

ISSN 0013-5380

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

1999

4

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Секция теоретических основ электротехники, преобразовательной техники, электротехнических материалов

Бутырин П.А., председатель секции (Объединенный институт высоких температур РАН), Булатов О.Г. (Московский энергетический институт), Козлов В.Н. (С.-Петербургский государственный технический университет), Лагарьков А.Н. (Объединенный институт высоких температур РАН), Макашкин Б.Д., ответственный секретарь редакции, Миронов В.Г. (Московский энергетический институт), Розанов Ю.К. (Московский энергетический институт), Чечурин В.Л. (С.-Петербургский государственный технический университет).

Научный редактор — Макашкин Б.Д.

Секция электроэнергетики

Строев В.А., главный редактор, председатель секции (Московский энергетический институт), Дьяков А.Ф. (Корпорация «Единый электроэнергетический комплекс РФ»), Железко Ю.С. (Научно-исследовательский институт электроэнергетики), Ишкин В.Х. (РАО «ЕЭС России»), Кошечев Л.А. (Научно-исследовательский институт постоянного тока), Мамиконянц Л.Г. (Научно-исследовательский институт электроэнергетики), Никитин О.А. (РАО «ЕЭС России»), Семенов В.А. (ЦДУ ЕЭС России).

Научный редактор — Кудинова Л.С.

Секция техники высоких напряжений, электрических аппаратов, трансформаторов

Лоханин А.К., председатель секции (Всероссийский электротехнический институт), Александров Г.Н. (С.-Петербургский государственный технический университет), Белкин Г.С. (Всероссийский электротехнический институт), Митькин Ю.А. (Ивановская государственная энергетическая академия).

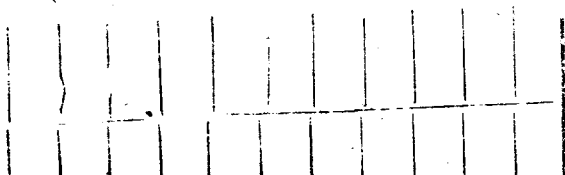
Научный редактор — Кудинова Л.С.

Секция электрических машин

Иванов-Смоленский А.В., председатель секции (Московский энергетический институт), Бут Д.А. (Московский государственный авиационный институт), Данилевич Я.Б. (Отдел (институт) электроэнергетических проблем РАН), Евсеев Б.Н., заместитель главного редактора журнала, Шакарян Ю.Г. (Научно-исследовательский институт электроэнергетики).

Научный редактор — Евсеев Б.Н.

Секция электропривода и автоматизации технологических процессов



Московский энергетический институт — государственный электротехнический институт (Московский энергетический институт), Московское объединение «Антей»).

И.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

4
АПРЕЛЬ
1999

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

УЧРЕДИТЕЛИ: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК (Отделение физико-технических проблем энергетики),
ФЕДЕРАЦИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ ОБЩЕСТВ

СОДЕРЖАНИЕ

Рагозин А.А., Таланов С.Б. Пределы передаваемой мощности дальних линий электропередачи с управляемыми шунтирующими реакторами 2

Хачатрян В.С., Этмекчян Э.А., Бадалян Н.П. Решение гибридных уравнений установившегося режима электроэнергетической системы методом диакоптики 7

Кузнецов В.А., Федотов А.И. Использование локального преобразования Фурье для математического моделирования синхронных машин с вентильными системами возбуждения 13

Попов В.И. Новые схемы трехфазных дробных обмоток электрических машин. Часть I 23

Резвых К.А., Романов В.А. Расчетная систематическая погрешность напряженности электростатического поля высоковольтных устройств 29

Киншт Н.В., Кац М.А. Диагностика точечных источников электромагнитных шумов 40

Шувалов М.Ю., Маврин М.А. Рост водного триинга как диффузионно-кинетический процесс 43

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Ларионов В.П. Молниезащита. Часть I 51

БИБЛИОГРАФИЯ

Бут Д.А., Иванов-Смоленский А.В. Рецензия на кн. Ю.В. Абрамкина «Теория и расчет пондеромоторных и электродвижущих сил и преобразования энергии в электромагнитном поле» 59

ХРОНИКА

В Московском Доме ученых 63

Игорь Петрович Копылов (К 75-летию со дня рождения) 63

Юрий Константинович Розанов (К 60-летию со дня рождения) 64

CONTENTS

A.A. Ragozin and S.B. Talanov, Transmitted Power Limits of Long-Distance Transmission Lines with Controllable Shunting Reactors 2

V.S. Khachatryan, E.A. Etmekchyan and N.P. Badalyan, Solving Hybrid Equations of Electrical Power System Steady State Conditions by the Diacoptics Method. . . 7

V.A. Kuznetsov and A.I. Fedotov, Using Local Fourier Transformation for Mathematical Modeling of Synchronous Machine with Valve Excitation Systems 13

V.I. Popov, New Designs of Three-Phase Fractional-Slot Windings of Electrical Machines. Part I 23

K.A. Rezvykh and V.A. Romanov, Design Systematic Error of the Electrostatic Field Strength in High-Voltage Devices 29

N.V. Kinsht and M.A. Katz, Diagnostic Point Sources of Electromagnetic Noises 40

M.Yu. Shuvalov and M.A. Mavrin, Growth of Water Trees as a Diffusion and Rate Process 43

METHODICAL MATERIALS

V.P. Larionov, Protection Against Lightning. Part I 51

BIBLIOGRAPHY

D.A. But and A.V. Ivanov-Smolenskii, Review of the Book by Yu.V. Abramkin «Theory and Calculation Ponderomotive and Electromotive Forces and Transformations of Energy in a Electromagnetic Field» ... 59

CHRONICLE

In Moscow Scientific Club 63

Igor' Petrovich Kopylov (to Mark the 75th Anniversary) 63

Yurii Konstantinovich Rozanov (to Mark the 60th Anniversary) 64

Пределы передаваемой мощности дальних линий электропередачи с управляемыми шунтирующими реакторами

РАГОЗИН А.А., ТАЛАНОВ С.Б.

Приводятся результаты исследований динамической устойчивости и внутренних перенапряжений дальних линий электропередачи с управляемыми шунтирующими реакторами; определяются пределы передаваемой мощности по условиям динамической устойчивости и допустимого уровня внутренних перенапряжений. Рассматривается возможность ограничения внутренних перенапряжений за счет управления шунтирующими реакторами и оценивается негативное влияние этой меры на уровень динамической устойчивости электропередачи. На основе анализа полученных результатов определяется возможный диапазон длин эффективного использования таких электропередач.

Ключевые слова: дальние линии электропередачи, управляемый шунтирующий реактор, динамическая устойчивость, внутренние перенапряжения, предельный режим

Наметившийся технический прогресс в создании управляемых шунтирующих реакторов (УШР) обусловил возможность реализации крупных проектов с использованием дальних линий электропередачи [1–3].

В [4, 5] выявлены характерные свойства дальних линий электропередачи переменного тока УШР, определены предельно допустимые по условиям статической устойчивости режимы таких электропередач. Теоретически доказано, что при углах электропередачи, приближающихся к 180° , происходит обращение в нуль коэффициента a_0 при p^n и расположенного вслед за ним коэффициента a_1 при p^{n-1} характеристического уравнения маловозмущенного движения идеализированной (при неучете переходных процессов в линии) системы. Это вынуждает уже при длинах линии 2400–3000 км и более (для $f=50$ Гц) снижать передаваемую мощность до значений, меньших натуральной мощности линии, и тем заметнее, чем длиннее линия. Одновременно этим устанавливается и диапазон длин возможного практического применения.

Важными вопросами, определяющими область допустимых условий функционирования и, как следствие, технико-экономические показатели дальних линий электропередачи с УШР, являются динамическая устойчивость и внутренние перенапряжения. Острота первого из этих вопросов связана с работой генераторов передающего конца дальней электропередачи с УШР в зоне искусственной устойчивости; второго — с осо-

Results of a study of the dynamic stability and internal overvoltages of long-distance transmission lines with controllable shunting reactors are given. The limits of the transmitted power are determined from the conditions of the dynamic stability and the admissible level of internal overvoltages. The possibility of restricting internal overvoltages by means of controlling the shunting reactors is considered and the negative effect of these measures on the level of the dynamic stability of power transmission is estimated. From an analysis of the results obtained, the possible range of lengths of effective use of such transmission lines is determined.

Key words: long-distance transmission lines, controllable shunting reactor, dynamic stability, internal overvoltages, limit conditions

бенностями протекания в такой электропередаче электромагнитных переходных процессов. В статье приводится анализ этих вопросов и подчеркивается необходимость их совместного рассмотрения.

Расчетная схема электропередачи (рис. 1, а) содержит удаленную гидроэлектростанцию, связанную двухцепной без переключательных пунктов линией электропередачи с мощной энер-

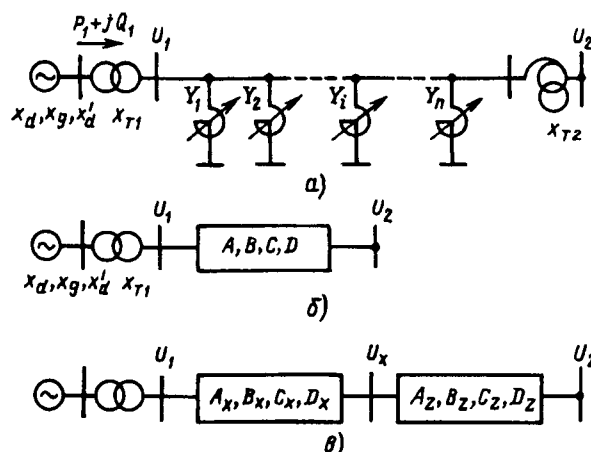


Рис. 1. Расчетная схема электропередачи с УШР (а), ее схема замещения (б) и схема замещения при расчете напряжений в произвольной точке линии (в): номинальные параметры генераторов: $x_d=1,5$; $x_g=0,98$; $x_{ad}=1,32$; $x_{aq}=0,8$; $x_{rd}=1,44$; $x_{rg}=0,92$; $T_{d0}=7$ с; $T_{rd}=T_{rg}=0,8$ с; $T_f=10$ с (с учетом турбины); удельные параметры линии с расщепленным проводом 10АС330/43: $x_0=0,192$ Ом/км; $r_0=0,0063$ Ом/км; $b_{C0}=5,7116 \cdot 10^{-6}$ См/км; натуральная мощность линии при $U_{ном}=1150$ кВ равна 7200 МВт; параметры УШР: $T_p=0,3$ с; $T_w=0,05$ с; $T_{0w}=1$ с; $T_{1w}=T_{1U}=0,03$ с

госистемой. Длина линии была разделена на участки длиной 500—600 км с параметрами A_y, B_y, C_y, D_y , в промежуточных точках устанавливались УШР. Номинальная мощность реактора, соответствующая передаваемой мощности $P_1=0$, определяется выражением

$$Q_{p,ном} = \frac{U_{ном}^2}{B_y} (2 - A_y - D_y).$$

При исследовании динамической устойчивости не учитывались переходные процессы в статорных цепях генераторов, линиях электропередачи и УШР. Демпферные обмотки генераторов представлялись одним в каждой оси контуром с эквивалентными параметрами. Регулирование возбуждения генераторов осуществлялось по закону, реализованному в унифицированных АРВ—СД. Закон управления реакторами принимался в виде

$$(Y_i - Y_{i0}) (1 + pT_p) = k_{0U}^{(i)} (U_i - U_{i0}) + k_{1U}^{(i)} \frac{pU_i}{1 + pT_{1U}} + \frac{\Delta\omega_{iU}}{1 + pT_{\omega}} \left(\frac{k_{0\omega}^{(i)} p}{1 + pT_{0\omega}} + \frac{k_{1\omega}^{(i)} p}{1 + pT_{1\omega}} \right),$$

где Y_i, Y_{i0} — текущая и исходная (в заданном установившемся режиме) проводимость реактора в i -м узле; $k_{0U}^{(i)} \left[\frac{\text{ед. провод.}}{\text{ед. напр.}} \right], k_{1U}^{(i)} \left[\frac{\text{ед. провод.}}{\text{ед. напр./с}} \right], k_{0\omega}^{(i)} \left[\frac{\text{ед. провод.}}{\text{рад/с}} \right], k_{1\omega}^{(i)} \left[\frac{\text{ед. провод.}}{\text{рад/с}^2} \right]$ — коэффициенты усиления регулятора УШР по напряжению, производной напряжения, частоте и производной частоты напряжения в узлах подключения реакторов; $T_p, T_{1U}, T_{\omega}, T_{0\omega}, T_{1\omega}$ — постоянные времени УШР. (В качестве единицы проводимости принимается номинальное значение $Y_{ном}$, отвечающее $Q_{p,ном}$).

В качестве аварийного возмущения при исследованиях переходных процессов принимается трехфазное короткое замыкание (КЗ). Рассматриваются два расчетных случая: КЗ вблизи шин станции и удаленные (вблизи середины линии) КЗ на одной из линий. Данные табл. 1 характеризуют основные зависимости предела динамической устойчивости электропередачи от длины линии, длительности и места КЗ. При отключении поврежденной линии в соответствии с принятой блочной схемой линии электропередачи отключалась половина установленной мощности станции. Из анализа результатов следует, что при реальных временах отключения удаленных КЗ на линиях сверхвысокого напряжения ($t_{КЗ}=0,08 \div 0,1$ с) динамическая устойчивость электропередачи с УШР в режимах с нормированным (20%) запасом статической устойчивости обеспечивается лишь при $l \leq 2100$ км.

При больших длинах для сохранения динамической устойчивости требуется отключение уже более половины установленной мощности станции, либо наряду с отключением части генераторов — применение других сильных мер повышения динамической устойчивости, например, электрического торможения.

Таблица 1

Длина линии l , км	Место КЗ	Предел динамической устойчивости электропередачи при различной длительности КЗ, в долях $P_{нат}$				Статический предел
		0,1 с	0,08 с	0,06 с	0,04 с	
1500	Вблизи шин	0,79	0,83	0,86	0,88	$P_{пр}^* \leq P_{нат}$
	Удаленные	0,87	0,9	0,92	0,93	$P_{пр}^{**} > P_{нат}$
1800	Вблизи шин	0,78	0,82	0,85	0,87	$P_{пр}^* \leq P_{нат}$
	Удаленные	0,86	0,89	0,91	0,92	$P_{пр}^{**} > P_{нат}$
2100	Вблизи шин	0,77	0,81	0,84	0,86	$P_{пр}^* \leq P_{нат}$
	Удаленные	0,84	0,87	0,89	0,91	$P_{пр}^{**} > P_{нат}$
2400	Вблизи шин	0,75	0,78	0,81	0,84	$P_{пр}^* \leq P_{нат}$
	Удаленные	0,81	0,84	0,87	0,9	$P_{пр}^{**} \approx P_{нат}$
2700	Вблизи шин	0,69	0,72	0,74	0,76	$P_{пр}^* \leq P_{нат}$
	Удаленные	0,75	0,77	0,79	0,8	$P_{пр}^{**} = 0,95 P_{нат}$

Примечание. $P_{пр}^*$ — пределы передаваемой мощности, определяемый условием положительности свободного члена характеристического уравнения системы — критерием синхронизирующей мощности; $P_{пр}^{**}$ — пределы передаваемой мощности, определяемый условием самовозбуждения (значения $P_{пр}^{**}$ даны для случая, когда установленная мощность станции близка к натуральной мощности линии; с ростом $P_{уст}$ предельные по условиям самовозбуждения длины электропередачи с УШР несколько увеличиваются [4, 5]).

Особенности протекания электромагнитных переходных процессов в дальних линиях электропередачи требуют совместного изучения характера изменения напряжения по длине линии и динамической устойчивости. С этой целью представим расчетную схему электропередачи рис. 1,а в виде эквивалентного четырехполюсника с обобщенными параметрами A, B, C, D (рис. 1,б). Для упрощения пренебрежем активными сопротивлениями в цепях статора генератора и линии электропередачи.

Уравнения переходных процессов генератора до шин с напряжением U_1 (рис. 1,а) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} (x_d + x_{T1}) I_{d1} + E_q + E_{rq} &= U_{q1}; \\ (x_d + x_{T1}) I_{q1} + E_{rd} &= -U_{d1}; \\ T_{d0} p \Psi_f + E_q &= U_f; \quad T_{rd} p \Psi_D + E_{rq} = 0; \\ T_{rq} p \Psi_Q + E_{rd} &= 0; \quad \Psi_f = \mu_d x_d I_{d1} + E_q + g_1 E_{rq}; \\ \Psi_D &= \mu_d x_d I_{d1} + E_{rq} + g_2 E_q; \quad \Psi_Q = \mu_q x_q I_{q1} + E_{rd}; \\ T_J \frac{p^2 \delta}{\omega_0} &= P_T - P_1; \\ P_1 &= U_{q1} I_{q1} + U_{d1} I_{d1}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где U_{d1} , U_{q1} , I_{d1} , I_{q1} — проекции на оси d и q напряжения U_1 шин станции и тока генератора; E_q , E_{rq} , E_{rd} — ЭДС, индуцируемые в фазах статора токами в обмотке возбуждения, продольном и поперечном демпферных контурах соответственно; Ψ_f , Ψ_D , Ψ_Q — потокосцепления обмотки возбуждения, продольного и поперечного демпферных контуров соответственно; P_T — мощность турбины; P_1 — активная мощность генератора; δ — угол электропередачи; $\mu_d = \frac{x_{ad}^2}{(x_d + x_{t1})x_f}$; $\mu_d' = \frac{x_{ad}^2}{(x_d + x_{t1})x_{rd}}$; $\mu_q = \frac{x_{aq}^2}{(x_q + x_{t1})x_{rq}}$; $g_1 = \frac{x_{ad}}{x_f}$, $g_2 = \frac{x_{ad}}{x_{rd}}$ — коэффициенты магнитной связи обмоток генератора; x_f , x_{rd} , x_{rq} , T_{d0} , T_{rd} , T_{rq} — полные индуктивные сопротивления и постоянные времени обмотки возбуждения, продольного и поперечного демпферных контуров.

Уравнения дальней линии электропередачи:

$$\left. \begin{aligned} DU_{q1} + BI_{d1} &= U_2 \cos \delta; \\ DU_{d1} - BI_{q1} &= -U_2 \sin \delta, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $B = \text{Im} [\dot{B} + jx_{t2}\dot{A}]$; $D = \text{Re} [\dot{D} + jx_{t2}\dot{C}]$; $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$, $\dot{D}$ — обобщенные параметры линии.

Для расчета напряжений в произвольной точке линии удобно использовать схему, состоящую из двух соединенных последовательно четырехполюсников (рис. 1,б). Тогда напряжения в произвольной точке линии определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} U_{qx} &= D_x U_{q1} + B_x I_{d1}; \\ U_{dx} &= D_x U_{d1} - B_x I_{q1}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Примем неизменными потокосцепления роторных контуров генератора:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_f &= \Psi_{f0} = \mu_d x_d I_{d10} + E_{q0} = \text{const}; \\ \Psi_D &= \Psi_{D0} = \mu_d' x_d I_{d10} + g_2 E_{q0} = \text{const}; \\ \Psi_Q &= \Psi_{Q0} = \mu_q x_q I_{q10} = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

После совместного решения систем уравнений (1)–(3) нетрудно получить следующие выражения для проекций напряжения U_x при заданном угле δ :

$$\left. \begin{aligned} U_{qx} &= \frac{1}{B_d''} [B_{dx}'' U_2 \cos \delta + E_q'' B_z]; \\ U_{dx} &= -\frac{1}{B_q''} [B_{qx}'' U_2 \sin \delta + E_d'' B_z]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Активная мощность в этом случае

$$P_1 = \frac{E_q'' U_2}{B_d''} \sin \delta - \frac{E_d'' U_2}{B_q''} \cos \delta + \frac{U_2^2}{2D} \left(\frac{1}{B_q''} - \frac{1}{B_d''} \right) \sin 2\delta, \quad (6)$$

где $B_d'' = D(x_d'' + x_{t1}) + B$; $B_q'' = D(x_q'' + x_{t1}) + B$ — суммарные сверхпереходные сопротивления в продольной и поперечной осях; $B_{dx}'' = D_x(x_d'' + x_{t1}) +$

$+B_x$, $B_{qx}'' = D_x(x_q'' + x_{t1}) + B_x$ — сверхпереходные сопротивления в продольной и поперечной осях до точки с произвольной координатой x ; $E_q'' = \frac{\Psi_{f0}(1-g_2) + \Psi_{D0}(1-g_1)}{1-g_1 g_2}$; $E_d'' = \Psi_{Q0}$ — сверхпереходные ЭДС.

При трехфазном КЗ в произвольной точке линии напряжение в этой точке равно нулю, и выражения (5) с учетом $B_d'' \approx B_q''$ преобразуются к виду:

$$U_x = \frac{E''}{B_d''} B_z, \quad (7)$$

где $E'' = \sqrt{E_q''^2 + E_d''^2}$.

Максимальные внутренние перенапряжения в аварийном режиме имеют место при КЗ в конце линии, при котором значение B_d'' , определяемое от влияния ЭДС E'' до места КЗ, минимально, и возникают на расстоянии примерно 1500 км от места КЗ. В табл. 2 приведены рассчитанные по формуле (7) значения $U_{\max}$ максимальных внутренних перенапряжений в аварийном режиме электропередачи с УШР, соответствующие различным длинам линии и передаваемой по ней мощности P_{10} .

Таблица 2

Длина линии l , км	Значения максимальных внутренних перенапряжений, в долях $U_{\text{ном}}$		
	$0,7P_{\text{нат}}$ $E'' = 1,17$	$0,8P_{\text{нат}}$ $E'' = 1,2$	$0,9P_{\text{нат}}$ $E'' = 1,23$
1500	1,06	1,11	1,18
1800	1,13	1,2	1,3
2100	1,2	1,31	1,57
2400	1,28	1,55	2,17
2700	1,46	2,03	4,03

Согласно [6] максимально допустимый уровень вынужденной составляющей напряжения для класса 1150 кВ составляет $U_{\max} = 1,35U_p$ (U_p — максимальное рабочее напряжение), или с учетом $U_p = 1,05U_{\text{ном}}$ $U_{\max} = 1,42U_{\text{ном}}$. Из данных табл. 2 видно, что это условие заметно ограничивает предельно передаваемую мощность при длине линии более 1900 км.

Полученные результаты должны быть дополнены количественной оценкой внутренних перенапряжений, возникающих в момент отключения КЗ. Наиболее неблагоприятным с этой точки зрения является условие, когда при исчезновении КЗ (например, в случае успешного АПВ или ОАПВ одной из цепей) сверхпереходные сопротивления B_d'' и B_q'' будут соответствовать параметрами линии без реакторов, т.е. в предположении, что проводимость реакторов за время КЗ снижается до $Y_{\min} = 0$. Очевидно, что такой же результат будет в случае успешного АПВ или ОАПВ линии в одноцепном варианте схемы выдачи мощности. В качестве примера

на рис. 2 приведен характер изменения напряжения в одноцепной линии длиной 2400 км при исходной передаваемой мощности $P_{10}=0,7P_{\text{нат}}$ и КЗ длительностью 0,08 с в середине линии с последующим АПВ.

При установленной мощности станции, со-размерной с $P_{\text{нат}}$ линии, точка с максимальным

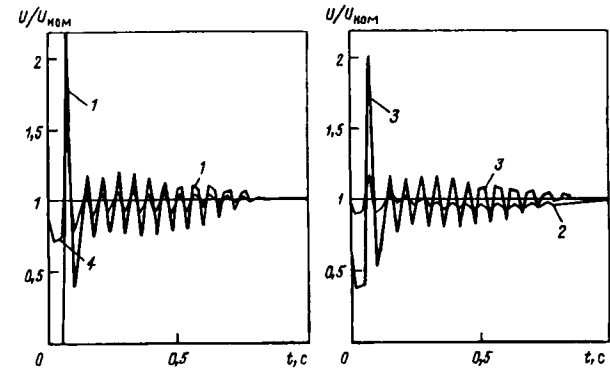


Рис. 2. Напряжения в различных точках линии в переходном процессе: 1 — в середине линии; 2 — в начале линии; 3, 4 — на расстоянии 1/4 длины от начала и конца линии соответственно

напряжением в момент исчезновения КЗ несколько сдвигается от середины в сторону передающего конца. Сопоставительный анализ кривой 1 рис. 2 и данных табл. 2 показывает, что значения внутренних перенапряжений в момент исчезновения КЗ могут превышать значения перенапряжений в аварийном режиме.

Результаты исследований показали, что КЗ на одной из цепей линии могут также приводить к снижению напряжений по всей длине неповрежденной линии и, как следствие, обуславливать уменьшение проводимости УШР. В этих случаях отключение поврежденной цепи линии, как и в рассмотренном ранее случае АПВ одноцепной линии, будет сопровождаться повышением напряжений. Следующие данные получены по выражениям (5) при КЗ в середине одной из цепей:

$l, \text{ км}$	1500	1800	2100	2400	2700					
$P_1/P_{\text{нат}}$	0,7	0,83	0,7	0,83	0,7	0,83	0,7	0,83		
$U_{\text{max}}/U_{\text{ном}}$	1,14	1,18	1,14	1,19	1,14	1,21	1,15	1,27	1,17	1,4

Из анализа этих данных видно, что возникающие при этом перенапряжения значительно меньше и не выходят за рамки допустимых значений.

Для уменьшения внутренних перенапряжений в случае применения АПВ необходимо увеличить минимальное значение B'_d , что можно достичь ограничением минимальной проводимости реакторов. В табл. 3 приводятся значения $U_{\text{max}}/U_{\text{ном}}$ максимальных внутренних перенапряжений в послеаварийном режиме электропередачи с УШР при различной длине линии и передаваемой мощности P_{10} в зависимости от

значений Y_{min} и соответствующих им значений $Q_{\text{min}}/P_{\text{нат}}$; в табл. 3 также даются исходные значения $Q_{p0}/P_{\text{нат}}$ реактивной мощности УШР, соответствующие P_{10} . Значения $U_{\text{max}}/U_{\text{ном}}$ получены с использованием выражений (5) при $\delta=\delta_0$, что дает несколько завышенные значения перенапряжений.

Таблица 3

Длина линии $l, \text{ км}$	Передаваемая мощность $P_{10}, \text{ в долях } P_{\text{нат}}$	Реактивная мощность УШР $Q_{p0}/P_{\text{нат}}$	Проводимость реактора $Y_{\text{min}}, \text{ мксм}$	Реактивная мощность $Q_{\text{min}}/P_{\text{нат}}$ (соответствующая Y_{min} и $U=U_{\text{ном}}$)	Мощность $P_{10}, \text{ соответствующая } Q_{\text{min}}, \text{ в долях } P_{\text{нат}}$	$U_{\text{max}}/U_{\text{ном}}$
1500	0,7	0,135	0	0	1,0	1,32
	0,83	0,083	0	0	1,0	1,19
1800	0,7	0,164	0	0	1,0	1,49
	0,83	0,1	0	0	1,0	1,34
2100	0,7	0,192	0	0	1,0	2,65
			400	0,073	0,9	1,52
	0,83	0,118	0	0	1,0	2,1
			200	0,037	0,95	1,4
2400	0,7	0,222	0	0	1,0	4,4
			600	0,11	0,87	1,56
	0,83	0,136	0	0	1,0	3,52
			400	0,073	0,91	1,43
2700	0,6	0,314	0	0	1,0	6,33
			1400	0,257	0,69	1,27
	0,7	0,252	0	0	1,0	5,8
			1000	0,184	0,79	1,48

Из данных табл. 3 видно, что ограничение минимальной проводимости реакторов позволяет снизить внутренние перенапряжения электропередачи с УШР в послеаварийном режиме до допустимых значений. Вместе с тем, предложенное мероприятие по ограничению перенапряжений в переходном процессе снижает динамическую устойчивость электропередачи. Дадим количественную оценку этого негативного влияния. При пренебрежении демпферными контурами и постоянстве потокосцепления обмотки возбуждения $\Psi_f=E'_q=\text{const}$ выражение для активной мощности в переходном режиме имеет вид

$$P_1 = \frac{E'_q U_2}{B'_d} \sin \delta + \frac{U_2^2}{2D} \left(\frac{1}{B_q} - \frac{1}{B'_d} \right) \sin 2\delta, \tag{9}$$

где $B'_d=D(x'_d+x_{T1})+B$; $B'_q=D(x_q+x_{T1})+B$ — суммарные переходное сопротивление и синхронное сопротивление в поперечной оси.

На основе выражения (9) можно построить семейство характеристик, соответствующих различным значениям передаваемой мощности P_1 с фиксированными сопротивлениями B'_d и B'_q . При резких изменениях режима в связи с наличием инерции в системе управление УШР

эти сопротивления не могут меняться мгновенно и определяются параметрами режима, предшествующего возмущению. Однако при изменении режима, связанных с движением ротора генератора во время переходного процесса, значения B_d и B_q меняются в соответствии с изменением мощности (проводимости) УШР за счет управления. При этом каждому значению угла δ электропередачи соответствует определенная передаваемая мощность P_1 . Полученную таким образом зависимость можно условно назвать переходной угловой характеристикой электропередачи.

На рис. 3 приводится переходная угловая характеристика электропередачи длиной 2400 км и показываются площади ускорения и возможного торможения, соответствующие различной минимальной ($Y_{\min}$) проводимости УШР.

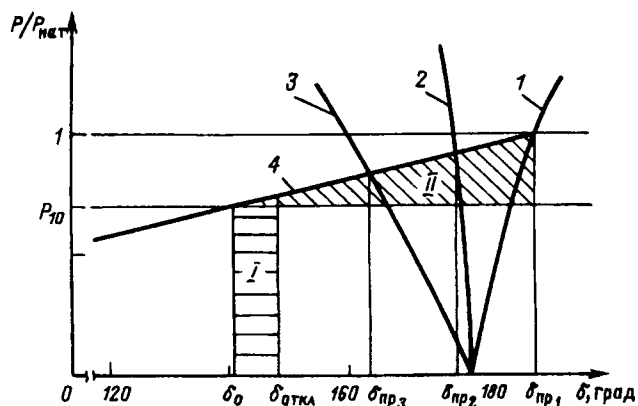


Рис. 3. Динамическая устойчивость дальнейшей линии электропередачи с УШР: 1, 2, 3 — переходные угловые характеристики электропередачи при $Y_i = 0$; 400 и 850 мкСм ($Y_i = \text{const}$); 4 — переходная угловая характеристика электропередачи с учетом управления шунтирующими реакторами; $\delta_{\text{откл}}$ — угол, при котором происходит отключение КЗ; $\delta_{\text{пр1}}$, $\delta_{\text{пр2}}$, $\delta_{\text{пр3}}$ — предельные с точки зрения динамической устойчивости углы электропередачи, соответствующие различным значениям Y_i ; I — площадь ускорения; II — площадь возможного торможения при $Y_i = 0$

В табл. 4 приведены значения предельной передаваемой мощности электропередачи с УШР при различной длительности аварийного возмущения и ограничении минимальной проводимости реакторов $Y_{\min}$ для линий различной длины.

Таблица 4

Длина линии l , км	Проводимость реактора $Y_{\min}$, мкСм	Значение предельной передаваемой мощности при КЗ вблизи шин (числитель) и при удаленном КЗ (знаменатель) при различной длительности аварийного возмущения ($t_{\text{КЗ}}$ в с), в долях $P_{\text{нат}}$			
		0,10	0,08	0,06	0,04
2100	200	0,73/0,78	0,77/0,82	0,81/0,85	0,84/0,88
2400	400	0,70/0,75	0,73/0,77	0,77/0,81	0,81/0,84
2700	1000	0,60/0,64	0,63/0,67	0,66/0,70	0,69/0,73

Из сравнительного анализа данных табл. 1 и 4 следует, что ограничение минимальной проводимости реакторов для снижения внутренних перенапряжений приводит к некоторому уменьшению предельно передаваемой мощности, и с этим фактором необходимо считаться при проектировании и эксплуатации таких электропередач.

Выводы. 1. Пределы передаваемой мощности дальних линий электропередачи с УШР определяются не только условиями динамической устойчивости, но и возникающими в них внутренними перенапряжениями при коротких замыканиях на линии и в момент их отключения.

2. Дальние линии электропередачи с УШР обладают приемлемыми по уровню динамической устойчивости и внутренних перенапряжений характеристиками лишь при длинах менее 2200—2400 км.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бики М.А., Бродовой Е.Н., Брянцев А.М. и др. Электромагнитные процессы в мощных управляемых реакторах. — Электричество, 1994, № 6.
2. Александров Г.Н. К методике расчета управляемых шунтирующих реакторов трансформаторного типа. — Электричество, 1998, № 4.
3. Александров Г.Н. Электропередачи переменного тока на основе компактных линий повышенной пропускной способности и управляемых шунтирующих реакторов. — Электричество, 1994, № 6.
4. Евдокимин Г.А., Рагозин А.А. Исследование статической устойчивости дальних линий электропередачи с управляемыми шунтирующими реакторами. — Электричество, 1996, № 8.
5. Рагозин А.А. Условия статической устойчивости дальних линий электропередачи с управляемыми шунтирующими реакторами. — Электричество, 1997, № 5.
6. Справочник по электрическим установкам высокого напряжения / Под ред. И.А. Баумштейна, С.А. Бажанова, — М.: Энергоатомиздат, 1989.

[11.11.98]

А в т о р ы: Рагозин Александр Афанасьевич окончил энергетический факультет политехнического института в г. Душанбе в 1961 г. В 1967 г. защитил кандидатскую диссертацию по специальности «Электрические станции (электрическая часть), сети и электрические системы и управление ими» в Ленинградском политехническом институте (ныне Санкт-Петербургский государственный технический университет — СПбГТУ). Ведущий научный сотрудник, профессор кафедры «Электрические системы и сети» СПбГТУ.

Таланов Сергей Борисович окончил энергетический факультет Читинского политехнического института в 1994 г. Аспирант кафедры «Электрические сети и системы» СПбГТУ.

Решение гибридных уравнений установившегося режима электроэнергетической системы методом диакоптики

ХАЧАТРЯН В.С., ЭТМЕКЧЯН Э.А., БАДАЛЯН Н.П.

Рассматривается решение уравнений установившегося режима ЭЭС в форме $Y-Z$ с применением идеи декомпозиции. Разработанный метод позволяет решать задачу установившегося режима как при $P-U$ -, так и при $P-Q$ -форме задания исходной информации относительно станционных узлов. В зависимости от структуры исследуемой ЭЭС можно достичь экономии объема вычислительных работ на 30÷45%.

Ключевые слова: электроэнергетические системы, установившийся режим, расчет, метод диакоптики

Несмотря на дальнейшее совершенствование современных цифровых вычислительных машин проблема расчета установившегося режима большой электроэнергетической системы (ЭЭС) в темпе процесса остается в повестке дня. Это объясняется тем, что расчет установившегося режима является основным этапом в общей проблеме исследования режимных вопросов ЭЭС. Чем быстрее осуществляется решение задачи расчета оптимального установившегося режима большой ЭЭС, тем больше эффективность при ее соответствующем управлении.

Для решения задачи расчета установившихся режимов больших ЭЭС широко применяются методы декомпозиции [1–11], при которых уменьшается как объем памяти для хранения информации, так и вычислительных работ при их реализации на ЭВМ.

В последние годы развивается новое направление, связанное с решением задачи расчета установившихся режимов ЭЭС, когда состояние пассивной части задается в гибридной $Y-Z$ -форме [12]. Тем не менее проблема расчета установившихся режимов больших ЭЭС остается открытой.

В статье предлагается решать гибридные $Y-Z$ -уравнения больших ЭЭС методом декомпозиции, причем представлять их как совокупность радиально связанных оптимальных подсистем [8].

Рассмотрим схему замещения большой ЭЭС, состоящую из $M+1$ узлов, как совокупность N подсистем. После удаления определенного числа линий по критерию минимума требуемой памяти вычислительной машины для хранения исходной информации большая ЭЭС представляется в виде N радиально связанных оптимальных подсистем. Предположим, что при этом каждая подсистема состоит соответственно из $M_1, M_2, \dots, M_N$ узлов,

The paper deals with a solution of electrical power system steady state regime equations in the form of $Y-Z$ with the application of a decomposition idea. The method developed makes it possible to solve the problem of the steady state regime with $P-U$ and $P-Q$ forms of setting initial data concerning station nodes. Subject to the structure of the investigated electrical power system it is possible to reduce the volume of calculation works by 30–40%.

Key words: electrical power system, steady state regime, calculation, diacoptics method

так что $M=M_1+M_2+\dots+M_N$. Один из стационарных узлов выбирается базисным, и в результате число независимых узлов составляет M . Принимается следующая система индексов: для существующих узлов $i, j=(i_1, j_1; i_2, j_2, \dots, i_N, j_N)$; для вновь полученных противоположных узлов δ, γ и l, s .

Построение математической модели установившегося режима. Матричное уравнение состояния ЭЭС в Z -форме можно представить в следующем виде:

$$\dot{U}_i = \dot{U}_B + Z_{ij} \dot{I}_j, \quad (1)$$

где $\dot{U}_i$ — многомерный вектор комплексных напряжений независимых узлов; $\dot{U}_B$ — заданное напряжение базисного узла; $\dot{I}_j$ — многомерный вектор комплексных токов тех же независимых узлов; Z_{ij} — неособенная матрица узловых комплексных сопротивлений порядка $M \times M$.

После представления заданной ЭЭС как совокупности радиально связанных оптимальных подсистем матричное уравнение (1) можно представить как совокупность подматричных уравнений отдельных подсистем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{i_1} &= \dot{U}_{B_1} + Z_{i_1 j_1} \dot{I}_{j_1}; \\ \dot{U}_{i_2} &= \dot{U}_{B_2} + Z_{i_2 j_2} \dot{I}_{j_2}; \\ &\vdots \\ \dot{U}_{i_N} &= \dot{U}_{B_N} + Z_{i_N j_N} \dot{I}_{j_N}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{B_1} &= \dot{U}_B + Z_{i_1, M_1} \Delta \dot{I}_{2, N} + Z_{i_1, s_1} \dot{I}_{\gamma}; \\ \dot{U}_{B_2} &= \dot{U}_{M_1} + Z_{i_2, M_2} \Delta \dot{I}_{3, N} + Z_{i_2, s_2} \dot{I}_{\gamma}; \\ &\vdots \\ \dot{U}_{B_N} &= \dot{U}_{M_1, N-1} + Z_{i_N, M} \Delta \dot{I}_{N, N} + Z_{i_N, s_N} \dot{I}_{\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь $Z_{i_1, M_1}, Z_{i_2, M_2}, \dots, Z_{i_N, M_N}$ — последние столбцы матриц $Z_{i_1, j_1}, Z_{i_2, j_2}, \dots, Z_{i_N, j_N}$ соответственно; $Z_{i_1, s_1}, Z_{i_2, s_2}, \dots, Z_{i_N, s_N}$ — комплексные сопротивления вновь появившихся узлов из-за разрезания ЭЭС, соответственно принадлежащих 1, П, ..., N подсистемам.

С другой стороны,

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{I}_{2,N} &= \sum_{M_2} \dot{I}_{i_2} + \sum_{M_3} \dot{I}_{i_3} + \dots + \sum_{M_N} \dot{I}_{i_N}; \\ \Delta \dot{I}_{3,N} &= \sum_{M_3} \dot{I}_{i_3} + \sum_{M_4} \dot{I}_{i_4} + \dots + \sum_{M_N} \dot{I}_{i_N}; \\ &\vdots \\ \Delta \dot{I}_{N-1,N} &= \sum_{M_N} \dot{I}_{i_N}; \quad \Delta \dot{I}_{N,N} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Комплексный ток $\dot{I}_\gamma$, который фигурирует во всех матричных уравнениях (3), является вектором токов разрезанных линий и определяется по формуле

$$\dot{I}_\gamma = (Z_{l\delta} + Z_{л})^{-1} \Delta \dot{U}_j, \quad (5)$$

где $Z_{l\delta}$ — комплексное сопротивление равно

$$Z_{l\delta} = (Z_{l\gamma} - Z_{ls}) - (Z_{\delta\gamma} - Z_{\delta s}); \quad (6)$$

$Z_{л}$ — диагональная матрица, которая состоит из элементов отключенных линий; если число отключенных линий L , то

$$Z_{л} = \begin{bmatrix} Z_{лЭП}^1 & & & \\ & Z_{лЭП}^2 & & \\ & & \dots & \\ & & & Z_{лЭП}^L \end{bmatrix}; \quad (7)$$

$\Delta \dot{U}_j$ — алгебраическая сумма падений комплексных напряжений вновь полученных узлов во всех подсистемах:

$$\Delta \dot{U}_j = \Delta \dot{U}_{j_1} + \Delta \dot{U}_{j_2} + \dots + \Delta \dot{U}_{j_N}. \quad (8)$$

Можно заметить, что в выражение для $\dot{U}_{B_1}$ входит напряжение базисного узла, значение которого задается. В выражение для $\dot{U}_{B_2}$ входит напряжение $\dot{U}_{M_1}$ примыкающего ко второй подсистеме узла M_1 первой подсистемы. Напряжение $\dot{U}_{M_1}$ входит в состав вектора комплексных узлов напряжений $\dot{U}_{i_1}$ первой подсистемы. Напряжение $\dot{U}_{M_{12}}$, которое входит в выражение $\dot{U}_{B_3}$, является компонентом вектора второй подсистемы и т.д.

Система уравнений в виде матричной записи:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{i_1} \\ \dot{U}_{i_2} \\ \dots \\ \dot{U}_{i_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{B_1} \\ \dot{U}_{B_2} \\ \dots \\ \dot{U}_{B_N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{i_1, j_1} & & & \\ & Z_{i_2, j_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & Z_{i_N, j_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{j_1} \\ \dot{I}_{j_2} \\ \dots \\ \dot{I}_{j_N} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Примем дополнительную систему индексов для отдельных подсистем: $i_1, j_1 = (m_1, n_1; k_1, l_1); i_2, j_2 = (m_2, n_2; k_2, l_2); \dots; i_N, j_N = (m_N, n_N; k_N, l_N)$, где m, n относятся к стационарным, а k, l — к нагрузочным узлам. Тогда первое подматричное уравнение из (9) можно представить в виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{m_1} \\ \dot{U}_{l_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{B_{m_1}} \\ \dot{U}_{B_{l_1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{m_1, n_1} & Z_{m_1, k_1} \\ Z_{l_1, n_1} & Z_{l_1, k_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{n_1} \\ \dot{I}_{k_1} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Уравнение (10) в гибридной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{m_1} \\ \dot{I}_{k_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{B_1} \\ \dot{I}_{B_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{m_1, n_1} - z_{m_1, k_1} \times z_{l_1, k_1}^{-1} z_{l_1, n_1} & z_{m_1, k_1} z_{l_1, k_1}^{-1} \\ -z_{l_1, k_1} z_{l_1, n_1} & z_{l_1, k_1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{n_1} \\ \dot{U}_{l_1} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{U}_{B_{m_1}} - z_{m_1, k_1} z_{l_1, k_1}^{-1} \dot{U}_{B_{l_1}} &= \dot{U}_{B_1}, \\ -z_{l_1, k_1}^{-1} \dot{U}_{B_{l_1}} &= \dot{I}_{B_1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогичные гибридные уравнения можно написать для остальных подсистем.

После введения соответствующих обозначений для рассматриваемой ЭЭС блочно-диагональное матричное уравнение можно представить в общем случае в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{m_1} \\ \dot{I}_{k_1} \\ \dot{U}_{m_2} \\ \dot{I}_{k_2} \\ \dots \\ \dot{U}_{m_N} \\ \dot{I}_{k_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{B_1} \\ \dot{I}_{B_1} \\ \dot{U}_{B_2} \\ \dot{I}_{B_2} \\ \dots \\ \dot{U}_{B_N} \\ \dot{I}_{B_N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{m_1, n_1} & b_{m_1, k_1} & & & \\ \dot{c}_{m_1, n_1} & y_{l_1, k_1} & & & \\ & & z_{m_2, n_2} & b_{m_2, k_2} & \\ & & \dot{c}_{m_2, n_2} & y_{l_2, k_2} & \\ & & & & \dots \\ & & & & & z_{m_N, n_N} & b_{m_N, k_N} \\ & & & & & \dot{c}_{m_N, n_N} & y_{l_N, k_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{n_1} \\ \dot{U}_{l_1} \\ \dot{I}_{n_2} \\ \dot{U}_{l_2} \\ \dots \\ \dot{I}_{n_N} \\ \dot{U}_{l_N} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Рассмотрим матричные уравнения первой подсистемы в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{m_1} &= \dot{U}_{B_1} + z_{m_1, n_1} \dot{I}_{n_1} + b_{m_1, l_1} \dot{U}_{l_1}; \\ \dot{I}_{k_1} &= \dot{I}_{B_1} + \dot{c}_{k_1, n_1} \dot{I}_{n_1} + y_{k_1, l_1} \dot{U}_{l_1}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где

$$\dot{U}_{B_1} = \dot{U}_{B_{m_1}} - z_{m_1, k_1} y_{l_1, k_1} \dot{U}_{B_{l_1}}; \quad (15)$$

$$\dot{I}_{B_1} = -y_{l_1, k_1} \dot{U}_{B_{l_1}}. \quad (16)$$

Каждое уравнение из системы (14) представим в алгебраической записи:

$$\dot{U}_{m_1} = \dot{U}_{B_1} + \sum_{n_1=1}^{\Gamma_1} z_{m_1, n_1} \dot{I}_{n_1} + \sum_{l_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+N_1} b_{m_1, l_1} \dot{U}_{l_1}; \quad (17)$$

$$\dot{I}_{k_1} = \dot{I}_{B_1} + \sum_{n_1=1}^{\Gamma_1} \dot{c}_{k_1, n_1} \dot{I}_{n_1} + \sum_{l_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+N_1} y_{k_1, l_1} \dot{U}_{l_1}. \quad (18)$$

Если умножить уравнение (17) на $\hat{I}_{m_1}$, а (18) на $\hat{U}_{k_1}$, то получим выражения для активных и реактивных мощностей:

$$P_{m_1} = P_{Bm_1} + \sum_{n_1=1}^{\Gamma_1} [R_{m_1, n_1} (I'_{m_1} I'_{n_1} + I''_{m_1} I''_{n_1} + x_{m_1, n_1} (I''_{m_1} I'_{n_1} - I'_{m_1} I''_{n_1}))]; \quad (19)$$

$$Q_{m_1} = Q_{Bm_1} + \sum_{n_1=1}^{\Gamma_1} [x_{m_1, n_1} (I'_{m_1} I'_{n_1} + I''_{m_1} I''_{n_1} - R_{m_1, n_1} (I''_{m_1} I'_{n_1} - I'_{m_1} I''_{n_1}))], \quad (20)$$

где

$$P_{Bm_1} = U'_{B1} I'_{m_1} + U''_{B1} I''_{m_1} + \sum_{l_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+H_1} (B'_{m_1, l_1} T'_{m_1, l_1} + B_{m_1, l_1} T''_{m_1, l_1}); \quad (21)$$

$$Q_{Bm_1} = -U'_{B1} I'_{m_1} + U''_{B1} I''_{m_1} + \sum_{l_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+H_1} (B'_{m_1, l_1} T'_{m_1, l_1} - B_{m_1, l_1} T''_{m_1, l_1}). \quad (22)$$

Здесь величины T'_{m_1, l_1} и T''_{m_1, l_1} определяются из следующих формул:

$$T'_{m_1, l_1} = U'_{l_1} I'_{m_1} + U''_{l_1} I''_{m_1}; \quad (23)$$

$$T''_{m_1, l_1} = U'_{l_1} I'_{m_1} - U''_{l_1} I''_{m_1}. \quad (24)$$

Кроме того,

$$P_{k_1} = P_{Bk_1} + \sum_{l_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+H_1} [g_{k_1, l_1} (U'_{k_1} U'_{l_1} + U''_{k_1} U''_{l_1}) + b_{k_1, l_1} (U''_{k_1} U'_{l_1} - U'_{k_1} U''_{l_1})]; \quad (25)$$

$$Q_{k_1} = Q_{Bk_1} + \sum_{l_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+H_1} [g_{k_1, l_1} (U''_{k_1} U'_{l_1} - U'_{k_1} U''_{l_1}) - b_{k_1, l_1} (U'_{k_1} U'_{l_1} + U''_{k_1} U''_{l_1})], \quad (26)$$

где

$$P_{Bk_1} = I'_{B1} U'_{k_1} + I''_{B1} U''_{k_1} + \sum_{n_1=1}^{\Gamma_1} (C'_{k_1, n_1} L'_{k_1, n_1} + C''_{k_1, n_1} L''_{k_1, n_1}); \quad (27)$$

$$Q_{Bk_1} = I'_{B1} U''_{k_1} - I''_{B1} U'_{k_1} + \sum_{n_1=1}^{\Gamma_1} (C'_{k_1, n_1} L''_{k_1, n_1} - C''_{k_1, n_1} L'_{k_1, n_1}). \quad (28)$$

С другой стороны,

$$L'_{k_1, n_1} = U'_{k_1} I'_{n_1} + U''_{k_1} I''_{n_1}; \quad (29)$$

$$L''_{k_1, n_1} = U''_{k_1} I'_{n_1} - U'_{k_1} I''_{n_1}. \quad (30)$$

В приведенных ранее выражениях:

$$B'_{m_1, l_1} = \text{Re}(\dot{B}_{m_1, l_1}); \quad B''_{m_1, l_1} = \text{Im}(\dot{B}_{m_1, l_1});$$

$$C'_{k_1, n_1} = \text{Re}(\dot{C}_{k_1, n_1}); \quad C''_{k_1, n_1} = \text{Im}(\dot{C}_{k_1, n_1});$$

Представим систему уравнений (19), (20) и (25), (26) в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_{pm_1}(I'_{n_1}, I''_{n_1}) &= \{P_{m_1} - [P_{Bm_1} + f_{pm_1}(I'_{n_1}, I''_{n_1})]\}; \\ F_{qm_1}(I'_{n_1}, I''_{n_1}) &= \{Q_{m_1} + [Q_{Bm_1} + f_{qm_1}(I'_{n_1}, I''_{n_1})]\}; \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} F_{pk_1}(U'_{l_1}, U''_{l_1}) &= \{P_{k_1} - [P_{Bk_1} + f_{pk_1}(U'_{l_1}, U''_{l_1})]\}; \\ F_{qk_1}(U'_{l_1}, U''_{l_1}) &= \{Q_{k_1} - [Q_{Bk_1} + f_{qk_1}(U'_{l_1}, U''_{l_1})]\}, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} f_{pm_1}(I'_{n_1}, I''_{n_1}) &= \sum_{n_1=1}^{\Gamma_1} [R_{m_1, n_1} (I'_{m_1} I'_{n_1} + I''_{m_1} I''_{n_1}) + x_{m_1, n_1} (I''_{m_1} I'_{n_1} - I'_{m_1} I''_{n_1})]; \\ f_{qm_1}(I'_{n_1}, I''_{n_1}) &= \sum_{n_1=1}^{\Gamma_1} [x_{m_1, n_1} (I'_{m_1} I'_{n_1} + I''_{m_1} I''_{n_1}) - R_{m_1, n_1} (I''_{m_1} I'_{n_1} - I'_{m_1} I''_{n_1})]; \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} f_{pk_1}(U'_{l_1}, U''_{l_1}) &= \sum_{l_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+H_1} [g_{k_1, l_1} (U'_{k_1} U'_{l_1} + U''_{k_1} U''_{l_1}) + b_{k_1, l_1} (U''_{k_1} U'_{l_1} - U'_{k_1} U''_{l_1})]; \\ f_{qk_1}(U'_{l_1}, U''_{l_1}) &= \sum_{l_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+H_1} [g_{k_1, l_1} (U''_{k_1} U'_{l_1} - U'_{k_1} U''_{l_1}) - b_{k_1, l_1} (U'_{k_1} U'_{l_1} + U''_{k_1} U''_{l_1})]. \end{aligned} \quad (34)$$

Системы уравнений (31) и (32) можно представить более компактно:

$$\left. \begin{aligned} F_{pm_1}(I'_{n_1}, I''_{n_1}) &= 0; \\ F_{qm_1}(I'_{n_1}, I''_{n_1}) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{pk_1}(U'_{l_1}, U''_{l_1}) &= 0; \\ F_{qk_1}(U'_{l_1}, U''_{l_1}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Для рассматриваемой электроэнергетической системы можем написать квазидиагональную форму:

$F_{pm_1}(I'_{n_1}, I''_{n_1})=0;$		
$F_{qm_1}(I'_{n_1}, I''_{n_1})=0;$		
	$F_{pk_1}(U'_{l_1}, U''_{l_1})=0;$ $F_{qk_1}(U'_{l_1}, U''_{l_1})=0;$	
	$F_{pm_2}(I'_{n_2}, I''_{n_2})=0;$ $F_{qm_2}(I'_{n_2}, I''_{n_2})=0;$	
		$F_{pk_2}(U'_{l_2}, U''_{l_2})=0;$ $F_{qk_2}(U'_{l_2}, U''_{l_2})=0;$
		...
		$F_{pm_N}(I'_{n_N}, I''_{n_N})=0;$ $F_{qm_N}(I'_{n_N}, I''_{n_N})=0;$
		$F_{pk_N}(U'_{l_N}, U''_{l_N})=0$ $F_{qk_N}(U'_{l_N}, U''_{l_N})=0;$

(37)

В каждом блоке формы (37) представлены эквивалентные уравнения соответствующих подсистем. Верхние левые системы уравнений удобно применять для узлов типа $P-Q$, т.е. заданы активные и реактивные мощности узлов, которые могут быть как стационарными, так и нагрузочными узлами. Нижние правые системы уравнений удобно применять для узлов типа $P-U$, т.е. заданы активные мощности и модули напряжений узлов, которые могут быть только стационарными узлами.

Полученную модель в форме (37) удобнее применять в тех случаях, когда, кроме базисного узла, остальные узлы (как станционные, так и нагрузочные) являются узлами типа $P-Q$.

Решение системы эквивалентных уравнений. Полученные системы нелинейных алгебраических уравнений решаем методом Ньютона—Рафсона. Применяя к верхней левой системе нелинейных алгебраических уравнений (первого блока) итерационный метод Ньютона—Рафсона, получим соответствующее рекуррентное выражение:

$$\begin{bmatrix} l'_{m_1} \\ l'_{m_1} \end{bmatrix}^{H+1} = \begin{bmatrix} l'_{m_1} \\ l''_{m_1} \end{bmatrix}^H - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{pm_1}}{\partial l'_{n_1}} & \frac{\partial F_{pm_1}}{\partial l'_{n_1}} \\ \frac{\partial F_{qm_1}}{\partial l'_{n_1}} & \frac{\partial F_{qm_1}}{\partial l'_{n_1}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_{pm_1}(l'_{n_1}, l'_{n_1}) \\ F_{qm_1}(l'_{n_1}, l'_{n_1}) \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Относительно нижней правой системы нелинейных алгебраических уравнений (второго бло-

ка) рекуррентное выражение Ньютона—Рафсона примет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} u'_{k_1} \\ u''_{k_1} \end{bmatrix}^{H+1} = \begin{bmatrix} u''_{k_1} \\ u'_{k_1} \end{bmatrix}^H - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{pk_1}}{\partial U'_{l_1}} & \frac{\partial F_{pk_1}}{\partial U''_{l_1}} \\ \frac{\partial F_{qk_1}}{\partial U'_{l_1}} & \frac{\partial F_{qk_1}}{\partial U''_{l_1}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_{pk_1}(U'_{l_1}, U''_{l_1}) \\ F_{qk_1}(U'_{l_1}, U''_{l_1}) \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Аналогичные рекуррентные выражения необходимо написать для второй, третьей и последующих подсистем. Для последней N-й подсистемы рекуррентные выражения будут:

$$\begin{bmatrix} I'_{m_N} \\ I''_{m_N} \end{bmatrix}^{H+1} = \begin{bmatrix} I'_{m_N} \\ I''_{m_N} \end{bmatrix}^H - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{pm_N}}{\partial I'_{n_k}} & \frac{\partial F_{pm_N}}{\partial I'_{n_N}} \\ \frac{\partial F_{qm_N}}{\partial I'_{n_k}} & \frac{\partial F_{qm_N}}{\partial I'_{n_N}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_{pm_N}(I'_{n_N}, I'_{n_N}) \\ F_{qm_N}(I'_{n_N}, I'_{n_N}) \end{bmatrix}; \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} U'_{kN} \\ U''_{kN} \end{bmatrix}^{N+1} = \begin{bmatrix} U''_{kN} \\ U''_{kN} \end{bmatrix}^N - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{pkN}}{\partial U'_{kN}} & \frac{\partial F_{pkN}}{\partial U''_{kN}} \\ \frac{\partial F_{qkN}}{\partial U'_{kN}} & \frac{\partial F_{qkN}}{\partial U''_{kN}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_{pmN}(I'_{kN}, I''_{kN}) \\ F_{qkN}(I'_{kN}, I''_{kN}) \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Частные производные, входящие в вышеприведенные матрицы Якоби (38)–(40), определяются:

при одинаковых индексах, т.е. $n_i = m_i$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{pm_i}}{\partial I'_{m_i}} &= - \left[\frac{\partial P_{Bm_i}}{\partial I'_{m_i}} + 2R_{m_i, m_i} I'_{m_i} + \sum_{n_i}^{\Gamma_i} (R_{m_i, n_i} I'_{n_i} - x_{m_i, n_i} I''_{n_i}) \right]; \\ \frac{\partial F_{pm_i}}{\partial I''_{m_i}} &= - \left[\frac{\partial P_{Bm_i}}{\partial I''_{m_i}} + 2R_{m_i, m_i} I''_{m_i} + \sum_{n_i}^{\Gamma_i} (R_{m_i, n_i} I''_{n_i} - x_{m_i, n_i} I'_{n_i}) \right]; \\ \frac{\partial F_{qm_i}}{\partial I'_{m_i}} &= - \left[\frac{\partial Q_{Bm_i}}{\partial I'_{m_i}} + 2x_{m_i, m_i} I'_{m_i} + \sum_{n_i}^{\Gamma_i} (R_{m_i, n_i} I'_{n_i} + x_{m_i, n_i} I'_{n_i}) \right]; \\ \frac{\partial F_{qm_i}}{\partial I''_{m_i}} &= - \left[\frac{\partial Q_{Bm_i}}{\partial I''_{m_i}} + 2x_{m_i, m_i} I''_{m_i} + \sum_{n_i}^{\Gamma_i} (R_{m_i, n_i} I''_{n_i} - x_{m_i, n_i} I'_{n_i}) \right]; \end{aligned} \right\} (42)$$

при разных индексах, т.е. $n_i \neq m_i$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{pm_i}}{\partial I'_{n_i}} &= -(R_{m_i, n_i} I'_{m_i} + x_{m_i, n_i} I''_{m_i}); \\ \frac{\partial F_{pm_i}}{\partial I''_{n_i}} &= -(R_{m_i, n_i} I''_{m_i} - x_{m_i, n_i} I'_{m_i}); \\ \frac{\partial F_{qm_i}}{\partial I'_{n_i}} &= -(-R_{m_i, n_i} I'_{m_i} + x_{m_i, n_i} I'_{m_i}); \\ \frac{\partial F_{qm_i}}{\partial I''_{n_i}} &= -(R_{m_i, n_i} I'_{m_i} + x_{m_i, n_i} I''_{m_i}). \end{aligned} \right\} (43)$$

Частные производные, входящие в матрицу Якоби рекуррентного выражения типа (39)–(41), определяются из следующих выражений.

При одинаковых индексах, т.е. $l_i = k_i$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{pk_i}}{\partial U'_{k_i}} &= - \left[\frac{\partial P_{Bk_i}}{\partial U'_{k_i}} + 2g_{k_i, k_i} U'_{k_i} + \sum_{l_i}^{\Gamma_i + H_i} (g_{k_i, l_i} U'_{l_i} - b_{k_i, l_i} U''_{l_i}) \right]; \\ \frac{\partial F_{pk_i}}{\partial U''_{k_i}} &= - \left[\frac{\partial P_{Bk_i}}{\partial U''_{k_i}} + 2g_{k_i, k_i} U''_{k_i} + \sum_{l_i}^{\Gamma_i + H_i} (g_{k_i, l_i} U'_{l_i} + b_{k_i, l_i} U'_{l_i}) \right]; \\ \frac{\partial F_{qk_i}}{\partial U'_{k_i}} &= - \left[\frac{\partial Q_{Bk_i}}{\partial U'_{k_i}} - 2b_{k_i, k_i} U'_{k_i} + \sum_{l_i}^{\Gamma_i + H_i} (-g_{k_i, l_i} U'_{l_i} - b_{k_i, l_i} U'_{l_i}) \right]; \\ \frac{\partial F_{qk_i}}{\partial U''_{k_i}} &= - \left[\frac{\partial Q_{Bk_i}}{\partial U''_{k_i}} - 2b_{k_i, k_i} U''_{k_i} + \sum_{l_i}^{\Gamma_i + H_i} (g_{k_i, l_i} U'_{l_i} - b_{k_i, l_i} U'_{l_i}) \right]. \end{aligned} \right\} (44)$$

При разных индексах, т.е. $l_i \neq k_i$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{pk_i}}{\partial U'_{l_i}} &= -(g_{k_i, l_i} U'_{k_i} + b_{k_i, l_i} U''_{k_i}); \\ \frac{\partial F_{pk_i}}{\partial U''_{l_i}} &= -(g_{k_i, l_i} U''_{k_i} - b_{k_i, l_i} U'_{k_i}); \\ \frac{\partial F_{qk_i}}{\partial U'_{l_i}} &= -(g_{k_i, l_i} U'_{k_i} - b_{k_i, l_i} U'_{k_i}); \\ \frac{\partial F_{qk_i}}{\partial U''_{l_i}} &= -(g_{k_i, l_i} U'_{k_i} - b_{k_i, l_i} U''_{k_i}). \end{aligned} \right\} (45)$$

Разумеется, при этом необходимо строго учитывать индексы станционных подсистем.

С другой стороны,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P_{Bm_i}}{\partial I'_{m_i}} &= U'_{Bi} + \sum_{l_i}^{\Gamma_i + H_i} (B'_{m_i, l_i} U'_{l_i} - B''_{m_i, l_i} U'_{l_i}); \\ \frac{\partial P_{Bm_i}}{\partial I''_{m_i}} &= U''_{Bi} + \sum_{l_i}^{\Gamma_i + H_i} (B'_{m_i, l_i} U'_{l_i} + B''_{m_i, l_i} U'_{l_i}); \\ \frac{\partial Q_{Bm_i}}{\partial I'_{m_i}} &= U''_{Bi} + \sum_{l_i}^{\Gamma_i + H_i} (B'_{m_i, l_i} U'_{l_i} + B''_{m_i, l_i} U'_{l_i}); \\ \frac{\partial Q_{Bm_i}}{\partial I''_{m_i}} &= -U'_{Bi} - \sum_{l_i}^{\Gamma_i + H_i} (B'_{m_i, l_i} U'_{l_i} - B''_{m_i, l_i} U'_{l_i}) \end{aligned} \right\} (46)$$

и затем получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P_{Bk_i}}{\partial U'_{k_i}} &= I'_{Bi} + \sum_{n_i}^{\Gamma_i} (C'_{k_i, n_i} I'_{n_i} - C''_{k_i, n_i} I''_{n_i}); \\ \frac{\partial P_{Bk_i}}{\partial U''_{k_i}} &= I''_{Bi} + \sum_{n_i}^{\Gamma_i} (C'_{k_i, n_i} I''_{n_i} + C''_{k_i, n_i} I'_{n_i}); \\ \frac{\partial Q_{Bk_i}}{\partial U'_{k_i}} &= -I''_{Bi} - \sum_{n_i}^{\Gamma_i} (C'_{k_i, n_i} I'_{n_i} + C''_{k_i, n_i} I'_{n_i}); \\ \frac{\partial Q_{Bk_i}}{\partial U''_{k_i}} &= I'_{Bi} + \sum_{n_i}^{\Gamma_i} (C'_{k_i, n_i} I'_{n_i} - C''_{k_i, n_i} I''_{n_i}). \end{aligned} \right\} (47)$$

Имея аналитические выражения частных производных, входящих в матрицы Якоби приведенных ранее рекуррентных форм, можно перейти к организации итерационного процесса.

Организация итерационного процесса. Этот процесс организуется сначала внутри первой подсистемы, затем между радиально связанными подсистемами.

При заданной исходной информации относительно независимых узлов ЭЭС, принимая, что узловое комплексно-сопряженное напряжение равно базисному напряжению $\hat{U}_B = U_B$, определяются значения токов $I_{i1}, I_{i2}, \dots, I_{iN}$. Затем определяем значения частных производных, входящих в матрицу Якоби выражения (38).

Устанавливая новые значения токов I'_m и I''_m , переходим к определению значений частных производных, входящих в матрицу Якоби рекуррентного выражения (39).

При этом, определяя новые значения напряжений U'_{k_i} и U''_{k_i} , переходим к вычислению частных производных, входящих в матрицу Якоби второй подсистемы, и т.д.

На последнем этапе определяем значения частных производных, входящих в матрицу Якоби выражения (40). Определяя новые значения I'_{m_N}, I''_{m_N} , переходим к определению значений частных производных, входящих в (41).

Определяем новые численные значения U'_{k_N}, U''_{k_N} , этим завершается первая итерация. После первой итерации определяются значения комплексных напряжений и токов всех узлов исследуемой ЭЭС:

$$\dot{I}_i = (\dot{I}_{i_1}, \dot{I}_{i_2}, \dots, \dot{I}_{i_N});$$

$$\dot{U}_i = (\dot{U}_{i_1}, \dot{U}_{i_2}, \dots, \dot{U}_{i_N}).$$

Итерационный процесс считается завершенным, когда обеспечивается заданная точность по небалансам мощностей в узлах ЭЭС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хачатрян В.С. К методам расчета собственных и взаимных сопротивлений сложных энергосистем. — Электричество, 1964, № 1.
2. Happ Н.Н. Diakoptics and network. — New York and London: Akademic Press, 1971.
3. Happ Н.Н. Z-diakoptics, torn subdivisions radially attached. — Transactions IEEE, 1967, PAS-86, № 6.
4. Brameller A.A., John M.N., Scott M.R. Practical diakoptics for electrical networks. — London: Chapman and Hall, 1969.
5. Хачатрян В.С. Метод и алгоритм расчета установившихся режимов электроэнергетических систем. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1973, № 4.
6. Хачатрян В.С. Определение установившихся режимов больших электроэнергетических систем с применением метода Ньютона—Рафсона. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1974, № 4.
7. Хачатрян В.С. Определение установившихся режимов больших электроэнергетических систем методом подсистем. — Электричество, 1974, № 5.
8. Хачатрян В.С., Балабекян М.А. Автоматизация разработки больших систем на радиально связанные оптимальные

подсистемы. — Электричество, 1977, № 9.

9. Гераскин О.Т. Экспериментальные исследования С-формы уравнений установившихся режимов больших электроэнергетических систем. — Изв. вузов СССР. Энергетика, 1985, № 12.

10. Гераскин О.Т. Установившиеся режимы в больших электроэнергетических системах. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1982, № 1.

11. Гераскин О.Т., Селенкова Т.Г. Основные матричные уравнения установившихся режимов больших электроэнергетических систем. — Изв. вузов СССР. Энергетика, 1994, № 5, 6.

12. Хачатрян В.С., Этмекчян Э.А. Развитие гибридного метода расчета установившегося режима электрической системы. — Электричество, 1991, № 1.

[16.12.97]

Авторы: Хачатрян Варос Саркисович окончил электротехнический факультет Ереванского политехнического института (ЕрПИ, ныне Государственный инженерный университет Армении — ГИУА) в 1957 г. В 1974 г. защитил докторскую диссертацию по теме «Методы расчета установившихся и оптимальных режимов больших электроэнергетических систем» в Московском энергетическом институте (МЭИ). Заведующий кафедрой электроэнергетики ГИУА.

Этмекчян Элионора Аветисовна окончила энергетический факультет ЕрПИ в 1980 г. В 1988 г. защитила кандидатскую диссертацию по теме «Расчет и коррекция установившихся режимов электроэнергетических систем» в МЭИ. Начальник отдела инвестиционной компании «ВЭОИнвест».

Бадалян Норайр Петикович окончил факультет технической кибернетики ЕрПИ в 1980 г. Стажер-исследователь кафедры электроэнергетики ГИУА.

К ЧИТАТЕЛЯМ ЖУРНАЛА «Электричество»

Бесплатно получить оглавления нашего журнала можно через электронные сети. Эту услугу оказывает служба ИНФОМАГ, организованная в Московском физико-техническом институте. Все материалы службы ИНФОМАГ доступны в режиме ON-LINE через сервер РосНИИРОС по следующим URL:

<http://www.ripn.net>

<gopher://gopher.ripn.net>

Для получения материалов службы ИНФОМАГ по подписке через электронную почту следует направить письмо с командой

HELP по адресу ims@ripn.net

Полная информация о службе ИНФОМАГ может быть получена в ответ на команду HELP, направленную по адресу infomag@lgrant.mipt.msk.su

Использование локального преобразования Фурье для математического моделирования синхронных машин с вентильными системами возбуждения

КУЗНЕЦОВ В.А., ФЕДОТОВ А.И.

Предложен метод операционного исчисления на основе локального преобразования Фурье. Он обеспечивает формирование разностных уравнений синхронных машин с вентильными возбудителями относительно макропроцессов, выводя из рассмотрения локальные переходные процессы, связанные с коммутацией вентилей. Нелинейные члены уравнений имеют относительно малый вес и могут быть определены в численном виде по параметрам установившегося режима.

Ключевые слова: синхронная машина, вентильный выпрямитель, преобразование Фурье, операционное исчисление

Математическое моделирование режимов синхронных машин с системами возбуждения, содержащими вентильные преобразователи, сводится в конечном счете к проблеме моделирования синхронного генератора, работающего на выпрямительную нагрузку (система СГ—ВН). Численные методы расчета режимов таких объектов отличаются большим разнообразием. Аналитические же методы ограничиваются практически единственной моделью, основанной на введении понятий «неискаженная ЭДС» и «индуктивность коммутации». Теория «неискаженной ЭДС» со всей полнотой изложена в [1], где сформулированы основные ее допущения: выпрямленный ток полностью сглажен, «неискаженная ЭДС» рассчитывается по основным гармоникам, статическая внешняя характеристика выпрямителя распространяется на динамические режимы.

В системе СГ—ВН, согласно [1], в действительности неискаженной, т.е. не зависящей от коммутационных процессов, является сверхпереходная ЭДС E'' . Но поскольку получаемые при этом расчетные формулы достаточно громоздки, применяют упрощающий прием и приводят их к виду, который аналогичен формулам для работающего на выпрямительную нагрузку трансформатора с индуктивностями, внесенными в его вторичные цепи. Как результат такого эквивалентирования в соответствующие выражения вводится «неискаженная ЭДС» E_y , определяемая по основным гармоникам фазных токов и приложенная за «индуктивностью коммутации» x_y . В результате введения названных параметров записывается внешняя характеристика преобразователя, используемая для связи уравнений генератора и выпрямительной нагрузки. Вычисления по гладким параметрам позволяют су-

An operational calculus method on the basis of a Fourier transformation is proposed. The method makes it possible to form difference equations of synchronous machines with valve exciters taking into account macroprocesses and ignoring local transients connected with a valve commutation. Non-linear terms of the equations are relatively small and can be determined numerically using the parameters of steady state operating conditions.

Key words: synchronous machine, valve exciter, Fourier transformation, operational calculus

щественно увеличивать шаг расчета по сравнению с методом, использующим мгновенные значения переменных на интервалах постоянства структуры преобразователя. Тем самым в значительной мере упрощается проблема интегрирования жестких дифференциальных уравнений, к которым относятся уравнения системы СГ—ВН.

В [2] было отмечено, что расчет по «неискаженной ЭДС» установившихся режимов синхронного генератора, работающего на выпрямительную нагрузку, приводит к ошибке в значении выпрямленного тока до 20% при нагрузке, близкой к номинальной. В [3] приведены результаты исследований динамических режимов системы СГ—ВН и указано, что ошибка в расчетах зависит от скорости изменения выпрямленного тока v : она возрастает от 5% при $v=0,4$ отн.ед./с до 20% при $v=1,6$ отн.ед./с. Таким образом, для современных возбудительных систем, характеризующихся высокой скоростью изменения выпрямленного тока, требуется разработка более точных аналитических моделей.

Достоинства аналитических методов анализа проявятся только в случае выведения из непосредственного рассмотрения «шумовых» эффектов, связанных с локальными переходными процессами при коммутации очередных вентилей преобразователя. При этом необходимо сохранить адекватность модели отображаемым ею процессам как в статике, так и в динамике.

Привлекательность математических моделей на базе разностных уравнений для описания переходных и установившихся режимов в системах СГ—ВН заключается в том, что в случае удачного формирования такой модели исследование несимметричных режимов КЗ (интервал коммутации) и неполнофазных режимов (межкомму-

тационный интервал) заменяется исследованием на дискретной модели эквивалентных симметричных режимов. Дискретная математическая модель синхронного генератора с выпрямительной нагрузкой, построенная относительно отсчетов искоемых переменных в коммутационных точках (моментов подачи сигналов управления на очередной тиристор выпрямителя), обеспечивает изучение глобального переходного процесса, что и является основным предметом исследования. Поскольку в момент начала каждого очередного интервала повторяемости выпрямителя электрическая схема при выборе «шагающей» системы координат оказывается в одинаковом состоянии (при измененных начальных условиях), то система разностных уравнений, связывая между собой эти начальные условия, будет описывать квазисимметричные процессы.

Дискретная модель электрической цепи с управляемым преобразователем при учете коммутационных процессов может быть сформирована не единственным образом. Результат будет зависеть от того, какой математический аппарат применен и какие допущения положены в основу моделирования. Следует пояснить, что сам исследуемый объект, если только исходные допущения одинаковы, описывается однозначно при использовании любого математического аппарата. Проблема заключается в целесообразности такого математического представления объекта

$$O\{[x], [y]\} = L\{[x]\} \cup R\{[x], [y]\}, \quad (1)$$

где $[x]$ — матрица искоемых переменных; $[y]$ — матрица нелинейных параметров, чтобы его линейная (или кусочно-линейная) часть $L\{[x]\}$ обеспечивала возможно более полное представление свойств объекта, а нелинейная часть $R\{[x], [y]\}$ позволяла либо ее вообще отбрасывать, либо учитывать упрощенно, например, параметрами установившегося режима. Понятно, что в такой постановке задачи создания математической модели $O\{[x], [y]\}$ выделить $L\{[x]\}$ и $R\{[x], [y]\}$ можно разными способами. Формирование модели вида (1) перекликается с идеями моделирования на основе функций с гибкой структурой [4]. Однако данный математический аппарат не приспособлен для исследования электрических цепей с периодическими параметрами. В [4] приводятся примеры успешного аналитического решения некоторых таких уравнений, но в целом требуется использование численных методов расчета. Дискретные модели электрических цепей с преобразователями наиболее близко согласуются с требованиями модели (1), поскольку изначально ориентированы на описание макропроцессов при косвенном учете процессов, происходящих внутри интервала дискретизации

и вызванных конечной длительностью коммутации вентилей.

Дискретизация непрерывных процессов в электрических цепях с вентильными преобразователями может быть выполнена разными способами. Наиболее очевидный из них — решение дифференциальных уравнений внутри интервалов дискретизации, совмещенных с интервалами повторяемости преобразователя. При конечной длительности коммутационных процессов получаемые в итоге разностные уравнения для электрических цепей с постоянными параметрами содержат нелинейную часть $R\{[x], [y]\}$ достаточно сложного и весомого вида, что делает ее практически не поддающейся корректной линеаризации. В [5] для электрической схемы с инвертором тока приведен метод составления разностных уравнений прямым решением дифференциальных уравнений, но при мгновенной коммутации вентилей преобразователя. Для систем СГ—ВН такой способ неприемлем не только по причине конечной длительности коммутационных процессов, но и из-за необходимости решать дифференциальные уравнения несимметричных КЗ.

В [6] было доказано, что разностные уравнения преобразователя при учете длительности коммутационных процессов могут быть сформированы математически строго только при выполнении условия: отношение активных и индуктивных сопротивлений на сторонах переменного и выпрямленного токов должно быть одинаковым. Во всех остальных случаях разностные уравнения становятся нелинейными, зависящими от длительности коммутации.

Поэтому в [3] и [7] реализован другой подход — локальное интегральное преобразование [8]. Суть его применительно к системе СГ—ВН состоит в том, что к дифференциальным уравнениям, записанным на интервале повторяемости преобразователя, применяется интегрирование. В результате полученные уравнения содержат дискретные переменные двух видов: средние значения искоемых величин (так называемые ступенчатые изображения) и их отсчеты в коммутационных точках. Решать такие уравнения следует по методике [8]. Однако при наличии демпферных обмоток в рамках локального интегрального преобразования не удастся установить связь между ступенчатыми изображениями токов I_{ns} и их отсчетами I_{n1} на m -м интервале повторяемости преобразователя. Предложенная в [3] формула связи для токов

$$I_{ns}^{(m)} = (I_{n1}^{(m+1)} + I_{n1}^{(m)})/2, \quad n = f, 1d, 1q$$

может быть применена только к току обмотки возбуждения при условии, что его пульсации

незначительны, но никак не к токам демпферных обмоток. Введение в уравнения свёрхпереходных ЭДС приводит к их усложнению и снижению точности расчетов. В [9, 10] показано, как можно получить уравнения в ступенчатых изображениях системы СГ—ВН, не привлекая понятия неискаженной ЭДС, и представлены результаты расчетов. При этом для записи дискретных уравнений роторных контуров использованы локальные ряды Фурье. Конечные выражения получены при пренебрежении малыми параметрами. В тех случаях, когда таковые отсутствуют, необходимы весьма громоздкие промежуточные операции по суммированию ряда коэффициентов. Между тем, переход от локальных рядов Фурье к локальному преобразованию Фурье позволяет формализовать промежуточные операции по составлению математической модели системы СГ—ВН и предоставляет ряд новых возможностей по аналитическим и численным исследованиям других задач электротехники.

Введение локального преобразования Фурье можно рассматривать как продолжение исследований в области дискретных операторных методов [8].

Определим локальные преобразования Фурье (ЛПФ), или F -преобразование, непрерывной функции $f(t)$ следующим образом:

$$F(m, k) = \frac{2}{h} \int_{t^{(m)}}^{t^{(m)}+h} f(t) e^{-jk(t-t^{(m)})} dt, \\ k = \frac{2\pi n}{h}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2)$$

В отличие от [13] интервал h не увязывается с длительностью переходного процесса.

Формулу (2) можно представить в таком виде:

$$F(m, k) = F^c(m, k) + jF^s(m, k),$$

где

$$F^c(m, k) = \frac{2}{h} \int_{t^{(m)}}^{t^{(m)}+h} f(t) \cos kt' dt; \\ F^s(m, k) = -\frac{2}{h} \int_{t^{(m)}}^{t^{(m)}+h} f(t) \sin kt' dt; \\ t' = t - t^{(m)}.$$

На функцию $f(t)$ накладываются те же ограничения, что и в преобразовании Лапласа: $f(t) < Me^{at}$, т.е. менее жесткие, чем для обычного преобразования Фурье, которое задается формулой

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Назовем $F(m, k)$ комплексным локальным спектром функции $f(t)$. По локальным спектрам может быть восстановлена исходная функция

$$f(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{F(m, 0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F(m, k) \right) e^{j\omega(t-t^{(m)})} K(m, t) \right\}; \\ k = \frac{2\pi n}{h}; \quad t \neq \frac{2\pi n}{h} h;$$

$K(m, t)$ — функциональный прерыватель, определяемый формулой

$$K(m, t) = 1[t - t^{(m)}] - 1[t - t^{(m)} - h],$$

где $1[\theta]$ — единичная функция.

На границах интервалов дискретизации

$$f(t^{(m)}) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} F(m, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(m, k) \right\} - \frac{1}{2} \Delta f^{(m)} = \\ = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(m, k) - \Delta f^{(m)} \right\} = \frac{1}{2} F(m, 0) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} F^c(m, k) - \frac{1}{2} \Delta f^{(m)}, \quad (3)$$

где $\Delta f^{(m)} = f(t^{(m)} + h) - f(t^{(m)})$, $k = 2\pi n/h$.

Формулу (3) назовем дискретным оригиналом или дискретой функции $f(t)$. Она устанавливает связь между дискретными переменными $f(t^{(m)})$ и непрерывными переменными, представляемыми локальным рядом Фурье.

В приложении приведены основные правила использования F -преобразования.

Из структурного подобия (П-11) F -преобразования и преобразования Лапласа следует важный вывод. Для того чтобы линейную систему дифференциальных уравнений вида (П-8) преобразовать к дискретам Фурье, достаточно воспользоваться результатами преобразования Лапласа, где следует осуществить подстановку вида (П-11). Поскольку по преобразованию Лапласа имеется обширная литература, то запись уравнений с помощью F -преобразования не вызовет никаких затруднений. Соответственно и решение уравнений (П-9) в F -изображениях будет иметь такой же вид, как и уравнений (П-10) в операторных изображениях по Лапласу. Следовательно, можем записать

$$[F(m, k)] \rightleftharpoons [X(p)]. \quad (4)$$

При исследовании электрических цепей операторным методом по Лапласу не всегда прибегают к непосредственному обращению матрицы

$([b]+p[a])$ в уравнениях (П-10). Часто по известным правилам преобразования электрических схем удастся быстро найти операторные сопротивления или проводимости и выразить через них искомые параметры. Теперь на основании соотношения эквивалентности (4) это правило распространено и на F -преобразование. Однако при этом возникает проблема.

В отличие от разложения функции в ряд Фурье в данном случае восстановить непосредственно функцию по ее локальному спектру не представляется возможным, так как в правой части решения уравнений (П-9) будут присутствовать локальные разности, которые еще не определены. Поэтому необходимо выполнить суммирование всего локального спектра по формуле (3). Эта операция может быть выполнена и в численном виде. Эффективность численных алгоритмов, построенных на основе дискретизации непрерывных процессов с помощью локальных рядов Фурье, обоснована в [11]. Однако в ряде случаев по простому правилу могут быть сразу же получены результаты этого суммирования, для чего следует продолжить исследование эквивалентного соотношения (4).

Решение уравнений (П-9) имеет следующий вид:

$$[F(m, k)] = \frac{1}{N(jk)} [G(jk)] \times \\ \times \{ [F_c(m, k)] + (2/h) [a] [\Delta x^{(m)}] \}, \quad (5)$$

где $N(jk)$ — многочлен относительно jk степени n ; $[F_c(m, k)] = F\{[c]\}$ — F -изображение правой части уравнений (П-8).

Подстановка правой части выражения (5) под знак суммы формулы (3) приводит к суммированию бесконечных рядов следующего вида:

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{M(jk)}{N(jk)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D(jk). \quad (6)$$

Из формул (П-3), (П-6) и (П-7) следует, что первое слагаемое выражения (5) может образовывать и конечную последовательность по k . В этом случае выполняется прямое суммирование.

Согласно (6) в области изображений по Лапласу $D(p) = M(p)/N(p)$. В общем случае не обязательно, чтобы $M(p)$ и $N(p)$ были полиномами по p . Достаточно, чтобы вычеты комплексной функции $D(p)$ определялись только корнями знаменателя $N(p)$. Для суммирования рядов вида (6) воспользуемся методикой [12].

Рассмотрим функцию комплексного переменного вида $\varphi(p) = j\pi D(p) \operatorname{ctg} j\pi p$, которая имеет в качестве полюсов $D(p)$ (т.е. корни $N(p)$) $a_1, a_2, \dots, a_l$ с вычетами $b_1, b_2, \dots, b_l$. Полюсами функции

$\operatorname{ctg} j\pi p$ будут значения $0, \pm j, \pm 2j, \dots, \pm n$. Для электрических цепей условие $\lim_{|p| \rightarrow \infty} pD(p) = 0$ обычно выполняется, поэтому на основании теоремы о вычетах [11] можем записать:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} D(jk) = -j\pi (b_1 \operatorname{ctg} j\pi a_1 + \dots + b_l \operatorname{ctg} j\pi a_l) = \\ = -j\pi \sum_{i=1}^l b_i \operatorname{ctg} j\pi a_i = -\pi \sum_{i=1}^l b_i \operatorname{ctg} \pi a_i. \quad (7)$$

Рассмотрим случай наличия кратных корней. Пусть

$$D(jk) \approx D(p) = h(p)/(p-a)(p-a-\varepsilon),$$

тогда $b_1 = h(a)/(-\varepsilon)$, $b_2 = h(a+\varepsilon)/\varepsilon$. Устремим ε к нулю, в соответствии с (7) получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} D(jk) = -j\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{h(a+\varepsilon)}{\varepsilon} \operatorname{ctg} j\pi (a+\varepsilon) - \right. \\ \left. - \frac{h(a)}{\varepsilon} \operatorname{ctg} j\pi a \right) = -j\pi \frac{d[h(p) \operatorname{ctg} j\pi p]}{dp} \Big|_{p=a}.$$

Если повторить выводы, используя разложение функции $h(a+\varepsilon) \operatorname{ctg} j\pi (a+\varepsilon)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a , но для полюсов более высокой кратности, то получаем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} D(jk) = -j\pi \sum_{i=1}^l \frac{d^{(i-1)} [h(p) \operatorname{ctg} j\pi p]}{(i-1)! dp^{(i-1)}} \Big|_{p=a_i},$$

где полюс a имеет кратность l .

Таким образом, для перехода от уравнений в области F -изображений к уравнениям в конечных разностях достаточно воспользоваться формулой (7), которая может быть названа эквивалентом формулы обращения в операционном исчислении по Лапласу. Особенность же обращения заключается в том, что по Лапласу сразу определяется искомая функция во временной области, а восстановление дискретной функции по (7) приводит к уравнениям в конечных разностях. Иными словами, предложенный метод локального преобразования Фурье служит инструментом для формирования уравнений в конечных разностях. Численные его аспекты представлены в [11]. Аналитические достоинства проявляются при математическом моделировании нелинейных объектов в соответствии с видом (1).

В качестве примера реализации описанного метода рассмотрим расчет переходного процесса при включении источника синусоидального напряжения на активно-индуктивную нагрузку r, x . Процесс описывается дифференциальным уравнением:

$$x \frac{di}{d\theta} + ri = U \sin(\theta - \alpha), \quad i(0) = I_0.$$

Положим $h=2\pi$, тогда по формулам приложения (П-6) и (П-7)

$$F\{\sin(\theta - \alpha)\} = U_F(jk) = \begin{cases} -j \exp(-j\alpha), & k=1; \\ j \exp(j\alpha), & k=-1; \\ 0, & |k| \neq 1. \end{cases}$$

Запишем исходное дифференциальное уравнение в области изображений по Лапласу

$$I(p) = \frac{U(p)}{r+px} + I_0 \frac{x}{r+px}.$$

Соответствующее F -изображение имеет вид

$$I^{(m)}(jk) = \frac{U_F(jk)}{r+jkx} - \Delta I_m \frac{x}{\pi(r+jkx)}.$$

По (3) и (7) с учетом конечной последовательности F -изображения напряжения получаем

$$I_l^{(m)} = \frac{U_j \exp(-\alpha)}{2(r-jx)} + \frac{-U_j \exp(-\alpha)}{2(r+jx)} - j\pi \left[-\frac{\Delta I^{(m)}}{2\pi x} \operatorname{ctg} \left(-j\pi \frac{r}{x} \right) \right] - \frac{\Delta I^{(m)}}{2} = -\frac{U}{2} \sin(\alpha + \varphi) - \frac{\Delta I^{(m)}}{2} \frac{\exp(2\pi r/x) + 1}{\exp(2\pi r/x) - 1} - \frac{\Delta I^{(m)}}{2},$$

где $z = \sqrt{r^2 + x^2}$, $\varphi = \arctg(x/r)$.

Решая полученное разностное уравнение, находим

$$I_l^{(m)} = -Uz^{-1} \sin(\alpha + \varphi) + [I_0 + Uz^{-1} \sin(\alpha + \varphi)] \times \exp(-2\pi m r/x), \quad m=1, 2, \dots$$

Данный пример имеет значение только как иллюстрация взаимосвязи между операционным исчислением по Лапласу и локальным преобразованием Фурье.

Рассмотрим применение предложенного математического аппарата для формирования уравнений синхронного генератора с независимым тиристорным возбуждением относительно дискретных переменных.

Поскольку при моделировании переходных процессов в синхронных генераторах с вентиляльными возбудителями наибольшую сложность представляет описание преобразователя, рассмотрим сначала задачу в следующей постановке: синхронный генератор подключен через управляемый преобразователь к автономной нагрузке. Примем, что электрическая машина имеет по одному эквивалентному демпферному контуру в продольной и поперечной осях, обмотка возбуждения питается от независимого источника, частота вращения синхронная. Ось d опережает ось q . Угол управления α отсчитываем от нулевого значения соответствующих фазных ЭДС холостого хода. Управляемый преобразователь подключен к активно-индуктивной нагрузке

r_H, x_H . Вентили преобразователя считаем идеальными. Все основные допущения, относящиеся к синхронной машине, принимаем соответствующими ее описанию в модели Парка—Горева. Обозначения величин сохраняем согласно [9], где были записаны уравнения в дискретных переменных для электромагнитных переходных процессов в системе СГ—ВН с использованием локального интегрального преобразования (уравнение цепи выпрямителя) и локальных рядов Фурье (уравнения обмоток ротора). По отношению к цепи выпрямителя в настоящей статье подход сохранен, поэтому повторим соответствующее уравнение [9], представив его в виде уравнения динамической внешней характеристики выпрямителя:

$$U_{Hs}^{(m)} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} x_{ad} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) I_{fl}^{(m)} + \frac{3\sqrt{3}}{\pi} x_{ad} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) \times \\ \times I_{1dl}^{(m)} + \frac{3\sqrt{3}}{\pi} x_{aq} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) I_{1ql}^{(m)} - 2r_{Hs}^{(m)} - \\ - \left[\frac{3\gamma_m r}{2\pi} + \frac{3}{2\pi} (x_d + x_q) + \frac{3}{\pi} (x_d - x_q) \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) \right] I_{Hl}^{(m)} - \\ - \frac{3}{\pi} [x_d + x_q - (x_d - x_q) \cos 2\alpha] \Delta I_{Hl}^{(m)} + \frac{3\sqrt{3}}{\pi} x_{ad} \sin \alpha \Delta I_{fl}^{(m)} + \\ + \frac{3\sqrt{3}}{\pi} x_{ad} \sin \alpha \Delta I_{1d}^{(m)} - \frac{3\sqrt{3}}{\pi} x_{aq} \cos \alpha \Delta I_{1q}^{(m)}. \quad (8)$$

Уравнения обмоток ротора в [9] получены в конечно-разностном виде при пренебрежении малыми параметрами. Предложенное локальное преобразование Фурье позволяет получить разностные уравнения обмоток ротора без такого допущения.

Запишем уравнения обмоток ротора в мгновенных значениях переменных на m -м интервале повторяемости выпрямителя в соответствии с [9] в следующем виде:

для продольных обмоток ротора

$$\frac{d}{d\theta} \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3} x_{ad} \sin(\theta^{(m)} - \pi/3) i_H^{(m)} + x_f i_f^{(m)} + x_{ad} i_{1d}^{(m)} - \right. \\ \left. - K(\theta, m) \frac{2\sqrt{3}}{3} x_{ad} \sin(\theta^{(m)} + \pi/3) i_y^{(m)} \right] + r_f i_f^{(m)} = u_f^{(m)}, \\ \frac{d}{d\theta} \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3} x_{ad} \sin(\theta^{(m)} - \pi/3) i_H^{(m)} + x_{ad} i_f^{(m)} + x_{1d} i_{1d}^{(m)} - \right. \\ \left. - K(\theta, m) \frac{2\sqrt{3}}{3} x_{ad} \sin(\theta^{(m)} + \pi/3) i_y^{(m)} \right] + r_{1d} i_{1d}^{(m)} = 0; \quad (9)$$

для поперечной обмотки ротора

$$\frac{d}{d\theta} \left[\frac{2\sqrt{3}}{3} x_{aq} \cos(\theta^{(m)} - \pi/3) i_H^{(m)} + x_{1q} i_{1q}^{(m)} + K(\theta, m) \times \right. \\ \left. \times \frac{2\sqrt{3}}{3} x_{aq} \cos(\theta^{(m)} + \pi/3) i_y^{(m)} \right] + r_{1q} i_{1q}^{(m)} = 0. \quad (10)$$

Здесь

$$K(\theta, m) = 1[\theta^{(m)} - \alpha^{(m)}] - 1[\theta^{(m)} - \alpha^{(m)} - \gamma^{(m)}];$$

$$i_{\gamma}^{(m)}(\alpha^{(m)}) = i_{\text{H}}^{(m)}(\alpha^{(m)}) = I_{\text{Hl}}^{(m)}; \quad i_{\gamma}^{(m)}(\alpha^{(m)} + \theta) = 0$$

$$\text{при } \theta \in (\gamma^{(m)}; \alpha^{(m)} + \pi/3);$$

$\gamma^{(m)}$ — угол коммутации.

Представим (9) и (10) в общем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \{ [a_p] [i_p^{(m)}] + [a_n(\theta)] i_{\text{H}}^{(m)} + K(\theta, m) [a_{\gamma}(\theta)] i_{\gamma}^{(m)} \} + \\ + [b_p] [i_p^{(m)}] = [c^{(m)}], \end{aligned} \quad (11)$$

где $[i_p^{(m)}]$ — матрица-столбец токов продольных или поперечных роторных контуров.

Применим к (11) локальное преобразование Фурье. Исходя из вида матриц $[a_n(\theta)]$ и $[a_{\gamma}(\theta)]$ с учетом граничных условий для коммутационного тока i_{γ} нетрудно установить, что при $h = \pi/3$

$$\begin{aligned} F \left\{ \frac{d}{d\theta} \{ [a_n(\theta)] i_{\text{H}}^{(m)} + K(\theta, m) [a_{\gamma}(\theta)] i_{\gamma}^{(m)} \} \right\} = \\ = jkF \{ [a_n(\theta)] i_{\text{H}}^{(m)} + K(\theta, m) [a_{\gamma}(\theta)] i_{\gamma}^{(m)} \} + \\ + \frac{6}{\pi} [d_p] \Delta I_{\text{Hl}}^{(m)}; \quad [d_p] = [a_n(\alpha^{(m)} + h)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Допустим, что на локальном интервале дискретизации при интегрировании можно пренебречь изменением тока нагрузки, а для коммутационного тока принять линейную аппроксимацию, тогда

$$\begin{aligned} F \{ [a_n(\theta)] i_{\text{H}}^{(m)} + K(\theta, m) [a_{\gamma}(\theta)] i_{\gamma}^{(m)} \} = \\ = \{ [A_{\gamma}(k, m)] \} I_{\text{Hl}}^{(m)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Коэффициенты матрицы $[A_{\gamma}(k, m)]$ приведены в [9].

В итоге в области F -изображений с учетом соотношений (12) и (13) записываем уравнения (11) в следующем виде:

$$\begin{aligned} ([b_p] + jk[a_p]) [I_p(k, m)] + \frac{6}{\pi} [a_p] [\Delta I_{\text{pl}}^{(m)}] + j \frac{6k}{\pi} \times \\ \times [A_{\gamma}(k, m)] I_{\text{Hl}}^{(m)} + \frac{6}{\pi} [d_p] \Delta I_{\text{Hl}}^{(m)} = [c(k, m)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения общего вида (14) справедливы для любого числа продольных и поперечных демпферных обмоток на роторе синхронной машины. В рассматриваемом случае для одной продольной и одной поперечной демпферных обмоток имеем: для поперечной обмотки ротора $[c(k, m)] = c(k, m) = 0$ при любых m и k ; для продольных обмоток ротора полагаем напряжение u_f неизменным в пределах интервала дискретизации, тогда

$$[c(k, m)] = 0 \text{ при } k \neq 0; \quad [c(0, m)] = \begin{bmatrix} 2u_{fs}^{(m)} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решим систему (14) относительно $[I_p(k, m)]$ и

воспользуемся правилом эквивалентности (4):

$$\begin{aligned} [I_p(p)] = ([b_p] + 6p[a_p])^{-1} \left\{ [c^{(m)}(p)] - \frac{6}{\pi} [a_p] \times \right. \\ \left. \times [\Delta I_{\text{pl}}^{(m)}] - \frac{6}{\pi} [d_p] \Delta I_{\text{Hl}}^{(m)} - \frac{36p}{\pi} [A_{\gamma}(-j6p, m)] I_{\text{Hl}}^{(m)} \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Пользуясь формулой обращения (7) и подставляя результат в (3), получаем

$$\begin{aligned} [I_{\text{pl}}^{(m)}] = \frac{1}{2} [b_p]^{-1} [c(0, m)] - \frac{1}{2} \{ \text{cth}(\pi[a_p]^{-1}[b_p]/6) + \\ + [E] \} [\Delta I_{\text{pl}}^{(m)}] - \frac{1}{2} \text{cth}(\pi[a_p]^{-1}[b_p]/6) [a_p]^{-1} [d_p] \Delta I_{\text{Hl}}^{(m)} + \\ + [B(m)] I_{\text{Hl}}^{(m)}; \end{aligned} \quad (16)$$

$[E]$ — единичная матрица.

Через матрицу $[B(m)]$ обозначен результат суммирования коэффициентов A_{γ} , зависящих от принятой аппроксимации токов нагрузки и коммутации.

Для уравнений поперечной демпферной обмотки ротора $[a_p] = x_{1q}$, $[b_p] = r_{1q}$, $[d_p] = (2/\sqrt{3}) x_{aq} \cos \alpha$, и (16) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} I_{1ql}^{(m)} = -\frac{1}{2} \left[\text{cth} \left(\frac{\pi r_{1q}}{6x_{1q}} \right) + 1 \right] \Delta I_{1ql}^{(m)} - \frac{\sqrt{3} x_{aq}}{3x_{1q}} \cos \alpha \times \\ \times \text{cth} \left(\frac{\pi r_{1q}}{6x_{1q}} \right) \Delta I_{\text{Hl}}^{(m)} + B_{\text{Hl}q}(m) I_{\text{Hl}}^{(m)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для уравнений продольных обмоток ротора

$$[a_p] = \begin{bmatrix} x_f & x_{ad} \\ x_{ad} & x_{1d} \end{bmatrix}, \quad [b_p] = \begin{bmatrix} r_f & 0 \\ 0 & r_{1d} \end{bmatrix},$$

$$[c_p] = \begin{bmatrix} u_f^{(m)} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [B(m)] = \begin{bmatrix} B_{\text{Hf}}(m) \\ B_{1d}(m) \end{bmatrix},$$

$$[a_p]^{-1} = \frac{1}{x_f x_{1d}} \begin{bmatrix} x_{1d} & -x_{ad} \\ -x_{ad} & x_f \end{bmatrix},$$

$$[d_p] = -\frac{2\sqrt{3} x_{ad}}{3} \sin \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_f^{(m)} \\ I_{1d}^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{fs}^{(m)} / r_f \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \left\{ \text{cth}(\pi[a_p]^{-1}[b_p]/6) + [E] \right\} \times \\ \times \begin{bmatrix} \Delta I_f^{(m)} \\ \Delta I_{1d}^{(m)} \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3} x_{ad}}{3x_f x_{1d}} \sin \alpha \text{cth}(\pi[a_p]^{-1}[b_p]/6) \times \\ \times \begin{bmatrix} x_{1d} & -x_{ad} \\ -x_{ad} & x_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I_{\text{Hl}}^{(m)} \\ \Delta I_{\text{Hl}}^{(m)} \end{bmatrix} + I_{\text{Hl}}^{(m)} \begin{bmatrix} B_{\text{Hf}}(m) \\ B_{1d}(m) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

Сравнение выражений (17) и (18) с уравнениями, выведенными в [10], показывает, что

они совпадают, если активные сопротивления роторных контуров могут быть отнесены к малым параметрам.

Уравнения главного генератора в мгновенных значениях переменных общеизвестны:

$$[a] \frac{d[i_r]}{dt} + [b][i_r] = [c],$$

где $[i_r] = [i_{rd} \ i_{rf} \ i_{r1d} \ i_{rq} \ i_{r1q}]^T$, $[c] = [-u_{rd} \ u_{rf} \ 0 \ -u_{rq} \ 0]^T$;

$$[a] = \begin{bmatrix} x_d^r & x_{ad}^r & x_{ad}^r & 0 & 0 \\ x_{ad}^r & x_f^r & x_{ad}^r & 0 & 0 \\ x_{ad}^r & x_{ad}^r & x_{1d}^r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_q^r & x_{aq}^r \\ 0 & 0 & 0 & x_{aq}^r & x_{1q}^r \end{bmatrix};$$

$$[b] = \begin{bmatrix} r^r & 0 & 0 & x_q^r & x_{aq}^r \\ 0 & r_f^r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{1d}^r & 0 & 0 \\ -x_d^r & -x_{ad}^r & -x_{ad}^r & r^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{1q}^r \end{bmatrix}.$$

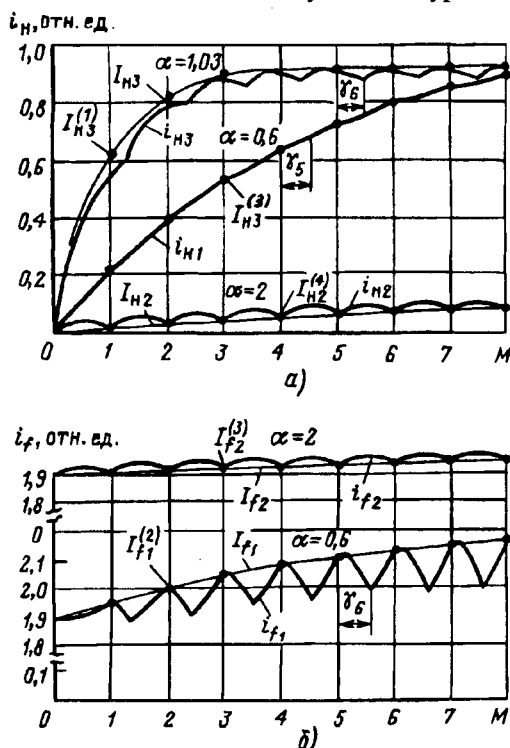
Применим к ним локальное преобразование Фурье, в результате получаем

$$[I_{r1}^{(m)}] = [b]^{-1} [c(m)] - (\text{cth}(\pi [a]^{-1} [b]/6) + [E]) \times \\ \times [\Delta I_{r1}^{(m)}]/2, \quad (19)$$

где $[c(m)] = [-U_{rds}^{(m)} \ U_{rfs}^{(m)} \ 0 \ -U_{rqs}^{(m)} \ 0]^T$.

Выражения получены в предположении, что на интервале дискретизации $u_{rd}^{(m)}$, $u_{rf}^{(m)}$, $u_{rq}^{(m)} = \text{const}$.

Для того чтобы связать между собой урав-



нения главного генератора и его тиристорного возбудителя, необходимо привести параметры вентильного генератора к тому же базису, который принят для главного генератора, тогда

$$(U_{H.6}/U_{fr.6}) U_{Hs}^{(m)} = k_{u6} U_{Hs}^{(m)} = U_{frs}^{(m)}; \quad (20)$$

$$(I_{H.6}/I_{fr.6}) I_{Hs}^{(m)} = k_{i6} I_{Hs}^{(m)} = I_{frs}^{(m)},$$

где $I_{H.6}$, $U_{H.6}$ — базисные параметры системы относительных единиц возбудительного генератора; $I_{fr.6}$, $U_{fr.6}$ — базисные параметры системы относительных единиц обмотки возбуждения главного генератора.

Таким образом, уравнения (8), (16)–(20) образуют замкнутую систему, позволяющую исследовать переходные и установившиеся режимы в синхронном генераторе совместно с его вентильным возбудителем. Ниже на численных примерах показаны результаты использования предложенных математических моделей.

На рис. 1 показано, что дискретные переменные точно отображают токи обмоток ротора вентильного генератора в коммутационных точках несмотря на их пульсацию. При необходимости форма тока в пределах любого локального интервала может быть восстановлена с помощью предложенного метода.

Как видно из рис. 2, в переходном процессе, где нет колебаний выпрямленного тока в пределах интервала повторяемости преобразователя, предложенная дискретная математическая модель главного генератора совместно с его вентильным возбудителем вполне корректна. На рис. 3 пред-

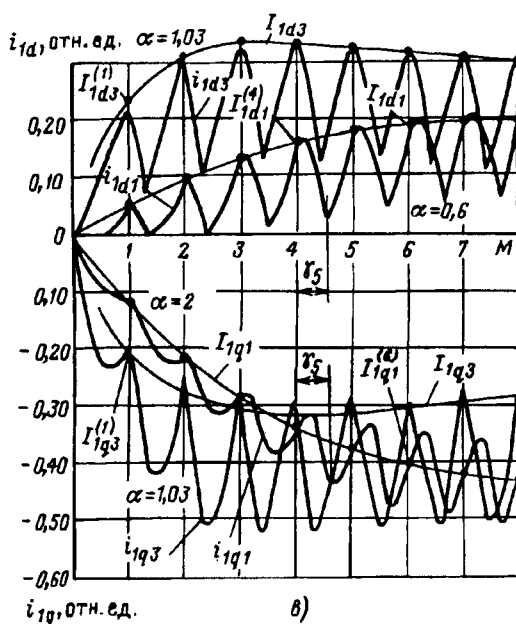


Рис. 1. Электромагнитные переходные процессы в системе СГ–ВН: а — ток в выпрямительной нагрузке; б — ток возбуждения; в — ток в продольной и поперечной демпферных обмотках

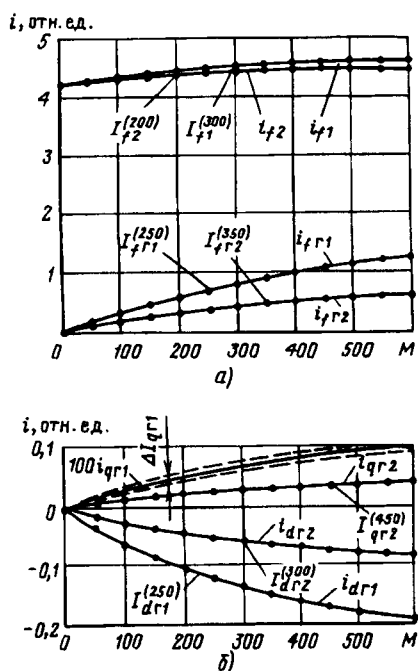


Рис. 2. Электромагнитные переходные процессы в синхронном генераторе и его возбудителе: а — токи возбуждения возбудителя (I_f) и главного генератора (I_{fg}); б — продольный и поперечный токи главного генератора. Значения токов приведены для коммутационных точек — моментов включения очередных вентилях управляемого выпрямителя в цепи возбуждения главного генератора; непрерывными линиями соединены дискретные значения мгновенных токов в коммутационных точках; точками с шагом 50 интервалов повторяемости выпрямителя обозначены токи, рассчитанные по уравнениям в конечных разностях

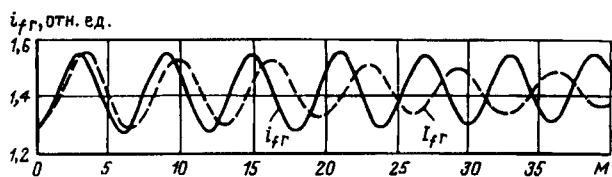


Рис. 3. Ток возбуждения главного генератора: — — — — — огибающая дискретных значений мгновенного тока в коммутационных точках; — — — — — огибающая тока, рассчитанного по уравнениям в конечных разностях

ставлен другой расчетный режим, когда главный генератор, уже возбужденный, включался на автономную нагрузку. В данном случае имеют место пульсации выпрямленного тока — тока возбуждения главного генератора, поэтому необходимо преобразовать уравнение (4) в область F -изображений для учета всего спектра гармоник выпрямленного тока; этот вопрос будет рассмотрен в следующих публикациях.

Пример 1. Синхронный генератор с демпферными обмотками работает через управляемый преобразователь на активно-индуктивную нагрузку r_n, x_n . Его параметры в относительных единицах: $x_d=0,5$; $x_q=0,4$; $x_{ad}=0,4$; $x_{aq}=0,3$; $x_f=0,6$; $x_{1d}=0,6$; $x_{1q}=0,5$; $r=0,0123$; $r_f=0,00105$; $r_{1d}=0,0155$; $r_{1q}=0,0146$; $\mu_f=0,002$; $r_n=1$. Рассчитывались три режима: 1 — $\alpha=0,6$; $x_n=5$; 2 —

$\alpha=2$; $x_n=5$; 3 — $\alpha=1,03$; $x_n=1$.

Заниженное значение индуктивности нагрузки, не характерное для возбудительных систем синхронных генераторов, принято для проверки достоверности дискретной математической модели системы СГ—ВН в условиях быстрого изменения выпрямленного тока и влияния его пульсаций на точность расчета.

Запишем в общем виде систему уравнений в конечных разностях, объединяющую уравнения (8), (17) и (18), с учетом того, что $U_{HS}^{(m)} = r_n I_{HS}^{(m)} + (3/\pi) x_n \Delta I_{nl}^{(m)}$, $I_{HS}^{(m)} \approx I_{nl}^{(m)} + (1/2) \Delta I_{nl}^{(m)}$, получим:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \Delta I_{nl}^{(m)} + a_{12} \Delta I_{fl}^{(m)} + a_{13} \Delta I_{1dl}^{(m)} + a_{14} \Delta I_{1ql}^{(m)} &= b_{11} \Delta I_{nl}^{(m)} + b_{12} \Delta I_{fl}^{(m)} + b_{13} \Delta I_{1dl}^{(m)} + b_{14} \Delta I_{1ql}^{(m)}, \\ a_{21} \Delta I_{nl}^{(m)} + a_{22} \Delta I_{fl}^{(m)} + a_{23} \Delta I_{1dl}^{(m)} &= b_{21} \Delta I_{nl}^{(m)} + b_{22} \Delta I_{fl}^{(m)} + c; \\ a_{31} \Delta I_{nl}^{(m)} + a_{32} \Delta I_{fl}^{(m)} + a_{33} \Delta I_{1dl}^{(m)} &= b_{31} \Delta I_{nl}^{(m)} + b_{33} \Delta I_{1dl}^{(m)}; \\ a_{41} \Delta I_{nl}^{(m)} + a_{44} \Delta I_{1ql}^{(m)} &= b_{41} I_{nl}^{(m)} + b_{44} I_{1q}^{(m)}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Вычислим коэффициенты уравнений (21) для значения угла управления $\alpha=0,6$, полагая $\text{cth}(\pi [a_p]^{-1} [b_p]/6) \approx \pi [b_p]^{-1} [a_p]/3$. Установившееся значение угла коммутации $\gamma^u=0,78$ [9]. В этом случае $a_{11}=5,599$; $a_{12}=-0,3736$; $a_{13}=-0,3736$; $a_{14}=0,4095$; $a_{21}=-237,2$; $a_{22}=545,7$; $a_{23}=363,8$; $a_{31}=-16,07$; $a_{32}=24,64$; $a_{33}=36,97$; $a_{41}=18,70$; $a_{44}=32,70$; $b_{11}=-1,510$; $b_{12}=0,6597$; $b_{13}=0,6597$; $b_{14}=0,03787$; $b_{21}=0$; $b_{22}=-1$; $c=1,905$; $b_{31}=0$; $b_{33}=-1$; $b_{41}=0$; $b_{44}=-1$.

Если не использовать введенное упрощение, то следует изменить записанные коэффициенты, учтя поправки: $\Delta a_{21}=0,6190$; $\Delta a_{22}=0,2667$; $\Delta a_{23}=-2,638$; $\Delta b_{21}=58,08$; $\Delta a_{31}=-0,06645$; $\Delta a_{32}=-0,01226$; $\Delta a_{33}=0,2684$; $\Delta b_{31}=3,949$; $\Delta a_{41}=0,1034$; $\Delta a_{44}=0,1808$; $\Delta b_{41}=-0,2685$.

Сравнивая их значения с значениями основных коэффициентов, можем сделать вывод, что в данном случае допустимо использовать упрощенную систему уравнений, записанную в [9], т.е. учесть только поправки к коэффициентам b_{21} , b_{31} , b_{41} . Для остальных режимов проверка дает аналогичный результат. На рис. 1 приведены результаты расчета переходного процесса в системе СГ—ВН по мгновенным значениям переменных методом припасовывания (токи i) и по уравнениям в конечных разностях (21) (токи $I_{n,f,1d,1q}^{(m)}$). Для наглядности отсчеты $I_{n,f,1d,1q}^{(m)}$ соединены огибающими $I_{n,f,1d,1q}$.

Пример 2. Главный генератор включается на автономную нагрузку x_n, r_n . Одновременно на его обмотку возбуждения через управляемый преобразователь подается питание от возбудительного синхронного генератора. Обе машины без демпферных обмоток. Параметры электрических

машин — главный генератор: $x_d^r=0,5$; $x_q^r=0,4$; $x_{ad}^r=0,4$; $x_f^r=0,6$; $r^r=0,0123$; $r_f^r=0,00105$; возбудитель: $x_d=0,526$; $x_q=0,356$; $x_{ad}=0,473$; $x_f=0,642$; $r=0,00675$; $r_f=0,000642$; $u_f=0,00271$.

Коэффициенты приведения: $k_{u6}=1500$; $k_{I6}=0,5$. В режиме 1 — $\alpha=1$; $r_n=0$; $x_n=2$; $B_{hf}=0,31$; в режиме 2: $\alpha=1,6$; $r_n+r^r=1,23$; $x_n=2$; $B_{hf}=0,11$. Коэффициенты B_{hf} — суть коэффициенты b_{21} в уравнениях (21) для обмотки возбуждения возбудителя. Для главного генератора использованы уравнения (19). Результаты расчетов представлены на рис. 2. В первом режиме в связи с малым значением поперечного тока главного генератора наблюдаются периодические колебания тока $I_{qr}^{(m)}$ относительно тока $i_{qr}^{(m)}$. Во втором режиме, когда поперечный ток возрос, эти колебания отсутствуют. Под токами i_r понимаются значения соответствующих мгновенных токов в коммутационных точках. Для наглядности все отсчеты соединены непрерывными огибающими.

Приложение. Свойства F -преобразования.

Преобразование производной.

Применим F -преобразование к производной непрерывной функции $f(t)$:

$$\begin{aligned} F^d(m, k) &= \frac{2}{h} \int_{t^{(m)}}^{t^{(m)}+h} \left(\frac{df(t)}{dt} \right) e^{-jkt'} dt = \\ &= \frac{2}{h} f(t) e^{-jkt'} \Big|_{t^{(m)}}^{t^{(m)}+h} + jk \frac{2}{h} \int_{t^{(m)}}^{t^{(m)}+h} f(t) e^{-jkt'} dt = \\ &= \frac{2}{h} \Delta f + jk F(m, k). \end{aligned} \quad (\text{П-1})$$

Преобразование интеграла.

Примем F -преобразование к интегралу непрерывной функции $f(t)$:

$$f^n(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Пусть его F -изображением будет $F^n(m, k)$. Подставим $f^n(t)$ в формулу (2), получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} F(m, k) &= \frac{2}{h} \int_{t^{(m)}}^{t^{(m)}+h} f(\tau) d\tau + jk F^n(m, k) = \\ &= F(m, 0) + jk F^n(m, k), \end{aligned}$$

откуда следует

$$F^n(m, k) = \frac{F(m, k) - F(m, 0)}{jk}, \quad k \neq 0. \quad (\text{П-2})$$

Преобразование постоянного параметра.

Пусть $c = \text{const}$.

$$f\{c\} = \frac{2}{h} \int_{t^{(m)}}^{t^{(m)}+h} c e^{-jkt'} dt = \begin{cases} 2c, & k=0, \\ 0, & k < 0. \end{cases} \quad (\text{П-3})$$

Преобразование синусоидальных параметров.

Пусть $f(t) = \cos(st)$, тогда для $s \neq \pm k$ (при любых n) получаем:

$$\begin{aligned} F\{\cos(st)\} &= \frac{2}{h} \int_{t^{(m)}}^{t^{(m)}+h} \frac{1}{2} (e^{jst} + e^{-jst}) e^{-jkt'} dt = \\ &= \frac{j}{h} \left[\frac{e^{-jst^{(m)}} (e^{-jsh} - 1)}{s+k} - \frac{e^{jst^{(m)}} (e^{jsh} - 1)}{s-k} \right]. \end{aligned} \quad (\text{П-4})$$

Пусть $f(t) = \sin(st)$, тогда для $s \neq \pm k$ (при любых n) получаем:

$$\begin{aligned} F\{\sin(st)\} &= \frac{2}{h} \int_{t^{(m)}}^{t^{(m)}+h} \frac{1}{2j} (e^{jst} - e^{-jst}) e^{-jkt'} dt = \\ &= -\frac{1}{h} \left[\frac{e^{-jst^{(m)}} (e^{-jsh} - 1)}{s+k} + \frac{e^{jst^{(m)}} (e^{jsh} - 1)}{s-k} \right]. \end{aligned} \quad (\text{П-5})$$

Если $s = \pm k$ при некоторых значениях n , то

$$F\{\cos(st)\} = \begin{cases} e^{jkt^{(m)}}, & k=s, \\ 0, & k \neq \pm s. \end{cases} \quad (\text{П-6})$$

$$F\{\sin(st)\} = \begin{cases} -je^{jkt^{(m)}}, & k=s, \\ 0, & k \neq \pm s. \end{cases} \quad (\text{П-7})$$

Преобразование системы дифференциальных уравнений.

Пусть имеется система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в левой части:

$$[a] \frac{dx}{dt} + [b][x] = [c], \quad (\text{П-8})$$

где $[a]$ и $[b]$ — квадратные матрицы порядка $n \times n$; $[c]$ — матрица-столбец порядка n .

В общем случае элементы матрицы $[c]$ могут быть функциями параметра t . Применим F -преобразование к обеим частям уравнения (П-8). Используя формулу (П-1), получаем:

$$\begin{aligned} ([b] + jk[a])[F(m, k)] + (2/h)[a][\Delta x^{(m)}] &= \\ &= [F_c(m, k)]. \end{aligned} \quad (\text{П-9})$$

Если к уравнениям (П-9) применить преобразование Лапласа, то

$$([b] + p[a])[X(p)] - [a][x(0)] = [F_c(p)]. \quad (\text{П-10})$$

Сопоставляя (П-9) и (П-10), находим, что структурно они идентичны. Если в (П-10) сделать замены

$$p \approx jk, \quad [X(p)] \approx [F(m, k)],$$

$$[x(0)] \approx -(2/h) [\Delta x^{(m)}], \quad [F_c(p)] \approx [F_c(m, k)], \quad (\text{П-11})$$

то получим уравнения (П-9).

Многие из выведенных формул структурно подобны выражениям, полученным Г.Е. Пуховым [13]. Однако в связи с разным подходом к выбору интервала дискретизации h (в [13] он принимается настолько большим, чтобы можно считать переходный процесс закончившемся) методы их использования принципиально отличны.

Выводы. 1. Разработанный метод локального преобразования Фурье позволяет выполнять математически строгое приведение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к уравнениям в конечных разностях. Интервал дискретизации при этом может выбираться в принципе любым. Установленное соответствие с преобразованием Лапласа предоставляет возможность численного восстановления функции, если известно ее изображение по Лапласу, через решение структурно подобного разностного уравнения.

2. Метод локального преобразования Фурье позволяет формировать численно-аналитические математические модели электрических цепей с вентильными преобразователями. Численные коэффициенты зависят от длительности коммутационных процессов, имеют относительно малый вес и могут обеспечить достаточную точность в расчетах, если определять их значения по параметрам установившегося режима.

3. Показана возможность приведения дифференциальных уравнений синхронных машин с вентильными преобразователями в их цепях, обладающих переменной структурой и периодическими коэффициентами, к уравнениям в ступенчатых изображениях и в конечных разностях. Тем самым выведены из рассмотрения «шумовые» эффекты, связанные с коммутацией вентилей, и созданы условия для анализа макропроцессов.

4. Предложенная модель требует уточнения на случаи пульсации тока возбуждения в синхронном генераторе с тиристорным возбуждением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глебов И.А. Системы возбуждения синхронных генераторов с управляемыми преобразователями. — М.; Л.:

Изд-во АН СССР, 1960.

2. Зырянов В.М., Халевин В.К. Математическая модель синхронного генератора, работающего на выпрямительную нагрузку / Моделирование и управление в электроэнергетике. — Тр. Сибирского НИИЭнергетики. 1976, вып. 32.

3. Вейнгандт В.Я., Гордин А.В. Разностные уравнения синхронного генератора и подключенного к нему выпрямителя / Источники импульсов электрической мощности. — Л.: ВНИИэлектромаш, 1990.

4. Решение и исследование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе функций с гибкой структурой / Под ред. Н.К. Куликова. — М.: Моск. технолог. ин-т пищевой пром-сти, 1974.

5. Такеути Т. Теория и применение вентильных цепей для регулирования двигателей / Пер. с англ.— Л.: Энергия, 1973.

6. Нейман Л.Р. Обобщенный метод анализа переходных и установившихся процессов в цепях с преобразователями с учетом активных сопротивлений. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1972.

7. Набутовский И.Б. Исследование процессов в питающемся от синхронной машины выпрямителе с применением разностных уравнений. — Тр. Ленингр. политех. ин-та им. М.И. Калинина, 1968, № 293.

8. Береговенко Г.Я., Пухов Г.Е., Саух С.Е. Численные операторные методы решения дифференциальных уравнений и анализа динамических систем. — Киев: Наукова думка, 1993.

9. Кузнецов В.А., Федотов А.И. Дискретная математическая модель системы синхронный генератор — выпрямительная нагрузка. — Электричество, 1995, № 4.

10. Кузнецов В.А., Федотов А.И. Расчет электромагнитных переходных процессов в системе синхронный генератор — выпрямительная нагрузка. — Электричество, 1997, № 1.

11. Кузнецов В.А., Федотов А.И. Применение локальных рядов Фурье для расчета электромагнитных переходных процессов в синхронных электрических машинах. — Электротехника, 1997, № 4.

12. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / Пер. с франц. — М.: Наука, 1965.

13. Пухов Г.Е. Комплексное исчисление и его применение. — Киев: Наукова думка, 1961.

[13.07.98]

А в т о р ы : Кузнецов Вячеслав Алексеевич закончил электромеханический факультет Московского энергетического института (МЭИ) в 1962 г. В 1990 г. защитил в МЭИ докторскую диссертацию на тему «Универсальный метод расчета полей и процессов в электрических машинах». Заведующий кафедрой электромеханики МЭИ, профессор.

Федотов Александр Иванович закончил электроэнергетический факультет МЭИ (Казанский филиал) в 1975 г. В 1979 г. защитил в МЭИ кандидатскую диссертацию на тему «Использование энергии третьей гармоники поля для возбуждения синхронных машин». Доцент кафедры электроэнергетических систем и сетей Казанского филиала МЭИ.

Новые схемы трехфазных дробных обмоток электрических машин. Часть I

ПОПОВ В.И.

Предложены и исследованы новые схемы трехфазных дробных петлевых обмоток электрических машин переменного тока — симметричных при $d=5, 7$ и несимметричных при целых числах $z/3, d/3$ для чисел пазов на полюс и фазу $q=b+1/6, b+1/3, b+2/3, b+5/6$, выполняемые двухслойными из неравновитковых катушек с одинаковым заполнением пазов и характеризующиеся пониженными коэффициентами дифференциального рассеяния σ_d и несимметрии линейных напряжений $K_{\text{нес}}$. Показана методика определения и оптимизации электромагнитных параметров обмоток с использованием многоугольников МГС и звезд пазовых ЭДС, даны сравнения основных параметров известных и новых обмоток.

Ключевые слова: трехфазные дробные симметричные и несимметричные обмотки, многоугольники МДС, звезды пазовых ЭДС, оптимизация электромагнитных параметров, дифференциальное рассеяние

Введение. Трехфазные ($m=3$) $2m=6$ -зонные двухслойные $2p$ -полюсные дробные обмотки выполняются с дробным числом пазов z на полюс и фазу

$$q = z/(2pm) = b + c/d = N/d, \quad (1)$$

где b, c, d — целые числа; c/d и N/d — несократимые дроби; $N=bd+c=q_z$ — эквивалентное число пазов на полюс и фазу дробной обмотки.

Они широко применяются в синхронных и асинхронных (многополюсных, многоскоростных лифтовых, крановых и др.) электрических машинах, но обладают рядом особых свойств по сравнению с обмотками с целыми числами $q=z/6p=\text{ц.ч.}$. Основной недостаток дробных обмоток — повышенное содержание гармонических в МДС (высших, низших и дробных порядков), что увеличивает дифференциальное рассеяние и ухудшает энергетические и виброакустические показатели машин [1–6].

При нарушении известных условий симметрии [1]

$$2p/d = \text{ц.ч.}; \quad d/m \neq \text{ц.ч.} \quad (2)$$

обмотки получаются несимметричными по фазным ЭДС и их углам сдвигов, что в еще большей мере ухудшает показатели машин.

В соответствии с условиями (2) возможны два вида несимметрии:

обмотки всегда получаются несимметричными при числе пазов, не кратном числу фаз $z/m \neq \text{ц.ч.}$, т.е. при нарушении первого условия (2);

New schemes of three-phase fractional-slot lap windings of a.c. electrical machines — which are symmetrical at $d=5$ and 7 and asymmetric for integer numbers $z/3$ and $d/3$ for the numbers of slots per phase and pole $q=b+1/6, b+1/3, b+2/3$ and $b+5/6$ — are proposed and examined. These windings are made two-layer, with equal filling of the slots, from coils with an unequal number of turns and are characterized by reduced coefficients of differential dissipation σ_d and symmetry of linear voltages $K_{\text{ас}}$. A technique is shown for determining and optimizing the electromagnetic parameters of the windings using polygons of magnetomotive forces and stars of the electromotive forces in the slots. Comparison is made between the basic parameters of the known and new windings.

Key words: symmetrical and asymmetric three-phase fractional slot windings, m.m.f. polygons, stars of slot e.m.f., electromagnetic parameters, optimization, differential dissipation

обмотки также несимметричны при $d/m=\text{ц.ч.}$, даже для целых чисел z/m , т.е. при нарушении второго условия (2).

Представляется возможным значительно улучшить электромагнитные параметры трехфазных дробных симметричных и несимметричных обмоток и тем самым заметно повысить показатели электрических машин. Некоторые схемы таких петлевых обмоток, выполняемых симметричными при соблюдении условий (2) для знаменателя дробности $d=2$ и 4 числа q по (1) показаны в [8–12]; ниже исследуются новые схемы трехфазных дробных обмоток: симметричных при $d=5, 7$; несимметричных при целых числах $z/3$ и $d/3$; несимметричных при нецелом числе $z/3$.

Исследуемые схемы дробных петлевых обмоток характеризуются пониженными значениями коэффициентов дифференциального рассеяния σ_d и несимметрии линейных напряжений $K_{\text{нес}}$ по сравнению с известными дробными обмотками [1]. Они формируются двухслойными из неравновитковых концентрических катушек с числами витков, увеличенными $(1+x)w_k$ для одних и уменьшенными $(1-x)w_k$ для других при сохранении одинакового числа $2w_k$ витков паза, где параметр x при $d>2$ может устанавливаться для симметричных обмоток по условию полного устранения из МДС самой низшей (наиболее сильно выраженной) дробной гармонической порядка $\nu=\pm 6/d \pm 1$ [3, 10], а для несимметричных — по условию получения наименьшего коэффициента несимметрии $K_{\text{нес}}$.

Методы исследования и оптимизации электромагнитных параметров. Для исследуемых трехфазных дробных двухслойных петлевых обмоток вместо изображения развернутых схем используются развертки пазовых слоев с разбивкой их на фазные зоны, обозначаемые как $A-X$, $B-Y$, $C-Z$ соответственно для I , II , III фаз, при этом зоны X , Y , Z смещены относительно зон A , B , C на 180° (электрических) и их катушки (группы) следует включать в фазах встречно зонам A , B , C .

Электромагнитные параметры обмоток исследуются по звездам пазовых ЭДС и многоугольникам МДС, которым определяются показатель качества обмотки — коэффициент дифференциального рассеяния σ_d , характеризующий суммарное содержание гармонических в ее МДС, а также другие важные параметры рассеяния обмотки [7–12]. Процентное значение $\sigma_{d\%}$ достаточно просто и точно, с учетом всего спектра гармонических, определяется из многоугольника МДС по соотношениям:

$$\sigma_{d\%} = [(R_d/R)^2 - 1] 100\%; \quad R_d^2 = \left(\sum_1^N R_i^2 \right) / qd; \\ R = zK_{об}/p\pi, \quad (3)$$

где R_d^2 — квадрат среднего радиуса $N=qd$ пазовых точек одной повторяющейся части многоугольника; R — радиус окружности для основной гармонической МДС (ЭДС) при обмоточном коэффициенте $K_{об}$, зависящем от параметра неравновитковости катушек x .

Коэффициент $\sigma_{d\%}$ (3) позволяет оценивать и объективно сравнивать различные виды и модификации обмоток независимо от геометрии магнитопровода и конструкции асинхронной или синхронной машины.

Многоугольники МДС трехфазных обмоток строятся по вспомогательной треугольной сетке, сторона которой соответствует вектору полного тока одного слоя паза фазной зоны, а токи фазных зон изображаются в центре многоугольников симметричной системой единичных векторов в последовательности $A-Z-B-X-C-Y$, смещенных на 60° ; значения R_i^2 пазовых точек определяются по теореме косинусов.

Исследуемые обмотки характеризуются двумя значениями шага катушек по пазам [5, 9–12]: средним «электрическим» шагом $y_{п.э}$, определяющим собой обмоточный коэффициент $K_{об}$, и средним «геометрическим» шагом $y_{п.ср}$, определяющим размеры катушек и массу меди обмотки; относительное значение β шага $y_{п.э}$ в долях полюсного деления $\tau_n = tq$ для трехфазной обмотки равно $\beta = y_{п.э}/3q$. Для двухслойных равновитковых обмоток значения $y_{п.э}$ и $y_{п.ср}$ равны, а для исследуемых обмоток с неравновитковыми

катушками их можно определять при $2/3 \leq \beta \leq 1$ из соотношений [10–12]:

$$K_\beta' = \left(\sum_1^N N_{ci}^2 \right) / qd; \quad \beta = (4K_\beta' - 1)/3; \\ y_{п.э} = (4K_\beta' - 1)q; \quad (4)$$

$$y_{п.ср} = \left[\sum_1^N (y_{pi} w_{ki*}) \right] / N, \quad (5)$$

где N_{ci}^2 — квадрат длины i -й стороны многоугольника при средней единичной МДС паза для $N=qd$ пазовых точек его одной повторяющейся части; y_{pi} и $w_{ki*} = w_{ki}/w_k$ — шаг по пазам и относительное число витков i -й концентрической катушки группы.

Коэффициенты K_β' в (4) и $K_\beta = (1 + 3K_\beta')/4$ учитывают влияние укорочения шага катушек на удельную проводимость пазового рассеяния $\lambda_{п}$; их значения для трехфазных двухслойных равновитковых обмоток с фазной зоной в 60° определяются через $\beta = y_{п}/3q$ (при $2/3 \leq \beta \leq 1$) выражениями [6]:

$$K_\beta' = (1 + 3\beta)/4; \quad K_\beta = (1 + 9\beta)/16. \quad (6)$$

По абсолютному значению коэффициента σ_d (3) можно определять удельную проводимость λ_d дифференциального рассеяния [10]:

$$\lambda_d = 3K_\lambda (zK_{об}/p\pi)^2 [\sigma_d - K_z (2p/z)^2], \quad (7)$$

где $K_\lambda = t/(12\delta K_\delta)$ — коэффициент геометрии сердечника при зубцовом делении t и воздушном зазоре δ (мм), коэффициенте зазора K_δ ; коэффициент K_z учитывает влияние на дифференциальное рассеяние зубчатости сердечника (дополнительно к коэффициенту зазора K_δ) и может быть определен аппроксимацией кривых, полученных в [3] при ширине открытия паза $b_{ш}$, в виде [10]

$$K_z = 1,8(\delta/t) + 0,313(b_{ш}/t) \lg(t/\delta). \quad (8)$$

Так как значения R_d^2 и $K_{об}$ в (3) исследуемых неравновитковых дробных обмоток зависят от показателя x неравновитковости катушек, то оптимизация электромагнитных параметров таких симметричных обмоток по x выполняется путем исследования на минимум функции $\sigma_d = \varphi(x)$ коэффициента дифференциального рассеяния

$$d(\sigma_d)/dx \equiv d(R_d/K_{об})^2/dx = 0. \quad (9)$$

Из (9) определяется оптимальное значение $x_{опт}$, соответствующее минимальному дифференциальному рассеянию обмотки σ_{dmin} . Отметим, что значение $x_{опт}$ по (9) отличается в общем случае от значения x , определяемого из условия устранения из МДС обмотки самой низшей дробной гармонической [8–10].

Таким образом, многоугольники МДС, ис-

пользуемые для анализа исследуемых неравно-
витковых обмоток, позволяют достаточно просто
определять важнейшие электромагнитные пара-
метры рассеяния обмоток, оптимизировать их
по x и сравнивать различные варианты.

Для оценки несимметрии исследуемых не-
симметричных обмоток используется методика
[2] аналитического разложения несимметричной
системы трехфазных линейных напряжений об-
мотки $E_{AB}=a$, $E_{BC}=b$, $E_{CA}=c$ на составляющие
прямой $\Pi_{пр}$ и обратной $\Pi_{обр}$ последовательностей,
по которым определяется коэффициент несим-
метрии $K_{нес\%}$ по выражениям:

$$\left. \begin{aligned} S &= a + b + c; \\ A &= (a^2 + b^2 + c^2)/6; \\ B &= \sqrt{3S(S-2a)(S-2b)(S-2c)}/6; \\ \Pi_{пр} &= \sqrt{A+B}; \quad \Pi_{обр} = \sqrt{A-B}; \\ K_{нес\%} &= (\Pi_{обр}/\Pi_{пр}) 100. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Группировка катушек симметричной двух-
слойной дробной обмотки, показывающая после-
довательность чередования больших и малых
групп и записываемая числовым рядом, оп-
ределяющим числа катушек в последовательно
расположенных катушечных группах, может
иметь различные варианты, и наилучшему из
них соответствует группировка при максималь-
ном коэффициенте распределения $K_{р\max}$ для ос-
новной гармонической ЭДС (МДС). Такая груп-
пировка может определяться по электрическим
углам сдвига пазовых векторов для основной
гармонической ЭДС (МДС) [1, 10]:

$$\begin{aligned} \alpha_{\Pi} &= 360^\circ p/z = 180^\circ/(mq); \\ \alpha_B &= 180^\circ/(mN) = \alpha_{\Pi}/d, \end{aligned} \quad (11)$$

где α_{Π} соответствует сдвигу векторов ЭДС двух
соседних пазов сердечника, α_B — сдвигу соседних
векторов звезды пазовых ЭДС, при этом имеется
в виду, что векторы ЭДС зон X , Y , Z повернуты
на 180° .

По (11) $\alpha_{\Pi}/\alpha_B = N/q = d$, поэтому при $d > 2$ в
звезде пазовых ЭДС между двумя векторами со-
седних пазов располагаются $(d-1)$ других век-
торов и их номера соответствуют D -ряду [1, 10]

$$\begin{aligned} 1, 1+D, 1+2D, \dots, 1+(N-1)D, \dots, 1+ \\ +(2N-1)D, \dots, 1+(mN-1)D, \end{aligned} \quad (12)$$

в котором из номеров, превышающих число mN
пазов повторяющейся части, следует вычитать
это или кратное ему число; значение D со-
ответствует разности между номерами двух со-
седних векторов и равно

$$D = (mNP + 1)/d, \quad (13)$$

где $P \geq 1$ — наименьшее целое число полюсных
делений между двумя соседними векторами звез-
ды пазовых ЭДС, при котором число D — целое.

Для $m=3$ -фазной обмотки D -ряд (12) разби-
вается по фазам на три части по N пазов в каж-
дой, откуда при известном значении D (13) оп-
ределяется группировка N катушек в D группах
по (1), повторяемая для всей обмотки $3(2p/d)$
раза и содержащая d -с малых групп с b катуш-
ками и c больших групп с $b+1$ катушками.

В общем случае последовательность больших
и малых групп в одной группировке не зависит
от целой части b и определяется только зна-
чением c/d дробной части числа q по (1), по-
этому обычно для симметричных дробных об-
моток группировку находят упрощенным мето-
дом [1] по алгоритму:

а) записывают числовой ряд c/d , $2c/d$,
 $3c/d$, ..., dc/d ;

б) прибавляют 1 ко всем целым частям ряда
а), за исключением последнего числа ($dc/d=c$);

в) записывают 0 слева от ряда б), находят
разность между соседними числами и определяют
группировку (с числами 0 и 1) для $b=0$;

г) прибавляют значение b ко всем числам
ряда в) и определяют искомую группировку при
максимальном коэффициенте $K_{р\max}$ распределе-
ния для основной гармонической ЭДС (МДС).

Исследуемые трехфазные двухслойные дроб-
ные симметричные обмотки (при $b \neq 0$) содержат
 bp катушечных групп с их нумерацией от 1Γ
до $(bp)\Gamma$, на рисунках для них показаны;

развертки пазовых слоев и фазных зон при
неравнобитковых катушках, где зачерненным па-
зам соответствует уменьшенное $(1-x)w_k$ число
витков в слое;

многоугольники МДС для обмоток исходной
с равновитковыми катушками ($x=0$) и предла-
гаемых неравнобитковых, построенные по тре-
угольной сетке в одинаковых или различных мас-
штабах;

звезды пазовых ЭДС, построенные для вер-
хнего слоя первой фазы (зоны $A-X$) при раз-
бивке окружности на z пазовых частей; внут-
ренняя разметка соответствует полюсности $p_v=1$
низшей гармонической с углом сдвига пазов
по (11) $\alpha_{\Pi}=360^\circ/z$, а наружная — полюсности
 p основной гармонической с углом сдвига со-
седних пазов $p\alpha_{\Pi}$.

Трехфазные симметричные дробные обмотки
при $d=5$ могут по (1) иметь значения $c=1$,
2, 3, 4, которым при $b=0$ по приведенному
выше алгоритму соответствуют группировки:

$$1\ 0\ 0\ 0\ 0; 1\ 0\ 1\ 0\ 0; 1\ 1\ 0\ 1\ 0; 1\ 1\ 1\ 1\ 0. \quad (14)$$

При $q=4/5 < 1$ ($b=0$ и $c=N=4$) и полюсности
 $p=d=5$ обмотка выполняется в $z=6pq=6N=24$
пазах с группировкой по (14) $1\ 1\ 1\ 1\ 0$. Запи-
сывая повторяемую $3(2p/d)=6$ раз такую груп-
пировку для всей обмотки с разметкой под ее
числами фазных зон в последовательности A ,

Z, B, X, C, Y и вычеркивая нулевые элементы, получаем чередования зон по пазам [10]:

1 1 1 1 0	1 1 1 1 0	1 1 1 1 0	1 1 1 1 0	1 1 1 1 0	1 1 1 1 0
A Z B X C	Y A Z B X	C Y A Z B	X C Y A Z	B X C Y A	Z B X C Y
1 2 3 4	5 6 7 8	9 10 11	12 13 14	15 16 17	18 19 20
21 22	23 24				

чему соответствует развертка рис. 1,а с шагом катушек по пазам $y_n=2$ (при $\tau_n=3q=2,4$) и нумерацией катушек (групп) от 1Г до 24Г. Для равновитковых катушек обмотка имеет многоугольник МДС по рис. 1,б (при масштабе в 0,5 единиц длины для стороны сетки), и в ее МДС содержится низшая дробная гармоническая $\nu=6/d-1=1/5$ (обратно вращающаяся) с полюсностью $p_\nu=\nu p=1$. Выполнение катушек неравновитковыми по рис. 1,а позволяет устранить такую гармоническую $\nu=1/5$ МДС (ЭДС).

На рис. 1,в построены звезды пазовых ЭДС обмотки рис. 1,а для одного (верхнего) слоя фазы А—Х: окружность разбита на $z=24$ частей и внутренняя разметка пазов соответствует полюсности $p_\nu=1$ гармонической $\nu=1/5$ при угле по (11) $\alpha_n=180^\circ/12=15^\circ$, а наружная — полюсности $p=5$ гармонической $\nu=1$ при углах $5\alpha_n=75^\circ$ и $\alpha_b=75^\circ/d=15^\circ$, при этом по (13) для $N=4$, $P=2$ получаем $D=5$ и по ряду (12) имеем номера 1, $1+D=6$, $1+2D=11$, $1+3D=16$, что соответствует нумерации пазов зон фазы А. По проекциям векторов рис. 1,в на ось их симметрии определяются (при $2w_{\kappa}=2$ витках пазы):

ЭДС фазы для полюсности $p_\nu=1$ при $K_y(\nu=1/5)=\sin(\pi y_n/5 \cdot 6q)=0,2588$
 $E_{\phi}(\nu=1/5)=[(1-x)2\cos(2,5\alpha_n)-(1+x)2\cos(4,5\alpha_n)] \times$
 $\times K_y(\nu=1/5)=0,21258-0,60876x$, (15)

откуда из условия $E_{\phi}(\nu=1/5)=0$ вычисляется значение $x=0,35$;

обмоточный коэффициент для полюсности $p=5$ основной гармонической при коэффициенте укорочения катушек $K_y=\sin(\pi y_n/6q)=0,965926$

$K_{об}=E_{\phi}/w_{\phi}=[(1-x)\cos(0,5\alpha_n)+$

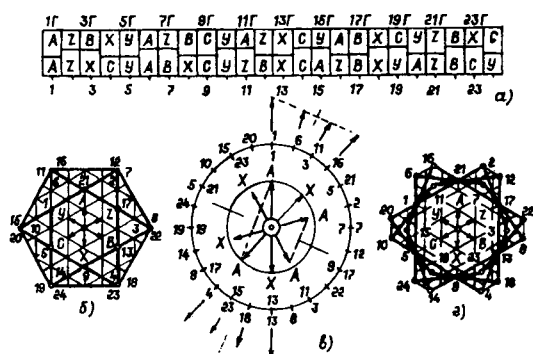


Рис. 1. Чередование по пазам фазных зон (а), многоугольники МДС (б, в) и звезды пазовых ЭДС фазы А—Х (г) трехфазной симметричной дробной обмотки при $q=4/5$, $p=5$ и $z=24$

$+(1+x)\cos(1,5\alpha_n)]K_y/2=0,92503-0,03263x$. (16)

По многоугольнику МДС (рис. 1,в) неравновитковой обмотки (при $x=0,25$ и одинаковом масштабе с рис. 1,б) определяется

$$R_d^2=2,5-x+1,5x^2, \quad (17)$$

тогда при $x=0,25-R_d^2=2,34375$, $K_{об}=0,91687$ по (16) и $\sigma_{д\%}=19,43$ по (3); при $x=0-R_d^2=2,5$, $K_{об}=0,92503$ и $\sigma_{д\%}=25,15$, т.е. эффективность по $\sigma_{д\%}$ обмотки рис. 1,а возрастает в $25,15/19,43=1,3$ раза.

Исследование (16)—(17) на минимум по (9) дает значение $x_{опт}=0,28$, при котором $\sigma_{д\min\%}=19,37$; целесообразные пределы для выбора параметра x обмотки рис. 1,а: $0,25 \leq x \leq 0,35$.

По многоугольнику МДС рис. 1,в определяются (с учетом принятого масштаба) квадраты длин сторон: $N_{д\alpha}^2=1$ — для сторон 24—1 и 1—2; $N_{д\alpha}^2=[(1+x)^2+(1-x)^2+(1-x^2)]/4=(3+x^2)/4$ — для сторон 2—3 и 3—4, тогда по (4)

$$K'_\beta=(7+x^2)/8; \quad \beta=(5+x^2)/6;$$

$$y_{п.з}=(5+x^2)q/2=2+0,4x^2, \quad (18)$$

откуда при $x=0,25-K'_\beta=7,0625/8$; $\beta=5,0625/6$; $y_{п.з}=2,025$; при $x=0-K'_\beta=7/8$; $\beta=5/6$; $y_{п.з}=2$, что соответствует параметрам равновитковой обмотки по известным соотношениям (6) при $\beta=y_n/\tau_n=2/2,4=5/6$. Средний геометрический шаг катушек по (5) обмотки рис. 1,а не зависит от x и равен $y_{п.ср}=y_n=2$.

При $q>1$ и $p=d=5$ обмотка имеет $6p=30$ катушечных групп с номерами от 1Г до 30Г, I, II, III фазы содержат группы соответственно 1Г+3(κ)Г, 11Г+3(κ)Г, 21Г+3(κ)Г, и четные группы фаз включаются встречно нечетным, где значение κ изменяется от 0 до $(2p-1)=9$.

При $q=6/5$ ($b=1$, $c=1$ и $N=6$) и полюсности $p=5$ обмотка выполняется в $z=36$ пазов с группировкой по (14) 2 1 1 1 1 при $y_n=3$ (для $\tau_n=3,6$) по рис. 2,а, многоугольниками МДС по рис. 2,б при неравно- (наружный; $x=0,25$) и равновитковых (внутренний) катушках, а их мас-

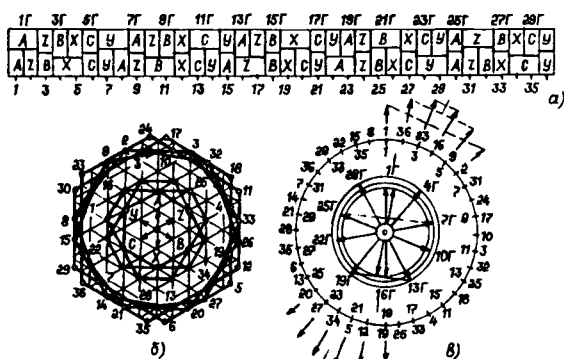


Рис. 2. Чередование по пазам фазных зон (а), многоугольники МДС (б) и звезды пазовых ЭДС фазы А—Х (г) трехфазной симметричной дробной обмотки при $q=6/5$, $p=5$ и $z=36$

штабы отличаются вдвое. По рис. 2,б и в при $\alpha_n=10^\circ$, $5\alpha_n=50^\circ$ получаем:

$$E_{\phi}(\nu=1/5)=0,22562-0,93969x=0, \quad x=0,24;$$

$$K_{об}=0,92356+0,02894x; R_d^2=(30-8x+20x^2)/6; \quad (19)$$

$K'_\beta=(21+2x^2)/24$; $\beta=(15+2x^2)/18$; $y_{п.э}=3+0,4x^2$, тогда при $x=0,25$ $R_d^2=29,25/6$, $K_{об}=0,93080$ и $\sigma_{д\%}=7,126$; $K'_\beta=21,125/24$, $\beta=15,125/18$, $y_{п.э}=3,025$; при $x=0$ $R_d^2=5$, $K_{об}=0,9236$ и $\sigma_{д\%}=11,603$; $K'_\beta=21/24=7/8$, $\beta=15/18=5/6$, $y_{п.э}=3$, т.е. эффективность по $\sigma_{д\%}$ возрастает в $11,60/7,126=1,63$ раза. Оптимальное значение по (9) равно $x_{опт}=0,25$, и поэтому параметр x следует выбирать в пределах $0,2 \div 0,3$.

При $q=7/5$ ($b=1$, $c=2$ и $N=7$) и полюсности $p=5$ обмотка выполняется в $z=42$ пазах с группировкой по (14) 2 1 2 1 1 при $y_n=5$ (для $\tau_n=4,2$) по рис. 3. Часть пазов такой обмотки содержит $2(w_k-x)$ витков (зачернены на рис. 3), поэтому эквивалентное число полностью заполненных пазов равно $z'=z-6x$, и это значение z' используется в (3) при определении $R=z'K_{об}/p\pi$. По звездам ЭДС при $\alpha_n=60^\circ/7$ и многоугольникам МДС определяются:

$$E_{\phi}(\nu=1/5)=0,19116-0,66792x=0, \quad x=0,29;$$

$$K_{об}=(6,39350-0,702749x)/(7-x);$$

$$R_d^2=(45-18x+17x^2)/7; \quad (20)$$

$$K'_\beta=(6-2x+2x^2)/7; \quad \beta=(17-8x+8x^2)/21;$$

$$y_{п.э}=5+1,6x(1-x),$$

где $y_{п.э}$ вычисляется по значению $(2-\beta)$ вместо β , так как шаг катушек $y_n=5$ при $\tau_n=4,2$ — удлиненный [10]. Для обмотки рис. 3 значение $x_{опт}=0,25$, поэтому x выбирается в пределах $0,2 \div 0,3$.

1Г	3Г	5Г	7Г	9Г	11Г	13Г	15Г	17Г	19Г	21Г	23Г	25Г	27Г	29Г						
A	Z	B	X	C	Y	A	Z	B	X	C	Y	A	Z	B	X	C	Y			
Y	A	Z	B	X	C	Y	A	Z	B	X	C	Y	A	Z	B	X	C	Y		
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41

Рис. 3. Чередование по пазам фазных зон обмотки при $q=7/5$, $p=5$ и $z=42$

При $q=8/5$ ($b=1$, $c=3$ и $N=8$) и полюсности $p=5$ обмотка выполняется в $z=48$ пазах с группировкой по (14) 2 2 1 2 1 при $y_n=4$ (для $\tau_n=4,8$).

По звездам ЭДС при $\alpha_n=7,5^\circ$ и $5\alpha_n=37,5^\circ$ определяются:

$$E_{\phi}(\nu=1/5)=0,06833-0,27779x=0, \quad x=0,25;$$

$$K_{об}=0,92305+0,024386x;$$

$$R_d^2=8,375-0,25x+1,25x^2; \quad (21)$$

$$K'_\beta=(14+x^2)/16; \quad \beta=(10+x^2)/12;$$

$$y_{п.э}=4+0,4x^2,$$

а значение $x_{опт}=0,28$, поэтому $0,25 \leq x \leq 0,35$.

При $q=9/5$ ($b=1$, $c=4$ и $N=9$) и полюсности

$p=5$ обмотка выполняется в $z=54$ пазах с группировкой по (14) 2 2 2 2 1 с концентрическими катушками с шагами $y_n=5$ и 3 (при $\tau_n=5,4$) для двух- и $y_n=4$ для однокатушечных групп. Часть пазов содержит $(2w_k-x)$ витков, поэтому $z'=z-6x$. При $\alpha_n=20^\circ/3$, $5\alpha_n=100^\circ/3$ имеем:

$$E_{\phi}(\nu=1/5)=0,19309-0,50919x=0, \quad x=0,38;$$

$$K_{об}=(7,895937-0,61128x)/(9-x);$$

$$R_d^2=(86-20x+11x^2)/9; \quad (22)$$

$$\beta=(20-6x+4x^2)/27; \quad y_{п.э}=4-1,5x+0,8x^2;$$

$$y_{п.ср}=4-2x/9.$$

Оптимальное значение параметра $x_{опт}=0,33$, поэтому значение x выбирается в пределах $0,3 \div 0,4$.

Трехфазные симметричные дробные обмотки при $d=7$ могут по (1) иметь значения $c=1, 2, 3, 4, 5, 6$, которым при $b=0$ и приведенному выше алгоритму соответствуют группировки:

$$\begin{aligned} &1000000; 1001000; 1010100; \\ &1101010; 1110110; 1111110. \end{aligned} \quad (23)$$

При $q=6/7 < 1$ ($b=0$ и $c=N=6$) и полюсности $p=d=7$ обмотка выполняется в $z=6pq=36$ пазах с группировкой по (23) 1 1 1 1 1 0, по которой (подобно обмотке рис. 1,а) определяются чередования по пазам фазных зон, показанные на рис. 4,а для шага катушек $y_n=2$ (при $\tau_n=18/7$) с нумерацией катушек (групп) от 1Г до 36Г; зачерненные пазы рис. 4,а содержат по $2(w_k-x)$ витков.

Многоугольники МДС построены для катушек равно- (рис. 4,б) и неравновитковых (рис. 4,з), а звезды пазовых ЭДС верхнего слоя фазы А—Х построены на рис. 4,в при разбивке окружности на $z=36$ частей; внутренняя разметка соответствует полюсности $p_v=1$ гармонической $\nu=1/7$ при угле по (11) $\alpha_n=180^\circ/18=10^\circ$, а наружная разметка — полюсности $p=7$ основной гармонической при углах $7\alpha_n=70^\circ$ и $\alpha_B=70^\circ/d=10^\circ$. По рис. 4,в и з подобно обмотке рис. 1,а определяем:

1Г	3Г	5Г	7Г	9Г	11Г	13Г	15Г	17Г	19Г	21Г	23Г	25Г	27Г	29Г	31Г	33Г	35Г
A	Z	B	X	C	Y	A	Z	B	X	C	Y	A	Z	B	X	C	Y
A	Z	B	X	C	Y	A	Z	B	X	C	Y	A	Z	B	X	C	Y
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35

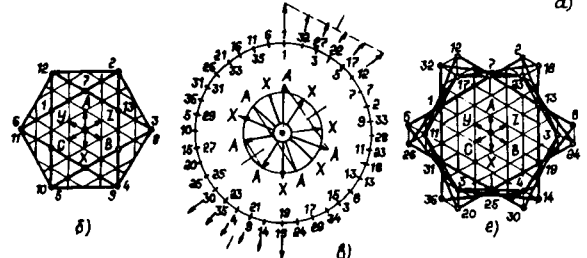


Рис. 4. Чередование по пазам фазных зон (а), многоугольники МДС (б, з) и звезды пазовых ЭДС фазы А—Х (в) трехфазной симметричной дробной обмотки при $q=6/7$, $p=7$ и $z=36$

Расчетная систематическая погрешность напряженности электростатического поля высоковольтных устройств*

РЕЗВЫХ К.А., РОМАНОВ В.А.

Исследован набор систематических погрешностей потенциала и нормальной производной для методов конечных разностей и численного дифференцирования. Рассмотрены методы оценки погрешностей с помощью моделей реальных промежутков. Полная компенсация погрешности повышает точность и эффективность расчетов.

Ключевые слова: высоковольтные приборы, электростатическое поле, напряженность, систематическая погрешность, оценка

В высоковольтной и ускорительной технике вопрос о расчетной точности поля, вычисленного разностным методом, до последнего времени остается открытым. Разработчики пакетов программ обычно ограничиваются отдельными примерами решения. Целью настоящей работы является выбор способа количественной и априорной оценки систематической погрешности напряженности в общем случае слабо неоднородного поля для метода конечных разностей.

В статье [1] предложен способ, основанный на результатах решения тестовых задач и представляющий собой набор эмпирических зависимостей погрешности потенциала от расчетных параметров. В условиях слабо неоднородного поля Уолш и Янг [2, с. 343] определили для метода конечных разностей и задачи Дирихле, что погрешность имеет порядок $O(h^2)$. Это количественно совпадает с оценками из работы [1]. Эмпирические обобщения и теоретические обобщения привели к одинаковому результату. Поэтому есть основания применить способ тестирования и эмпирических зависимостей во второй задаче — к определению систематической погрешности напряженности поля. Хотя первая задача — оценка погрешности потенциала — в общих чертах решена, предварительно потребовалось уточнить результаты [1] для нерегулярных околограничных узлов сетки. Априорная оценка погрешностей потенциала и напряженности была испытана в качестве модели расчетной погрешности в задачах, точное решение которых неизвестно.

Областью интереса в граничных задачах ниже считаются окрестности поверхностей с наибольшей кривизной. Здесь напряженность поля максимальна, но часто достигают максимума по-

A composition of systematic errors of a potential and a normal derivative for a finite-difference method and for a numerical differentiation method is investigated. Methods for error estimating with the help of real gap models are considered. The complete error compensation increases the accuracy and the effectiveness of calculations.

Key words: high-voltage device, electrostatic field, strength, systematic error, estimating

грешности потенциала и напряженности.

В численных расчетах поля только погрешность округления мантииссы числа является случайной, остальные погрешности систематические. Для понимания природы систематических отклонений необходим подробный анализ как первой, так и второй задач оценки. Анализ выполнен с помощью тестовых расчетов простых граничных задач: цилиндрический (Ц) и шаровой (Ш) конденсаторы (рис. 1, а и б); вытянутый (ВЭВ) и сплюснутый (СЭВ) эллипсоидальные конденсаторы (рис. 2, а и б).

1. Погрешность потенциала. Точной погрешностью потенциала ε_u в тестовых расчетах будем называть разность между приближенным значением u и точным значением U :

$$\varepsilon_u = u - U. \quad (1.1)$$

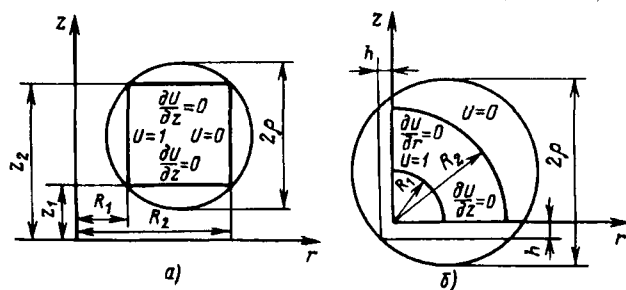


Рис. 1. Граничные задачи: а — цилиндрический конденсатор; б — шаровой конденсатор [см. Электричество, 1985, № 4, с. 23, рис. 1, 2]

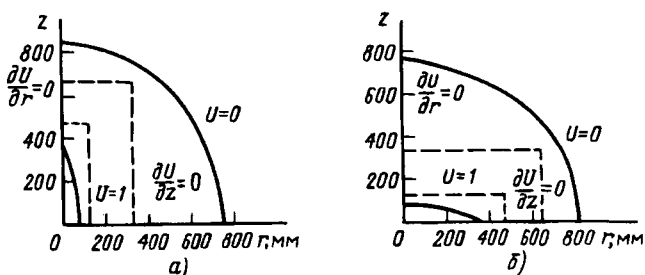


Рис. 2. Граничные задачи ВЭВ, СЭВ: а — вытянутые эллипсоиды вращения; б — сплюснутые эллипсоиды вращения [см. Электричество, 1985, № 4, с. 24, рис. 3, 4]

* Авторы выражают благодарность кандидатам физ.-мат. наук О.И. Макарову и А.И. Зинину за плодотворное обсуждение проблемы. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований РАН.

Будем различать два источника систематических погрешностей: данный метод и условия проведения расчетов. В качестве погрешности метода конечных разностей $\varepsilon_{\text{мет}}$ можно выбрать максимум модулей компонент (норму Чебышева) для вектора разности точного решения системы разностных уравнений и решения дифференциального уравнения. Будем предполагать, что погрешность округления мантиссы $\varepsilon_{\text{окр}} \ll \varepsilon_{\text{мет}}$, поскольку во всех тестовых расчетах количество значащих цифр в мантиссе было не менее 9–11, причем неустойчивости решения не обнаружено.

К другим неизменным условиям относятся: уравнение Лапласа и осевая симметрия полей в координатах (r, z) ;

метод конечных разностей и сетка с квадратной ячейкой и сторонами h ;

пятиточечный оператор — звезда, используемый для регулярных узлов;

пятиточечный оператор — несимметричная звезда, используемый для нерегулярных узлов, где околграничное расстояние до криволинейных границ с условием Дирихле h_a меньше шага h хотя бы в одном направлении (согласно аппроксимации Шортли—Уэллера [3, с. 224]), криволинейная граница представлена точно;

аппроксимация с помощью «фиктивных» узлов и центральных разностей — для околграничных узлов с граничным условием Неймана; потенциал, нормированный на наибольшую разность потенциалов, так что на внутреннем электроде потенциал $U_1=1$, на наружном электроде потенциал $U_2=0$;

итерационный процесс циклической релаксации [1, 4], направление перебора узлов сетки не менялось, начальное приближение потенциала во внутренних узлах принималось равным 0,5.

Переменным условием проведения расчетов является продолжительность итерационного процесса. Систематическую погрешность усечения $\varepsilon_{\text{ус}}$ также можно определить как первую норму вектора разности приближенного и точного решений системы разностных уравнений на области решения.

Таким образом, погрешность потенциала представляет собой сумму

$$\varepsilon_{\text{пот}} = \varepsilon_{\text{мет}} + \varepsilon_{\text{ус}}. \quad (1.2)$$

Однако определение погрешностей через максимальный на области модуль не является удобным, так как погрешности метода и усечения следует рассматривать не только по модулю, но и по знаку. Так на рис. 3 представлено распределение знака погрешности потенциала в шаровом поле с радиусами внутреннего электрода 80 и 350 мм и шагом сетки 16 мм при двух параметрах прекращения итераций:

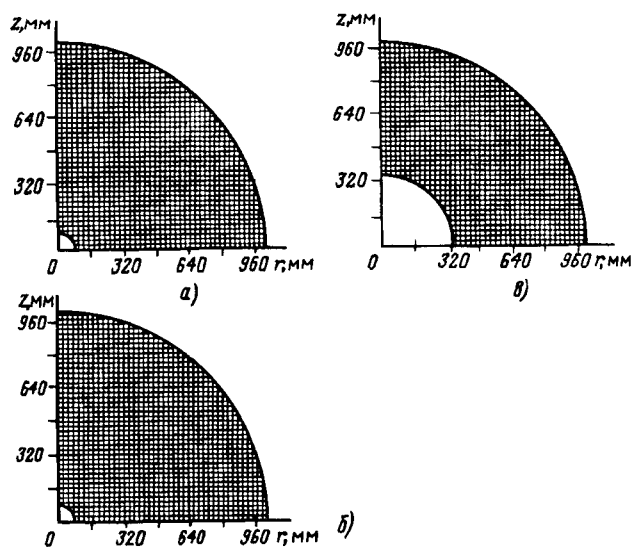


Рис. 3. Распределение знака погрешности потенциала: а — задача Ш/16/80, параметр прекращения итераций $\varepsilon=10^{-5}$; б — задача Ш/16/80, $\varepsilon=10^{-6}$; в — задача Ш/16/350, $\varepsilon=10^{-5}$

$$\max |u^{m+1}(k) - u^m(k)| \leq 10^{-5},$$

$$1 \leq k \leq N;$$

$$\max |u^{n+1}(k) - u^n(k)| \leq 10^{-6},$$

$$1 \leq k \leq N,$$

где N — количество узлов сетки; $m < n$ — количество проведенных итераций.

Видно, что погрешность положительна в регулярных узлах вдоль координатных осей r, z ; погрешность отрицательна в двух случаях: при слишком коротком итерационном процессе и в узкой области в виде столбца или строки узлов, расположенных по касательной к граничной поверхности.

Эти результаты можно интерпретировать следующим образом. Пусть на внутреннем электроде задан потенциал +1, на внешнем –0. В процессе итераций значения потенциала внутри области вычисляются как среднее арифметическое потенциалов в четырех ближайших узлах сетки. Поскольку начальное приближение принято равным 0,5, в начале итерационного процесса погрешность усечения $\varepsilon_{\text{ус}} < 0$. Далее граничные значения потенциала как бы «движутся» внутрь области. Поэтому в области интереса погрешность метода будет положительна. (Если в расчете на внутреннем электроде потенциала задан равным 1, а на внешнем –0, то погрешность у внутренней границы отрицательна. Знаки граничного потенциала и погрешности метода совпадают. Чтобы исключить неопределенность, в дальнейшем будем предполагать на внутренней границе положительный потенциал.)

Отрицательная околграничная погрешность

при достаточно длинном итерационном процессе, по-видимому, является свойством метода Шортли—Уэллера, принятого в нерегулярных узлах.

1.1. Погрешность метода конечных разностей $\varepsilon_{\text{мет}}$ с учетом последующего дифференцирования потенциальной функции на граничных поверхностях исследуется в трех видах:

максимальная вдоль оси r (рис. 1,а) или вдоль осей r, z (рис. 1,б)

$$\varepsilon_{\text{max}} = \max(u - U);$$

околограничная погрешность в регулярных узлах

$$\varepsilon_{\text{гр}}(h) = u(h) - U;$$

околограничная погрешность в нерегулярных узлах

$$\varepsilon_{\text{гр}}(h_a) = u(h_a) - U,$$

где u — приближенное и U — точные значения.

Соотношение максимальной и околограничной погрешностей представлено на рис. 4.

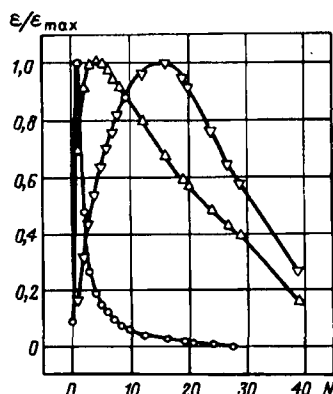


Рис. 4. Экспериментальная погрешность метода конечных разностей в зависимости от номера N узла, считая от внутреннего электрода: • — ВЭВ/16/13, $R_{\text{ср}}/h=0,8$, $\varepsilon=10^{-5}$; Δ — Ц/10/24,6, $R_{\text{ср}}/h=4,9$, $\varepsilon=2,4 \cdot 10^{-9}$; ∇ — Ц/10/350, $R_{\text{ср}}/h=70$, $\varepsilon=10^{-9}$

1.2. Максимальная погрешность нормированного потенциала выражена в работе [1] при $h/R_{\text{ср}} < 0,5$ в виде эмпирических формул:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\text{maxц}} &= 0,0194 (\bar{h}^{1,88}/\bar{R}^{1,92}), \quad \sigma=18\%, \text{ поле Ц;} \\ \varepsilon_{\text{maxшр}} &= 0,0964 (\bar{h}^{2,02}/\bar{R}^{1,82}), \quad \sigma=10\%, \text{ поле Ш вдоль оси } r; \\ \varepsilon_{\text{maxшз}} &= 0,0693 (\bar{h}^{1,92}/\bar{R}^{1,67}), \quad \sigma=18,6\%, \text{ поле Ш вдоль оси } z. \end{aligned} \right\} (1.3)$$

Здесь σ — среднее квадратическое отклонение истинных погрешностей от эмпирической функции; $\bar{h}$ — относительный шаг сетки (рис. 1):

$$\bar{h} = \frac{h}{\rho} = \frac{2}{\sqrt{(L-1)^2 + (M-1)^2}},$$

где h — шаг сетки; ρ — радиус окружности, описанной около двумерной области; L, M —

количество узлов соответственно в строке и в столбце сетки; R — относительный радиус кривизны:

$$\bar{R} = \frac{R_{\text{ср}}}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left| \frac{2}{\frac{1}{R_{k1}} + \frac{1}{R_{k2}}} \right|,$$

где $R_{\text{ср}}$ — радиус, соответствующий средней кривизне граничной поверхности в области интереса; R_{k1}, R_{k2} — главные радиусы кривизны. (При заданном направлении перемещения вдоль граничной поверхности, например при возрастании координаты z , кривизна считается положительной, если центр ее находится на положительной полупрямой нормали, и отрицательной, если центр лежит на отрицательной полупрямой нормали.)

Зависимости (1.3) определены в тестовых задачах при $\bar{h}=0,02 \div 0,15$; $R_{\text{ц}}=0,11 \div 5,5$; $\bar{R}_{\text{ш}}=0,11 \div 1,12$.

1.3. Околограничная погрешность потенциала $\varepsilon_{\text{гр}}(h)$ в регулярных узлах также представлена эмпирическими зависимостями от двух переменных:

$$\varepsilon_{\text{гр.ц}}(h) = 0,0982 (\bar{h}^{2,70}/\bar{R}^{2,41}),$$

$$\sigma=25,3\%, \text{ поле Ц;} \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{\text{гр.шр}}(h) = 0,1133 (\bar{h}^{2,59}/\bar{R}^{2,33}),$$

$$\sigma=10,7\%, \text{ поле Ш вдоль оси } r; \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_{\text{гр.шз}}(h) = 0,1307 (\bar{h}^{2,41}/\bar{R}^{2,26}),$$

$$\sigma=21,9\%, \text{ поле Ш вдоль оси } z. \quad (1.6)$$

Здесь обозначения и пределы параметров те же, что в (1.3).

1.4. Околограничная погрешность потенциала $\varepsilon_{\text{гр}}(h_a)$ в нерегулярных узлах определялась по приближенной формуле

$$\varepsilon_{\text{гр}}(h_a) = a \varepsilon_{\text{гр}}(h), \quad (1.7)$$

где $a=h_a/h$ — околограничное расстояние; $\varepsilon_{\text{гр}}(h)$ — погрешность в регулярных узлах.

Зависимость погрешности от координаты r , установленная в [1], учитывается в (1.7) условием:

$$\varepsilon_{\text{гр}}(h) = \varepsilon_{\text{грз}} \text{ при } r/R_{k1} \leq 0,3;$$

$$\varepsilon_{\text{гр}}(h) = \varepsilon_{\text{грр}} \text{ при } r/R_{k1} > 0,3.$$

Расчетная величина (1.7) сравнивалась с экспериментальными значениями $\varepsilon_{\text{грв}}$ и $\varepsilon_{\text{грс}}$, полученными в вычислительном эксперименте для пяти граничных задач типа Ш/ h/R_{k1} (рис. 1,б) и расчетных узлов В,С (рис. 5). Рассмотрим

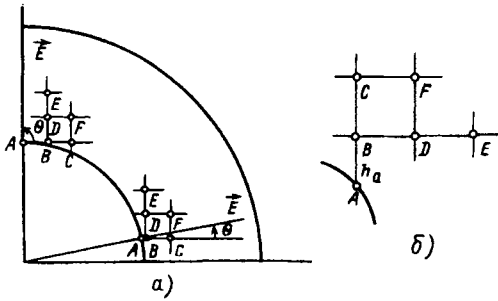


Рис. 5. Шеститочечный шаблон численного дифференцирования: а — вдоль оси абсцисс; б — вдоль оси ординат

результаты сравнения в задачах Ц/0,1/0,1 [5, табл. 4], Ц/1/265 [3, табл. 28] и Ш/0,05/0,2:

a_r	1	0,5	1,0	0,127	0,54	0,36	—	1,0	—
a_z	—	—	—	1,0	—	0,36	0,54	0,127	1,0
$\varepsilon_{гpB} \cdot 10^3$	7	-0,09	2,6	-0,5	-0,9	0,7	-0,5	-0,9	5,2
$\varepsilon_{гpC} \cdot 10^3$	6	0,60	2,3	1,8	2,0	2,0	2,2	4,3	4,6
$\varepsilon_{гp}(h_a) \cdot 10^3$	11	0,31	2,8	0,35	1,5	1,0	2,3	0,6	4,3

Из приведенных и неприведенных результатов следует ряд выводов. Во-первых, при $a=1$ (в регулярных узлах) в девяти случаях из десяти погрешности положительны и

$$\varepsilon_{гpB} \cong \varepsilon_{гpC} \cong \varepsilon_{гp}(h_a). \quad (1.8)$$

Во-вторых, при $a < 1$ в тех же девяти случаях погрешность отрицательна, но в соседнем регулярном узле положительна, так что

$$\varepsilon_{экспB} < \varepsilon_{гp}(h_a) < \varepsilon_{экспC} \cong \varepsilon_{гp}(h).$$

В-третьих, по абсолютному значению оценка (1.7) близка погрешностям потенциалов в обоих узлах.

Как показано в разделе 2.3, отрицательная погрешность околоразличного потенциала, меньшая по модулю 10^{-3} , занижает модуль погрешности напряженности. Оценочная по максимуму (1.8) положительная погрешность потенциала завышает погрешность напряженности. Поэтому предлагается компромиссный вариант: погрешность потенциала в узлах B и C положительна и вычисляется по уравнению (1.7).

1.5. Погрешность усечения итерационного процесса в регулярных узлах $\varepsilon_{yc}(h = \text{const}) = \varepsilon_{yc}(\varepsilon, \bar{h})$ является функцией двух переменных: параметра прекращения итераций ε и относительного шага сетки $\bar{h}$. Для случая циклической релаксации и граничной задачи «высоковольтный ускоритель» ВУ/16 при $\bar{h}=0,037$ в работе [4] приведена оценка

$$\varepsilon_{yc}(\varepsilon) = -(3 \div 50) \varepsilon, \quad (1.9)$$

или иначе

$$\varepsilon_{yc}(\varepsilon) \leq -10\varepsilon. \quad (1.10)$$

В другом вычислительном эксперименте с задачей Ш/16/80, $\bar{h}=0,0224$, на сетке из 64×64 узлов, для регулярного узла B на оси абсцисс (рис. 5) была получена разность

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{пот}}(10^{-5}) - \varepsilon_{\text{пот}}(10^{-6}) &= \varepsilon_{yc}(10^{-5}) - \\ &- \varepsilon_{yc}(10^{-6}) = -7 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Согласно оценке (1.10) имеем:

$$\varepsilon_{yc}(10^{-5}) - \varepsilon_{yc}(10^{-6}) = -9 \cdot 10^{-5}.$$

Как можно видеть, оценка близка экспериментальному результату и может считаться удовлетворительной при условии, что $\bar{h}=0,02 \div 0,04$. (Для погрешности усечения стационарного линейного итерационного процесса известны оценка через коэффициент подавления ошибки за одну итерацию [3, с. 89], а также другие оценки.)

Максимальная суммарная погрешность потенциала в зависимости от двух параметров $\varepsilon_{yc}(\varepsilon, \bar{h})$ была исследована в некотором контрольном регулярном узле в области сильного поля у внутреннего электрода в работе [6] при $\varepsilon=10^{-3} \div 10^{-6}$ и уменьшении шага $\bar{h}$ от 0,078 до 0,013. Граничная задача представляла собой цилиндрический конденсатор, подобный изображенному на рис. 1,а. Между электродами расположены пять параллельных слоев изоляции, причем газовая изоляция около внутреннего цилиндра чередовалась с твердыми диэлектриками во втором и четвертом слоях.

Поскольку базисная величина относительной погрешности и координаты контрольного узла в работе [6] не оговорены, количественный анализ результатов затруднен. Укажем только, что для случая последовательной верхней релаксации, особенно при шаге $\bar{h}=0,01-0,02$, погрешность усечения может в этой задаче на порядок и более превосходить оценку (1.10).

На качественном уровне можно заметить, что в тестовой задаче [6] при шаге $\bar{h}=0,078$ продолжение итераций после $\varepsilon=2 \cdot 10^{-3}$ бесполезно, т.е. $\varepsilon_{yc} < \varepsilon_{\text{мет}}$. При уменьшении шага сетки и $\varepsilon=10^{-3} = \text{const}$ погрешность $\varepsilon_{\text{пот}}$ возрастала в последовательности $1,5 \cdot 10^{-3}$, $1,8 \cdot 10^{-3}$, $1,2 \cdot 10^{-2}$, $1,7 \cdot 10^{-2}$. Увеличение погрешности $\varepsilon_{\text{пот}}$ согласно формуле (1.3) для цилиндрического поля может быть вызвано только слагаемым ε_{yc} в уравнении (1.2). Таким образом, в отношении шага сетки погрешности метода и усечения изменяются встречно: если первая уменьшается, то вторая возрастает. Чем меньше шаг, тем медленнее сходимость к точному решению, тем медленнее гра-

нические значения потенциала распространяются вглубь области. Суммарная погрешность потенциала может проходить через минимум и затем возрастать не только из-за встречного изменения двух погрешностей, но также вследствие того, что они имеют противоположные знаки.

1.6. Погрешность усечения итерационного процесса в нерегулярных узлах $\varepsilon_{yc}(h_a)$ по модулю уменьшается с приближением к границе с условием Дирихле. Тестовая задача СЭВ/1816/z (рис. 2) в процессе последовательного уменьшения шага сетки при относительных шагах, равных соответственно $\bar{h}=0,0288, 0,0208, 0,0289$, была просчитана с параметром прекращения итераций $\varepsilon=10^{-5}$. Согласно (1.4), (1.7) в этой задаче имеем неравенство

$$|\varepsilon_{гр}(h_a)| \leq 7 \cdot 10^{-6} \ll |\varepsilon_{yc}|.$$

В заданной задаче была получена зависимость

a	1,0	0,8	0,6	0,1
$\varepsilon_{yc} \cdot 10^4$	-1,0	-0,84	-0,5	-0,11

Вычислительный эксперимент подсказывает следующий алгоритм оценки:

$$\varepsilon_{yc}(h_a) = a\varepsilon_{yc}(\varepsilon, \bar{h}), \quad (1,11)$$

где $\varepsilon_{yc}(\varepsilon, \bar{h})$ — погрешность усечения в регулярных узлах.

1.7. Моделирование погрешности потенциала в реальных задачах с помощью установленных факторов погрешностей и эмпирических формул испытано для сфероидальных конденсаторов:

За- дача	ВЭВ/113/z			СЭВ/113/r			ВЭВ/67,5/r			СЭВ/1816/z		
h , мм	16	8	4	16	8	4	16	8	4	16	8	4
a	0,125	0,25	0,5	0,125	0,25	0,5	0,78	0,57	0,14	0,78	0,57	0,14
$\varepsilon_{грB}^* \times 10^3$	0,87	0,30	0,50	0,14	-0,24	-0,03	-1,9	-0,16	0,14	0,17	-1,90	-0,13
$\varepsilon_{грC}^* \times 10^3$	9,51	4,3	1,8	1,90	5,20	0,16	-1,8	-0,37	0,10	0,24	-5,20	-1,10
Мо- дель	ш	ш	ш	ц	ц	ц	ц	ц	ц	ш	ш	ш
$\varepsilon_{пот}^* \times (h_a)^* \times 10^3$	2,07	1,43	1,27	1,20	0,48	0,16	0,99	1,00	1,00	0,99	-5,60	-1,40

Соотношение между экспериментальными и расчетными значениями подобно результатам из раздела 1.4. Справедливость гипотезы о положительной расчетной оценке (1.7) следует установить путем сравнения погрешностей напряженности, полученных априорным расчетом и в вычислительном эксперименте (раздел 2.9).

2. Погрешность численного определения напряженности поля*. Применим способ тестовых расчетов и эмпирических формул к изучению погрешности напряженности поля. В отличие от погрешности нормированного потенциала будем рассматривать относительную погрешность напряженности

$$\delta = \frac{e-E}{E},$$

где e — приближенное; E — точное значения напряженности. В случае, когда в расчетную формулу подставлены точные значения потенциалов U , имеем погрешность метода дифференцирования

$$\delta_{мет} = \frac{e(U) - E}{E}. \quad (2.1)$$

Если используются приближенные значения потенциала u , найденные в вычислительном эксперименте методами сеток и итераций, погрешность назовем экспериментальной:

$$\delta_{эксп} = \frac{e(u) - E}{E}. \quad (2.2)$$

2.1. Расчетные формулы численного дифференцирования. Первый фактор погрешности. Пусть требуется продифференцировать потенциальную функцию в точке A на границе в области интереса. Рассматривая интерполирующий полином первого и второго порядка [7, с. 179], получим формулы численного дифференцирования и аналитическое выражение погрешностей:

$$E_{A2} = e_{A2} + \varepsilon_E = \frac{1}{h_a}(U_A - U_B) + \frac{h_a}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_A + O(h_a^2); \quad (2.3)$$

$$E_{A3} = e_{A3} + \varepsilon_E = \frac{1}{h} \left[\frac{2a+1}{a(a+1)} U_A - \frac{a+1}{a} U_B + \frac{a}{a+1} U_C \right] + \frac{a(a+1)h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_A + O(h^3); \quad (2.4)$$

$$E_{Ax} = e_{Ax} + \varepsilon_E = \frac{1}{h} \left[\frac{2a+1}{a(a+1)} U_A - \frac{a+1}{a} U_B + \frac{a}{a+1} U_C \right] + \frac{a(a+1)h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_A + O(h^3); \quad (2.5)$$

$$E_{Ay} = e_{Ay} + \varepsilon_E = \frac{1}{h} \left[\left(\frac{3}{2} + a \right) U_B - a(U_C - U_F) - (2+a)U_D + \frac{1}{2}U_E \right] - \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_A + \frac{a(2a-1)h^2}{2} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} \right)_A + \frac{a(2a^2+3a-1)h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2 \partial y} \right)_A + O(h^3). \quad (2.6)$$

* Первая версия методики оценки опубликована в Трудах XIV совещания по ускорителям заряженных частиц. — Протвино: ИФВЭ, 1994, т. 3, с. 55–59.

Здесь E_{A2} , E_{A3} и e_{A2} , e_{A3} — точные и приближенные значения напряженности для двухточечного и трехточечного шаблонов; E_{Ax} , E_{Ay} и e_{Ax} , e_{Ay} — соответствующие значения проекций вектора напряженности на координатные оси для шеститочечного шаблона (рис. 5,а); h — шаг сетки; $a=h_a/h$. В случае вертикальной прямой ABC (рис. 5,б) проекция E_{Ay} выражается уравнением (2.5), проекция E_{Ax} — уравнением (2.6).

Подставим в уравнение (2.3), (2.4) точные значения потенциалов и производных и вычислим в полях цилиндрического и шарового конденсаторов погрешности метода дифференцирования согласно уравнения (2.1) при $a=1$:

двухточечный шаблон

$$\delta_{\text{мет2}} = -2(h/R_{\text{ср}}) + 2,667(h/R_{\text{ср}})^2 -$$

$$-4(h/R_{\text{ср}})^3 + O(h^4), \text{ поле Ц,}$$

$$\delta_{\text{мет2}} = -(h/R_{\text{ср}}) + (h/R_{\text{ср}})^2 - (h/R_{\text{ср}})^3 +$$

$$+ O(h^4), \text{ поле Ш;}$$

трехточечный шаблон

$$\delta_{\text{мет3}} = -2,667(h/R_{\text{ср}})^2 + 12(h/R_{\text{ср}})^3 -$$

$$-44,8(h/R_{\text{ср}})^4 + O(h^5), \text{ поле Ц,}$$

$$\delta_{\text{мет3}} = -2(h/R_{\text{ср}})^2 + 6(h/R_{\text{ср}})^3 -$$

$$-14(h/R_{\text{ср}})^4 + O(h^5), \text{ поле Ш,}$$

где $R_{\text{ср}}$ — радиус средней кривизны граничной поверхности в области интереса.

Из последних четырех уравнений следует, что погрешность обоих методов определяется одним и тем же параметром $h/R_{\text{ср}}$, от которого зависят слагаемые с производными второго и более высоких порядков в (2.3), (2.4). Далее, погрешность максимальна на внутреннем электроде; погрешность отрицательна при $h/R_{\text{ср}} > 0$.

Зависимость погрешности методов от первого фактора (рис. 6) была определена численными расчетами серии тестовых задач № 1, где шаровое и цилиндрическое поля зависели от одной координаты r , радиус наружного электрода 650 мм и число разбиений $L/h=63$ межэлектродного промежутка L оставались постоянными, шаги $h_{\text{Ц}}=10$ мм, $h_{\text{Ш}}=16$ мм. Радиус внутреннего электрода $R_1=\text{var}$, так что $h/R_{\text{ср}}=0,01-2,5$.

Определенные в тестах погрешности метода были меньше нуля на обоих электродах; во внутренних точках промежутка погрешность положительна и не превосходит половины модуля погрешности на внутреннем электроде. Из рис. 6 можно видеть существенное преимущество трехточечного шаблона перед двухточечным. По этой

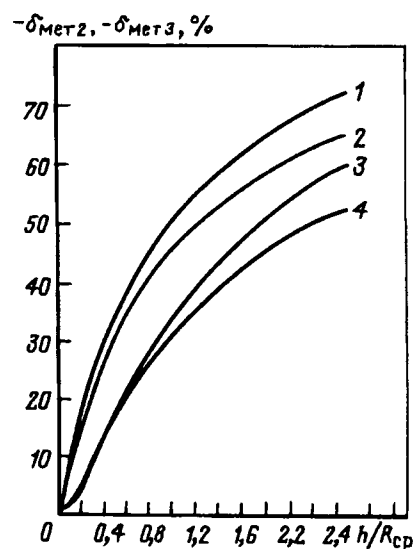


Рис. 6. Погрешность метода дифференцирования $\delta_{\text{мет}}(h)$ для шаровых полей (1, 3) и цилиндрических полей (2, 4): 1, 2 — по двухточечному шаблону (2.2); 3, 4 — по трехточечному шаблону (2.3)

причине двухточечный шаблон далее не исследовался. Методом наименьших квадратов получены степенные зависимости:

при малых шагах $0,01 \leq h/R_{\text{ср}} < 0,3$

$$\delta_{\text{мет3}}(h) = -84,9(h/R_{\text{ср}})^{1,74} \%, \text{ поле Ц,}$$

$$\delta_{\text{мет3}}(h) = -63,2(h/R_{\text{ср}})^{1,66} \%, \text{ поле Ш;}$$

при больших шагах $0,3 \leq h/R_{\text{ср}} \leq 2,5$

$$\delta_{\text{мет3}}(h) = -27,7(h/R_{\text{ср}})^{0,82} \%, \text{ поле Ц,}$$

$$\delta_{\text{мет3}}(h) = -30,6(h/R_{\text{ср}})^{0,85} \%, \text{ поле Ш.}$$

Различия между цилиндрическим и шаровым вариантами превышает 0,5% лишь в области больших погрешностей: $|\delta_{\text{мет3}}| > 25\%$, $h/R_{\text{ср}} > 0,7$. Следовательно, закон распределения поля по радиусу является относительно слабым фактором погрешности.

2.2. Второй фактор погрешности метода — относительное расстояние $a=h_a/h$ между околограничным узлом и границей. Количественные зависимости погрешности $\delta_{\text{мет3}}(h_a)$ были представлены отношением

$$k_a = \frac{\delta_{\text{мет3}}(h_a)}{\delta_{\text{мет3}}(h)},$$

где $\delta_{\text{мет3}}(h) = \delta_{\text{мет3}}(h/R_{\text{ср}})$ — погрешность метода для регулярных узлов, определенная с помощью тестовых задач № 1. В серии тестовых задач № 2, в которых напряженности шаровых и цилиндрических полей зависели только от одной координаты r , варьировались два параметра: $a=0,125; 0,5; 0,75$ и $h/R_{\text{ср}}=0,04 \div 1,23$. Другие

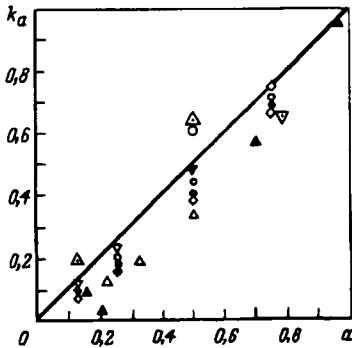


Рис. 7. Поправка на околограничное расстояние в зависимости от двух параметров. Отношение h/R_{cp} равнялось: $\diamond - 0,04$; $\Delta - 0,046$; $\bullet - 0,1$; $\square - 0,2$; $\nabla - 0,4$; $\odot - 0,78$; $\ominus - 1,0$; $\triangle - 1,23$

геометрические параметры на погрешность не влияли, относительное расстояние между электродами L/h (рис. 7).

Погрешность метода дифференцирования в нерегулярных узлах удобно вычислять в виде

$$\delta_{мет3}(h_a) = k_a \delta_{мет3}(h), \tag{2.7}$$

где для малых шагов при $h/R_{cp} < 1$

$$k_a \cong a$$

и для больших шагов при $h/R_{cp} \geq 1$ имеется эмпирическая зависимость

$a \dots$	0,125	0,5	0,75
$k_a \dots$	1,6a	1,26a	1,07a

2.3. Третьим фактором погрешности в регулярных узлах являются приближенные значения u потенциала в узлах B и C для трехточечного шаблона. Эти значения обычно определяются численным методом. Количественная характеристика погрешности напряженности

$$\delta_{числ3}(h) = \frac{e(u) - E}{E}$$

была определена с помощью серии тестовых задач № 3, в которых потенциалы и напряженности в шаровом и цилиндрическом конденсаторах зависели от одной координаты r .

В тестовой задаче предполагались постоянными радиус внутреннего электрода R_{cp} и отношение $a=1$. Значения потенциалов в узлах B и C задавались с одинаковой погрешностью $\varepsilon_{пот}$:

$$U_A = 1;$$

$$u_B = U_B + \varepsilon_{пот};$$

$$u_C = U_C + \varepsilon_{пот},$$

где U_B, U_C — точные и u_B, u_C — приближенные значения потенциалов.

Поскольку в тестовых расчетах не удастся разделить влияние на результат параметров h/R_{cp} и $\varepsilon_{пот}$, как это было сделано в тестовых задачах № 1 и № 2, в серии задач № 3 вычисления проводились одновременным перебором каждого из трех параметров (вложенные циклы):

$$h/R_{cp} = 0,01; 0,04; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2;$$

$$\varepsilon_{пот} = -10^{-2}; -10^{-3}; -10^{-4}; -10^{-6}; 0; 10^{-6}; 10^{-4}; 10^{-3}; 10^{-2};$$

$$L/h = 19; 63; 192; 511.$$

Здесь L/h — отношение межэлектродного расстояния к шагу дискретизации координаты r .

Представленная на рис. 8 положительная погрешность напряженности $\delta_{числ3}$ соответствует отрицательной погрешности потенциала. В пре-

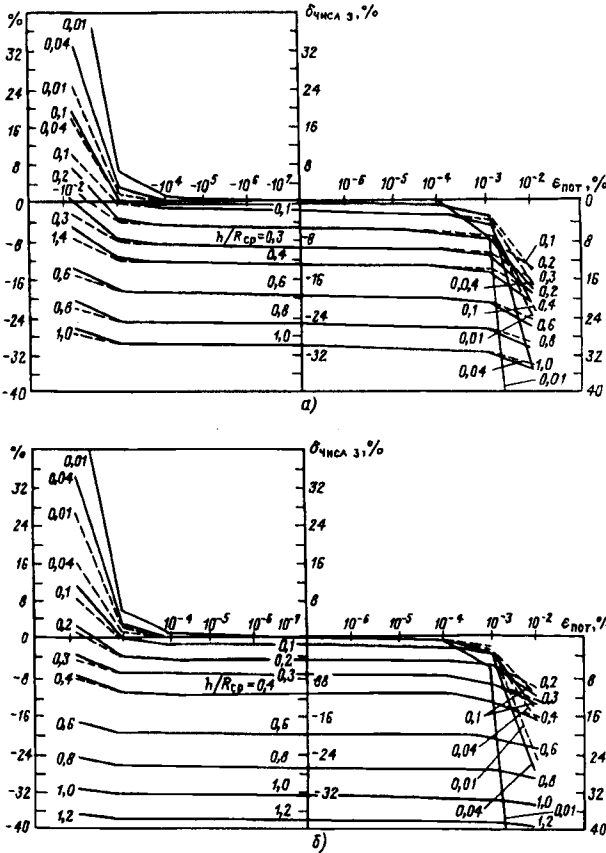


Рис. 8. Погрешность дифференцирования по трехточечному шаблону $\delta_{числ3}$ в зависимости от околограничной погрешности потенциала $\varepsilon_{пот}$ и отношения h/R_{cp} . Цифрами на кривых обозначены значения h/R_{cp} от 0,01 до 1,2. Сплошная и штриховая линии относятся к значениям L/h , равным соответственно 19 и 63:

a — в цилиндрическом конденсаторе при $\varepsilon_{пот} = \pm 10^{-7}$ (ось ординат) имеем

h/R_{cp}	0,01	0,04	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8	1,0
$\delta_{числ3}, \%$	-0,026	-0,36	-1,8	-5,1	-9,1	-12,8	-19,6	-25,4	-30,4

b — в шаровом конденсаторе при тех же условиях

h/R_{cp}	0,01	0,04	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$\delta_{числ3}, \%$	-0,02	-0,29	-1,5	-4,7	-7,6	-11,7	-20,4	-27,3	-33,2	-38,5

делах $-10^{-4} < \varepsilon_{\text{пот}} < 10^{-4}$ погрешность напряженности совпадает с величиной $\delta_{\text{мет3}}$ из раздела 2.1. Чем больше погрешность потенциала, тем больше по модулю погрешность напряженности.

Тестовая задача № 3 соответствует принятой в разделе 1.4 приближенной оценке (1.7) околограничной погрешности потенциала.

2.4. Четвертый фактор, определяющий погрешность, L/h — степень дискретизации межэлектродного расстояния L — был обнаружен в серии тестовых задач № 3. Согласно рис. 8 этот параметр усугубляет влияние на погрешность $\delta_{\text{числ3}}$ погрешности потенциала: чем меньше шаг сетки, тем сильнее погрешность потенциала искажает приближенное значение напряженности.

В разработанном нами комплексе программ РЭП зависимости $\delta_{\text{числ3}}(L/h)$ выражены в диапазоне $L/h = 19 \div 511$ в виде эмпирических формул, которые позволяют вычислить величину $\delta_{\text{числ3}}(L/h)$ по заданным параметрам $h/R_{\text{ср}}$, $\varepsilon_{\text{пот}}$ и L/h , не пользуясь номограммами рис. 8.

Следует сделать ряд методических замечаний. В многоэлектродных конструкциях необходимо рассматривать промежуток L между электродами с максимальной разностью потенциалов, в конструкциях типа шар—шар — между электродом и плоскостью симметрии. В случае ребристых осесимметричных структур типа высоковольтного ускорителя (раздел 2.10) наружные электроды колонны имели главные радиусы кривизны $R_{k1} = 13$ мм и $R_{k2} = 350$ мм, и параметр дискретизации пространства вычисляется как

$$L/h = (R_2 - R_{k2})/h,$$

где R_2 — радиус бака ускорителя.

Далее, как и следовало ожидать, в вычислительном эксперименте было показано, что при последовательном уменьшении шага сетки $L = \text{const}$.

2.5. Пятый фактор — определение модуля вектора напряженности. Пусть известны погрешности δ_x , δ_y проекций напряженности e_{Ax} , e_{Ay} :

$$\delta_x = (e_x - E_x)/E_x; \quad \delta_y = (e_y - E_y)/E_y.$$

Модуль напряженности и его погрешность равны:

$$|\vec{e}| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}; \quad \delta_{\text{мод}} = (|\vec{e}| - E)/E,$$

где $|\vec{e}|$, e_x , e_y — приближенные и E , E_x , E_y — точные значения.

Можно показать, что с точностью до величин порядка δ_x^2 , δ_y^2 погрешность модуля выражается в виде

$$\delta_{\text{мод}} = \delta_x \frac{E_x}{E} \frac{e_x}{e} + \delta_y \frac{E_y}{E} \frac{e_y}{e}.$$

Отсюда следует, что в двух частных случаях $E_x \gg E_y$ и $E_x \approx E_y$ погрешности модуля и проекции являются величинами одного порядка.

В отличие от первых четырех факторов количественная оценка погрешности модуля была определена посредством вычислительного эксперимента — тестовая задача № 4, в которой поле шарового конденсатора Ш/16/80 было определено численно в координатах r , z (рис. 1,б). Выразим погрешность модуля $\delta_{\text{эксп}}$ (для шеститочечного шаблона) через погрешность проекции $\delta_{\text{числ3}}$ в виде произведения

$$\delta_{\text{эксп}} = \delta_{\text{числ3}} k_a k_{\text{мод}},$$

где $\delta_{\text{числ3}}$ определяется по номограммам рис. 8; k_a — поправка на околограничное расстояние; $k_{\text{мод}}$ — подлежащая определению в эксперименте поправка на модуль.

В тестовой задаче № 4 радиусы электродов равны 80 и 992 мм, шаг сетки 16 мм. В соответствующей тестовой задаче № 1 имеем: $\delta_{\text{мет3}} = -4,75\%$; в тестовой задаче № 3: $h/R_{\text{ср}} = 0,2$; $L/h = 57$; вдоль оси r $\varepsilon_{\text{грр}} = 0,99 \times 10^{-3}$ и $\delta_{\text{числ3}} = -5,4\%$; вдоль оси z $\varepsilon_{\text{грз}} = 1,95 \times 10^{-3}$ и $\delta_{\text{числ3}} = -7,5\%$.

Вычислительный шеститочечный шаблон был сначала применен к точным значениям потенциала в узлах $B-F$. В таблице указаны значения погрешности метода

Погрешность напряженности $\delta_{\text{мет6}}$, $\delta_{\text{эксп}}$ и поправка на модуль $k_{\text{мод}}$ на внутреннем электроде конденсатора Ш/16/80

z_A , мм	θ , град	a	$\delta_{\text{мет6}}$, %	$k_{\text{мод,мет}}$	$\delta_{\text{эксп}} (\varepsilon = 10^{-3})$, %	$\delta_{\text{эксп}} (\varepsilon = 10^{-5})$, %	$\delta_{\text{эксп}} (\varepsilon = 10^{-6})$, %	$k_{\text{мод}}$
0	0	1	-4,72	0,99	-0,76	-5,40	-5,45	1,01
0	-90	1	+0,57	-0,12	—	-0,19	-0,23	0,04
16	11,5	0,1	+0,19	-0,40	—	—	+0,84	-1,56
32	23,5	0,4	-1,18	0,62	—	—	-0,83	0,38
48	37	1	-5,91	1,24	+5,30	-5,47	-5,50	1,02
64	53	1	-6,92	1,46	+5,03	-6,70	-6,72	1,24
48	-53	1	-6,92	1,46	—	—	-5,72	1,06
64	-37	1	-5,91	1,24	—	—	-6,57	1,22
73,3	-23,5	0,4	-1,18	0,62	—	—	-0,96	0,44
78,4	-11,5	0,1	+0,19	-0,40	—	—	+1,37	-2,53
80	+90	1	+0,57	-0,12	—	-0,99	-1,03	0,19
80	0	1	-4,72	0,99	-1,39	-6,05	-6,06	1,12

и коэффициент

$$k_{\text{мод.мет}} = \frac{\delta_{\text{мет6}}}{\delta_{\text{мет3}} k_a}$$

Экспериментальные значения погрешности определены для трех параметров прекращения итераций $\varepsilon = 10^{-3}$; 10^{-5} ; 10^{-6} . Поправка на модуль при $\varepsilon = 10^{-6}$ равнялась

$$k_{\text{мод}} = \frac{\delta_{\text{эксп}}}{\delta_{\text{числ3}} k_a}$$

Результаты расчетов (см. таблицу) хорошо согласуются со значениями погрешностей, полученных в тестовых задачах № 1—№ 3 (если учесть, что погрешность эмпирической формулы для $\varepsilon_{\text{грз}}$ составляла 22%). Из таблицы видно, что поправка на модуль зависит от значения угла θ между направлениями векторов ABC и напряженности. При $\theta = 0^\circ$ и $a = 1$ поправка равна единице и превышает единицу в случае углов около 45° . Значение, меньшее единицы, получено там, где погрешность мала, — при малых углах и расстояниях a . Особо малая поправка, соответствующая $\theta = \pm 90^\circ$, вызвана близостью к границе узлов B и C , хотя формально $a = 1$. Имеем приближенно:

$$\begin{matrix} |\theta|, \text{ град} & 0, \dots, 30; 60, \dots, 89 & 45 \pm 14 & 90 \\ k_{\text{мод}} & \dots \dots \dots 1,0 & 1,24 & 0,1 \end{matrix} \quad (2.8)$$

2.6. Априорная оценка погрешности. Используя результаты предыдущих тестовых задач для каждой точки пересечения сетки с граничной поверхностью можно рассчитать ожидаемую погрешность $\delta_{\text{расч}}$ в зависимости от пяти параметров $(h/R_{\text{ср}}, a, \varepsilon_{\text{пот}}, L/h, \theta)$:

$$\delta_{\text{расч}} = \delta_{\text{числ3}} k_a k_{\text{мод}} \cdot \quad (2.9)$$

Систематическая погрешность должна быть учтена в окончательном результате, т.е. в расчетном модуле напряженности $E_{\text{расч}}$. Подставим в определение погрешности (2.2) вместо $\delta_{\text{эксп}}$ величину $\delta_{\text{расч}}$, а вместо точного значения E — расчетное:

$$\delta_{\text{расч}} = \frac{e}{E_{\text{расч}}} - 1.$$

Отсюда

$$E_{\text{расч}} = \frac{e}{1 + \delta_{\text{расч}}} \cdot \quad (2.10)$$

Сопоставим экспериментальные и расчетные погрешности, а также расчетное и точное значения напряженности:

для цилиндрических полей (рис. 1,б)

$h/R_{\text{ср}}$	1	0,5[6]	0,4	0,2	0,2[3]	0,1	0,05	0,04	0,014	0,013	0,007
a	1	1	1	1	0,5	1	1	1	1	1	1
$\delta_{\text{эксп}}, \%$	-34,0	-18,8	-15,2	-6,2	-2,1	-2,2	-0,6	-0,4	-0,06	-0,05	-0,02
$\delta_{\text{расч}}, \%$	-34,8	-20,3	-16,8	-5,6	-2,9	-2,7	-0,7	-0,6	-0,03	-0,03	-0,02
$E_{\text{расч}}/E$	1,012	1,019	1,019	0,994	1,008	1,004	1,001	1,003	1,000	1,000	1,000

для шаровых полей:

задача Ш/0,05/0,2, $R_{k1} = 0,2$ мм, $h = 0,05$ мм, $h/R_{\text{ср}} = 0,25$

$\theta, \text{ град}$	0(r)	-90	15	30	49	-49	-30	-15	90	0(z)
a	1	1	0,13	0,54	0,35	0,35	0,54	0,13	1	1
$\delta_{\text{эксп}}, \%$	-7,5	-1,26	+1,3	-2,6	-3,4	-3,2	-2,9	+1,8	-2,4	-8,3
$\delta_{\text{расч}}, \%$	-9,1	-0,91	-0,86	-4,2	-3,9	-3,9	-4,6	-0,9	-0,98	-9,8
$E_{\text{расч}}/E$	1,018	0,996	1,021	1,017	1,005	1,007	1,018	1,027	0,986	1,017

задача Ш/16/80, $R_{k1} = 80$ мм, $h = 16$ мм, $h/R_{\text{ср}} = 0,2$

$\theta, \text{ град}$	0(r)	-90	11,5	23,5	37	53	-53	-37	-23,5	-11,5	90	0(z)
a	1	1	0,1	0,4	1	1	1/1	1	0,4	0,1	1	1
$\delta_{\text{эксп}}, \%$	-5,5	-0,23	+0,8	-0,8	-5,5	-6,7	-5,7	-6,6	-1,0	+1,4	-1,0	-6,1
$\delta_{\text{расч}}, \%$	-5,4	-0,54	-0,5	-1,6	-6,7	-6,7	-6,7	-6,7	-2,1	-0,5	-0,7	-7,3
$E_{\text{расч}}/E$	1,000	1,003	1,013	1,013	1,013	1,000	1,011	1,001	1,01	1,019	0,997	1,013

задача Ш/16/350, $R_{k1} = 350$ мм, $h = 16$ мм, $h/R_{\text{ср}} = 0,046$

θ , град	0(r)	2,6	5,3	7,9	-60	51	-40	-19	73,4	-16	0(z)
a	0,125	0,15	0,21	0,33	0,16	$\frac{0,19}{0,19}$	$\frac{0,19}{0,23}$	$\frac{0,28}{0,28}$	$\frac{0,28}{0,88}$	0,96	0,125
$\delta_{\text{эксп}}$, %	+0,03	-0,04	-0,06	-0,8	-0,20	-0,01	-0,02	+0,04	-0,32	-0,4	+0,08
$\delta_{\text{расч}}$, %	-0,05	-0,06	-0,09	-1,6	-0,07	-0,10	-0,10	-0,14	-0,14	-0,5	-0,05
$\frac{E_{\text{расч}}}{E}$	1,001	1,001	1,002	1,013	0,999	1,001	1,001	1,002	0,998	1,001	1,001

Как можно видеть, несмотря на упрощающую гипотезу о положительной околোগраничной погрешности потенциала, на погрешность эмпирических формул $\varepsilon_{\text{гр}}(h)$ и приближенные зависимости $k_a(a)$, $k_{\text{мод}}(\theta)$, априорные и экспериментальные величины погрешности близки и расчетная напряженность имеет погрешность не более $\pm 1 \div 2\%$.

2.7. Шестой фактор погрешности $\Delta X/h_x$ — степень дискретизации граничной кривой в области интереса — проявляется в завышении поправки $\delta_{\text{расч}}$ против экспериментального значения при углах $\theta < 90^\circ$ и $\Delta X/h < 1$.

В цилиндрических и шаровых полях, исследованных в предыдущем разделе, параметр дискретизации граничной кривой удовлетворял неравенству $\Delta X/h \geq 2,5$, где ΔX — протяженность куска границы с большой кривизной в направлении x ; h_x — шаг сетки в том же направлении.

Параметр дискретизации равнялся соответственно в вычислительных экспериментах (задача № 4) 2,5 (Ц/1/2,5 [3]), 2 (Ш/16/32), 1 (Ш/16/16) и 0,81 (Ш/16/13). В зависимости от количества отрезков $\Delta X/h$, представляющих граничную кривую, для двух областей угла θ ($\theta < 90^\circ$ и $\theta = 90^\circ$) имеем следующую погрешность расчета напряженности согласно уравнению (2.10):

$\Delta X/h$	4	2,5	2	2	1	0,81	2	1
θ , град	0	0	0	30	0	0	90	90
$\delta_{\text{эксп}}$, %	-7,5	-2,1	-18,8	-1,11	-34,3	-7,3	-14,6	-42,1
$\delta_{\text{расч}}$, %	-9,1	-2,85	-17,7	-1,14	-34,7	-11,6	-1,60	-3,5
$\frac{E_{\text{расч}}}{E}$	1,018	1,002	0,990	1,000	1,006	1,050	0,87	0,60

Повышенная погрешность (5%) напряженности $E_{\text{расч}}$ в задаче Ш/16/13 объясняется тем, что при $\Delta X/h < 1$ нарушается принцип разделения и последовательного учета факторов $h/R_{\text{ср}}$ и a , на котором основана оценка (2.9). Общее условие, накладываемое на представление границы в области интереса с целью получения высокой точности расчета, выразим как

$$\Delta X/h > 2.$$

(2.11)

2.8. Слабые факторы. К слабым факторам можно отнести дискретизацию границы $\Delta X/h$, если исключить дифференцирование при $\theta = 90^\circ$. Кроме того, как показано в разделе 2.1, напряженность слабо зависит от закона изменения потенциала в промежутке $u(r)$.

Модуль напряженности не является фактором погрешности. Так, в серии тестовых задач № 3 с увеличением расстояния между электродами L/h от 19 до 511 напряженность возрастает с 0,25 1/м до 54 1/м, но погрешность $\delta_{\text{числ}}$ неизменна, если погрешность потенциала $\varepsilon_{\text{пот}} < 10^{-4}$ (рис. 8). Точно так же экранирование поля соседними электродами не меняет погрешности напряженности, так как главные факторы погрешности при этом неизменны.

2.9. Моделирование погрешности расчетов произвольного слабонеоднородного поля посредством эмпирических зависимостей, выведенных для шарового и цилиндрического конденсаторов, было испытано на четырех сфероидальных полях. Критерием точности по-прежнему считаем отношение $E_{\text{расч}}/E$, вычисляемое по (2.9), (2.10):

Задача	ВЭВ/h/13/z			СЭВ/h/13/r			ВЭВ/h/67,5/r			СЭВ/h/1816/z		
h, мм	16	8	4	16	8	4	16	8	4	16	8	4
a	0,125	0,25	0,5	0,125	0,25	0,5	0,78	0,57	0,14	0,78	0,57	0,14
$\delta_{\text{эксп}}$, %	-9,0	-5,4	-5,2	-4,0	-1,7	-1,8	-1,9	-0,16	0,14	0,17	0,15	0,08
$\delta_{\text{расч}}$, %	-8,1	-5,7	-5,5	-2,8	-2,4	-2,0	-1,8	-0,37	0,10	0,24	0,43	0,06
Модель	Ш	Ш	Ш	Ш	Ш	Ш	Ц	Ц	Ц	Ш	Ш	Ш
$\frac{E_{\text{расч}}}{E}$	0,990	1,003	1,003	0,988	1,007	1,002	0,999	1,002	1,000	0,999	0,997	1,000

Точность расчета напряженности $E_{\text{расч}}$ укладывается в пределы $\pm 1\%$. Справедливость моделирования можно считать доказанной. На поверхности диска (СЭВ/h/13/r) получены одинаковые результаты на обеих моделях: 0,7% (Ш) и 1,1% (Ц).

2.10. Точное решение. Если в расчетной оценке погрешности правильно учтены все главные факторы, то в результате внесения поправки (2.10) при последовательном уменьшении шага сетки значение напряженности не должно изменяться.

Пример. Рассмотрим осесимметричную вертикальную структуру высоковольтного ускорителя ЭГ-2,5 (рис. 9), заключенную в цилиндрический бак диаметром 1,6 м (на рисунке не показан). Электрод-кондуктор имеет полусферический верх диаметром 700 мм и закругленное основание цилиндра (радиус 25 мм). Градиентные (экранирующие внутреннюю область колонны) кольца круглого поперечного сечения расположены вдоль колонны с шагом 50 мм и с шагом нормированного потенциала 0,025. Результаты вычисления напряженности представлены в двух точках: на поверхности кондуктора ($z = 144$ мм) и

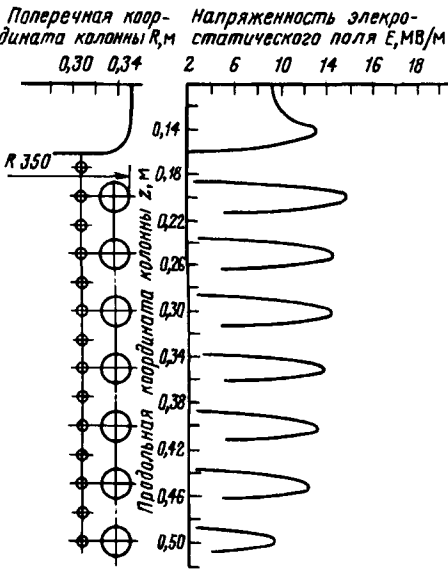


Рис. 9. Распределение электростатического поля вдоль цилиндрической части кондуктора и градиентных колец колонны высокочастотного ускорителя ЭГ-2,5. Потенциал кондуктора 2,5 МВ. Внутри градиентных колец расположена рамка ускоряющей трубки

первого градиентного кольца ($z=200$ мм). Шаг сетки указан в названии задачи. Здесь в качестве точного значения E принято среднее из трех и пяти расчетных значений, полученных с помощью (2.10) для первой и второй точек соответственно. Расчет подтверждает возможность моделирования погрешности. В принципе неизвестное точное решение определено с точностью до $\pm 1\%$:

Задача	ВУ/8	ВУ/4	ВУ/2	ВУ/8	ВУ/4	ВУ/2	ВУ/2	ВУ/2
z , мм	144	144	144	200	200	200	200	200
$\Delta X/h$	3,1	6,3	12,5	3,3	6,5	13	6,5	6,5
a	0,91	0,83	0,66	0,75	0,5	1,0	1,0	1,0
h/R_{cp}	0,171	0,086	0,043	0,319	0,160	0,080	0,080	0,080
L/h	54,6	113	225	54,6	113	225	225	225
θ , град	23,4	23,4	23,4	0	0	0	-90	90
$\delta_{расч}$, %	-4,84	-1,24	-1,20	-9,15	-2,14	-1,73	-0,19	-0,19
E	13,029	13,029	13,029	15,464	15,464	15,464	15,464	15,464
$E_{расч}/E$	0,997	0,996	1,007	0,993	0,995	0,990	1,005	1,017

Выводы. 1. Анализ систематической погрешности достаточно сложен. Насколько нам известно, впервые получено целостное количественное представление о фактических погрешностях потенциала и напряженности в численном расчете для метода конечных разностей.

2. Даже если известны только три параметра $\bar{n}$, R_{cp} , ϵ и они принадлежат исследованной области параметров, погрешности с помощью эмпирических формул и номограмм могут быть оценены. Всего в работе определена сила воздействия шести параметров-факторов на погрешность потенциала и шести или более факторов на погрешность напряженности.

3. Внесение оценки в результат в качестве поправки увеличивает точность расчета до $\pm 1\%$. При этом в случае произвольного поля расчетные параметры не должны выходить за указанные пределы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Резвых К.А. Погрешность метода конечных разностей в электростатических задачах со сложной конфигурацией границ. — Электричество, 1985, № 4.

2. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963.

3. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрооптики. — Новосибирск: Наука, 1974.

4. Резвых К.А., Романов В.А., Ярмахов И.Г. Модифицированный метод верхней релаксации для исследования электростатических полей. — Электричество, 1985, № 11.

5. Ильин В.П., Голубцов Б.И. Автоматизация решения краевых задач для уравнения Пуассона. — Новосибирск: Наука, 1969.

6. Левит А.Г., Никитина Е.И., Щипунова Н.И. Оценка оптимальных параметров расчета методом сеток на ЭЦВМ осесимметричных электростатических полей с неоднородной изоляцией. — В сб. Передача энергии постоянным и переменным током. — Л.: Энергоатомиздат, 1980.

7. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. — М., Л.: Физматгиз, 1962.

[25.05.95]

Авторы: Резвых Константин Анатольевич окончил в 1960 г. электромеханический факультет Ленинградского политехнического института (ЛПИ, ныне Санкт-Петербургский технический университет, СПбГТУ). В 1987 г. защитил кандидатскую диссертацию по теме «Оптимизация газоизолированной структуры высоковольтного ускорителя» в Московском инженерно-физическом институте (МИФИ). Старший научный сотрудник Государственного научного центра — Физико-энергетического института, (ГНЦ—ФЭИ), Обнинск.

Романов Валентин Александрович окончил в 1954 г. МИФИ. В 1989 г. защитил докторскую диссертацию по теме «Исследование и разработка высоковольтных ускорителей и создание комплекса ускорителей для обеспечения прикладных и фундаментальных ядерно-физических исследований». Начальник отдела ГНЦ—ФЭИ.

Диагностика точечных источников электромагнитных шумов

КИНШТ Н.В., КАЦ М.А.

Создаваемые электрооборудованием подстанций высокочастотные электромагнитные шумы в значительной степени отражают его состояние исправности или близость к отказу. Обсуждаются принципы построения диагностической модели и организации диагностирования электрооборудования подстанций на основе измерения электромагнитных шумов. Анализируются вопросы генерирования и распределения шумов на подстанции. Рассматриваются эквивалентная схема измерения шумов и уравнения, описывающие решение задачи диагностики. Формализуется математическое описание направленных свойств антенны при измерении высокочастотных шумов.

Ключевые слова: подстанции, электрооборудование, диагностирование, высокочастотные электромагнитные шумы

Техническая диагностика как научное направление в начале своего становления [1], в 60-е годы, была нацелена на сложные технические объекты различного назначения, но наибольшего развития ее методы достигли применительно к электронным дискретным системам. В дальнейшем были получены заметные теоретические результаты, ориентированные на электрические цепи в широком смысле этого слова [2]. Лишь в последние годы эти методические результаты технической диагностики начинают находить свое приложение в электроэнергетике.

Электрические подстанции (ПС) представляют собой самостоятельные объекты, играющие важную роль в процессе распределения энергии. В практике постановки задач диагностирования до настоящего времени ПС обычно рассматриваются как совокупность единиц оборудования, которые по отдельности обладают свойствами индивидуального технического состояния (исправности либо неисправности) и которые также надлежит индивидуально диагностировать. На первый взгляд трудно найти информационные признаки, которые в обобщенной форме характеризовали бы техническое состояние (ТС) единиц оборудования ПС в некой совокупности и позволяли бы при минимальной трудоемкости оценивать его ТС в рабочих режимах. Элементы оборудования (ЭО) ПС электрически объединены процессом передачи энергии (электрической схемой в некотором режиме работы) и общим полем электромагнитных шумов (ЭМШ). Рассмотрим некоторые принципы построения диагностической модели (ДМ) и организации диагностирования основного электроэнергетического обо-

High-frequency electromechanical noises created by electrical equipment of substations reflect in a great degree its serviceability state or proximity of failure. Principles for constructing a diagnostics model and organizing diagnostics of an electrical equipment of substations on the basis of measuring electromagnetic noises are discussed. Questions of generating and distributing noises at a substation are analyzed. Equipment circuits for measuring noises and equations describing the solution of the diagnostics problem are considered. A mathematical description of antenna direction properties when measuring high-frequency noises is formalized.

Key words: substation, electrical equipment, high-frequency noises, diagnostics

рудования ПС на основе измерения высокочастотных электромагнитных шумов ПС, поскольку они в значительной степени отражают состояние исправности или неисправности ЭО [3]. Основной целью исследования высокочастотных ЭМШ на ПС является раннее предупреждение о тенденциях в изменении ТС ЭО при минимальном вмешательстве в технологический процесс.

Диагностическая модель обычно включает в себя следующие фрагменты [4]. Во-первых, это элементы ДМ, обычно ассоциированные с конкретными неисправностями либо параметрами, определяющими ТС, либо процессами, приводящими к неисправности. При задании ДМ должны быть описаны выходы (реакции), измеряемые или контролируемые в процессе диагностирования. Далее, должны быть формализованы связи между ТС элементов, входными воздействиями и реакциями. В ДМ следует объединять элементы, имеющие между собой системные связи, имеющие некую общность входных воздействий и реакции, в которых отражается ТС некоторых (под)множеств элементов. Эта общность может проявляться, как правило, в физическом проявлении воздействие—реакция и математическом аппарате, интерпретации манипуляций и результатов контроля и наблюдений.

Следует различать элементы оборудования и элементы ДМ. Так, в качестве элементов основного оборудования ПС можно назвать трансформаторы (силовые, напряжения, тока), выключатели и отдельные вводы, а также присоединенные к ПС линии. Элементами ДМ, к примеру выключателя, в нашем случае следует назвать его фрагменты, неисправности которых связаны

с появлением (или развитием) ЭМШ. Это могут быть либо его вводы (по отдельности), либо генераторная или линейная группа вводов, одновременно включаемая либо отключаемая от напряжения, либо пара вводов одной фазы выключателя, либо, наконец, его контакты (тоже рассматриваемые все вместе или по отдельным фазам). Те или иные перечисленные варианты принимаются в зависимости от требуемой или возможной глубины диагностирования, определяющейся объективными возможностями постановки диагностических экспериментов.

Рассмотрим вопросы генерирования и распределения ЭМШ на ПС. Поскольку ПС представляет собой достаточно мощный источник ЭМШ, в дальнейшем анализе примем, что источником всех ЭМШ на ПС является исключительно ее основное оборудование. Далее будем считать, что в любой точке ПС регистрируемый шум является линейной функцией его источников. Такой модели соответствует обобщенная эквивалентная схема рис. 1, где $e_1(t) e_i(t) \dots e_n(t)$ — ЭДС n эквивалентных источников ЭМШ; $u_1(t) u_i(t) \dots u_m(t)$ — напряжения ЭМШ, измеряемые в точках территории ПС.

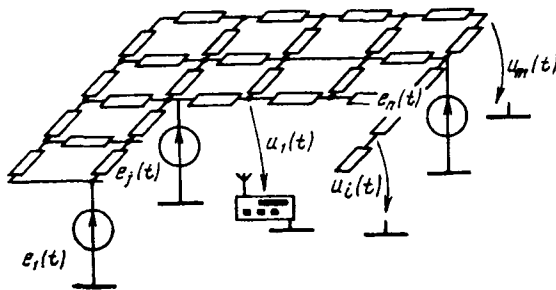


Рис. 1. Генерирование и распределение шумов на подстанции

Изображенная на рис. 1 сетка сопротивлений отражает комплексные сопротивления излучению, что соответствует реальным электрофизическим характеристикам воздуха, а также учитывает наличие большого количества проводов, порталов и других конструкций. Перейдя к спектрам источников ЭМШ и напряжений, можно представить процесс анализа в виде обобщенной эквивалентной схемы (рис. 2). Связь между величинами источников ЭМШ и измеряемых напряжений запишем в матричной форме:

$$U(j\omega) = K(j\omega) E(j\omega), \tag{1}$$

где $U(j\omega)$ и $E(j\omega)$ — векторы спектров напряжений и источников соответственно; $K(j\omega)$ — матрица комплексных коэффициентов передачи соответствующих размеров.

Если матрица коэффициентов передачи $K(j\omega)$ квадратная, то решение элементарно: $E(j\omega) = K^{-1}(j\omega) U(j\omega)$, и по измеренным спек-

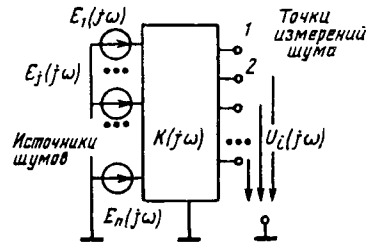


Рис. 2. Эквивалентная схема измерения шумов

трам напряжений можно определить спектры источников шума. В какой степени необходим (или полезен) для диагностики ТС элементов оборудования весь спектр источников ЭМШ — предмет отдельного анализа ДМ. Во всяком случае, динамика изменения спектра ЭМШ, очевидно, связана с прогнозом технического состояния элементов оборудования. Определение элементов матрицы $K(j\omega)$ в теоретическом аспекте сводится к задаче диагностики многополюсников и неоднократно в различных модификациях рассмотрено в теории электрических цепей (например, в [2, 5]). С практической точки зрения определение этой матрицы должно производиться при паспортизации конкретной ПС.

Ясно, что пытаться обеспечить количество измеряемых точек, равное количеству источников шумов (элементов ДМ), затруднительно или, по крайней мере, неразумно, так что можно считать, что $n > m$. Здесь для решения задачи возможно привлечь тестовые методы диагностирования, проведя совокупность экспериментов. В реальной эксплуатации ПС имеется возможность изменения схемы включения ЭО, включения в работу большого числа вариантов сочетаний ЭО (в различных комбинациях) и в том числе — возможность вывода из работы практически каждого ЭО по отдельности. Тогда, в принципе, проведя $p = ([m/n] + 1)$ экспериментов, основанных на различных схемах включения ЭО, для r -го измерения некоторые из источников шума из рассмотрения исключаются; и можно формально положить равными нулю соответствующие столбцы матрицы коэффициентов передачи, модифицируя ее в $K_r(j\omega)$. Система (1) предстанет в виде

$$U_T(j\omega) = \begin{bmatrix} U_1(j\omega) \\ \dots \\ U_r(j\omega) \\ \dots \\ U_p(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1(j\omega) \\ \dots \\ K_r(j\omega) \\ \dots \\ K_p(j\omega) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_1(j\omega) \\ \dots \\ E_i(j\omega) \\ \dots \\ E_n(j\omega) \end{bmatrix} = K_T(j\omega) E(j\omega). \tag{2}$$

Здесь индекс T означает использование тестового метода диагностирования.

Уравнение (2) разрешается относительно вектора источников аналогично уравнению (1), опи-

санному выше, причем если матрица $K_T(j\omega)$ прямоугольная, то применяется метод наименьших квадратов. Естественно, что неточности измерений уровня высокочастотных ЭМШ, вариация метеоусловий и другие факторы в значительной степени могут препятствовать получению надежного решения.

Дополнительные возможности диагностирования ЭО предоставляет использование направленных антенн с узкой диаграммой направленности; в этом случае измеряемое напряжение зависит от направления прихода сигнала. Тогда можно обратиться к эквивалентной схеме рис. 3, и общее число наблюдений (длина вектора U) определится числом p различных схем включения ЭО, количеством точек и направлений наблюдения в каждой точке. Основное уравнение (2), описывающее связь наблюдений с источниками шумов, будет включать в себя еще матрицу, учитывающую вариацию коэффициента усиления антенны в зависимости от направления прихода сигнала:

$$U_{TA}(j\omega) = K_{TA}(j\omega) K_A(j\omega) E(j\omega). \quad (3)$$

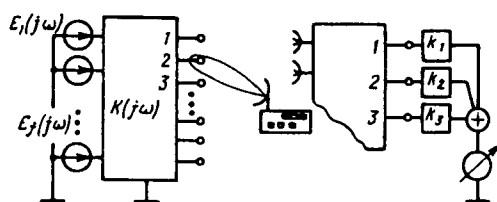


Рис. 3. К использованию направленных свойств антенны при измерении высокочастотных шумов

Есть основания для оптимистических предположений относительно того, что, варьируя точки наблюдений и используя направленные антенны для регистрации ЭМШ, удастся сформировать результирующую матрицу K с диагональным преобладанием и, соответственно, с хорошей обусловленностью.

Завершая краткий анализ возможностей диагностирования основного электрооборудования подстанций, тезисно зафиксируем некоторые особенности ДМ, которые представляются наиболее интересными.

Опыт постановки и решения задач диагностики источников при некоторых специальных предположениях представлен в [4]; там же, в частности, используются спектральные представления сигналов. Интересным диагностическим признаком является анализ низкочастотной огибающей высокочастотных ЭМШ.

Экспериментальные исследования, проведенные на ПС Южных электрических сетей ОАО Дальэнерго, подтвердили основные принципы, положенные в основу обсуждаемых диагности-

ческих моделей.

Выводы. Рассматривая задачи диагностики электроэнергетического оборудования, следует констатировать, что теорией технической диагностики и теорией диагностики электрических цепей накоплены фундаментальные результаты, естественным образом применимые в электроэнергетике; эти теории предоставляют широкий спектр хорошо разработанных математических моделей и методов; есть все основания надеяться, что в ближайшее время предстоит широкое и эффективное практическое использование этих научных результатов.

Автор должен отметить, что значительную роль в формулировке этих кратких заметок сыграло плодотворное сотрудничество по проблемам диагностики высоковольтного оборудования с зам. главного инженера ОАО Дальэнерго Ю.В. Вяткиным и главным инженером МЭС Востока Д.Д. Загоскиным, которым автор выражает свою благодарность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Верзаков Г.Ф., Киншт Н.В., Рабинович В.И. и др. Введение в техническую диагностику. — М.: Энергия, 1968.
2. Киншт Н.В., Герасимова Г.Н., Кац М.А. Диагностика электрических цепей. — М.: Энергоатомиздат, 1983.
3. Вдовико В.П., Овсянников А.Г. Контроль изоляции трансформаторного оборудования 110–500 кВ под рабочим напряжением по характеристикам частичных разрядов — Труды III симпозиума: Электротехника, 2010 год (наука, производство, рынок). Звенигород, 1995, т. 2.
4. Киншт Н.В., Кац М.А., Рагулин П.Г., Вайман П.М. Диагностика линейных электрических цепей — Владивосток: Изд. ДВГУ, 1987.
5. Бутырин П.А. Диагностика линейных многополюсников. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1983. № 6.

[23.04.98]

Авторы: Киншт Николай Владимирович окончил электромеханический факультет Новосибирского электротехнического института в 1960 г. Защитил в 1986 г. в Московском энергетическом институте докторскую диссертацию на тему «Диагностика электрических цепей (теория и методы)». Заведующий лабораторией электрофизики и электроэнергетики Института автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения (Владивосток).

Кац Марат Аврамович окончил электромеханический факультет Ленинградского политехнического института (ЛПИ) в 1953 г. Защитил в 1969 г. кандидатскую диссертацию в ЛПИ на тему «Колебания в главной цепи инвертора с последовательно соединенными конденсаторами». Профессор кафедры ТОЭ Дальневосточного государственного технического университета (Владивосток).

Рост водного триинга как диффузионно-кинетический процесс

ШУВАЛОВ М.Ю., МАВРИН М.А.

Предложена феноменологическая математическая модель развития водных триингов, представляющая этот процесс как сочетание диффузии и бимолекулярной химической реакции. Соответственно, рост триинга описывается системой двух дифференциальных уравнений — обыкновенного и в частных производных. Применение метода усреднения сводит модель к системе из двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно длины триинга и максимального значения концентрации микрополостей, составляющих триинг. Численное интегрирование уравнений на ЭВМ подтверждает качественное соответствие модели известным опытным данным. Обсуждаются направления дальнейшего развития модели и требования к экспериментам, позволяющим более точно определить ее количественные параметры.

Ключевые слова: водный триинг, модель, диффузия, реакция, микрополость, аморфная прослойка, метод осреднения, испытания

Водные триинги (ВТ) являются наиболее распространенной разновидностью старения пластмассовой изоляции силовых кабелей¹. Это явление известно уже более 25 лет и в его изучении достигнуты определенные успехи. В то же время остается еще много невыясненного, в том числе и в первую очередь — физико-химические механизмы развития ВТ. Недостаточная изученность этих механизмов создает большие трудности при решении таких практических задач, как диагностирование состояния изделия в эксплуатации, оценка его остаточного ресурса или же оценка ресурса новых изделий по результатам их стендовых испытаний.

Трудности исследования физико-химической природы ВТ и, соответственно, математического моделирования их развития обусловлены следующими причинами:

1) основные процессы, составляющие сущность ВТ, развиваются на микроуровне и отличаются пространственно-микроскопической неоднородностью, что сильно затрудняет их экспериментальное изучение;

2) эти процессы характеризуются значительной специфичностью.

¹ Для изолирования силовых кабелей применяются различные полимеры, подверженные развитию водных триингов — ПВХ, этиленпропиленовые резины и пр. Мы, однако, имеем здесь в виду конкретный вид диэлектрика — химически сшитый полиэтилен низкой плотности, который применяется наиболее широко; именно для этого материала, а так же для его термопластичного аналога установлены опытные данные, используемые в данной статье.

A phenomenological theoretical model of the development of water trees, which represents this process as a combination of diffusion and a bimolecular chemical reaction, is proposed. Correspondingly, the growth of a tree is described by a system of two equations — an ordinary differential equation and a partial differential equation. The use of an averaging method reduces the model to a system of two ordinary differential equations with respect to the length of the tree and the maximum value of the microcavities constituting the tree. Computer-assisted numerical integration confirms qualitative correspondence of the model to known experimental data. Trends of further development of the model and requirements for experiments enabling its quantitative parameters to be determined more precisely are discussed.

Key words: water treeing, model, diffusion, reaction, microcavity, amorphous interlayer, averaging method, tests

Химические и морфологические особенности разрушаемого материала, конструкция и технология производства кабеля, условия его электрического и термического нагружения, а также влагообмена с окружающей средой, случайная природа и размеры дефектов, на которых зарождаются триинги и т.п. порождают существенный разброс размеров и скоростей роста ВТ, их морфологии и химизма.

Существующие теоретические модели ВТ можно разбить на две группы. К первой группе относятся модели, ставящие своей целью качественное описание процессов и реакций, ответственных за зарождение и рост триингов. В свою очередь, эти модели можно подразделить на две категории.

Первая из них трактует деструкцию полимера в объеме ВТ как электрохимический процесс (электролиз воды и последующее окисление, катализируемое водорастворимыми примесями). Такой подход наиболее последовательно разрабатывается в [1], а также в [2—4].

Альтернативный взгляд на рост ВТ как на процесс механодеструкции отражен в другой категории моделей, представленных в [5—7]. Согласно этим работам причиной разрушения изоляции являются так называемые максвелловские силы, возникающие в электрическом поле на границе раздела двух диэлектриков, в данном случае полимера и микрополости или микротрещины в нем, заполненной водой.

Вторая группа моделей посвящена выбору эм-

пирических соотношений, более или менее удачно соответствующих опытным зависимостям длины ВТ от времени. При этом фактически не делается попыток связать эти зависимости с конкретными физическими и химическими процессами, обуславливающими деградацию изоляционного материала [8–10].

Не отрицая вклада перечисленных работ в изучение проблемы, оба эти направления моделирования следует все же признать недостаточными. Действительно, модели первой группы, оставаясь качественными, не в состоянии решать практические задачи (диагностика, оценка ресурса). Модели второй группы, основанные на модельных же испытаниях сравнительно небольшой продолжительности и оторванные от реального содержания моделируемых процессов, также не в состоянии служить надежной базой для решения указанных практических задач.

Нам представляется, что преодолеть указанные ограничения и трудности теоретического исследования ВТ можно, используя иерархический подход к моделированию, предусматривающий последовательное построение все более общих и точных моделей (в целом такой подход предполагает сочетание принципов «от общего к частному» и «от простого к сложному») [11, 12]. При этом в силу специфичности химических процессов, протекающих на микро — уровне в ВТ, и невозможности их однозначного истолкования, модели (во всяком случае первых уровней приближения) должны быть феноменологическими или полуфеноменологическими. Они должны основываться на твердо установленных и воспроизводимых экспериментальных фактах и использовать известные общие теоретические схемы, предложенные для описания деструкции полимеров под воздействием агрессивных сред.

При таком подходе математическая модель ВТ будет не только опираться на опытные данные, но и будет выставлять требования к постановке новых экспериментов, направленных на определение характеристик ВТ, необходимых для следующего шага в моделировании.

Ниже представлена модель роста ВТ, основанная на следующих опытных фактах.

1. Водный триинг состоит из микро- и субмикрополостей, заполненных водой, поступающей в изоляцию из окружающей среды. Их концентрация со временем растет [8].

2. Деструкция диэлектрика внутри ВТ сопровождается его окислением [1] (хотя, возможно, и не сводится лишь к окислению).

3. Зависимость длины ВТ (l) типа «веер» растущего от электропроводящего экрана кабеля² от времени t хорошо описывается эмпирической

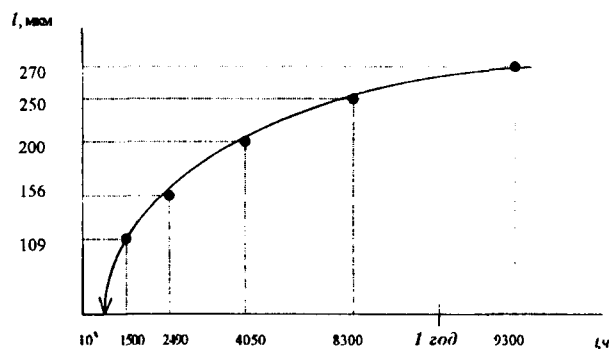


Рис. 1. Зависимость длины водного триинга типа «веер» от времени. Точки — опытные значения, измеренные методом компьютерной видеоусиленной микроскопии без разрушения образца; сплошная линия — аппроксимация по (1)

зависимостью [8, 9]:

$$l = at^b, \quad (1)$$

где a и b — постоянные.

Зависимость (1) подтверждается также нашими собственными данными (рис. 1).

Что же касается ВТ типа «бант», зарождающихся в объеме изоляционного слоя, то размеры этих триингов обнаруживают со временем тенденцию к стабилизации.

4. Водные триинги зарождаются на дефектах, которые играют роль резервуаров воды и химически активных водорастворимых примесей; последние могут либо непосредственно участвовать в процессе разложения диэлектрика, либо выполнять функцию катализатора. Так, ВТ типа «бант» зарождается на полостях, заполненных водой, а также на включениях инородных материалов. Эти же дефекты, очевидно являются центрами локального усиления электрического поля.

Водные триинги типа «веер», как уже отмечалось, растут с поверхности электропроводящих экранов, иногда с выступов на этой поверхности, иногда с гладкого участка. Место, на котором может зародиться «веер», определяется, видимо, не столько концентрацией поля на выступах, которая, как правило, невелика, сколько наличием в экране включений, содержащих химически агрессивные примеси [13].

5. С увеличением напряженности поля E скорость роста ВТ dl/dt также увеличивается. Согласно [8] скорость dl/dt пропорциональна квадрату напряженности электрического поля, по данным же [2] имеет место линейная зависимость.

6. Влияние температуры на ВТ неоднозначно [2, 8]. Это связано, скорее всего, с вышеупомянутой специфичностью явления: на развитие ВТ воздействуют не только значение температуры, но также ее пространственный градиент, временной режим термического нагружения, а также температурозависимые условия влагообмена со смежными областями изоляции, элементами конструкции и окружающей среды. В ча-

² Или в модельных испытаниях сообщаемого с резервуаром электролита большой емкости.

стности, нагрев при определенных условиях может привести к «высыханию» ВТ.

Опираясь на изложенные факты, рост ВТ будем рассматривать как транспортно-кинетический процесс, складывающийся из переноса подвижной, т.е. жидкой фазы, состоящей из воды и растворенных в ней агрессивных примесей, и химического взаимодействия жидкой фазы с полимером.

Транспорт жидкой фазы в полимерной матрице будем понимать как диффузию, ускоренную электрическим полем. Вопрос о влиянии переменного поля напряженностью E , а также градиента E на диффузию теоретически разработан в [14, 15]. Вопрос о конкретном содержании химического взаимодействия жидкой фазы с полимером мы оставляем открытым; тот факт, что ВТ содержит окисленный материал (и это подтверждается нашими собственными экспериментами [16]), явно не используется при формулировке изложенной здесь модели первого приближения.

Что же касается влияния электрического поля на этот процесс, то его можно учесть, опираясь на феноменологические представления, согласно которым влияние силового поля состоит в уменьшении энергии активации [17]. Схожие подходы применяются при моделировании зарождения электрического триинга [18], исследовании окисления механически нагруженных полимеров [19] и анализе механогидролитического разрушения полимеров [20]. При этом следует, видимо, считать, что диффузانت реагирует не столько с самим полиэтиленом, сколько с входящими в состав его полимерных цепей «молекулярными дефектами» — гетероатомами, слабыми связями, обладающими повышенной реакционной способностью; концепция «слабых связей» развита в [21].

В основу моделирования мы положим представления, развитые в [22–24]. Эти представления обладают степенью общности, достаточной для формулировки модели не только первого, но и последующих приближений и позволяют теоретическую схему процесса представить в виде следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= -\operatorname{div} J_c - K C n; \\ \frac{dn}{dt} &= -K C n, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где C — концентрация подвижной фазы, т.е. диффузанта; n — концепция неподвижной фазы, т.е. реакционноспособных групп или химически нестойких (слабых) связей; t — время; J_c — плотность потока C ; K — константа скорости реакции.

Отметим, что согласно (2) подвижная фаза рассматривается как единое целое, хотя в действительности она состоит из воды и растворенных в ней примесей, состав которых в общем случае неизвестен и, более того, случаен. Несмотря на то, что (2) допускает непосредственное обобщение на случай

нескольких компонент жидкой фазы, такое усложнение модели в рамках первого приближения мы считаем неоправданным, так как оно резко увеличило бы количество неизвестных коэффициентов, а именно коэффициентов диффузии и скоростей реакций³; определение же их из опыта представляет собой самостоятельную проблему.

В рамках данной статьи будем моделировать рост ВТ типа «веер»: вследствие отмеченных выше различий в поведении при больших временах эти ВТ считаются более опасными, чем триинги типа «бант».

В соответствии с этим краевые условия для (2) запишем в виде

$$x=0, \quad C=C_0=\text{const}; \quad (3a)$$

$$x=l(t)+0, \quad C=0; \quad (3b)$$

$$t=0, \quad n=n_0, \quad (3b)$$

где x — пространственная координата; C_0 — граничное значение C , принимаемое постоянным; n_0 — начальная концентрация реакционноспособных групп.

Условие (3a) означает, что в течение всего процесса концентрация диффузанта в месте, с которого начинается рост ВТ, не изменяется. Это соответствует случаю «резервуара неограниченной емкости», роль которого играет окружающая кабель среда, непрерывно подпитывающая ВТ водой с некоторыми примесями, и/или крупные инородные включения в экране. Такое приближение к реальным граничным условиям приемлемо, так как обеспечивает при прочих равных более пессимистичную оценку для ресурса изделия.

Условие (3b) означает, что вся подвижная фаза сосредоточена в пределах ВТ. Так как для триинга типа «веер» усиление поля в месте его зарождения несущественно, мы можем пренебречь влиянием градиента напряженности на массоперенос и в соответствии с [14] принять

$$J_c = -D(E, \vartheta) \operatorname{grad} C, \quad (4)$$

где $D(E, \vartheta)$ — зависящий от E и температуры ϑ коэффициент диффузии.

Далее, поскольку система полимер–диффузانت является сильно разбавленной по отношению к диффузantu и растворимость подвижной фазы в полимере мала, можно согласно [23] приближенно считать, что D и K не зависят от C . В результате (2) принимает вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C - K C n; \quad (5a)$$

$$\frac{dn}{dt} = -K C n, \quad (5b)$$

причем, поскольку рост ВТ рассматривается как одномерный, то

³ Некоторые из этих коэффициентов могут быть равны нулю. Соответствующая составляющая жидкой фазы при этом будет играть роль или нейтрального компонента, или растворителя.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Поскольку ВТ в структурном отношении представляет собой систему микрополостей (МП) (более точно — полостей микронных и субмикронных размеров), целесообразно ввести в теоретическую схему новый параметр — их концепцию. Для этого прибегнем к следующей аналогии. Известно, что при механической деструкции аморфно-кристаллических полимерных тел одним из первых этапов разрушения является накопление субмикротрещин (СМТ). Появление СМТ происходит практически «взрывообразно» в аморфной прослойке, причем лимитирующей стадией является первичный разрыв перегруженной химической связи с последующим почти мгновенным распадом макромолекул в ее ближайшем окружении по цепному механизму [20, 21]. При этом накопление СМТ является согласно [20] кинетическим процессом первого порядка; во всяком случае, этот процесс имеет тенденцию к насыщению. Причиной этого является ограниченное число аморфных прослоек (и соответствующих слабых связей), способных к образованию СМТ при данных условиях — нагрузке, температуре, структурном состоянии материала.

Разумно предположить, что механизм накопления МП в ВТ будет аналогичен описанному выше механизму накопления СМТ в механически нагруженных полимерах в том отношении, что он будет также лимитироваться первичным разрывом реакционноспособных связей, каков бы ни был его конкретный химический механизм, и последующее образование МП будет проходить практически безынерционно в результате цепной реакции. Дополнительными факторами, способствующими ускоренному появлению МП вслед за первичным разрывом, являются:

капиллярные эффекты, расклинивающее и пластифицирующее действие воды, заполняющей элементы свободного объема в разрушаемых аморфных прослойках (эффект Ребиндера [20, 24]);

вклад максвелловских сил по модели [5, 6].

Кроме того, если принять, что механизмом, обеспечивающим разложение полимера в ВТ, является именно окисление (электромеханическое окисление по [1–4]), то следует также принять, что оно является более интенсивным процессом, чем механоактивированный термораспад аморфных прослоек по [21]. В подтверждение такой точки зрения уместно провести также аналогию между ростом ВТ и зарождением электрического триинга. Последнее в отсутствие окисляющего агента — кислорода (обычно содержащегося в полимере в растворенном виде), развивается значительно медленнее, чем в его присутствии; эта аналогия имеет под собой серьезные экспериментальные основания [25]. Тот факт, что разрушение полиэтилена в про-

цессе развития ВТ происходит полностью или в основном в аморфной фазе, подтверждается нашими микроскопическими наблюдениями ВТ методом фазового контраста, поляризационной микроскопии и с использованием их сочетания.

Приведенные рассуждения до некоторой степени сближают упомянутые выше «электромеханический» и «механический» подходы к объяснению феномена ВТ.

Если текущую и начальную концентрацию реакционноспособных или слабых мест (аморфных прослоек) обозначить как $N(t)$ и N_0 соответственно, а концентрацию МП — как $\Pi(t)$, то можно записать очевидное соотношение:

$$\Pi(t) + N(t) = N_0. \quad (6)$$

На основании изложенного и с учетом (6) систему (5)–(3) можем представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - KC(N_0 - \Pi); \\ \frac{d\Pi}{dt} &= KC(N_0 - \Pi); \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} x=0, & \quad C=C_0=\text{const}; \\ x=l(t)+0, & \quad C=0, \quad \Pi=0; \\ t=0, & \quad \Pi=0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Отметим, что в рамках данной модели учитывается накопление МП; возможное увеличение размеров МП в процессе роста ВТ не рассматривается.

Систему в частных производных (7)–(8) можно «напрямую» решать численно, методом сеток. Вместо этого, с помощью некоторого специального метода сведем ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений; достоинства такого подхода будут обсуждаться ниже. В качестве упомянутого специального метода используем метод осреднения [26, 27]. Суть его состоит в том, что решение ищем в форме, усредненной по пространственной координате. Для практической реализации метода осреднения переменные задачи представим в виде

$$\left. \begin{aligned} \Pi(x, t) &= N_0 A(t) g(\xi); \\ C(x, t) &= C_0 f(\xi); \\ \xi &= \frac{x}{\Delta \varphi(t)}; \\ \varphi(t) &= \frac{l(t)}{\Delta}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Здесь функция $A(t)$ есть безразмерная амплитуда $\Pi(x, t)$, т.е. структуры ВТ; $\varphi(t)$ — безразмерная координата фронта разрушения, т.е. внешней, подвижной границы ВТ, равная длине ВТ, выраженной в долях от толщины изоляции Δ . Переменная ξ представляет собой безразмерную пространственную координату, а функции $f(\xi)$ и $g(\xi)$ выражают пространственную структуру решения, явно не зависящую от времени. На эти функции накладываются следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq f(\xi), \quad g(\xi) < \infty; \\ f(1) = g(1) = 0; \\ \int_0^\infty f(\xi) d\xi < \infty, \quad \int_0^\infty g(\xi) d\xi < \infty, \quad \int_0^\infty f(\xi) g(\xi) d\xi < \infty; \\ f_\xi' < 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

причем последнее неравенство, означающее убывание $f(\xi)$, вытекает как из свойств самой задачи (7)–(8), так и из реально наблюдаемых распределений $C(x)$ — см. [28, 29]. Более детальное задание или определение $f(\xi)$ и $g(\xi)$ нам не потребуется, что будет видно из дальнейшего.

Для определения зависимостей $A(t)$ и $\varphi(t)$ подставим (9) в (7) и проинтегрируем (7) по x в пределах от 0 до ∞ . После ряда преобразований с использованием (10) получаем следующий результат пространственного интегрирования:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{1}{\varphi} - \alpha\beta\gamma_1\varphi + \alpha\beta A(t)\varphi(\tau); \\ \frac{d[A(t)\varphi(\tau)]}{d\tau} &= \alpha\gamma_1\gamma_2\varphi(\tau) - \alpha\gamma_2 A(\tau)\varphi(\tau), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где

$$\alpha = \frac{KC_0 \Delta^2 \int_0^\infty f(\xi) g(\xi) d\xi}{D |f_\xi'|_{\xi=0}}; \quad \beta = N_0/C_0;$$

$$\gamma_1 = \frac{\int_0^\infty f(\xi) d\xi}{\int_0^\infty f(\xi) g(\xi) d\xi}; \quad \gamma_2 = \frac{\int_0^\infty f(\xi) d\xi}{\int_0^\infty g(\xi) d\xi}$$

и для удобства введено безразмерное время

$$\tau = t \frac{D |f_\xi'|_{\xi=0}}{\Delta^2 \int_0^\infty f(\xi) d\xi}. \quad (11a)$$

Система (11) интегрируется при начальных условиях $\varphi(0)=A(0)=0$. Таким образом, применение метода осреднения позволяет перейти от исходной задачи (7)–(8) к (11). Этот переход дает два преимущества. Во-первых, от системы уравнений в частных производных мы перешли к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям, задачу Коши для которых намного легче решать, в частности, с использованием стандартных программных средств.

Во-вторых, искомые функции не только имеют ясный физический смысл, но и поддаются измерению: ведь $\varphi(t)$ по существу представляет собой длину ВТ, а $A(t)$ — наибольшую концентрацию МП, которую можно определить по максимуму оптической плотности или фотолюминесценции в пределах исследуемого триинга. Все эти величины измеряются методом компьютерной видеоусиленной микроскопии [30].

Отметим, что параметры α и β , входящие в (11), имеют важный физический смысл. В ча-

стности параметр α пропорционален K/D , т.е. характеризует соотношение скоростей химической реакции и диффузии, а $\beta = N_0/C_0$ — относительную концентрацию слабых мест в полимере, способных к образованию МП.

В качестве первого шага по анализу полученной модели рассмотрим частный, но важный случай, для чего перепишем (11) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} - \frac{1}{\varphi} \right) &= -\beta\gamma_1\varphi + \beta A\varphi; \\ \frac{1}{\alpha} \frac{d[A\varphi]}{d\tau} &= \gamma_1\gamma_2\varphi - \gamma_2 A\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Если скорость реакции достаточно высока по сравнению со скоростью диффузии, то величину $\varepsilon_\alpha = 1/\alpha$ можно рассматривать как малый параметр. Из принципа подчинения [31] и родственной этому принципу теоремы Тихонова [32] при условии малости ε_α из (12) следует:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{1}{\varphi} \Rightarrow \varphi = \sqrt{2\tau}; \\ A &= \gamma_1. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Сделанное допущение о малости ε_α означает, что процесс развития ВТ является диффузионно-лимитированным. Из этого согласно первому равенству системы (13), следует, что из-за высокой скорости реакции плотность повреждений в ВТ очень быстро стремится к своему максимальному, т.е. стационарному значению. В абсолютных величинах это стационарное значение равно N_0 , т.е. $P(x,t) \rightarrow N_0$. При этом согласно (9) $A(t)g(\xi) \rightarrow 1$. Так как по определению A — это амплитуда структуры, она соответствует наибольшему значению $g(\xi)$; не нарушая общности рассуждений можно принять это значение равным единице. Следовательно $A(t) \rightarrow 1$ и в соответствии с (13) $\gamma_1 = 1$.

На основании последнего систему (11) можно переписать в виде, содержащем лишь два коэффициента:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{1}{\varphi} - \mu_1\varphi + \mu_1 A\varphi; \\ \frac{d(A\varphi)}{d\tau} &= \mu_2\varphi - \mu_2 A\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где $\mu_1 = \alpha\beta$, $\mu_2 = \alpha\gamma_2$.

В целях изучения свойств полученной модели было выполнено численное интегрирование (11) и (14) при изменении параметров уравнений в широких пределах. Результаты интегрирования позволяют сделать следующие выводы.

1. Как и ожидалось на основании вида уравнений в широком диапазоне значений коэффициентов, охватывающем физически реализуемые случаи, величины $A(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ монотонно возрастают и $A(\tau)$ стремится к постоянному значению. Характерный вид зависимостей $A(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ представлен на рис. 2.

2. При больших значениях α функция

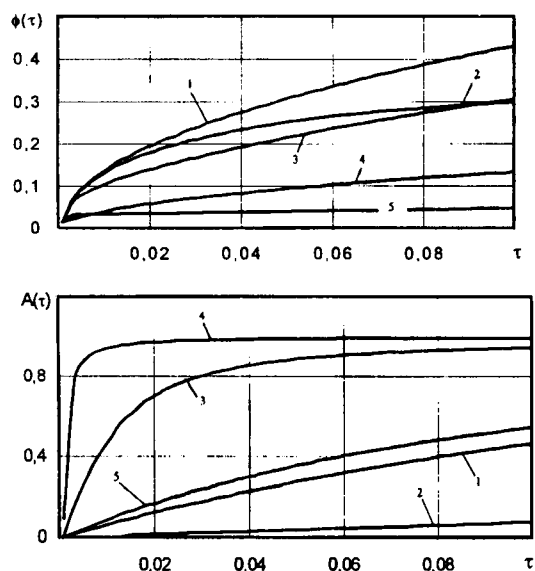


Рис. 2. Вид функций $\varphi(\tau)$ (верхнее семейство кривых) и $A(\tau)$ (нижнее семейство кривых) при различных значениях параметров: 1 — $\alpha=10$, $\beta=0,1$; 2 — $\alpha=1$, $\beta=10$; 3 — $\alpha=100$, $\beta=1$; 4 — $\alpha=1000$, $\beta=10$; 5 — $\alpha=10$, $\beta=100$. Во всех случаях принято $\gamma_1=\gamma_2=1$

$A(\tau)$ быстро достигает постоянного значения, а $\varphi(\tau)$ изменяется как $\tau^{0,5}$, что соответствует (13).

3. При сравнительно малых α и больших β рост функции φ на некоторое время практически прекращается, т.е. $\varphi \approx \text{const} = \varphi_{\text{ст}}$. Объяснить это можно тем, что из-за относительно большой концентрации реакционноспособных мест N_0 (большие значения β) вся подвижная фаза, поступающая в объем ВТ, практически полностью связывается. Вследствие же относительно малой скорости реакции (малые значения α) величина A растет весьма медленно, т.е. $A \ll 1$, что позволяет записать на основании (14)

$$\varphi_{\text{ст}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_1(1-A)}} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}},$$

что подтверждается расчетами. Имеет ли место такая ситуация на практике, нам, впрочем, не известно.

4. Обработка кривых $\varphi(\tau)$ по методу наименьших квадратов показывает, что эта функция хорошо аппроксимируется формулой (1), причем показатель степени b в зависимости от значений параметров модели может изменяться в пределах от 0,15 до 0,5*, а коэффициент корреляции во всех просчитанных случаях оказывается не ниже 0,9; пример такой аппроксимации показан на рис. 3. Необходимо отметить, что как наши собственные опытные данные, приведенные на рис. 1, так и данные других исследователей, полученные при реалистичных условиях эксперимента [33, 34], вписываются в полученный диапазон значений b . На основании этого можно сделать вывод, что данная модель может служить как бы теоретическим обоснованием (1) (хотя и не строгим), показывая, что это соотношение яв-

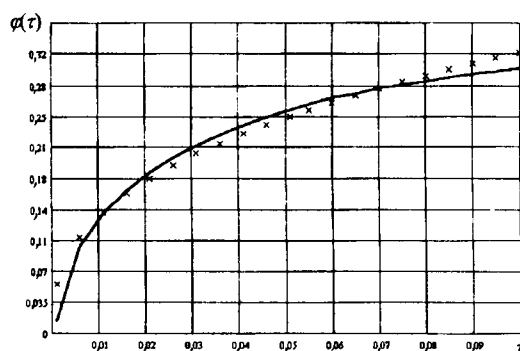


Рис. 3. Зависимость $\varphi(\tau)$, обработанная с помощью формулы (1) по методу наименьших квадратов. Сплошная линия — результат численного интегрирования (14) при $\mu_1=10$ и $\mu_2=1$; крестики — аппроксимации по (1). Показатель степени $b=0,38$

ляется не просто удачно подобранной эмпирической формулой, но в неявной и компактной форме отражает физико-химический механизм деградации изоляции в процессе роста ВТ, развивающейся во внутренней диффузионно-кинетической области. С другой стороны, хорошее соответствие модели многократно наблюдавшемуся на опыте соотношению (1) можно рассматривать, по крайней мере в первом приближении, как его экспериментальное подтверждение.

Вообще говоря, данная модель не является единственно возможной, способной привести к такому результату. Зависимость типа (1) можно получить также в рамках чисто диффузионного приближения, не учитывающего химические реакции в материале, если рассматривать диффузию не в непрерывной, а во фрактальной среде или рассматривать ВТ как фрактальный кластер. Для этого, однако, необходимо, чтобы компенсация МП и соответственно оптическая плотность ВТ как фрактального кластера убывала в направлении от триингообразующего дефекта к периферии триинга также по степенному закону [35, 36]. Наши собственные опыты, тем не менее, такого распределения пока не подтверждают — см. рис. 4.

Очевидно, что для определения количественных параметров сформулированной выше модели ВТ, оценки границ ее практической применимости и выявления наиболее обоснованных и перспективных путей ее дальнейшего развития необходимо проведение специально поставленных длительных испытаний. Объектами испытаний при этом могут быть:

1) полномасштабные образцы кабеля. В ходе испытаний от них периодически должны отбираться и обследоваться пробы с целью измерения длины ВТ и максимальных значений концентрации МП в триингах, т.е. построения опытных зависимостей $A(t)$ и $\varphi(t)$;

2) небольшие (объемом в несколько (куби-

* Можно получить и меньшие значения b , но они не наблюдаются в опыте и поэтому не представляют интереса.

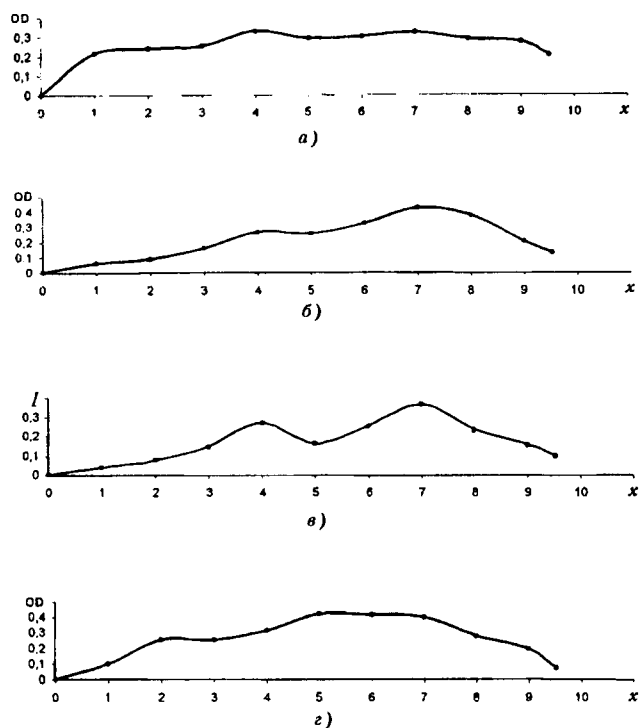


Рис. 4. Реально наблюдаемые типы структуры ВТ типа «веер»: а, б, г — распределение оптической плотности; в — распределение первичной люминесценции вдоль оси триинга. По оси абсцисс отложены относительные значения пространственной координаты x , измеряемой вдоль оси симметрии триинга, причем значение $x=0$ соответствует внешней границе триинга

ческих сантиметров) образцы изоляции, на которых определяются те же зависимости. Эти образцы должны вырезаться из промышленно изготовленного кабеля, а не производиться в лабораторных условиях, так как в последнем случае материал по структуре и некоторым другим свойствам будет отличаться от изоляции натуральных изделий и, следовательно, такие объекты испытаний не будут пригодны для решения прикладных задач, поставленных в начале статьи.

Испытания кабелей, в особенности высоковольтных, существенно дороже и более трудоемки, но и более информативны. Преимуществом же испытаний небольших образцов, помимо относительной простоты и дешевизны является, по одному из вариантов, возможность наблюдать развитие индивидуальных ВТ без разрушения объекта испытаний [37], что в определенной мере позволяет преодолеть трудности, связанные со статистическим разбросом данных.

Стоит отметить, что при определении параметров модели из опыта необходимо будет рассчитывать не два параметра, входящие в (14), а четыре: третий параметр появляется при переходе от безразмерного времени τ к реальному t в соответствии с (11а); четвертый — при переходе от относительной величины $A(t)$ к реально измеряемой оптической плотности или интен-

сивности люминесценции.

При экспериментальном изучении ВТ с позиции предложенной модели представляет интерес следующий вопрос: как по длине ВТ расположен максимум концентрации МП и как вообще распределена эта концентрация вдоль ВТ, т.е. каков вид функции $g(\xi)$? Исследования, проведенные нами методами светлопольной и люминесцентной микроскопии (см. также [30]) показывают, что и вид распределения концентрации МП вдоль ВТ, и местоположение максимума относительно места зарождения и внешней границы ВТ могут быть различны. В частности, на рис. 4 показаны распределения оптической плотности OD или интенсивности люминесценции I ВТ: рис. 4,а — $g(\xi)$ приблизительно постоянна, т.е. мало изменяется вдоль ВТ; рис. 4,б — имеется один выраженный максимум; рис. 4,в — есть два выраженных максимума; рис. 4,г — имеющийся максимум сильно размыт, т.е. функция как бы состоит из двух «ступенек».

Вероятно, можно будет классифицировать ВТ по форме распределения $g(\xi)$. При этом наибольшее значение будет иметь такие типы структуры, которые обнаружатся в изделиях, отказавших в процессе эксплуатации или длительных испытаний, в наиболее крупных и оптически плотных триингах, способных служить источниками повреждения кабеля.

Итак, нами предложена феноменологическая математическая модель ВТ, соответствующая известным на сегодняшний день опытным данным о динамике роста ВТ. Она, впрочем, получена при ряде упрощающих предположений и не учитывает некоторых сторон изучаемого явления, которые могут оказаться существенными. Согласно иерархическому подходу к моделированию, отмеченному в начале статьи, мы завершаем ее перечнем некоторых возможных направлений дальнейшего развития модели. Эти направления таковы:

а) обобщение на триинги типа «бант». Отличие этой разновидности от рассмотренной состоит в том, что в силу ограничений емкости резервуара агрессивных примесей, т.е. триингообразующего дефекта, граничные условия, аналогичные (8), уже не будут постоянными, что приведет к увеличению числа уравнений;

б) случай переменных, и в том числе стохастических граничных условий, вызванных колебаниями влажности грунта, окружающего кабель. Это, в свою очередь, может быть связано с изменениями температуры, учет которых представляет самостоятельный интерес;

в) обобщение на случай жидкой двухкомпонентной фазы. Тот факт, что некоторые из ВТ имеют распределение оптической плотности, содержащее как бы две ступеньки или два максимума — рис. 4,в и, более того, имеют соб-

ственную окраску, ступенчато меняющуюся по мере удаления от места зарождения тринга, позволяет предположить, что в объеме ВТ может иметь место процесс, напоминающий электрофоретическое разделение веществ;

г) учет особенностей реальной структуры разрушаемого диэлектрика. Это структура обладает технологически обусловленной организацией в разных пространственных масштабах — от десятков нанометров до десятков и сотен микрон. Это, в свою очередь, влияет на структуру и морфологию ВТ, а также на скорость его роста.

Очевидно, что наиболее приоритетные направления дальнейшего развития модели ВТ выявит опыт исследования кабелей, отработавших более или менее длительное время в эксплуатации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Xu J.J., Boggs S.A. The chemical nature of water treeing: theories and evidence. — IEEE Electrical Insulation Magazine, 1994, vol. 10, № 5.
2. Steennis E.F., Kreuger F.H. Water treeing in Polyethylene cables. — IEEE Transactions, 1990, vol. EI-25, № 5.
3. Henkel H.J., Müller N., Nordman J. et al. Relationship between the chemical structure and the effectiveness of additives in inhibiting water trees. — IEEE Transactions, 1987, vol. EI-22, № 2.
4. Ross R., Smit J.J. Composition and growth models. — IEEE Transactions, 1988, vol. EI-27.
5. Sletbak J., Ildstad E. The validity of the mechanical damage theory of water treeing tested against experimental results. — Conf. Rec. of 1984 Int. Symp. on Elec. Insul. Montreal, Canada, June 11–13, 1984.
6. Sletbak J. The mechanical damage theory of water treeing — a status report. — Proceedings of the 3rd Int. Conf. on Properties and Applications of Dielectrics. July 8–12, 1991, Tokyo, Japan.
7. Poggi Y., Raharimalala V., Filippini J.C. Water treeing as mechanical damage: macroscopic and microscopic approach, influence of test specimen process parameters. — IEEE Transactions, 1990, vol. EI-25, № 6.
8. Shaw M.T., Shaw S.H. Water treeing in solid dielectrics. — IEEE Transactions, 1984, vol. EI-19, № 5.
9. Dissado L.A. The significance of the water tree growth law. — IEEE Transactions, 1986, vol. EI-21, № 4.
10. Dissado L.A., Wolfe S.V., Filippini J.C. et al. An analysis of fielddependent water tree growth models. — IEEE Transactions, 1988, vol. EI-23, № 3.
11. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. — М.: Наука, 1992.
12. Малинецкий Г.Г. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент: введение в нелинейную динамику. — М.: Наука, 1997.
13. Karasaki T., Toya A., Tanimoto G. et al. Generation of colored tree under influence of additives and impurities. — Revue de l'Electricite' et de l'Electronique (REE). Numero special, Aout, 1996.
14. Fouracre R.A., Given M.J., Crichton B.H. The effect of alternating electric fields on ion migration in solid dielectrics. — Journal of Physics, C: Solid state physics, 1986, vol. 19.
15. Given M.J., Fouracre R.A., Crichton B.H. The role of ions in the mechanism of water tree growth. — IEEE Transactions, 1987, vol. EI-22, № 2.
16. Шувалов М.Ю., Ромашкин А.В., Маврин М.А., Овсиенко В.Л. Видеомикроскопия тринга. — Электричество, 1996, № 3.
17. Глестон С., Лейдлер К., Эйринг Г. Теория абсолютных скоростей реакций. — М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948.
18. Шувалов М.Ю. Зарождение электрического тринга как процесс развития микроочаговой взрывной неустойчивости. — Электротехника, 1997, № 12.
19. Попов А.А., Рапопорт Н.Я., Заиков Г.Е. Окисление ориентированных и напряженных полимеров. — М.: Химия, 1987.
20. Берштейн В.А. Механогидролитические процессы и прочность твердых тел. — М.: Наука, 1987.
21. Регель В.Р., Стуцкер А.И., Томашевский Э.Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. — М.: Наука, 1974.
22. Заиков Г.Е., Иорданский А.Л., Маркин В.С. Диффузия электролитов в полимерах. — М.: Химия, 1984.
23. Моисеев Ю.В., Заиков Г.Е. Химическая стойкость полимеров в агрессивных средах. — М.: Химия.
24. Рудакова Т.Е., Заиков Г.Е. Действие агрессивной среды и механического напряжения на полимеры. — Высокомолекулярные соединения, 1987, т. XXIII, № 1.
25. Rasikawan S., Ishihara H., Shimizu N. Comparison between watertreed and deteriorated regions. — IEEE Transactions, 1994, vol. DEI-1, № 4.
26. Еленин Г.Г., Плехотников К.Э. Об одном способе качественного исследования одномерного квазилинейного управления теплопроводности с нелинейным источником тепла. — Препринт ИПМ АН СССР, 1977.
27. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: идеи, методы, примеры. — М.: Наука, 1997.
28. Groeger J.H., Henry J.L., Garton A. Location and concentration of ionic impurities in polymeric cable insulation. — Conference Record of the 1988 International Symposium on Electrical Insulation. Boston, USA, June 5–8, 1988.
29. Dejean P.-M., Pedrosa F., Banks V.A. et al. Medium Voltage polymeric power cables — clarification of the causes of water treeing and methods of its prevention. — REE, Numero Special — Aout, 1996.
30. Шувалов М.Ю., Маврин М.А., Овсиенко В.Л., Ромашкин А.В. Видеомикроскопия электрических и водных трингов. — Электричество, 1997, № 7.
31. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. Пер. с англ. — М.: Мир, 1985.
32. Рубин А.Б., Пытьева Н.Ф., Ризниченко Г.Ю. Кинетика биологических процессов. — М.: Изд-во МГУ, 1987.
33. Heumann H., Saure M., Wagner H., Patsch R. Observations on water treeing especially at interfaces of polyolefine cable insulations. — CIGRE, 1980, № 15-06.
34. Gotoh H., Okamoto T., Suzuki S., Tanaka T. Method for estimation of the remaining lifetime of 6,6 kV XLPE cables after their first failure in service. — IEEE Transactions, 1984, vol. PAS-103, № 9.
35. Harrison A. Fractals in chemistry. — Oxford University Press, 1995.
36. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. — М.: Наука, 1991.
37. Овсиенко В.Л., Шувалов М.Ю., Колосков Д.В., Ромашкин А.В. Возможности микроэксперимента в исследовании электрической изоляции кабелей высокого напряжения. — Кабельная техника, № 10–11, 1997.

[04.08.98]

А в т о р ы : Шувалов Михаил Юрьевич окончил электромеханический факультет Московского энергетического института (МЭИ) в 1980 г. В 1985 г. защитил кандидатскую диссертацию «Исследование кабелей постоянного тока высокого напряжения с пропитанной бумажной изоляцией» во Всесоюзном научно-исследовательском институте кабельной промышленности. Заведующий лабораторией кабелей высокого напряжения во Всероссийском научно-исследовательском институте кабельной промышленности (ВНИИКП).

Маврин Марк Арнольдович окончил электромеханический факультет МЭИ в 1992 г. В настоящее время аспирант ВНИИКП.

Методические материалы

«Электричество» — научный журнал. Его основное содержание — оригинальные научные статьи по самому широкому спектру проблем современной электротехники. Именно это качество журнала, неизменное с 1880 г., позволило ему занять достойное место среди ведущих периодических научных изданий мира.

Сейчас, когда мировая электротехническая наука продолжает быстро развиваться, но в силу известных обстоятельств издание отечественных учебников и монографий отстает от этого процесса, редколлегия решила частично восполнить образующийся пробел введением в журнал новой рубрики «Методические материалы».

Публикуемые в этой рубрике материалы адресованы студентам, аспирантам, научным работникам. Их характерная особенность — методическая направленность. Здесь будут печататься главы из не изданных пока учебников, обзоры по отдельным разделам науки об электричестве, методические разработки новых направлений современной электротехники.

Редколлегия надеется, что материалы новой рубрики, дополняющие оригинальные статьи, будут полезны читателям.

Публикации новой рубрики открывает материал под названием «Молниезащита». Это глава из монографии «Молния и защита от нее», написанной сотрудниками кафедры техники и электрофизики высоких напряжений МЭИ по инициативе В.П. Ларионова, но из-за финансовых трудностей не изданной. Как научный руководитель научно-исследовательской лаборатории молниезащиты В.П. Ларионов много сил отдал разработке новых подходов к проблемам молниезащиты и обеспечения молниестойкости различных объектов при непосредственных ударах молнии в них.

Публикуемая глава написана непосредственно В.П. Ларионовым и является примером обобщения проблем молниезащиты, методического подхода, свойственного автору. Она посвящена объяснению принципа действия молниеотводов, современному описанию защитных зон, обеспечению молниезащиты промышленных объектов и жилых домов, объектов электроэнергетики, электронных устройств, транспортных средств. Глава завершается рассмотрением персональной защиты.

Надеемся, что материал может быть полезным как специалистам в области молниезащиты, так студентам и аспирантам, обучающимся по электроэнергетическому и электротехническому направлениям.

Молниезащита. Часть I

ЛАРИОНОВ В.П.

Принцип действия молниеотводов. Защита от прямых ударов молнии осуществляется с помощью молниеотводов. Молниеотвод представляет собой возвышающееся над защищаемым объектом устройство, через которое ток молнии, минуя защищаемый объект, отводится в землю.

Защитное действие молниеотводов впервые получило объяснение в «Слове о явлениях воздушных, от электрической силы происходящих...» М.В. Ломоносова, который в 1753 г. писал: «Стрелы на местах, от обращения человеческого по мере удаленных, ставить за бесполезное дело почитаю: дабы ударяющая молния больше на них, нежели на головах человеческих и на храминах, силы свои изнуряла» [1]. Это образное определение роли молниеотводов остается справедливым и в настоящее время.

В 1800 г. были изданы в Петербурге едва ли не первые в мире правила устройства молниеотводов [2, 3], в которых впервые были указаны их основные элементы — молниеприемник, воспринимающий непосредственно на себя удар молнии, токоотвод и заземлитель, — и приведены

характеристические размеры этих элементов, мало отличающиеся от современных рекомендаций.

Защитное действие молниеотводов основано на том, что во время лидерной стадии молнии на вершине молниеотвода скапливаются заряды и наибольшие напряженности электрического поля создаются на пути между развивающимся лидером и вершиной молниеотводов. Возникновение и развитие с молниеотвода встречного лидера еще более усиливает напряженности поля на этом пути, что окончательно предопределяет удар в молниеотвод. Защищаемый объект, более низкий, чем молниеотвод, будучи расположен поблизости от него, оказывается заэкранированным молниеотводом и встречным лидером, и поэтому поражение его молнией маловероятно.

Необходимым условием надежной защиты является также низкое сопротивление заземления молниеотвода, так как при ударе молнии на молниеотводе с большим сопротивлением заземления может возникнуть напряжение, способное вызвать пробой с молниеотвода на защищаемый объект по воздуху или в земле.

Молниеотводы по типу молниеприемников разделяются на стержневые и тросовые. Стержневые молниеотводы выполняются в виде вертикально установленных стержней (мачт), соединенных с заземлителем, а тросовые — в виде горизонтально подвешенных проводов. По опорам, к которым крепится трос, прокладываются токоотводы, соединяющие трос с заземлителем.

Защитное действие молниеотвода характеризуется его зоной защиты, т.е. пространством вблизи молниеотвода, вероятность попадания молнии в которое не превышает определенного достаточно малого значения, а также значением сопротивления заземления и конструкцией заземлителя.

Зоны защиты молниеотводов. Зоны защиты молниеотводов высотой $h \leq 30$ м были определены в 1936—1940 гг. А.А.Акопяном на основе обширных лабораторных исследований. Надежность их подтверждена длительным опытом эксплуатации и оценивается как 0,999. Они вошли как составная часть в ряд нормативных документов. В последующем установленные зоны защиты были распространены на молниеотводы высотой до 100 м, при этом А.А.Акопяном была введена поправка, учитывающая снижение эффективности молниеотводов высотой больше 30 м вследствие боковых ударов молнии, поражающих молниеотвод в точках ниже его вершины.

В качестве аналога молнии использовался истрочный разряд, происходивший под воздействием импульсов 1,5/1000 мкс положительной полярности с максимальным значением, близким к 50%-му разрядному напряжению. Отношение высоты расположения высоковольтного электрода к высоте модели молниеотвода H/h принималось при $h \leq 30$ м равным 20 для стержневых и 10 для тросовых молниеотводов. В последнем случае условия опытов были более жесткими, поскольку имелось в виду применение тросов для защиты воздушных линий электропередачи, которые достаточно часто поражаются молнией. Для молниеотводов высотой $h > 30$ м в принятом масштабе моделирования устанавливались значения $H = 600$ м для стержневых и $H = 300$ м для тросовых молниеотводов.

Справедливость принятой методики определения зон защиты не может быть строго доказана, поэтому полученные в лаборатории зоны защиты имеют до некоторой степени условный характер. Однако надежность разработанных на основе лабораторных экспериментов рекомендаций подтверждена многолетним опытом эксплуатации молниеотводов, и это позволяет с уверенностью пользоваться этими рекомендациями.

Определение зон защиты производится следующим образом.

Электрод, расположенный на высоте H

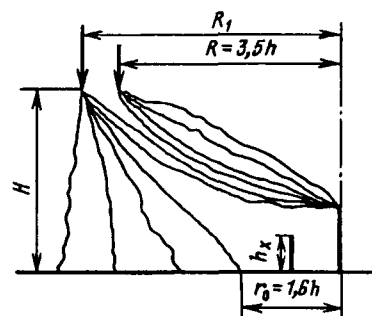


Рис. 1. К определению на модели зоны защиты стержневого молниеотвода

(рис. 1), смещается относительно модели стержневого молниеотвода в горизонтальном направлении. Опыт показывает, что при $R = 3,5h$ все разряды поражают молниеотвод. При R_1 , несколько большем R , часть разрядов попадает в землю на расстоянии r от молниеотвода. Минимальное значение r_0 является радиусом зоны защиты на уровне земли.

Определение радиуса зоны защиты на высоте h_x производится с помощью пробного стержня высотой h_x . В результате перемещения этого стержня и высоковольтного электрода относительно модели молниеотвода (все они находятся в одной плоскости) находится максимальное расстояние r_x между молниеотводом и пробным стержнем, при котором последний не поражается разрядами. Это расстояние r_x является радиусом защиты молниеотвода на высоте h_x .

Если определяется зона защиты тросового молниеотвода, то высоковольтный электрод перемещается по горизонтали в плоскости, перпендикулярной тросу. При принятой методике эксперимента размер зоны 100%-го поражения троса $B = 2h$, а размер зоны защиты на уровне земли $b = 1,2h$ (рис. 2). Зона защиты b_x на высоте

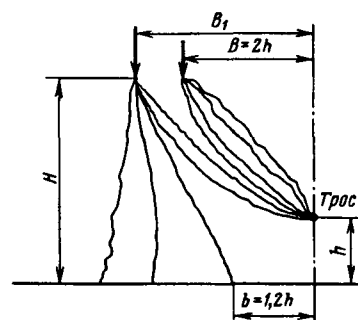


Рис. 2. К определению на модели зоны защиты тросового молниеотвода

h_x определяется так же, как и в случае стержневого молниеотвода.

Аналогичным образом производится определение зон защиты систем двух или нескольких молниеотводов.

Зоны защиты стержневых молниеотводов. Зона защиты одиночного стержневого молниеотвода (рис. 3) представляет собой пространство

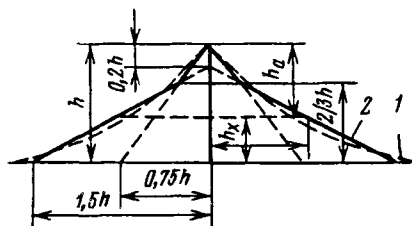


Рис. 3. Построение зоны защиты стержневого молниеотвода: 1 — по [4]; 2 — по [5]

вблизи молниеотвода в виде «шатра», ограниченное поверхностью вращения, образующая которой находится по эмпирической формуле:

$$r_x = 1,6ph \frac{h - h_x}{h + h_x}, \quad (1)$$

где $p=1$ при $h \leq 30$ м; $p = \sqrt{30/h} = 5,5/\sqrt{h}$ при $h = 30-100$ м.

Коэффициент $p < 1$ учитывает снижение защитного действия молниеотводов большой высоты.

При определении зоны защиты удобно криволинейную образующую заменить ломаной линией 2 [4], построение которой понятно из рис. 3.

Зона защиты системы двух стержневых молниеотводов имеет значительно большие размеры, чем сумма зон защиты двух одиночных молниеотводов. Как отмечалось, при $R=3,5h$ (рис. 4)

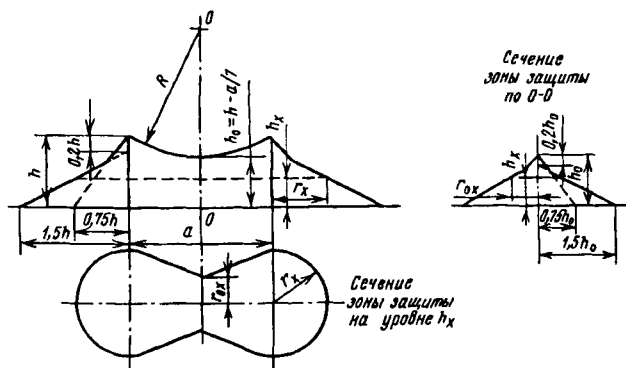


Рис. 4. Зона защиты двух стержневых молниеотводов

все разряды попадают в молниеотводы. Очевидно, если два молниеотвода находятся на расстоянии $a=2R=7h$, то точка поверхности, лежащая посередине между молниеотводами, не будет поражаться молнией. Если нужно защитить точку, находящуюся посередине между молниеотводами высотой h на высоте h_0 , то расстояние между молниеотводами на высоте h_0 должно составлять $a \leq 7p(h-h_0)$. Или, если известны высота и расстояние между молниеотводами, высота защищенной точки посередине между молниеотводами находится как

$$h_0 = h - a/7p. \quad (2)$$

Внутренняя часть зоны защиты двух стержневых молниеотводов (рис. 4) в плоскости, проходящей через оба молниеотвода, ограничивается дугой окружности, которую можно построить по трем точкам: две из них — вершины молни-

еотводов, а третья расположена посередине между молниеотводами на высоте h_0 . Внешняя часть зоны защиты строится так же, как и для одиночных стержневых молниеотводов. Построение сечений зоны защиты понятно из рис. 4.

Такие объекты, как например, открытые распределительные устройства, располагаются на достаточно большой территории и защищаются поэтому несколькими молниеотводами. В этом случае внешняя часть зоны защиты определяется так же, как и зона защиты системы двух молниеотводов (рис. 5). Объект высотой h_x , находящийся

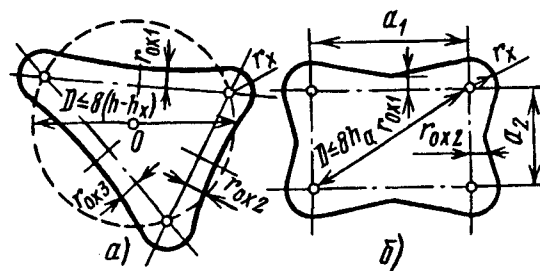


Рис. 5. Площади на уровне h_x , защищенные тремя молниеотводами (а) и четырьмя, расположенными в вершинах прямоугольника (б)

внутри остроугольного треугольника или прямоугольника, защищен в том случае, если диаметр окружности, проходящей через вершины треугольника, в которых установлены молниеотводы, или диагональ прямоугольника, в углах которого находятся молниеотводы, удовлетворяет условию

$$D \leq 8p(h-h_x). \quad (3)$$

При произвольном расположении молниеотводов условие (3) должно быть проверено для каждой трех ближайших друг к другу молниеотводов в отдельности. При всех условиях высота h_x должна быть меньше фиктивной высоты h_0 , определенной для каждой отдельно взятой пары молниеотводов.

Зоны защиты тросовых молниеотводов. Сечение зоны защиты тросового молниеотвода строится так же, как стержневого, но с другими числовыми коэффициентами (рис. 6).

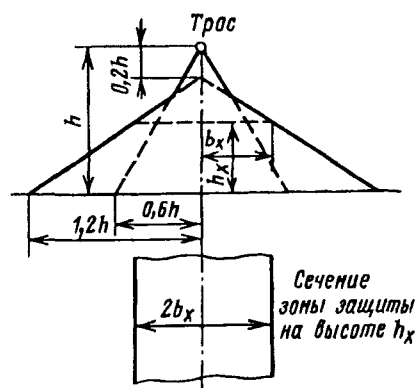


Рис. 6. Зона защиты тросового молниеотвода

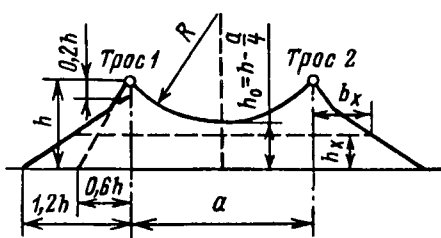


Рис. 7. Зона защиты двух параллельных тросовых молниеотводов

Внешняя часть зоны защиты двух параллельных тросовых молниеотводов, расположенных на расстоянии a (рис. 7), определяется, так же как и для одиночного троса, в соответствии с рис. 6. Внутренняя часть ограничена поверхностью, которая в сечении плоскостью, перпендикулярной тросам, дает дугу окружности, проходящей через три точки: два троса и точку посередине между ними на высоте

$$h_0 = h - a/4p. \quad (4)$$

Зоны защиты в особых случаях. В практике молниезащиты иногда целесообразно бывает использовать два молниеотвода разной высоты. Построение сечений зон защиты стержневых и тросовых молниеотводов производится в этом случае аналогично (рис. 8).

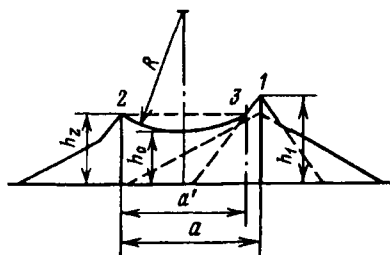


Рис. 8. Зона защиты двух молниеотводов разной высоты

щиты более высокого молниеотвода 1. Затем через вершину молниеотвода меньшей высоты 2 проводится горизонтальная линия до пересечения в точке 3 с зоной защиты молниеотвода 1.

При условии, что вершина некоего фиктивного молниеотвода совпадает с точкой пересечения 3, строится зона защиты для молниеотводов 2 и 3, имеющих одинаковую высоту h_2 и расположенных друг от друга на расстоянии a' . Значение h_0 определяется по формулам (2) или (4) в зависимости от типа молниеотвода.

Если требуется защитить объект, расположенный на местности со значительным уклоном, то зону защиты молниеотвода, установленного на склоне, можно построить способом, который показан на рис. 9 [5]. Молниеотвод влияет на процесс разряда только своей верхней точкой, а поверхность земли в первом приближении может быть принята за плоскость нулевого потенциала, поэтому зона защиты строится относительно пер-

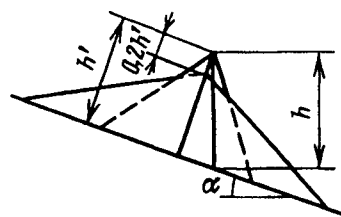


Рис. 9. Зона защиты молниеотвода, установленного на местности с уклоном

пендикуляра высотой h' , опущенного из вершины молниеотвода по поверхность земли. Зона защиты молниеотвода вниз по склону оказывается уменьшенной, а вверх по склону — увеличенной.

Зоны защиты молниеотводов высотой до 150 м. В настоящее время в связи с потребностями практики нормированы зоны защиты молниеотводов высотой до 150 м. Очертания зон защиты определены расчетом по вероятностной методике, в соответствии с которой лидер нисходящей от облака молнии, молниеотвод, защищаемый объект и поверхность земли образуют связанную многоэлектродную систему. При этом считается, что головка лидерного канала находится на некоторой высоте, называемой высотой ориентировки, а пробивная напряженность электрического поля во всех промежутках между головкой лидера и заземленными объектами, в том числе и самой поверхностью земли, одинакова. Вероятность поражения одного из электродов определяется как произведение вероятности ориентировки канала молнии в направлении системы электродов и вероятности выбора одного из электродов системы.

Не вдаваясь в подробности расчетной методики, отметим, что полученные зоны защиты приняты в качестве строительных норм [6].

Зона защиты одиночного стержневого молниеотвода высотой $h \leq 150$ м представляет собой круговой конус (рис. 10) с вершиной на высоте $h_0 < h$, сечение которого на высоте h_x имеет радиус r_x .

Граница зоны защиты находится по формулам

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= 0,85h_x; \\ r_x &= (1,1 - 0,002h) \left(h - \frac{h_x}{0,85} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(все размеры — в метрах).

Вероятность прорыва молнии $p_{пр}$ через границу зоны не превышает 0,005.

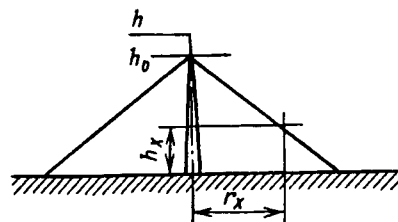


Рис. 10. Сечение зоны защиты стержневого молниеотвода высотой до 150 мм

Если допустить вероятность прорыва молнии 0,05, то зона защиты расширяется. В ряде случаев такая зона удовлетворяет потребностям практики, так как для объектов высотой до 30 м число разрядов обычно меньше 0,1 в год. Поэтому при вероятности прорыва 0,05 защищаемый объект в среднем будет поражаться не чаще, чем в 1 раз за 200 лет эксплуатации. Зона защиты одиночного молниеотвода при вероятности прорыва 0,05 описывается формулами

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= 0,92h; \\ r_x &= 1,5 \left(h - \frac{h_x}{0,92} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Зона защиты стержневых молниеотводов, находящихся вблизи один от другого на расстоянии, меньше $(3-5)h$, расширяется по сравнению с зонами отдельных молниеотводов. Возникает дополнительный объем зоны защиты, обусловленный совместным действием двух молниеотводов. Зоны двойного стержневого молниеотвода (рис. 11) определяются по формулам:

при $p_{пр}=0,005$

$$h_{\min} = \left\{ \begin{aligned} h_0 &\text{ при } l \leq h; \\ h_0 - (0,17 + 3 \cdot 10^{-4}h)(l-h) &\text{ при } l > h; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$d_x = \left\{ \begin{aligned} r_x &\text{ при } l \leq h; \\ [r_0(h_{\min} - h_x)]/h_{\min} &\text{ при } l > h; \end{aligned} \right\}$$

при $p_{пр}=0,05$

$$\left. \begin{aligned} h_{\min} &= \left\{ \begin{aligned} h_0 &\text{ при } l \leq 1,5h; \\ h_0 - 0,14(l - 1,5h) &\text{ при } l > 1,5h; \end{aligned} \right\} \\ d_x &= \left\{ \begin{aligned} r_x &\text{ при } l \leq 1,5h; \\ [r_0(h_{\min} - h_x)]/h_{\min} &\text{ при } l > 1,5h, \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где r_0 — зона защиты одиночного молниеотвода на уровне земли ($h_x=0$).

Если расстояние l между молниеотводами превышает $3h$ ($p_{пр}=0,005$) или $5h$ ($p_{пр}=0,05$), каждый из молниеотводов следует рассматривать как одиночный.

Несколько близко расположенных молниеотводов (например, три и более) образуют систему молниеотводов. Зона защиты этой системы определяется парными зонами защиты ближай-

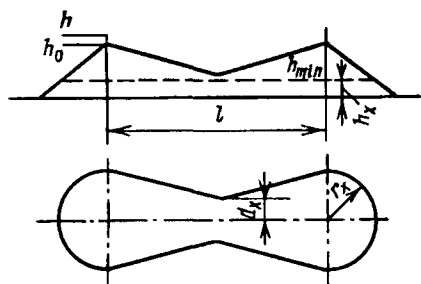


Рис. 11. Зона защиты двух стержневых молниеотводов высотой до 150 м

ших молниеотводов. При этом принимается, что внутренняя зона имеет вероятность прорыва такую же, как и зоны взятых попарно молниеотводов.

Для защиты протяженных объектов применяются тросовые молниеотводы, которые натягиваются над защищаемым объектом и заземляются на опорах.

Зона защиты одиночного тросового молниеотвода определяется по формулам:

при $p_{пр}=0,005$

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= 0,85h; \\ r_x &= (1,35 - 0,0025h) \left(h - \frac{h_x}{0,85} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

при $p_{пр}=0,05$

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= 0,92h; \\ r_x &= 1,7 \left(h - \frac{h_x}{0,92} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Для двух тросовых молниеотводов, расположенных на расстоянии l друг от друга, наименьшая высота зоны защиты посередине между ними при $l > h$ составляет

$$h_{\min} = h_0 - (0,14 + 5 \cdot 10^{-4}h)(l-h), \quad (11)$$

а при $l \leq h$ эта высота $h_{\min}=h_0$.

Электрогеометрический метод. Во многих странах для определения защитных свойств молниеотводов используется «электрогеометрическая модель». Этот метод в законченном виде был разработан и предложен исследовательским комитетом № 33 СИГРЭ в 1975 г. [7], хотя принцип электрогеометрического метода был отражен еще в 1962 г. в венгерских строительных нормах.

В основу метода положено представление о том, что при приближении лидерного канала к наземному объекту с последнего начинается развиваться встречный канал разряда, что и предопределяет удар молнии в объект. Кратчайшее расстояние между головкой лидера и точкой удара в момент начала развития от нее встречного разряда называется расстоянием ориентировки h_m . Это расстояние тем больше, чем больше напряжение между головкой лидера и заземленным объектом, а значит, больше заряд лидера и выше максимальное значение тока молнии, проходящего через пораженный объект.

Расстояние ориентировки зависит от тока молнии в первой компоненте удара и определяется по эмпирической формуле

$$h_m = 2I_M + 30 \left(1 - e^{-I_M/6,8} \right), \quad (12)$$

где h_m — в м, I_M — в кА.

Пользуясь заданным значением h_m , можно построить зону защиты того или иного молниеотвода. На рис. 12 показано построение зоны защиты стержневого молниеотвода ($h < h_m$).

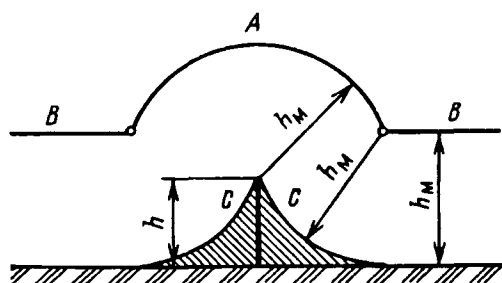


Рис. 12. Сечение зоны защиты стержневого молниеотвода высотой h при $h_M > h$

Если развивающийся лидер достигает поверхности A , то молния поражает вершину молниеотвода. Если он достигает поверхности B , то удар приходится в землю. Объект, расположенный ниже поверхности C , находится в зоне защиты молниеотвода. Вероятность поражения объекта молнией (вероятность p прорыва молнии в зону защиты) определяется по вероятности тока молнии, которому по (12) соответствует определенное значение h_M , принятое при построении зоны защиты. Например, требуется установить размеры зоны защиты с надежностью $1-p=0,9$. Для первых компонентов нисходящих отрицательных молний вероятности 0,9 соответствует $I_M \approx 10$ кА. По (12) получаем расстояние ориентировки

$$h_M = 2 \cdot 10 + 30(1 - e^{-10/6,8}) = 43 \text{ м.}$$

Это означает, что объект, расположенный внутри зоны защиты, построенной при $h_M = 43$ м, защищен от ударов молнии с током $I_M \geq 10$ кА и может быть поражен молнией с током $I_M < 10$ кА, т.е. в 10% случаев ($p=0,1$). Ниже приведены расчетные значения расстояний ориентировки h_M в зависимости от минимального тока I_M , при котором обеспечивается заданная надежность зоны защиты:

$1-p$	0,9	0,95	0,995	0,999
I_M , кА	10	8	3,5	1,6
h_M , м	43	37	19	9

На рис. 13 показаны сечения зон защиты стержневого молниеотвода при разных значениях $1-p$.

Сечение зоны защиты молниеотвода в случае, если его высота превышает расстояние ориентировки ($h > h_M$), показано на рис. 14. Это по-

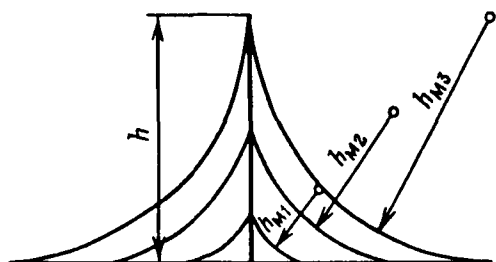


Рис. 13. Сечения зон защиты молниеотвода при разных значениях расстояния ориентировки $h_{M1} < h_{M2} < h_{M3}$ и соответственно при разных надежностях: $(1-p_1) > (1-p_2) > (1-p_3)$

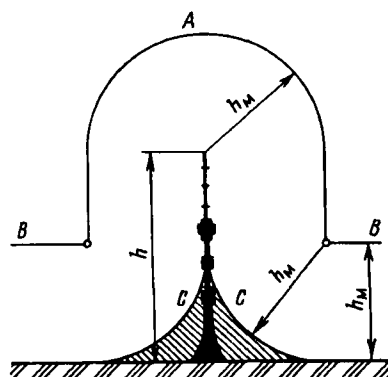


Рис. 14. Сечение зоны защиты стержневого молниеотвода высотой h при $h_M < h$

строение объясняет отмечавшиеся поражения Останкинской телебашни (высота 540 м) нисходящими молниями на расстояниях до 215 м от ее вершины, а также удары молнии в землю на расстоянии до 200 м от башни.

На рис. 15 показано сечение зоны защиты двух параллельных тросов, расположенных на одинаковом расстоянии от земли. Зона защиты одиночного троса строится так же, как внешняя часть зоны двух тросов (или как сечение зоны защиты по рис. 12).

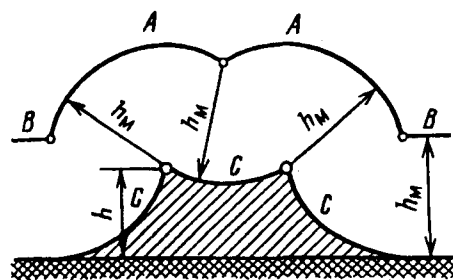


Рис. 15. Сечение зоны защиты двух параллельных тросовых молниеотводов

Проверка молниезащищенности сооружений сложной конфигурации производится с использованием модели сооружений, выполненных в уменьшенном масштабе. В том же масштабе изготавливается шар радиусом h_M . Этим шаром обкатывается модель сооружения во всех направлениях. Если шар при этом касается только устройств молниезащиты, то объект оказывается защищенным. В противном случае необходимы дополнительные защитные устройства [8].

Электрогеометрический метод включен в стандарт Международной электротехнической комиссии (МЭК) [9].

Молниеприемники и токоотводы. Молниеприемники могут устанавливаться как вблизи защищаемых объектов, так и на самих объектах.

Для отдельно стоящих молниеотводов в качестве несущих элементов используются железобетонные или деревянные стойки (при высоте

до 20 м). Для токоотвода используется металлическая арматура железобетонных стоек, по деревянным стойкам прокладывается специальный токоведущий спуск к заземлителю. При высоте более 20 м применяют стальные решетчатые конструкции. Молниеотводы рекомендуется выполнять в виде свободно стоящих конструкций без растяжек.

В качестве несущих устройств для крепления токоведущих частей молниеотводов должны использоваться, где это возможно, конструкции самих защищаемых объектов. Например, на подстанциях молниеприемники могут устанавливаться на металлических порталах, предназначенных для подвески ошиновки, а сами порталы могут использоваться в качестве токоотводов, соединяющих молниеприемники с заземлителем.

Если молниеотвод устанавливается, например, на здании, то он защищает от поражения молнией крышу здания и расположенные на ней детали (трубы, башни, скульптурные украшения и т.п.). От молниеприемника по наружной поверхности стен здания прокладываются токоотводы к заземлителю.

Если здание имеет железную крышу, то, естественно, установка специального молниеприемника не требуется. Его роль выполняет железная крыша, которую следует надежно заземлить по крайней мере двумя токоотводами. При длине здания свыше 20 м через каждые 20 м должны быть установлены дополнительные токоотводы к заземлителю. Все находящиеся на крыше здания выступающие детали снабжаются отдельными молниеприемниками, надежно присоединенными к крыше. Металлические крыши башен также электрически соединяются с крышей здания. Трубы, выполненные из непроводящего материала, снабжаются молниеприемниками из стального прутка, проложенными по периметру труб по верхнему краю и соединенными с крышей здания. В скульптурные фигуры при их изготовлении закладываются стальные прутья, выступающие на 20—30 см над фигурой и присоединяемые снизу к крыше, или же по поверхности скульптурных фигур прокладываются стальные прутки, если закладка их внутрь не была предусмотрена.

Если крыша здания выполнена из непроводящего материала, то можно снабдить ее молниеприемником в виде сетки из стальных прутьев диаметром 8 мм с размером ячейки $5 \times 5 \text{ м}^2$ (узлы сетки свариваются). В остальном защита осуществляется так же, как и для здания с железной крышей: дополнительные молниеприемники, установленные на выступающих частях здания, привариваются к стальной сетке на крыше, а сетка токоотводами соединяется с заземлителем.

В зданиях городского типа в качестве то-

коотводов могут быть использованы водопроводные и канализационные трубы, металлический каркас здания, а также арматура железобетонного каркаса здания, если при надлежащем соединении она образует сплошной путь от молниеприемника до заземлителя. В качестве дополнительных токоотводов могут быть использованы пожарные лестницы и водосточные трубы при условии надежного соединения их частей.

В домах сельского типа поражаются молнией преимущественно дымовые трубы, коньки крыш, края фронтов от конька до нижнего края крыши. Если крыша не металлическая, то в этом случае не следует на ней устраивать сетку из стальных прутков. Достаточно проложить стальной прут в местах наиболее вероятного поражения молнией, т.е. по коньку крыши и по краям фронтонов, и соединить его с заземлителем двумя токоотводами; на вершине дымовой трубы также следует проложить стальной прут (или установить стержень, возвышающийся над трубой на 20—50 см) и соединить его с токоотводом.

Все элементы молниезащитного устройства должны иметь достаточное сечение, чтобы под действием тока молнии не происходило их перегревания, а тем более расправления.

Рекомендуется применять стальные молниеприемники сечением 50—100 мм² для стержневых и однопроволочных тросовых молниеотводов. Поперечное сечение стальных многопроволочных тросов должно быть не менее 35 мм².

Для оценки нагрева токоотвода, по которому проходит ток молнии, удобно воспользоваться интегралом действия A . Если предположить, что активное сопротивление токоотвода при прохождении тока не изменяется, то температура проводника повысить на

$$T = \frac{\rho}{S^2 \gamma c} A, \quad (13)$$

где S — сечение токоотвода; ρ , γ и c — удельные сопротивления, масса и теплоемкость материала токоотвода соответственно.

За счет поверхностного эффекта токопроводящая часть токоотвода оказывается меньше, чем его сечение. Грубо это уменьшение можно учесть, введя коэффициент K , тогда

$$T = \frac{k \rho}{S^2 \gamma c} A. \quad (14)$$

Приняв для стали $\gamma = 7800 \text{ кг/м}^3$, $c = 0,46 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$, $\rho = 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, $k = 3$, $A = 10^7 \text{ А}^2 \cdot \text{с}$ (вероятность такого значения A , примерно 0,5%), получим

$$T \approx 10^{-6} / S^2. \quad (15)$$

Из (15) следует, что, например, при $S = 50 \text{ мм}^2$

повышение температуры стального токоотвода составляет примерно 400 К, т.е. даже при таких высоких параметрах тока молнии (интеграла действия) нагрев токоотвода не является чрезмерным.

Допустимые сечения токоотводов указаны в таблице с учетом различной степени коррозии при расположении внутри и снаружи сооружения, а также в земле.

Место расположения токоотвода	Минимальные сечения стальных токоотводов для различных профилей					
	Круглый: диаметр, мм	Прямоугольный		Угловая сталь		Трубы: толщина стенок, мм
		сечение, мм	толщина, мм	сечение, мм	толщина полок, мм	
Внутри сооружения	5	24	3	24	2	1,5
Снаружи сооружения	6	48	4	48	2,5	2,5
В земле	8	48	4	48	4	3,5

Если имеется несколько токоотводов, соединенных параллельно и по каждому из них может проходить лишь часть тока молнии, то сечение может быть уменьшено.

Токоотводы следует прокладывать от молниеприемника к заземлителю по кратчайшим путям. На всем протяжении они не должны образовывать петель или острых углов (рис. 16). В противном случае возможны пробои между разными точками токоотводов, а также обрывы их под действием электродинамических сил, возникающих при прохождении по ним тока молнии (рис. 17).

Присоединение частей молниезащитного устройства друг к другу лучше всего производить с помощью сварки. Могут применяться также болтовые соединения и заклепки. Во всех случаях площадь контакта между соединяемыми деталями должна быть не меньше удвоенного сечения этих деталей.

Токоотводы крепятся к несущей конструкции (опоре) молниеотвода или к стене здания через каждые 1,5–2 м. Токоотвод, имеющий надлежащее сечение, может соприкасаться со стеной деревянного дома или с деревянной опорой молниеотвода.

Для предохранения от коррозии молниепри-

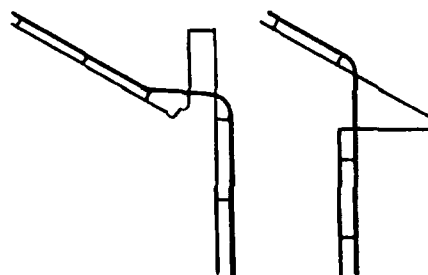


Рис. 16. Правильная прокладка токоотводов

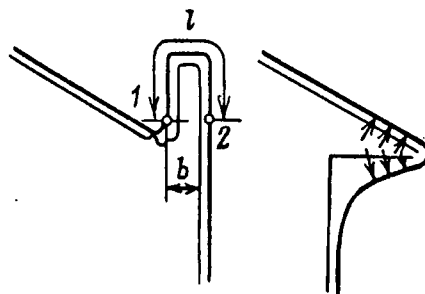


Рис. 17. Варианты неправильной прокладки токоотводов

емники и токоотводы должны быть покрашены или оцинкованы. Применение в качестве токоотводов многопроволочных стальных тросов по условиям коррозии не рекомендуется, если же они и используются, то только в оцинкованном виде.

(Продолжение следует)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломоносов М.В. Избранная проза. 2-е изд., доп. — М.: Сов. Россия, 1986.
2. Вицман А. Наставление о громовых отводах. — СПб, 1800.
3. Вицман А. Прибавление к наставлению о делении громовых отводов для сведения публики. — СПб, 1800.
4. Стекольников И.С., Комельков В.С., Богомолов А.Ф. и др. Грозозащита промышленных сооружений и зданий — М.: Изд-во АН СССР, 1951.
5. Ларионов В.П. Защита жилых домов и производственных сооружений от молнии. 2-е изд. — М.: Энергия, 1966.
6. Указания по проектированию и устройству молниезащиты зданий и сооружений (СН 305-77). — М.: Стройиздат, 1977.
7. Darveniza M., Popolansky F., Whitehead E.R. Lightning protection of UHV Transmission Lines / CIGRE—Electra. 1975, № 41.
8. Hasse P., Wiesinger J. Handbuch für Blitzschutz und Erdung. München: Richard Pflaum Verlag KG, 1993.
9. IEC Standard 1024-1 (03-1990) Protection of structures against lightning. Part 1: General Principles.

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ И ЧИТАТЕЛЕЙ!

Каждый автор имеет право бесплатно получить 1 экз. журнала с его статьей.

Экземпляры номеров журнала «Электричество» за последние годы можно приобрести в редакции журнала (Б. Черкасский пер., 2/10, тел. 924-24-80).

Библиография

Абрамкин Ю.В. Теория и расчет пондеромоторных и электродвижущих сил и преобразования энергии в электромагнитном поле. — М.: Изд-во МЭИ, 1997. — 208 с.

В основу теории электромагнитного поля положена математическая модель, предложенная Дж.К. Максвеллом в виде установленных им дифференциальных уравнений (ДУ), которым удовлетворяют основные физические величины электромагнитного поля (магнитные и электрические индукции $\vec{B}$, $\vec{D}$ и напряженности $\vec{H}$, $\vec{E}$).

Дифференциальные уравнения Максвелла распространяются на стационарные и нестационарные электромагнитные поля в любых средах с нелинейными, анизотропными диэлектрическими и магнитными свойствами, а также на любые формы границ области поля, и при заданных граничных и начальных условиях всегда имеют единственное решение. Эти особенности ДУ Максвелла предопределили их успешное применение при расчетах электромагнитных процессов в проектируемых и эксплуатируемых электротехнических устройствах и электромеханических преобразователях самых различных назначений и исполнений.

Особенно резко расширились области применения ДУ для указанных целей в последние два-три десятилетия благодаря одновременному внедрению в практику электромагнитных расчетов электронно-вычислительной техники и численных методов интегрирования ДУ в частных производных второго порядка, к которым сводятся ДУ Максвелла, записанные в векторной форме.

Однако успешное применение математической модели Максвелла для расчета электромагнитных процессов в электротехнических устройствах, особенно в электромеханических преобразователях, безусловно сдерживается тем, что при интегрировании ДУ Максвелла определяется только распределение упомянутых выше основных физических величин, характеризующих электромагнитное поле ($\vec{B}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{E}$). Что касается дополнительных физических величин, характеризующих это поле, а именно, объемной плотности распределения запасенной в электромагнитном поле энергии w и пондеромоторных сил $\vec{f}$, то для их выражения через основные величины до самого последнего времени не существовало общепризнанных и достаточно строго обоснованных формул, пригодных как для стационарных полей

в линейных, изотропных, неполяризованных средах, так и для нестационарных полей в нелинейных, анизотропных, поляризованных средах.

Поэтому выход в свет рецензируемой книги Ю.А. Абрамкина, посвященной проблеме расчета объемных плотностей энергии и пондеромоторных сил в электромагнитном поле, представляется нам вполне своевременным.

Во введении к книге разъяснены суть рассматриваемой проблемы и причины ее возникновения, обоснована ее актуальность. Сформулированы цели работы, намечены пути их достижения, приведены в краткой форме основные результаты работы.

Отмечается, что почва для возникновения рассматриваемой проблемы была подготовлена не без участия самого Максвелла, который в одной из своих ранних работ «О физических силовых линиях», опубликованной в 1862 г., и в написанном позднее (в 1873 г.) «Трактате об электричестве и магнетизме» предложил две не сводящиеся одна к другой формулы для объемной плотности пондеромоторных сил в стационарном магнитном поле. Несовпадение этих двух формул в применении к магнитным средам послужило основой для будущих дискуссий, возникших после того, как часть весьма авторитетных ученых поддержала первую из этих формул, в то время как другие не менее авторитетные ученые высказались в пользу второй. Появились и такие исследования, в которых для расчета объемной плотности пондеромоторных сил в стационарном магнитном поле предлагались формулы, не приводящиеся ни к первой, ни ко второй формулам Максвелла.

В дальнейшем дискуссии распространялись и на формулы для расчета объемной плотности пондеромоторных сил в общем случае для нестационарных электромагнитных полей в нелинейных, анизотропных, поляризованных средах.

Возникшие после публикации трудов Максвелла дискуссии приняли перманентный характер и продолжают до наших дней.

Таким образом, отыскание строго обоснованных формул для расчета объемной плотности пондеромоторных сил и энергии в электромаг-

нитном поле превратилось в проблему, решение которой затянулось на долгие годы и привлекло внимание многих ученых.

В первой главе, исходя из математической модели электромагнитного поля Максвелла, дан строгий вывод формул для пространственно-временных распределений удельных, пондеромоторных сил в электромагнитном поле: объемной плотности пондеромоторных сил $\vec{f}$ и натяжений $\vec{T}_n$, представляющих собой пондеромоторные силы, действующие на единицу поверхности с нормалью $\vec{n}$.

Показано, что эти величины однозначным образом выражаются через пространственно-временные распределения основных физических величин — индукций $\vec{B}=\vec{B}(x, y, z, t)$, $\vec{D}=\vec{D}(x, y, z, t)$ и напряженностей $\vec{H}=\vec{H}(x, y, z, t)$, $\vec{E}=\vec{E}(x, y, z, t)$, представляющих собой единственное решение дифференциальных уравнений Максвелла для данного электромагнитного поля. Полученные автором оригинальные формулы для объемной плотности пондеромоторных сил и натяжений выражаются через основные физические величины данного электромагнитного поля, а также через их вихри ($\text{rot } \vec{B}$, $\text{rot } \vec{H}$ и др.) и истоки ($\text{div } \vec{B}$, $\text{div } \vec{H}$ и др.):

$$\begin{aligned} \vec{f} = 0,5 \{ & \text{rot } \vec{H} \times \vec{B} + \text{rot } \vec{B} \times \vec{H} + \vec{H} \text{ div } \vec{B} + \vec{B} \text{ div } \vec{H} + \\ & + \text{rot } [\vec{H} \times \vec{B}] + \text{rot } \vec{E} \times \vec{D} + \text{rot } \vec{D} \times \vec{E} + \vec{E} \text{ div } \vec{D} + \\ & + \vec{D} \text{ div } \vec{E} + \text{rot } [\vec{E} \times \vec{D}] \}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\vec{T}_n = (\hat{T}\vec{n}) = \vec{H}(\vec{B}\vec{n}) + 0,5(\vec{B}\vec{H})\vec{n} + \vec{E}(\vec{D}\vec{n}) + 0,5(\vec{D}\vec{E})\vec{n}. \quad (2)$$

Как и дифференциальные уравнения Максвелла, с помощью которых выведены формулы (1) и (2), эти формулы распространяются на стационарные и нестационарные электромагнитные поля в любых средах с нелинейными, анизотропными диэлектрическими и магнитными свойствами.

Поскольку основные физические величины ($\vec{B}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{E}$), которые входят в правые части формул (1) и (2), представляют собой единственное решение дифференциальных уравнений Максвелла для данного электромагнитного поля, совершенно очевидно, что с помощью этих формул могут быть единственным образом рассчитаны пространственно-временные распределения объемной плотности пондеромоторных сил $\vec{f}$ и электромагнитных натяжений $\vec{T}_n$ для этого поля.

Показано, что в частном случае для стационарного магнитного поля в среде, обладающей изотропными магнитными свойствами, формулы

(1) и (2) совпадают с первыми формулами Максвелла для удельных пондеромоторных сил (1861—1862 гг.) в том виде, который был придан им Л. Больцманом:

$$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B} - 0,5H^2 \text{ grad } \mu; \quad (3)$$

$$\vec{T}_n = \mu \vec{H} \vec{H}_n - 0,5\mu H^2. \quad (4)$$

Автор книги считает, что все предложенные формулы для расчета удельных пондеромоторных сил, которые не совпадают с единственно правильными формулами (1), (2) в общем случае или с формулами (3), (4) для стационарного магнитного поля в изотропной магнитной среде, следует признать ошибочными. Таковыми являются, в частности, вторые формулы Максвелла для удельных пондеромоторных сил, предложенные в 1873 г. в «Трактате об электричестве и магнетизме».

Появление этих ошибочных, по мнению автора книги, формул объясняется тем, что их авторы при обосновании предложенных ими формул опирались на принципы, противоречащие «Общей Максвелловской теории поля». Это относится и ко вторым формулам Максвелла для удельных пондеромоторных сил в стационарном магнитном поле, при выводе которых в «Трактате об электричестве и магнетизме» Максвелл исходил не из только что построенной им «Общей теории», а из так называемых магнитостатических представлений, сформировавшихся еще до становления предложенной им «Общей теории».

Кроме того, в первой главе уделено внимание способам расчета силы $\vec{F}$, которая действует на любой объем V , выделенный в электромагнитном поле. Отмечается, что это может быть сделано двумя способами. В первом способе сила $\vec{F}$ выражается через найденные по (2) натяжения на элементах dS поверхности S , ограничивающей объем V :

$$\vec{F} = \int_S \vec{T}_n dS. \quad (5)$$

Во втором способе сила $\vec{F}$ выражается через найденную по (1) объемную плотность пондеромоторных сил $\vec{f}$ в элементарных объемах dV , на которые разбит объем V , и через поверхностную плотность пондеромоторных сил $\vec{f}_s$ на элементах dS поверхностей разрыва магнитных и диэлектрических проницаемостей S_p , расположенных внутри объема V :

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} dV + \int_{S_p} \vec{f}_s dS. \quad (6)$$

Формулы для определения поверхностной плотности пондеромоторных сил $\bar{f}_s$ на граничных поверхностях между средами k и m , обладающими различными магнитными и диэлектрическими свойствами, приведены в книге. Они распространяются на нелинейные и анизотропные среды и выведены путем суммирования найденных по (2) натяжений $\bar{T}_{nk}$ и $\bar{T}_{nm}$, которые действуют на элемент dS граничной поверхности со стороны среды k и со стороны среды m :

$$\bar{f}_s = \bar{T}_{nk} + \bar{T}_{nm} = \bar{n} \bar{f}_s, \quad (7)$$

где $\bar{n}$ — нормаль к элементу граничной поверхности dS .

Показано, что в силу единственности пространственно-временных распределений $\bar{f}$, $\bar{T}_n$ и $\bar{f}_s$, рассчитанных по (1), (2) и (7), пондеромоторные силы $\bar{F}$, найденные первым способом по (5) и вторым способом по (6), всегда одинаковы.

Вторая глава посвящена определению объемной плотности энергии в электромагнитном поле. Отмечается, что сам Максвелл в одной из своих основных работ, известной в русском переводе как «Динамическая теория электромагнитного поля» (1864 г.) приводит без доказательства формулу для объемной плотности запасенной в электромагнитном поле энергии

$$w = 0,5 \bar{B} \bar{H} + 0,5 \bar{D} \bar{E} \quad (8)$$

и полагает ее справедливой как при линейных, так и при нелинейных диэлектрических и магнитных свойствах среды.

Однако в изданных в послемаксвелловский период зарубежных и отечественных руководствах по ТОЭ и основам теории электричества получило общее признание утверждение, что формула Максвелла (8) справедлива только в случае линейных диэлектрических и магнитных свойств среды, а объемная плотность энергии в случае нелинейных свойств среды должна определяться с учетом предыстории намагниченного (поляризованного) состояния среды по формуле

$$w = \int_0^{\bar{B}} \bar{H} d\bar{B} + \int_0^{\bar{D}} \bar{E} d\bar{D}. \quad (9)$$

Чтобы выяснить, какая из предложенных формул для расчета объемной плотности запасенной в электромагнитном поле энергии (формула (8) или (9)) справедлива для нелинейной среды, автор книги взял на себя труд вывести формулу для расчета объемной плотности энергии в электромагнитном поле, исходя из математической

модели электромагнитного поля Максвелла в виде системы предложенных им дифференциальных уравнений. Вывод формулы был сделан для нестационарного электромагнитного поля в среде с нелинейными, анизотропными, диэлектрическими и магнитными свойствами.

Введенная формула полностью совпала с формулой (8), предложенной Максвеллом.

Таким образом удалось строго доказать, что объемная плотность энергии электромагнитного поля в элементе среды с нелинейными и анизотропными диэлектрическими и магнитными свойствами зависит только от основных физических величин ($\bar{B}$, $\bar{D}$, $\bar{H}$, $\bar{E}$), однозначно определяющих электромагнитное поле в этом элементе, и может быть рассчитана по формуле (8) Максвелла, в которой никак не учитывается предыстория намагничивания (поляризация) данного элемента среды.

В третьей главе впервые предложено математическое описание закона электромагнитной индукции в дифференциальной форме, согласующееся с представлениями Фарадея. При этом автор книги исходил из фарадеевской трактовки закона электромагнитной индукции в интегральной форме, поскольку в ней содержатся указания о самом механизме индуктирования ЭДС не только в замкнутом контуре, но и в любом его элементе. По Фарадею, индуктирование ЭДС есть следствие пересечения контура (или его элемента) магнитными линиями, которые в современной терминологии есть ни что иное, как линии векторного магнитного потенциала.

Имея в виду, что ЭДС, индуктированная в элементе $d\bar{l}$ замкнутого контура, равна проекции индуктированной напряженности электрического поля в зоне этого элемента $\bar{E}$ на направление $d\bar{l}$, автор воспользовался формулировкой Максвелла для закона электромагнитной индукции в дифференциальной форме

$$\bar{E} = - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \quad (10)$$

и путем ее тождественного преобразования получил формулировку того же закона

$$\bar{E} = (\bar{\nabla}_A \nabla) \bar{A}, \quad (11)$$

вытекающую из представлений Фарадея.

Полученное расчетное выражение для индуктированной (электродвижущей) напряженности поля (11) свидетельствует о том, что непрерывным условием ее появления в рассматриваемой точке наблюдения является перемещение линии векторного магнитного потенциала, проходящей через эту точку с некоторой опреде-

ленной скоростью $\vec{V}_A$.

При этом вектор $\vec{E}$ в этой точке оказывается тождественно совпадающим с производной от векторного магнитного потенциала A в направлении вектора скорости переноса линии векторного магнитного потенциала $\vec{V}_A$, умноженной на положительное число, равное по абсолютной величине скорости перемещения линии векторного магнитного потенциала $|\vec{V}_A|$.

Дано решение задачи определения векторной функции скорости переноса векторного потенциала V_A по известной функции векторного потенциала A в трех- и двухмерных магнитных полях. Проанализирован ряд конкретных примеров определения ЭДС, исходя из фарадеевской формулировки закона электромагнитной индукции в дифференциальной форме в виде формулы (11).

В приложении к книге приводятся необходимые сведения по операциям векторного анализа, дополненные тщательно рассмотренными примерами, что значительно облегчает понимание основного текста.

Переходя к общей оценке книги Ю.А.Абрамкина, следует сказать, что она представляет собой серьезный вклад в теорию электромагнитного поля. В публикациях Ю.В.Абрамкина, обобщенных в рецензируемой книге, а также в организованной

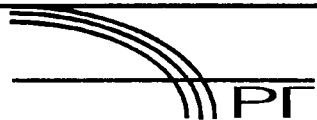
журналом «Электричество» в 1987–1995 гг. дискуссии, плодотворное завершение которой во многом было связано с участием в ней Ю.В.Абрамкина, решена сложная проблема расчета пондеромоторных сил и энергии в электромагнитном поле, привлекавшая к себе внимание многих ученых в течение более чем 100 лет.

Автор книги убеждает читателя в том, что с помощью выведенных им формул могут быть единственно правильным образом рассчитаны пространственно-временные распределения объемных плотностей пондеромоторных сил и энергии в данном электромагнитном поле.

Будем надеяться, что издание настоящей книги будет способствовать критическому переосмыслению и уточнению тех разделов руководств по ТОЭ и основам теории электричества, которые посвящены расчетам энергии и пондеромоторных сил в электромагнитном поле.

Книга Ю.В.Абрамкина, безусловно, полезна научным работникам в области теоретических основ электротехники и электромеханики, а также специалистам, занимающимся исследованием, разработкой и эксплуатацией электромеханических систем.

Бут Д.А., проф.,
Иванов-Смоленский А.В., проф.



Выставочное предприятие "ЭРГ" "ERG" exhibition service agency

Производственное энергетическое объединение "Татэнерго"
Выставочное предприятие ЭРГ
приглашают Вас принять участие и посетить

IV специализированную выставку

ЭНЕРГО-99

с 25 по 27 мая 1999 года
г. Казань

Основные разделы выставки:

- энергосбережение
- электротехническое оборудование
- оборудование для котельных и тепловых сетей
- газовое хозяйство
- контрольно-измерительные приборы

Надеемся, что участие в выставке принесет
Вам коммерческий успех

Республика Татарстан, 420032, Казань, а/я 648
тел. (8432) 57 91 53 тел. /факс (8432) 55 21 12
пейджер (8432) 64 40 02 аб. 968

В Московском Доме ученых

23 декабря прошлого года в Голубом зале Московского Дома ученых электротехническая секция МДУ (председатель Ю.Е.Нитусов) провела вечер памяти известного ученого-электротехника, профессора А.В.Нетушила, скончавшегося в самом начале

1998 г.

Президент Академии электротехнических наук России, проф. В.Г.Герасимов рассказал о творческом пути Анатолия Владимировича, о результатах его научной деятельности.

С воспоминаниями о выдаю-

щемся ученом-электротехнике выступили присутствующие на вечере коллеги, друзья, студенты.

Были показаны видеоматериалы с последними выступлениями А.В.Нетушила.

Игорь Петрович Копылов

(К 75-летию со дня рождения)

Исполнилось 75 лет доктору технических наук, почетному профессору кафедры электромеханики Московского энергетического института (технического университета), заслуженному деятелю науки и техники Российской Федерации, лауреату Государственной премии, крупному ученому-электромеханику, внесшему весомый вклад в теорию электромеханического преобразования энергии и практику электромашиностроения.

И.П.Копылов окончил МЭИ в 1952 г., в 1955 г. защитил кандидатскую, а в 1966 г. — докторскую диссертации. В 1969 г. ему присвоено звание профессора. В 1970—1972 гг. работал проректором МЭИ по научной работе. С 1974 по 1989 гг. заведовал кафедрой электрических машин МЭИ — базовой кафедрой Минвуза России.

Проф. И.П.Копыловым подготовлено 60 кандидатов и 5 докторов технических наук. Под его руководством прошли стажировку и повышение квалификации сотни преподавателей вузов России и зарубежных стран.

Талантливый ученый и изобретатель, Игорь Петрович обогатил теорию электромеханики фундаментальными работами в



области динамики электрических машин. Им создана теория обобщенного электромеханического преобразователя, позволяющая составить математические модели для любой электрической машины. Предложено определение активной, реактивной, обменной мощности и энергетических показателей в переходных процессах. Он одним из первых применил вычислительные машины для решения задач электромеханики. Свои многочисленные работы в области динамики электрических машин обобщил в выдержавшем три издания учебнике «Математическое моделирование электрических машин», за который в

1990 г. был удостоен Государственной премии.

Результаты его научной деятельности изложены в 450 печатных работах, в том числе 30 учебниках, учебных пособиях и монографиях. Его учебники переведены на английский, польский, китайский, чешский и болгарский языки. Вышедшие под его редакцией капитальные работы «Проектирование электрических машин» и «Справочник по электрическим машинам» в двух томах являются настольными книгами инженеров-электромехаников. И.П.Копылов имеет 110 авторских свидетельств. Им предложены двигатели—усилители, безредукторные тихоходные гидрогенераторы для бесплотинных ГЭС, синхронизированные однофазные двигатели и другие оригинальные электромеханические преобразователи. Имеют большое значение его работы по замене медных обмоточных проводов ферромагнитными.

Занимаясь поисками новых источников электроэнергии, И.П.Копылов подошел к созданию наземных космических энергетических установок, использующих энергию динамических процессов в электриче-

ской машине «планета Земля» и обосновал новое научное направление в электромеханике — геоэлектромеханику. В последние годы вышли его монографии «Электромагнитная Вселенная», «Электромеханика планеты Земля» и «Космоэнергетика России».

И.П. Копылов ведет большую

научно-организационную работу, являясь членом ряда ученых советов и членом редколлегий журналов «Изв. РАН. Энергетика», «Электротехника» и «Изв. вузов. Электромеханика». Он избран Почетным академиком инженерной и электротехнической академий России и членом-кор-

респондентом Международной инженерной академии.

И.П. Копылов — ветеран Великой Отечественной войны, награжден орденами Ленина, Отечественной войны, Красной Звезды и многими медалями.

Юрий Константинович Розанов

(К 60-летию со дня рождения)

Известному ученому в области преобразовательной техники и силовой электроники, доктору технических наук, профессору Ю.К. Розанову исполнилось 60 лет.

В 1962 г. он окончил Московский энергетический институт и работал инженером-конструктором. В 1971 г. стал начальником лаборатории преобразовательной техники Головного Особого конструкторского бюро Московского прожекторного завода (ГОКБ МПЗ), затем был назначен на должность заместителя начальника ГОКБ — заместителя Главного конструктора, в которой проработал до 1989 г. При его непосредственном участии разработаны преобразовательные устройства для систем автономного электропитания объектов специального назначения.

Без отрыва от производства закончил в 1970 г. аспирантуру при Энергетическом институте (ЭНИИ) им. Г.М. Кржижановского и в 1971 г. защитил кандидатскую диссертацию. С 1971 по 1987 гг. вел по совместительству педагогическую деятельность в МИРЭА. В 1987 г. защитил докторскую диссертацию, в 1989 г. ему присвоено звание профессора.

С 1989 г. по настоящее время Ю.К. Розанов является заведующим кафедрой «Электрические и электронные аппараты» МЭИ.

Область научных интересов



Ю.К. Розанова — силовая электроника. Как научный работник он сформировался под руководством профессоров Ю.Г. Толстова и Ф.И. Ковалева. Юрий Константинович принимал непосредственное участие в создании, испытаниях и сдаче в эксплуатацию автономных электротехнических комплексов различного назначения. Он внес большой вклад в развитие силовой полупроводниковой техники — преобразователей электроэнергии, регуляторов качества ее параметров, устройств управления и защиты — для повышения эффективности автономных комплексов электроснабжения. Основные теоретические положения этих разработок нашли отражение в его монографии «Полупроводниковые преобразователи со звеном повышенной частоты» и научно-технических статьях, а

схмотехнические решения защищены авторскими свидетельствами на изобретения.

Всего Ю.К. Розанов опубликовал свыше 100 научных работ, в том числе две монографии и два учебника, один из которых «Основы силовой преобразовательной техники» стал первым в СССР учебником для средних учебных заведений, получил широкое признание среди студентов и был издан в ЧССР.

Большое внимание Ю.К. Розанов уделяет подготовке научных кадров. Под его руководством пять специалистов защитили кандидатские диссертации. Он является членом трех специализированных ученых советов по присуждению ученых степеней.

В 1993 г. Ю.К. Розанов избран действительным членом Академии электротехнических наук РФ.

Ю.К. Розанов ведет большую общественную работу. Он является членом редколлегий журналов «Электричество» и «Электротехника», вице-президентом Ассоциации инженеров силовой электроники и членом международного института инженеров электриков и электронщиков (IEEE).

За создание образцов новой техники Юрий Константинович награжден орденами «Трудового Красного Знамени», «Знак Почета» и медалями.

Dear readers!

We are pleased to inform you that beginning from 1998 the journal "Electrical Technology" is published and distributed by the "Znack" Publishing House (Russia) under the title "Electrical Technology Russia" (ISSN 1028—7957).

As before it is a quarterly edition of the same size and volume. It appears in the form of four annual issues in April, July, October and January.

The "Electrical Technology Russia" is an English version of one of the oldest journals of Russian Academy of Sciences — "Elektrichestvo" (founded in 1880).

Annual (1999) subscription rates: Europe and CIS countries, US\$ 985. All other countries, US\$ 1115. The two-year institutional rate is US\$ 1872 and US\$ 2118 respectively. The three-year institutional rate is US\$ 2748 and US\$ 3111 respectively. Prices include postage and insurance.

The above rates apply to orders for 1 to 5 copies. For orders for 6 to 10 copies the rates are reduced by 7%. For orders for more than 10 copies the reduction is 10%.

If you wish to receive the "Electrical Technology Russia" please advise us of the number of the copies required and the addresses of subscribers.

Адреса редакции: 103012 Москва, К-12, Б. Черкасский пер., 2/10

 924-24-80, 928-88-69; факс 315-0698

101000 Москва, Главный почтамт, а/я № 648

Художественный редактор Т.А. Дворецкова

Сдано в набор 11.02.99. Подписано в печать 10.03.99. Формат 60×80 1/8.
Бумага офсетная № 2. Печать офсетная. Печ. л. 8. Заказ 73

ЗАО «Знак», 103012 Москва, Б. Черкасский пер., 2/10
Отпечатано в типографии МЭИ
111250 Москва, ул. Красноказарменная, д. 13

*Если Вы работаете в области энергетики или электротехники,
позаботьтесь о том,
чтобы Ваши предприятие, лаборатория, кафедра
не опоздали с подпиской на*

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

- старейший отечественный теоретический и научно-практический журнал, орган Российской Академии наук, Федерации энергетических и электротехнических обществ;
- выходит ежемесячно, предназначен для высококвалифицированных специалистов в области энергетики и электротехники;
- публикует теоретические и научно-практические работы отечественных и зарубежных ученых и инженеров, освещает работу российских и международных конференций, рецензирует учебники и монографии по тематике журнала, помещает материалы по истории электротехники, статьи о выдающихся отечественных и зарубежных ученых;
- журнал поступает во все промышленно развитые страны мира.

*Условия подписки в России и странах СНГ указаны
в Объединенном каталоге Государственного комитета РФ
по связи и информатизации «Подписка-99»*

*Зарубежные читатели могут подписаться на наш журнал
по адресам фирм, указанным в № 1, 2/99*

*В Москве подписку от зарубежных читателей на «Электричество»
и его английскую версию «Electrical Technology Russia»
принимает АО «Международная книга», фирма «Периодика»
(117049, Б. Якиманка, 39, тел. 238-4967, факс 238-4634)*