционально квадрату площади). Напомним, что уже запатентована линия передачи электрической энергии на основе сверхпроводимости длиной около 90 км [4].

Надо признать, что оценки мощности конвертера приведены для случая, когда ионосфера имеет нулевое собственное сопротивление и большой запас мощности. Для проверки предположения необходим эксперимент по схеме, обсуждаемой в [1]. В любом случае надежду на практическую осуществимость предложенной ионосферной электростанции может дать лишь серьезный технологический рывок в области производства сверхпроводящих материалов. Приведенный анализ свидетельствует, что с геофизической точки зрения способ получения энергии будет коммерчески оправданным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилкин Н.П. О возможности получения электрической энергии из ионосферы. — Электричество. 1996, № 4.
2. Rostoker G. Magnetospheric substorms — their phenomenology and predictability. — Solar-Terrestrial Predictions — IV. Proceedings of a workshop in Ottawa, Canada, 1992.
3. Boteler D.H., Jansen van Beek G. Mapping the March 13, 1989, magnetic disturbance and its consequences across North America. Solar-Terrestrial Predictions — IV. Proceedings of a workshop in Ottawa, Canada, 1992.
4. Hoerh R.C. Superconductor transmission line, Патент США, MKU 55 ОН 501 ОВ 512/00 0,5 ОН 501 ОВ 512/02 0.

[06.07.98]

Авторы: Данилкин Николай Петрович окончил физический факультет Ростовского государственного университета в 1960 г. В 1978 г. защитил докторскую диссертацию по теме «Профили концентрации и частоты соударений электронов в ионосфере» в Институте прикладной геофизики (ИПГ). Заведующий лабораторией ионосферных измерений ИПГ.

Кирьянов Дмитрий Викторович окончил физический факультет Московского государственного университета (МГУ) в 1993 г. В 1996 г. защитил кандидатскую диссертацию по теме «Фазовая скорость перемещающихся ионосферных возмущений» в МГУ. Научный сотрудник физического факультета МГУ.

Уважаемые авторы!

Редакция публикует при каждой статье краткие биографические сведения об авторах. В связи с этим просим всех авторов при направлении статьи в редакцию сообщить следующие сведения:

1. Полные имена и отчества всех авторов
2. Какой факультет, какого вуза и когда закончил
3. Когда получил ученую степень, где и по какой тематике (теме) была защита
4. Место настоящей работы и должность.

Кроме того, напоминаем, что на каждую статью следует представлять краткий (4—5 предложений) реферат на русском и английском языках (включая название), а также клю-

Молниезащита. Часть II*

ЛАРИОНОВ В.П.

Заземление молниеотводов. Если вероятность прорыва молнии в зоне защиты молниеотводов составляет $10^{-3} \div 5 \cdot 10^{-3}$, то это означает, что сами молниеотводы будут поражаться в 1000—2000 раз чаще, чем защищаемые ими объекты. Поэтому очень важны условия отвода тока молнии в землю.

Заземлитель молниеотвода характеризуется сопротивлением, которое окружающая земля оказывает стекающему с него току. Сопротивление заземления должно иметь достаточно низкое значение. На нем, а значит и на токоотводе, при прохождении тока молнии возникают высокие потенциалы, что может привести к пробоем с токоотвода на защищаемый объект. С заземлителя могут быть пробои на проходящие в земле кабели и трубопроводы. При этом разряд может развиваться частично по поверхности земли, а в самой земле канал разряда развивается часто по корням деревьев (в том числе и оставшихся после расчистки территории) на значительную длину. Известны многочисленные повреждения по этой причине силовых кабелей и кабелей связи.

При растекании тока молнии с заземлителя возникает крайне неравномерное распределение потенциалов по поверхности земли: наибольшее значение над заземлителем и быстрое уменьшение потенциала в направлении от него. Это создает опасность попадания людей и животных под шаговое напряжение.

Следует также отметить, что ток молнии, проходя по молниеотводу, оказывает электромагнитное влияние на различного рода коммуникации: электросети, линии связи и особенно на компьютерные системы.

Для устройства заземлений применяются вертикальные и горизонтальные электроды. Для горизонтальных заземлителей используется полосовая сталь шириной 20—40 мм и толщиной не менее 4 мм, а также сталь круглого сечения диаметром не менее 6 мм. В качестве вертикальных заземлителей применяются стальные трубы, стержни и профильная сталь. На подстанциях заземлитель представляет собой сложную систему, состоящую обычно из горизонтальных полос, объединяющих вертикальные электроды и образующих сетку на площади, за-

нимаемой подстанцией. На линиях электропередачи в качестве заземлителя используются их железобетонные фундаменты.

Сопротивление заземлителя зависит от его геометрических размеров и удельного сопротивления грунта ρ , в котором он находится.

Для расчета сопротивления заземлителя одиночного стержневого молниеотвода (Ом) используются следующие формулы: сопротивление вертикальной трубы или стержня

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \left[\frac{4l(2t+l)}{d(4t+l)} \right]; \quad (16)$$

сопротивление горизонтальной полосы

$$R = \frac{\rho}{\pi l} \ln \frac{1,5l}{\sqrt{bt}}; \quad (17)$$

сопротивление железобетонного фундамента

$$R = 1,7 \frac{\rho}{2\pi t} \ln \frac{4t}{b}, \quad (18)$$

где l — длина трубы или полосы; t — глубина залегания полосы, верхнего конца вертикального электрода или нижнего конца фундамента; b — ширина полосы или фундамента; d — диаметр трубы или стержня.

Сопротивление горизонтального кольца диаметром D из проволоки диаметром d (или полосы шириной $2d$), уложенного на глубине t ($t < D/2$), равно (Ом)

$$R = \frac{\rho}{2\pi^2 D} \ln \frac{4\pi D^2}{td}. \quad (19)$$

Расчетное значение ρ определяется по данным измерений:

$$\rho = k\rho_{\text{изм}}, \quad (20)$$

где $\rho_{\text{изм}}$ — измеренное значение удельного сопротивления грунта.

Если измерение проводить при средней влажности грунта, то $k=1,4$, при повышенной влажности земли перед измерением $k=2,6$.

В глинистой или черноземной почве ($\rho = 100$ Ом·м) вертикальный стержень длиной 2,5—3 м имеет сопротивление, равное приблизительно 30 Ом, а горизонтальная полоса длиной 5 м, уложенная на глубине 0,5—0,7 м, — 25 Ом. Примерные сопротивления заземления, получаемые в разных грунтах с помощью одиночных электродов, приведены в табл. 2.

* Продолжение. Начало см. «Электричество», 1999, № 4.

Таблица 2

Грунт	Удельное сопротивление грунта, Ом·м	Сопротивление одиночных заземляющих электродов, Ом	
		стержня длиной 2,5—3 м	полосы длиной 5 м
Глина, чернозем	100	30	25
Смешанный грунт (глина, известняк, щебень)	150	45	40
Суглинок	200	60	50
Супесок	500	150	125
Песок	1000	300	250
Мергель, известняк	1500	450	375
Скалы	3000	900	750

При больших импульсных токах — токах молнии — плотность проходящего через заземляющие электроды тока велика, поэтому в земле у поверхности электродов создаются очень высокие напряженности поля $E=J\rho$, превосходящие пробивные напряженности грунта. Вокруг электродов образуются зоны искрения, увеличивающие их эффективные размеры, и сопротивление заземления уменьшается.

Быстрое же нарастание тока молнии на фронте импульса создает падение напряжения на индуктивности протяженного заземлителя, что ограничивает отвод тока с удаленных его частей. При этом сопротивление заземления, наоборот, увеличивается.

В результате влияния того или иного фактора — образования зоны искрения или падения напряжения на индуктивности — сопротивление заземлителя при прохождении тока молнии, так называемое импульсное сопротивление $R_{и}$, отличается от стационарного сопротивления заземления, измеренного при переменном напряжении и сравнительно небольшом токе или рассчитанного по (16)–(19).

Отношение импульсного и стационарного сопротивлений заземления называется импульсным коэффициентом:

$\alpha_{и} = R_{и} / R.$

(21)

Рассмотрим вертикальный заземлитель в виде стержня при $t=0$ [см. (16)]. На границе искровой зоны (рис. 18), представляющей собой цилин-

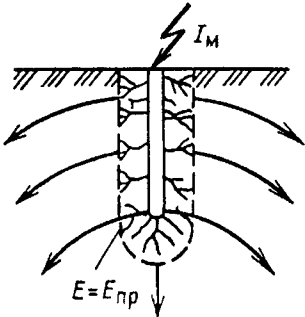


Рис. 18. Искровая зона вокруг вертикального электрода

дрическую поверхность радиусом $r_{и.з}$, напряженность электрического поля равна

$$E_{пр} = J\rho = \frac{I_{м}}{2\pi r_{и.з} l} \rho.$$

(22)

Из (21) следует, что

$$r_{и.з} = \frac{I_{м} \rho}{2\pi l E_{пр}},$$

(23)

а импульсное сопротивление заземления и импульсный коэффициент соответственно равны:

$$R_{и} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{2l}{r_{и.з}} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{4\pi l^2 E_{пр}}{I_{м} \rho};$$

(24)

$$\alpha_{и} = \frac{\ln (4\pi l^2 E_{пр} / I_{м} \rho)}{\ln \frac{2l}{r_{и.з}}}.$$

(25)

Сосредоточенные заземлители имеют тем меньшее значение $\alpha_{и}$, чем больше ток молнии, проходящий через заземлитель, и выше удельное сопротивление грунта (рис. 19, табл. 3).

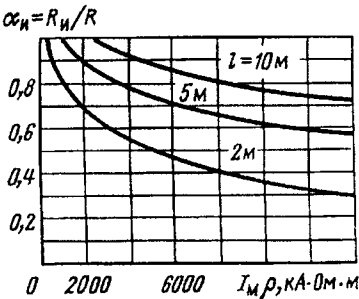


Рис. 19. Импульсные коэффициенты вертикальных электродов в зависимости от произведения $I_{м}\rho$ (грунт с $E_{пр}=12$ кВ/см)

Таблица 3

Вид заземлителя	Значения импульсных коэффициентов $\alpha_{и}$ при различном удельном сопротивлении ρ , Ом·м				$\eta_{и}$
	100	200	500	1000	
Вертикальные стержни, соединенные полосой (расстояние между стержнями вдвое больше их длины):					
2—4 стержня	0,5	0,45	0,3		} 0,75
8 стержней	0,7	0,55	0,4	0,3	
15 стержней	0,8	0,7	0,55	0,4	
Две горизонтальные полосы длиной по 5 м, расходящиеся в противоположные стороны от точки присоединения токоотвода	0,65	0,55	0,45	0,4	1
Три полосы длиной по 5 м, симметрично расходящиеся от точки присоединения токоотвода	0,7	0,6	0,5	0,45	0,75

Из анализа работы протяженного горизонтального заземлителя без учета искровых процессов, который здесь не приводится из-за его громоздкости, получаем следующее выражение для импульсного коэффициента:

$$\alpha_{\text{и}} = 1 + \frac{L_0 l}{3\tau_{\text{ф}} R}, \quad (26)$$

где $L_0 = 0,2 \left(\ln \frac{l}{r} - 0,31 \right)$ — индуктивность единицы длины горизонтального заземлителя, мкГн/м; $\tau_{\text{ф}}$ — продолжительность фронта тока молнии, мкс.

Импульсный коэффициент протяженного горизонтального заземлителя больше единицы, и чем больше его длина и меньше продолжительность фронта импульсного тока, тем выше значение $\alpha_{\text{и}}$.

Следует иметь в виду, что у поверхности протяженного заземлителя имеют место искровые процессы, однако они ослабевают по мере удаления от начала заземлителя, поскольку уменьшаются его потенциалы и плотность стекающего тока. Искровые процессы в земле существенно влияют на импульсное сопротивление протяженного заземлителя. При малых длинах его, когда плотности тока велики, искровые процессы могут привести к уменьшению импульсного коэффициента до $\alpha_{\text{и}} \leq 1$.

Если заземлитель состоит из n труб или полос,

$$R_{\text{и}} = \frac{\alpha_{\text{и}} R}{\eta_{\text{и}} n}, \quad (27)$$

где $\eta_{\text{и}}$ — импульсный коэффициент использования заземлителя.

Коэффициент $\eta_{\text{и}}$ учитывает ухудшение условий растекания тока с заземлителя, состоящего из нескольких близко расположенных электродов, вследствие взаимного экранирования последних. Растекание тока с каждого из электродов в сторону соседних затруднено (рис. 20), поскольку все электроды имеют одинаковый потенциал и напряженности поля в этом направлении оказываются существенно сниженными. В результате как бы уменьшается поверхность электродов, участвующая в отводе тока в землю, ухудшается их использование и, следовательно, увеличивается сопротивление заземления ($\eta_{\text{и}} < 1$).

Коэффициент $\eta_{\text{и}}$ зависит от длины электродов, расстояния между ними и их геометрического расположения.

Усредненные значения $\alpha_{\text{и}}$ и $\eta_{\text{и}}$ для некоторых

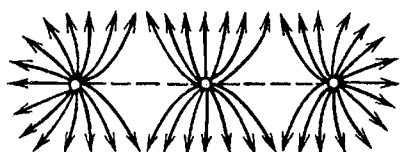


Рис. 20. Распределение линий тока с параллельных заземляющих электродов

конструкций заземлителей приведены в табл. 2.

Практически во всех случаях $\alpha_{\text{и}}/\eta_{\text{и}} < 1$, поэтому сопротивление заземлителя, выполненного из нескольких электродов, можно приближенно определять как

$$R_{\text{и}} \approx R/n. \quad (28)$$

При этом действительная величина $R_{\text{и}}$ будет меньше рассчитанной. Расчет по формуле (28) дает удовлетворительный результат при $\rho = 100 \div 200$ Ом·м, для плохих грунтов ($\rho > 200$ Ом·м) ошибка может быть значительной.

Для сосредоточенных заземлителей, зная требуемое расчетное значение импульсного сопротивления $R_{\text{и}}$, можно определить предельно допустимое сопротивление заземления R , измеренное на переменном токе (табл. 4), и, наоборот, по значению R можно оценить соответствующее значение $R_{\text{и}}$.

Таблица 4

Импульсное сопротивление $R_{\text{и}}$, Ом	Сопротивление заземления R на переменном токе, Ом		
	Глина, чернозем	Супесок	Песок
5	5	7,5	10
10	10	15	20
20	20	30	40
30	30	45	60
40	40	60	80

Сопротивление заземлителя в виде сетки, которая состоит из вертикальных электродов, объединенных горизонтальными полосами, рассчитывается по эмпирической формуле

$$R = \rho \left(\frac{A}{\sqrt{S}} + \frac{1}{L + nl} \right), \quad (29)$$

где L — суммарная длина всех горизонтальных заземляющих электродов (полос); n и l — число и длина вертикальных электродов; S — площадь, занимаемая заземлителем; ρ — расчетное значение удельного сопротивления грунта; A — коэффициент, зависящий от значения l/\sqrt{S} :

l/\sqrt{S}	0	0,05	0,1	0,2	0,5
A	0,44	0,4	0,37	0,33	0,26

Ориентировочные значения коэффициента $\alpha_{\text{и}}$ для заземлителей в виде сеток приведены на рис. 21. Для протяженных заземлителей ($\sqrt{S} > 10$ м) импульсный коэффициент можно оценить по приближенной формуле

$$\alpha_{\text{и}} = \sqrt{\frac{1500 \sqrt{S}}{(\rho + 320)(I_{\text{м}} + 45)}}, \quad (30)$$

где S — в м²; ρ — в Ом м; $I_{\text{м}}$ — в кА.

Поперечное сечение заземляющих электродов должно быть не меньше 50 мм², при этом толщина полос, стенок труб или профильной стали должна быть не меньше 4 мм. В целях защиты от коррозии желательна применение оцинкованной стали. Покраска или покрытие битумом за-

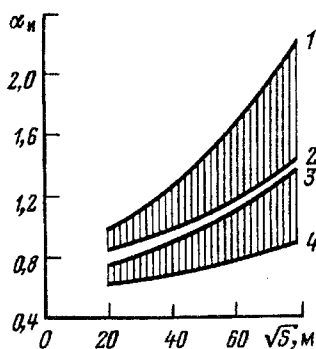


Рис. 21. Значение импульсного коэффициента для заземлителей в виде сеток ($\rho = 100 \div 600 \text{ Ом} \cdot \text{м}$): 1—2 — $I_M = 10 \text{ кА}$; 3—4 — $I_M = 100 \text{ кА}$

земляющих электродов не допускается.

Верхний слой земли в летнее время сильно высыхает, что увеличивает сопротивление заземлителя, поэтому не только полосы должны закладываться на глубину не менее 0,5 м, но и стержни рекомендуется забивать так, чтобы их верхний край находился на расстоянии около 0,5 м от поверхности земли.

Отдельные электроды стержневого заземлителя объединяются общей стальной полосой сечением не менее 50 мм² или стальным проводником круглого сечения диаметром не менее 8 мм. Соединение электродов с объединяющей полосой, а также присоединение к заземляющему устройству токоотводов предпочтительнее производить с помощью сварки. Можно также применять болты, но не менее двух в каждом месте соединения.

К заземляющему устройству следует присоединять проходящие поблизости от него металлические трубопроводы (водяные, отопительные, канализационные), если они не предназначены для горючих газов и жидкостей и не имеют антикоррозионных покрытий. Подземные трубопроводы из-за их большой протяженности могут обладать очень низким сопротивлением заземления, что следует использовать для уменьшения сопротивления заземляющего устройства. Подземные трубопроводы (особенно водопровод), естественно, во многих случаях могут быть использованы в качестве единственного заземляющего устройства.

Помимо трубопроводов в качестве заземлителей могут быть использованы также обсадные трубы артезианских колодцев, буровых скважин, свинцовые оболочки кабелей. Сопротивление такого рода заземлителей во многих случаях настолько мало ($R < 2 \text{ Ом}$), что они могут также использоваться в качестве единственного заземляющего устройства. Заметим, что создание заземляющих устройств из стержней или полос, имеющих такое же сопротивление, затруднительно.

Допустимые расстояния между молниеотводом и защищаемым объектом. Защищаемый объект

должен полностью входить в зону защиты молниеотводов. Вместе с тем он должен располагаться на определенном расстоянии от них. Если это расстояние меньше допустимого, то при ударах молнии могут происходить перекрытия с частей молниеотвода на защищаемый объект.

Молниезащитное устройство, включающее в себя молниеприемники, токоотводы и заземлитель, обладает электрическим сопротивлением (активным и индуктивным). Наиболее существенную часть активного сопротивления составляет сопротивление заземления молниезащитного устройства. Токоотвод представляет собой индуктивность, которая зависит прежде всего от длины токоотвода.

Ток молнии, проходя по молниеотводу, создает падение напряжения на сопротивлении его заземлителя и на индуктивности токоотвода. При косоугольной форме фронта тока молнии с крутизной a максимальный потенциал в точке молниеотвода на расстоянии l от заземлителя наступает в момент максимума тока молнии:

$$U_l = I_M R_{\text{и}} + a L_0 l, \quad (31)$$

где $L_0 \approx 1,7 \text{ мкГн/м}$ — индуктивность единицы длины токоотвода, что соответствует металлическим молниеотводам решетчатой конструкции, а также отдельно проложенным токоотводящим спускам.

В электроэнергетике, например, принимают расчетные значения тока молнии и средней крутизны его фронта соответственно 60 кА и 30 кА/мкс (вероятность их примерно 10%). Подставляя эти значения в (31), получаем

$$U_l = 60 R_{\text{и}} + 50 l. \quad (32)$$

Напряжение на молниеотводе оказывается весьма высоким, например, при $R_{\text{и}} = 10 \text{ Ом}$ и на расстоянии $l = 10 \text{ м}$ от заземлителя:

$$U_l = 60 \cdot 10 + 50 \cdot 10 = 1100 \text{ кВ.}$$

Потенциал заземлителя при этом

$$U_z = I_M R_{\text{и}} = 60 \cdot 10 = 600 \text{ кВ.}$$

Очевидно, чтобы не было перекрытия с молниеотвода на защищаемый объект, прочность изоляции между ними должна быть выше значения напряжения на молниеотводе.

В том числе, когда объект и молниеотвод разделены воздушным промежутком длиной b , необходимо выполнение условия

$$b \geq U_l / E, \quad (33)$$

где E — допустимая средняя напряженность электрического поля в воздухе, при которой невозможен пробой промежутка между молниеотводом и объектом; с некоторым преуменьшением она составляет 500 кВ/м.

Если в (33) подставить U_l из (32) и

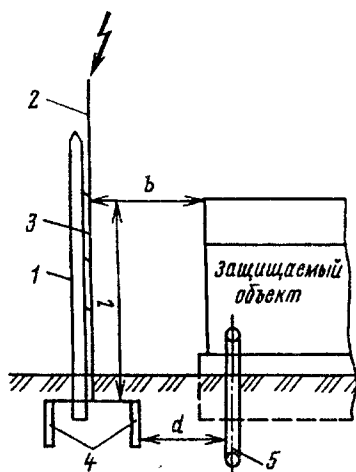


Рис. 22. К определению допустимых расстояний между молниеотводом и защищаемым объектом: 1 — деревянная стойка; 2 — молниеприемник; 3 — токоотвод; 4 — заземлитель; 5 — подземные коммуникации

$E = 500$ кВ/м, то необходимая длина воздушного промежутка (рис. 22) будет

$$b \geq \frac{60R_{\text{и}} + 50l}{500} = 0,12R_{\text{и}} + 0,1l.$$

Чтобы исключить возможность перекрытия в земле с заземлителя на входящие, например, в здание металлические коммуникации, электрический кабель и др., нужно выдержать между ними расстояние

$$d \geq I_{\text{м}} R_{\text{и}} / E_{\text{з}}. \quad (34)$$

Пробивная напряженность электрического поля в земле зависит от удельного сопротивления грунта и длительности импульса.

В неоднородном поле она составляет 300—500 кВ/м. Принимая $E_{\text{з}} = 300$ кВ/м, в рассматриваемом примере получаем

$$d \geq 60R_{\text{и}} / 300 = 0,2R_{\text{и}}.$$

Таким образом, допускаемое расстояние в точках сближения молниеотвода и объекта зависит от сопротивления заземления молниеотвода и высоты над землей точки сближения. Если известны b , d и l , то легко найти сопротивление заземления, обеспечивающее безопасность сближения.

Заметим, что b должно быть не менее 5 м, а d — не менее 3 м. В особо ответственных случаях нужно учитывать также упоминавшуюся ранее возможность распространения канала разряда в земле на большие расстояния по остаткам корней деревьев и другим неоднородностям.

При ударе молнии в молниеотвод, расположенный на здании, между молниезащитным устройством и заземленными объектами внутри здания (электропроводкой, трубопроводами различного назначения, металлическим каркасом лифта и т.п.) также должно быть обеспечено необходимое расстояние, иначе между ними про-

зойдет пробой, который вызовет местное повреждение здания и может оказаться опасным для людей. Расчет необходимого расстояния в месте сближения в случае одного токоотвода может производиться по приведенным формулам, однако если часть промежутка b занимает кирпичная (или из какого-либо другого непроводящего материала) стена, то ее следует учитывать утроенной толщиной.

Если здание имеет n токоотводов, то допустимое расстояние в точке сближения с одним из токоотводов определяется, например, по формуле

$$b \geq 0,12R_{\text{и}} + \frac{0,1l}{n}. \quad (35)$$

Если в качестве токоотвода используется стальной каркас здания или разветвленная водопроводная сеть, то второй член в (35) очень мал и практически не оказывает влияния на b . Основную роль играет значение сопротивления заземления.

Заметим также, что если токоотвод имеет петлю длиной l (см. рис. 17, часть I), то, чтобы не было пробоя между точками 1 и 2, необходимо выполнить условие

$$b \geq \frac{50l}{E} = \frac{50l}{500} = 0,1l. \quad (36)$$

Если ни конструктивно, ни снижением значения сопротивления заземления не удастся обеспечить требуемую электрическую прочность между токоотводом и заземленными частями внутри здания, необходимо последние присоединить вблизи мест сближения к молниезащитному устройству, а в нижней части — к заземлителю.

Электропроводка при этом должна быть проложена в металлических трубах, которые также внизу присоединяются к заземлителю, а в местах сближения — к молниезащитному устройству. Электрическая емкость между трубой и лежащей внутри нее электропроводкой достаточно велика, а, как известно, емкостное сопротивление обратно пропорционально емкости и частоте тока. Поэтому при прохождении тока молнии, эквивалентного току весьма высокой частоты, емкостное сопротивление между проводкой и трубой ничтожно, и, таким образом, оказывается, что проводка и труба практически имеют между собой электрическое соединение. Этот эффект спасает изоляцию электропроводки от пробоев.

На подстанциях при установке молниеотводов на порталах, помимо соблюдения безопасных расстояний по воздуху и в земле, необходимо согласовать импульсные разрядные напряжения гирлянд изоляторов и напряжения, возникающие в точках их присоединения к portalу при ударах молнии в молниеотвод.

(Продолжение следует)

Вращающийся гироскоп как самовозбуждающийся униполярный генератор

БАЗАНОВ В.П.

Пользуясь основными положениями специальной теории относительности и материалами [1], автор настоящей заметки пришел к выводу, что любое тело, нейтральное в электрическом и магнитном отношениях, даже не электропроводное, при вращении обязано генерировать в окружающем пространстве магнитное поле.

В этой связи был поставлен следующий эксперимент.

К гироскопу с внешним диаметром 55 мм подключалась пара токосъемных щеток: одна — вблизи оси вращения, вторая — к внешней цилиндрической поверхности гироскопа. К щеткам подключались провода от стандартного прибора В7-27А.

Гироскоп раскручивался до скорости 350—370 об/с.

Идея эксперимента следующая. Поскольку к магнитному полю неприменимо понятие механического перемещения [2] (в данном случае вращения), то гироскоп вращается в магнитном поле, которое сам и возбудил. Анализ [1 и 2] показывает, что ориентация предполагаемого поля такова, что на внешней поверхности гироскопа должен генерироваться заряд положительной полярности. При изменении направления вращения гироскопа изменяется на противоположную и ориентация магнитного поля, поэтому знак заряда на поверхности гироскопа не изменяется. Это и предполагалось проверить экспериментально.

Для того, чтобы исключить влияние полей от токов питания гироскопа, все измерения проводились в фазе инерционного выбега, т.е. после отключения питания гироскопа. Для отстройки от влияния геомагнитного поля измерения проводились с различной пространственной ориентацией оси гироскопа. Влиянию электризации поверхности гироскопа от трения о воздух препятствовал проводящий заземленный экран в зоне щеток. Возможное влияние материала токосъемных щеток оценивалось его заменой от опыта к опыту. При стальной поверхности самого гироскопа использовались щетки стальные, медные, алюминиевые и графитовые. Прибор В7-27А при измерениях работал поочередно в двух режимах: как вольтметр на пределе 1 В и как ампер на пределе 1 мкВ.

Итак, до проведения опытов аналитически было определено: на внешней поверхности гироскопа должен генерироваться положительный заряд; при

изменении направления вращения гироскопа знак этого заряда не должен изменяться.

После проведения ряда измерений было установлено следующее:

напряжение на щетках 100—200 мВ; полярность на внешней щетке — плюс, на внутренней — минус;

ток при работе В7-27А в режиме амперметра — составил 0,06—0,08 мкА; направление тока соответствовало полярности измеренного напряжения;

при изменении направления вращения полярность щеток не изменялась;

при постепенном снижении скорости инерционного выбега гироскопа снижался и уровень регистрируемых сигналов, однако при скорости 100—50 об/с значения регистрируемых величин довольно быстро падали до нуля.

при остановленном гироскопе прибор на всех режимах измерений давал нулевые показания.

Рассматривая проведенные измерения как режимы холостого хода и короткого замыкания генератора, вращающийся гироскоп можно представить как самовозбуждающийся униполярный генератор с внутренним сопротивлением порядка единиц мегаома.

Заключение. Эксперимент подтвердил предположение, что вращающееся тело генерирует магнитное поле, непосредственно с ним взаимодействующее. Уровень эксперимента следует рассматривать как индикаторный. Для получения количественных зависимостей требуются теоретическая проработка и серия экспериментов.

Для объяснения результатов эксперимента с гироскопом требуется привлечение положений теории относительности. Возможно, объяснить полученные результаты удастся и без привлечения положений этой теории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Электричество и магнетизм, гл. 13, § 6. — М.: Мир, 1977.

2. Базанов В.П. О неизвестных опытах по электромагнитной индукции. — Электричество, 1996, № 11.

[26.11.98]

Автор: Базанов Владимир Петрович окончил вуз по специальности инженер-электрик (техника высоких напряжений). Инженер службы изоляции, защиты от перенапряжений и испытаний высоковольтной изоляции АО «Нижневэнерго».

Ирина Владимировна Литкенс

(К 80-летию со дня рождения)

Известный ученый-электроэнергетик Ирина Владимировна Литкенс окончила Московский энергетический институт в 1941 г. Работала инженером на Тавакской ГЭС в Узбекэнерго. В 1945 г. поступила в аспирантуру МЭИ, после окончания которой работала на кафедре «Электроэнергетические системы» ассистентом, доцентом, старшим и ведущим научным сотрудником. С 1983 г. была научным руководителем НИЛ проблем электроэнергетических систем. В 1990 г. ей было присвоено ученое звание профессора.

В России и за рубежом широко известны научные труды И.В. Литкенс в области исследования переходных процессов, устойчивости и автоматического регулирования сложных электроэнергетических систем. Проведенные ею на кафедре «Электроэнергетические системы» научные исследования оказали большое влияние на становление и развитие отечественной науки в области неустойчивых режимов электроэнергетических систем. Широкую научную известность получили также фундаментальные исследования переходных электромеханических процессов автоматически регулируемых электрических систем, а также методов анализа устойчивости систем, содержащих автоматические регуляторы возбуждения генераторов сильного действия оригинальной конструкции.

И.В. Литкенс разработаны методы анализа нелинейных колебаний электрических систем вблизи границ устойчивости, положенные в основу доктор-



ской диссертации, успешно защищенной в 1971 г. Она впервые решила сложную задачу нелинейного электромеханического резонанса и его гашения с помощью синтеза законов регулирования возбуждения и скорости, развила теорию результирующей устойчивости, впервые выявила неоднозначность динамических свойств электрической системы при настройках АРВ внутри области статической устойчивости и, разделив границы на опасные и безопасные, доказала возможность работы системы за безопасной границей. Эти исследования легли в основу создания алгоритма самонастройки в перспективном АРВ сильного действия. Разработанные И.В. Литкенс и ее учениками методы анализа динамических свойств электроэнергетических систем и выбора настроек АРВ, способствующих эффективному демпфированию колебаний, отражены в монографии «Колебательные свойства электрических систем» (1988 г.).

Результаты теоретических

исследований И.В. Литкенс нашли практическое применение при определении с ее участием режимов работы агрегатов Братской ГЭС и при внедрении на гидрогенераторах Куйбышевской ГЭС регуляторов возбуждения нового типа. Методы анализа неустойчивых режимов электроэнергетических систем, созданные И.В. Литкенс, широко используются при проведении экспериментальных и теоретических исследований у нас в стране и за рубежом.

И.В. Литкенс опубликовала более 150 научных трудов по актуальным проблемам электроэнергетики, является автором и соавтором 18 книг, в том числе ряда учебных пособий для вузов. Она проводила большую методическую и педагогическую работу по повышению качества подготовки инженерных и научных кадров, ею созданы специальные курсы лекций и разработаны соответствующие программы и пособия. Под руководством И.В. Литкенс выполнено и успешно защищено 28 кандидатских диссертаций. Своими консультациями она содействовала подготовке и защите ряда докторских диссертаций.

На протяжении многих лет И.В. Литкенс возглавляла комиссию электрических систем секции электротехники и энергетики Научно-технического Совета Минвуза СССР по научно-исследовательской работе.

Поздравляем Ирину Владимировну Литкенс с юбилеем и желаем сохранить присущие ей бодрость и оптимизм на долгие годы.

Станислав Иванович Гамазин

(К 60-летию со дня рождения)

Доктор технических наук, профессор С.И. Гамазин в 1962 г. закончил Московский энергетический институт и в этом же году был принят в аспирантуру. После защиты кандидатской диссертации направлен преподавателем в Волжский филиал МЭИ (г. Чебоксары), где с 1966 по 1967 гг. исполнял обязанности заведующего кафедрой «Электроснабжение промышленных предприятий».

С 1968 г. С.И. Гамазин работает на кафедре внутризаводского электроснабжения (электроснабжения промышленных предприятий) МЭИ вначале доцентом, а после защиты докторской диссертации профессором. В 1983-84 гг. С.И. Гамазин в период военных действий в Афганистане работал в Кабульском политехническом институте. С 1997 г. является заведующим кафедрой ЭПП МЭИ.

Более 30 лет Станислав Иванович занимается педагогической деятельностью. Им поставлен ряд курсов лекций по основополагающим дисциплинам в области электроснабжения, подготовлено большое количество учебных и методических пособий. Профессор Гамазин ведет также большую научно-исследо-



вательскую работу. Разработки руководимого им научного направления «Автоматизация расчетно-экспериментальных исследований переходных процессов, обусловленных электродвигательной нагрузкой систем промышленного электроснабжения» внедрены и широко используются многими предприятиями и организациями, в числе которых АО «Воскресенские минеральные удобрения», Новомосковская акционерная компания «Азот», «Главтюменьнефтегаз» АО «Гипротрубопровод», АО «Промэнерго», АО «Электропроект».

Высокий уровень результатов

исследований, выполненных С.И. Гамазиным, подтверждают полученные авторские свидетельства, опубликованные монографии и более 100 статей в центральных научных журналах.

Большое внимание профессор Гамазин уделяет подготовке научных кадров высшей квалификации. Им подготовлено более 20 кандидатов технических наук, из них 10 для зарубежных стран.

Станислав Иванович активно занимается общественной деятельностью. Он — председатель Учебно-методической комиссии по специальности «Внутризаводское электрооборудование», член специализированных диссертационных советов в МЭИ и Государственной академии нефти и газа им. Губкина, сопредседатель федеральной научно-технической и методической конференции «Энергосбережение, электропотребление, электрооборудование».

С.И. Гамазин заслуженно пользуется большим авторитетом в коллективе. Его добросовестное отношение к работе, широкая эрудиция, глубокие знания, доброжелательность и скромность снискали уважение коллег и студентов.

Анатолий Дмитриевич Поздеев

Умер выдающийся ученый-электротехник, талантливый организатор науки и техники, известный в стране и за рубежом специалист в области электропривода и систем автоматического управления электроприводами, доктор технических наук, профессор Анатолий Дмитриевич Поздеев. 12 марта этого года ему исполнилось бы 70 лет.

Анатолий Дмитриевич в 1952 г. окончил Горьковский институт инженеров водного транспорта, получив квалификацию инженера-механика, и в 1954 г. — Всесоюзный заочный энергетический институт по специализации «Автоматизированный электропривод». Работая на Волго-Донском судоходном канале им. В.И. Ленина с 1952 по 1955 гг., он прошел путь от дежурного инженера насосной станции до начальника лаборатории автоматики и телемеханики канала. Став в 1955 г. аспирантом кафедры «Электрификация промышленных предприятий» Харьковского политехнического института, он успешно защитил кандидатскую диссертацию и в 1959 г. возглавил отдел электропривода СКБ-11 тяжелого станкостроения в Ульяновске.

С 1965 г. трудовая деятельность А.Д. Поздеева протекала в Чебоксарах, где он работал заведующим отделом электропривода и автоматики Всесоюзного НИИ релестроения (1965—1966 гг.), заместителем директора по научной работе (1966—1971 гг.) и директором этого института — Главным конструктором Минэлектротехпрома СССР по электроприводам для станкостроения (1971—1986 гг.). Под руководством А.Д. Поздеева ВНИИР превратился в ведущий научный институт страны, во многом определявший технический прогресс в области низковольтного аппаратостроения, релейной защиты и автоматизиро-



ванного электропривода.

С 1972 г. А.Д. Поздеев, оставаясь директором ВНИИР, одновременно преподавал в Чувашском государственном университете, работая доцентом, профессором, а с 1982 по 1992 гг. — заведующим кафедрой «Системы автоматического управления электроприводами». С 1992 г. Анатолий Дмитриевич — профессор этой кафедры, заведующий проблемной научно-исследовательской лабораторией «Электроприводы энергосберегающие» — активно работал в области разработки теории, создания и освоения на Чебоксарском электроаппаратном заводе отечественных преобразователей частоты и пуско-регулирующих устройств, возглавлял специализированные советы по защите кандидатских и докторских диссертаций.

Заслуги Анатолия Дмитриевича Поздеева в науке и промышленности трудно переоценить: доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки и техники РФ, заслуженный изобретатель РФ и Чувашской республики, академик Академии электротехнических наук РФ, почетный академик Национальной академии наук и искусств Чувашской республики, вице-президент Чувашской электротехнической академии. Меж-

дународным биографическим центром (Кембридж, Англия) он включен в число выдающихся людей планеты XX в. с вручением специального диплома.

Огромен вклад Анатолия Дмитриевича в развитие электротехнической промышленности России. Он был одним из тех, кто стоял у истоков развития силовой полупроводниковой техники в нашей стране, руководил и принимал непосредственное участие в разработках серий наиболее массовых вентильных электроприводов, которые выпускали многие электротехнические заводы. Им создана и успешно функционирует научная школа высококлассных специалистов по электроприводу, широко известная и за пределами нашей страны.

С приходом А.Д. Поздеева в Чувашский государственный университет преобразилась кафедра САУЭП. Ее лаборатории стали оснащаться самыми современными системами управления с применением микропроцессорной техники. Он самостоятельно работал и читал несколько специализированных курсов лекций, подготовил большое количество учебных пособий, методической литературы.

Самостоятельно и совместно с учениками А.Д. Поздеевым опубликовано свыше 200 научных работ, 5 монографий, 23 изобретения, а книга «Динамика вентильного электропривода постоянного тока» под его общей редакцией стала настольной для целого поколения инженеров-электроприводчиков. Длительное время он был членом редколлегии журнала «Электротехника».

За большие заслуги перед отечественной наукой А.Д. Поздеев был награжден орденом «Знак Почета», медалью «За доблестный труд», почетными грамотами Президиума Верховного Совета Чувашской АССР.

Вниманию читателей — новая книга

Поздеев А.Д. Электромагнитные и электромеханические процессы в асинхронных частотно-регулируемых электроприводах


Монография посвящена наиболее перспективному направлению электромеханики — частотно-регулируемому асинхронному электроприводу. Автор не только обобщил уже сделанное в этой области, но и развил отдельные разделы этого научного направления.

В первых двух главах рассмотрена физика электромагнитных и электромеханических процессов в АД при частотном управлении. Третья и четвертая главы посвящены принципам построения статических преобразователей и способам регулирования напряжения по схеме автономных инверторов. В пятой и шестой главах рассмотрены вопросы динамики. Завершают монографию седьмая глава и приложения, посвященные в основном выбору элементов оборудования. В целом структура монографии и последовательность изложения вполне логичны.

Полученные в работе новые научные результаты в области теории ШИМ в приложении к частотно-регулируемому электроприводу, математические модели для вариантов АИН и АИТ с учетом нелинейности всех элементов привода (электрической машины, силового преобразователя, системы управления) служат основой для моделирования всех электромеханических процессов в данном электроприводе.

Особая практическая ценность книги — многочисленные примеры.

Адреса редакции: 103012 Москва, К-12, Б. Черкасский пер., 2/10

 924-24-80, 928-88-69; факс 315-0698

101000 Москва, Главный почтамт, а/я № 648

Художественный редактор Т.А. Дворецкова

Сдано в набор 12.05.99. Подписано в печать 14.06.99. Формат 60×84¹/₈. Тираж 1000 экз.

Бумага офсетная № 2. Печать офсетная. Печ. л. 8. Заказ 210. Цена свободная

Свидетельство о регистрации № 0110272 от 8 февраля 1993 г.

Министерства печати и информации Российской Федерации

ЗАО «Знак», 103012 Москва, Б. Черкасский пер., 2/10

Отпечатано в типографии МЭИ

111250 Москва, ул. Красноказарменная, д. 13

*Если Вы работаете в области энергетики или электротехники,
позаботьтесь о том,
чтобы Ваши предприятие, лаборатория, кафедра
не опоздали с подпиской на*

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

- старейший отечественный теоретический и научно-практический журнал, орган Российской Академии наук, Федерации энергетических и электротехнических обществ;
- выходит ежемесячно, предназначен для высококвалифицированных специалистов в области энергетики и электротехники;
- публикует теоретические и научно-практические работы отечественных и зарубежных ученых и инженеров, освещает работу российских и международных конференций, рецензирует учебники и монографии по тематике журнала, помещает материалы по истории электротехники, статьи о выдающихся отечественных и зарубежных ученых;
- журнал поступает во все промышленно развитые страны мира.

*Условия подписки в России и странах СНГ указаны
в Объединенном каталоге Государственного комитета РФ
по связи и информатизации «Подписка-99»*

*Зарубежные читатели могут подписаться на наш журнал
по адресам фирм, указанным в № 1, 2/99*

*В Москве подписку от зарубежных читателей на «Электричество»
и его английскую версию «Electrical Technology Russia»
принимает ЗАО «МК-Периодика»
(117049, Б. Якиманка, 39, тел. 238-4967, факс 238-4634)*