

ISSN 0013-5380

# ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

**1997**

**12**

**ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ**УЧРЕДИТЕЛИ: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК (Отделение физико-технических проблем энергетики),  
ФЕДЕРАЦИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ ОБЩЕСТВ**СОДЕРЖАНИЕ**

Ершов М.С., Егоров А.В., Яценко Д.Е. Методы определения показателей качества электроснабжения промышленных комплексов . . . . .	2
Михайлов М.С., Дубовой Э.И. Возможность оценки положения молнии в пространстве по измерению ее электромагнитного излучения в одной точке . . . . .	8
Аксенов Ю.П., Голубев А.А., Ляпин А.Г. Градуировка схемы измерения частичных разрядов при эксплуатационных испытаниях . . . . .	16
Лурье А.И. Об определении максимального тока при включении цепи $RL$ на переменное напряжение . . . . .	23
Паздерин А.В. Повышение достоверности показаний счетчиков электроэнергии расчетным способом . . . . .	30
Чалпыгин Е.Е., Алешин М.Л., Николенко М.П. Параметрическое управление преобразователями с дозированной передачей энергии в нагрузку . . . . .	35
Бычков М.Г., Кисельникова А.В., Семенчук В.А. Экспериментальные исследования шума и вибраций в вентильно-индукторном электроприводе . . . . .	41
Симаков Г.М., Кромм А.А. Быстродействующий микроэлектропривод постоянного тока с амплитудно-импульсным управлением . . . . .	47
Мощинский Ю.А., Киселева М.М. К расчету емкости конденсатора однофазного асинхронного двигателя . . . . .	51
Цицикян Г.Н. Электромагнитное поле линейного проводника с током, параллельного граничной плоскости «воздушная среда — проводящее полупространство» . . . . .	55
Витков М.Г., Виткова А.А. Операторные схемы замещения зависимых источников при ненулевых начальных условиях . . . . .	62
Мейер А.А. Распределение потенциала от двух точечных источников тока в круглой неоднородной пластине . . . . .	66

**ХРОНИКА**

Борис (Багаудин) Хамидович Гайтов (К 60-летию со дня рождения) . . . . .	73
Указатель материалов, опубликованных в ж. «Электричество» в 1997 г. . . . .	74
Алфавитный указатель . . . . .	79

**CONTENTS**

Yershov M.S., Yegorov A.V., Yatsenko D.Ye. Methods for Determining Indices of the Quality of Power Supply of Industrial Complexes . . . . .	2
Mikhailov M.S., Dubovoi E.I. Electromagnetic Radiation of Lighting and Estimating Its Orientation and Location Means of Measuring Radiation at One Point of Space . . . . .	8
Aksionov Yu.P., Golubev A.A., Lyapin A.G. Calibrating Measurement Circuits for Registration of Partial Discharges at the Exploitation . . . . .	16
Lur'ye A.I. Maximum Current under Switching in $RL$ -Circuit to AC Voltage . . . . .	23
Pazderin A.V. Validation of Hour-Meter Readings by Using the Calculation Method . . . . .	30
Chaplygin Ye.Ye., Alioshin M.L., Nikolenko M.P. Parametric Control of DC Converters with Pulse Transfer of Energy to Load . . . . .	35
Bychkov M.G., Kisel'nikova A.V., Semenchuk V.A. Investigation of Noise and Vibrations in a Switched Reluctance Drive . . . . .	41
Simakov G.M., Kromm A.A. High Speed DC Microdrive with Pulse-Amplitude Control . . . . .	47
Moshchinskii Yu.A., Kiseleva M.M. Calculating Capacitor Capacitance of a Single-Phase Induction Motor . . . . .	51
Tsitsikyan G.N. Electromagnetic Field of Current Conductor Parallel to Boundary Plane «Air Medium-Conducting Half-Space» . . . . .	55
Vitkov M.G., Vitkova A.A. Laplace's Transformation Domain Models of Dependent Sources with Non-Zero Initial States . . . . .	62
Meyer A.A. Potential Distribution of Two Point Current Sources in a Round Nonhomogeneous Plate . . . . .	66

**CHRONICLE**

Boris (Bagaudin) Khamidovich Gaitov (to Mark the 60th Anniversary) . . . . .	73
List of Publications . . . . .	74
Alphabetical Index . . . . .	79

# Методы определения показателей качества электроснабжения промышленных комплексов

ЕРШОВ М.С., ЕГОРОВ А.В., ЯЦЕНКО Д.Е.

*Предложены показатели качества электроснабжения промышленных комплексов, чувствительных к кратковременным (доли секунды) нарушениям электроснабжения, и методы их определения, которые могут способствовать развитию существующих нормативных требований к бесперебойности питания и независимости источников электроэнергии систем промышленного электроснабжения. Разработано методическое, алгоритмическое и программное обеспечение для оценки указанных показателей на стадиях проектирования и эксплуатации систем электроснабжения предприятий. Приведены результаты оценки показателей качества электроснабжения промышленного комплекса.*

**Ключевые слова:** качество электроснабжения, бесперебойность, независимость источников, программы, расчет

Для крупных промышленных комплексов с непрерывными технологическими процессами и большим объемом электродвигателей нагрузки остро стоит проблема обеспечения качественного электроснабжения [1]. В этой связи показательные результаты эксплуатации крупных газоперерабатывающих комплексов (ГК), для которых характерно несоответствие условий функционирования питающей электроэнергетической системы и электротехнической системы предприятия [2, 3]. Длительные нарушения электроснабжения ГК редки. Однако современные газовые комплексы — предприятия с непрерывными технологическими процессами, мощность электродвигательной нагрузки которых достигает сотен мегаватт при единичной мощности электродвигателей до десятков мегаватт, чувствительны к кратковременным нарушениям электроснабжения (КНЭ). Эти нарушения электроснабжения обусловлены аварийными возмущениями как во внутренней, так и (в первую очередь) во внешней частях системы электроснабжения. Аварийные возмущения (короткие замыкания и другие повреждения) неизбежны при эксплуатации протяженных электрических сетей энергосистем.

В узлах электрической нагрузки предприятия КНЭ проявляются в виде провалов напряжения различной глубины  $\Delta u$  и длительности  $\tau$ . Глубина провалов напряжения зависит от структуры электрических сетей питающей электроэнергетической системы и от удаленности места аварии от основных узлов (шины РУ ГПП) электрической нагрузки предприятия. Длительность КНЭ составляет 0,15–0,2 с, если электроснабжение

*Indices of the quality of power supply of industrial complexes which are sensitive to short-term (fractions of a second) losses of supply, and methods for their determining are proposed. The methods proposed can favor the development of the existing normative requirements to uninterrupted operation and independence of electrical power supply sources of industrial power supply systems. Algorithms and software package for estimating the indices, considered at the stages of their design at exploitation of industrial plant power supply have been developed.*

**Key words:** quality of electrical power supply, uninterrupted, independence of sources, software, calculation

восстанавливается в результате отключения поврежденного элемента сети быстродействующей защитой, и достигает нескольких секунд, если электроснабжение восстанавливается в результате действия автоматических устройств энергосистемы. Несмотря на кратковременность возмущений, они приводят к тяжелым нарушениям непрерывных технологических процессов, на восстановление которых расходуются значительное время и средства.

Следствием КНЭ может явиться потеря устойчивости узлов нагрузки предприятия. В таком случае нагрузка должна быть отключена (полностью или частично) защитой от потери питания, иначе последует неупорядоченное отключение отдельных электроприемников индивидуальными защитами, что осложняет процесс восстановления нормального режима работы электротехнической системы предприятия, может вызвать сокращение ресурса двигателей вследствие их температурных и механических перегрузок, а на ГК, кроме того, приводит к аварийным сбросам сырья и промежуточных продуктов на факел, сокращает ресурс технологического оборудования.

Проблема КНЭ осложняется тем, что возмущения в сетях питающей электроэнергетической системы часто сопровождаются одновременными критическими провалами напряжения во всех основных узлах электрической нагрузки предприятия. По существу это означает, что источники внешнего электроснабжения не являются независимыми. Чем выше степень структурного резервирования системных связей энергосисте-

мы, тем меньше вероятность длительных нарушений электроснабжения. Но при увеличении числа контуров в сетях электроэнергетической системы можно ожидать уменьшения степени независимости источников внешнего электроснабжения по отношению к кратковременным нарушениям электроснабжения основных узлов нагрузки предприятия.

В настоящее время в проектной практике оценка влияния аварийных ситуаций в сетях электроэнергетической системы на узлы промышленной нагрузки ограничена анализом результатов расчетов остаточных напряжений в узлах электрической нагрузки предприятия при коротких замыканиях в заданных узлах сети электроэнергетической системы. Такой подход основан скорее на качественных, чем количественных критериях качества электроснабжения предприятия и ввиду отсутствия последних не подлежит нормированию и оценке в практике эксплуатации.

Недостаточно четко определены показатели и критерии качества электроснабжения по отношению к потребителям, чувствительным к КНЭ и в общепромышленных нормативных документах, в том числе в ПУЭ, в ГОСТ 13109-87, хотя необходимость решения данной проблемы назрела [1–4]. В этой связи для крупных промышленных комплексов с большим составом электродвигательной нагрузки, чувствительной к кратковременным возмущениям в системе внешнего электроснабжения, предлагается расширить набор показателей качества электроснабжения, включив в них вероятностно-статистические показатели критических кратковременных нарушений электроснабжения, подлежащие определению как в процессе проектирования, так и в процессе эксплуатации систем электроснабжения предприятий.

**Характеристики чувствительности узлов электрической нагрузки к КНЭ.** Для того чтобы иметь возможность оценивать те или иные показатели качества электроснабжения предприятий, чувствительных к КНЭ, необходимо конкретизировать понятие чувствительности узлов электрической нагрузки к КНЭ, или, что по сути то же самое, понятие критических КНЭ. Согласно [4] по отношению к узлам промышленной электрической нагрузки КНЭ могут характеризоваться уровнем остаточного напряжения (или значением провала напряжения) в узле при возмущении в системе его электроснабжения. Однако, поскольку речь идет о возмущающих воздействиях, то время также должно присутствовать при характеристике критических КНЭ. При этом ориентироваться необходимо не на усредненные критические значения указанных величин, за основу которых могут быть взяты значения, приведенные, например, в ПУЭ (5.3.52), а на значения, которые

подлежат оценке для каждого конкретного узла с учетом состава его нагрузки и прочих особенностей. В этой связи представляется, что характеристикой чувствительности узла электрической нагрузки к КНЭ может служить граница динамической устойчивости узла, определяемая зависимостью  $t(u)$ : допустимого времени  $t$  (с) нарушения электроснабжения от величины остаточного напряжения  $u=1-\Delta u$  (отн. ед.). Достаточно точно данная граница определяется двумя параметрами:  $u_{c,y}$  (отн. ед.) — границей статической устойчивости узла и  $t_0$ , с — максимально допустимым временем возмущения, не вызывающим нарушения динамической устойчивости узла электрической нагрузки при остаточном напряжении узла, равном нулю. Указанные параметры подлежат определению в ходе расчета переходных электромеханических процессов рассматриваемого узла электродвигательной нагрузки. Такие расчеты в настоящее время не представляют технических трудностей, и для их выполнения имеется необходимое программное обеспечение [2]. В явном виде граница динамической устойчивости может быть выражена формулой [5]:

$$t = t_0 (1 - u) / (1 - u/u_{c,y}). \quad (1)$$

Граница динамической устойчивости разделяет пространство  $R = \{t(u)\}$  на две зоны:  $N = \{t(u) > t(u)\}$  — зона нарушения устойчивости и  $Y = \{t(u) \leq t(u)\}$  — зона сохранения устойчивости. Максимально возможное использование запаса устойчивости узла обеспечивается в том случае, если защита от потери питания срабатывает по факту попадания параметров КНЭ в зону  $N$ . В этом случае зона  $S$  КНЭ, при которых происходят отключения узла нагрузки, совпадает с зоной  $N$ .

При использовании в качестве защиты от потери питания одноступенчатой защиты минимального напряжения с жесткой характеристикой рациональным ориентиром для выбора уставки  $u_{3МН}$  и выдержки времени  $t_{3МН}$  защиты может служить условие

$$u_{3МН} = u_{c,y}, \quad t_{3МН} = t_0. \quad (2)$$

В этом случае зона  $S \{t(u) \geq t_{3МН} \wedge u \leq u_{c,y}\}$  кратковременных нарушений электроснабжения, при которых происходят отключения узла нагрузки, превышает зону  $N$ .

Параметры границы динамической устойчивости могут использоваться для качественной оценки уровня устойчивости узла нагрузки. Критерием низкого уровня устойчивости узла может служить условие  $u_{c,y} > 0,7$  (отн. ед.) или  $t_0 < 0,5$  с, где численные границы установлены по положениям ПУЭ (раздел 5.3.52). В противном случае (если  $u_{c,y} \leq 0,7$  (отн. ед.) и  $t_0 \geq 0,5$  с) уровень

устойчивости узла может считаться удовлетворительным. Низкий уровень устойчивости любого из основных узлов электрической нагрузки предприятия свидетельствует о функциональном несоответствии источника электроснабжения и узла нагрузки. Возможные меры по повышению устойчивости узлов должны быть направлены на увеличение мощности источников питания, рациональный выбор уровня рабочего напряжения в узлах или разукрупнение основных узлов электрической нагрузки предприятия.

Таким образом, в качестве критерия критичности КНЭ, необходимого как основание для оценки качества электроснабжения промышленных комплексов, предлагается использовать границу динамической устойчивости узлов электрической нагрузки предприятия.

**Показатели качества электроснабжения промышленных комплексов.** Минимальный набор показателей качества электроснабжения каждого ( $j$ -го) основного узла электрической нагрузки промышленного комплекса должен включать следующие параметры:

1)  $N_{(j)}$  — среднюю частоту критических ВНЭ в узле за год:

$$N_{(j)} = \sum N_{(ji)} / \sum T_i, \quad (3)$$

где  $N_{(ji)}$  — число КНЭ в узле, попадающих в зону  $S_{(j)}$  узла, за  $i$ -й период  $T_i$  наблюдения, при этом общий период наблюдения  $T = \sum T_i$ ;

2)  $\Delta u_{(j)}$  — среднюю глубину провалов напряжения, отн. ед.:

$$\Delta u_{(j)} = \sum \Delta u_{(jk)} / n_{(j)}, \quad (4)$$

где  $\Delta u_{(jk)}$  — глубина провала напряжения в  $k$ -м случае;  $n_{(j)}$  — общее число провалов напряжения в узле ниже значения  $u_{(j)c.u.}$  за период наблюдения  $T$ ;

3)  $\tau_{(j)}$  — среднюю длительность провалов напряжения, с:

$$\tau_{(j)} = \sum \tau_{(jk)} / n_{(j)}, \quad (5)$$

где  $\tau_{(jk)}$  — длительность провала напряжения ниже уровня статической устойчивости в  $k$ -м случае;

4)  $k_{3(i,j)}$  — коэффициент зависимости источников питания  $i$ -го и  $j$ -го узлов нагрузки, определяемый как вероятность одновременного попадания параметров КНЭ в указанных узлах в зоны  $S_{(j)}$  и  $S_{(i)}$  соответственно:

$$k_{3(i,j)} = N_{(ij)} / (N_{(i)} + N_{(j)} - N_{(ij)}), \quad (6)$$

где  $N_{(i)}$ ,  $N_{(j)}$  — число критических провалов напряжения в  $i$ -м и  $j$ -м узлах;  $N_{(ij)}$  — число одновременных критических провалов напряжения в указанных узлах за период наблюдения  $T$  (оп-

ределение данного коэффициента и для большего числа узлов не вызывает трудности).

С учетом влияния параметров системы, питающей узел нагрузки, на его устойчивость [5], которые в до- и послеаварийном режимах могут существенно отличаться, расширенный набор показателей качества электроснабжения должен включаться также:

$Z_{ci}$  — среднее значение сопротивления системы, питающей узел, Ом;

$E_{ci}$  — среднее значение ЭДС системы, питающей узел, В.

Учет возможности изменения параметров питающей системы  $Z_{ci}$  и  $E_{ci}$  позволяет наиболее строго определять основные показатели качества электроснабжения. При более упрощенном подходе возможно ограничиться учетом изменения указанных параметров в наиболее вероятных нормальных, ремонтных и послеаварийных режимах питающей системы.

Кроме того, для полного определения характеристик случайных величин оценке должны подлежать высшие (до четвертого включительно) моменты эмпирических плотностей распределения глубины и длительности провала напряжения, а также сопротивления и ЭДС питающей системы.

Значения высших моментов (включая среднее квадратическое отклонение, асимметрию и эксцесс) позволяют достаточно уверенно оценить вид и характеристики теоретических законов распределения названных величин для последующего использования при анализе влияния КНЭ.

**Оценка показателей качества электроснабжения на стадии эксплуатации** осуществляется на основании аварийных осциллограмм. Регистрация аварийных процессов в системах электроснабжения крупных промышленных комплексов в настоящее время осуществляется с помощью осциллографов. В частности на газоперерабатывающих комплексах используются микропроцессорные осциллографы, подключаемые к основным узлам электрической нагрузки предприятия и запускаемые по факту снижения напряжения в узлах ниже заданного уровня, в качестве которого рекомендуется использовать значение границы статической устойчивости соответствующего узла. Наличие аварийных осциллографов позволяет получить информацию, обеспечивающую возможность оценки перечисленных основных показателей качества электроснабжения (3)–(6), а также среднее квадратическое отклонение, асимметрии и эксцесса глубины и длительности провалов напряжения.

**Оценка показателей качества электроснабжения на стадии проектирования** осуществляется на основании имитационного моделирования [6] и расчета аварийных режимов электрических сетей питающей энергосистемы с использованием

метода узловых напряжений. При расчетах аварийных режимов, связанных с наиболее частыми повреждениями — короткими замыканиями (КЗ) в сетях внешней системы возбуждения, нагрузка узлов задавалась сопротивлениями, источники — значениями ЭДС и сопротивлений. Численное моделирование режимов системы сводилось к решению системы уравнений с комплексными переменными и коэффициентами:

$$[\mathbf{Y}] \cdot [\mathbf{U}] = [\mathbf{J}], \quad (7)$$

где  $[\mathbf{Y}]$  — матрица узловых проводимостей ( $n \times n$ );  $[\mathbf{U}]$  — вектор узловых напряжений (размерностью  $n$ );  $[\mathbf{J}]$  — вектор узловых токов ( $n$ ).

При этом

$$\begin{aligned} Y_{ii} &= \sum Y_{bk} |M_{ik}|; \\ Y_{ij} &= -\sum Y_{bk} |M_{ik} M_{jk}|; \\ J_i &= -\sum Y_{bk} E_k M_{ik}, \end{aligned}$$

где  $Y_{bk}$  — элемент вектора проводимостей ветвей ( $k=1, \dots, m$ );  $E_k$  — элемент вектора ЭДС ветвей;  $|M_{ik}|$  (и  $|M_{ik} M_{jk}|$ ) — абсолютное значение элемента (и произведения элементов) матрицы инцидентий.

Для решения системы (7) использовался двухходовой алгоритм Гаусса [7, 8], обеспечивающий устойчивость решения даже при плохо обусловленных матрицах узловых проводимостей и модифицированный с целью минимизации используемой компьютерной памяти и времени счета. Результатом расчетов являются значения токов в ветвях и напряжений в узлах расчетной схемы, в том числе значения остаточных напряжений в основных узлах рассматриваемого промышленного комплекса.

Результаты расчета каждого аварийного режима представляют собой одну реализацию в рамках общего процесса имитационного моделирования. Имитационное моделирование аварийных возмущений в расчетной схеме сводится к выбору места аварии с последующим расчетом возникшего режима. Схема имитационного моделирования места аварии организована следующим образом. Каждому  $i$ -му элементу (ветви) схемы ставится в соответствие отрезок  $l_i^*$  на общей числовой оси  $L = \sum L_i^*$  ( $i=1, \dots, m$ ). Длина отрезка пропорциональна параметру потока отказов реального элемента электрической сети:

$$\left. \begin{aligned} \text{для линий } l_i^* &= l_i \omega_i / \omega^*; \\ \text{для прочих элементов } l_i^* &= \omega_i / \omega^*, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $\omega_i$  — параметры потока отказов линий (откл./100 км·год) и прочих элементов электрической сети (откл./год);  $\omega^*$  — базисный параметр потока отказов, равный параметру потока отказов линий на напряжение, соответствующее

базисному. Значения  $\omega_i$  определены справочными данными [9].

Общий объем реализаций имитационного моделирования определяется выражением

$$N = T \left( \sum l_i \omega_i + \sum \omega_j \right), \quad (10)$$

где слагаемые суммы выражают результирующие потоки отказов линий и прочих элементов сети. Для обеспечения представительности выборки и получения устойчивых статистических оценок показателей значение времени  $T$  рекомендуется выбирать равным десяти годам.

Имитация повреждения элемента схемы заключается в выборе некоторого случайного числа  $X_j$ , являющегося реализацией случайной величины  $X$ , равномерно, распределенной в интервале  $[0, L]$ . Каждому числу  $X_j$  ставится в соответствие точка на оси  $L$ , которой соответствует поврежденный элемент. Номер поврежденного элемента определяется по признаку

$$L_{(j-1)} < X_j \leq L_i.$$

Выполнение электрических расчетов по зафиксированным местам повреждения может быть осуществлено путем введения в расчетную схему «блуждающего» узла. Однако такой подход обуславливает значительное усложнение расчетов, увеличение времени счета. Для того чтобы избежать этого, использовался прием преобразования поврежденного участка по правилу замены «звезды» на «треугольник». Полученные в результате преобразований проводимости включаются в матрицу узловых проводимостей. При этом переписывается не вся матрица, а ее отдельные элементы, что также повышает эффективность алгоритма. Если поврежденная ветвь подключена с обеих сторон к узлам, то переписываются три элемента матрицы, если один из концов ветви подключен к базисному узлу (ветвь, содержащая нагрузку), то переписывается только один элемент матрицы.

Длительность провала напряжения в узлах нагрузки предприятия обуславливается в первую очередь временем срабатывания защит, отключающих поврежденный участок электрической сети. Реализованный алгоритм моделирования ограничен имитацией работы двух ступеней защит. При этом на первой ступени для защиты элементов сетей энергосистемы используются быстросрабатывающие защиты с временем срабатывания 0,15–0,25 с. При отказе в срабатывании (с заданной вероятностью, определяемой справочными данными) основной защиты срабатывает резервная, выдержка времени которой определяется картой уставок. При каждой реализации аварии моделируются: факт и время (принято равномерное распределение в указанном ди-

Таблица 1

Номер узла	Расчетная средняя частота провалов напряжения (в числителе — ниже уровня статической устойчивости, в знаменателе — ниже уровня динамической устойчивости)	
	СВ включен	СВ отключен
13	40,7/9,9	47,6/12,7
14	34,9/2,9	31,9/2,8
13 и 14	23,0/1,7	15,0/0,7

апазоне) срабатывания основной защиты, время срабатывания резервной защиты.

Для оценки параметров ( $Z_{ci}$ ,  $E_{ci}$ ) электроэнергетической системы, питающей  $i$ -й узел нагрузки предприятия, подверженных изменениям в результате коммутаций, при каждой реализации аварийной ситуации выполняется следующая последовательность расчетных действий:

отключается поврежденная ветвь;

рассчитывается ток в интересующей ветви нагрузки;

поочередно отключается нагрузка в исследуемых узлах и определяются напряжения, равные эквивалентным ЭДС питающей системы;

на основании значений ЭДС, тока на входе в узел и сопротивления нагрузки определяется комплексное сопротивление питающей системы; восстанавливается исходная схема.

Статистическая оценка параметров показателей качества осуществляется интегрально: по мере завершения расчетов режимов сети на каждой реализации процесса имитационного моделирования.

На основе изложенного алгоритма разработано программное обеспечение оценки выбранных показателей качества на стадии проектирования системы электроснабжения промышленного комплекса. Программный комплекс включает основную программу и программу-редактор для подготовки исходных данных. Реализация программного обеспечения возможна на IBM — совместимом компьютере типа 486 (100 МГц) и выше. Время счета базового варианта расчетной схемы (100 узлов, 300 ветвей) с имитацией отказов за десять лет на указанном компьютере составляет около 5 ч.

**Пример и результаты оценки показателей качества электроснабжения.** Далее в табл. 1 и 2 представлены результаты расчетной оценки показателей качества электроснабжения одного из крупных газоперерабатывающих предприятий. Расчеты произведены для двух исходных рабочих вариантов: при включенном секционном выключателе (СВ) на РУ-110 ближайшего узла питания и при отключенном СВ на указанной подстанции.

Узлу № 13 соответствуют секции № 1, а узлу № 14 секции № 2 РУ-6 и 10 кВ ГПП предприятия. Расчетная устойчивость узла № 13 характеризуется параметрами:  $u_{c,y}=0,707$  отн. ед.,  $t_0=0,195$  с; расчетная устойчивость узла № 14 характеризуется параметрами:  $u_{c,y}=0,752$  отн. ед.,  $t_0=0,390$  с. Нормальные значения эквивалентных ЭДС и входных сопротивлений для узла № 13:  $E=126,5$  кВ,  $X=38$  Ом; для узла № 14:  $E=120,9$  кВ,  $X=20$  Ом (базисное напряжение 110 кВ). Расчетное время равно десяти годам.

Значения коэффициентов зависимости, определяемых вероятностью одновременного попадания параметров возмущений в зоны динамической неустойчивости узлов, для расчетных вариантов составили: при включенном СВ  $k_{3(13-14)}=0,1532$ , при отключенном СВ  $k_{3(13-14)}=0,0473$ . Значения коэффициентов зависимости, определяемых вероятностью одновременного провала напряжения ниже границ статической устойчивости узлов, составили: при включенном СВ  $k'_{3(13-14)}=0,4373$ , при отключенном СВ  $k'_{3(13-14)}=0,2326$ .

Для указанных узлов электрической нагрузки обобщенные оценки (без разделения по узлам) показателей качества электроснабжения, часть из которых приведены в [2], по данным наблюдений за три года:

средняя частота провалов напряжения (ниже уровня 0,8) в узле — 42;

средняя глубина провалов напряжения — 0,375 отн. ед.;

средняя длительность провалов напряжения — 0,291 с;

Таблица 2

Статистический момент	Значения оцениваемых показателей качества электроснабжения							
	Глубина провала напряжения, отн. ед.		Длительность провала напряжения, с		ЭДС системы после отключения поврежденного участка, кВ		Сопротивление системы после отключения поврежденного участка, Ом/град	
	узел № 13	узел № 14	узел № 13	узел № 14	узел № 13	узел № 14	узел № 13	узел № 14
Математическое ожидание	0,388	0,347	0,263	0,263	123,19	126,64	38,97/82,28	34,66/74,17
Среднеквадратическое отклонение	0,218	0,196	0,887	0,887	1,54	2,29	0,41/0,20	0,17/0,03
Асимметрия	-1,261	-1,951	3,384	3,384	10,28	-0,52	11,71/-2,13	12,68/4,36
Экссесс	1,306	5,184	10,948	10,948	212,76	0,84	200,9/19,76	199,2/51,57

коэффициент зависимости, определяемый вероятностью одновременного попадания остаточного напряжения в зоны ниже уровня 0,8 отн. ед. — 0,52.

Данные результаты соответствовали схеме сетей с включенным СВ на шинах узла питания. Сравнивая оценки показателей качества электроснабжения предприятия, полученные на основании численного моделирования и на основании экспериментальных данных, можно сделать вывод о их достаточно высокой коррелируемости, максимальное расхождение в оценках не превышает 10%, что для статистических методов можно признать удовлетворительными.

Таким образом, предположение об отрицательном влиянии высокой степени закольцованности в сетях энергосистемы на уровень независимости источников внешнего электроснабжения предприятия подтверждается. Вместе с тем, необходимо отметить, что отключение резервирующих системных связей может приводить к увеличению числа критических провалов напряжения по отдельным узлам, что можно объяснить снижением эквивалентной мощности источников питания части узлов нагрузки предприятия. Поэтому эффективность решения по отключению резервных связей далеко не всегда однозначна и обоснование эффективности требует учета изменения эквивалентных параметров источников питания основных узлов нагрузки предприятия.

**Вывод.** Разработанные методы позволяют принимать более обоснованные решения по обеспечению качества электроснабжения на проектом уровне и контролировать качество электроснабжения в процессе эксплуатации промышленных комплексов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуревич Ю.К., Файбисович Д.Л., Хвоцинская З.Г. Особенности электроснабжения промышленных предприятий с непрерывными технологическими процессами — *Электричество*, 1990, № 1.
2. Ершов М.С., Егоров А.В., Федоров В.А. Некоторые вопросы повышения устойчивости электроприводов многомашинного комплекса с непрерывным технологическим

процессом при возмущениях в системе электроснабжения. — *Промышленная энергетика*, 1992, № 7.

3. Меньшов Б.Г., Доброжанов В.И., Ершов М.С. Теоретические основы управления электропотребления промышленных предприятий. — М.: Нефть и газ, 1995.

4. Фишман В.С. Повышение бесперебойности электроснабжения производств с непрерывным технологическим процессом. — *Промышленная энергетика*, 1990, № 8.

5. Ершов М.С., Егоров А.В., Яценко Д.Е. О влиянии параметров энергосистемы на устойчивость узлов электрической нагрузки промышленных предприятий. — *Промышленная энергетика*, 1997, № 5.

6. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. — М.: Наука, 1982.

7. Идельчик В.И. Электрические системы и сети. — М.: Энергоатомиздат, 1989.

8. Самарский А.А. Введение в численные методы. — М.: Наука, 1987.

9. Справочник по проектированию электроэнергетических систем / Под ред. С.С. Рокотяна и И.М. Шапиро. — М.: Энергоатомиздат, 1985.

[15.07.97.]

*Авторы: Ершов Михаил Сергеевич окончил факультет автоматики и вычислительной техники Московского института нефтехимической и газовой промышленности (МИНХ и Г.П. им. И.М. Губкина — ныне Государственная академия нефти и газа — ГАНГ им. И.М. Губкина) в 1979 г. В 1995 г. защитил докторскую диссертацию по теме «Развитие теории, разработка методов и средств повышения надежности и устойчивости электротехнических систем многомашинных комплексов с непрерывными технологическими процессами». Профессор кафедры теоретической электротехники и электрификации промышленности (ТЭЭП) ГАНГ им. И.М. Губкина*

*Егоров Андрей Валентинович окончил факультет автоматики и вычислительной техники МИНХ и ГП им. И.М. Губкина в 1980 г. В 1993 г. защитил кандидатскую диссертацию по теме «Разработка методов и средств оптимизации энергоисточников объектов обустройства месторождений нефти и газа континентального шельфа». Доцент кафедры ТЭЭП ГАНГ им. И.М. Губкина.*

*Яценко Дмитрий Евгеньевич окончил ГАНГ им. И.М. Губкина в 1995 г. Аспирант кафедры ТЭЭП ГАНГ им. И.М. Губкина.*



# Возможность оценки положения молнии в пространстве по измерению ее электромагнитного излучения в одной точке

МИХАЙЛОВ М.С., ДУБОВОЙ Э.И.

Выведены уравнения для электромагнитного излучения молнии при менее сильных ограничениях, нежели дипольное приближение. Рассчитаны поправки к дипольному электромагнитному излучению молнии, измеряемому на поверхности Земли. Приведен критерий, при выполнении которого можно пренебречь излучением на изгибах молниевых каналов. Показана возможность выделения из наблюдаемого множества молний тех из них, которые имеют прямолинейный начальный участок канала, определения горизонтальной молнии и высоты ее расположения.

Ключевые слова: молнии, напряженности полей, электромагнитное излучение, исследования

При исследовании молнии широкое распространение получили однопунктные методы дистанционного измерения характеристик молниевых разрядов. Например, измеряется электромагнитное излучение молнии и по нему определяется ток в канале молнии [1–3]. Эти исследования, как правило, опираются на простые модели связи измеренных и рассчитываемых характеристик разряда, одним из упрощений является предположение о том, что наблюдается прямолинейный вертикальный канал разряда типа облако–земля. При этом у исследователя часто нет адекватных средств для определения, действительно ли наблюдаемый разряд удовлетворяет сделанным предположениям. Ошибка в определении ориентации молниевых каналов может привести к существенным погрешностям в определении характеристик разряда.

В статье приводятся найденные условия для длительности импульса излучения молнии, спектра регистрируемых частот, составляющие область применимости основных уравнений теории излучения молнии, критерий прямолинейности канала молнии и показана возможность выделения такого канала из множества разрядов, оценки расположения молнии в пространстве на основе измерения электромагнитного излучения молнии в одной точке. Рассчитаны поправки к дипольному приближению электромагнитного поля.

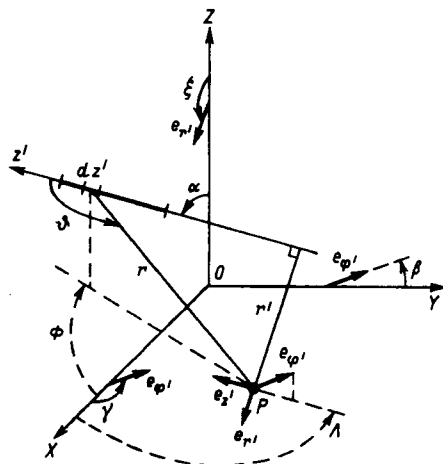
**Основные уравнения.** Расчет поля сделаем для прямолинейного канала молнии, по которому течет ток  $i(z', t)$ , где  $z'$  — координата вдоль канала молнии;  $t$  — время. Роль отклонения от прямолинейности будет проанализирована далее.

Equations have been derived for lightning electromagnetic radiation which are less restricted than a dipole approximation. Amendments to the dipole electromagnetic radiation are calculated. A criterion is given when it is possible to neglect radiation at bends of a lightning channel. The possibility of distinguishing from a great number of lightnings those of them which have straight initial part of channel is shown. The possibility determining a horizontal lightning and its altitude is also shown.

Key words: electromagnetic radiation, lightning, field intensity, investigation

На рисунке изображены системы координат, связанные с Землей и каналом молнии, а также используемые углы. Плоскость  $XY$  на рисунке совпадает с плоскостью Земли, а ось  $Z$  направлена вертикально вверх. Единичные векторы этой системы координат:  $e_x, e_y, e_z$ . Цилиндрическая система координат  $z', r', \varphi'$  связана с каналом молнии. Ось  $z'$  направлена по каналу. Положительное направление тока принято за положительное направление оси  $z'$ . В точке наблюдения  $P$  введены единичные векторы  $e_z, e_r', e_{\varphi'}$ , из которых  $e_z$  направлен вдоль оси канала, а остальные ортогональны между собой и к  $e_{z'}$ .

Углы между векторами  $e_z$  и  $e_{z'}$  обозначены через  $\alpha$ , между  $e_y$  и  $e_{\varphi'}$  через  $\beta$ , между  $e_x$  и



Декартова система координат  $XYZ$   
и связанная с каналом молнии  
цилиндрическая система координат  $z' r' \varphi'$

$e_{\varphi'}$  — через  $\gamma$ , между  $e_z$  и  $e_r$ , — через  $\xi$ . Угол  $\Phi$  — азимутальный угол направления на молнию, а угол  $\Lambda$  — угол между осью  $X$  и горизонтальной проекцией вектора  $e_{\varphi'}$  (как показано далее, вдоль этой проекции направлено магнитное поле молнии на уровне Земли).

Рассмотрим сначала электромагнитное поле от канала молнии в пустом пространстве, т.е. без учета граничных условий (Земли). Используя стандартную технику векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля, можно получить выражения для электромагнитного поля в точке наблюдения  $P$ . Введем граничные условия для молнии, ориентированной произвольно относительно Земли, которая рассматривается (как принято [4]) сверхпроводящей. Поле над Землей будет складываться из поля самого канала и поля его «зеркального» изображения. Поэтому на поверхности Земли электрическое поле содержит только вертикальную компоненту, равную удвоенной вертикальной компоненте электрического поля самого канала, а магнитное поле (без учета граничных условий направленное по вектору  $e_{\varphi'}$ ) будет теперь горизонтальным, равным удвоенной проекции магнитного поля  $H$  самого канала на плоскость Земли, и направлено по проекции вектора  $e_{\varphi'}$ .

Чтобы найти указанные проекции полей на оси  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ , необходимо использовать проекции единичных векторов  $e_z$  и  $e_r$  на ось  $Z$ , а вектора  $e_{\varphi'}$  — на оси  $X$  и  $Y$ . Углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\xi$  равны:

$$\left. \begin{aligned} (e_z, e_z) &= \cos \alpha; & (e_r, e_z) &= \cos \xi; \\ (e_{\varphi'}, e_x) &= \cos \gamma; & (e_{\varphi'}, e_y) &= \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Таким образом, в декартовой системе координат  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_z$  поля на уровне Земли (с учетом граничных условий) равны:

$$\begin{aligned} E_z &= 2 \cos \alpha \left\{ \int dz' \frac{\cos \vartheta}{r^2} \rho_0(z') + \int dz' \frac{2 \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta}{r^3} \times \right. \\ &\quad \times \int_0^{t-r/c} d\tau i(z', \tau) + \frac{1}{c} \int dz' \frac{\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta}{r^2} i(z', t-r/c) - \\ &\quad \left. - \frac{1}{c^2} \int dz' \frac{\sin^2 \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial t} i(z', t-r/c) \right\} + 2 \cos \xi \times \\ &\quad \times \left\{ \int dz' \frac{\sin \vartheta}{r^2} \rho_0(z') + \frac{3}{2} \int dz' \frac{\sin 2\vartheta}{r^3} \int_0^{t-r/c} d\tau i(z', \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \int dz' \frac{\sin 2\vartheta}{r^2} i(z', t-r/c) + \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \int dz' \frac{\sin 2\vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial t} i(z', t-r/c) \right\}; \\ H_x &= 2 \cos \gamma \left\{ \frac{1}{c} \int dz' \frac{\sin \vartheta}{r^2} i(z', t-r/c) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c^2} \int dz' \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial t} i(z', t-r/c) \right\}; \\ H_y &= 2 \cos \beta \left\{ \frac{1}{c} \int dz' \frac{\sin \vartheta}{r^2} i(z', t-r/c) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c^2} \int dz' \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial t} i(z', t-r/c) \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Эти выражения записаны в системе единиц СГС. Интегралы с необозначенными границами интегрирования берутся по длине канала. Здесь  $i(z', t)$  и  $\rho(z', t)$  — линейные плотности тока и заряда в точке канала  $z'$  в момент времени  $t$ ;  $\rho_0(z') = \rho(z', 0)$ ;  $r$  — расстояние между участком молнии  $dz'$  и точкой наблюдения  $P$ ;  $\vartheta$  — это угол между направлением оси  $z'$  и направлением от участка молнии  $dz'$  до точки наблюдения  $P$  (см. рисунок);  $c$  — скорость света.

При выводе этих формул предполагалось, что в момент времени  $t=0$  могло быть только электростатическое поле, обусловленное наличием линейной плотности заряда  $\rho_0(z')$  вдоль канала молнии.

Если взять вертикальный канал молнии ( $\alpha=0$ ) и поместить начало канала на уровне Земли, то из формул (2) получаются известные выражения для электромагнитного поля вертикального канала [4]. При этом надо учесть, что  $H_{\varphi} = H_x \cos \gamma + H_y \cos \beta$  и  $\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

На больших расстояниях используем условие малости размеров излучающей системы по сравнению с расстоянием до точки наблюдения и ограничимся членами, пропорциональными  $1/r$ , отбросив  $(1/r)^2$  и  $(1/r)^3$ . В случае, когда дальность  $r$  до любого участка  $dz'$  канала много больше длины канала  $L$  ( $r \gg L$ ), дальность  $r$  и угол  $\vartheta$  для различных участков канала отличаются незначительно, поэтому в этом приближении во множителях, которые стоят перед функциями от тока  $i(z', t)$ , можно принять эти величины постоянными и равными длительности  $R$  и углу для какого-то среднего участка молнии  $\vartheta_R$ . После такой замены множители, содержащие функции от  $R$  и  $\vartheta_R$  могут быть вынесены за знак интеграла:

$$\left. \begin{aligned} E_z(t) &= \frac{2}{c^2 R} \left\{ -\cos \alpha \sin^2 \vartheta_R + \frac{1}{2} \cos \xi \sin 2\vartheta_R \right\} \times \\ &\quad \times \int dz' \frac{\partial}{\partial t} i(z', t-r/c); \\ H_x(t) &= \frac{2}{c^2 R} \cos \gamma \sin \vartheta_R \int dz' \frac{\partial}{\partial t} i(z', t-r/c); \\ H_y(t) &= \frac{2}{c^2 R} \cos \beta \sin \vartheta_R \int dz' \frac{\partial}{\partial t} i(z', t-r/c). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Формулы (3) позволяют поставить вопрос о возможности определения ориентации канала молнии в пространстве по измеренным электрическому и магнитному полям в молнии при наличии некоторой дополнительной информации.

Отметим также, что при выводе формул (3) не использовалось условие применимости дипольного приближения в полном объеме, а именно: требование того, чтобы размеры системы были малы по сравнению с длиной излучаемой волны [6]  $\lambda \gg L$ , где  $\lambda$  — длина волны излучения, а  $L$  — длина канала молнии; для вертикальной молнии Маклайн и Юман нашли другое, менее жесткое, условие дипольного приближения [5]:

$$\lambda \gg L(L/2R). \quad (4)$$

Из (3) видно, что поля  $E$  и  $H$  пропорциональны друг другу и отношения компонент

$$C_1 = E_z(t)/H_x(t) \text{ и } C_2 = H_y(t)/H_x(t) \quad (5)$$

зависят только от углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\xi$  и  $\vartheta_R$  и не зависят ни от времени, ни от тока в канале. Этот факт может использоваться для отбора экспериментальных данных, относящихся к прямолинейным каналам молнии, так как для прямолинейных участков различные компоненты электромагнитного поля не будут пропорциональны (это утверждение легко понять на примере молниевых каналов, составленного из двух прямолинейных участков с учетом того, что времена  $t$  в (3) будут разные для каждого участка канала). Зависимость коэффициентов пропорциональности от углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\xi$  и  $\vartheta_R$  можно использовать для нахождения ориентации прямолинейного канала молнии в пространстве. Этот вопрос обсуждается в следующем разделе.

Компоненты поля в (3) для дипольного приближения (при условии  $r \gg L$  и  $\lambda \gg L$  и замене  $r$  на  $R$  в аргументе тока) обозначим верхним индексом (0):  $E_z^{(0)}$ ,  $H_x^{(0)}$ ,  $H_y^{(0)}$ . Компоненты электромагнитного поля (3) и компоненты в дипольном приближении имеют разную временную зависимость, но одинаковые геометрические зависимости и отношения компонент (5). Формулы дипольного излучения полезны тем, что их совместно с моделью линии передач для токов [1–3] можно использовать для нахождения тока в канале по измерениям электромагнитного поля. В модели линии передач ток имеет зависимость:  $i(z', t) = i(z' - Vt)$ , где  $V$  — скорость распространения импульса тока в канале, тогда интегралы в (3) (при замене  $r$  на  $R$ ) легко вычисляются и после перехода к системе единиц СИ для вертикального канала молнии облако—земля:

$$\vartheta_R = \pi/2; \quad \alpha = 0; \quad \cos \xi = 0; \quad \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1; \quad (6)$$

$$H_\varphi = H_x \cos \gamma + H_y \cos \beta,$$

получаются формулы связи компонент электромагнитного поля и тока в канале, широко используемые для нахождения тока в канале по измерениям электромагнитного излучения от канала молнии [1]:

$$\left. \begin{aligned} E_z(R, t) &= -\frac{\mu_0 V}{2\pi R} i(t - R/c); \\ B_\varphi(R, t) &= \frac{\mu_0 V}{2\pi c R} i(t - R/c). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Формулы приведены для времени  $t < (L/V + R/c)$ . В них  $\mu_0$  — магнитная проницаемость вакуума;  $c$  — скорость света;  $B$  — магнитная индукция. Из этих формул видно, что для импульса тока с типичным пиковым зна-

чением в 10 кА и скоростью распространения в  $10^8$  м/с пиковые значения полей на дальности 100 км составят 2 В/м и  $6,6 \cdot 10^{-9}$  Тл, что совпадает по порядку с измеренными в [1] полями. Из закона Фарадея:  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ , приведенного в системе единиц СИ, несложно оценить пиковое значение ЭДС, наведенной полем в рамке с размерами 0,5 на 0,5 м и содержащей 100 витков при времени нарастания тока в 1 мкс. Для дальности в 100 км пиковое значение наведенной ЭДС составит примерно 0,8 В.

Отметим характерные особенности решения (3) и дипольного приближения, которые отличают электромагнитное излучение произвольно ориентированного канала молнии от излучения вертикального канала, начинающегося на уровне Земли.

Для вертикальной молнии (6) поля  $E$  и  $H$  не зависят ни от каких угловых переменных, они зависят только от расстояния от точки наблюдения до молнии и равны по амплитуде, а форма импульсов  $E$  и  $H$  не зависит от точки наблюдения.

В случае же молнии произвольной ориентации поля  $E$  и  $H$  зависят как от расстояния  $R$  от точки наблюдения до канала молнии, так и от углов  $\vartheta_R$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\xi$ . В этом случае  $|E|/|H| \neq 1$ , а знак амплитуды  $E_z$ ,  $H_x$ ,  $H_y$  зависит как от знака импульса тока  $i$ , так и от точки наблюдения  $P$ . В случае произвольной ориентации канала молнии значения полей могут оказаться значительно меньше, чем в случае вертикальной ориентации канала, начинающегося на уровне Земли, так как множители в (3), зависящие от углов, могут получиться много меньше единицы.

**Границы применимости основных уравнений.** Рассмотрим вопрос о границах применимости уравнений (3) и дипольного приближения к (2). При получении формул дипольного излучения из точных формул (2) делаются одновременно три приближения.

1. В точных решениях были оставлены члены, которые меньше всего убывает с увеличением дальности  $r$  (как  $1/r$ ).

2. При больших дальностях  $r \gg L$  ( $L$  — длина канала) и дальности  $r$  и углы  $\vartheta$  до разных участков канала отличаются незначительно, поэтому  $r$  и углы  $\vartheta$  до различных участков канала были заменены средними значениями  $R$  и  $\vartheta_R$  для некоторого участка канала; при этом замена  $r$  на  $R$  не проводилась в аргументе  $t - r/c$  функции тока  $i(z', t - r/c)$ :

3. В оставшихся членах заменяются  $i(z', t - r/c)$  на  $i(z', t - R/c)$ .

При получении уравнений (3) из уравнений (2) были сделаны только первое и второе приближения.

Каждому из этих приближений отвечает свой аддитивный поправочный член к дипольному приближению со своим условием малости: члены порядка  $1/R^2$  для первого приближения,  $(r-R)/R$  — для второго,  $\frac{(R-r)}{R} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$  — для третьего.

Первому приближению отвечают поправочные члены:

$$\left. \begin{aligned} E_z^{(1)} &= \frac{2 [2 \cos^2 \vartheta_R - \sin^2 \vartheta_R] \cos \alpha + 3 \sin 2\vartheta_R \cos \xi}{cR^2} \times \\ &\quad \times \int dz' i(z', t - R/c); \\ H_x^{(1)} &= \frac{2 \sin \vartheta_R}{cR^2} \cos \gamma \int dz' i(z', t - R/c); \\ H_y^{(1)} &= \frac{2 \sin \vartheta_R}{cR^2} \cos \beta \int dz' i(z', t - R/c). \end{aligned} \right\} (8)$$

В формулы (8) не включен член, описывающий начальное электростатическое поле, так как это поле не меняется с течением времени и при рассмотрении переменных полей может не приниматься во внимание.

Второму приближению отвечает поправочное слагаемое к дипольному приближению:

$$\left. \begin{aligned} E_z^{(2)} &= -2 \frac{3 \sin^2 \vartheta_R \cos \vartheta_R \cos \alpha + \sin \vartheta_R [1 + \cos^2 \vartheta_R] \cos \xi}{c^2 R^2} \times \\ &\quad \times \int dz' (z' - z_R') \frac{\partial}{\partial t} i(z', t - r/c); \\ H_x^{(2)} &= \frac{2 \sin 2\vartheta_R}{c^2 R^2} \cos \gamma \int dz' (z' - z_R') \frac{\partial}{\partial t} i(z', t - r/c); \\ H_y^{(2)} &= \frac{2 \sin 2\vartheta_R}{c^2 R^2} \cos \beta \int dz' (z' - z_R') \frac{\partial}{\partial t} i(z', t - r/c). \end{aligned} \right\} (9)$$

Третьему приближению отвечают следующие поправочные члены:

$$\left. \begin{aligned} E_z^{(3)} &= \frac{-2 \cos \vartheta_R \sin^2 \vartheta_R \cos \alpha + \cos \vartheta_R \sin 2\vartheta_R \cos \xi}{c^3 R} \times \\ &\quad \times \int dz' (z' - z_R') \frac{\partial^2}{\partial t^2} i(z', t - r/c); \\ H_x^{(3)} &= \frac{\sin 2\vartheta_R}{c^3 R} \cos \gamma \int dz' (z' - z_R') \frac{\partial^2}{\partial t^2} i(z', t - r/c); \\ H_y^{(3)} &= \frac{\sin 2\vartheta_R}{c^3 R} \cos \beta \int dz' (z' - z_R') \frac{\partial^2}{\partial t^2} i(z', t - r/c). \end{aligned} \right\} (10)$$

Вопрос об условиях малости поправок по сравнению с нулевым дипольным приближением  $E_z^{(0)}$ ,  $H_y^{(0)}$  и  $H_x^{(0)}$  рассмотрим в рамках модели линии передач на примере компоненты  $H_x$  магнитного поля. Предположим также, что каналу молнии отвечает отрезок  $L \geq z' \geq 0$  и  $z_R' = 0$ .

Сравнение поправок  $H_x^{(1)}$  и  $H_x^{(2)}$  с нулевым приближением  $H_x^{(0)}$  удобно провести для конкретной формы импульса тока:

$$i(t - z'/V) = I_0 \begin{cases} 0, & t - z'/V \leq 0; \\ \exp(-(t - z'/V)/\tau_0), & t - z'/V > 0. \end{cases} (11)$$

Здесь  $V$  — скорость распространения импульса тока;  $\tau_0$  — его характерная длительность;  $I_0$  — амплитуда.

Для сравнения поправок  $H_x^{(3)}$  с  $H_x^{(0)}$  примем, что импульс тока описывается следующим выражением:

$$i(t - z'/V) = I_0 \begin{cases} \exp(-(t - z'/V)/\tau_p), & t - z'/V \leq 0; \\ \exp(-(t - z'/V)/\tau_c), & t - z'/V > 0; \end{cases} (12)$$

Выбор такой более сложной формы импульса тока обусловлен тем, что в поправку  $H_x^{(3)}$  входит вторая производная по времени от тока, поэтому нужно, чтобы форма импульса была дифференцируемой функцией. Здесь  $I_0$  — амплитуда импульса тока;  $\tau_p$  — характерное время нарастания;  $\tau_c$  — характерное время спада;  $V$  — скорость распространения тока по каналу.

Критерий малости поправок находится сравнением максимальных амплитуд поправок  $H_x^{(1)}$ ,  $H_x^{(2)}$  и  $H_x^{(3)}$  с максимальной амплитудой поля  $H_x^{(0)}$  в дипольном приближении.

Из условия малости поправки  $H_x^{(3)}$  по сравнению с дипольным приближением  $H_x^{(0)}$  находится критерий малости:

$$\frac{\tau c}{R} \ll 1, \quad (13)$$

где  $\tau$  является характерной длительностью поля  $H_x^{(0)}$ .

Критерий малости максимальной амплитуды  $H_x^{(2)}$  по сравнению с максимальной амплитудой  $H_x^{(0)}$  имеет вид

$$2 \frac{L}{R} |\cos \vartheta_R| \ll 1. \quad (14)$$

Отметим, что происхождение этого критерия достаточно очевидно, если, например, рассмотреть следующее равенство для соотношения сторон в треугольнике, изображенном на рисунке с вершинами  $P$ ,  $z'$  и  $z_R'$ :

$$r^2 = R^2 - 2(z' - z_R')R \cos \vartheta_R + (z' - z_R')^2. \quad (15)$$

Для того, чтобы можно было заменить  $r^2$  на  $R^2$ , нужно, чтобы второй и третий члены этого равенства были меньше первого, т.е.

$$2 \frac{L}{R} \cos \vartheta_R \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{L}{R} \ll 1. \quad (16)$$

Второе условие было использовано при получении поправки  $H_x^{(2)}$ . При выполнении второго условия выполняется и первое, поэтому второе условие является основным. Из приведенного ранее равенства также следует, что если  $\cos \vartheta_R \leq L/(2R)$ , то при нахождении поправок в  $H_x^{(2)}$  необходимо удерживать квадратичные члены по малому параметру  $L/R$ .

Условие малости поправки  $H_x^{(3)}$  по сравнению с  $H_x^{(0)}$  можно записать в виде

$$\lambda \gg L |\cos \vartheta_R|. \quad (17)$$

Этот критерий похож на одно из условий применимости формул дипольного излучения. Наличие множителя  $|\cos \vartheta_R|$  накладывает более жесткое ограничение на применимость формул дипольного излучения при анализе собственного излучения молнии, чем условие (4), найденное Маклайном и Юманом для вертикальной молнии.

Так как дипольное приближение сводится к замене  $r$  на  $R$  в аргументе функции тока  $i(z', t - r/c)$ , то для того чтобы такая замена была корректна, необходимо, чтобы разность между  $r/c$  и  $R/c$  была много меньше времени, за которое ток успеет заметно измениться. Так как характерные времена изменения тока определяют характерную длину волны излучения, то общее условие применимости формул дипольного излучения заключается в том, чтобы для любой точки канала было выполнено условие

$$\lambda \gg |r - R|. \quad (18)$$

Если  $L \ll R$ , то в соответствии с равенством (15)

$$|r - R| \approx \left| -(z' - z'_R) \cos \vartheta_R + \frac{(z' - z'_R)^2}{2R} \right|. \quad (19)$$

Из формул (18) и (19) в случае вертикальной молнии ( $\cos \vartheta_R = 0$ ) получается условие Маклайна—Юмана (4). Если  $\cos \vartheta_R > L/(2R)$ , то в правой части (19) достаточно оставить первый член и тогда из формул (18) и (19) получается наше условие (17). Стандартное условие применимости дипольного приближения  $\lambda \gg L$ , принятое в литературе, получается из (17) для  $\cos \vartheta_R \approx 1$  [6].

Из приведенного рассуждения следует, что в случае  $\cos \vartheta_R < L/(2R)$  (т.е. когда канал молнии перпендикулярен направлению  $R$  от точки наблюдения к молнии) следует применять условие Маклайна—Юмана, а в случае  $\cos \vartheta_R > L/(2R)$  (т.е. для остальных ориентаций молниевых каналов относительно  $R$ ) надо использовать условие (17) (или более жесткое стандартное условие). Оба критерия применимости дипольного приближения для разных ориентаций молниевых каналов можно объединить в одном критерии, применимом для любой ориентации молниевых каналов и учитывающего то, что в случае, когда канал молнии перпендикулярен  $R$ , стандартное условие  $\lambda \gg L$  является излишне строгим и вместо него следует использовать условие Маклайна—Юмана (4):

$$\lambda \gg L \left( |\cos \vartheta_R| + \frac{L}{2R} \right). \quad (20)$$

Из приведенного исследования ясно, что для применимости основных уравнений (3) достаточно выполнения условий (13) и (16), которые, как правило, не накладывают жестких ограничений на применение основных уравнений (3).

Дополнительно рассмотрен вопрос об условии применимости дипольного приближения с анализом разных имеющихся в литературе критериев и получен обобщающий критерий (20), который в случае произвольной ориентации молнии в пространстве накладывает более жесткие условия на применимость уравнений дипольного приближения, чем найденное Маклайном и Юманом для случая вертикального канала облако—Земля, и учитывающий тот факт, что в некоторых случаях стандартный критерий является излишне строгим и вместо него следует применять критерий Маклайна—Юмана.

**Условие применимости приближения прямолинейного канала молнии.** Рассмотрим вопрос о том, в каких случаях реальный канал молнии можно рассматривать как прямолинейный проводник с током.

Отметим особенность электромагнитного поля (3), излученного прямолинейным проводником с током: компоненты электрического и магнитного полей пропорциональны один другому с коэффициентами пропорциональности, которые не зависят от времени. Указанное свойство можно применять для отбора прямолинейных молниевых разрядов или их прямолинейных начальных участков, какими обычно являются начальные участки обратного удара разряда облако—Земля вблизи Земли.

Под прямолинейным каналом или участком молнии мы понимаем отрезок, части которого имеют небольшие угловые отклонения от некоторого среднего направления. Покажем, что для таких каналов коэффициенты пропорциональности будут незначительно флуктуировать со временем относительно некоторых средних значений. Именно небольшая амплитуда флуктуаций и будет являться критерием того, что угловые отклонения являются небольшими. Пример наблюдения таких полей имеется в [1, рис. 2].

Для канала молнии рассмотрим сначала приближение ломаной линии со звеньями разной длины, которые имеют малые угловые отклонения от некоторого среднего направления.

Для описания электромагнитного излучения от каждого звена применим формулы дипольного излучения (4) (при  $r=R$ ) от прямолинейного канала молнии. Для модели тока примем хорошо известную и широко используемую модель линии передач [1]:

$$i(z', t) = i(t - z'/V), \quad (21)$$

т.е. ток в канале представляет собой импульс тока неизменной формы, который распространяется вдоль канала (по координате  $z'$ ) с постоянной скоростью  $V$ . Для формы импульса тока возьмем прямоугольный импульс:

$$i(\tau) = I_0 \text{ для } 0 \leq \tau \leq T. \quad (22)$$

Пусть длительность импульса  $T$  больше времени, необходимого для прохода фронта импульса длины любого из звеньев ломаной. Для большинства молниевых разрядов такое соотношение верно. Как видно из формул (3) при  $r=R$ , электрическая и магнитные компоненты дипольного излучения от звена ломаного канала молнии представляют собой прямоугольный импульс с длительностью, равной времени прохода фронтом импульса тока данного звена ломаной. Компоненты электромагнитного излучения от всего канала в этой модели представляют собой непрерывные последовательности прямоугольных импульсов от каждого звена канала. Так как дальность  $R$  до молнии является константой, то, как видно из формул (3) с  $r=R$ , амплитуды импульсов излучения от разных звеньев будут отличаться только множителями, зависящими от углов ориентации звеньев. Поскольку предполагалось, что эти углы для разных звеньев отличаются незначительно, то суммарное излучение будет одним большим прямоугольным импульсом со слегка флуктуирующей амплитудой. Длительность этого импульса равна времени прохождения фронтом импульса тока всей длины канала, а амплитуда определяется некоторым средним направлением всех звеньев канала. Очевидно, что коэффициенты пропорциональности компонент электромагнитного излучения как функции времени будут в такой же степени флуктуировать вокруг некоторых средних значений. Это утверждение остается в силе и для иных форм импульса тока. Каналы молнии, для которых отношения (5) компонент электромагнитного излучения от времени примерно постоянны, можно назвать прямолинейными. Для таких каналов можно искать среднее направление в пространстве. Такое поведение компонент электромагнитного излучения наблюдал Юман (см. [1, рис. 2]).

Канал молнии состоит из прямолинейных звеньев, соединенных кривыми малого радиуса закругления, на которых происходит излучение ускорения электронов. Покажем, что если ограничиться относительно низкими частотами (точнее см. далее) измерений электромагнитного излучения, то излучение от этих переходов регистрироваться не будет.

Рассмотрим одно звено такого канала и переход по гладкой кривой к соседнему звену. Для оценки дипольного излучения от звена и от дугообразного перехода, используем стандартные формулы для дипольного излучения [6]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{c^2 R} [\ddot{\mathbf{d}} \mathbf{n}] \mathbf{n}; \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{c^2 R} [\dot{\mathbf{d}} \mathbf{n}]. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь  $\mathbf{d}$  — вектор дипольного момента;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении от места рас-

положения диполя до точки наблюдения. Все величины в правой части формул (23) взяты в момент времени  $t-R/c$ .

Так как

$$\mathbf{d} = \sum_i e_i \mathbf{r}_i, \quad (24)$$

где сумма берется по всем заряженным частицам системы,  $e_i$  и  $\mathbf{r}_i$  — заряд и радиус-вектор заряженной частицы, то

$$\ddot{\mathbf{d}} = \sum_i e_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i e_i \dot{\mathbf{V}}_i = \int \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} dv. \quad (25)$$

Здесь  $\mathbf{V}_i$  — скорость частицы;  $i$  — плотность тока;  $dv$  — элемент объема (интеграл берется по объему, занимаемому системой).

Такое определение второй производной от дипольного момента совпадает с интегралом в формулах (3) при  $r=R$ , если учесть, что в нашем случае бесконечно тонкого канала интеграл по объему преобразуется в интеграл по длине канала. Если учесть указанное ранее граничное условие, то из формул (23) и (25), очевидно, получаются формулы (3) с  $r=R$ .

Для нахождения условия, при котором можно пренебречь излучением от области перехода между звеньями, достаточно сравнить амплитуды второй производной по времени от дипольного момента для звена канала и для области перехода.

Для прямолинейного звена канала

$$\ddot{\mathbf{d}} = \int dz' \frac{\partial}{\partial t} i(z', t - R/c), \quad (26)$$

где интегрирование происходит вдоль звена.

Если ток в канале удовлетворяет модели линии передач (21), то амплитуда второй производной от дипольного момента

$$\ddot{d}_1 = I_0 V, \quad (27)$$

где  $I_0$  — амплитуда тока в канале;  $V$  — скорость распространения импульса тока вдоль канала.

Для нахождения второй производной от дипольного момента для области перехода исходим из того, что эта область имеет длину много меньше расстояния, занимаемого импульсом тока вдоль канала. В этом случае при вычислении дипольного излучения можно не учитывать изменение тока вдоль области перехода. Тогда амплитуда второй производной от дипольного момента для области перехода будет равна:

$$\ddot{d}_2 = \Delta R (\partial i / \partial t)_0, \quad (28)$$

где  $\Delta R$  — расстояние между концами области перехода;  $(\partial i / \partial t)_0$  — амплитуда производной по времени от тока:

$$(\partial i / \partial t)_0 = I_0 / \tau_i, \quad (29)$$

где  $\tau_i$  — время нарастания импульса тока.

Из формул (27)–(29) следует, что излучением от области перехода можно пренебречь если

$$1/\tau_i \ll V/\Delta R. \quad (30)$$

Согласно [7] характерный размер звена логической — 50 м, поэтому можно принять  $\Delta R = 10$  м. Характерная скорость распространения возвратного удара  $V = 5 \cdot 10^7$  м/с [7]. Для этих значений  $\Delta R$  и  $V$  получаем, что условие (30) будет выполнено для времен нарастания тока  $\tau_i \gg 0,2$  мкс. Поэтому излучение от области перехода между двумя звеньями сосредоточено в высокочастотной области спектра (несколько МГц), и если мы используем для регистрации излучения аппаратуру с полосой пропускания не более 1 МГц, вполне достаточной для регистрации ЭМИ молнии (такое ограничение полосы принято на многих экспериментальных установках, [1–3], то излучение от области перехода просто не будет регистрироваться и им можно пренебречь.

Как известно из визуальных наблюдений, многие каналы молнии имеют резко выраженные изломы. Для таких молний приближение прямолинейного канала будет не применимо, что проявится в зависимости отношений (5) компонентов электромагнитного поля от времени. Но в то же время многие из этих каналов имеют около Земли (т.е. там, где начинается возвратный удар) достаточно длинный участок канала без резко выраженных изломов. Поэтому можно ожидать, что пока возвратный удар движется по начальному участку канала без резких изломов, компоненты электромагнитного поля будут пропорциональны друг другу с коэффициентом, не зависящим от времени. В этом случае к таким начальным «прямолинейным» участкам канала молнии применимы рассуждения для прямолинейного канала.

**Оценка расположения молнии в пространстве.** По измерениям электромагнитного излучения в одной точке в общем случае невозможно точно определить расположение молниевых каналов в пространстве. Это утверждение легко понять, анализируя формулы дипольного излучения (23) без учета граничных условий. Из них видно, что в случае прямолинейного канала молнии магнитное поле  $\mathbf{H}$  ортогонально дипольному моменту  $\mathbf{d}$ , т.е. каналу, и направлению на молнию  $-\mathbf{n}$ . Поэтому, зная магнитное поле, можно определить только плоскость, в которой должен находиться прямолинейный канал молнии: это плоскость, ортогональная вектору  $\mathbf{H}$ . Так как электрическое поле  $\mathbf{E}$  всегда ортогонально магнитному полю  $\mathbf{H}$  и направлению на молнию  $-\mathbf{n}$ , то его знание позволяет определить направление на молнию  $-\mathbf{n}$ , но не дает дополнительной

информации о положении прямолинейного молниевых каналов относительно этого направления.

Это замечание означает, что система уравнений, составленная для определения ориентации молниевых каналов по измерениям электромагнитного поля в одной точке, является вырожденной, т.е. имеет бесконечно много решений. Исключая последовательно переменные из такой системы, можно получить условие вырождения, при котором эта система имеет бесконечно много решений. Это условие дает связь между параметрами системы, и его можно использовать для анализа расположения молниевых каналов в пространстве.

Была составлена такая система, которая включала в себя следующие уравнения:

два уравнения (5) для отношений компонент электромагнитного поля, выраженные через углы ориентации молниевых каналов и угол  $\vartheta_R$ ;

геометрическое уравнение для определения азимутального угла через углы на молнию;

геометрическое уравнение для определения отношения высоты, на которой расположена молния, к дальности до молнии  $h/R$  через углы на молнию и угол  $\vartheta_R$ .

Все уравнения были выражены через дальность до молнии, ее высоту, азимут и углы ориентации молниевых каналов в пространстве. Координаты в декартовой системе, связанной с точкой наблюдения на поверхности Земли, и в цилиндрической системе координат, связанной с каналом молнии, выражаются через углы Эйлера, являющиеся теми неизвестными, которые требовалось определить.

Система уравнений решалась методом последовательного исключения переменных. Получено следующее условие вырождения системы, связывающее ряд физических и геометрических величин:

$$(\sin \Phi - C_2 \cos \Phi)^2 (C_1 \sin \Phi + \sqrt{1 - (h/R)^2})^2 = C_1^2 \cos^2 \Phi (\cos \Phi + C_2 \sin \Phi)^2. \quad (31)$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  — определены в (5) (для прямолинейного канала молнии они не зависят от времени);  $\Phi$ ,  $R$  и  $h$  также определены ранее. Разрешая (31) относительно  $h/R$ , можно найти высоту расположения молнии.

Хотя точно найти ориентацию молниевых каналов по измерениям электромагнитного поля в одной точке невозможно, но определенную информацию о расположении канала получить можно.

Соотношение, аналогичное уравнению (31) и удовлетворяющее ему, можно получить из простых геометрических соображений. Из формул (23) и граничных условий (или из формул (3)) получаем:

$$E_z = -\sqrt{1 - \left(\frac{h}{R}\right)^2} |H_r| \sin(\Phi - \Lambda), \quad (32)$$

где  $\Lambda$  — угол между осью  $X$  и направлением горизонтального магнитного поля  $H_r$  в точке наблюдения.

Из уравнения (32) видно, что определить высоту из него нельзя только в одном случае, когда канал расположен перпендикулярно направлению на молнию (т.е.  $\sin(\Phi - \Lambda) = 0$ ).

Из уравнения (32) получаем:

$$\frac{h}{R} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_z}{H_r \sin(\Phi - \Lambda)}\right)^2}. \quad (33)$$

Для вертикального канала молнии облако—Земля, как видно из уравнений (3):  $|E_z| = |H_r|$  и  $|\sin(\Phi - \Lambda)| = 1$ , поэтому  $h = 0$ . Здесь следует отметить, что, исходя из вывода основных уравнений (3), высота  $h$  определена с точностью до вертикальной проекции самого канала, и, применяя уравнение (33) для нахождения высоты  $h$ , не следует забывать про такую погрешность в определении высоты. Если для  $h$  получено ненулевое значение, то это будет высота внутри или межоблачного разряда. В случае, если  $R \gg h$ , то будет получено значение  $h = 0$ , т.е. такой метод определения высоты пригоден для дальности в десятки километров.

Найдем теперь отношение модулей  $H_r$  магнитного и  $E_z$  электрического полей (первое из них — горизонтальное, второе — вертикальное). Из уравнений (3) или (23) получаем:

$$\frac{H_r^2}{E_z^2} = 1 + \frac{\left(\frac{h}{R}\right)^2 \sin^2 \vartheta_R}{\left(\cos \alpha - \frac{h}{R} \cos \vartheta_R\right)^2}. \quad (34)$$

Рассмотрим молнию на больших расстояниях, когда  $(h/R) \ll 1$ . Из уравнения (34) видно, что если молния не горизонтальная и  $\cos \alpha \gg (h/R)$  ( $\alpha$  — угол между вертикалью и каналом молнии), то магнитное поле отличается

от электрического поля на малое значение. В случае же, когда молния близка к горизонтальной и  $\cos \alpha \leq (h/R)$ , то не только электромагнитное поле по сравнению со случаем вертикальной молнии, но и электрическое поле может быть еще заметно меньше магнитного поля. Поэтому, если в эксперименте наблюдается молния на большом расстоянии  $R \gg h$  и при этом обнаруживается, что электрическое поле заметно меньше магнитного поля, то можно утверждать, что наблюдаемая молния близка к горизонтальной (т.е.  $\cos \alpha \leq (h/R)$ ).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Correlated** Electric and Magnetic Fields From Lightning Return Strokes. M.A.Uman, R.D.Brantley, I.T.Lin, et al. — J.Geophys. Res., 1975, v. 80, N 3.
2. **Синхронное** измерение импульсов электрического поля и радиолокационного отражения от молниевых разряда и сравнение с результатами численного моделирования / Э.И. Дубовой, М.С. Михайлов, В.И. Пряжинский и др. — Известия АН. Физика атмосферы и океана, 1993, т. 29, N 3.
3. **Measurement and gumerical modeling of radio sounding reflection from a lightning channel.** E.I. Dubovoy, M.S. Mikhailov, A.L. Ogonkov A.L., V.I. Pryazhinsky — J.Geophys. Res., 1995, v. 100, N D1.
4. **Uman M.A.** Lightning Return Stroke Electric and Magnetic Fields. — J.Geophys. Res., 1985, v. 90, N D4.
5. **McLain D.K., Uman M.A.** Exact Expression and Moment Approximation for the Electric Field Intensity of the Lightning Return Stroke. — J. Geophys. Res., 1971, v. 76, N 9.
6. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теория поля. — М.: Наука, 1988.
7. **Юман М.А.** Молния. — М.: Мир, 1972.

[20.03.97]

*Авторы: Михайлов Михаил Степанович окончил факультет общей и прикладной физики Московского физико-технического института в 1990 г. Ведущий инженер ЗАО «РТИ-Радиокомплекс» (Радиотехнический институт имени академика А.Л. Минца).*

*Дубовой Эдвард Иосифович окончил физический факультет Тбилисского государственного университета в 1964 г. В 1987 г. защитил докторскую диссертацию по теоретической физике в Московском государственном университете. Директор Радиометеорологического центра.*

### К сведению авторов и читателей!

Каждый автор имеет право бесплатно получить 1 экз. журнала с его статьей.

Экземпляры номеров журнала «Электричество» за последние годы можно приобрести в редакции журнала (Б. Черкасский пер., 2/10, тел. 924-24-80).



# Градуировка схемы измерения частичных разрядов при эксплуатационных испытаниях<sup>1</sup>

АКСЕНОВ Ю.П., ГОЛУБЕВ А.А., ЛЯПИН А.Г.

*Рассмотрены системы калибровки измерительных цепей регистрации ЧР по кажущемуся заряду в высоковольтной изоляции электротехнических аппаратов и устройств на рабочем напряжении с использованием нескольких однотипных датчиков, на один из которых задается градуировочный импульс. Показана хорошая сходимость результатов. Работоспособность системы проверена полевыми испытаниями.*

**Ключевые слова:** электрические машины и аппараты, изоляция, схема замещения, импульсы, частичные разряды, испытания

Работоспособность большинства установок и аппаратов энергетического назначения исследуется посредством контроля состояния их изоляции. Вот уже более 20 лет контроль высоковольтной изоляции машин и аппаратов осуществляется методом регистрации характерных параметров частичных разрядов (ЧР) [1–6]. Исторически сложилось так, что основным параметром ЧР служит значение кажущегося заряда  $Q$ , поэтому качество испытываемой изоляции в литературе принято характеризовать пКл [1]. Последнее легко осуществляется для устройств, представляющих сосредоточенную емкость. Схема замещения дефекта в испытываемой изоляции отождествляется трехэлектродной схемой.

Для большинства практических высоковольтных аппаратов (от генераторных токопроводов до статорной обмотки электрических машин) схема замещения представляет неоднородную длинную линию с большой условностью заменяемой волновым сопротивлением  $\rho$ . В протяженных устройствах процесс регистрации ЧР зависит как от процесса распространения импульса ЧР [7–10] по токоведущей жиле или по заземленному кожуху (обмотке) [1], так и от способа съема сигнала от возникающих импульсов ЧР.

Поскольку фиксируемые сигналы зависят уже от многих факторов, которые никак не вписываются в трехэлектродную схему замещения дефекта, то и пересчет измеренного значения амплитуды импульса напряжения в привычный параметр ЧР-кажущийся заряд (пКл), оказывается весьма затруднительным.

Эта трудность связана со следующим:

для протяженных энергетических аппаратов ухудшение изоляции и ее пробой происходят строго в узком — локальном месте [1];

*The paper deals with a development of calibrating systems of measurement circuits for registering partial discharges by an apparent charge in HV insulation of electrical devices at operating voltage with the use of several sensors of the same type. The calibrating pulse is injected in one of the sensors. Satisfactory results are obtained. The system operating ability has been checked by field tests.*

**Key words:** electrical devices, insulation, pulse, partial discharges, tests

фиксация возникающих в дефекте импульсов зависит от места включения датчика, связанного по многим LC-контурам, образуемым испытываемым аппаратом [7, 8];

для длинной линии с помощью емкостного, индуктивного или омического датчика фиксируется не заряд, а ток, порожденный распространением импульса от ЧР, от места его возникновения до места установки датчика [1];

даже при известном значении емкости соединительного конденсатора и сенсора съема сигнала неизвестен масштаб приходящего в место съема исходного импульса;

типовой импульс от ЧР для дефектов в твердой изоляции характеризуется фронтом  $2 \div 5$  нс при его длине  $20 \div 50$  нс, сглаживаясь по мере его распространения по длинной линии [9].

Кроме того, как и значения пробивных напряжений в изоляции, регистрируемые значения ЧР подчиняются законам математической статистики. Фиксируемые импульсы должны быть охарактеризованы амплитудными и частотными спектрами, необходимыми для оценки средних амплитуд и их числа за выбранный отрезок времени, предопределяемый эквивалентной частотой искомых ЧР.

В зависимости от вида и назначения энергетического аппарата (от кабеля [13] до обмотки электрической машины [14]) количественный вклад фиксируемого сигнала от истинного (в месте возникновения дефекта в изоляции) не позволяют оценить, какая доля искомого заряда регистрируется используемой аппаратурой [11, 12]. В условиях эксплуатации электрооборудования съём интересующего импульса возможен только в определенном месте машины: вблизи линейных вводов или у нейтрали. Поэтому конструкция и расположение используемого сенсора предопределяет чувствительность его датчика к

<sup>1</sup> Работа выполнена предприятием ДИАКС (диагностические комплексные системы) в концерне «Росэнергоатом».

регистрируемому импульсу при наличии внешних и внутренних помех.

Перечисленное заставляет по-особому отнестись к методике градуировки измерительного тракта схем измерений ЧР, чему и посвящена эта статья.

**Особенности введения градуировочного сигнала.** Градуировочный импульс, используемый для калибровки измерительного тракта, должен быть тождествен искомому импульсу ЧР [1, 15]. В этом случае все процессы в изучаемой изоляции при приложении градуировочного импульса будут совпадать с истинным воздействием от импульса ЧР. В качестве такого градуировочного генератора используется малогабаритный генератор импульсов ДИАКС-G30 с амплитудой импульсов  $7 \div 70$  В, выдающий на испытуемый объект импульс длиной 30 нс с фронтом 2 нс. обеспечивающий тождественные истинным импульсам от ЧР по распространению и параметрам: амплитудному и частотному спектрам, дисперсии и возможным резонансным явлениям в контурах на реальном объекте испытания.

Естественно, что наиболее простым является градуировка измерительной аппаратуры в тракте для кабеля или токопровода, в которых распространение истинного импульса происходит в одном направлении, а затухание вводимого импульса вдоль линии поддается математическому определению [1, 13].

**Емкостный ввод градуировочного сигнала.** Для большинства реальных объектов испытания вообще, в том числе и электрических машин, токоведущие цепи изолированы и удалены от испытателя так, что невозможно осуществить гальванический контакт с ними: возможен съем сигнала лишь у линейных и нейтральных вводов.

Для оценки введенного в объект заряда необходимо знать значение емкости градуировочного соединительного конденсатора, так как введенный заряд  $Q_r = U_r C_r$ . Для точного определения  $Q_r$  необходимо для градуировки использовать длинные импульсы с коротким фронтом. Поскольку ввод сигнала в испытуемый объект осуществляется коаксиальным кабелем РК-50, т.е. через волновое сопротивление в 50 Ом, то для импульса с фронтом в 30 нс градуировочный конденсатор емкостью

$$C_r = \frac{3 \cdot 10^{-8}}{50} = 6 \cdot 10^{-10} \text{ Ф}$$

не оказывает никакого влияния на измерения. Но при вводе короткого импульса (даже через  $C_r \geq 6 \cdot 10^{-10}$  Ф, т.е. большую по значению емкость) в статорную обмотку электрической машины нельзя определить, какая же его доля заряда  $Q$  «пойдет» в обмотку, а какая, отразившись от неоднородности в виде конденсатора  $C_r$ , возвратится в генератор.

Следовательно, для оценки значения  $Q_r$  необходимо точно знать и иметь осциллограмму импульса напряжения непосредственно на высоковольтном проводнике объекта испытаний в месте ввода градуировочного импульса. Если на вводы обмотки наложить металлическую пластину, выполняющую роль градуировочной емкости  $C_r$ , то, хотя и возможно практически точно воспроизвести форму импульса, нельзя определить значение внедряемого заряда. Таким образом, емкостный способ введения градуировочного импульса из-за невозможности оценки параметров вводимого импульса, хотя его структура полностью сохраняется, не эффективен и не может использоваться для определения количественных коэффициентов градуировки при пересчете регистрируемых параметров ЧР в единицах кажущегося заряда, т.е. в пКл.

**Использование высокочастотных трансформаторов тока для ввода градуировочного сигнала в протяженный объект испытания.** В практике измерения радиопомех (RIV-method [13]) эффективным является использование высокочастотных трансформаторов тока (ВЧТТ). Полоса их частот и коэффициент трансформации таковы, что могут быть использованы в схемах градуировки измерительных цепей и съема сигналов ЧР. Последнее справедливо уже потому, что главным параметром измерения служит ток от действия импульсов ЧР:

$$I_r = K_T U_r \text{ или } K_T = \frac{I_r}{U_r} \left[ \frac{A}{B} \right].$$

Высокочастотный трансформатор тока обладает еще одной интересной возможностью: если к его первичной обмотке приложить импульс напряжения  $U_r$ , то во вторичную обмотку будет внедрен импульс тока  $I_r$ . На рис. 1 приведены зависимости изменения коэффициента трансформации ВЧТТ  $K_T = I_r / U_r$  для большого диапазона частоты  $f$  (кривая 1), здесь же для типового

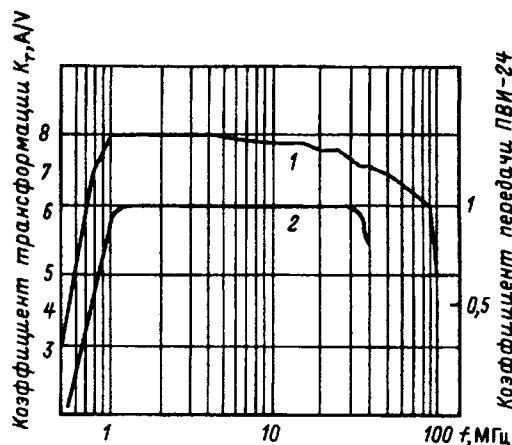


Рис. 1. Зависимость коэффициентов трансформации  $K_T$  для токового трансформатора типа ДИАКС СТ68М и передачи  $K_{ПВИ}$  для полного измерительного импеданса типа ДИАКС ПВИ-24 от частоты

измерительного четырехполюсника, используемого с соединительным конденсатором, — полного волнового импеданса (ПВИ), приведена зависимость коэффициента передачи, определяемого как  $K_{ПВИ} = U_{\text{вых}}/U_{\text{вх}}$  (кривая 2) для того же диапазона частот.

Для рассматриваемой конструкции ВЧТТ максимум  $K_T$  достигается уже при 1 МГц. Но и для ВЧТТ, так же как и в случае использования  $C_T$ , от места включения ВЧТТ при вводе импульса  $U_T$  возникает отражение и нельзя определить масштаб внедряемого заряда в объекте испытания. Однако этот отрицательный эффект может быть сведен до минимума, если в системе градуировки использовано будет одновременно два однотипных ВЧТТ: если на фазу статорной обмотки машины установить два однотипных трансформатора, на один из которых подать входной сигнал  $U_T(t)$ , а с другого снимать сигнал  $I(t)$ , то для определения коэффициента градуировки вообще не требуется знать импеданса передачи: нужно лишь четко фиксировать амплитуду импульса тока  $I$  и  $\tau$  — ширину импульса тока. Тогда заряд, внедряемый в проводник, на который «надеты» ВЧТТ, определяется как  $Q = I\tau$ .

Такой способ ввода и съема градуировочного импульса в испытуемую статорную обмотку, как показывает практика, полностью удовлетворяет поставленной задаче. Для подтверждения этого достаточно воспользоваться сопоставлением получаемых результатов с результатами полученными на стандартной схеме, т.е. при использовании ПВИ-24, включаемого по обычной схеме испытания изоляции от постороннего источника. Характеристики этого сенсора приведены на рис. 1, где приведена зависимость коэффициента передачи. Характерной особенностью этой зависимости служит неизменность коэффициента передачи в диапазоне от 1 до 40 МГц, что весьма важно для ЧР-диагностики.

Значения амплитуд измеряемых импульсов на сенсорах, установленных в различных точках, при различных способах введения градуировочного импульса приведены в таблице.

Схема конструкции по рис. 2	Введение градуировочного импульса	Значение амплитуды измеряемых сигналов на сенсорах в разных точках, отн. ед.		
«а»	Через ПВИ, поз. 1	$U=1$ на СТ68М, поз. 1	$U=1$ на СТ68М, поз. 3	
«а»	Через СТ68М, поз. 3	$U=0,5$ на ПВИ-24, поз. 1	$U=1$ на СТ68М, поз. 3	
«б»	Через СТ68М, поз. 1	$U=1$ на СТ68М, поз. 3	$U=0,4$ на СТ68М, поз. 2 и 4	
«б»	Через СТ66М, ПОЗ. 1	$U=1$ на СТ68М, поз. 3	$U=0,5$ на СТ68М, поз. 5 и 6	$U=0,25$ на СТ68М, поз. 7

\* За единицу принята амплитуда вводимого градуировочного импульса.

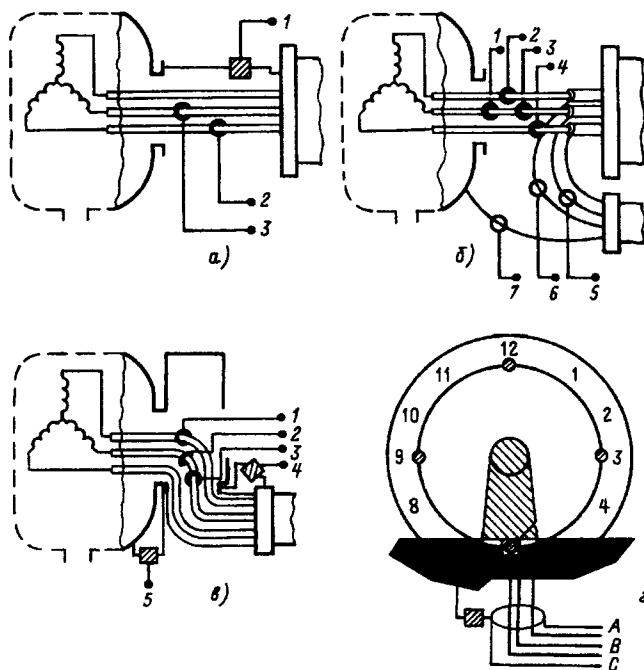


Рис. 2. Схема конструктивных решений узлов присоединения питающего кабеля к обмотке двигателя и расположения сенсоров: а — трехфазный кабель с броней 2, 3 — сенсор СТ68М; 1 — ПВИ-24; б — три однофазных силовых кабеля в единой трубе-экране со схемой защиты 1—7 — СТ68М; в — клеммная коробка с трехфазным кабелем в металлорукаве; 1—3 — СТ68М; 4, 5 — ПВИ-24; г — синхронная машина больших размеров (сенсор ПВИ-24 используется для съема сигнала); ⓧ — градуировочные емкости — пластины, устанавливаемые вдоль обмотки в местах, обозначенных как часовой циферблат

Конструктивные особенности электрических машин и электрические схемы градуировки регистрируемых сигналов в них. Принципиальные схемы включения градуировочных сенсоров для типовых двигателей, используемых в энергетических системах, приведены на рис. 2, где показаны наивероятнейшие схемы присоединения силовых кабелей к статорной обмотке.

Здесь рассмотрены случаи прямого присоединения (а, б, в) кабеля с «разделкой» внутри корпуса машины с использованием клеммной коробки (б).

Из приведенных схем следует, что сенсоры могут устанавливаться как на жилах трехфазного силового кабеля питания, так и на соединении корпуса машины с оболочкой кабеля. Соединение может быть осуществлено тремя однофазными кабелями (рис. 2,б), размещаемыми в единой металлической трубе. В этом случае сенсоры желательно устанавливать как на фазах силового кабеля, так и на заземляющем проводнике. При наличии клеммной коробки сенсоры желательно устанавливать по схеме рис. 2,в.

Для крупных синхронных машин, имеющих секционированные статорные обмотки (случай ТГ и ГГ), рекомендуется использование схемы рис. 2,г.

Во всех этих схемах для съема регистрируемого сигнала и ввода градуировочного им-

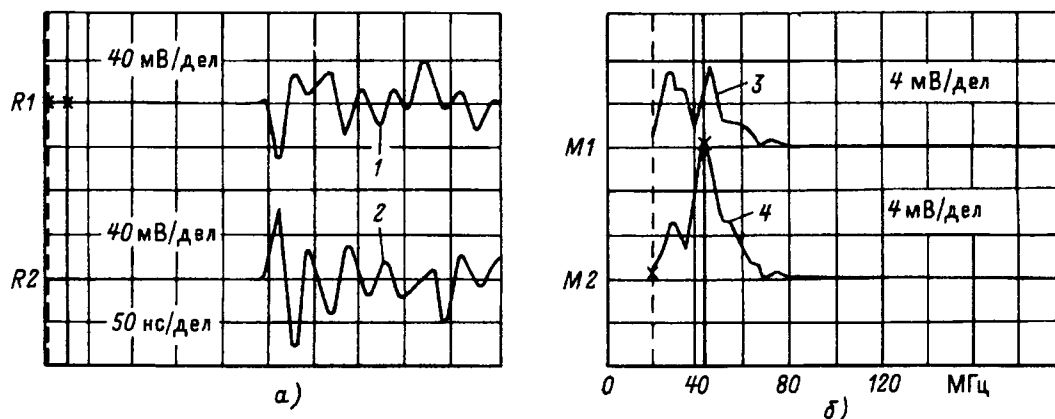


Рис. 3. Осциллограммы импульсов (а) и соответствующие им Фурье — преобразования (б): 1 — градуировка через ПВИ-24; 2 — через СТ68М; 3 — Фурье — преобразование осциллограммы 1; 4 — осциллограммы 2

пульса используются сенсоры ВЧТТ типа ДИАКС СТ68М и измерительные четырехполюсники типа ПВИ-24. Регистрирующим инструментом во всех опытах служил электронный осциллограф Техроникс, совместный с IBM PC, обладающий возможностью осуществлять автоматически Фурье-преобразование фиксируемого сигнала, что обеспечивает автоматический перевод измеряемого сигнала  $\Psi(t)$  в зависимость  $U(f)$ .

Наличие зависимости  $U(f)$  при анализе фиксируемых сигналов обеспечивает измерение кривой тока  $I$  во времени и разброс наблюдаемых амплитуд импульса и кроме того обеспечивает фиксацию частотного спектра импульса.

Применение анализа потока импульсов позволяет зафиксировать изменение средних амплитуд за время  $30 \div 90$  с для каждого интервала, т.е.  $n(Q)$ . Все это выполняет анализатор импульсов типа ДИАКС РДРА.

Результаты измерений амплитуд импульсов в местах соединения силового кабеля со статорной обмоткой электрической машины. В соответствии со схемой присоединения силового кабеля с обмоткой получаемые результаты подразделены на ряд подразделов.

Двигатель — трехфазный кабель (рис. 2,а). При проведении испытаний использовались датчики съема сигнала, названные сенсорами, ДИАКС типа СТ68М (1) и ПВИ-24 (2), устанавливаемые на фазах СТ и в разрыве поводка заземления корпуса — ПВИ. При проведении испытаний на рабочем напряжении использовались различные по принципу действия датчики. Использование их позволило оценить количественно как чувствительность метода, так и различные способы компенсации внешних помех, накладываемых на полезный сигнал.

Полученные при этом результаты: осциллограммы импульсов и характерные Фурье-импульсы (после преобразования) приведены на рис. 3.

При подаче градуировочного импульса через ПВИ-24 (осциллограммы рис. 3) на фазах фиксировались практически одинаковые сигналы. Разброс по амплитуде оказывался во всех опытах

менее 10% при практической тождественности полосы частот. Наблюдаемые отличия регистрируемых через СТ сигналов могут быть объяснены внутренними частотными характеристиками каждого из использованных СТ.

При подаче градуировочного сигнала через сенсор СТ68М регистрируемый импульс с ПВИ всегда оказывался по амплитуде до 5 раз большим, чем импульс, снимаемый с другого СТ.

При разрыве поводка заземления корпуса машины и брони кабеля, на котором закреплен ПВИ, снимаемый сигнал с СТ (при подаче градуировочного импульса через первый СТ) практически не изменился по сравнению со случаем наличия заземления через поводок. Все это говорит о том, что растекание сигналов по «земле» не оказывает влияния на измерения в фазах.

Двигатель — экранированный кабель, размещенный в заземленной трубе. В этой схеме использовались только сенсоры типа СТ68М (рис. 2,б). В данном случае проводились следующие опыты: градуировочный сигнал вводился через сенсор СТ в среднюю фазу, а измерения сигналов наведения на другие фазы фиксировались так же СТ. С точностью до  $6 \div 8\%$  амплитуды фиксируемых сигналов практически одинаковы и в 2—2,5 раза меньше вводимого импульса в среднюю фазу. При этом структура сигналов и их полоса частот практически совпадают.

Определение градуировочных коэффициентов пересчета. Как отмечено ранее, для оценки регистрируемых сигналов в общепринятых единицах ЧР-диагностики (в значениях кажущегося заряда  $Q$  [пКл]) необходимо четко регистрировать осциллограмму импульса тока: для используемых в опытах сенсоров типа СТ68М при известном для него числовом значении коэффициента трансформации во всей полосе частот  $K_T$  по известной осциллограмме  $U(t)$  определяется искомая зависимость  $I(t)$ . Тогда значение заряда, внедряемого в объект, оценивается как  $Q = \int I(t) dt$ .

Поскольку вводимый сигнал по форме близок к треугольному импульсу, то значение интеграла равно площади рассматриваемой зависимости ( $I(t)$ ), которая с достаточной точностью может быть принята за  $1/2(a \times h)$  (где  $h$  — высота импульса;  $a$  — основание). Следовательно, искомый заряд системы определяется как  $Q = 1/2(I_m \tau)$ , где  $I_m$  — максимальная амплитуда регистрируемых импульсов;  $\tau$  — длительность или длина импульса по времени.

Естественно, что эти характерные параметры фиксируемого сигнала зависят от конструкции и особенностей используемого сенсора. Для оценки особенностей конструкции используемых датчиков градуировочный сигнал через сенсор СТ68М подается на среднюю фазу (рис. 2, в), а сенсоры 2 (ПВИ-24), имеющие гальванический контакт (применительно для ПВИ), размещены в точках, отмеченных на рис. 2, в. Измеряемые сигналы подаются на анализатор импульсов РДРА, осуществляющий выборку по многочисленным измерениям средние значения  $I$ . Такая процедура, как показывает анализ данных измерений, не только сглаживает естественный раз-

брос, но и вносит коррекцию в оценку средних амплитуд импульсов.

Оценка вводимого в объект заряда. Электрическая схема установки сенсоров в клеммной коробке высоковольтного двигателя показана на рис. 4.

Из анализа кривой 4 следует, что средняя амплитуда сигнала  $U$  примерно равна 0,4 В. Основная частота регистрируемого сигнала (кривая 2) соответствует по Фурье-преобразованию 8,4 МГц. Для используемого высокочастотного трансформатора тока СТ68М коэффициент трансформации  $K_T = 8$  А/В, поэтому внедряемый на среднюю фазу градуировочный импульс в объекте испытания составляет  $Q_T = 20 \cdot 0,05 = 10^{-3}$  пКл, а измеренный заряд в другой фазе  $Q_n \approx 500$  пКл.

Градуировочные коэффициенты при измерениях растекания заряда по заземленной оболочке. Более простым с практической точки зрения проведения измерений являются схемы размещения съемных датчиков, включаемых непосредственно на поводок заземления размещенный между корпусом и оболочкой кабеля или на спусках. При этом датчики имеют гальванический контакт между двумя точками

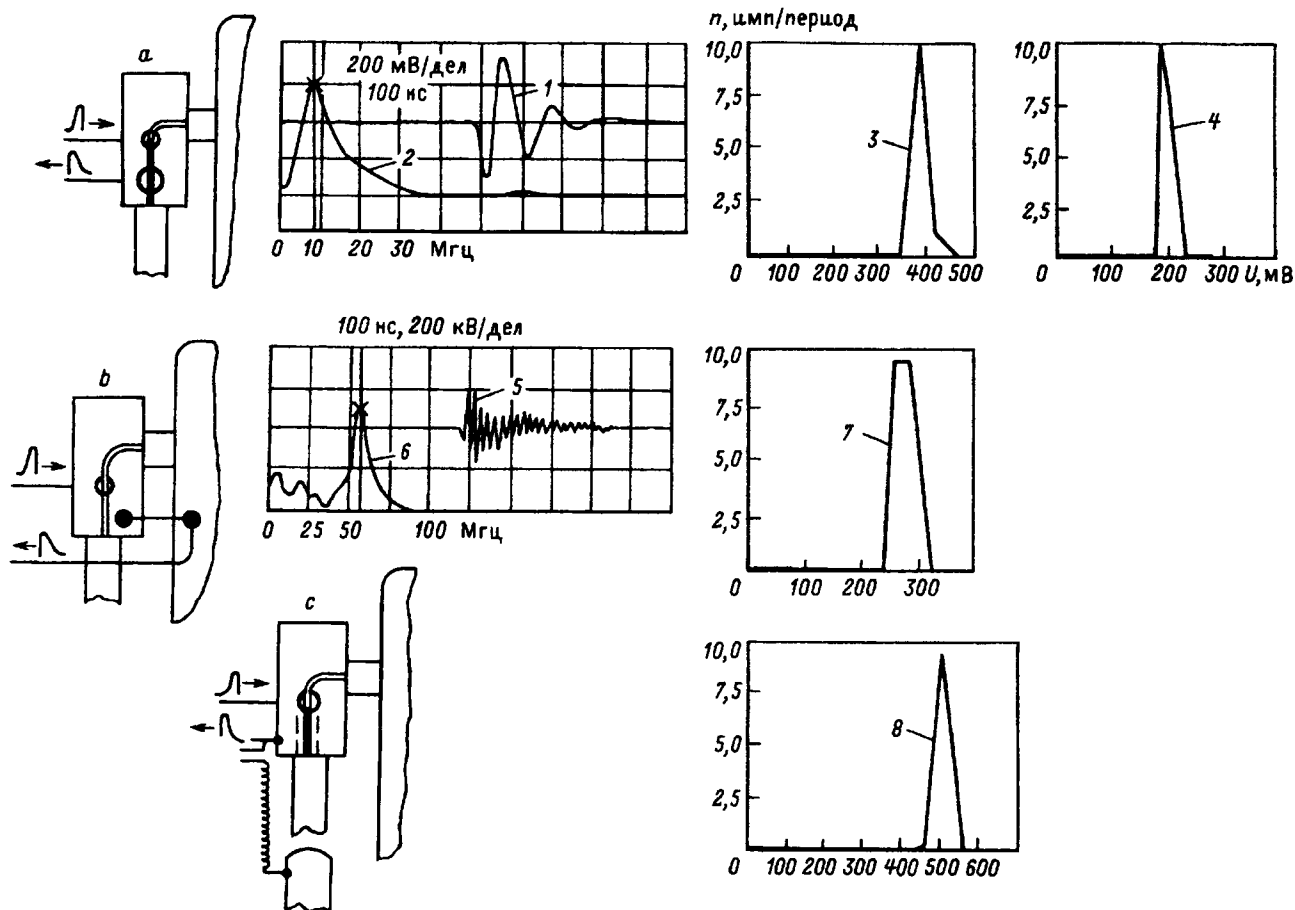


Рис. 4. К измерению значений вводимого в клеммную коробку (диагностируемую фазу) градуировочного заряда; ввод заряда через СТ68М; съем сигнала через второй СТ68М: 1 — осциллограмма импульса на входе второго СТ68М; 2 — функция  $U(f)$ , Фурье — преобразование для кривой 1; 3 — интеграл от кривой 1; 4 — распределение числа импульсов в течение времени (одного периода промышленной частоты)  $n$  от амплитуды импульса,  $U$  (спектр ЧР); 5 — осциллограмма импульса на выходе СТ68М; 6 — функция  $U(f)$ , Фурье-преобразование кривой 5; 7 — интеграл кривой 5; 8 — спектр амплитуд импульса

корпуса или оболочки кабеля, по которым растекаются наведенные от ввода градуировочного импульса сигналы.

Анализ приведенных данных показывает, что получаемые импульсы по своей структуре практически согласуются с представленными ранее. Это означает, что коэффициент пересчета по градуировочному импульсу, вводимому через СТ, для сенсора между двумя точками на корпусе равен:  $K_q = \frac{Q_u}{\Delta U} = 3,4$  пКл/мВ. Для сенсора типа ПВИ-24 из-за его большей полосы пропускания пересчетный коэффициент составляет уже 2 пКл/мВ.

Измерения структуры регистрируемого сигнала на статорной обмотке при его прохождении к сенсорам, устанавливаемым в различных точках обмотки. В больших синхронных электрических машинах статорная обмотка выполняется секционированной. Для осуществления градуировки, для ввода заряда, использовались алюминиевые пластины 60х300 мм, к которым кабелем РК-50 длиной 1 м подключался генератор импульсов ДИАКС-G30. Регистрация искомых сигналов от градуировочных импульсов в изоляции статорной обмотки осуществляется посредством сенсора ПВИ-24, устанавливаемого между корпусом машины и оболочкой (броней) силового кабеля. Градуировочная емкость закреплялась в пазах машины на всю длину. При этом емкости устанавливались в пазах (условно принимаемых как циферблат часов) в положения: на «3, 7, 9 и 12 ч» (см. рис. 2,з). Фиксация сигналов через ПВИ-24 осуществлялась в точке на «6 ч».

Из-за того, что зазоры между обмоткой и используемыми пластинами не могли быть установлены равными, а электрическая длина распространения электромагнитной волны в секциях статорной обмотки каждой фазы не строго равна угловым расстояниям, а зависима от конструкции обмотки, то и полученный амплитудный спектр не может быть достаточно точным. Если же для регистрируемых сигналов воспользоваться Фурье-преобразованием, то получаемый спектр обеспечивает переход  $U(t)$  в  $U(f)$ . Получаемые при этом данные представлены на рис. 5. На рис. 5,а даны фиксируемые осциллограммы градуировочных импульсов для различных точек установки градуировочного конденсатора, а на рис. 5,б Фурье-преобразования приведенных ранее импульсов.

Из осциллограмм градуировочного импульса следует, что с продвижением градуировочного конденсатора (пластин) от «3 до 12 ч» амплитуда сигнала, измеряемая в точке, соответствующей позиции на «6 ч», снижается. Это показывает, что анализ амплитуд дает большую погрешность, поэтому следует рассматривать частотный спектр, что является более информативным. Из кривых

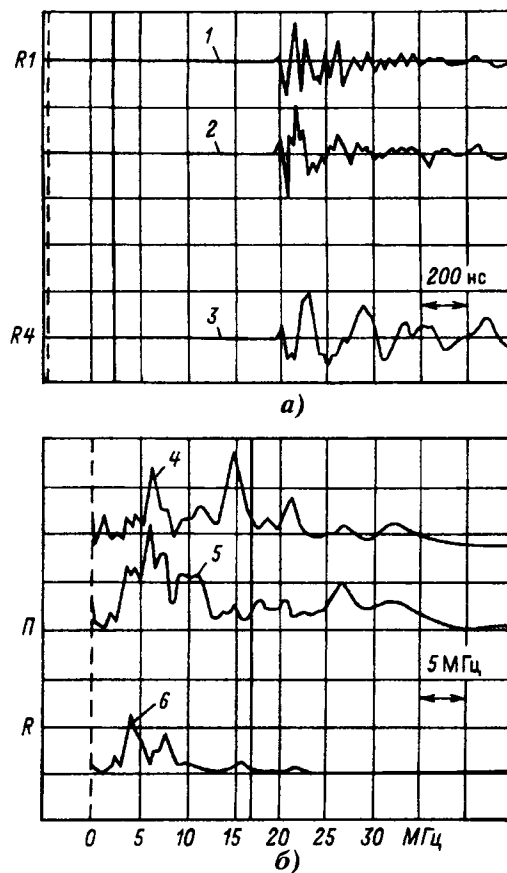


Рис. 5. Осциллограммы, полученные с сенсора ПВИ-24, установленного в положении на «6» (см. рис. 2,з), в зависимости от места установки градуировочного конденсатора (пластины) в пазу статора (а): 1 — пластина на «12 ч», амплитуда 80 мВ; 2 — пластина на «9 ч», амплитуда 250 мВ; 3 — пластина на «6 ч», амплитуда 400 мВ, и Фурье-преобразования осциллограмм импульсов (б): 4 — от импульса 1; 5 — от импульса 2; 6 — от импульса 3

Фурье-преобразования (рис. 5) следует, что минимальная частота для положения на «3 ч» составляет 10 МГц (кривая 6). Для такой частоты амплитуда сигнала максимальна и достигает 250 мВ. Для «9 ч» частота увеличивается до 35 МГц, а амплитуда доходит лишь до 102 мВ. Для частоты 16 МГц амплитуда снижается до 82 мВ.

Если градуировочный импульс вводится близко от линейного ввода [кривая 6, «на 3 ч» (начало обмотки)], то резонансная частота измерительного контура составляет (по данным Фурье-анализа) 4, 5 и 9,0 МГц. По мере удаления пластины от ввода четко прослеживается затухание резонансной частоты. Вне диапазона 4,5–9 МГц распространение импульса заданных параметров происходит с весьма незначительным затуханием. Последнее подтверждают данные Фурье-преобразования для положения пластин «9 и 12 ч».

В отличие от данных [7, 8] максимальное амплитудное затухание регистрируемого сигнала наблюдается для частотной полосы 1÷3 МГц, которое в 40 раз больше затухания для резонансной частоты 4,5÷9,0 МГц. Для полосы ча-

стот вблизи 20 МГц амплитуда импульса уменьшается в 3—4 раза. Этот, впервые экспериментально обнаруженный, результат имеет важное практическое значение. На практике можно использовать данные по градуировке статорной обмотки, т.е. зависимость частот сигнала от расположения источника сигнала в обмотке. Следовательно, на реальном сигнале от ЧР, анализируя его частоты, можно делать заключение о возможном месте возникновения ЧР. Таким образом, проводя измерения на рабочем напряжении, можно иметь информацию о предполагаемом месте ЧР.

Таким образом установлено, что измеряемый без анализа места ЧР заряд может фиксироваться с ошибкой в 1000—1500%, т.е. существующие методы градуировки и по методам классической теории могут давать лишь порядок регистрируемых величин. Следовательно, для мощных машин следует учитывать законы распространения импульса от места возникновения ЧР до точки, где установлен сенсор.

Это означает, что если известен закон распространения градуировочного импульса, то для оценки регистрируемого сигнала в единицах кажущегося заряда этот закон необходимо учитывать. При этом затухание сигнала определяется полосой частоты и может быть учтено по данным Фурье-преобразования.

**Выводы.** 1. Для полевых испытаний изоляции реальных электрических машин для градуировки измерительных цепей фиксации характерных параметров ЧР наряду с емкостным съемом сигнала целесообразно использовать в качестве датчиков высокочастотные трансформаторы тока и гальваническое подключение сенсоров к объекту испытания.

2. Наиболее простой способ ввода градуировочного импульса в испытываемую обмотку машины состоит в использовании высокочастотного трансформатора тока, поскольку его установка не требует нарушения режима работы машины, т.е. может осуществляться и на рабочем напряжении, не требуется и конструктивных изменений как в силовых кабелях, так и в клеммной коробке.

3. При имитации импульсов ЧР на выводах электродвигателя, т.е. в зоне наиболее вероятного повреждения изоляции, более эффективным методом служит съем сигналов с корпуса машины или оболочки кабеля вблизи вводов.

4. Для крупных машин, диаметр статорной обмотки которых превышает 1,5 м, необходимо при градуировке учитывать дисперсию и затухание амплитуд на разных частотах. Это означает, что каждый тип статорной обмотки должен быть отградуирован при установке градуировочного конденсатора в разные ее точки, в этом случае при измерениях можно удовлетворительно пересчитать измеряемое значение заряда на вы-

водах обмотки в ее истинное значение в месте возникновения ЧР.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксенов Ю.П., Ляпин А.Г. Диагностика изоляции токопроводов и комплектных распределительных устройств по характеристикам частичных разрядов в эксплуатации и при ремонтах. — М.: ЦНИИатоминформ, 1993.
2. Gillespie M.T., Murchit G.B., Stone G.C. Experience with AC Hipot and Partial Discharge Tests or Commissioning Generating Station Cables and Switchgear. — IEEE Trans. On Energy Conversion, 1989, September.
3. The Ability of Diagnostic Tests to Estimate the Remaining Life of Stator Insulation / G.C.Stone, Sedding H.G., Lloyd B.A. and D.K. Gupta. — IEEE Trans. On Energy Conversion. EC-3. 1988, December
4. Gulbert I.M., Dhirani H, Stone G.C. Handbook to Assess the Insulation Condition of Large Rotating Machines. — EPRI Power Reference Series, 1989, vol. 16.
5. Emery F.T., Harrold R.T. On-line incipient Arc Detection in Laege Turbine Generator Stator Windings. — IEEE Trans. On Power Apparatus and Systems. PAS-99. 1980, November.
6. Lyles J.F., Stone G.C., Kurtz M. Experience with PDA Diagnostic Testing on Hydraulic Generators. — IEEE Trans. On Energy Conversion. EC-3 1988, Desember.
7. A New Sensor for Detecting Partial Discharges in Operating Turbine Generators / H.G. Sedding, S.R. Campbell, G.C. Stone, and G.S. Klempner. — IEEE Winter Power Meeting Paper N 91 WM 065-3 EC. 1991, February.
8. Wilson A., Jackson R.J., Wang N. Discharge Detection Techniques for Stator Windings. — Proc. IEEE, 1985, 132B.
9. Henriksen, M., Stone G.C., Kurtz M. Propagation of Partial Discharge and Noise Pulses in Turbine Generators. — IEEE Trans. on Energy Conversion. EC-1. 1986, September.
10. Wright M.T., Yang S.J., McLeay K. General Theory of Fast Fronted Intertum Voltage Distribution in Electrical Windings. — Proc. IEE 130B, 1983.
11. Miller R., Hogg W.K. Pulse Propagation of Slot and Internal Discharges in Stator Windings of Electrical Mxhines. Fourth International Symposium on High Voltage Engineering, Paper 63.05, — Athens, Greece, 1983.
12. Sedding H.G., Stone G.C., Campbell S.R. Measurements of Partial Discharges on Operating Turbine Generators with a Novel Wide Band Coupler. — Proc. Of Third International Conference on Properties and Applications of Dielectric Materials. — Tokyo, Japan, 1991, July.
13. Kemp I.J., Gupta B.K., Stone G.C. Calibration Difficulties Associated with Partial Discharge Detectors in Rotating Machine Applications. — Proceedings of the 18 th Electrical and Electronics Insulation Conference. — Chicago, Illinois, 1987, October.
14. Wilson A. Stator Winding Testing Using Partial Discharge Techniques, ibid.
15. Temporal and Spatial Development of Partial Discharges in Spherical Voids in Epoxy Related to the Detected Electrical Signal / J.T.Holboll, J.M.Braun, N.Fujimolo, and G.C.— Conference on Dielectric and Electrical Insulation Phenomena. — Knoxville, T.N., 1992, October.

[15.01.97]

**А в т о р ы :** Аксенов Юрий Петрович окончил Новосибирский электротехнический институт в 1966 г. В 1988 г. защитил кандидатскую диссертацию в Ленинградском политехническом институте по электрической прочности жидкого азота. Директор ЗАО ДИАКС (диагностические комплексные системы).

Голубев Александр Александрович окончил Московский физико-технический институт в 1966 г. В 1990 г. защитил кандидатскую диссертацию в Московском радиотехническом институте. Заместитель директора ЗАО ДИАКС.

Ляпин Андрей Григорьевич окончил электрофизический факультет Политехнического института в 1949 г. и физический факультет Московского государственного университета в 1951 г. защитил кандидатскую диссертацию по электрофизике газового разряда. Ведущий научный сотрудник Энергетического института им. Г.М. Кржижановского.

# Об определении максимального тока при включении цепи $RL$ на переменное напряжение

ЛУРЬЕ А.И.

Приведено строгое решение задачи расчета тока при включении контура  $RL$  толчком на переменное напряжение. На основании обширного анализа существующей литературы по расчету переходного процесса в данной цепи сделан вывод о том, что приведенные в классической литературе формулы являются приближенными и могут приводить к ошибкам как при расчете максимального значения тока включения, так и фазового сдвига, что важно при анализе практических схем при испытаниях силовых трансформаторов на выдерживание КЗ.

Ключевые слова: трансформатор,  $RL$ -цепь, переменное напряжение, ток, включение, расчет, испытания

Рассмотрим процесс включения источника переменного синусоидального напряжения в цепь последовательно соединенных активного сопротивления и постоянной индуктивности (рис. 1). В частном случае такой процесс характерен для короткого замыкания (КЗ) трансформатора. Как известно, ток переходного процесса, полученный в результате интегрирования дифференциального уравнения

$$u = iR + L di/dt,$$

при нулевом начальном условии содержит периодическую и аperiodическую составляющие (т.е. принужденный, или установившийся, и свободный ток):

$$\frac{i(t)}{I\sqrt{2}} = \sin(\omega t + \psi - \varphi_K) - e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\psi - \varphi_K), \quad (1)$$

где  $I=U/Z$  — действующее значение установившегося тока цепи;  $Z=\sqrt{(\omega L)^2 + R^2} = u_K U_H^2 / S_H = \sqrt{(u_p^2 + u_a^2)} U_H^2 / S_H$  — полное сопротивление цепи или короткозамкнутого трансформатора;  $S_H$ ,  $U_H$  — номинальные мощности и напряжение трансформатора;  $\psi$  — фаза включения напряжения;  $\omega=2\pi f$  — круговая частота;  $f$  — частота

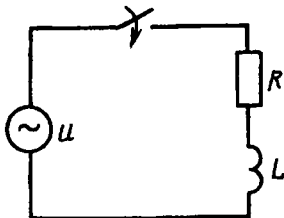


Рис. 1. Цепь последовательно соединенных активного сопротивления  $R$  и постоянной индуктивности  $L$  [напряжение источника  $u(t) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi)$ ]

A strict solution of the problem of calculating current under shock switching-in  $RL$ -circuit to AC voltage. On the basis of a detailed analysis existing literature dealing with calculating transient processes in the circuit considered a conclusion has been made that formulae listed in this literature are approximative and can lead to mistakes when calculating maximum value of the making current and the phase shift while these parameters are important for an analysis of practical schemes during fault withstand tests of power transformers.

Key words: transformer,  $RL$ -circuit, AC voltage, switching-in, calculating, tests

сети;  $\tau=L/R=1/\omega(u_p/u_a)$  — постоянная времени затухания аperiodического тока;  $\varphi_K = \arctg(\omega L/R) = \arctg(u_p/u_a) = \arctg(\omega\tau)$  — угол сдвига фаз напряжения и тока в установившемся режиме цепи  $RL$  или короткозамкнутого трансформатора;  $u_p$  и  $u_a = P_K/S_H$  — реактивная и активная составляющие напряжения КЗ трансформатора  $u_K$  (в долях единиц или процентах);  $P_K$  — потери короткого замыкания;  $u_p/u_a = \omega L/R$  — параметр, который обычно используется для определения тока КЗ трансформатора; при других расчетах этот параметр называется добротностью индуктивности  $Q$ .

В частном случае при фазе включения  $\psi$ , равной углу  $\varphi_K$ , имеем  $\psi - \varphi_K = 0$ , т.е. второй член в (1) обращается в нуль. Это значит, что переходный процесс отсутствует и сразу после включения возникает установившийся режим.

В общем случае кривая тока (рис. 2,а) при определенной (заданной) фазе включения напряжения  $\psi$  имеет в начале процесса характерный максимум  $I_{\max}$ , возникающий в момент времени  $t_{\max}$  (т.е. при фазе  $\omega t_{\max}$ ), который можно определить по методу определения экстремума функции одной переменной  $t$ : путем решения уравнения, получаемого после нахождения производной тока по времени и приравнивая ее нулю:

$$\begin{aligned} \frac{1}{I\sqrt{2}} \frac{di}{dt} &= \omega \cos(\omega t_{\max} + \psi - \varphi_K) + \\ &+ \frac{\omega}{u_p/u_a} e^{-\frac{\omega t_{\max}}{u_p/u_a}} \sin(\psi - \varphi_K) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Момент времени  $t_{\max}$  или фазу  $\omega t_{\max}$  из этого уравнения простой формулой (т.е. в замкнутом виде) получить, как известно, невозможно. Ис-



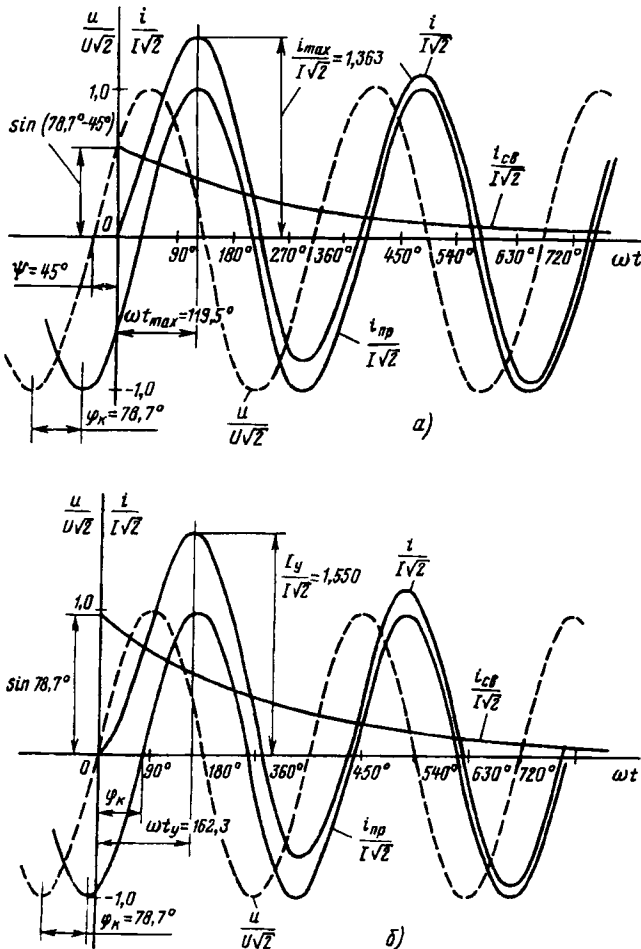


Рис. 2. Принужденный (установившийся) ток  $i_{пр}(t)$ , свободный ток  $i_{св}(t)$  и переходный ток  $i(t) = i_{пр}(t) + i_{св}(t)$  в цепи  $RL$  по рис. 1;  $u_p/u_a = 5$ , ток  $i_{пр}(t)$  отстает от напряжения  $u(t)$  на угол  $\varphi_K = \arctg 5 = 78,7^\circ$ : а — фаза включения напряжения  $\psi = 45^\circ$ ;  $u/U\sqrt{2} = \sin(\omega t + 45^\circ)$ ;  $i_{пр}/I\sqrt{2} = \sin(\omega t + 45^\circ - 78,7^\circ)$ ;  $i_{св}/I\sqrt{2} = e^{-\frac{\omega t \pi}{180^\circ \cdot 5}} \sin(78,7^\circ - 45^\circ)$ ; б — фаза включения напряжения  $\psi_y = 0$ ;  $u/U\sqrt{2} = \sin(\omega t + \psi_y) = \sin \omega t$ ;  $i_{пр}/I\sqrt{2} = \sin(\omega t - 78,7^\circ)$ ;  $i_{св} = e^{-\frac{\omega t \pi}{180^\circ \cdot 5}} \sin 78,7^\circ$

комая фаза  $\omega t_{max}$  входит аргументом в функции разного вида (косинус и экспонента), поэтому уравнение (2) называется трансцендентным. Так как нет простой формулы для  $\omega t_{max}$ , не может быть простой формулы и для максимального тока  $I_{max}$ . Обычно для определения численных значений  $\omega t_{max}$  и  $I_{max}$  применяют многократные расчеты по формуле (1) при разных «пробных» значениях  $\omega t_{max}$ , при этом точное значение максимального тока можно получить только при достаточно большом числе расчетов.

Однако можно воспользоваться известным методом итераций для решения трансцендентных уравнений [1]. Для этого напишем уравнение (2) в несколько другом виде, так, чтобы искомая величина  $\omega t_{max}$  стояла в левой части уравнения. При этом выразим все аргументы для удобства

расчетов на калькуляторе в электрических градусах:

$$\omega t_{max}^{(k)} = (\arctg u_p/u_a - \psi) + \arccos \left\{ \frac{\sin [\arctg (u_p/u_a) - \psi]}{u_p/u_a} e^{-\frac{\omega t_{max}^{(k-1)} \pi}{180^\circ u_p/u_a}} \right\}. \quad (3)$$

В уравнении (3) верхний индекс  $(k)$  означает номер очередной итерации ( $k=1, 2, 3, \dots$ ). При первой итерации ( $k=1$ ) «исходную» фазу  $\omega t_{max}^{(0)}$  лучше взять как можно ближе к искомой, но можно ее взять и любой, в частности  $\omega t_{max}^{(0)} = 90^\circ$ .

Например, для  $u_p/u_a = 5$  и  $\psi = 45^\circ$  при выбранной фазе  $\omega t_{max}^{(0)} = 90^\circ$  с учетом  $\arctg 5 = 78,69^\circ$  имеем

$$\begin{aligned} \omega t_{max}^{(1)} &= (78,69^\circ - 45^\circ) + \\ &+ \arccos \left[ \frac{\sin (78,69^\circ - 45^\circ)}{5} e^{-\frac{90^\circ \pi}{180^\circ \cdot 5}} \right] = 119,04^\circ; \\ \omega t_{max}^{(2)} &= 33,69^\circ + \\ &+ \arccos \left[ \frac{\sin 33,69^\circ}{5} e^{-\frac{119,04^\circ \pi}{180^\circ \cdot 5}} \right] = 119,49^\circ; \\ \omega t_{max}^{(3)} &= 119,50^\circ. \end{aligned}$$

Далее итерации можно не продолжать, так как уже при втором расчете получился достаточно точный результат, а третий расчет фактически проведен для проверки.

По найденной фазе максимального тока последний определяется с помощью формулы (1):

$$\begin{aligned} \frac{I_{max}}{I\sqrt{2}} &= \sin (119,5^\circ - 45^\circ + 78,69^\circ) + e^{-\frac{119,5^\circ \pi}{180^\circ \cdot 5}} \times \\ &\times \sin (78,69^\circ - 45^\circ) = 1,363. \end{aligned}$$

Представленный расчет более точный и быстрый, чем простой подбор. Как видно, итерационный процесс, который обычно ассоциируется с большим объемом вычислений и с применением компьютера, в нашем случае сводится к двум-трем вычислениям на калькуляторе, имеющем элементарные функции. Помимо прочего, итерационный процесс удобен и тем, что случайные ошибки или описки при расчете влияют только на увеличение числа итераций.

Заметим, что фазу  $\omega t_{max}$  из уравнения (2) можно выразить и вторым способом:

$$\omega t_{max} = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{u_p}{u_a} \ln \frac{\sin [\arctg (u_p/u_a) - \psi]}{\cos [\omega t_{max} + \psi - \arctg (u_p/u_a)]}.$$

Однако итерационный процесс при расчетах по этой формуле расходится.

На практике чаще всего встречаются задачи, в которых требуется определить максимально возможный ток, так называемый ударный ток КЗ  $I_y$ , который возникает не при произвольной фазе включения  $\psi$ , а при определенной (особенной, единственной) фазе  $\psi_y$ :  $I_y = I_y(\psi_y) = \max \{I_{\max}(\psi)\}$ . Фазу включения  $\psi_y$  необходимо определить в первую очередь, далее необходимо определить фазу возникновения ударного тока  $\omega t_y$  и сам ударный ток  $I_y$ .

Поставленная задача существенно облегчается, если принять, что для мощных трансформаторов или высокодобротных контуров  $RL$  активное сопротивление пренебрежимо мало, т.е.  $R=0$ ,  $\varphi_k=90^\circ$ . При этом, как следует из (1), переходный процесс будет длиться бесконечно, а ударный ток возникает при фазе включения  $\psi_y=0$ , фаза этого тока будет  $\omega t_y=180^\circ$ , а отношение ударного тока к амплитуде установившегося будет равно двум.

В общем случае  $R \neq 0$  задача усложняется, формулу тока (1) следует рассматривать уже не как функцию одной переменной  $i(\omega t)$ , а как функцию двух переменных  $i(\omega t, \psi)$ . Необходимо найти максимум (оптимум) этой функции  $I_y = I_y(\omega t_y, \psi_y)$ . Теория функций многих переменных, в нашем случае двух переменных, регламентирует определять аргументы  $\omega t_y$  и  $\psi_y$  при решении системы двух уравнений с двумя неизвестными [2], причем каждое из этих уравнений получается при равенстве нулю частных производных функции  $i(\omega t, \psi)$  по аргументам  $\omega t$  и  $\psi$ :

$$\frac{1}{I\sqrt{2}} \frac{\partial i}{\partial t} = \omega \cos(\omega t_y + \psi_y - \varphi_k) + \frac{\omega}{u_p/u_a} e^{-\frac{\omega t_y}{u_p/u_a}} \times \times \sin(\psi_y - \varphi_k) = 0; \quad (4)$$

$$\frac{1}{I\sqrt{2}} \frac{\partial i}{\partial \psi} = \cos(\omega t_y + \psi_y - \varphi_k) + e^{-\frac{\omega t_y}{u_p/u_a}} \times \times \cos(\psi_y - \varphi_k). \quad (5)$$

После деления (4) на  $\omega$ , вычитания (5) из (4) и сокращения на экспоненциальный множитель можно получить и решить уравнение для фазы включения  $\psi_y$ :

$$1/(u_p/u_a) \sin(\psi_y - \varphi_k) + \cos(\psi_y - \varphi_k) = 0, \quad (6)$$

отсюда при  $(u_p/u_a) = \operatorname{tg} \varphi_k$  следует

$$\operatorname{tg}(\psi_y - \varphi_k) = -\operatorname{tg} \varphi_k; \quad \psi_y = 0 \quad \text{или} \quad \psi_y = \pi. \quad (7)$$

Таким образом, для достижения возможно большого броска переходного тока процесса — ударного тока  $I_y$  — включение должно быть проведено при прохождении кривой напряжения через нулевое значение, причем это условие экс-

тремума тока  $\psi_y=0$  или  $\psi_y=\pi$  одинаково при любых значениях параметра  $u_p/u_a$ .

Для того чтобы решить вторую половину задачи — определить ударный ток  $I_y$ , необходимо определить фазу ударного тока  $\omega t_y$  из уравнения (3) или (4), подставив в них  $\psi_y=0$ :

$$(u_p/u_a) \cos(\omega t_y - \varphi_k) - e^{-\frac{\omega t_y}{u_p/u_a}} \sin \varphi_k = 0; \quad (8)$$

$$\cos(\omega t_y - \varphi_k) - e^{-\frac{\omega t_y}{u_p/u_a}} \cos \varphi_k = 0. \quad (9)$$

Однако из этих трансцендентных уравнений фазу ударного тока  $\omega t_y$  как функцию параметра простой формулой  $u_p/u_a$  выразить нельзя. Воспользуемся уже описанным методом итераций, получив при этом итерационную формулу из более простого уравнения (9):

$$\omega t_y^{(k)} = \arctg(u_p/u_a) + + \arccos \left[ e^{-\frac{\omega t_y^{(k-1)} \pi}{180^\circ u_p/u_a}} \cos \arctg(u_p/u_a) \right]. \quad (10)$$

Покажем в качестве примера первые итерации при  $u_p/u_a=5$  и  $\omega t_y^{(0)}=180^\circ$ :

$$\begin{aligned} \omega t_y^{(1)} &= \arctg 5 + \arccos \left[ e^{-\frac{180^\circ \pi}{180^\circ \cdot 5}} \cos \arctg 5 \right] = \\ &= 78,690^\circ + 83,990^\circ = 162,684^\circ; \quad \omega t_y^{(2)} = 162,3087^\circ; \\ \omega t_y^{(3)} &= 162,3004^\circ; \quad \omega t_y^{(4)} = 162,3002^\circ. \end{aligned}$$

Если в качестве «исходного» приближения взять более точно  $\omega t_y^{(0)} = 90^\circ + \arctg(u_p/u_a) = 90^\circ + 78,69^\circ = 168,69^\circ$ , то  $\omega t_y^{(1)} = 162,4417^\circ$ ;  $\omega t_y^{(2)} = 162,3033^\circ$ ; ...

Таким образом, в любом случае достаточны две-три итерации для получения  $\omega t_y = 162,3^\circ$ .

В нашем примере

$$\begin{aligned} I_y/I\sqrt{2} &= \sin(162,3^\circ - \arctg 5) + \\ &+ e^{-\frac{162,3^\circ \pi}{180^\circ \cdot 5}} \sin \arctg 5 = 1,550. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотренный пример проиллюстрирован на рис. 2,б.

В таблице представлены результаты расчетов по изложенному методу фазы абсолютного максимума  $\omega t_y$  и коэффициентов для определения самого ударного тока  $I_y$  в зависимости от параметра  $u_p/u_a$ , обычно применяемого при расчете электродинамической стойкости трансформаторов при коротких замыканиях.

В этой же таблице даны ударные коэффициенты  $K_y'$ , рассчитанные по формуле, обычно приводимой в технической литературе:

Параметр $u_p/u_a = \omega t$	Результаты расчетов						
	$\omega t_y$ , град.	$K_y = \frac{I_y}{I\sqrt{2}}$	$K_y \sqrt{2}$	$90^\circ + \varphi_K$	$K_y'$ по (12) / $\delta$ , %	$K_y''$ по (13) [3] / $\delta$ , %	$K_y''' \sqrt{2}$ по стандартам [4, 5]/ $\delta$ , %
0,5	115,66	1,0078	1,4252	116,56	1,0019/-0,59	1,0076/-0,02	—
1,0	130,87	1,0694	1,5124	135,00	1,0432/-2,45	1,0670/-0,22	1,51/-0,16
1,5	140,07	1,1571	1,6364	146,31	1,1231/-2,93	1,1516/-0,47	1,64/+0,22
2,0	146,26	1,2418	1,7562	153,43	1,2079/-2,73	1,2344/-0,59	1,76/0,22
3,0	154,15	1,3786	1,9496	161,56	1,3509/-2,01	1,3706/-0,58	1,95/0,02
4,0	159,00	1,4774	2,0894	165,96	1,4556/-1,45	1,4703/-0,48	2,09/0,03
5,0	162,30	1,5503	2,1924	168,69	1,5335/-1,08	1,5442/-0,39	2,19/-0,11
6,0	164,69	1,6057	2,2708	170,54	1,5924/-0,83	1,6006/-0,32	2,27/-0,04
8,0	167,94	1,6842	2,3818	172,87	1,6752/-0,53	1,6805/-0,22	2,38/-0,08
10	170,05	1,7368	2,4562	174,29	1,7304/-0,37	1,7341/-0,16	2,46/0,15
14	172,62	1,8027	2,5494	175,91	1,7970/-0,20	1,8010/-0,09	2,55/0,02
20	174,68	1,8566	2,6257	177,14	1,8546/-0,11	1,8548/-0,10	—
30	176,37	1,9015	2,6892	178,09	1,9006/-0,05	1,9011/-0,02	—
50	177,78	1,9395	2,7428	178,85	1,9391/-0,02	1,9393/-0,01	—
100	178,87	1,9692	2,7848	179,43	1,9691/-0,005	1,9691/0,00	—

$$K_y' = 1 + e^{-\frac{\pi}{u_p/u_a}}, \quad (12)$$

а также более точные ударные коэффициенты  $K_y''$  по формуле, приведенной в [3]:

$$K_y'' = 1 + e^{-\frac{\pi/2 + \varphi_K}{u_p/u_a} \sin \varphi_K} = 1 + e^{-\frac{[90^\circ + \arctg(u_p/u_a)] \pi}{180^\circ u_p/u_a} \sin \arctg(u_p/u_a)}. \quad (13)$$

Приведены также коэффициенты  $K_y''' \sqrt{2}$ , нормированные для расчета стойкости трансформаторов при КЗ в отечественном стандарте ГОСТ 11677—85 [4] и стандарте МЭК [5]; фаза ударного тока, рассчитанная по приближенной формуле [3]  $\omega t_y' \approx 90^\circ + \arctg(u_p/u_a)$ , а также относительные процентные погрешности всех коэффициентов ( $\delta$ ).

Как видно из таблицы, для мощных трансформаторов, у которых параметр  $u_p/u_a$  относительно велик ( $u_p/u_a > 8$ ), все формулы для ударного коэффициента дают достаточно точные значения (отклонение от точных значений составляет 0,5% и менее). Для этих мощных трансформаторов фаза включения  $\psi_y = 180^\circ$  не очень сильно (до  $7^\circ$ ) отличается от теоретически неточного значения  $90^\circ + \arctg(u_p/u_a)$ , приводимого в ряде книг, а фаза достижения ударного тока  $\omega t_y$  не более чем на  $12^\circ$  отличается от приближенной фазы  $180^\circ$ , приводимой в тех же книгах.

В более широком диапазоне изменения параметра  $u_p/u_a$  от 0,5 до 100, охватывающем трансформаторы и небольшой мощности, наиболее точные ударные коэффициенты — у значений, нормированных в отечественном стандарте и стандарте МЭК (погрешности только за счет округления точных значений). Формула (13) также дает точные значения ударного коэффициента с погрешностью не выше 0,6%. Формула (12) из отечественной литературы дает заметную погрешность до 3%.

Видно также, что точная фаза включения  $\psi_y = 180^\circ$  существенно (до  $45$ — $50^\circ$ ) отличается от теоретически неточного значения  $90^\circ + \arctg(u_p/u_a)$ , приводимого в большинстве источников. Фаза ударного тока  $\omega t_y$  и приближенная формула А. Френкеля (столбец  $\omega t_y' = 90^\circ + \varphi_K$  совпадают достаточно точно (расхождение не более  $6^\circ$ ). Обычно приводимая в литературе фаза  $\omega t_y \approx 180^\circ$  неточна, она дает погрешность до  $45^\circ$ — $50^\circ$ .

Таким образом, задачу анализа, поставленную в начале статьи, можно считать выполненной.

Представляется, что читатель, ознакомившись с изложенным текстом статьи, окажется в недоумении. С какой это стати в конце XX века рассматривается классическая задача теоретической электротехники? Ведь она безусловно уже решена по крайней мере в начале века. Автор почти 40 лет занимается проблемой электродинамической стойкости трансформаторов и реакторов при КЗ, в которой вопрос об ударном токе КЗ является «альфой и омегой» всех задач. Однако за эти годы фактически безрезультатно просмотрены десятки книг и статей в поисках математически строгого решения поставленной в статье задачи: теоретически точного определения фазы включения  $\psi_y$  для достижения ударного тока, фазы достижения током этого значения  $\omega t_y$  и значения этого тока  $I_y$ .

Во всех учебниках и монографиях, в том числе и в изданных на русском языке за последние 60—70 лет по теоретическим основам электротехники, электрическим машинам и трансформаторам, электрическим аппаратам, электрическим сетям, часть которых дана в списке литературы в хронологическом порядке [5—35], как правило, дается вывод формулы переходного тока (1), а также ее анализ только для частного случая высокодобротной цепи  $RL$ , когда можно пренебречь сопротивлением  $R$  по сравнению с индуктивным сопротивлением  $\omega L$ , т.е. при  $u_p/u_a \gg 1$  и  $\varphi_K \approx 90^\circ$ . В этом очень важном для практики случае, характерном для

мощных трансформаторов, справедливо утверждается, что  $\psi_y \approx 180^\circ$ ,  $\omega t_y \approx 180^\circ$ , приводится упрощенная, но достаточно точная в этом частном случае формула (12) для определения ударного коэффициента (как это видно из таблицы). В общем случае соотношений параметров цепи  $RL$  математически строгий анализ кривой тока (1) во всей изученной литературе отсутствует, вместо него приводятся некоторые нечеткие соображения, на основании которых даются теоретически неточные формулы для  $\psi_y$  и  $\omega t_y$ .

Редкое исключение в литературе (а по сведениям, которыми располагает автор, единственное), к сожалению, не замеченное или не оцененное авторами отечественных книг и учебников, представляет книга А. Френкеля [3], изданная в переводе с немецкого языка в 1934 г. Первое издание этой книги вышло в Германии в 1914 г. по лекциям, прочитанным автором в 1908–1910 гг. И немецкое издание, и русский перевод являются библиографической редкостью, мало доступной широкому читателю.

Альфред Френкель приводит изящное геометрическое доказательство  $\psi_y = 0$ , которое можно пояснить на рис. 3. На этом рис. 3 приведены две синусоиды напряжения и принужденного (установившегося) тока, сдвинутые на угол  $\varphi_K = \arctg(u_p/u_a)$ . Момент времени включения  $\omega t = 0$  отмечен точкой  $O$  на оси  $\omega t$ , через точку  $O$  проведена вертикальная линия. Пересечение этой вертикальной оси с кривой тока в точке  $K$  отсекает на оси отрезок  $OK$ , равный начальному свободному току с обратным знаком  $-i_{cb}(0)$ . Через точку  $K$  и симметричную ей точку  $M$   $i_{cb}(0)$  проведены затухающие экспоненты свободного тока. Кривая переходного тока  $i(t) = i_{np}(t) + i_{cb}(t)$  соответствует заштрихованной области между кривыми  $i_{np}(t)$  и  $-i_{cb}(t)$ , так как вертикальные отрезки между синусоидой  $i_{np}(t)$  и экспонентой  $-i_{cb}(t)$  и есть отрезки

$i(t) = i_{np}(t) - [-i_{cb}(t)]$ . Экспонента  $-i_{cb}(t)$  в точке  $K$  должна касаться кривой  $i_{np}(t)$  для того, чтобы максимум тока был наибольшим, т.е. равным ударному току  $I_y$  (это и есть основная идея доказательства). Если экспоненты не касаются кривой  $i_{np}(t)$ , а ее пересекают (как, например, экспоненты, проходящие через точки  $K1$  и  $K2$ ), то такие экспоненты неминуемо будут расположены ближе к оси  $\omega t$ , т.е. внутри заштрихованной области. А это в свою очередь значит, что все вертикальные отрезки между  $i_{np}(t)$  и  $i_{cb}(t)$  будут меньшими, включая и отрезок, равный  $I_y$ . Таким образом, вертикальная ось должна проходить через точки  $K$  и  $O$ , а не через другие точки, например,  $K1$ ,  $O1$  и  $K2$ ,  $O2$ . Условие касания кривых  $i_{np}(t)$  и  $-i_{cb}(t)$  при  $t=0$  математически выражается равенством производных в этой точке:

$$\left. \frac{di_{np}}{dt} \right|_{t=0} = - \left. \frac{di_{cb}}{dt} \right|_{t=0}. \quad (14)$$

Отсюда и из (1) следует (с учетом  $t=0$  и  $\omega\tau = \tg \varphi_K$ ):

$$\frac{d}{dt} [I\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi - \varphi_K)] = \frac{d}{dt} \left[ I\sqrt{2} \sin(\psi - \varphi_K) e^{-\frac{t}{\tau}} \right];$$

$$\omega \cos(\omega t + \psi - \varphi_K) = -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\psi - \varphi_K);$$

$$-\omega \cos(\psi_y - \varphi_K) = \frac{1}{\tau} \sin(\psi_y - \varphi_K);$$

$$-\omega\tau = \tg(\psi_y - \varphi_K); \quad -\tg \varphi_K = \tg(\psi_y - \varphi_K);$$

$$-\varphi_K = \psi_y - \varphi_K \quad \text{или} \quad -\varphi_K = \psi_y - \varphi_K - \pi;$$

$$\psi_y = 0 \quad \text{или} \quad \psi_y = \pi. \quad (15)$$

Это значит, что вертикальная ось действительно должна проходить через точку касания  $K$  и точку  $O$ .

Таким образом, А. Френкелем доказано, что для достижения ударного тока  $I_y$  необходимо включение напряжения в момент времени, когда напряжение проходит через нулевое значение, причем это условие необходимо выполнить при любом значении параметра  $u_p/u_a$ . Если в уравнении (1) подставить  $\psi = \psi_y = 0$  и  $\omega t_y \approx 90^\circ + \varphi_K$ , то получается достаточно точная формула (13) для ударного коэффициента во всем широком диапазоне изменения параметра  $u_p/u_a$  [3], что подтверждено данными таблицы.

В классической книге Арнольда и Лакура [6] приводится точная фаза включения напряжения для достижения ударного тока  $\psi_y = 0$  или  $\psi_y = 180^\circ$  при любом параметре  $\varphi_K$  (или  $u_p/u_a$ ). Доказательство этого не приводится со ссылкой на то, что оно занимает большой объем и при этом требуются многократные расчеты по фор-

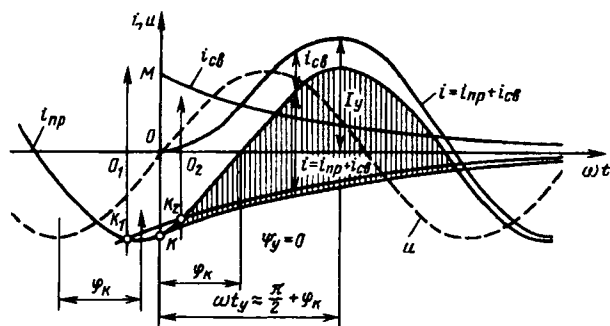


Рис. 3. К геометрическому доказательству А. Френкеля [3] возникновения ударного тока  $I_y$  при включении напряжения в момент прохождения его через нуль:  $u = U\sqrt{2} \sin \omega t$ ;

$$i_{np} = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi_K); \quad i_{cb} = I\sqrt{2} e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{u_p}{u_a}; \quad I_y = I\sqrt{2} \times \\ \times \left[ 1 + e^{-\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_K\right) \frac{u_a}{u_p}} \right]; \quad \varphi_K = \arctg(u_p/u_a)$$

муле (1). Бирманс [8] также без доказательства дает точную фазу включения  $\psi_y = 0$  или  $\psi_y = 180^\circ$ .

В классических книгах Рихтера [9], Лакура и Брагстада [7] и Видмара [11] дается справедливое утверждение о том, что затухающий апериодический свободный ток, являющийся только одной частью переходного тока, максимален, когда включение происходит в момент времени, соответствующий максимуму принужденного (установившегося) тока — второй части переходного тока, т.е. при  $\psi = 90^\circ + \varphi_k$ . Однако это утверждение принципиально ошибочно распространяется на переходный (суммарный) ток, в результате чего и возникает теоретически неточная формула  $\psi_y = 90^\circ + \varphi_k$ , противоречащая строго доказанной (и алгебраически, и геометрически) точной формуле  $\psi_y = 0$  или  $\psi_y = 180^\circ$ .

В отечественной технической литературе по теоретическим основам электротехники строгий математический анализ кривой тока для общего случая ( $R \neq 0$ ) отсутствует, он заменен похожими неточными утверждениями, в результате чего дается теоретически неточная формула  $\psi_y = 90^\circ + \varphi_k$  [10, 13, 17, 19, 21, 26, 28], а также приближенная неточная формула для фазы ударного тока  $\omega t_y \approx 180^\circ$  и менее точная формула (12) для ударного коэффициента. В некоторых книгах по ТОЭ теоретической неточности нет, так как анализ проводится только для случая  $R = 0$  [23, 31 и др.].

В книгах по электрическим машинам и трансформаторам из издания в издание, из десятилетия в десятилетие также без математически строгого доказательства дается теоретически неточная формула для фазы включения  $\psi_y = 90^\circ + \varphi_k$  (вместо точной  $\psi_y = 0$  или  $\psi_y = 180^\circ$ ), теоретически неточная фаза возникновения ударного тока  $\omega t_y = 180^\circ$  (вместо достаточно точной  $\psi_y = 90^\circ + \varphi_k$ ) и менее точная, чем (13), формула (12) для расчета ударного коэффициента [15, 18, 22, 27, 29, 32, 33, 35], которая получается, если в (1) подставить  $\psi_y = 90^\circ + \varphi_k$  и  $\omega t_y = \pi$ . Формально этих неточностей нет в тех книгах, где общий случай  $R \neq 0$  вообще не рассматривается, а рассматривается только случай  $R = 0$  [14, 16, 23].

В известной книге по расчету токов КЗ в электрических системах [20], к сожалению, повторяются все отмеченные теоретические неточности.

В литературе по электрическим аппаратам дается краткий анализ только для случая  $R = 0$ , приводится формула (12) для расчета ударного тока, так как в практических расчетах электродинамических сил условно принято считать  $K_y = 1,8$  [12, 30, 34]. Следует отметить, что у Ю.В. Буткевич при этом дается со ссылкой на Бирманса точная фаза включения  $\psi_y = 0$  или  $\psi_y = 180^\circ$  [12].

Описанное положение с теоретическим изложением рассматриваемого в статье в общем-то не столь большого и важного вопроса объясняется, по-видимому, рядом причин, многие из которых за давностью лет обсуждать не имеет смысла, а другие ясны и без комментариев. Вероятно, что главная причина заключается в том, что теоретические неточности при определении конкретных числовых значений ударных токов, как это следует из таблицы, не слишком велики, чтобы в течение многих десятилетий оказывать негативное влияние на разработку конкретных трансформаторов, реакторов, электрических аппаратов.

Однако представляется, что нет никаких причин и далее оставлять в учебниках и монографиях теоретические неточности и даже ошибки. Ведь более строгое теоретическое изложение занимает, как показано, примерно тот же объем, что и объем традиционного нестрогого изложения. К тому же, могут встретиться и некоторые проблемы (например метрологические), для решения которых непосредственно потребуются точные вычисления. Математически строгий анализ должен оказаться полезным и с педагогической точки зрения, так как студенты и аспиранты могут, помимо прочего, получить некоторый опыт в практическом применении теории функций многих переменных и итерационного метода приближенных вычислений.

Есть и еще один аспект рассматриваемых вопросов. Дело в том, что во всех учебниках, несмотря на достаточно динамичное развитие трансформаторостроения за прошедшие десятилетия (например, предельная мощность трансформаторов в единице увеличилась более чем на порядок и составляет уже 1250 МВ·А), называется ударный коэффициент для трансформаторов малой мощности  $1,2 \div 1,3$ , а большой мощности —  $1,7 \div 1,8$  [16, 22, 27, 29, 32, 35 и др.]. В действительности, как это следует из рис. 4, кривая изменения ударного коэффициента в зависимости от мощности трансформатора достаточно плавная, она не имеет каких-либо особенностей для трансформаторов определенных диапазонов мощности. Ударные коэффициенты для трансформаторов мощностью от 25 кВ·А до 1250 МВ·А без скачков изменяются от 1,15 до 1,96 (диапазон изменения менее плавно изменяющегося параметра  $u_p/u_a$  — от 1,5 до 85). По-видимому, сведения в учебниках об ударных коэффициентах трансформаторов также должны быть скорректированы. Кривые рис. 4 построены по справочным данным [35].

Таким образом, в технической литературе рассматриваемый вопрос предлагается излагать примерно в следующем кратком виде.

При внезапном включении на источник синусоидального напряжения  $u = U\sqrt{2} [\sin(\omega t + \psi)]$

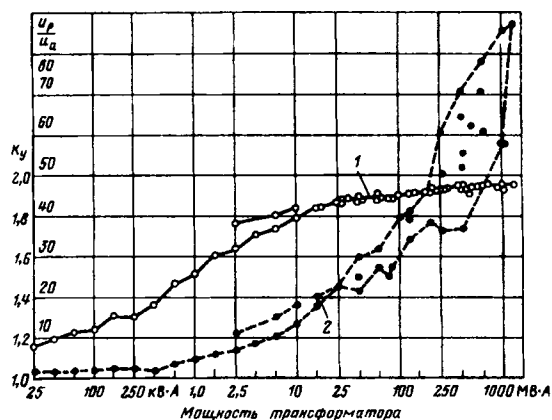


Рис. 4. Ударные коэффициенты  $K_y$  и параметры  $u_r/u_a$  силовых трансформаторов различной мощности (рассчитано по справочным данным [35] масляных трансформаторов производства заводов Москвы, Запорожья, Минска и др.): 1 —  $K_y$ ; 2 —  $u_r/u_a = \omega L/R = \omega t$

последовательной цепи  $RL$  или трансформатора при КЗ ток

$$i = I\sqrt{2} [\sin(\omega t + \psi - \varphi_k) - \sin(\psi - \varphi_k) \exp(-\omega t u_a/u_p)]$$

достигает максимально возможного значения ударного тока  $I_y$  при фазе включения  $\psi_y = 0$  или  $\psi_y = \pi$ , т.е. при прохождении напряжения через нуль, что следует из решения системы двух уравнений  $di/dt = 0$  и  $di/d\psi = 0$  с двумя неизвестными  $\psi_y$  и фазой ударного тока  $\omega t_y$ . Эти уравнения составлены при исследовании на экстремум (максимум) тока как функции двух переменных  $t$  и  $\psi$ . Определение фазы  $\omega t_y$  достижения током значения  $I_y$  возможно приближенным решением (например, итерационным методом) трансцендентного уравнения

$$\cos(\omega t_y - \varphi_k) - \cos \varphi_k \exp(-\omega t_y u_a/u_p) = 0,$$

которое получается при решении системы. Ударный ток  $I_y = I\sqrt{2} K_y$  определяется по общей формуле тока при  $\psi_y = 0$  и  $\omega t = \omega t_y$ . В диапазоне изменения параметра  $u_p/u_a$  от 0,5 до 100, что соответствует силовым трансформаторам, с большой точностью можно пользоваться приближенными формулами

$$\omega t_y \approx \pi/2 + \varphi_k = 90^\circ + \arctg(u_p/u_a), \text{ точность } 1^\circ - 6^\circ;$$

$$K_y \approx 1 + \sin \arctg(u_p/u_a) \exp[\pi/2 + \arctg(u_p/u_a)/(u_a/u_p)],$$

точность 0—0,6%.

При точности не менее 0,5% для  $u_p/u_a > 8$  может быть использована формула

$$K_y \approx 1 + \exp(-\pi u_a/u_p).$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. — М.: Физматгиз, 1963.
2. Машиностроение. Энциклопедический справочник. Т. 1, Кн. 1. — М.: ГНТИ машиностр. лит.-ры, 1947.
3. Френкель А. Теория переменных токов / Пер. с нем. — М.: Л.: ГЭИ, 1933.

4. Силовые трансформаторы. Ч. 5. Стойкость при коротком замыкании. Стандарт МЭК. Публикация 76-5. — М.: Изд-во стандартов, 1980.

5. ГОСТ 11677—85 (СТ СЭВ 1102—86) Трансформаторы силовые. Общие технические условия. — М.: Изд-во стандартов, 1990.

6. Arnold E., La Cour J.L. Die Transformatoren. — Berlin: Springer, 1910.

7. La Cour J.L., Bragstad O.S. Theorie der Wechselstrome. Herausgegeben von Arnold E. — Berlin: Springer, 1910.

8. Briemans J. Überstromen in Hochspannungsanlagen. — Berlin: Springer, 1926.

9. Richter R. Elektrische Maschinen. Bd. 3. Die Transformatoren. — Berlin: Springer, 1932.

10. Круг К.А. Основы электротехники. Т. 2. Теория переменных токов. Изд. 3. — М.: Л.: ГЭИ, 1932.

11. Видмар М. Научные основы электротехники / Пер. с нем. — М.: Л.: Энергетич. изд-во, 1932.

12. Буткевич Ю.В., Михайлов В.В., Ротгауз И.И. Реакторы. — М.: Л.: ГЭИ, 1933.

13. Калантаров П.Л. Теория переменных токов. — Л.: Кубуч, 1934.

14. Костенко М.П., Пиотровский Л.М. Электрические машины. Ч. I. Машины постоянного тока. Трансформаторы. — Л.: Кубуч, 1934.

15. Петров Г.Н. Трансформаторы. Основы теории. — М.: Л.: ГЭИ, 1934.

16. Пиотровский Л.М. Трансформаторы. — Л.: Кубуч, 1934.

17. Машкиллейсон Л.Е. Переходные процессы и перенапряжения в электрических цепях. — М.: Л.: Объед. науч.-техн. изд. НКТП СССР, 1938.

18. Электрические машины. Ч. I. / Г.Н. Петров, Н.В. Горюхов, Ф.А. Горюхинов и др. Под ред. Петрова Г.Н. — М.: Л.: ГЭИ, 1940.

19. Калантаров П.Л., Нейман Л.Р. Теоретические основы электротехники. Ч. 2. Теория переменных токов. — М.: Л.: ГЭИ, 1948.

20. Ульянов С.А. Короткие замыкания в электрических системах. — М.: Л.: ГЭИ, 1949.

21. Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы электротехники. Ч. 2. Цепи с сосредоточенными и распределенными параметрами. — М.: Л.: ГЭИ, 1955.

22. Петров Г.Н. Электрические машины. Ч. I. Введение. Трансформаторы. — М.: Л.: ГЭИ, 1956.

23. Костенко М.П., Пиотровский Л.М. Электрические машины. Ч. I. Машины постоянного тока. Трансформаторы. — М.: Л.: ГЭИ, 1958.

24. Кюпфмюллер К. Основы теоретической электротехники / Под ред. В.Ю. Ломоносова. — М.: Л.: ГЭИ, 1960.

25. Шимони К. Теоретическая электротехника / Под ред. К.М. Поливанова. — М.: Мир, 1964.

26. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. — М.: Л.: Энергия, 1966.

27. Вольдек А.И. Электрические машины. — М.: Л.: Энергия, 1966.

28. Атабеков Г.И. Основы теории цепей. — М.: Энергия, 1969.

29. Васютинский С.Б. Вопросы теории и расчета трансформаторов. — Л.: Энергия, 1970.

30. Основы теории электрических аппаратов / Б.К. Буль и др. Под ред. Г.В. Буткевича. — М.: Высшая школа, 1970.

31. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Т. 1. — М.: Энергия, 1972.

32. Вольдек А.И. Электрические машины. — Л.: Энергия, 1974.

33. Иванов-Смоленский А.В. Электрические машины. — М.: Энергия, 1980.

34. Чунихин А.А. Электрические аппараты. 3 изд. — М.: Энергоатомиздат, 1988.

35. Сергеев Б.Н., Киселев В.М., Акимов Н.А. Электрические машины. Трансформаторы / Под ред. И.П. Копылова. — М.: Высшая школа, 1989.

[29.05.97]

Автор: Лурье Александр Иосифович окончил электромеханический факультет Московского энергетического института в 1958 г. Защитил кандидатскую диссертацию на тему «Исследование и применение математического моделирования магнитных полей рассеяния трансформаторов и реакторов на электропроводящей бумаге» в 1965 г. во Всероссийском электротехническом институте (ВЭИ). Ведущий научный сотрудник ВЭИ.

# Повышение достоверности показаний счетчиков электроэнергии расчетным способом

ПАЗДЕРИН А.В.

*Рассматривается математический метод достоверизации показаний счетчиков электроэнергии в сложной электроэнергетической системе, обеспечивающий соблюдение балансовых соотношений. Показана связь предлагаемого метода с задачей оценки состояния мгновенных установившихся режимов энергосистем и его особенности.*

**Ключевые слова:** энергосистема, показания счетчиков электроэнергии, достоверизация баланса, оценивание состояния

Переход экономики страны на рыночные методы хозяйствования выявил в электроэнергетике серьезные проблемы учета потребляемой электроэнергии и взаиморасчетов за ее использование. Не касаясь проблемы неплатежей за электроэнергию, можно отметить, что в кризисном состоянии оказались не только организационное состояние системы сбыта, но и техническое состояние систем учета электроэнергии не отвечает современным требованиям. На оптовом и розничном рынках электроэнергии становится актуальным создание автоматизированных систем контроля и учета электроэнергии (АСКУЭ), позволяющих повысить точность, достоверность и оперативность получения информации об основном товаре электроэнергетики.

В статье рассматриваются возможности использования математической модели для достоверизации энергораспределения в сложной электрической системе. Такая математическая модель позволяет на основе имеющихся показаний счетчиков электроэнергии повысить точность, достоверность и надежность получения информации по потокам энергии, техническим и коммерческим потерям энергии и локализовать места этих потерь.

Вполне естественно, что при существенном увеличении стоимости электроэнергии многие потребители стремятся занижить показатели, определяющие размер оплаты за нее. Актуальной становится задача выявления хищений электроэнергии, выявления счетчиков, дающих заниженные показания. В проблеме учета электроэнергии следует дополнительно выделить негативные моменты, определяющие большие погрешности учета электропотребления [1, 2]:

большая погрешность счетчиков электроэнергии, их редкие проверки, конструктивные несовершенства и большие возможности по снижению их показаний без видимой порчи;

*The paper considers mathematical method for validating hour-meter readings in a complex electrical power system which ensures maintenance of energy balance correlations. The connection of the method proposed with the problem of estimating the state of electrical power system instantaneous steady state regimes and features of the method are shown.*

**Key words:** electrical power system, hour-meter reading, validation, energy balance, state estimation

большая погрешность трансформаторов тока и напряжения, к которым счетчики электрической энергии подключаются (особенно в режимах с пониженной нагрузкой);

большая погрешность счетчиков при учете электроэнергии, имеющей отклонения от ГОСТ по качеству (несимметрии, несинусоидальность); несовершенство и примитивность учета потерь электроэнергии в электрической сети;

разновременность снятия показаний со счетчиков электроэнергии, затрудняющая оценку энергетических балансов.

Таким образом, задача повышения точности, достоверности и оперативности получения сведений об объемах электроэнергии, распределяемых в электрических сетях и отпускаемых потребителям, становится очень актуальной.

В основу математической модели для достоверизации энергораспределения может быть положен закон сохранения энергии. Электроснабжающие организации получают электроэнергию на высоком напряжении и с помощью своих сетей обеспечивают электроснабжение промышленных и бытовых потребителей. Все потребители оснащены счетчиками электроэнергии. Как правило, расчеты за электроэнергию производятся раз в месяц на основе показаний электросчетчиков [3]. Естественно, что для любого отрезка времени всегда соблюдается закон сохранения энергии:

$$W_{\text{под}} = W_{\text{пот}} + \Delta W, \quad (1)$$

где  $W_{\text{под}}$  — объем электроэнергии, подведенный к рассматриваемой сети;  $W_{\text{пот}}$  — отпущенный потребителям объем электроэнергии;  $\Delta W$  — потери электроэнергии в сети.

В дальнейшем под электроэнергией  $W$  будем понимать активную составляющую энергии.

Если с помощью существующих средств контроля электроэнергии произвести замеры под-

веденной и потребленной электроэнергии, то их разность даст общие потери, обычно называемые отчетными [1]. Эти потери делятся на технические (потери от протекания тока и потери холостого хода) и коммерческие, характеризующие главным образом погрешности измерительной системы [1]:

$$\Delta W = \Delta W_{\text{тех}} \pm \Delta W_{\text{ком}}. \quad (2)$$

Проблему повышения точности и достоверности системы сбора информации по электропотреблению можно решать путем ее технического совершенствования (замена существующих измерительных трансформаторов и счетчиков электроэнергии на более точные, внедрение АСКУЭ). Такой подход связан с большими капитальными вложениями и не решает одну из актуальных проблем — выявление хищений электроэнергии и самодиагностику системы сбора информации по электропотреблению. Поэтому предлагается способ повышения точности и достоверности информации по электропотреблению, основанный на математической обработке показаний имеющейся системы сбора информации. Основная идея такого расчетного способа лежит в использовании закона сохранения энергии применительно ко всей энергосистеме в целом. Иными словами, для любого временного интервала должен существовать баланс между выработанной и потребленной энергией с учетом потерь. Суть метода состоит в том, что для всех счетчиков необходимо найти расчетные значения энергии, проходящей в месте установки счетчика. Расчетное значение энергии, полученное на основании математической модели, будет отличаться от измеренного, но для расчетных значений будет соблюдаться закон сохранения энергии. Для измеренных значений закон сохранения энергии не соблюдается ввиду погрешностей системы сбора информации. Даже у очень точной системы измерений энергии будут присутствовать небалансы, которые обычно списываются на отчетные потери [1].

Из теории информации известно, что оценку погрешности показаний измерительных устройств целесообразно производить на основе минимизации функции взвешенной суммы квадратов ошибок измерений:

$$F = \sum_{i=1}^k a_i (W_i^{\text{изм}} - W_i^{\text{рас}})^2 \rightarrow \min, \quad (3)$$

где  $W_i^{\text{рас}}$  и  $W_i^{\text{изм}}$  — расчетное и измеренное значения энергии  $i$ -го счетчика;  $k$  — общее число счетчиков в схеме.

Весовые коэффициенты в (3) следует принимать обратно пропорциональными дисперсиям ошибок измерений. В связи с тем, что для большинства счетчиков их средние погрешности труд-

но определить или спрогнозировать, при выборе весовых коэффициентов следует использовать механизм экспертных оценок, учитывающий следующие факторы:

- класс точности измерительных трансформаторов тока и напряжения;
- класс точности самого счетчика;
- условия эксплуатации счетчика, наличие зимнего подогрева;
- дату последней поверки;
- средний объем электропотребления в месте установки счетчика.

Для точных приборов весовые коэффициенты должны быть большими, а для плохих счетчиков — малыми, но всегда положительными числами.

Следует отметить, что функция (3) должна быть дополнена условиями, обеспечивающими выполнение закона сохранения энергии.

Для простоты первоначально будем полагать, что технические потери энергии в сети отсутствуют. Схему любой электрической сети можно представить в виде графа. Линии электропередачи и трансформаторы являются ребрами этого графа, а электростанции и подстанции — узлами. Для каждого узла схемы должен выполняться закон сохранения энергии, т.е. притекающая энергия равна вытекающей. В случае, когда для всех узлов расчетной схемы закон сохранения энергии выполняется, он будет выполняться и для всей схемы в целом, и для любого отдельно взятого ее фрагмента. В качестве условия, обеспечивающего соблюдение закона сохранения энергии, следует записать систему уравнений, в которой каждое из уравнений представляет собой первый закон Кирхгофа для расчетных потоков энергии:

$$\sum_{j=1}^N W_{ij}^{\text{рас}} = W_i^{\text{рас}}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

где  $W_i^{\text{рас}}$  — расчетная узловая энергия;  $W_{ij}^{\text{рас}}$  — расчетный поток энергии по ветви;  $N$  — число узлов в рассматриваемом фрагменте схемы сети.

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к минимизации целевой функции (3) при наличии системы ограничений-равенств (4). Используя систему (4), все узловые параметры  $W_i^{\text{рас}}$  в целевой функции (3) можно заменить на линейные  $W_{ij}^{\text{рас}}$ . Взяв производные от (3) по переменным  $W_{ij}^{\text{рас}}$  и приравняв их нулю, получим систему уравнений, решение которой относительно  $W_{ij}^{\text{рас}}$  обеспечивает минимум функции (3):

$$CW_{ij}^{\text{рас}} = B. \quad (5)$$

Число уравнений и число переменных в данной системе будет равно числу связей в схеме замещения сети. В правой части системы (5) присутствует вектор  $B$ , компоненты которого свя-



заны с небалансами в измерениях энергии. Квадратная матрица  $C$  состоит из постоянных коэффициентов, являющихся линейными комбинациями весовых коэффициентов  $a_i$  из (3). Она является слабозаполненной и отражает топологию сети. Каждое из уравнений в (5) соответствует связи  $i-j$  и содержит столько ненулевых элементов, сколько связей имеют два соседних узла  $i$  и  $j$ . Узловые оценки энергии  $W_i$  легко находятся из (4). Полученные расчетные значения  $W_i$  и  $W_{ij}$  удовлетворяют первому закону Кирхгофа. Получающиеся разности между измеренными и расчетными значениями энергии характеризуют погрешности измерительной системы. Данные расчеты позволяют локализовать элементы сети с большими погрешностями учета электроэнергии и оценивать достоверность системы сбора информации по учету электроэнергии, не прибегая к технической проверке и диагностике отдельных счетчиков.

Изложенное является упрощенной формой подхода к достоверизации энергораспределения. Далее следуют пояснения, позволяющие использовать метод для расчетов реальных энергосистем.

**Наблюдаемость энергораспределения и связь с задачей оценки состояния режима мощностей.** Для электроэнергетики хорошо известна задача оценивания состояния установившегося режима энергосистемы по данным телезамеров или контрольного замера [5]. Из теории оценивания известно, что режим системы может быть восстановлен (рассчитан) при достаточном объеме замеров и их правильном размещении в сети. Достоверизацию энергораспределения сложной электрической сети можно также рассматривать как задачу оценивания. В случае, когда в энергосистеме будет недостаточное число счетчиков электроэнергии, невозможно будет найти и расчетные значения потоков энергии. Такую ситуацию можно характеризовать термином «ненаблюдаемость» [5]. При оценивании состояния установившегося режима по данным телезамеров проблема ненаблюдаемости решается путем введения в целевую функцию дополнительных измерений, называемых псевдозамерами. Обычно в качестве псевдозамеров используются данные по узловым нагрузкам, полученные из контрольного замера.

Относительно задачи оценивания энергораспределения следует отметить, что проблема ненаблюдаемости для нее не так актуальна, так как во всех узлах схемы устанавливаются счетчики, контролирующие генерацию электроэнергии и ее отпуск потребителям.

Из теории оценивания известно, что уточнение расчетных величин по сравнению с замеренными (снижение погрешности измерений) возможно только при наличии избыточности из-

мерений [5]. Для оценки энергораспределения избыточность измерений будет появляться в том случае, если помимо всех узловых инъекций энергии будет измеряться хотя бы один переток энергии по линии электропередачи или трансформатору, соответствующему ветви в схеме замещения. Чем больше связей в сети оснащено счетчиками, тем выше будут избыточность системы измерения и точность расчетов энергораспределения. Поэтому следует регулярно производить снятие показаний не только расчетных счетчиков электроэнергии, но и счетчиков технического учета. С точки зрения рассматриваемой математической модели использование дублируемых измерений также повышает точность расчетов.

Введение дополнительных псевдозамеров целесообразно при наличии грубых ошибок в измерениях (заклинивание счетчика), при потере измерений и при наличии ненаблюдаемых фрагментов сети. Источником данных для получения псевдозамеров может быть контрольный замер мгновенных электрических параметров (токи, мощности, напряжения) установившегося режима. Из контрольного замера установившегося режима могут быть получены любые данные по потокам активной и реактивной мощности. В связи с этим в задаче достоверизации энергораспределения удобно от данных по энергии перейти к данным по мощностям. Такой переход весьма прост и осуществляется путем деления данных по объемам замеренной энергии на время  $t$ , в течение которого данный объем энергии был зафиксирован:

$$P_{\text{ср}} = W/t. \quad (6)$$

Дальнейшая достоверизация измерений будет выполняться в пространстве средних мощностей. Все предшествующие рассуждения и формулы для достоверизации измерений остаются действительными и для мощностей. Точно так же как для измерений энергии не выполнялись узловые балансы, так и для полученных из (6) средних мощностей узловые балансы выполняться не будут. Восстановив расчетным способом баланс для мощностей, можно сделать обратный подход от мощности к энергии. Полученные расчетные значения потоков энергии будут удовлетворять закону сохранения энергии и первому закону Кирхгофа для каждого узла.

Таким образом, возможен переход от задачи достоверизации энергораспределения к задаче достоверизации средних мощностей, полученных на основании показаний счетчиков электроэнергии. Достоверизация мощностей имеет глубокую степень научной и практической проработки [4, 5]. Одна из проблем при обработке данных счетчиков электроэнергии — одновременность сня-

тия их показаний. Переход к средним мощностям позволяет выполнять балансовые расчеты на основе асинхронно снятых измерений, если при снятии показаний счетчиков фиксировать время измерения. Поделив объем энергии на временной интервал его измерения, всегда можно определить среднее значение мощности, на основании которого производятся расчеты.

Следующим положительным моментом перехода к оценке средних мощностей является возможность достоверизации реактивной энергии совместно с активной. Кроме того, данные контрольного замера мощностей при обработке средних мощностей позволяют учитывать псевдозамеры узловых модулей напряжения. В результате оценки средних мощностей, получаемых на основе показаний счетчиков энергии, может быть восстановлен режим мощностей во всей схеме, т.е. могут быть получены перетоки мощности по связям, на которых счетчики энергии не были установлены. Таким образом, задача достоверизации энергораспределения сложной сети позволяет не только произвести уточнение показаний счетчиков, исходя из первого закона Кирхгофа, но и получить оценки потоков энергии во всех остальных элементах сети, в которых счетчики активной и реактивной энергии отсутствуют.

Важное значение при оценивании состояния уделяется выявлению «плохих» измерений. Известно, что один плохой замер может «испортить» множество хороших, точных, замеров. Существуют расчетные методы отбраковки плохих (ложных) замеров [4]. С точки зрения задачи достоверизации энергораспределения выявление ложных замеров может иметь еще большее значение, так как счетчики электроэнергии подвержены частым поломкам и заклиниваниям.

Таким образом, задачу достоверизации энергораспределения можно свести к хорошо известной задаче оценки состояния установившегося режима и использовать в качестве псевдозамеров данные достоверизации контрольного замера.

**Учет топологии сети.** Следует указать особенности задачи оценки энергораспределения по сравнению с задачей оценки установившегося режима электрической сети. Оценка установившегося режима электрической сети по данным мощностей производится для фиксированного момента времени, для которого известна топология электрической сети. На основе топологии сети определяется схема замещения и оценивание сводится к определению лучшего режима, соответствующего текущим замерам. Оценивание режима энергораспределения предполагает рассмотрение задачи на длительных интервалах времени — неделя, месяц, квартал, год. Результатом расчетов являются потоки энергии по связям и узловым инъекциям энергии, удовлетворяющие первому закону Кирхгофа. Естественно, что на

длительных интервалах времени возможны изменения топологии. Такие изменения связаны с аварийными, ремонтными и эксплуатационными отключениями линий электропередачи, трансформаторов и другого оборудования. Таким образом, достоверизацию энергораспределения приходится производить в условиях неопределенности топологии электрической сети и схемы ее замещения.

Задача оценки энергораспределения на длительных интервалах времени должна решаться без учета второго закона Кирхгофа в связи с неопределенностью топологии сети. При анализе сложных энергосистем, имеющих свое структурное деление, интерес вызывают не потоки энергии по отдельным связям, а суммарные перетоки энергии между различными частями энергосистемы, т.е. перетоки по сечениям. Эти перетоки определяются не вторым, а первым законом Кирхгофа, так как они определяются суммарными балансами рассматриваемых подсистем.

**Учет потерь.** Следующая особенность задачи оценки энергораспределения (по сравнению с задачей оценки установившегося режима) заключается в учете потерь. В связи с тем, что в течение расчетного отрезка времени перетоки мощности на любом элементе отличаются от средних, получаемых по показаниям счетчиков, расчет потерь мощности необходимо производить с учетом графика загрузки элемента. График токовой загрузки элементов обычно неизвестен, в связи с чем при некоторых допущениях нагрузочную составляющую технических потерь мощности можно вычислять, используя следующую формулу [6]:

$$\Delta P_{ij} = \frac{\bar{P}_{ij}^2 + \sigma P_{ij}^2 + \bar{Q}_{ij}^2 + \sigma Q_{ij}^2}{U^2} R_{ij}, \quad (7)$$

где  $\bar{P}_{ij}$  и  $\bar{Q}_{ij}$  — математические ожидания перетоков мощности, получаемые на основе показаний счетчиков;  $\sigma P_{ij}^2$  и  $\sigma Q_{ij}^2$  — дисперсии этих перетоков [6].

Для оценки дисперсий указанных величин целесообразно использовать данные сезонных суточных замеров или данные телеметрии. Следует отметить, что учет потерь вносит нелинейность в задачу достоверизации энергораспределения. Так же как и при оценке состояния установившегося режима мощностей, учет такой нелинейности производится путем организации итерационного процесса, уточняющего решение. На каждой итерации пересчитываются расчетные значения перетоков, а потери в связях разносятся в соседние узлы. Имея значения полных (отчетных) и технических потерь [1], из (2) можно рассчитать коммерческие потери. Более того, суммарные коммерческие потери могут быть распределены между отдельными элементами схемы

сети. На основании этих данных можно оценить убытки энергоснабжающей организации от несовершенства системы учета электроэнергии. Локализовав узлы с наибольшими коммерческими потерями, можно организовать комплекс технических мероприятий по проверке существующей системы учета и контроля электроэнергии и по выявлению хищений электроэнергии.

**Результаты тестовых расчетов.** Предлагаемая методика реализована в виде исследовательской программы, работающей в составе комплекса расчета установившихся режимов RASTR, широко внедренного в отечественной электроэнергетике. Единая система подготовки информации позволяет совместно использовать данные о параметрах схемы замещения и данные контрольного замера мощностей с параметрами электропотребления. Предельный объем расчетной схемы — 600 узлов. Расчеты по достоверизации энергораспределения производились на основе показаний счетчиков за декабрь 1995 г. для сетевого предприятия, насчитывающего 130 подстанций 110 кВ.

Разработанная методика обеспечивает высокую точность и сходимость. Для достижения минимума целевой функции (3) требуется пять — шесть итераций. На основании расчетов измеренные потери (1) были разделены на технические и коммерческие (2). С учетом среднего уровня тарифа на уровне декабря 1995 г. коммерческие потери только за один месяц составили более одного миллиарда рублей. Основные причины такого высокого уровня коммерческих потерь — хищения электроэнергии и низкое техническое состояние системы учета электроэнергии.

**Выводы.** 1. Достоверизация показаний счетчиков электрической энергии может производиться путем сведения ее к задаче оценки состояния средних за расчетный период мощностей. Это позволяет производить балансовые расчеты по энергораспределению на основе одновременно снятых измерений.

2. Для повышения достоверности информации по энергораспределению система сбора информации должна быть избыточной. Необходимо периодически производить снятие показаний всех имеющихся счетчиков электроэнергии, в том числе и технического учета.

3. Предложенный метод достоверизации энергораспределения позволяет разделить технические и коммерческие потери, локализовать участки с наибольшими коммерческими потерями и расчетным путем осуществлять диагностику системы учета электроэнергии.

4. Методика может применяться:

в объединенных энергетических системах для достоверизации обменных потоков, балансов и потерь энергии в отдельных энергосистемах;

в районных энергосистемах для выявления плохих счетчиков, коммерческих потерь и хищений электроэнергии;

на крупных промышленных предприятиях, имеющих сложную схему сети, для достоверизации энергопотребления и организации хозрасчета с абонентами;

в автоматизированных системах контроля и учета электропотребления для обеспечения балансов энергии для любого момента времени.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Потери электроэнергии в электрических сетях энергосистем / В.Э. Воротников, Ю.С. Железко, В.Г. Казанцев и др. Под ред. В.Н. Казанцева. — М.: Энергоатомиздат, 1983.
2. Электротехнический справочник. Кн 1. Т. 3. Производство, передача и распределение электрической энергии / Под ред. В.Г. Герасимова. — М.: Энергоиздат, 1982.
3. Правила пользования электрической и тепловой энергией. Изд. 3. Министерство энергетики и электрификации СССР. — М.: Энергоиздат, 1982.
4. Оценивание состояния в электроэнергетике / А.З. Гамм, Л.Н. Герасимов, И.И. Голуб и др. Под ред. Ю.Н. Руденко. — М.: Наука, 1983.
5. Гамм А.З. Статистические методы оценивания состояния электроэнергетических систем. — М.: Наука, 1976.
6. Арзамасцев Д.А., Липес А.В. Снижение технологического расхода энергии в электрических сетях. — М.: Высшая школа, 1989.

[10.01.97]

*Автор: Паздерин Андрей Владимирович окончил электротехнический факультет Уральского политехнического института в 1982 г. В 1987 г. защитил кандидатскую диссертацию по теме «Синтез систем противоаварийного управления для обеспечения статической устойчивости энергосистем». Доцент кафедры автоматизированных систем Уральского государственного технического университета.*

# Параметрическое управление преобразователями с дозированной передачей энергии в нагрузку

ЧАПЛЫГИН Е.Е., АЛЕШИН М.Л., НИКОЛЕНКО М.П.

Рассмотрено управление преобразователем постоянного напряжения с дозированной передачей энергии в нагрузку и индуктивным накопителем энергии. Рекомендовано комбинированное параметрическое управление, при котором ток нагрузки вычисляется на основе измерений выходного напряжения либо времени проводимости диода. Исследовано влияние различных видов нагрузки на регулировочные характеристики, предложены способы управления с повышенной точностью и быстродействием для любого вида нагрузки, для реализации которых достаточно применение однокристальных микроконтроллеров.

Ключевые слова: преобразователи постоянного напряжения, дозированная передача энергии, системы параметрического управления, управление, быстродействие

Развитие микропроцессорной техники для управления вентильными преобразователями позволяет использовать новые принципы, основанные на вычислительных возможностях микропроцессора, в том числе параметрическое управление [1, 2]. При его осуществлении возможно достичь выходного тока преобразователя или реализовать внешнюю характеристику заданной формы без применения датчиков тока. Даже наиболее совершенные датчики тока обладают погрешностью измерений (порядка 2% от максимального значения измеряемого тока). При работе преобразователя с меньшими выходными токами отношение погрешности измерения к текущему значению тока возрастает обратно пропорционально. Применение параметрического управления позволяет в значительной мере устранить этот недостаток. При параметрическом управлении значения выходного тока вычисляются микропроцессором на основе измерения напряжений, временных интервалов, а также данных о параметрах силовой схемы преобразователя, при этом точность измерения токов не только не уступает показателям датчиков тока, но при малых выходных токах преобразователя значительно выше, чем в традиционных системах с датчиками тока.

В системах электропитания с искусственными внешними характеристиками преимуществами обладают преобразователи с дозированной передачей энергии в нагрузку [3], в которых происходит естественная защита в режиме короткого замыкания в нагрузочной цепи, а переходные процессы протекают с меньшими отклонениями от заданных величин. С появлением мощных

*A control of a DC converter with pulse transfer of energy to load as well as a control of an inductive energy storage are considered. A combined parametric control when load current is calculated on the basis of measuring output voltage or diode conducting time is recommended. The influence of various kinds of load on control characteristics is investigated. Methods of control with higher accuracy and speed of response are proposed. To realize the method proposed the use of monocrystal microcontroller is sufficient.*

Key words: DC converter, pulse energy transfer, parametric control system, control, speed of response

силовых транзисторов, приборов типа MOS FET и IGBT выявились преимущества дозированной передачи энергии в системах с накопительным индуктивным элементом. На рис. 1,а приведена схема преобразователя постоянного напряжения, относящаяся к регуляторам напряжения типа III, называемым также обратноточными преобразователями [4]. Схема обеспечивает дозированную передачу энергии при работе в режиме прерывистого магнитного потока.

**Принцип действия.** Работа схемы в режиме прерывистого тока разделяется на два этапа. На первом этапе транзисторный ключ замкнут, диод разомкнут, ток в индуктивности  $L$  за временной интервал  $\gamma I_{\text{п}} = \gamma/f$ , где  $f = 1/T_{\text{п}}$  — выходная частота

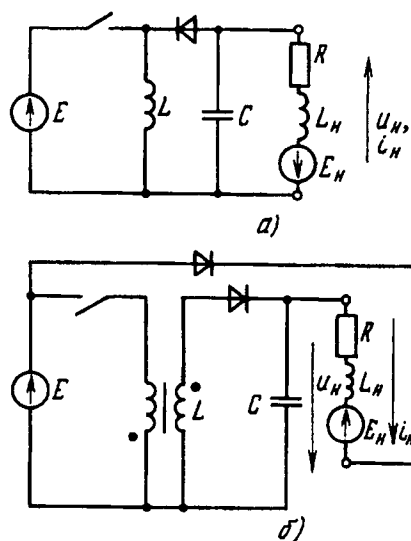


Рис. 1. Преобразователь постоянного напряжения

преобразователя, нарастает по линейному закону до величины

$$I_m = \frac{E\gamma}{Lf}. \quad (1)$$

Мощность, потребляемая от источника,

$$P_0 = \frac{LI_m^2 f}{2} = \frac{E^2 \gamma^2}{2Lf} \quad (2)$$

передается в нагрузку, и при отсутствии потерь активная мощность в нагрузке  $P_n = P_0$ , а внешняя характеристика преобразователя имеет вид гиперболы:

$$\frac{U_{н.ср}}{E} = \frac{E\gamma^2}{2LfI_{н.ср}}. \quad (3)$$

Таким образом передача энергии в нагрузку дозируется накопительным элементом  $L$ .

На втором этапе длительностью  $(1-\gamma)/f$  ключ размыкается и энергия, накопленная в индуктивности, передается в нагрузку и частично в конденсатор. После рассеяния индуктивной энергии диод запирается и продолжается передача энергии от конденсатора в нагрузку. Условием режима прерывистого тока является выражение  $t_n \leq \frac{1-\gamma}{f}$ , где  $t_n$  — длительность проводящего состояния диода. Значение  $t_n$  зависит от нагрузки и является важнейшей величиной при осуществлении параметрического управления [2].

Комбинированное управление. В [2] отмечено, что параметрическое управление вентильного преобразователем рис. 1 может быть основано на определении тока  $I_{н.ср}$  двумя способами:

1. Параметрическое управление по внешней характеристике (в более общем виде — по выходному напряжению), когда ток рассчитывается по выражению (3) или аналогичным зависимостям. Погрешности при расчете тока  $\Delta I_{н.ср}$ , вызванные погрешностью в измерении напряжения  $\Delta U_n$ , минимальны в верхней части внешних характеристик;

2. Параметрическое управление по длительности проводящего состояния диода основано на вычислении тока при измерении  $t_n$ . В верхней части внешних характеристик, а также при малых токах длительность  $t_n$  снижается, увеличиваются погрешности  $\Delta t_n$  измерения  $t_n$ , вызывающие погрешности при расчете тока  $\Delta I_{н.ср}$ .

Поэтому в общем случае оптимальным является комбинированное параметрическое управление, при котором из двух описанных способов оперативно выбирается тот, который обеспечивает большую точность. Задачей данной работы является анализ электромагнитных процессов в преобразователе при различном характере нагрузки с целью детальной проработки способов параметрического управления для достижения высокой точности и быстродействия управления.

Работа ориентирована на применение наиболее распространенных однокристалльных микроконтроллеров, в том числе восьмиразрядных, например KM1816BE51.

**Метод анализа.** Из различных способов анализа электромагнитных процессов в преобразователе нами выбрано численное решение [5] на основе резистивных схем замещения при использовании языка MATHCAD. Данное решение позволяет при сравнительно небольших затратах времени на программирование получить как временные диаграммы токов и напряжений, так и интегральные параметры; коммутация ключей моделируется автоматически. Расчет установившегося режима производится при варьировании начальных условий на основе теории планирования эксперимента (метод Бокса—Уилсона) [6]. Малое время, затрачиваемое на расчет одного периода повторения, позволяет достичь высокой производительности расчетов в диалоговом режиме.

**Режимы работы преобразователя.** Можно выделить шесть характерных режимов работы вентильного преобразователя, расчет которых производится для схемы замещения рис. 2, представляющей часть схемы, участвующую в обмене энергии между индуктивностью  $L$ , конденсатором  $C$  и нагрузкой.

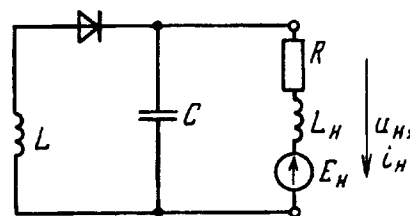


Рис. 2. Расчетная схема замещения

**Режим 1** — большое значение емкости  $C$ , при котором напряжение  $u_n$  не имеет пульсаций, как и ток  $i_n$ . Ток в индуктивности  $L$  спадает по линейному закону в течение интервала  $t_n$ :

$$\frac{t_n}{T_n} = \frac{2LI_{н.ср}f}{E\gamma} = \sqrt{2Lf/R_3}, \quad (4)$$

где  $R_3 = U_{н.ср}/I_{н.ср}$ .

Режим 1 обладает свойством инвариантности: при увеличении мощности источника  $P_0$  в  $k$  раз токи и напряжения в цепи рис. 2 увеличиваются в  $\sqrt{k}$  раз, временные интервалы  $t_n$  не изменяются, если неизменна величина  $R_3$ .

Внешние характеристики (рис. 3,а) описываются выражением (3), вся активная мощность поступает в нагрузку на постоянной составляющей. Из условия обеспечения режима прерывистого тока  $\gamma \leq 1 - t_n f$ , тогда из (3) и (4) получим уравнение ограничительной характеристики —

$$\frac{U_{н.ср}}{E} = \frac{E}{2LfI_{н.ср}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2LfI_{н.ср}}{U_{н.ср}}} \right)^2, \quad (5)$$

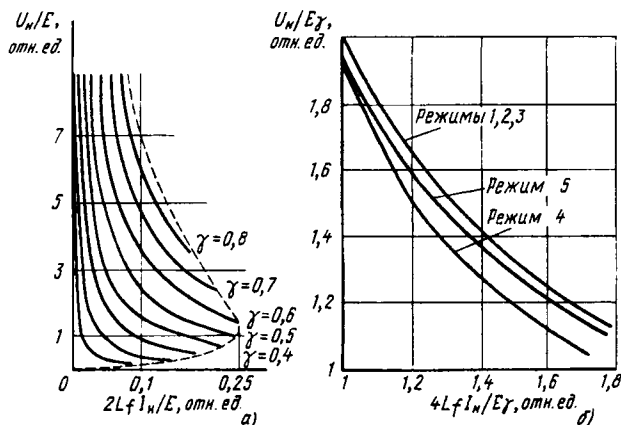


Рис. 3. Внешние характеристики преобразователя (а, б) и ограничительная характеристика (а)

показанной на рис. 3,а.

Недостатком режима 1 является большое значение емкости конденсатора, ухудшающее динамические показатели преобразователя. При технологическом коротком замыкании в нагрузке энергия конденсатора передается в нагрузочную цепь.

Режим 2 — емкость конденсатора  $C$  ограничена, но сглаживающие свойства нагрузки достаточны для подавления пульсаций в выходном токе:  $i_n = I_{н.ср}$ . Мощность в нагрузке выделяется только на постоянной составляющей, поэтому внешняя характеристика описывается выражением (3).

Режим 2 также обладает свойством инвариантности, при уменьшении  $R_3$  увеличиваются пульсации, растет интервал  $t_n$ . По мере роста пульсаций отличие зависимости  $t_n$  в режиме 2 от выражения (1) становится заметным (см. табл. 1). Временные диаграммы  $u_n$  и  $i_n$  в режиме 2 рассчитаны для режима  $\gamma=0,5$ ;  $R_3=8Lf$ ;  $E=200$  В и приведены на рис. 4,а. На этих диаграммах резонансная частота  $f_p=0,5f$ , такой выбор частот соответствует компромиссу между стремлением к получению невысокого уровня пульсаций на нагрузке и минимизацией энергии, запасенной в конденсаторе  $C$ .

Режим 3 —  $LE$ -нагрузка. Активная мощность в нагрузке выделяется только на постоянной составляющей, и внешняя характеристика соответствует выражению (3). Режим обладает свойством инвариантности, но при снижении значения  $R_3$  интервал  $t_n$  отличается от той же величины в режимах 1 и 2 (см. табл. 1). Временные диаграммы приведены на рис. 4,б.

Таблица 1

Режим	Значения $t_n/T_n$ при $R_3/2Lf$ , равных							
	1600	1000	400	100	64	16	4	3
1	0,025	0,032	0,050	0,100	0,125	0,250	0,500	0,577
2	0,025	0,032	0,050	0,100	0,125	0,241	0,462	0,513
3	0,025	0,032	0,050	0,100	0,125	0,242	0,450	0,528
4	0,025	0,032	0,050	0,100	0,125	0,244	0,456	0,517
5	0,025	0,032	0,050	0,100	0,125	0,244	0,450	0,506

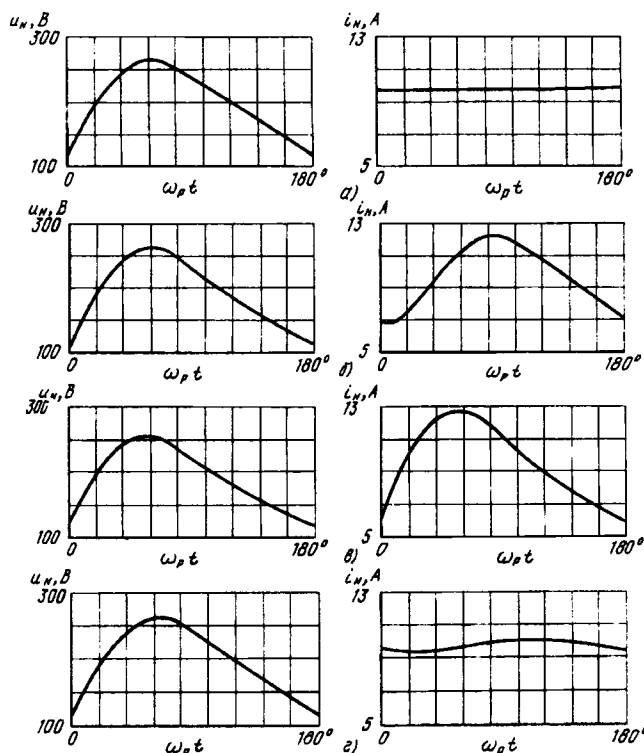


Рис. 4. Напряжение и ток нагрузки в различных режимах

Режим 4 —  $R$ -нагрузка. Поскольку напряжение  $u_n$  можно представить в виде разложения в ряд Фурье

$$u_n = U_{н.ср} + \sum_{n=1,2,3}^{\infty} \sqrt{2} U_{nn} \sin(n\omega - \psi_n),$$

где  $\psi_n$  — сдвиг  $n$ -й гармоники напряжения относительно начала отсчета,  $\omega=2\pi f$ , то активная мощность, выделяемая в нагрузке, равна

$$P_n = \frac{U_{н.ср}^2}{R} + \frac{1}{R} \sum_{n=1,2,3}^{\infty} U_{nn}^2 = P_0.$$

В силу этого внешние характеристики преобразователя, связывающие постоянные составляющие тока и напряжения нагрузки, идут ниже зависимостей, определяемых формулой (3), причем различие усиливается при меньших  $R_3$ , т.е. при увеличении пульсаций. На рис. 3,б представлены внешние характеристики преобразователя в различных режимах.

Зависимость интервала  $t_n$  от характера нагрузки также проявляется при уменьшении  $R_3=R$ , см. табл. 1; режим 4 также обладает инвариантностью. Временные диаграммы показаны на рис. 4,в.

Режим 5 —  $RL$ -нагрузка. При известном разложении  $u_n$  в ряд Фурье [см. выражение (6)] баланс активных мощностей в нагрузке описывается выражением

$$P_H = \frac{U_{H,cr}^2}{R} + \sum_{n=1,2,3}^{\infty} \frac{U_{Hn}^2 \cos \varphi_k}{\sqrt{R^2 + n^2 4\pi^2 L_n^2 f^2}} = P_0.$$

При больших  $R_3=R$  нагрузка имеет характер, близкий к активному, и внешняя характеристика в режиме 5 совпадает с характеристикой в режиме 4 (рис. 3,б), впрочем в этой области различие между ходом внешних характеристик в различных режимах невелико в силу малости пульсаций. По мере уменьшения значения  $R_3$  индуктивное сопротивление играет все большую роль, ток нагрузки сглаживается и внешняя характеристика постепенно приближается к зависимости (3). В зависимости от  $L_n$  степень отклонения внешней характеристики от формулы (3) может изменяться, выбор  $L_n$  позволяет ограничить выделение мощности в нагрузке по переменной составляющей на любом заданном уровне. Работа на цифровой модели преобразователя (см. выше) позволяет найти требуемое значение  $L_n$  экспериментально, используя оптимизационные алгоритмы теории планирования эксперимента.

Режим 5 также является инвариантным, значения  $t_n$  в этом режиме при  $L_n=1,2L$  приведены в табл. 1., временные диаграммы приведены на рис. 4,з.

**Режим 6 — RLE-нагрузка (общий случай).** В зависимости от соотношения  $E_H$  и  $R$  доля активной мощности, передаваемой в нагрузку на постоянном токе, может распределяться различным образом

$$P_{H,п} = I_{H,cr} E_H + I_{H,cr}^2 R.$$

В зависимости от соотношения слагаемых в правой части процессы в преобразователе либо приближаются к режиму 3, либо к режиму 5, также ведут себя и внешние характеристики, рис. 3,б. В связи с этим режим не обладает свойством инвариантности: одни и те же значения  $R_3$  могут быть получены при различных сочетаниях  $R$  и  $E_H$ ; кроме того, величина  $E_H$  задается внешней цепью и не зависит от подводимой к нагрузке активной мощности.

**Ограничительная характеристика.** Если характер нагрузки изменяет ход внешних характеристик и значение величины  $t_n$  в той мере, которую необходимо принимать во внимание при создании параметрического управления, то влияние нагрузки на ход ограничительной характеристики, разделяющей режимы прерывистого и непрерывного токов, можно считать незначительным. Поскольку ограничительная характеристика зависит от выполнения условия  $1-t_n < \gamma/f$ , а величина  $t_n$  в зависимости от характера нагрузки меняется слабо (см. табл. 1), можно полагать, что незначительны и отклонения ограничительной характеристики от зависимости (5). Поэтому при любом из режимов во внешней

характеристике преобразователя имеется область малых напряжений  $U_{H,cr}$ , где рабочая область прерывистых токов резко сужается (см. рис. 3,а). Для исключения работы преобразователя в этой области в нагрузочную цепь может быть введена противо-ЭДС [2], возможная модификация преобразователя в этом случае приведена на рис. 1,б. В [4] рассмотрены схемные способы уменьшения перенапряжений на транзисторном ключе, обусловленных наличием индуктивностей рассеяния. Схема замещения рис. 2 при учете коэффициента трансформации справедлива.

Таким образом, можно заключить, что режим 6 является наиболее характерным для рассматриваемых преобразователей при использовании их в электроприводе постоянного тока и в области электротехнологии.

**Параметрическое управление по напряжению** основано на выражение (3) либо на зависимостях, близких к (3). Погрешности в рассчитанном значении тока определяются по (3):

$$\frac{\Delta I_{H,cr}}{I_{H,cr}} = 2 \frac{\Delta \gamma}{\gamma} - \frac{\Delta U_{H,cr}}{U_{H,cr}} + 2 \frac{\Delta E}{E} - \frac{\Delta L}{L}. \quad (7)$$

Помимо этого при выполнении вычислений могут возникнуть дополнительные погрешности, при рациональном построении вычислителя их величина должна быть несущественной по сравнению с составляющими правой части выражения (7). Управление по напряжению, как правило, с достаточной точностью может считаться инвариантным.

Измерение среднего значения  $u_H$  с помощью интегрирующих АЦП затруднено, поскольку такие АЦП либо имеют низкую точность, либо — при использовании АЦП с двухтактным интегрированием — интервал обработки информации намного превышает период повторения преобразователя, что снижает быстродействие системы управления. Поскольку в цепи нагрузки имеется интегрирующий элемент — конденсатор  $C$ , то можно заменить управление по средним значениям  $U_{H,cr}$  измерением мгновенных значений  $u_H$  в определенные моменты времени, например,  $U_{H,min}$  при размыкании ключа в схеме рис. 1, либо  $U_{H,max}$ , которое может выделяться пиковым детектором; аналого-цифровое преобразование осуществляется неинтегрирующим АЦП.

Зависимость  $I_{H,cr}=f(U_{H*})$  при  $\gamma=\gamma_1=\text{const}$ , где  $U_{H*}$  — значение  $u_H$  в определенный момент времени, имеет характер, близкий к (3), но заметно отличается количественно. Аналитическое определение этой зависимости возможно только в виде трансцендентных уравнений, решение которых требует значительных затрат машинного времени, поэтому зависимость  $I_{H,cr}=f(U_{H*})$  записывается в виде таблицы в ПЗУ контроллера. Алгоритм работы следующий: после ввода

$U_{н*}$  при  $\gamma \neq \gamma_1$  величина  $U_{н*}$  умножается на  $\gamma_1/\gamma$ , по таблице в ПЗУ находим ток, значение которого затем делим на величину  $\gamma_1/\gamma$ . Однако при применении простых микроконтроллеров точная реализация такого алгоритма может потребовать больших затрат времени (промежуточные вычисления в двухбайтовом формате, деление с помощью таблиц и т.д.), поэтому перспективен иной принцип построения управления.

В контроллер вводятся два значения  $u_n$ :  $U_{н\min}$  и  $U_{н\max}$ . Среднее значение  $u_n$  определяется по формуле

$$U_{н.ср} = \frac{1}{2}(U_{н\min} + U_{н\max}). \quad (8)$$

Затем расчет осуществляется аналитически по зависимости (3). Погрешности способа управления зависят от точности выражения (8). В табл. 2 приведены данные, позволяющие судить об этом; данные относятся к той части внешних характеристик, в которых целесообразно осуществление управления по напряжению. Возникающая погрешность может быть уменьшена при умножении вычисленного тока на поправочные коэффициенты в соответствии с данными табл. 2, значения коэффициентов зависят от  $R_3$  и, следовательно, от  $t_n$ .

Таблица 2

Режим	Значения $\frac{U_{н\min} + U_{н\max}}{2U_{н.ср}}$ при $\frac{R_3}{2Lf}$ равных					
	1600	1000	400	100	64	16
3	1,0000	1,0000	1,0000	0,9985	0,9987	0,9775
4	1,0005	1,0016	1,0042	1,0175	1,0275	0,985
5	1,0000	1,0011	1,0038	1,0170	1,0268	0,985

При необходимости большей точности вычислений в ПЗУ могут быть записаны зависимости  $I_{н.ср} = f(U_{н*}, \gamma)$  для каждого  $\gamma$ . Емкость памяти для записи подобной таблицы очень велика (64 килобайта в случае, если  $U_{н*}$ ,  $\gamma$  и  $I_{н.ср}$  имеют байтовый формат). Способы снижения емкости памяти в подобных системах рассмотрена ниже.

Параметрическое управление по временному интервалу основано на выражении (4) либо на близких ему зависимостях. Погрешности в рассчитанном значении тока определяются по (4):

$$\frac{\Delta I_{н.ср}}{I_{н.ср}} = \frac{\Delta t_n}{t_n} + \frac{\Delta \gamma}{\gamma} + \frac{\Delta E}{E} - \frac{\Delta L}{L}. \quad (9)$$

Если зависимости  $I_{н.ср} = f(\gamma)$  при  $t_n = \text{const}$  выражены слабо, режим может считаться инвариантным и алгоритм управления заключается в следующем: после ввода значения  $t_n$  в текущем периоде повторения преобразователя по зависимости  $\sqrt{\frac{1}{2LfR_3}} = f(t_n)$  находится величина  $\sqrt{1/(2LfR_3)}$ , ток

нагрузки в соответствии с (3) рассчитывается по формуле

$$I_{н.ср} = E\gamma \sqrt{\frac{1}{2LfR_3}}. \quad (10)$$

Однако, как показано выше, при работе на  $RLE$ -нагрузку режим не является инвариантным, поэтому для получения большей точности обработки информации в ПЗУ необходимо записать таблицу функции  $I_n = f(t_n, \gamma)$  для всех значений  $\gamma$ . Для уменьшения емкости подобной таблицы могут использоваться различные интерполяционные методы, в том числе основанные на методах теории планирования эксперимента [6].

В этом случае двоичные  $n$ -разрядные коды  $t_n$  и  $\gamma$  разбиваются на  $(n-q)$  старших разрядов и  $q$  младших разрядов, при этом  $\gamma = 2^q \gamma_{ст} + \gamma_{мл}$ , а  $t_n = 2^q t_{п.ст} + t_{п.мл}$ . В таблицу А заносятся значения тока  $I_0(\gamma_{ст}, t_{п.ст})$  в точках, где  $\gamma_{ст}$  и  $t_{п.ст}$  — целые числа, а  $\gamma_{мл} = 2^{q-1}$ ,  $t_{п.мл} = 2^{q-1}$ . Обозначим  $\gamma'_{мл} = \gamma_{мл} - 2^{q-1}$ ,  $t'_{п.мл} = t_{п.мл} - 2^{q-1}$ . Значение тока  $I_{н.ср}$  находим с помощью уравнения регрессии для двух факторов  $\gamma$  и  $t_n$ . Поскольку зависимости (4) имеют линейный характер, первый порядок уравнения регрессии обеспечивает высокую точность:

$$I_{н.ср} = I_0 + K_\gamma \gamma'_{мл} + K_t t'_{п.мл} + K_{\gamma t} \gamma'_{мл} t'_{п.мл}. \quad (11)$$

Коэффициенты  $K_\gamma(\gamma_{ст}, t_{п.ст})$ ,  $K_t(\gamma_{ст}, t_{п.ст})$ ,  $K_{\gamma t}(\gamma_{ст}, t_{п.ст})$  определяют с помощью активного факторного эксперимента и записываются в ПЗУ в таблицах В, С, D. При  $n=8$ ,  $q=4$  и байтовом формате выходной величины суммарная емкость четырех таблиц 2 Кбайт. Расчет по формуле (11) осуществляется микропроцессором за весьма малый промежуток времени.

Отметим, что при параметрическом управлении по напряжению применение интерполяции в силу нелинейности зависимостей требует использования уравнений регрессии более высоких порядков. Порядок уравнения определяется диапазоном изменения входных факторов и требованиями к точности.

**Быстродействие и точность параметрических систем управления.** Структурная схема программы при комбинированном параметрическом управлении приведена в [2]. При применении микроконтроллера КМ1816ВЕ51 полное время выполнения программы при комбинированном управлении не превышает 120 мкс [разработан вариант при использовании зависимостей (3) и (8) при работе с управлением по напряжению и (11) при управлении по временному интервалу]. При  $f=10$  кГц это обеспечивает частоту управления преобразователем 5 кГц, что является предельным значением частоты управления при использовании вычислительных устройств.



Точность параметрического управления определяется выражениями (7) и (9), при этом для каждого ввода измеренных значений  $u_n$ ,  $t_n$ ,  $\gamma$  выбирается способ, обеспечивающий наименьшие погрешности. Малая величина индуктивности накопительного элемента  $L$  позволяет использовать высокостабильные сердечники и снизить  $\Delta L/L$ . Влияние отношения  $\Delta E/E$  может быть практически устранено при использовании величин, пропорциональных  $E$ , в качестве опорных напряжений в АЦП интерфейса.

Приращения  $\Delta u$  и  $\Delta t_n$  обусловлены главным образом свойствами силовых полупроводниковых приборов, при неоправданном увеличении частоты  $f$  погрешности  $\Delta I_{н.ср}$  за счет  $\Delta u$  и  $\Delta t_n$  возрастают.

Расчеты, проведенные для преобразователя мощностью 10 кВт, показали, что погрешности измерения выходного тока не превышают 2% его максимального значения. Экспериментальные исследования макета мощностью 1 кВт с параметрическим управлением выявили, что максимальная погрешность измерения тока не превышает 1,9%, а при  $I_n = 0,1 I_{н.макс}$  погрешность измерения не превышает 3% текущего значения тока  $I_n$ , т.е. 0,3%  $I_{н.макс}$ , что значительно лучше показателей систем с датчиками тока. Применение параметрического управления не требует увеличения аппаратных затрат на реализацию систем управления, так как драйверные компоненты системы сводятся к простейшим узлам (компараторы напряжения, ФЦП).

**Выводы.** 1. При исследовании электромагнитных процессов при работе преобразователя на различные виды нагрузки определено влияние величины и характера нагрузки на параметры, используемые для осуществления параметрического управления, выделены инвариантные и неинвариантные режимы, показано, что при комбинированном параметрическом управлении в верхней части внешних характеристик управление имеет близкий к инвариантному характер, а в нижней части внешних характеристик инвариантность практически недостижима.

2. Показано, что ограничительная характеристика слабо зависит от характера нагрузки и сужение области прерывистых токов при малых напряжениях на нагрузке характерно для всех типов нагрузок, что требует использования силовых схем по типу рис. 1,б.

3. Предложено параметрическое управление по мгновенным значениям напряжения на нагрузке

в фиксированные моменты времени, позволяющие увеличить динамические свойства системы управления и точность.

4. Предложены способы уменьшения емкости памяти при осуществлении неинвариантного параметрического управления при использовании уравнений регрессии различного порядка.

5. Показано, что при выходных частотах преобразователя до 10 кГц и использовании восьмиразрядных однокристальных микроконтроллеров частота управления может достигать предельного значения 5 кГц, погрешность определения тока нагрузки не превышает 2% его максимального значения, а в области малых токов нагрузки погрешность значительно уменьшается, что недостижимо в системах с традиционными датчиками тока.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чаплыгин Е.Е., Бруйкина З.В. Микропроцессорное управление выпрямителем с параметрическими обратными связями. — Электричество, 1994, № 2.
2. Булатов О.Г., Чаплыгин Е.Е. Параметрическое микропроцессорное управление вентилями преобразователями. — Электротехника, 1994, № 9.
3. Булатов О.Г., Царенко А.И., Поляков В.Д. Тиристорно-конденсаторные источники питания для электротехнологии. — М.: Энергоатомиздат, 1989.
4. Поликарпов А.Г., Сергиенко Е.Ф. Однотактные преобразователи напряжения в устройствах электропитания РЭА. — М.: Радио и связь, 1989.
5. Бутырин П.А., Демирчян К.С. Машинные методы расчета электрических цепей. — М.: Высшая школа, 1988.
6. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. — М.: Наука, 1971.

[26.03.96]

*Авторы: Чаплыгин Евгений Евгеньевич окончил радиотехнический факультет Московского энергетического института (МЭИ) в 1965 г. В 1974 г. защитил кандидатскую диссертацию на тему «Исследование непосредственных преобразователей частоты с замкнутым контуром управления». Доцент кафедры промышленной электроники МЭИ.*

*Алешин Максим Леонидович окончил факультет электронной техники МЭИ в 1995 г. Аспирант кафедры промышленной электроники МЭИ.*

*Николенко Михаил Павлович окончил факультет электронной техники МЭИ в 1995 г. Аспирант кафедры промышленной электроники МЭИ.*

# Экспериментальные исследования шума и вибраций в вентильно-индукторном электроприводе

БЫЧКОВ М.Г., КИСЕЛЬНИКОВА А.В., СЕМЕНЧУК В.А.

Приведены результаты исследований опытного образца вентильно-индукторного электропривода. Экспериментально подтверждено, что основным фактором, вызывающим шум и вибрации в таком приводе, являются электромагнитные силы. Установлено, что вибрации возбуждаются при резких изменениях производной тока — в момент отключения фазы или при работе релейного регулятора тока. Предложен и экспериментально подтвержден способ снижения уровня шума и вибрации за счет формирования тока в момент отключения фазы.

Ключевые слова: вентильно-индукторный электропривод, шум, вибрации, электромагнитные силы, экспериментальные исследования

Настоящая статья является продолжением публикации [1], в которой были рассмотрены принцип действия, отличительные признаки и предпосылки развития вентильно-индукторного электропривода (ВИП), оценена эффективность электромеханического преобразования энергии и особенности работы электропривода при его представлении различными математическими моделями, а также приведены результаты экспериментальных исследований ВИП, его основные функциональные характеристики. Одной из актуальных задач, сформулированных в предыдущей публикации и более ранних [2], были названы работы по улучшению вибро-акустических характеристик этого электропривода.

Следует отметить, что вибро-акустические характеристики являются одним из важных потребительских свойств любого электромеханического преобразователя энергии. Однако известно, что для ВИП проблема уменьшения шумов и вибраций особенно актуальна [3, 4]. По утверждению проф. П. Лоуренсона — одного из ведущих специалистов в области ВИП — низкий уровень шума достигается при правильном проектировании машины. Специальные способы электронного управления могут быть альтернативными или дополнительными возможностями снижения шума [5].

В [6] указываются следующие возможные источники шума и вибраций в вентильно-индукторной машине:

сильно сконцентрированные радиальные силы между статором и ротором в магнитной системе с двойной зубчатостью;

*Results of investigations of an experiment switched reluctance drive are presented. It is confirmed that the main factor which cause noise and vibrations in such a drive is electromagnetic forces. It is established that vibrations are excited under sharp changes of current derivative when switching-off a phase or under the relay current controller operation. A method for reducing levels of noise and vibration at the expense of forming current at the moment phase switching-off is proposed and experimentally confirmed.*

Key words: switching reluctance drive, noise, vibration, electromagnetic forces, experimental investigation

пульсации момента, которые могут возбуждать вибрации статора и акустический шум;

взаимодействие тока в обмотках статора с локальным магнитным полем, вызывающее вибрации обмотки;

магнитострикционные силы в магнитной системе;

технологические погрешности, приводящие к асимметричности конструкции и вызывающие несбалансированные магнитные и механические силы, действующие на ротор;

вибрации в подшипниках и вентиляторе.

Путем последовательного исключения различных факторов экспериментально показано, что доминирующим источником акустического шума являются радиальные усилия притяжения между статором и ротором.

Как средство снижения уровня шума в [6] предлагается корректировать форму кривой тока в фазе так, чтобы результирующие магнитные силы между статором и ротором не содержали гармоник, которые могли бы вызывать резонанс статора. Как более успешная альтернатива предлагается введение стохастических отклонений углов включения и отключения фазы с целью расширения спектра возмущающего воздействия и снижения его связи с механическим резонансом статора.

В [7] в качестве основного средства уменьшения шума предлагается снижение радиальных усилий за счет увеличения расстояния между угловым положением ротора, при котором достигается максимум момента, и между угловым положением ротора, при котором достигается максимум радиальных усилий. Этому способ-

ствуют опережающая коммутация фазы и быстрое спадание тока после отключения фазы. Указывается также на принципиальную возможность уменьшения шума за счет изменения профиля полюсов.

Недостатком предложенных способов является то, что они борются не с причинами, вызывающими шум и вибрации, а пытаются создать условия, при которых влияние этих причин будет минимальным.

Детальное экспериментальное исследование условий возникновения шумов и вибраций в ВИП может послужить основой для более обоснованных способов улучшения вибро-акустических характеристик этого класса приводов. В данном случае экспериментальные исследования особенно необходимы, так как простые теоретические модели могут служить только для очень приближенного описания реальных вибро-акустических процессов, а детальный учет всех влияющих факторов, включая геометрические, конструктивные и электромагнитные параметры, чрезвычайно усложняет теоретическое описание.

**Эксперименты в рабочем режиме.** На кафедре автоматизированного электропривода Московского энергетического института проведены эксперименты по определению вибро-акустических характеристик опытного образца четырехфазного ВИП мощностью 5 кВт, 1500 об/мин [8]. Испытания проводились на компьютеризированном оборудовании, позволяющем формировать требуемые законы управления, регулировать нагрузку и регистрировать необходимые величины [9].

При определении вибро-акустических характеристик в большинстве опытов регистрировались ток  $I$  одной из фаз и сигналы виброускорения  $a_{\text{вибр}}$  и уровня шума  $L$  с аналогового выхода шумомера-вибromетра типа ВШВ-003. Сигналы регистрировались с дискретностью 50 мкс на интервале около 0,1 с.

За базовые значения приняты максимальные значения аналогового выхода шумомера-вибromетра на диапазоне 30 м/с<sup>2</sup> для виброускорения, 90 дБ для шума и 10 А для тока.

На рис. 1 показаны осциллограммы тока  $I$  и виброускорения  $a_{\text{вибр}}$  при частоте вращения двигателя 650 об/мин. Вибрации регистрировались в радиальном направлении в середине корпуса над фазной обмоткой, для которой зарегистрирован сигнал тока. Сопоставление сигнала виброускорения с осциллограммой тока выявило, вибрации в рассматриваемой точке происходили практически непрерывно, т.е. не только во время работы соответствующей фазы. Можно заметить, что форма сигнала вибрации близка к синусоидальной, а в моменты переключения фаз обмотки изменяется фаза колебаний, на-

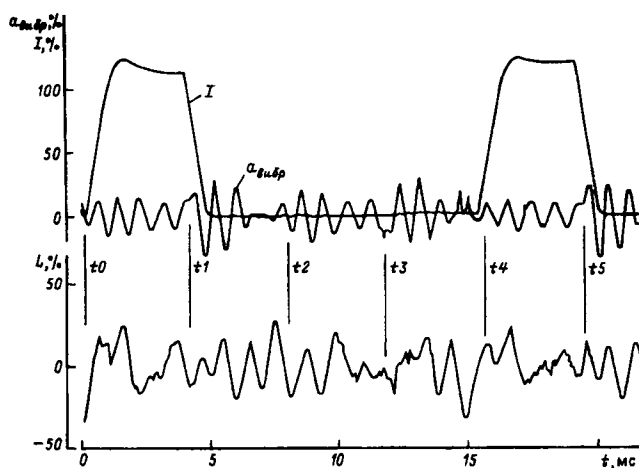


Рис. 1. Осциллограммы тока  $I$  одной фазы, виброускорения  $a_{\text{вибр}}$  корпуса в радиальном направлении в точке над этой фазой и уровня шума  $L$  (в процентах) при 650 об/мин

иболее явно это проявляется в моменты времени  $t_1, t_3, t_5$ . Колебания в сигнале шума имеют более сложную форму.

Для уточнения условий возникновения колебаний были проведены опыты с уменьшенным числом возмущающих воздействий за счет того, что машина вращалась при питании только одной фазы обмотки. Соответствующие осциллограммы показаны на рис. 2. Из них следует, что радиальные вибрации возникают в момент отключения фазы и практически затухают к ее следующему включению. Колебания же сигнала шума происходят непрерывно. Таким образом, сигнал радиальной вибрации более тесно связан с причиной возникновения колебаний, чем сигнал шума. Сигнал шума менее информативен,

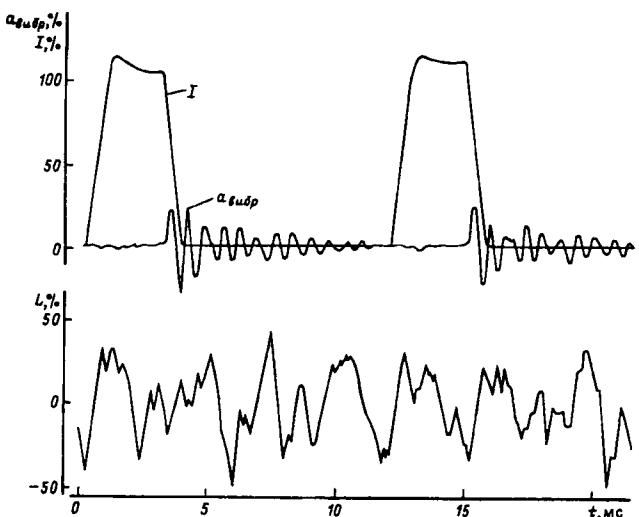


Рис. 2. Осциллограммы тока  $I$  одной фазы, виброускорения  $a_{\text{вибр}}$  корпуса в радиальном направлении в точке над этой фазой и уровня шума  $L$  (в процентах) при работе только этой фазы и частоте вращения 820 об/мин

так как не позволяет выявить моменты возникновения возмущающих воздействий.

Вибрации возникают именно в момент отключения фазы, так как резкое падение тока вызывает такое же снижение электромагнитной силы. В результате накопленная энергия упругой деформации статора высвобождается и переходит в форму колебаний. Вибрации не возникают при включении фазы, так как в этот момент зубцы ротора находятся в рассогласованном положении относительно зубцов соответствующей фазы статора, магнитный поток и электромагнитные силы невелики. Постепенное нарастание сил по мере перекрытия зубцов увеличивает энергию упругой деформации, но не вызывает колебаний, потому что длительность этого процесса значительно превышает период упругих колебаний, возникающих при вибрации.

В упругих колебаниях в той или иной степени может участвовать весь объем статора. Скорость распространения звука в стали составляет около 5000 м/с для продольных и 3300 м/с для поперечных волн [10]. Для частот 300–1500 Гц это дает диапазон возможных длин волн от 2 до 16 м, что значительно превышает размеры машины. Следовательно, изменения упругой деформации распространяются в объеме статора быстрее, чем происходит одно колебание. В то же время скорость распространения звука на порядок меньше, чем в стали. Все вышеперечисленное указывает на сложный процесс возбуждения шума под действием вибраций поверхности корпуса машины.

Полученные экспериментальные результаты подтверждают, что большое число влияющих факторов и сложность происходящих процессов

чрезвычайно затрудняют получение адекватной модели вибро-акустических процессов. В то же время, выявив основное возмущающее воздействие, можно попытаться уменьшить его влияние на шум и вибрации. Для детального выяснения условий возникновения вибраций были проведены эксперименты на заторможенном двигателе.

**Эксперименты с заторможенным ротором.** На рис. 3 показан процесс включения фазы при скважности ШИМ 40%, работе токового коридора релейного регулятора тока при уставках  $I_{\max} = 14$  А,  $I_{\min} = 8$  А и отключении фазы. Зубцы ротора находятся в согласованном положении относительно зубцов статора, угол рассогласования между осями зубцов  $\theta = 0$ .

На интервале  $t_0 - t_1$  происходит нарастание тока до значения верхней уставки, которое сопровождается незначительной вибрацией с амплитудой 10–15% и частотой около 4 кГц, соответствующей частоте ШИМ в этом опыте. В момент времени  $t_1$  происходит отключение ШИМ, закорачивание обмотки и возникновение всплеска вибрации амплитудой около 65% и частотой около 1 кГц. Колебания почти затухают за три периода. В момент времени  $t_2$  ток падает до нижней уставки, что вызывает повторное включение ШИМ. Обратим внимание на то, что в этом случае вибрация возникает при включении обмотки, а не при ее закорачивании, как в момент времени  $t_1$ , и имеет противоположную фазу колебаний (первое отклонение вниз). Отключение ШИМ в момент времени  $t_3$  вызывает возрастание амплитуды до 90%, так как происходит примерно через период с момента возникновения колебаний. В данном случае колебания затухают примерно за шесть периодов, что вдвое превышает время затухания колебаний после момента  $t_1$ . В момент времени  $t_5$  происходит форсированное падение тока, что вызывает всплеск колебаний с максимумом, превышающим 100%, и сложным характером затухания.

Из анализа рис. 3 следует, что вибрации возникают в момент скачкообразного изменения наклона в кривой тока (производной тока) за исключением начального момента  $t_0$ . Причем на амплитуду колебаний влияет именно разность в значениях производных тока до и после скачка. Так, на интервале  $t_1 - t_2$  производная тока почти в 20 раз меньше, чем на участках нарастания тока в моменты  $t_1$  и  $t_2$ , а в момент времени  $t_1$  возникают колебания такие же, как и в момент  $t_2$ , но с противоположной фазой. Характер возникающих вибраций зависит не только от разности производных тока, но и от моментов появления скачков производной относительно фазы колебаний или длительности участков нарастания и спада тока.

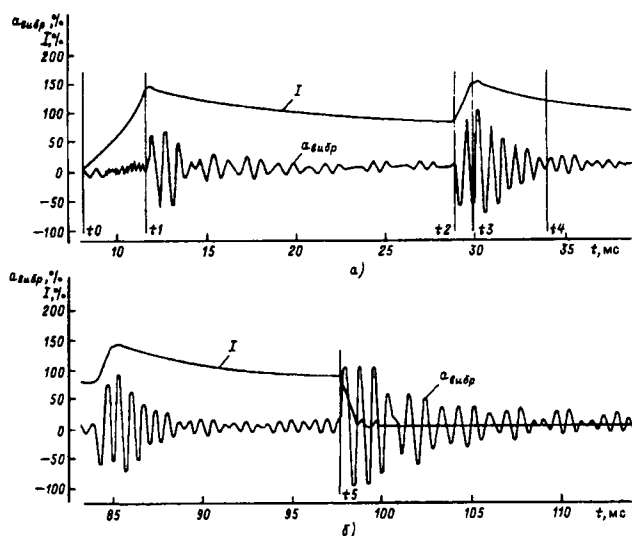


Рис. 3. Коммутация фазы при  $\theta = 0$ ,  $I_{\max} = 14$  А,  $I_{\min} = 8$  А и  $U_{\text{ШИМ}} = 40\%$

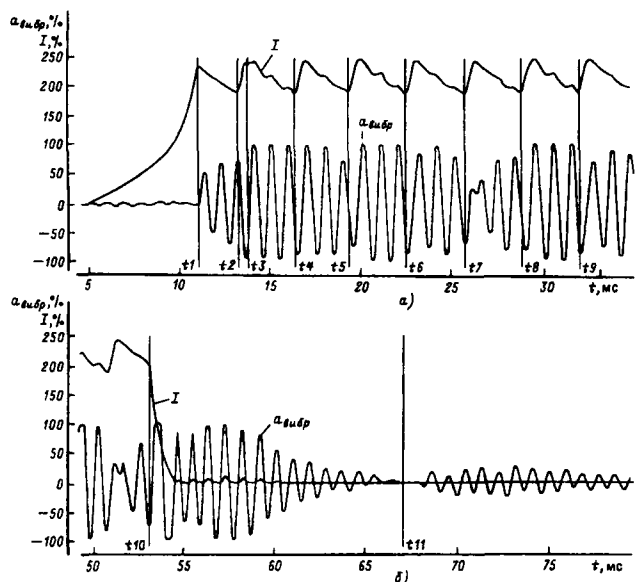


Рис. 4. Коммутация фазы при  $\theta=0$  с увеличенной до 8 кГц частотой ШИМ и  $U_{\text{ШИМ}}=20\%$

Рассмотренная осциллограмма рис. 3 была получена в процессе начальной отладки релейного регулятора тока и снималась при наличии добавочного резистора в цепи постоянного тока при частоте ШИМ 4 кГц. На рис. 4 приведена осциллограмма при частоте ШИМ 8 кГц, скважности 20% и без добавочного резистора. Исключение добавочного резистора увеличило производную при нарастании тока даже при пониженном вдвое выходном напряжении ШИМ-преобразователя. Изменение условий работы релейного регулятора тока привело к тому, что при пульсации тока в 5 А длительность фронта нарастания тока близка к половине периода вибраций. В результате два скачка производной, действуя в противоположные стороны, но согласованно с фазой колебаний, раскачивают колебательную систему. Кроме того, период пульсаций тока почти точно равен трем периодам вибраций. Указанное вызывает незатухающие колебания с амплитудой, близкой к 100%. Таким образом, рис. 4 является примером неудачного с точки зрения вибраций сочетания параметров, которого следует избегать при работе регулятора тока.

Причиной возникновения любых вибраций является периодическое изменение сил различного рода. В рассматриваемом случае возмущающим воздействием являются электромагнитные силы, возникающие за счет протекания магнитного потока через ферромагнитные конструкции статора и ротора. Отклонение ротора от согласованного положения  $\theta=0$  вызывает уменьшение магнитной проводимости и электромагнитной

силы при условии неизменного тока в катушке и, следовательно, вибраций.

Обратим внимание на момент отключения фазы ( $t_{10}$  на рис. 4). После первого колебания с амплитудой, большей 100% во время спада тока, затем амплитуда постепенно возрастает от 80 до 100% и далее уменьшается до нуля к моменту  $t_{11}$ . После этого вибрации возникают вновь, достигая амплитуды 25%. Такое изменение сигнала похоже на биения, возникающие при сложении колебаний двух близких частот или при интерференционных явлениях. Это еще раз свидетельствует о сложности ВИП как виброакустического объекта и неадекватном представлении его как простой колебательной системы с естественным затуханием.

Уменьшение вибраций и шума за счет формирования фазных токов. В результате экспериментов установлено, что вибрации возникают в момент резкого изменения производной тока, вызывающего соответствующее изменение электромагнитной силы. Причиной возникновения вибраций является, конечно, не сам скачок производной тока, а изменение темпа нарастания или спада электромагнитной силы. На амплитуду вибраций влияет также длительность последующего интервала времени, в течение которого сохраняется значение производной. Скачки производной тока возникают при работе релейного регулятора тока и в момент отключения фазы. Наибольшее по абсолютной величине значение производная тока имеет именно в момент отключения фазы, так как для расфорсировки к обмотке прикладывается полное обратное напряжение инвертора.

Одним из способов уменьшения вибраций может быть формирование более плавного изменения тока и электромагнитной силы. Оценим требуемое затягивание фронта тока на примере

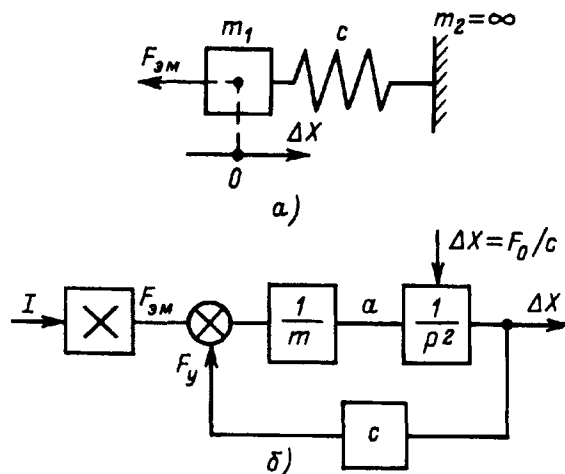


Рис. 5. Расчетная (а) и структурная (б) схемы математической модели одномассовой упругой системы

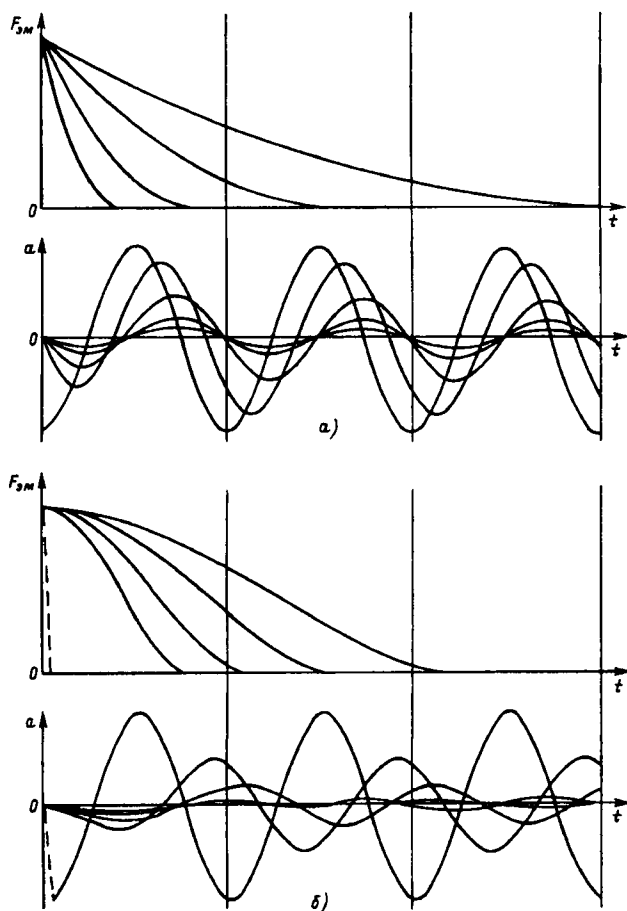


Рис. 6. Реакция одномассовой упругой системы на линейное (а) и квадратичное (б) спадание тока

процесса отключения обмотки. На рис. 5 показаны расчетная и структурная схемы математической модели одномассовой упругой системы при воздействии на нее силы  $F_{эм} = K_F I^2$ . В начальный момент времени  $F_{эм} = F_0$  и система находится в равновесии за счет задания ненулевых начальных условий  $\Delta X_0 = F_0/c$ .

На рис. 6,а показана реакция модели на линейное спадание тока:

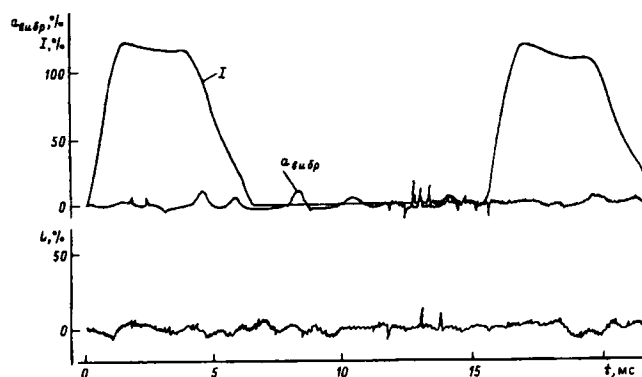


Рис. 7. Осциллограммы тока  $I$ , радиального виброускорения  $a_{\text{вибр}}$  и уровня шума  $L$  (в процентах) при скорости 650 об/мин и затянутом заднем фронте тока

$$I = I_0 - K_I^* t \quad \text{при } t < I_0/K_I;$$

$$I = 0 \quad \text{при } t > I_0/K_I$$

для различных значений  $K_I$ .

При затягивании фронта до полутора периодов собственных колебаний системы амплитуда колебаний составляет 20% максимальной амплитуды, получающейся при скачкообразном спадании тока. Увеличение длительности фронта до трех периодов колебаний уменьшает амплитуду до 10%.

При линейном спадании тока в начальный момент времени производная тока изменяется скачком, что способствует возбуждению колебаний в системе. Применение квадратичного закона спадания тока дает несколько лучшие по сравнению с линейным законом результаты (см. рис. 6,б). При длительности спадания тока в полтора периода амплитуда колебаний составляет 7%, а при увеличении до двух периодов уменьшается до 5%. Таким образом, необходимое затягивание фронта должно быть около двух периодов собственных колебаний.

При работе машины колебания возбуждаются с частотой около 1200 Гц (см. рис. 2). Удвоенный период колебаний для этой частоты равен 1,67 мс. На рис. 7 приведены осциллограммы работы машины при условиях, аналогичных рис. 1, но с затянутым задним фронтом тока. Сопоставление результатов с полученными ранее (см. рис. 1 и 2) показывает, что затягивание заднего фронта тока относительно фронта при естественной коммутации позволяет на порядок уменьшить как вибрации, так и шум, что подтверждает справедливость проведенного анализа и сделанных предположений.

**Выводы.** 1. Выполненными на кафедре автоматизированного электропривода МЭИ исследованиями вибро-акустических свойств опытного образца ВИП подтверждено, что основным фактором, вызывающим шум и вибрации, являются электромагнитные силы. Сигнал шума менее информативен, чем сигнал вибрации, и не позволяет определить момент возникновения возмущающего воздействия. Установлено, что вибрации возбуждаются при резких изменениях производной тока — в момент отключения фазы или при работе релейного регулятора тока. Затягивание фронта спадания тока в фазе до приблизительно двух периодов собственных колебаний системы позволяет на порядок уменьшить как уровень шума, так и уровень вибраций.

2. Полученные результаты необходимо учитывать как при проектировании механической конструкции вентиляльно-индукторных машин, так и при разработке алгоритмов управления ими. Затягивание фронта спадания тока может эффективно использоваться только при относитель-

но низких частотах вращения, пока его длительность существенно меньше интервала работы фазы. На больших частотах вращения затягивание фронта будет приводить к снижению мощности на валу за счет возникновения тормозных моментов или за счет уменьшения среднего значения тока при опережающем угле отключения фазы. Более радикальным средством снижения вибраций и шума может быть повышение частоты собственных колебаний системы за счет соответствующих изменений в конструкции машины.

3. Формирование тока во время работы фазы может происходить либо естественным путем при приложении к обмотке постоянного напряжения, либо под воздействием регулятора тока. В первом случае, характерном для высоких частот вращения, кривая тока имеет гладкую форму, что не вызывает дополнительных вибраций и шума. При низких частотах вращения, как правило, необходимо токоограничение. Простейший релейный регулятор тока требует минимальных ресурсов для своей реализации, но формирует пилообразную форму тока. Чтобы при этом не возникало дополнительных вибраций и шума частота переключений должна существенно превышать частоту собственных колебаний, что повышает требования к быстродействию и увеличивает потери в силовых ключах. Альтернативным решением может быть применение более сложных адаптивных алгоритмов работы регулятора тока, формирующих более гладкую форму кривой тока в процессе токоограничения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бычков М.Г. Элементы теории вентильно-индукторного электропривода. — Электричество, 1997, № 8.
2. Ильинский Н.Ф. Вентильно-индукторные машины в современном электроприводе / Тез. докл. научно-технического семинара «Вентильно-индукторный электропривод — проблемы развития и перспективы применения». — М.: Изд-во МЭИ, 1996.

3. Scharf A. Optimism for SR Drives. — PCIM Europe, Jan./Febr. 1994.
4. Hopper E. The Development of Switched Reluctance Motor Applications. — PCIM Europe, 1994, N 5.
5. Lawrenson P.A. Brief Status Review of Switched Reluctance Drives. — EPE Journal, Oct. 1992, vol. 2, N 3.
6. Cameron D., Lang J., Umans S. The Origin and Reduction of Acoustic Noise in Doubly Salient Variable-Reluctance Motors. — IEEE Transactions on Industry Applications, Nov/Dec. 1992, vol. 28, N 6.
7. Quantification and Analysis of Acoustic Noise in Switched Reluctance Drives / D. Pulle, J. Lai, J. Milthorpe, N. Huynh — EPE-93 Brighton, 13-16.9, 1993.
8. Вычков М.Г., Макаров Л.Н., Кисельникова А.В. Экспериментальные исследования опытного образца вентильно-индукторного двигателя в статических режимах / Тез. докл. научно-технического семинара «Вентильно-индукторный электропривод — проблемы развития и перспективы применения». — М.: Изд-во МЭИ, 1996.
9. Испытательный комплекс для экспериментальных исследований вентильно-индукторного электропривода / М.Г. Бычков, В.Ф. Козаченко, М.Ю. Гольштейн, В.А. Семенчук — МКЭЭ—96 II Международная Конференция по электромеханике и электротехнологии. Тезисы докладов. Ч. 2. Крым, 1—5 октября 1996.
10. Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г. Справочник по элементарной физике. — М.: Наука, 1980.

[12.03.97]

*Авторы: Бычков Михаил Григорьевич окончил факультет электрификации и автоматизации промышленности и транспорта Московского энергетического института (МЭИ) в 1973 г. Защитил кандидатскую диссертацию по теме «Автоматизированный электропривод прокатных станов» в МЭИ в 1984 г. Доцент кафедры автоматизированного электропривода МЭИ.*

*Кисельникова Анна Владимировна окончила факультет электрификации и автоматизации промышленности и транспорта МЭИ в 1995 г. Аспирант кафедры автоматизированного электропривода МЭИ.*

*Семенчук Виталий Анатольевич окончил факультет электрификации и автоматизации промышленности и транспорта МЭИ в 1995 г. Аспирант кафедры автоматизированного электропривода МЭИ.*

### Вниманию руководителей предприятий, объединений, НИИ и КБ, вузов

Редакция журнала «Электричество» предлагает услуги по подготовке и выпуску на договорных условиях специальных (тематических) номеров журнала

Справки по телефону 928-8869

# Быстродействующий микроэлектропривод постоянного тока с амплитудно-импульсным управлением

СИМАКОВ Г.М., КРОММ А.А.

Рассмотрен микроэлектропривод постоянного тока с релейным контуром тока якоря. Обоснована целесообразность применения амплитудно-импульсного управления напряжением микроэлектродвигателя. Это позволило целенаправленно регулировать амплитуду и частоту тока якоря. Приведены функциональные и структурные схемы электропривода и методика параметрического синтеза регулятора частоты переключения релейного элемента.

**Ключевые слова:** микроэлектропривод, релейный контур тока, амплитудно-импульсное управление, эквивалентная линеаризация

Расширяется область применения автоматизированного микроэлектропривода постоянного тока (МЭП), основные требования к которому — быстродействие и точность. Повышение быстродействия МЭП предполагает применение релейных законов управления, и в первую очередь в контуре тока якоря. Однако релейное импульсное управление вызывает колебания тока электрической машины и в конечном итоге ведет к снижению точностных показателей МЭП. Возникает задача: как, сохраняя импульсный способ управления, уменьшить амплитуду колебаний тока якоря? Это возможно, если одновременно с изменением скважности приложенного напряжения изменять и его амплитуду, т.е. осуществить амплитудно-импульсное изменение напряжения на якоре микродвигателя.

По сравнению с «классическим» импульсным регулированием скорости МЭП амплитудно-импульсное управление позволяет:

уменьшить амплитуду пульсаций тока якоря двигателя;

снизить частоту импульсов транзисторного преобразователя и таким образом уменьшить динамические потери в транзисторных ключах;

уменьшить дополнительные потери в исполнительных микродвигателях.

Частота импульсов может быть стабилизирована. Обычно она задается в пределах  $2 \div 10$  кГц. Мощность МЭП не превышает 500 Вт, при этом канал управления амплитудой может иметь относительно невысокое быстродействие по сравнению с каналом управления скважностью. Применение источника питания с управляемой амплитудой несколько усложняет схемную реализацию, однако позволяет создать высокودинамичный регулируемый МЭП посто-

The paper considers a DC microdrive with an armature current relay element circuit. Expediency of using a pulse-amplitude control of micromotor voltage is substantiated. That made it possible to purposely regulate armature current amplitude and frequency. Functional and structural schemes of an electrical drive and method for a parametric synthesis of a relay element frequency switching controller are given.

**Key words:** DC microdrive, relay current circuit, pulse-amplitude control, equivalent linearization

янного тока с заданными точностными характеристиками.

Рассмотрим релейный регулятор тока якоря. Структурная схема контура тока приведена на рис. 1. Подчеркнем, что с помощью изменения ширины петли гистерезиса релейного регулятора задается амплитуда колебаний тока якоря.

Записав решение дифференциального уравнения по участкам, можно найти частоту колебаний релейного элемента  $f_{\text{СК}}$  в контуре тока [1]:

$$f_{\text{СК}} = \left\{ -T_{\text{я}} \left[ \ln \left( 1 + \frac{2 \Delta u}{u_3 - \Delta u - (u_{\text{я}} - E) \frac{k_I}{R_{\text{я}}}} \right) + \ln \left( 1 - \frac{2 \Delta u}{u_3 + \Delta u + (u_{\text{я}} + E) \frac{k_I}{R_{\text{я}}}} \right) \right] \right\}^{-1}, \quad (1)$$

где  $T_{\text{я}}$  — электромагнитная постоянная времени якорной цепи;  $R_{\text{я}}$  — активное сопротивление якорной цепи;  $\Delta u$  — ширина петли гистерезиса релейного элемента;  $u_3$  — задающее напряжение, определяющее значение тока;  $k_I$  — коэффициент обратной связи по току;  $u_{\text{я}}$  — амплитуда напряжения на якоре двигателя;  $E$  — ЭДС двигателя.

Отметим два важных момента. Во-первых, из-за малых значений  $T_{\text{я}}$ , что свойственно большинству МЭП, частота колебаний релейного эле-

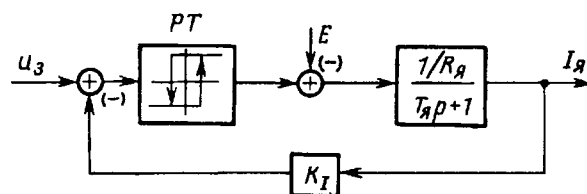


Рис. 1. Структурная схема релейного контура тока якоря



мента достаточно велика. Во-вторых, частота  $f_{ск}$  является переменной и существенно зависит от ряда параметров МЭП, в первую очередь от напряжения на якоре и ЭДС двигателя [2].

Повышенная частота переключений релейного элемента ведет к увеличению потерь в силовых ключах импульсного усилителя мощности (ИУМ). Поэтому целесообразно частоту  $f_{ск}$  снижать до требуемого значения и стабилизировать на определенном уровне. Это возможно, следуя формуле (1), если изменять амплитуду напряжения на якоре микродвигателя. Заметим при этом, что снижение частоты переключений релейного элемента может быть реализовано при меньшей амплитуде пульсаций тока и скорости.

На рис. 2 показана упрощенная функциональная схема микроэлектропривода с амплитудно-импульсным управлением. Помимо традиционного мостового включения силовых ключей К1÷К4 в цепь нагрузки, схема содержит регулируемый источник питания (РИП). Поэтому импульсный усилитель мощности позволяет одновременно менять как длительность, так и амплитуду импульсного напряжения, приложенного к цепи якоря двигателя. Следует заметить, что РИП является однополярным устройством с относительно невысокими динамическими характеристиками.

Схема работает следующим образом. Требуемое значение тока формируется контуром тока, который содержит датчик тока (ДТ) и релейный (с петлей гистерезиса) регулятор тока; частота переключений реле задается дополнительным контуром регулирования частоты. Этот контур имеет датчик частоты переключений реле (ДЧ), регулятор частоты (РЧ) и регулируемый источник питания (РИП). Изменением уровня выходного напряжения РИП регулируется частота переключений реле в контуре тока. Уставка  $f_{ск}$  осуществляется с помощью задания ее на входе контура частоты.

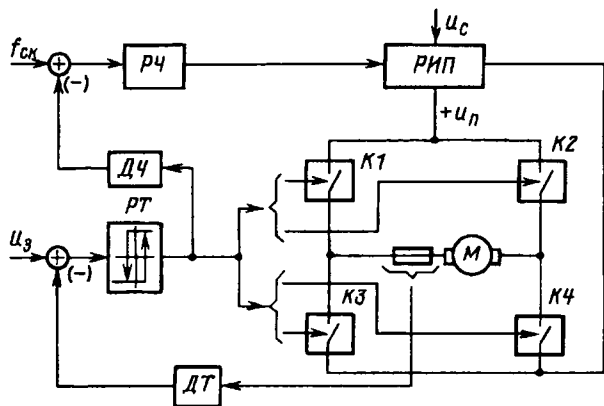


Рис. 2. Функциональная схема микроэлектропривода с амплитудно-импульсным управлением

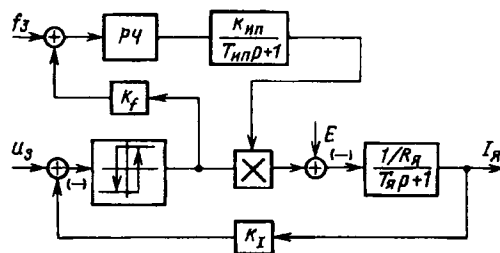


Рис. 3. Структурная схема микроэлектропривода с амплитудно-импульсным управлением

Реализация достоинств схемы рис. 2 возможна лишь при правильном выборе закона регулирования и параметров регулятора частоты. По мнению авторов, при разработке МЭП с РИП целесообразно применять интегральный регулятор частоты, позволяющий получить астатическое регулирование при относительно простой схеме. Отметим, что в общем случае тип регулятора может быть выбран и в соответствии с другим законом управления. Без каких-либо ограничений могут быть выбраны также структура и параметры РИП.

При рассмотрении контура частоты (рис. 3) можно выделить только регулятор частоты, значения параметров которого влияют на качество регулирования  $f_{ск}$ . Теоретически можно изменять и параметры источника питания, но на практике возникают сложности, связанные с изменением аппаратной части РИП. На рис. 3 регулируемый источник питания представлен апериодическим звеном. Это соответствует наиболее распространенной математической модели РИП.

Осуществим параметрический синтез регулятора частоты по заданным показателям качества. Поставленная задача усложняется следующими особенностями структурной схемы: наличием двух существенно нелинейных звеньев (релейного элемента с петлей гистерезиса и умножения); присутствием на одном из входов звена умножения сигнала прямоугольной формы, а на другом — аналогового сигнала с варьируемой амплитудой.

В качестве линеаризации звена умножения выбран метод эквивалентной линеаризации [3], позволяющий для однозначных многовыходовых нелинейных звеньев минимизировать среднее значение квадрата произведения входного сигнала.

При входном сигнале  $x(t)$  найдем эквивалентный элемент, который обеспечивает равенство

$$y_1(t) = N(x_1) x_1,$$

где матрица эквивалентных передаточных фун-

кий  $N$  выбирается таким образом, чтобы минимизировать усредненный квадрат нормы ошибки:

$$\|\bar{\varepsilon}(t)\|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} \|\varepsilon(t)\|^2 dt,$$

где

$$\varepsilon(t) = f(x_1) - N(x_1)x_1. \quad (2)$$

Введя выражение ошибки под интеграл и выполнив несложные векторно-матричные преобразования, получим ряд для квадрата нормы ошибки:

$$\|\bar{\varepsilon}(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \overline{f_i(x_i) - \sum_{j=1}^n N_{ij}(x_1)x_{1j}} \right]^2,$$

где черта сверху означает усреднение по определению (2).

Минимизацию  $\varepsilon$  по элементам матрицы  $N$  можно выполнить, взяв частные производные  $\frac{\partial \|\varepsilon\|^2}{\partial N_{ij}}$  и приравняв их нулю.

Итак, для звена умножения, имеющего два входа и один выход (рис. 4), с учетом принятой индексации элементов векторов и матриц запишем:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= [\overline{(N_{11}x_{11} + N_{12}x_{12} - f(x_{11}, x_{12}))}]^2 = \\ &= N_{11}^2 \bar{x}_{11}^2 + N_{12}^2 \bar{x}_{12}^2 + f^2(x_{11}, x_{12}) + 2N_{11}N_{12} \bar{x}_{11}\bar{x}_{12} - \\ &- 2N_{11} \overline{x_{11}f(x_{11}, x_{12})} - 2N_{12} \overline{x_{12}f(x_{11}, x_{12})}. \end{aligned}$$

Найдем  $\partial \varepsilon^2 / \partial N_{11}$  и  $\partial \varepsilon^2 / \partial N_{12}$  и, приравняв их нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} N_{11} \bar{x}_{11}^2 + N_{12} \bar{x}_{11}x_{12} &= \overline{x_{11}f(x_{11}, x_{12})}; \\ N_{11} \bar{x}_{11}x_{12} + N_{12} \bar{x}_{12}^2 &= \overline{x_{12}f(x_{11}, x_{12})}, \end{aligned} \quad (3)$$

где усреднение осуществляется интегрированием соответствующих функций. Решая систему (3) относительно  $N_{11}$  и  $N_{12}$ , получим эквивалентную

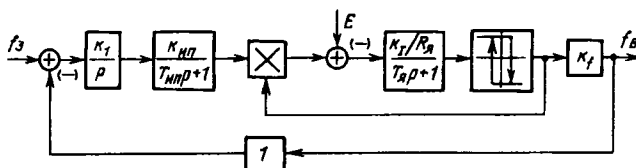


Рис. 4. Структурная схема регулирования контура частоты переключения релейного элемента

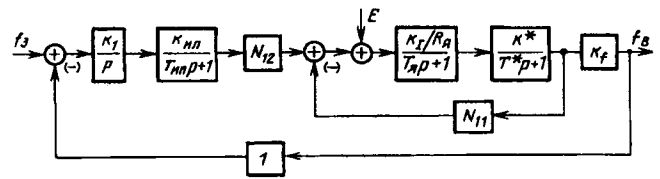


Рис. 5. Линеаризованная структурная схема контура частоты переключения релейного элемента

схему линеаризованного звена умножения с коэффициентами передачи, зависящими от амплитуды входных сигналов. Преобразованная структурная схема приведена на рис. 5.

Параметрический синтез регулятора частоты для системы рис. 5 целесообразно сделать аналитическим методом, при котором нелинейный элемент заменяется апериодическим звеном с параметрами [4]

$$T^* = -\frac{q'(a)}{\omega q(a)}; \quad k^* = \frac{q^2(a) + q'^2(a)}{q(a)},$$

где

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}; \quad q'(a) = -\frac{4cb}{\pi a^2},$$

а характеристический полином замкнутой системы  $W_3(p, a)$  раскладывается в ряд по степеням  $j\omega$ .

Из передаточной функции замкнутой линеаризованной системы рис. 5 выделим характеристический полином  $Q(p, a)$  и, подставив  $p = \xi + j\omega$ , разложим его в ряд по степеням  $j\omega$  ( $\xi$  — показатель затухания свободных колебаний системы):

$$\begin{aligned} Q(\xi + j\omega) &= Q(\xi) + \left(\frac{dQ}{d\xi}\right)j\omega + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2Q}{d\xi^2}\right)(j\omega)^2 + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n Q}{d\xi^n}\right)(j\omega)^n. \end{aligned} \quad (4)$$

Возьмем производные по членам ряда:

$$Q(\xi) = F_0 = A\xi^4 + B\xi^3 + C\xi^2 + D\xi + E;$$

$$Q^{(1)}(\xi) = F_1 = 4A\xi^3 + 3B\xi^2 + 2C\xi + D;$$

$$Q^{(2)}(\xi) = F_2 = 12A\xi^2 + 6B\xi + 2C;$$

$$Q^{(3)}(\xi) = F_3 = 24A\xi + 6B;$$

$$Q^{(4)}(\xi) = F_4 = 24A, \quad (5)$$

где  $A = T_A T^* T_{ин}$ ;  $B = T_A T^* + T_{ин} T^* + T_{ин} T_A$ ;  $C = T^* + T_A + T_{ин} + T_{ин} k_0$ ;  $D = 1 + k_0$ ;  $k_0 = \frac{k^* k_f N_{11}}{R_A}$ ;  $E = k_0 k_1 k_{ин} k_f N_{12}$ .

Из (4) с учетом (5) выделим вещественную и мнимую части и приравняем их нулю:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[Q(\xi + j\omega)] &= F_0 - \frac{1}{2!} F_2 \omega^2 + \frac{1}{4!} F_4 \omega^4 = 0; \\ \operatorname{Im}[Q(\xi + j\omega)] &= \omega \left( F_1 - \frac{1}{3!} F_3 \omega^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из совместного решения уравнений (5) с учетом  $\omega^2 = \frac{3!F_1}{F_3}$  найдем коэффициент передачи  $k_1$  интегрального регулятора системы:

$$k_1 = \left[ \frac{3F_1}{F_3} \left( F_2 - \frac{F_4 F_1}{2F_3} \right) - F_0' \right] (k_0 k_{\text{ип}} k_f N_{12})^{-1},$$

где  $F_0' = F_0 - E$ .

Таким образом, задавшись показателем затухания  $\xi$ , собственной частотой колебаний  $\omega$  и амплитудой колебаний, можно определить параметры регулятора частоты переключений релейного элемента.

В заключение заметим, что вне рамок настоящей статьи осталось построение внешнего контура частоты вращения автоматизированного МЭП. Решение данной задачи может быть выполнено известными способами, изложенными, например, в [2]. При этом управление амплитудой и частотой колебаний тока якоря позволяет одновременно снижать и пульсации скорости МЭП, т.е. повышать его точностные характеристики.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Симаков Г.М., Кромм А.А. Об одном способе управления быстродействующим позиционным микроэлектроприводом постоянного тока / Автоматизированный электропривод. Новосибирский электротехнический институт: Новосибирск, 1990.
2. Трахтенберг Р.М. Импульсные астатические системы электропривода с дискретным управлением. — М.: Энергоатомиздат, 1982.
3. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение / Под ред. Ю.И. Топчиева. — М.: Машиностроение, 1972.
4. Метод гармонической линеаризации в проектировании нелинейных систем автоматического управления / А.А. Вавилов, Ю.М. Козлов, А.Д. Максимов и др. Под ред. Ю.И. Топчиева. — М.: Машиностроение, 1970.

[15.04.96]

*Авторы: Симаков Геннадий Михайлович окончил факультет автоматизированных электромеханических систем Новосибирского государственного технического университета (НГТУ) в 1964 г. В 1969 г. в НГТУ защитил кандидатскую диссертацию. Доцент кафедры электропривода НГТУ.*

*Кромм Андрей Артурович окончил факультет автоматизированных электромеханических систем НГТУ в 1982 г. В 1992 г. в НГТУ защитил кандидатскую диссертацию. Старший научный сотрудник кафедры электропривода НГТУ.*

### К ЧИТАТЕЛЯМ ЖУРНАЛА «Электричество»

В настоящее время появилась возможность бесплатно получать оглавления нашего журнала через электронные сети. Эту услугу оказывает служба ИНФОМАГ, организованная в Московском физико-техническом институте. Кроме оглавлений журнала «Электричество» служба ИНФОМАГ распространяет оглавления более 80 отечественных и зарубежных научно-технических журналов, а также ряд научных электронных бюллетеней. Все материалы службы ИНФОМАГ доступны в режиме ON-LINE через сервер РосНИИРОС по следующим URL:

<http://www.ripn.net>

<gopher://gopher.ripn.net>

Для получения материалов службы ИНФОМАГ по подписке через электронную почту следует направить письмо с командой

HELP по адресу [ims@ripn.net](mailto:ims@ripn.net)

Полная информация о службе ИНФОМАГ может быть получена в ответ на команду HELP, направленную по адресу [infomag@lgrant.mipt.msk.su](mailto:infomag@lgrant.mipt.msk.su)

С искренним уважением

В.Г. Веселаго, руководитель службы ИНФОМАГ

# К расчету емкости конденсатора однофазного асинхронного двигателя

МОЩИНСКИЙ Ю.А., КИСЕЛЕВА М.М.

Предложена методика определения емкости конденсатора однофазного асинхронного двигателя на основе минимума обратного поля. На примере расчета пусковых и рабочих характеристик серийного однофазного двигателя показано применение данной методики для нахождения допустимого интервала изменения емкости фазосдвигающего элемента.

Ключевые слова: асинхронный двигатель, расчет емкости конденсатора

A method for determining capacitor capacitance of a single-phase induction motor on the basis of the back field minimum is proposed. Using the example of calculating the starting and operating characteristics of a single-phase serial induction motor, the application of the method proposed is shown for determining the permissible phase shift element capacitance change interval.

Key words: induction motor, calculating capacitor capacitance

Однофазные асинхронные двигатели (ОАД) с конденсатором в качестве фазосдвигающего элемента являются наиболее распространенными среди электрических машин переменного тока малой мощности. Потребность в конденсаторных ОАД постоянно возрастает. В процессе перехода к рыночной экономике стоимость как ОАД, так и конденсаторов существенно возросла, причем стоимость конденсатора составляет примерно 50÷70% стоимости двигателя.

Как известно [1], при расчете емкости конденсатора ОАД исходят из условий получения кругового поля либо в номинальном режиме, либо в режиме пуска. В первом случае при хороших энергетических показателях в номинальном режиме получается невысокий пусковой момент, во втором случае, наоборот, имеем повышенный пусковой момент при худших энергетических показателях в номинальном режиме, так как двигатель работает при эллиптическом поле.

Использование двух конденсаторов, включенных параллельно, увеличивает стоимость электропривода [1], в связи с чем возникает задача выбора емкости конденсатора минимальной стоимости, при которой достигается разумный ком-

промисс между пусковыми и рабочими характеристиками ОАД.

Ниже предлагается методика определения емкости конденсатора, исходя из условия минимальной эллиптичности магнитного поля в воздушном зазоре двигателя.

Схема включения в сеть обмоток конденсаторного двигателя показана на рис. 1. Две обмотки — рабочая  $A$  и пусковая  $B$  — занимают одинаковое число пазов и сдвинуты в пространстве на  $90^\circ$ ; последовательно с пусковой обмоткой включен конденсатор  $C$ .

Поскольку форма магнитного поля в двигателе в общем случае эллиптическая, при расчете токов и вращающего момента воспользуемся методом симметричных составляющих в применении к двухфазным системам [1]. Согласно этому методу несимметричная двухфазная система векторов  $\dot{I}_A$  и  $\dot{I}_B$ , сдвинутых между собой на произвольный угол, может быть разложена на две симметричные: систему векторов прямой последовательности ( $\dot{I}_{A1}$ ,  $\dot{I}'_{B1}$ ) с чередованием фаз, подобным исходной системе, и систему векторов обратной последовательности ( $\dot{I}_{A2}$ ,  $\dot{I}'_{B2}$ ) с противоположным чередованием фаз. При этом

$$\dot{I}_{A1} = j\dot{I}'_{B1} = j\dot{I}_{B1}/k; \quad \dot{I}_{A2} = -j\dot{I}'_{B2} = -j\dot{I}_{B2}/k, \quad (1)$$

где  $k = \frac{k_{OB} w_B}{k_{OA} w_A}$  — коэффициент трансформации фаз  $A$  и  $B$ .

Для определения токов в обмотках статора  $A$  и  $B$  составим схемы замещения двигателя для прямой и обратной последовательностей; они показаны на рис. 2, а и б.

Здесь  $Z_{A1}$  ( $Z_{A2}$ ),  $Z_{B1}$  ( $Z_{B2}$ ) — полные сопротивления прямой и обратной последовательностей по осям обмоток  $A$  и  $B$  соответственно;  $X_{sA}$ ,  $X_{sB}$  — индуктивные сопротивления статорных обмоток фаз  $A$  и  $B$ ;  $R_{sA}$ ,  $R_{sB}$  — активные

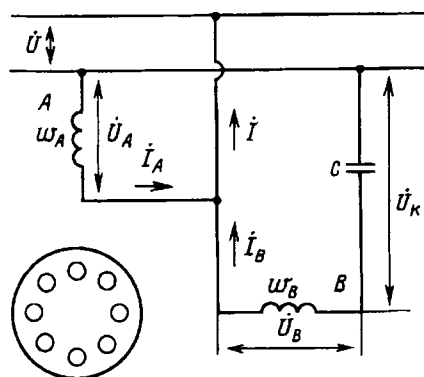


Рис. 1

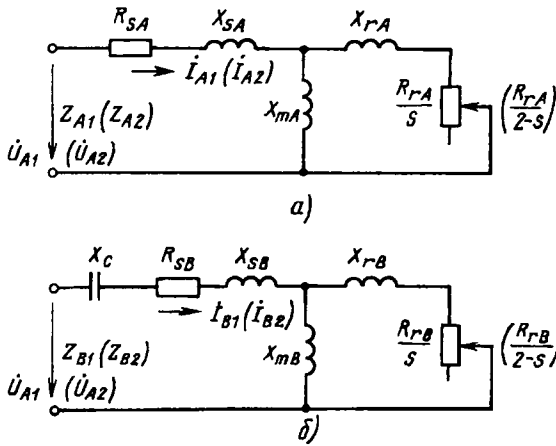


Рис. 2

сопротивления статорных обмоток фаз  $A$  и  $B$ ;  $R_{rA}$ ,  $X_{rA}$  — активное и индуктивное сопротивление роторных обмоток, приведенные к числу фаз статора и числу витков статорной обмотки  $A$ ;  $R_{rB}$ ,  $X_{rB}$  — индуктивное и активное сопротивление роторных обмоток, приведенные к числу фаз статора и числу витков статорной обмотки  $B$ ;  $X_{mA}$ ,  $X_{mB}$  — индуктивные сопротивления по осям фаз  $A$  и  $B$ , соответствующие потокам воздушного зазора по этим осям;  $s$ ,  $(2-s)$  — скольжения ротора по отношению к полю прямой и обратной последовательностей.

Напряжения фаз  $A$  и  $B$  соответственно равны:

$$\dot{U} = \dot{U}_{A1} + \dot{U}_{A2} = \dot{I}_{A1} Z_{A1} + \dot{I}_{A2} Z_{A2}; \quad (2)$$

$$\dot{U} = \dot{U}_{B1} + \dot{U}_{B2} = \dot{I}_{B1} Z_{B1} + \dot{I}_{B2} Z_{B2}. \quad (3)$$

Параметры фазы  $B$  можно выразить через параметры фазы  $A$  следующим образом [1]:

$$Z_{B1} = -jX_C + k^2 Z_{A1}; \quad (4)$$

$$Z_{B2} = -jX_C + k^2 Z_{A2}. \quad (5)$$

После подстановки (1), (4) и (5) в (2) и (3) получим систему:

$$\dot{U} = \dot{I}_{A1} Z_{A1} + \dot{I}_{A2} Z_{A2};$$

$$U = jI_{A1}(-jX_C + k^2 Z_{A1}) - jI_{A2}(-jX_C + k^2 Z_{A2}). \quad (6)$$

В результате решения находим прямую составляющую тока фазы  $A$ :

$$\dot{I}_{A1} = \frac{[(k^2 Z_{A2} - jX_C) - jkZ_{A2}] \dot{U}}{Z_{A1} Z_{A2} + Z_{B1} Z_{A2}} \quad (7)$$

и обратную составляющую тока фазы  $A$ :

$$\dot{I}_{A2} = \frac{[(k^2 Z_{A1} - jX_C) + jkZ_{A1}] \dot{U}}{Z_{A1} Z_{A2} + Z_{B1} Z_{A2}}. \quad (8)$$

Введем коэффициент эллиптичности по току, определив его как отношение модулей обратной и прямой составляющих токов:

$$\varepsilon = \frac{|\dot{I}_{A2}|}{|\dot{I}_{A1}|} = \frac{|(k^2 - jk) Z_{A1} - jX_C|}{|(k^2 + jk) Z_{A2} - jX_C|}, \quad (9)$$

где

$$Z_{A1} = Z_{sA} + Z_{r1} jX_{mA} / (Z_{r1} + jX_{mA});$$

$$Z_{A2} = Z_{sA} + Z_{r2} jX_{mA} / (Z_{r2} + jX_{mA});$$

$$Z_{r1} = R_{rA}/s + jX_{rA}; \quad Z_{r2} = R_{rA}/(2-s) + jX_{rA};$$

$$Z_{sA} = R_{sA} + jX_{sA}.$$

Можно показать, что в комплексной плоскости уравнение (9) при изменении  $X_C$  и постоянных  $k$ ,  $Z_{A1}$  и  $Z_{A2}$  описывает окружность, не проходящую через начало координат. Действительно, положив  $Z_{A1}(k^2 - jk) = \dot{C}'$ ;  $-j = \dot{D}'$ ;  $k^2 + jk = \dot{A}'$ , получим уравнение для вектора  $\bar{\varepsilon}$  в виде

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\dot{C}' + \dot{D}' X_C}{\dot{A}' + \dot{D}' X_C}. \quad (10)$$

Это уравнение, как показано в [2], является уравнением окружности. Вектор центра окружности  $m$  и ее радиус  $r$  (рис. 3) определяются по выражениям:

$$\bar{m} = \frac{\dot{C}' \dot{D}' - \dot{D}' \dot{A}'}{\dot{A}' \dot{D}' - \dot{A}' \dot{D}'}; \quad r = \frac{|\dot{C}' \dot{D}' - \dot{D}' \dot{A}'|}{|\dot{A}' \dot{D}' - \dot{A}' \dot{D}'|}.$$

Как видно из рис. 3, существует определенное сопротивление конденсатора  $X_{Ce}$ , при котором вектор  $\bar{\varepsilon}$  имеет минимальное значение. Для определения  $X_{Ce}$  найдем производную  $\partial |\bar{\varepsilon}| / \partial X_C$  и приравняем ее нулю. Записав модуль  $\bar{\varepsilon}$  как частное модулей числителя и знаменателя и выразив их через активные и реактивные составляющие, получим

$$\frac{\partial |\bar{\varepsilon}|}{\partial X_C} = \frac{\partial}{\partial X_C} \left\{ \sqrt{\frac{-(R_{A1} k^2 - k^2 X_{A1})^2 + (R_{A1} k^2 - X_{A1} k - X_C)^2}{(R_{A2} k^2 - k^2 X_{A2})^2 + (R_{A2} k^2 - X_{A1} k - X_C)^2}} \right\}. \quad (11)$$

Приравняв производную нулю и выполнив преобразования, получим квадратное уравнение

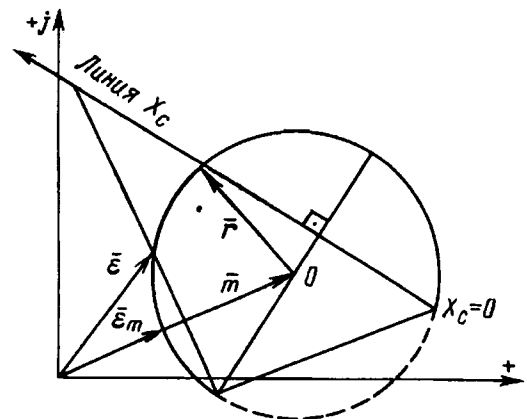


Рис. 3

относительно  $X_{C\varepsilon}$ :

$$A1 X_{C\varepsilon}^2 + B1 X_{C\varepsilon} + C1 = 0, \quad (12)$$

где

$$A1 = D_0 - B_0; \quad B1 = C_0 - D^2 + A_0 + B_0^2;$$

$$C1 = B_0 C_0 + B_0 D_0^2 - D_0 A_0 - D_0 B_0^2;$$

$$A_0 = -R_{A1} k - X_{A1} k^2;$$

$$B_0 = R_{A1} k^2 - X_{A1} k;$$

$$C_0 = R_{A2} k - X_{A2} k^2;$$

$$D_0 = R_{A2} k^2 + X_{A2} k.$$

Решив это уравнение, определим реактивные сопротивления  $X_{C\varepsilon}$  и соответственно емкость  $C_\varepsilon$ , при которой коэффициент эллиптичности достигает минимума ( $\varepsilon_m$ ):

$$X_{C\varepsilon} = \frac{B1 \pm \sqrt{B1^2 - 4A1 C1}}{2A1}; \quad C_\varepsilon = (2\pi f X_{C\varepsilon})^{-1}. \quad (13)$$

Значение  $\varepsilon_m$  рассчитывается по (9) при подстановке в него  $X_{C\varepsilon}$ .

Коэффициент трансформации и емкость, при которых в зазоре двигателя возникает круговое поле, определим по формулам согласно [1]:

$$k_{кр} = X_{A1}/R_{A1}; \quad (14)$$

$$C_{кр} = [2\pi f (k_{кр} R_{A1} + k_{кр}^2 X_{A1})]^{-1}. \quad (15)$$

По приведенным выше выражениям были рассчитаны зависимости  $C_{кр}$  и  $C_\varepsilon$  от скольжения  $s$  серийного ОАД АИРЕ63В4 мощностью  $P_{2н}=250$  Вт, параметры фазы А которого:  $R_{сА}=20,17$  Ом;  $X_{сА}=18,58$  Ом;  $X_{mA}=250$  Ом;  $R_{rА}=20$  Ом;  $X_{rА}=21,02$  Ом.

Зависимости  $C_{кр}$  и  $C_\varepsilon$  для трех значений коэффициентов трансформации  $k=0,915$ ; 1,1 и 1,54 представлены на рис. 4. Здесь же показана зависимость коэффициента трансформации, обеспечивающая круговое поле при данном скольжении. Графики зависимостей  $\varepsilon_m(s)$  для трех значений  $k$  приведены на рис. 5.

Из анализа кривых рис. 4 следует, что чем больше коэффициент трансформации, тем меньше емкость, обеспечивающая минимальный коэффициент эллиптичности, по сравнению с емкостью, требуемой для создания кругового поля. Зависимости  $C_\varepsilon$  при  $k=1,54$  и 1,1 пересекают кривую  $C_{кр}$  в одной точке, а при  $k=0,915$  в двух точках. В точках пересечения кривых коэффициент эллиптичности  $\varepsilon_m=0$ , так как в этих точках поле круговое и требуемый коэффициент трансформации равен коэффициенту трансформации, при котором рассчитывались кривые  $C_\varepsilon$ .

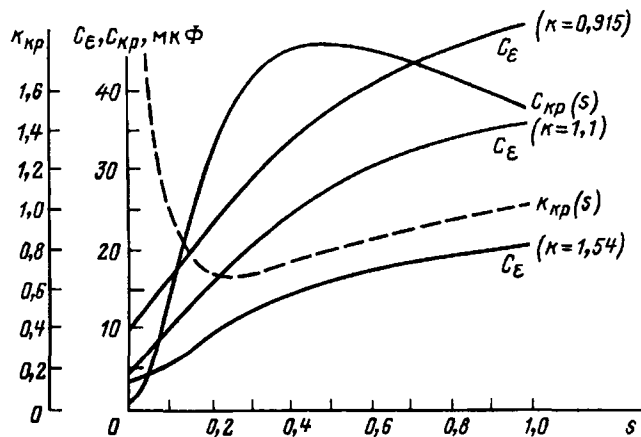


Рис. 4

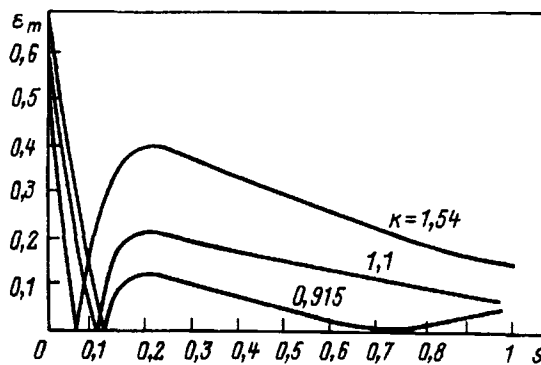


Рис. 5

Из рис. 5 следует, что чем выше коэффициент трансформации, тем больше степень эллиптичности магнитного поля.

Покажем применение данной методики к выбору емкости конденсатора. С этой целью были рассчитаны рабочие и пусковые характеристики ОАД ( $P_{2н}=250$  Вт) для значений емкости и коэффициентов трансформации согласно кривым  $C_\varepsilon(s)$  и  $C_{кр}(s)$  (рис. 5). Задаваясь рядом значений  $C_{ei}$  и соответствующим скольжением  $s_i$  при  $k=k_i$ , по методике [1] рассчитывались полезные мощности и определялось скольжение  $s_{нi}$ , при котором  $P_{2и}=P_{2н}$ . Расчет повторялся для кривых с другим значением  $k$ . По кривым  $C_{кр}(s)$  и  $k_{кр}(s)$  определялось скольжение  $s_{кр}$  и емкость  $C_{кр}$ , при которых поле в зазоре двигателя в номинальном режиме круговое.

По результатам расчета на рис. 6 построены зависимости  $k, s_{н}$  от емкости  $C_\varepsilon$ , обеспечивающей минимум обратного поля при мощности на валу  $P_{2н}=250$  Вт. Здесь также на оси абсцисс отмечена точка, в которой  $C_\varepsilon=C_{кр}$ . Для заданных значений  $k, C_\varepsilon$  и  $s_{н}$  были определены затем кратности пускового  $k_{п}$  и максимального  $k_{м}$  моментов, КПД,  $\cos \varphi$ , номинальный ток и напряжение на конденсаторе в режиме холостого хода. Эти характеристики показаны на рис. 6 и 7. Ток и напряжения даны в относительных единицах, где

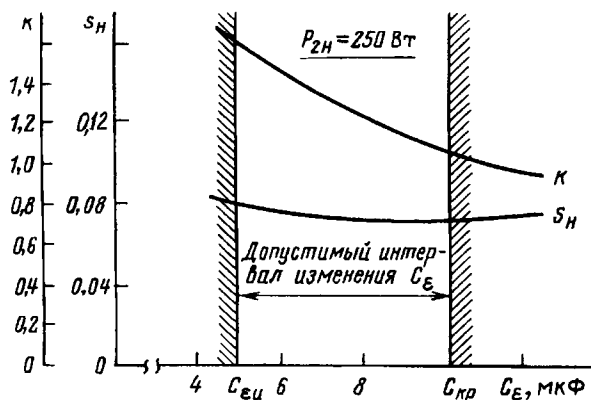


Рис. 6

за базовые значения приняты ток двигателя в номинальном режиме при круговом поле и напряжение сети. Как следует из рис. 7, значения КПД и  $\cos \varphi$  при изменении емкости  $C_\epsilon$  в рассматриваемом интервале мало меняются, поэтому для нахождения допустимой зоны изменения  $C_\epsilon$  следует использовать зависимости  $U_k^*$ ,  $k_n$  и  $k_m$ .

Выбрав в качестве левой границы емкость  $C_{\epsilon и}$ , при которой напряжение на конденсаторе  $U_k \leq 500$  В, а в качестве правой  $C_\epsilon = C_{\epsilon кр}$ , определим допустимый диапазон изменения  $C_\epsilon$ :  $5,2 \leq C_\epsilon \leq 10,3$  мкФ. Этот диапазон может быть уменьшен, если при выборе граничных значений емкости исходить из условия обеспечения кратностей максимального пускового момента. Тогда, как показывает анализ, оптимальная емкость и коэффициент трансформации лежат в пределах:  $8 \leq C_\epsilon \leq 9,5$  мкФ и  $1,1 \leq k \leq 1,2$ . В серийном двигателе АИРЕ63В4 эти значения соответственно равны:  $C = 16$  мкФ и  $k = 1,16$ .

Разработанная методика позволяет сравнительно просто выбрать емкость, необходимую для получения минимального коэффициента эллиптичности магнитного поля. Методика основана на непосредственном определении минимума обратного поля в отличие от [1], где этот минимум определяется косвенно по КПД. Она также позволяет назначить другую полезную мощность при  $k = \text{const}$  и выборе  $C$  по кривым  $C_\epsilon(s)$  (рис. 4),

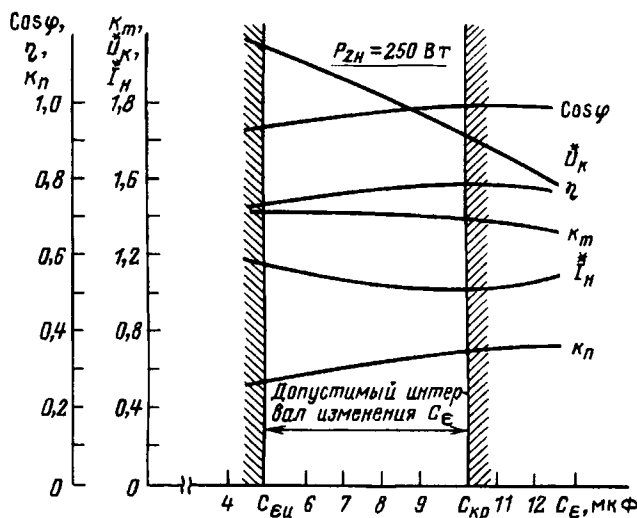


Рис. 7

если мы хотим уменьшить стоимость электропривода и оценить полученные при этом характеристики двигателя.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лопухина Е.М., Семенчуков Г.А. Проектирование асинхронных микродвигателей с применением ЭВМ. — М.: Высшая школа, 1980.
2. Петров Г.Н. Электрические машины, ч. II. — М.: Л.: Госэнергоиздат, 1963.

[20.10.96]

**Авторы:** Мощинский Юрий Анатольевич окончил электромеханический факультет Московского энергетического института (МЭИ) в 1965 г. Защитил кандидатскую диссертацию «Исследование синхронного двигателя с постоянными магнитами и асинхронно-гистерезисным пуском» в 1975 г. в МЭИ. Заведующий научно-исследовательской лабораторией кафедры электромеханики МЭИ.

**Киселева Марина Михайловна** получила степень бакалавра технических наук в МЭИ в 1996 г. по направлению «электромеханика». Магистрант кафедры электромеханики МЭИ.

### Уважаемые авторы!

Редакция публикует при каждой статье краткие биографические сведения об авторах. В связи с этим просим всех авторов при направлении статьи в редакцию сообщить следующие сведения:

1. Полные имена и отчества всех авторов
2. Какой факультет, какого вуза и когда закончил
3. Когда получил ученую степень, где и по какой тематике (теме) была защита
4. Место настоящей работы и должность.

Кроме того, напоминаем, что на каждую статью следует представлять краткий (4—5 предложений) реферат на русском и английском языках (включая название), а также ключевые слова.

# Электромагнитное поле линейного проводника с током, параллельного граничной плоскости «воздушная среда—проводящее полупространство»

ЦИЦИКЯН Г.Н.

Решение для электромагнитного поля горизонтально ориентированного диполя, полученное рядом авторов с использованием основополагающего подхода Зоммерфельда в простейшем варианте однородного и изотропного полупространства, обобщено для случая анизотропного по удельной электропроводности полупространства с  $\mu \geq \mu_0$ . Результаты анализа применимы к расчету взаимных сопротивлений (передаточных импедансов) линий, проложенных вдоль стальных стенок или корпусов. Основные расчетные выражения даны для квазистационарного приближения.

Ключевые слова: электромагнитное поле, горизонтальный электрический диполь, анизотропное полупространство, линия, взаимное сопротивление

**Введение.** В обширной литературе, посвященной расчету поля проводника с током, ориентированного параллельно границе проводящей среды, теоретически заполняющей все полупространство, можно выделить ряд этапов в направлении обобщения решения, к которым относятся как введение предположения о неоднородности среды по параметру удельной электропроводности, в частности, двух- и многослойности, но при сохранении изотропности [1–3], так и предположения об анизотропности в горизонтальном и вертикальном направлениях при сохранении остальных допущений и ограничений [4–8]. В перечисленных литературных источниках имеется одно общее условие, состоящее в том, что магнитная проницаемость проводящей среды, заполняющей полупространство, принята равной магнитной постоянной  $\mu_0$ . Однако при определенных условиях такое предположение может не выполняться, например, при расположении проводников с током вблизи стальных стенок, являющихся частью корпусов, палуб, платформ, либо в случае прокладки проводников вдоль них. Поэтому представляет интерес распространить решение на случай, когда  $\mu \geq \mu_0$ . С целью выявления роли указанного обобщающего предположения ограничимся при выводе лишь случаем анизотропной по удельной электропроводности среды, заполняющей полупространство.

**Основные уравнения.** Основные уравнения, описывающие задачу, запишем аналогично [5, 6, 8] с помощью векторного потенциала, но в

*Solution for electromagnetic field of a horizontal electric dipole, obtained with the use of the basic approach by a number of authors including Sommerfeld in the simplest variant of homogeneous and isotropic half-space is generalized for the case of an anisotropic (by conductivity) half-space with  $\mu \geq \mu_0$ . Results of the analysis can be applied to calculating mutual impedances of lines, laid along steel walls and housings. The main calculation expressions are given for quasistationary approximation.*

**Key words:** electromagnetic field, horizontal electric dipole, anisotropic half-space, line, mutual impedance

отличии от указанных работ, приравнивая ротор от него, как в большинстве случаев, вектору магнитной индукции, а не напряженности магнитного поля.

Тогда, считая сначала полупространство изотропным, имеем:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \sigma' \vec{E}; \quad \sigma' = \sigma + i\omega\epsilon; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -i\omega \vec{B}; \quad \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}; \quad (2)$$

$$\vec{E} = -i\omega \vec{A} - \operatorname{grad} \psi, \quad (3)$$

где  $\vec{A}$  — векторный потенциал,  $\psi$  — скалярный потенциал.

Из этих уравнений вытекает, что

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \sigma' \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = -\mu \sigma' i\omega \vec{A} - \mu \sigma' \operatorname{grad} \psi. \quad (4)$$

Вводя дивергенцию векторного потенциала с помощью соотношения

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\mu \sigma' \psi, \quad (5)$$

из (4) получаем

$$\nabla^2 \vec{A} = \gamma_m^2 \vec{A}, \quad (6)$$

где

$$\gamma_m^2 = i\omega \mu \sigma', \quad (7)$$

и для прямоугольных компонент векторного потенциала

$$\nabla^2 A_{xyz} = \gamma_m^2 A_{xyz}. \quad (8)$$



Обобщение на случай, когда  $\sigma' = \sigma'_h = \sigma'_x = \sigma'_y$  и  $\sigma'_z = \sigma'_y \neq \sigma'$  производится с помощью калибровки [4]

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\mu \sigma'_h \psi. \quad (9)$$

При этом уравнения для компонент векторного потенциала по  $x$  и  $y$  внешне не отличаются от (8)

$$\nabla^2 A_{x,y} = \gamma_m^2 A_{x,y}, \quad (10)$$

где

$$\gamma_m^2 = i\omega \mu \sigma'_h, \quad (11)$$

но для  $z$ -компоненты векторного потенциала уравнение выглядит сложнее [8]:

$$\nabla^2 A_z - \gamma_m^2 \frac{\sigma'_v}{\sigma'_h} A_z + \left( \frac{\sigma'_v}{\sigma'_h} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{div} \vec{A}) = 0. \quad (12)$$

Дальнейшие соображения основаны на известном интегральном представлении (интеграле Зоммерфельда) векторного потенциала поля диполя, который для геометрии задачи (см. рисунок) с диполем ориентированным вдоль оси  $x$ , имеет вид

$$A_{0x}^p = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_0} e^{-u_0(z-h)/} J_0(\lambda \rho) d\lambda, \quad (13)$$

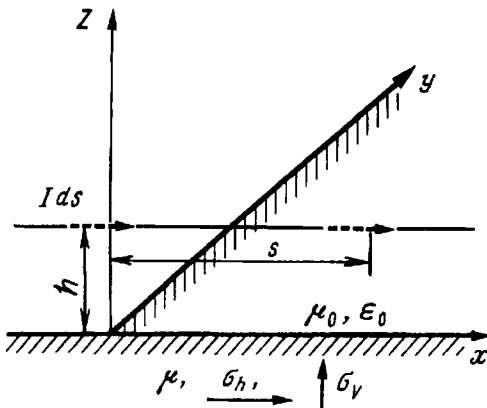
где  $u_0 = (\lambda^2 + \gamma_0^2)^{1/2}$ ;  $\gamma_0^2 = -\epsilon_0 \mu_0 \omega^2$ , верхний индекс  $p$  обозначает первичное поле, т.е. поле без учета реакции проводящей среды;  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ;  $J_0(\lambda \rho)$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Тогда результирующий векторный потенциал по оси  $x$  при  $0 \leq z < h$  можно записать в виде

$$A_{0x} = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_0} [e^{-u_0(h-z)} + R(\lambda) e^{-u_0(z+h)}] \times J_0(\lambda \rho) d\lambda, \quad (14)$$

где  $R(\lambda)$  подлежит определению.

Соответственно для нижнего полупространства



$$A_x = \frac{\mu I ds}{4\pi} \int_0^\infty F(\lambda, z) J_0(\lambda \rho) d\lambda. \quad (15)$$

Компонента векторного потенциала по оси  $y$  равна нулю. Для  $z$ -компоненты векторного потенциала при  $z > 0$  можем записать [2, 8]:

$$A_{0z} = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty S(\lambda) e^{-u_0(z+h)} J_0(\lambda \rho) d\lambda, \quad (16)$$

а для  $z \leq 0$

$$A_z = \frac{\mu I ds}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty G(\lambda, z) J_0(\lambda \rho) d\lambda. \quad (17)$$

Учитывая, что  $\frac{\partial}{\partial x} J_0(\lambda \rho) = -\lambda \frac{x}{\rho} J_1(\lambda \rho) = -\lambda \cos \varphi J_1(\lambda \rho)$ , где  $\varphi$  — угол между осью  $x$  и радиусом-вектором  $\rho$ , записи (16) и (17) могут быть обоснованы и физическими соображениями.

Поскольку  $A_x$  удовлетворяет уравнению (10), то

$$\frac{\partial^2 F(\lambda, z)}{\partial z^2} - (\lambda^2 + \gamma_m^2) F(\lambda, z) = 0.$$

Подставляя  $A_x$  и  $A_z$  согласно (15) и (17) в уравнение (12), найдем:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - (\lambda^2 K + \gamma_m^2) G(\lambda, z) = (K-1) \frac{\partial F(\lambda, z)}{\partial z},$$

где  $K = \sigma'_h / \sigma'_v$ .

Решения для  $F(\lambda, z)$  и  $G(\lambda, z)$  могут быть записаны в следующей форме [8]:

$$F(\lambda, z) = A(\lambda) e^{\mu z}; \quad (18)$$

$$G(\lambda, z) = B(\lambda) e^{\nu z} - (u/\lambda^2) A(\lambda) e^{\mu z}, \quad (19)$$

где

$$u = (\lambda^2 + \gamma_m^2)^{1/2}; \quad v = (\lambda^2 K + \gamma_m^2)^{1/2}. \quad (20)$$

Коэффициенты  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ ,  $R(\lambda)$  и  $S(\lambda)$  определяются из условий непрерывности тангенциальных составляющих векторов  $E$  и  $H$  при  $z=0$ :

$$E_{0x} = E_x, \quad E_{0y} = E_y, \quad H_{0x} = H_x, \quad H_{0y} = H_y.$$

Эти условия при  $z=0$  могут быть сведены к граничным условиям относительно компонент векторного потенциала и его производных с помощью (2), (3), (5), (9) в виде:

$$\frac{1}{\gamma_0^2} \left( \frac{\partial A_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial A_{0z}}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{\gamma_m^2} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=0}; \quad (21)$$

$$A_{0x} = A_x; \quad (22)$$

$$\frac{1}{\mu} A_z = \frac{1}{\mu_0} A_{0z}; \quad (23)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_x}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_{0x}}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (24)$$

Решение. Принимая во внимание (14), (15) и (18), получаем из (22)

$$A(\lambda) = \mu_r^{-1} \frac{\lambda}{u_0} e^{-u_0 h} [1 + R(\lambda)], \quad (25)$$

где  $\mu_r^{-1} = \mu_0 / \mu$ .

В то же время из (24) находим:

$$A(\lambda) = \frac{\lambda}{u} e^{-u_0 h} [1 - R(\lambda)]. \quad (26)$$

Из (25) и (26) получаем:

$$R(\lambda) = \frac{\mu_r u_0 - u}{\mu_r u_0 + u}. \quad (27)$$

Подставив (27) в (26), находим:

$$A(\lambda) = 2\lambda e^{-u_0 h} (\mu_r u_0 + u)^{-1}. \quad (28)$$

Из (23) имеем:

$$B(\lambda) - \frac{u}{\lambda^2} A(\lambda) = S(\lambda) e^{-u_0 h}. \quad (29)$$

Наконец, из (21) находим:

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{\gamma_m^2} \left[ \nu B(\lambda) - \frac{\gamma_m^2}{\lambda^2} A(\lambda) \right] = \\ & = \frac{\mu_0}{\gamma_0^2} \left[ \frac{\lambda}{u_0} e^{-u_0 h} (1 + R(\lambda)) - u_0 S(\lambda) e^{-u_0 h} \right]. \quad (30) \end{aligned}$$

Исключив из (29) и (30) величину  $S(\lambda)$ , с учетом (27) и (28), получим:

$$B(\lambda) = \lambda^{-2} \frac{u_0^2 + \mu_r^{-1} u_0 u}{\nu (\gamma_0 / \gamma_m)^2 + \mu_r^{-1} u_0} A(\lambda). \quad (31)$$

Компоненту  $A_x$  по формуле (15) можно записать окончательно в виде

$$A_x = \frac{\mu I ds}{2\pi} \int_0^\infty \lambda e^{\mu z} e^{-u_0 h} (\mu_r u_0 + u)^{-1} J_0(\lambda \rho) d\lambda, \quad (32)$$

а компоненту  $A_z$  согласно (17) — в виде

$$\begin{aligned} A_z = & \frac{\mu I ds}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \lambda^{-1} \left[ \frac{u_0^2 + \mu_r^{-1} u_0 u}{\nu (\gamma_0 / \gamma_m)^2 + \mu_r^{-1} u_0} e^{\nu z} - u e^{\mu z} \right] \times \\ & \times \frac{e^{-u_0 h}}{\mu_r u_0 + u} J_0(\lambda \rho) d\lambda. \quad (33) \end{aligned}$$

Выражение (14) для  $A_{0x}$  с учетом (27) запишем как

$$\begin{aligned} A_{0x} = & \frac{\mu_0 I ds}{4\pi} \left[ \frac{e^{-\gamma_0 R}}{R} + \frac{e^{-\gamma_0 R_1}}{R_1} - 2 \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_0} \frac{u e^{-u_0(z+h)}}{\mu_r u_0 + u} \times \right. \\ & \left. \times J_0(\lambda \rho) d\lambda \right], \quad (34) \end{aligned}$$

где  $R = [\rho^2 + (z-h)^2]^{1/2}$ ;  $R_1 = [\rho^2 + (z+h)^2]^{1/2}$ , и при записи первых двух членов в квадратной скобке в (34) был использован интеграл Зоммерфельда.

Выражение (16) для  $A_{0z}$  содержит коэффи-

циент  $S(\lambda)$ , определяемый через (29), (30) и (28).

Поэтому

$$S(\lambda) = 2\lambda^{-1} \left[ \frac{u_0^2 + \mu_r^{-1} u_0 u}{\nu (\gamma_0 / \gamma_m)^2 + \mu_r^{-1} u_0} - u \right] (\mu_r u_0 + u)^{-1}. \quad (35)$$

Подставив (35) в (16), для  $A_{0z}$  имеем следующее общее выражение:

$$\begin{aligned} A_{0z} = & \frac{\mu_0 I ds}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{e^{-u_0(z+h)}}{\lambda (\mu_r u_0 + u)} \times \\ & \times \left[ \frac{u_0^2 - u \nu (\gamma_0 / \gamma_m)^2}{\nu (\gamma_0 / \gamma_m)^2 + \mu_r^{-1} u_0} \right] J_0(\lambda \rho) d\lambda. \quad (36) \end{aligned}$$

С помощью выражений (32)–(34), (36) можно записать  $\psi$  и  $\psi_0$  по формулам:

$$-\frac{1}{i\omega\mu_0\epsilon_0} \left( \frac{\partial A_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial A_{0z}}{\partial z} \right) = \psi_0; \quad -\frac{1}{\mu\sigma'_h} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \psi. \quad (37)$$

Выражения для  $A(\lambda)$ ,  $R(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$  и  $S(\lambda)$  при  $\mu = \mu_0$  переходят в одноименные в соответствии с [8], если  $\gamma_m$  при  $\mu = \mu_0$  записать как  $\gamma$ . При  $\mu_r = 1$  выражение (34) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} A_{0x} 4\pi / \mu_0 I ds = & \frac{e^{-\gamma_0 R}}{R} - \frac{e^{-\gamma_0 R_1}}{R_1} + 2 \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-u_0(z+h)}}{u_0 + u} \times \\ & \times J_0(\lambda \rho) d\lambda, \quad (38) \end{aligned}$$

что полностью согласуется с выражением (1) статьи [9].

При  $\mu_r = 1$  и  $K=1$ , когда  $u=v$  в соответствии с (20), выражение (35) для  $S(\lambda)$  приобретает простой вид:

$$S(\lambda) = -2\lambda \frac{u_0 - u}{u\gamma_0^2 + \gamma^2 u_0}, \quad (39)$$

а выражение (36) можно записать в форме

$$A_{0z} 4\pi / \mu_0 I ds = -2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{(u_0 - u) e^{-u_0(z+h)}}{u\gamma_0^2 + \gamma^2 u_0} \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda, \quad (40)$$

что полностью согласуется с выражением (2) публикации [9].

В статье [9] выражения (38) и (40) далее анализируются в предположении, что  $u$  можно заменить на  $\gamma$  и  $|\gamma| \gg |\gamma_0|$ .

Выражения (32) и (33) при  $v=u$  и  $\mu_r=1$  также полностью согласуются с выражениями (5) и (6) статьи [9].

**Квазистационарное приближение.** Ограничимся квазистационарным приближением, при котором  $\gamma_0=0$  и  $u_0=\lambda$ . Тогда  $A_x$  и  $A_z$  представляются в виде

$$A_x = \frac{\mu I ds}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\mu_r \lambda + u} e^{\mu z} e^{-\lambda h} J_0(\lambda \rho) d\lambda; \quad (41)$$

$$A_z = \frac{\mu I ds}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \left[ \frac{\mu_r}{\mu_r \lambda + u} e^{\nu z} + \frac{u}{\lambda} \frac{(e^{\nu z} - e^{\mu z})}{\mu_r \lambda + u} \right] \times$$

$$\times e^{-\lambda h} J_0(\lambda \rho) d\lambda. \quad (42)$$

При  $u=v$  (41) остается без изменения, а (42) значительно упрощается:

$$A_z = \frac{\mu I ds}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{\mu_r e^{uz} e^{-\lambda h}}{\mu_r \lambda + u} J_0(\lambda \rho) d\lambda. \quad (42a)$$

Из выражений (41) и (42) можно найти  $\psi$  на основе (37) полагая  $\mu_r=1$ :

$$\psi = -\frac{I ds}{2\pi\sigma'_h} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \left[ v e^{uz} - \frac{\gamma^2 e^{uz}}{\lambda + u} \right] \lambda^{-1} e^{-\lambda h} J_0(\lambda \rho) d\lambda. \quad (43)$$

При  $z=0$

$$\psi|_{z=0} = -\frac{I ds}{2\pi\sigma'_h} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \left( \frac{v-u}{\lambda} + 1 \right) e^{-\lambda h} J_0(\lambda \rho) d\lambda. \quad (43a)$$

Если принять  $h=0$ , то (43a) ничем не отличается от выражения (IV.84), данного в [8]. При  $\mu_r \geq 1$ ,  $v=u$ ,  $\sigma'=\sigma'_h$  из (41) и (42) выражение для  $\psi$  находим в виде

$$\psi = -\frac{I ds}{2\pi\sigma'} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{\lambda + \mu_r u}{\mu_r \lambda + u} e^{uz} e^{-\lambda h} J_0(\lambda \rho) d\lambda. \quad (44)$$

При  $z=0$  и  $\mu_r=1$

$$\psi = \frac{I ds}{2\pi\sigma} x (h^2 + \rho^2)^{-3/2}. \quad (45)$$

При  $h=0$  получаем

$$\psi = \psi_1 = \frac{I ds}{2\pi\sigma} \frac{x}{\rho^3}. \quad (46)$$

Замена  $\sigma'$  на  $\sigma$  означает, что токи смещения в земле пренебрежимо малы.

Следуя [8] из (43a) имеем при  $h=0$ :

$$\psi = \psi_1 + \psi_2,$$

где  $\psi_1$  определяется по (46), если  $\sigma$  заменить на  $\sigma'_h$ , а  $\psi_2$  равно:

$$\psi_2 = \frac{I ds}{2\pi\sigma'_h} \int_0^\infty [(v-u) J_1(\lambda \rho) d\lambda] \frac{x}{\rho}, \quad (47)$$

слагаемое  $\psi_2$  исчезает, если полупространство изотропно. Результат для (47) известен (выражение (IV.89) работы [8]):

$$\psi_2 = -\frac{I ds}{2\pi\sigma'_h \rho^2} [\exp(-\gamma \rho) - K^{1/2} \exp(-\gamma \rho K^{-1/2})] \frac{x}{\rho}. \quad (48)$$

Выражение для  $A_x$  по (41) при  $\mu_r=1$  с помощью преобразований, аналогичных приложению в [9], выглядит следующим образом, если  $z=0$ ,  $h=0$ :

$$A_x = \frac{\mu_0 I ds}{2\pi\gamma^2 \rho^3} [1 - (1 + \gamma \rho) e^{-\gamma \rho}], \quad (49)$$

что совпадает с (IV.91) [8] с учетом  $\mu_0$ .

Из полученных уравнений для  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  и  $A_x$  согласно (41) при  $\mu_r=1$  можно получить вы-

ражения для  $E_x$  и  $E_y$ , в частности, для  $E_y$  в виде (IV.91) из работы [8]:

$$E_y = \frac{I ds}{2\pi\sigma'_h \rho^5} 3(1 + \Lambda), \quad (50)$$

где  $3\Lambda = (3K^{1/2} + \gamma \rho) \exp(-\gamma \rho K^{-1/2}) - (3 + \gamma \rho) \times \exp(-\gamma \rho)$ .

В случае изотропной среды  $K=1$  и член  $\Lambda$  исчезает. При  $|\gamma \rho| \gg 1$   $\Lambda$  исчезает и в анизотропном случае.

При  $\gamma \rho \rightarrow 0$

$$E_y = \frac{3I ds xy}{2\pi(\sigma'_v \sigma'_h)^{1/2} \rho^5}. \quad (51)$$

Дальнейшие подробности даны в [8]. В частности, в [8] приведены частотные зависимости взаимного сопротивления (передаточного импеданса)  $E_y/1$ , которые здесь мы сочли возможным не воспроизводить.

Выражения для  $A_x$  по (41) и  $\psi$  согласно (44) при  $z=0$  дают возможность найти напряженность электрического поля и, соответственно, взаимное сопротивление в квазистационарном приближении для изотропного полупространства, но с веществом, для которого  $\mu_r$  значительно больше единицы.

Из (3) имеем:

$$\begin{aligned} E_x &= -i\omega A_x - \frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ E_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3a)$$

где в выражениях для  $A_x$  (41) и  $\psi$  (44)

$$u = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_m^2}; \quad \gamma_m^2 = i\omega\mu\sigma'.$$

Учитывая предположение относительно значений  $\mu_r$  и сказанное вначале по поводу достаточно высокой удельной электропроводности  $\sigma$  материала, с весьма большим основанием можем пренебречь  $\lambda^2$  по сравнению с  $\gamma_m^2$  и без особой погрешности заменить  $u$  на  $\gamma_m$ .

Выражения (41) и (44) целесообразно записать при  $z=0$  в преобразованном виде:

$$A_x = \frac{\mu_0 I ds}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda + \mu_r^{-1} u} e^{-\lambda h} J_0(\lambda \rho) d\lambda; \quad (52)$$

$$\psi = -\frac{I ds}{2\pi\sigma'} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \left( \mu_r - \frac{\mu_r^2 - 1}{\mu_r} \frac{\lambda}{\lambda + \mu_r^{-1} u} \right) e^{-\lambda h} J_0(\lambda \rho) d\lambda. \quad (53)$$

При  $\mu_r=1$  результат для  $\psi$  не будет отличаться от (45) и (46). Из (53) имеем

$$\psi = \psi'_1 + \psi'_2, \quad (54)$$

где

$$\psi'_1 = \frac{I ds}{2\pi\sigma'} \frac{\mu_r x}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}}; \quad (55)$$

$$\psi'_2 = \frac{I ds}{2\pi\sigma'} \frac{\mu_r^2 - 1}{\mu_r} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda + \mu_r^{-1} u} e^{-\lambda h} J_0(\lambda \rho) d\lambda. \quad (56)$$

Следовательно, в (52) и в (56) имеем один и тот же интеграл, в котором замена  $u$  на  $\gamma_m$  позволяет его свести к двум другим интегралам:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda h} J_0(\lambda \rho) d\lambda - \mu_r^{-1} \gamma_m \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda h} J_0(\lambda \rho) d\lambda}{\lambda + \mu_r^{-1} \gamma_m}.$$

Отсюда (52) можно заменить на выражение

$$A_x \approx \frac{\mu_0 I ds}{2\pi} \left[ (h^2 + \rho^2)^{-1/2} - \mu_r^{-1} \gamma_m \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda h} J_0(\lambda \rho) d\lambda}{\lambda + \mu_r^{-1} \gamma_m} \right], \quad (57)$$

а (54) — на уравнение

$$\psi = \frac{I ds}{2\pi\sigma'} [\mu_r^{-1} x (h^2 + \rho^2)^{-3/2} - \Phi_3], \quad (58)$$

где

$$\Phi_3 = \frac{\mu_r^2 - 1}{\mu_r} \left[ \mu_r^{-1} \gamma_m \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda h} J_0(\lambda \rho) d\lambda}{\lambda + \mu_r^{-1} \gamma_m} \right], \quad (59)$$

Интеграл, входящий в (57)–(59), является табличным при  $h=0$  [10, (6.562.2); 11, (14.3.3)]:

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(\lambda \rho) d\lambda}{\lambda + \mu_r^{-1} \gamma_m} = \frac{\pi}{2} [H_0(\mu_r^{-1} \gamma_m \rho) - Y_0(\mu_r^{-1} \gamma_m \rho)], \quad (60)$$

где  $H_0$  и  $Y_0$  — функции Струве и Бесселя второго рода от аргумента  $\mu_r^{-1} \gamma_m \rho$ .

Выражение для  $\Phi_3$  можно получить либо дифференцированием по  $x$  формулы (60), либо дифференцированием (59) с последующим применением формулы 14.3.(3) [11].

Поэтому при  $h=0$

$$\Phi_3 = -\frac{\mu_r^2 - 1}{\mu_r} (\mu_r^{-1} \gamma_m \rho)^2 \frac{\pi}{\rho^3} [H_1(\mu_r^{-1} \gamma_m \rho) - \frac{2}{\pi} - Y_1(\mu_r^{-1} \gamma_m \rho)]; \quad (59a)$$

$$A_x = \frac{\mu_0 I ds}{2\pi\rho} \left\{ 1 - (\mu_r^{-1} \gamma_m \rho) \frac{\pi}{2} [H_0(\mu_r^{-1} \gamma_m \rho) - Y_0(\mu_r^{-1} \gamma_m \rho)] \right\}, \quad (61)$$

$$\psi = \frac{I ds}{2\pi\sigma'} \left[ \mu_r^{-1} \frac{x}{\rho^3} - \Phi_3 \right], \quad (62)$$

где  $\Phi_3$  определено по (59a).

Таким образом, при  $z=0$  и  $h=0$

$$E_x = -\frac{i\omega\mu_0 I ds}{2\pi\rho} \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} (\mu_r^{-1} \gamma_m \rho) [H_0(\mu_r^{-1} \gamma_m \rho) - Y_0(\mu_r^{-1} \gamma_m \rho)] \right\} - \frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad (63)$$

$$E_y = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad (64)$$

где  $\psi$  определяется согласно (62).

Обращаясь вновь к выражениям (58) и (59), для  $E_y$  можно записать:

$$E_y = -\frac{I ds}{2\pi\sigma'} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu_r^{-1} x (h^2 + \rho^2)^{-3/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_r^2 - 1}{\mu_r} (\mu_r^{-1} \gamma_m) \frac{x}{\rho} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda h} \lambda J_1(\lambda \rho) d\lambda}{\lambda + \mu_r^{-1} \gamma_m} \right]. \quad (65)$$

Заметим, что при  $|\mu_r^{-1} \gamma_m \rho| \gg \lambda \rho$  и использовании интеграла [12, выражение 4.14.(2)]

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda h} \lambda J_1(\lambda \rho) d\lambda = \rho (h^2 + \rho^2)^{-3/2}$$

выражение для  $E_y$  по (65) можно заменить на приближенное:

$$E_y = \frac{I ds}{2\pi\sigma'} \mu_r \frac{3xy}{(h^2 + \rho^2)^{5/2}}. \quad (66)$$

При  $h=0$  имеем

$$E_y = \frac{\mu_r I ds}{2\pi\sigma'} \frac{3xy}{\rho^5}, \quad (67)$$

которое при  $\mu_r=1$  переходит в (51), если  $\sigma'_y = \sigma'_h = \sigma'$ .

Таким образом, по сравнению с немагнитным веществом взаимное сопротивление (передаточный импеданс) увеличивается в  $\mu_r$  раз.

Вместе с тем из (62) и (64) для  $E_y$  имеем:

$$E_y = -\frac{I ds}{2\pi\sigma'} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu_r^{-1} x \rho^{-3} + \frac{\mu_r^2 - 1}{\mu_r} \xi^2 x \rho^{-3} \times \right. \\ \left. \times \frac{\pi}{2} \left[ H_1(\xi) - \frac{2}{\pi} - Y_1(\xi) \right] \right\}, \quad (68)$$

где для больших значений модуля аргумента  $\xi = \mu_r^{-1} \gamma_m \rho$  можно использовать асимптотические ряды [13]:

$$\left. \begin{aligned} H_\nu(\xi) - Y_\nu(\xi) &\approx \pi^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} - k\right) (\xi/2)^{2k-\nu+1}}; \\ H_0(\xi) - Y_0(\xi) &\approx 2\pi^{-1} (\xi^{-1} - \xi^{-3} + \dots); \\ H_1(\xi) - Y_1(\xi) &\approx 2\pi^{-1} (1 + \xi^{-2} - 1^2 \cdot 3 \xi^{-4} + \dots); \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Произведем дифференцирование по  $y$  в (68). После дифференцирования для  $E_y$  можно записать:

$$E_y = -\frac{I ds}{2\pi\sigma'} \frac{xy}{\rho^5} \times \left\{ -3\mu_r^{-1} + \frac{\mu_r^2 - 1}{\mu_r} \left\{ \xi^2 + \frac{1}{3} \xi^4 = \xi^2 \frac{3\pi}{2} [H_2(\xi) - Y_2(\xi)] \right\} \right\}. \quad (70)$$

Отсюда с учетом (69) при  $|\xi| \gg 1$ :

$$E_y \approx -\frac{I ds}{2\pi\sigma'} \frac{xy}{\rho^5} \left\{ -3\mu_r^{-1} + \frac{\mu_r^2 - 1}{\mu_r} \left[ \xi^2 + \frac{1}{3} \xi^4 - \frac{1}{3} \xi^4 - \xi^2 - 3 + \dots \right] \right\} \approx \frac{I ds}{2\pi\sigma'} \frac{3\mu_r xy}{\rho^5},$$

что совпадает с (67).

При  $|\xi| < 1$  имеем

$$H_2(\xi) - Y_2(\xi) \cong \pi^{-1}(4\xi^{-2} + 1).$$

Поэтому в этом случае выражение (70) можно оценить по приближенной формуле:

$$E_y \cong -\frac{I ds}{2\pi\sigma'} \frac{xy}{\rho^5} \left[ -3\mu_r^{-1} + \frac{\mu_r^2 - 1}{\mu_r} (\xi^2 - 2\xi) \right], \quad (71)$$

где, как и прежде,

$$\xi = \mu_r^{-1/2} \sqrt{i\omega\mu_0\sigma} \rho = \mu_r^{-1/2} \rho (1+i)b^{-1}, \\ b = \sqrt{2/\omega\mu_0\sigma}.$$

В (71)  $\mu_r^{-1/2} \rho b^{-1} < \sqrt{2}$ .

Перепишем (71) в виде

$$E_y \cong \frac{I ds}{2\pi\sigma'} \frac{xy}{\rho^5} \left\{ \mu_r \frac{2\mu_r^{-1/2} \rho}{b} + \mu_r^{-1} (3 - 2\mu_r^{-1/2} (\rho/b)) - \right. \\ \left. - 2 \frac{\mu_r^2 - 1}{\mu_r} i [\mu_r^{-1} (\rho/b)^2 - \mu_r^{-1/2} (\rho/b)] \right\}. \quad (71a)$$

Если  $\mu_r^{-1/2} \rho/b = 1$ , то мнимая часть выражения (71a) равна нулю и

$$E_y \cong \frac{I ds}{2\pi\sigma'} \frac{xy}{\rho^5} 2\mu_r, \quad (72)$$

т.е. для указанного значения передаточный импеданс по сравнению с (67) оказывается в 1,5 раза меньше.

Из (63) нетрудно получить выражение для  $E_x$  при  $x=0$ :

$$E_x(x=0) = -\frac{i\omega\mu_0 I ds}{2\pi\rho} \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} \xi [H_0(\xi) - Y_0(\xi)] \right\} - \\ - \frac{I ds}{2\pi\sigma'\rho^3} \left\{ \mu_r^{-1} + \frac{\mu_r^2 - 1}{\mu_r} \frac{\pi}{2} \xi^2 \left[ H_1(\xi) - \frac{2}{\pi} - Y_1(\xi) \right] \right\}. \quad (73)$$

При  $|\xi| > 1$

$$E_x(x=0) \cong -\frac{I ds}{2\pi\sigma'\rho^3} \left[ 2\mu_r + \frac{3i(4\mu_r^2 - 1)}{|\gamma\rho|^2} \right]. \quad (74)$$

Первый член полученного результата можно усмотреть из выражений (57), (58) и (59) при  $|\mu_r^{-1} \gamma_m \rho| \gg 1$ .

**Бесконечно длинная линия.** Если дипольный источник  $I ds$  (см. рисунок) сдвинут от начала координат на расстояние  $s$  вдоль оси  $x$ , то  $\rho' = [(x-s)^2 + y^2]^{1/2}$  и при  $\gamma_0 = 0$  из (34) имеем

$$A'_{0x} = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} + 2 \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda + \mu_r^{-1} u} e^{-\lambda(z+h)} J_0(\lambda\rho') d\lambda \right] = \\ = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi} \int_0^\infty \left[ e^{-\lambda|z-h|} - e^{-\lambda(z+h)} + 2 \frac{\lambda}{\lambda + \mu_r^{-1} u} e^{-\lambda(z+h)} \right] \times \\ \times J_0(\lambda\rho') d\lambda, \quad (75)$$

где

$$R' = [(\rho')^2 + (z-h)^2]^{1/2}; \\ R_1 = [(\rho')^2 + (z+h)^2]^{1/2}.$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J_0 \left\{ \lambda [(x-s)^2 + y^2]^{1/2} \right\} ds$$

и заменим  $x-s=t$ ,  $-ds=dt$ , тогда записанный интеграл [10, выражение 6.773.3] равен  $2\lambda^{-1} \times \cos \lambda y$ ,  $y > 0$ . Поэтому с учетом [12, выражение 1.4.(2)] находим для бесконечной линии с током  $I$ :

$$A'_{0x} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \ln \frac{y^2 + (z+h)^2}{y^2 + (z-h)^2} + 4 \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(z+h)}}{\lambda + \mu_r^{-1} u} \cos \lambda y d\lambda \right]. \quad (76)$$

При  $\mu_r = 1$  на основании [12, выражение 4.2.(31)] получим

$$A'_{0x} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \ln \frac{y^2 + (z+h)^2}{y^2 + (z-h)^2} + 2 \sum_{p=1}^2 [2^{-1} \pi \alpha_p^{-1} (H_1(\alpha_p) - Y_1(\alpha_p)) - \alpha_p^{-2}] \right\}, \quad (77)$$

где  $\alpha_{1,2} = [(z+h) \mp iy] \gamma$ .

Этот результат с учетом разницы в обозначениях известен и приведен, например, в [14, 15].

В этом случае напряженность поля  $E_{0x}$  не зависит от  $x$  и

$$E_{0x} = -i\omega A'_{0x} = -Z_m I, \quad (78)$$

где  $Z_m$  — взаимное сопротивление на единицу длины линии.

В выражении (76) так же, как и в (52) и (56) заменим  $u$  на  $\gamma_m$ . Тогда интеграл в (76) вычисляется через интегральную показательную функцию. Такая замена практиковалась в ряде работ, например в [16–18]. Так, в [17] отмечено, что ошибка от замены пренебрежимо мала, если  $\mu_r \geq 50$ ,  $f \geq 50$  Гц,  $\sigma > 5 \cdot 10^6$  См/м и  $h \geq 0,1$  м. В этом случае  $Z_m$  в (78) легко представимо в виде

$$Z_m = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \left\{ \ln \frac{y^2 + (z+h)^2}{y^2 + (z-h)^2} + 2 \sum_{p=1}^2 [\exp(\alpha'_p) E_1(\alpha'_p)] \right\}, \quad (79)$$

где  $\alpha'_{1,2} = (z+h \mp iy) \mu_r^{-1} \gamma_m$ , причем произведения простой экспоненты на интегральную экспоненту хорошо табулированы в комплексной области [13, 19].

Для больших значений аргумента произведения  $\exp(\alpha) E_1(\alpha)$  может быть представлено асимптотическим рядом:

$$\alpha^{-1} [1 - \alpha^{-1} + 1 \cdot 2\alpha^{-2} - \dots].$$

При  $|\mu_r^{-1} \gamma_m| \gg 1$  ограничимся первыми двумя членами асимптотического ряда. Для  $Z_m$  при  $z=0$ ,  $h=0$  находим

$$Z_m \cong \frac{\mu_r}{\pi y^2 \sigma'}, \quad (80)$$

а для  $E_x$  —

$$E_x \cong -\frac{\mu_r I}{\pi y^2 \sigma'}. \quad (81)$$

Можно, например, строго показать, что при  $\mu_r^{-1/2}/b = 2$

$$E_x = -\frac{\mu_r I}{\pi \sigma' y^2} (0,743 + i 0,27),$$

а по модулю  $-\frac{\mu_r I}{\pi \sigma' y^2} 0,79$ ,

и этот результат не столь существенно отличается от (81).

Оценка (81) может быть получена из (76) при  $z=h=0$  и  $u \approx \gamma_m$ , если записать:

$$\begin{aligned} E_x &\approx -\frac{i\omega\mu_0 I}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda y}{\lambda + \mu_r^{-1} \gamma_m} d\lambda = -\frac{i\omega\mu_0 I}{\pi} g(\mu_r^{-1} \gamma_m y) = \\ &= -\frac{i\omega\mu_0 I}{\pi} g(\mu_r^{-1/2} \gamma y), \end{aligned} \quad (82)$$

где для  $g(z)$  согласно [13] имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$g(z) = \int_0^\infty \frac{\cos t}{t+z} dt \approx z^{-2} \left( 1 - \frac{3!}{z^2} + \frac{5!}{z^4} - \dots \right).$$

При ограничении первым членом разложения получаем оценку (81).

**Выводы.** Получены выражения для векторных и скалярных потенциалов горизонтально ориентированного электрического диполя над проводящим полупространством с обобщением на случай  $\mu \geq \mu_0$ .

Дан ряд достаточно строгих и приближенных оценок для напряженности электрического поля и взаимного сопротивления (передаточного импеданса) горизонтального диполя и бесконечной линии.

**Приложение.** Пусть изолированная линия расположена на корпусе с достаточно большой толщиной стенки из стали типа АК, относительная магнитная проницаемость которой принята равной 80. Ток в линии возвращается по корпусу. Частота 50 Гц, а расстояние у принято равным половине диаметра по изоляции, в примере это 0,025 м. Удельная проводимость стали выбрана равной  $5 \cdot 10^6$  См/м.

Воспользуемся формулой (82) для оценки напряженности поля. Аргумент функции  $g(z)$  для выбранных значений входящих величин оказывается равным  $\frac{1+i}{\sqrt{2}} 0,1242$ , т.е. по модулю значительно меньшим единицы. Поэтому нельзя воспользоваться приведенным асимптотическим рядом для  $g(z)$ . Для расчета используем представление  $g(z)$  через интегральные синус и косинус:

$$-g(z) = \text{Ci}(z) \cos z + \left( \text{Si}(z) - \frac{\pi}{2} \right) \sin z.$$

Подставляя записанные функции через выражающие их степенные ряды и ограничиваясь степенью, не выше второй, получаем

$$g(z) \approx (-0,5772 - \ln z) (1 - z^2/2!) - \frac{\pi}{2} z - \frac{3}{4} z^2.$$

Тогда для значения  $g(z)$  найдем:

$$g\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} 0,1242\right) = 1,6407 - i 0,6706.$$

Поэтому  $E_x = -4\pi \cdot 10^{-5} I$ , а по модулю  $-0,22 \cdot 10^{-3} I$  В/м.

Данный результат говорит о том, что линия с током 5А будет создавать на длине параллельного участка в 10 м в непосредственной близости напряжение, большее 10 МВт и эта оценка может представить определенный интерес для практики.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Riordan J. and Sunde E.D. Mutual Impedance of grounded Wires for horizontally stratified Two-layer Earth.-Bell System Techn. Journal, vol. 12 (1933).
2. Sunde E.D. Earth conduction effects in transmission Systems. N.Y., 1949.
3. Wait J.R. The fields of a line source of current over a stratified conductor. — Appl. Sci. Res. B3, (1953).
4. Четаев Д.Н. О поле низкочастотного электрического диполя, лежащего на поверхности однородного анизотропного проводящего полупространства. — Журнал технической физики, 1962, т. XXXII, вып. II, с. 1342—1348.
5. Wait J.R. Electromagnetic fields of a dipole over an anisotropic half-space. — Canadian Journal of Physics, 1966, vol. 44.
6. Wait J.R. Fields of a horizontal dipole over a stratified anisotropic half-space. — IEEE Trans. Antennas Propag. 1966. AP-14.
7. Wynn J.C. Electromagnetic coupling with a collinear Array on a two-layer anisotropic Earth. — Geological Survey professional paper, 1077, Washington, 1979.
8. Уэйт Дж.Р. Геоэлектромагнетизм. Пер. с англ. — М.: Недра, 1987.
9. Wait J.R. The electromagnetic fields of a horizontal dipole in the presence of a conducting half-space. — Canadian Journal of Physics, 1961, vol. 39.
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, т. II. — М.: Наука, 1970.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, т. I. — М.: Наука, 1969.
13. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. Пер. с англ. — М.: Наука, 1979.
14. Цицикян Г.Н. Нарушения поперечной симметрии, индуктивные сопротивления и взаимные влияния в судовых кабельных сетях. — С.-Пб: ЦНИИ «Румб», 1991.
15. Цицикян Г.Н., Новикова О.Ю. Индуктивные параметры прямолинейного провода с током с обратным путем через окружающую среду. — Изв. РАН, Энергетика, 1995, № 1.
16. Poritsky H., Jerrard R.P. Eddy-current losses in a semiinfinite solid due to a nearby alternating current. — Trans. AIEE, 1954, vol. 73, pt. I, May.
17. Krakowski M. Active power loss in the ferromagnetic medium due to currents in a multi-conductor system. — Archiwum Elektrotechniki, 1970, t. XIX, Zeszyt 1.
18. Игнатъев В.И., Цицикян Г.Н. Индуктированные напряжения в кабельных линиях при замыканиях на корпус судна. — Вопросы судостроения. Сер. Судовая электротехника и связь, 1980, вып. 30.
19. National Bureau of Standards. Tables of the exponential integral for complex arguments. — Washington: Government Printing Office, 1958 — (Applied Math. Series, 51).
20. Karwowski A., Michalski K.A. A comparative numerical study of several techniques for modelling a horizontal wire antenna over a lossy half-space. — In: U.R.S.I. International Symposium on Electromagnetic Theory, 1986, August 25—29, Budapest, Hungary, pt B.

[19.01.97]

**Автор: Цицикян Георгий Николаевич** окончил в 1963 г. Ереванский политехнический институт. В 1989 г. защитил докторскую диссертацию по специальности «Электротехнические комплексы и системы, включая их управление и регулирование» в Ленинградском электротехническом институте. Заведующий сектором ЦНИИ судовой электротехники и технологий.

# Операторные схемы замещения зависимых источников при ненулевых начальных условиях

ВИТКОВ М.Г., ВИТКОВА А.А.

Для зависимых источников напряжения и тока разработан метод составления операторных схем замещения. Он позволяет учитывать ненулевые начальные значения входных и выходных напряжений или токов и их производных по времени. Рассматриваются примеры электрических цепей, содержащих многополюсники.

Ключевые слова: многополюсник, зависимый источник, операторная схема замещения, ненулевое начальное состояние

При составлении операторных схем замещения электрических цепей, содержащих индуктивные и емкостные компоненты, обычно применяют известные операторные схемы замещения индуктивности и емкости, которые содержат независимые источники напряжения, позволяющие учитывать ненулевые начальные значения  $i_{Lk}(0)$  — токов индуктивностей и  $u_{Ck}(0)$  — напряжений емкостей различных номеров  $k$  в начальный момент  $t=0$ . Под начальным моментом здесь и в дальнейшем понимается момент до возможного начального скачка («до коммутации»), который иногда обозначают  $t=-0$  или  $t=0_-$ . Ранее автором был разработан метод составления операторных схем замещения, в которых учитываются ненулевые начальные значения напряжений, токов и их производных по времени, для линейных двухполюсников, имеющих операторные сопротивления произвольных конечных порядков<sup>1</sup>. Предложенный нами метод может быть распространен и на более общие цепи с многополюсниками.

Для этого в настоящей статье разработан метод составления операторных схем замещения широкого класса линейных инерционных зависимых источников напряжений и токов при не-

*A method for drawing up Laplace's transformation models has been developed for dependent voltage and current sources, which method makes it possible allow for non-zero initial values of input and output voltages or currents and their time derivatives. Examples of some circuits, containing multi-ports are considered.*

Key words: multi-port, dependent source, Laplace's transformation model, non-zero initial state

нулевых начальных значениях. Рассмотрены примеры расчета цепей с четырехполюсниками.

Последовательно будут рассмотрены:

1) источники напряжения (рис. 1,а), управляемые напряжением  $u_{вх}(t)$  (ИНУН), когда при нулевых начальных условиях изображения напряжений связаны между собой передаточной функцией  $H_u(p)$  —

$$U_{вых}(p) = E(p) = H_u(p) U_{вх}(p); \quad (1)$$

2) источники напряжения (рис. 2,а), управляемые током  $i_{вх}(t)$  (ИНУТ) с передаточным сопротивлением  $Z(p)$ , когда при нулевых начальных условиях

$$U_{вых}(p) = E(p) = Z(p) I_{вх}(p); \quad (2)$$

3) источники тока (рис. 3,а), управляемые напряжением  $u_{вх}(t)$  (ИТУН) с передаточной проводимостью  $Y(p)$ , когда нулевым начальным условиям соответствует соотношение

$$I_{вых}(p) = J(p) = Y(p) U_{вх}(p); \quad (3)$$

4) источники тока (рис. 4,а), управляемые током  $i_{вх}(t)$  (ИТУТ) с передаточной функцией по току  $H_i(p)$ , когда при нулевом исходном состоянии связь между токами имеет вид

$$I_{вых}(p) = J(p) = H_i(p) I_{вх}(p). \quad (4)$$

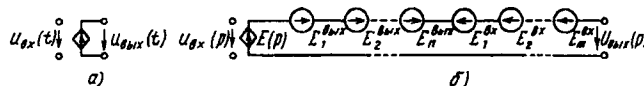


Рис. 1

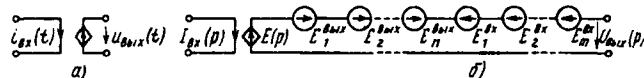


Рис. 2

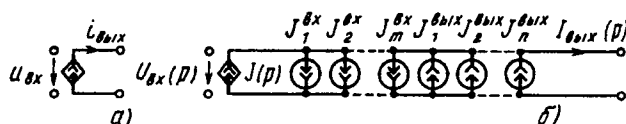


Рис. 3

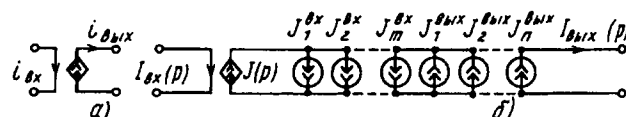


Рис. 4

<sup>1</sup> Витков М.Г. Операторные схемы замещения двухполюсника при ненулевых начальных условиях. «Электричество», 1977, № 11.

В настоящей статье рассматривается класс линейных зависимых источников с конечными порядками числителя и знаменателя ( $m$  и  $n$ ) соответствующей передаточной функции  $H_u(p)$ ,  $Z(p)$ ,  $Y(p)$  или  $H_i(p)$  следующего вида:

$$\frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k p^k}{\sum_{k=0}^n a_k p^k}. \quad (5)$$

Рассмотрим вначале построение операторной схемы замещения ИНУН (1). Равенство (1) с учетом выражения (5)  $H_u(p)$  эквивалентно следующим операторному и дифференциальному уравнениям:

$$\sum_{k=0}^m b_k p^k U_{\text{вх}}(p) = \sum_{k=0}^n a_k p^k U_{\text{вых}}(p) \quad (6)$$

и

$$\sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k u_{\text{вх}}(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k u_{\text{вых}}(t)}{dt^k}. \quad (7)$$

Здесь и в дальнейшем нулевая производная по времени некоторой переменной  $u_{\text{вх}}(t)$ ,  $u_{\text{вых}}(t)$ ,  $i_{\text{вх}}(t)$  или  $i_{\text{вых}}(t)$  совпадает с самой переменной. Например:

$$\frac{d^0 u_{\text{вх}}(t)}{dt^0} = u_{\text{вх}}(t), \quad \frac{d^0 u_{\text{вых}}(t)}{dt^0} = u_{\text{вых}}(t) \text{ и т.п.}$$

Уравнение (6) является результатом преобразования Лапласа последнего дифференциального уравнения при нулевых начальных напряжениях  $u_{\text{вх}}(t)$  и  $u_{\text{вых}}(t)$  и их производных по времени. При ненулевых начальных значениях этих величин переход от дифференциального уравнения к соответствующему операторному выполняем по известной теореме дифференцирования. Именно для производных по времени входных и выходных напряжений переход к изображениям Лапласа осуществляется с помощью соотношения этой теоремы в следующем виде:

$$\frac{d^k u_{\text{вх}}(t)}{dt^k} \div p^k U_{\text{вх}}(p) - \sum_{j=0}^{k-1} p^{k-1-j} \frac{d^j u_{\text{вх}}(t)}{dt^j} \Big|_{t=0} \quad (8)$$

и

$$\frac{d^k u_{\text{вых}}(t)}{dt^k} \div p^k U_{\text{вых}}(p) - \sum_{j=0}^{k-1} p^{k-1-j} \frac{d^j u_{\text{вых}}(t)}{dt^j} \Big|_{t=0}. \quad (9)$$

В результате преобразования Лапласа дифференциального уравнения (7) с применением соотношений (8) и (9) приходим после перегруппировки слагаемых к следующему операторному компонентному уравнению неавтономного линейного ИНУН (1) при ненулевых начальных условиях:

$$U_{\text{вых}}(p) = E(p) + \sum_{k=1}^n E_k^{\text{вых}}(p) - \sum_{k=1}^m E_k^{\text{вх}}(p). \quad (10)$$

Здесь:

1) первое слагаемое правой части

$$E(p) = H_u(p) U_{\text{вх}}(p) \quad (11)$$

определяет в операторной схеме замещения ИНУН (рис. 1,б) напряжение зависимого источника (11), управляемого входным напряжением точно так же, как в случае (1), когда исходное состояние было нулевым;

2)  $n$  слагаемых ( $1 \leq k \leq n$ )

$$E_k^{\text{вых}}(p) = \frac{d^{k-1} u_{\text{вых}}(t)}{dt^{k-1}} \Big|_{t=0} \sum_{j=0}^{n-k} (a_{k+j} p^j) : \sum_{j=0}^n (a_j p^j) \quad (12)$$

соответствуют в рассматриваемой операторной схеме замещения ИНУН  $n$  независимым источникам напряжения и учитывают начальные значения выходного напряжения  $U_{\text{вых}}$  и его  $(n-1)$ -й производной по времени  $d^k u_{\text{вых}}(t)/dt^k$ ;

3)  $m$  отрицательных слагаемых ( $1 \leq k \leq m$ ) в правой части (10)

$$E_k^{\text{вх}}(p) = \frac{d^{k-1} u_{\text{вх}}(t)}{dt^{k-1}} \Big|_{t=0} \sum_{j=0}^{m-k} (a_{k+j} p^j) : \sum_{j=0}^n (b_j p^j) \quad (13)$$

соответствуют в рассматриваемой операторной схеме  $m$  независимым источникам напряжения (13), направленным противоположно выбранному положительному направлению зависимого источника и учитывающим начальные значения  $u_{\text{вх}}(0)$  и  $d^k u_{\text{вх}}(t)/dt^k$ .

Перейдем теперь к выводу операторных схем замещения ИНУТ, ИТУН и ИТУТ. Анализ в этих случаях полностью аналогичен выводу схемы ИНУН, если только в его начале заменить соотношение (1) на соответствующее выбранному типу зависимого источника уравнение (2), (3) или (4). Поэтому можно ограничиться результирующими соотношениями. Начнем с ИНУТ. При ненулевых начальных условиях он описывается операторным компонентным уравнением такого же вида (10), как и ИНУН. Однако выражения слагаемых правой части этого уравнения в случае ИНУТ другие:

1) первое слагаемое правой части

$$E(p) = Z(p) I_{\text{вх}}(p) \quad (14)$$

определяет напряжение зависимого источника (14) искомой операторной схемы замещения ИНУТ (рис. 2,б), управляемого входным током точно так же, как и в случае (2), когда исходное состояние было нулевым;

2) выражение  $n$  слагаемых ( $1 \leq k \leq n$ )  $E_k^{\text{вых}}(p)$  совпадает с их выражением (12) для ИНУН; они соответствуют в рассматриваемой



операторной схеме замещения  $n$  независимым источникам напряжения (в случае ИНУТ эти слагаемые так же позволяют учесть ненулевые начальные значения выходного напряжения зависимого источника и его  $(n-1)$ -й производной по времени);

3)  $m$  отрицательных слагаемых ( $1 \leq k \leq m$ ) в правой части компонентного уравнения (10) в случае ИНУТ

$$E_k^{\text{BX}}(p) = \frac{d^{k-1} i_{\text{BX}}(t)}{dt^{k-1}} \Big|_{t=0} \sum_{j=0}^{m-k} (b_{k+j} p^j) : \sum_{j=0}^n (a_j p^j) \quad (15)$$

соответствуют в его операторной схеме замещения  $m$  независимым источникам напряжения (15), которые позволяют учитывать ненулевые начальные значения  $i_{\text{BX}}(0)$  и  $d^k i_{\text{BX}}(t)/dt^k$ .

Рассмотрим теперь ИТУН. В этом случае описанным выше общим способом можно прийти к операторному компонентному уравнению

$$I_{\text{ВЫХ}}(p) = J(p) - \sum_{k=1}^m J_k^{\text{BX}}(p) + \sum_{k=1}^n J_k^{\text{ВЫХ}}(p). \quad (16)$$

Здесь:

1) первое слагаемое

$$J(p) = Y(p) U_{\text{BX}}(p) \quad (17)$$

в операторной схеме замещения ИТУН (рис. 3,б) соответствует зависимому операторному источнику тока (17);

2)  $m$  отрицательных слагаемых ( $1 \leq k \leq m$ )

$$J_k^{\text{BX}}(p) = \frac{d^{k-1} u_{\text{BX}}(t)}{dt^{k-1}} \Big|_{t=0} \sum_{j=0}^{m-k} (b_{k+j} p^j) : \sum_{j=0}^n (a_j p^j) \quad (18)$$

соответствуют в операторной схеме  $m$  независимым источникам тока (18), которые направлены противоположно общему току и учитывают ненулевые начальные значения  $u_{\text{BX}}(0)$  и  $d^k u_{\text{BX}}(t)/dt^k$ ;

3)  $n$  положительных слагаемых ( $1 \leq k \leq n$ )

$$J_k^{\text{ВЫХ}}(p) = \frac{d^{k-1} i_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^{k-1}} \Big|_{t=0} \sum_{j=0}^{n-k} (a_{k+j} p^j) : \sum_{j=0}^n (a_j p^j) \quad (19)$$

соответствуют в операторной схеме замещения ИТУН  $n$  источникам тока (19), которые учитывают ненулевые начальные значения выходного тока и его первых  $(n-1)$ -х производных  $d^k i_{\text{ВЫХ}}(t)/dt^k$ .

Анализируя таким же образом ИТУТ, исходя из соотношения (4), мы нашли, что вид его компонентного операторного уравнения совпадает с уравнением (16), как и у ИТУН. Однако для ИТУТ выражения некоторых слагаемых этого уравнения другие. Так, в случае ИТУТ первое слагаемое в правой части компонентного уравнения (16)

определяет в его операторной схеме замещения (рис. 4,б) зависимый операторный источник тока (20). Отличный вид для ИТУТ имеют и  $m$  вторых слагаемых в правой части (16)

$$J_k^{\text{BX}}(p) = \frac{d^{k-1} i_{\text{BX}}(t)}{dt^{k-1}} \Big|_{t=0} \sum_{j=0}^{m-k} (b_{k+j} p^j) : \sum_{j=0}^n (a_j p^j), \quad (21)$$

которые соответствуют в последней операторной схеме замещения  $m$  независимым операторным источникам тока (21), учитывающим ненулевые начальные значения тока  $i_{\text{BX}}(0)$  и его первых  $(m-1)$ -х производных  $d^k i_{\text{BX}}(t)/dt^k$ . Физический смысл и выражения (19) последних  $n$  слагаемых правой части компонентного уравнения ИТУН и ИТУТ совпадают. В рассматриваемой операторной схеме замещения ИТУТ (см. рис. 4,б) они соответствуют  $n$  независимым источникам тока (19), учитывающим ненулевые начальные значения тока  $i_{\text{ВЫХ}}(0)$  и его первых  $(n-1)$ -х производных по времени.

**Пример 1.** Рассчитаем разработанным методом переходный процесс выходного напряжения мостового LC-четырёхполюсника (рис. 5,а), нагруженного на согласованное сопротивление  $R = \sqrt{L/C}$ . Рассматриваемый четырёхполюсник, как известно, реализует передаточную функцию по напряжению фазового контура первого порядка:

$$H_u(p) = \frac{a-p}{a+p}, \quad (22)$$

где  $a = 1/\sqrt{LC}$ .

Предполагаем, что переходный процесс вызван изменением в начальный момент знака входного напряжения:

$$u_{\text{BX}}(t) = \begin{cases} u_{\text{BX}}(0) = -U, & t \leq 0; \\ +U, & t > 0, \end{cases} \quad (23)$$

$$(24)$$

когда исходное значение выходного напряжения  $u_{\text{ВЫХ}}(0) = -U$ . При нулевых начальных условиях передача напряжения на выход четырёхполюсника с заданной передаточной функцией (22) соответствует известной операторной схеме замещения (рис. 5,б) с одним зависимым источником напряжения (11). Чтобы составить соответствующую операторную схему при ненулевых начальных условиях, перейдем от заданной формы записи передаточной функции (22) примера к стандартной форме записи передаточных функций (5). Сравнивая (5) и (22), находим для примера:  $m+n=1$ ;  $b_0=a$ ;  $b_1=-1$ ;  $a_0=a$ ;  $a_1=1$ . Поэтому операторная схема замещения задачи (рис. 5,в), помимо зависимого источника (11)

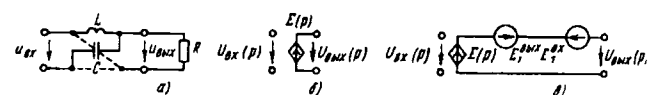


Рис. 5

$$J(p) = H_i(p) I_{\text{BX}}(p) \quad (20)$$

$$E(p) = \frac{a-p}{a+p} U(p) = \frac{a-p}{a+p} \frac{U}{p} = \frac{(a-p)U}{p(a+p)},$$

содержит два независимых источника; один (так как  $n=1$ ) источник напряжения (12)

$$E_1^{\text{ВЫХ}}(p) = \frac{d^0 u_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^0} \Big|_{t=0} (a_1 p^0) : \sum_{j=0}^1 (a_j p^j) = -\frac{U}{a+p}$$

и один (так как  $m=1$ ) источник напряжения (13)

$$E_1^{\text{ВХ}}(p) = \frac{d^0 u_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^0} \Big|_{t=0} (b_1 p^0) : \sum_{j=0}^n (a_j p^j) = \frac{-u_{\text{ВХ}}(0)}{a+p} = \frac{U}{a+p}.$$

По найденной операторной схеме замещения находится изображение искомого выходного напряжения:

$$U_{\text{ВЫХ}}(p) = E(p) + E_1^{\text{ВЫХ}}(p) - E_1^{\text{ВХ}}(p) = \frac{(a-p)U}{p(a+p)} - \frac{U}{a+p} - \frac{U}{a+p} = \frac{aU - 3pU}{p(a+p)}.$$

Расчет примера завершается переходом к оригиналу последнего выражения с помощью теоремы разложения Хевисайда (рис. 6):

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = U - 4Ue^{-at}, \quad t > 0.$$

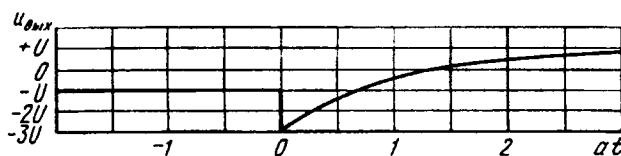


Рис. 6

**Пример 2.** Составить операторную схему замещения неуравновешенного активного четырехполюсника (рис. 7,а) с  $Y$ -параметрами:  $Y_{11}(p) = G$ ;  $Y_{12}(p) = 0$ ;  $Y_{21}(p) = b_0/(a_0 + a_1 p + a_2 p^2)$ ;  $Y_{22}(p) = 0$ .

Для решения последней задачи воспользуемся известной схемой замещения четырехполюсника с двумя ИТУН (рис. 7,б). Первый из них благодаря нулевому значению параметра  $Y_{12}$  в искомой схеме отсутствует. Второй из них, если требуется учесть ненулевые начальные значения, необходимо заместить разработанной здесь схемой замещения ИТУН (см. рис. 3,б), с учетом того, что рассматриваемый ИТУН управляется входным напряжением четырехполюсника:  $U_{\text{ВХ}}(p) = U_1(p)$ . В последнем примере имеем для  $Y(p) = Y_{21}(p)$  следующие значения параметров:

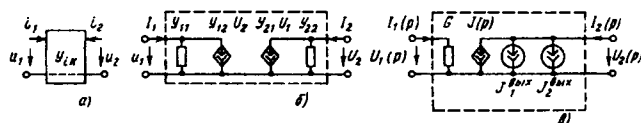


Рис. 7

$n=2$ ;  $m=0$ . Поэтому в искомой схеме замещения (рис. 7,в), кроме зависимого источника тока (17)

$$J(p) = Y_{21}(p) U_1(p) = \frac{b_0 U_1(p)}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2},$$

имеются два (так как  $n=2$ ) независимых источника тока (19), параметры которых определим с учетом связи выходных токов схемы замещения ИТУН и рассматриваемого четырехполюсника ( $i_{\text{ВЫХ}} = i_2$ ):

$$J_1^{\text{ВЫХ}}(p) = \frac{d^0 i_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^0} \Big|_{t=0} \sum_{j=0}^1 (a_{1+j} p^j) : \sum_{j=0}^2 (a_j p^j) = \frac{a_1 + a_2 p}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2} i_2(0)$$

и

$$J_2^{\text{ВЫХ}}(p) = \frac{di_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} \Big|_{t=0} (a_2) : \sum_{j=0}^2 (a_j p^j) = \frac{a_2}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2} \frac{di_2}{dt} \Big|_{t=0}.$$

[13.02.97]

**Авторы:** Витков Матвей Григорьевич окончил факультет электровакуумной техники и специального приборостроения Московского энергетического института (МЭИ) в 1955 г. В 1993 г. защитил докторскую диссертацию по теме «Анализ и синтез передаточных функций электрических цепей (новые эффективные численные методы схемного проектирования)» в Институте радиотехники и электроники РАН. Профессор кафедры «Теория электрических цепей» Московского технического университета связи и информатики.

**Виткова Алла Андреевна** окончила факультет автоматики и вычислительной техники МЭИ в 1963 г. В 1971 г. защитила кандидатскую диссертацию по теме «Вопросы быстрогодействия магнитоуправляемых контактных коммутационных элементов» в Центральном научно-исследовательском институте связи. Научный сотрудник Института проблем передачи информации РАН.

# Распределение потенциала от двух точечных источников тока в круглой неоднородной пластине

МЕЙЕР А.А.

*Получено аналитическое решение задачи о распределении потенциала от двух произвольно расположенных источников тока в круглой неоднородной пластине, проводимость которой зависит только от радиуса. В качестве примера приведено решение для случая степенной зависимости проводимости от радиуса.*

**Ключевые слова:** теория поля, точечные источники тока, неоднородные плоские структуры, распределение потенциала, расчеты

При рассмотрении задач теории потенциала в неоднородных плоских структурах типа круглых пластин или шайб могут встречаться неоднородности двух типов: радиальные неоднородности удельного сопротивления и радиальные неоднородности толщины пластины. Неоднородности первого типа чаще всего встречаются на полупроводниковых пластинах германия или кремния, вырезанных из монокристаллов, выращенных по методу Чохральского. Такие пластины широко используются в полупроводниковой промышленности. Неоднородности второго типа могут встречаться на специально изготовленных тонких металлических пластинах, а также при исследовании тонких проводящих слоев, отшлифованных особыми методами.

В настоящей статье рассматривается распределение потенциала от двух произвольно расположенных точечных источников тока в круглой неоднородной пластине с радиальной неоднородностью. Если пластина достаточно тонкая (т.е. расстояние рассматриваемой точки от источника тока значительно больше толщины пластины), то задачу можно считать двумерной и рассматривать уравнение для потенциала на плоскости. При этом роль проводимости играет величина  $S(r)=\sigma d$ , где  $\sigma$  — объемная проводимость материала пластины, а  $d$  — толщина пластины. Эту величину в дальнейшем будем называть проводимостью. Неоднородность величины  $S(r)$  может быть обусловлена либо неоднородностью объемной проводимости  $\sigma$ , либо неоднородностью толщины  $d$ , либо совместным влиянием неоднородности как  $\sigma$ , так и  $d$ .

В общем случае неоднородной пластины с радиальной неоднородностью проводимости  $S(r)$  уравнение для потенциала  $\Phi(r, \varphi)$  в полярных координатах имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dr} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0. \quad (1)$$

*An analytical solution of the problem of potential distribution of two arbitrary located current sources in a round nonhomogeneous plate with a conductance depending only on the radius has been obtained. A solution for the case of a exponential dependence of conductance on the radius is given as an example.*

**Key words:** field theory, point current sources, nonhomogeneous plane structure, potential distribution, calculation

Следует отметить, что величина  $S(r)$  может иметь разрывы непрерывности. Это имеет место, когда скачком меняется толщина  $d$  пластины или ее объемная проводимость  $\sigma$  (например, если пластина составлена из разных материалов). При этом источник тока  $i$  может находиться или на линии разрыва непрерывности, или вне ее. Тогда на линии разрыва коэффициент  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dr}$  в уравнении (1) становится неопределенным. Поэтому решение уравнения (1) следует искать отдельно по разные стороны от линии разрыва, но таким образом, чтобы на линии разрыва соблюдались условия непрерывности для потенциала и тока, протекающего через линию разрыва.

В предыдущих работах автора [1–3] рассматривались задачи распределения потенциала от двух точечных источников тока на неоднородных структурах с радиальным распределением неоднородности в случае, когда один из источников тока расположен в центре неоднородности (в начале координат), а второй источник находится на полярной оси при  $\varphi=0$  (рис. 1). В продолжение этих работ рассмотрим здесь общую задачу о распределении потенциала от двух произвольно расположенных источников тока разного знака на круглой пластине с радиальным распределением неоднородности

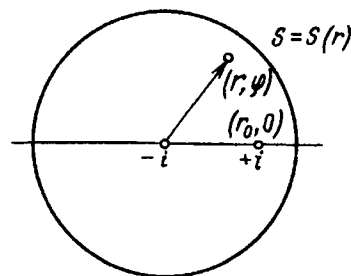


Рис. 1. Расположение источников тока — источник  $-i$  находится в центре полярной системы координат, источник  $+i$  расположен на полярной оси на расстоянии  $r_0$  от центра

Рассмотрим вначале более подробно решение задачи для случая, когда один из источников расположен в начале координат, а второй находится в произвольной точке на полярной оси ( $\varphi=0$ ). В этом случае решение уравнения (1) можно представить в виде

$$\Phi(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{R}_n(r) \cos n\varphi, \quad (2)$$

где  $\mathfrak{R}_n(r)$  — решение уравнения

$$r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR_n}{dr} \right) + r^2 \frac{1}{S} \frac{dS}{dr} \frac{dR_n}{dr} = n^2 \mathfrak{R}_n. \quad (3)$$

Наличие источника тока в точке  $r=r_0$ ,  $\varphi=0$  приводит к тому, что функцию  $R_n(r)$  следует рассматривать отдельно в области  $0 \leq r \leq r_0$  и в области  $r_0 \leq r \leq a$ , где  $a$  — радиус пластины. Будем обозначать функцию  $R_n(r)$  в области  $0 \leq r \leq r_0$  через  $R_n^I(r)$ , а в области  $r_0 \leq r \leq a$  через  $R_n^{II}(r)$ . Также для потенциала  $\Phi(r, \varphi)$  примем обозначения: в области I ( $0 \leq r \leq r_0$ ) потенциал будем обозначать через  $\Phi^I(r, \varphi)$ , а в области II ( $r_0 \leq r \leq a$ ) — через  $\Phi^{II}(r, \varphi)$ . На окружности  $r=r_0$  функции  $R_n^I(r)$  и  $R_n^{II}(r)$  должны переходить одна в другую таким образом, чтобы при переходе через эту линию выполнялись условия непрерывности для потенциала и тока, т.е.

$$\Phi^I(r_0, \varphi) = \Phi^{II}(r_0, \varphi); \quad (4)$$

$$S^I \frac{\partial \Phi^I}{\partial r} \Big|_{r_0} = S^{II} \frac{\partial \Phi^{II}}{\partial r} \Big|_{r_0}, \quad (5)$$

где  $S^I$  — проводимость в области I;  $S^{II}$  — проводимость в области II.

Проводимость  $S(r)$  в общем случае может претерпевать разрыв непрерывности (в том числе и при  $r=r_0$ ). Условие (5) имеет место для всех точек окружности  $r=r_0$ , кроме одной единственной точки, где находится источник тока, т.е. точка с координатами  $(r=r_0, \varphi=0)$ . Для того чтобы записать условие непрерывности для токов, справедливое для всех точек окружности без исключения, образуем замкнутый контур (рис. 2), состоящий из следующих частей: 1) дуги  $s'$ , проведенной радиусом  $r_0 + \Delta r$  на расстоянии

$\Delta r$  от окружности  $r=r_0$  с ее внешней стороны и заключенной между лучами  $\varphi=\varphi_1$  и  $\varphi=\varphi_2$ ; 2) дуги  $s''$  радиуса  $r_0 - \Delta r$ , расположенной на расстоянии  $\Delta r$  от окружности  $r=r_0$  с ее внутренней стороны и заключенной между теми же лучами; 3) двух отрезков длины  $2\Delta r$ , соединяющих концы дуг  $s'$  и  $s''$ .

Рассмотрим полный ток, вытекающий через границы построенного контура. Имеем:

ток  $i'$ , вытекающий из контура через дугу  $s'$ :

$$i' = -S^{II} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial \Phi^{II}}{\partial r} \Big|_{r=r_0+\Delta r} (r_0 + \Delta r) d\varphi; \quad (6)$$

ток  $i''$ , вытекающий из контура через дугу  $s''$ :

$$i'' = -S^I \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial \Phi^I}{\partial r} \Big|_{r=r_0-\Delta r} (r_0 - \Delta r) d\varphi. \quad (7)$$

Если  $\Delta r \rightarrow 0$ , то полный ток, вытекающий из контура, равен

$$i' + i'' = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left( S^{II} \frac{\partial \Phi^{II}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} - S^I \frac{\partial \Phi^I}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \right) r_0 d\varphi. \quad (8)$$

Если точечный источник тока находится внутри контура, то полный ток, вытекающий из контура, равен току источника. Если источник тока находится вне этого контура, то полный ток равен нулю. Таким образом, можно записать (если источник тока находится на луче  $\varphi=0$ ):

$$- \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left( S^{II} \frac{\partial \Phi^{II}}{\partial r} \Big|_{r_0} - S^I \frac{\partial \Phi^I}{\partial r} \Big|_{r_0} \right) \frac{r_0}{i} d\varphi = \begin{cases} 1, & \text{если значение } \varphi=0 \text{ находится} \\ & \text{внутри интервала } [\varphi_1, \varphi_2]; \\ 0, & \text{если значение } \varphi=0 \text{ находится} \\ & \text{вне интервала } [\varphi_1, \varphi_2]. \end{cases} \quad (9)$$

Величина, стоящая в выражении (9) под знаком интеграла, является по определению  $\delta$ -функцией [4]. Поэтому

$$S^{II} \frac{\partial \Phi^{II}}{\partial r} \Big|_{r_0} - S^I \frac{\partial \Phi^I}{\partial r} \Big|_{r_0} = -\frac{i}{r_0} \delta(\varphi). \quad (10)$$

Выражения (4) и (10) являются условиями, позволяющими найти соотношения между функциями  $\mathfrak{R}_n^I(r)$  и  $\mathfrak{R}_n^{II}(r)$ .

Подставляя в условия (4) и (10) выражение (2) для потенциала  $\Phi(r, \varphi)$ , получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{R}_n^I(r_0) \cos n\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{R}_n^{II}(r_0) \cos n\varphi; \quad (11)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ S^{II} \frac{\partial \mathfrak{R}_n^{II}}{\partial r} \Big|_{r_0} - S^I \frac{\partial \mathfrak{R}_n^I}{\partial r} \Big|_{r_0} \right\} \cos n\varphi = -\frac{i}{r_0} \delta(\varphi). \quad (12)$$

Для того, чтобы получить соотношения между граничными значениями функций  $\mathfrak{R}_n^I$  и  $\mathfrak{R}_n^{II}$

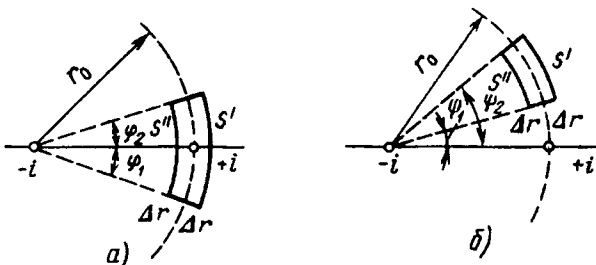


Рис. 2. Контур, образованный дугами  $s'$ ,  $s''$  и соединяющими эти дуги отрезками длиной  $2\Delta r$  в случаях: а) когда источник тока  $+i$  находится внутри контура, б) когда источник находится вне контура

на линии раздела между областями I и II, умножим полученные уравнения на  $\cos n'\varphi$ , где  $n'$  есть некоторое число из ряда  $n'=0, 1, 2, 3, \dots$ , и проинтегрируем их в пределах от  $-\pi$  до  $+\pi$ . Учитывая, что

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos n\varphi \cos n'\varphi d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } n' \neq n, \\ \pi, & \text{если } n' = n, \end{cases} \quad n \neq 0;$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos n'\varphi d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } n' \neq 0; \\ 2\pi, & \text{если } n' = 0; \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos n'\varphi \delta(\varphi) d\varphi = 1,$$

получаем соотношения между граничными значениями функций  $\mathfrak{R}_n^I$  и  $\mathfrak{R}_n^{II}$ , которые, если опустить знак штрих при  $n'$ , имеют вид:

$$\mathfrak{R}_n^I(r_0) = \mathfrak{R}_n^{II}(r_0); \quad (13)$$

$$S^{II} \frac{d\mathfrak{R}_n^{II}}{dr} \Big|_{r_0} - S^I \frac{d\mathfrak{R}_n^I}{dr} \Big|_{r_0} = -\frac{i}{\pi r_0}, \quad n \neq 0; \quad (14)$$

$$S^{II} \frac{d\mathfrak{R}_0^{II}}{dr} \Big|_{r_0} - S^I \frac{d\mathfrak{R}_0^I}{dr} \Big|_{r_0} = -\frac{i}{2\pi r_0}, \quad n=0. \quad (15)$$

Полученные условия, совместно с граничными условиями, позволяют однозначно определить функции  $\mathfrak{R}_n^I(r)$  и  $\mathfrak{R}_n^{II}(r)$ , которые, переходя одна в другую на границе  $r=r_0$ , образуют решение  $\mathfrak{R}_n(r)$ .

Если источник тока находится в произвольной точке  $r=r_0$ ,  $\varphi=\varphi_0$ , то решение для этого случая получается простым поворотом системы координат на угол  $\varphi_0$ . Поэтому решение для этого случая имеет вид

$$\Phi(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}_n(r) \cos n(\varphi - \varphi_0) + \mathfrak{R}_0(r). \quad (16)$$

Суммирование здесь начинается с  $n=1$ , так как член суммы с  $n=0$  есть  $R_0$  и вынесен отдельно.

Обозначим два линейно независимые решения уравнения (3) через  $y_n^{(1)}$  и  $y_n^{(2)}$ . Тогда можно записать:

$$\mathfrak{R}_n^I(r) = A_n^I y_n^{(1)} + B_n^I y_n^{(2)} = A_n^I \left( y_n^{(1)} + \frac{B_n^I}{A_n^I} y_n^{(2)} \right); \quad (17)$$

$$\mathfrak{R}_n^{II}(r) = A_n^{II} y_n^{(1)} + B_n^{II} y_n^{(2)} = A_n^{II} \left( y_n^{(1)} + \frac{B_n^{II}}{A_n^{II}} y_n^{(2)} \right). \quad (18)$$

Отношения постоянных  $\frac{B_n^I}{A_n^I}$  и  $\frac{B_n^{II}}{A_n^{II}}$  определяются из граничных условий при  $r=0$  и  $r=a$  (или при других значениях  $r$  — в зависимости от конкретных условий задачи). Обозначим:

$$R_n^I(r) = y_n^{(1)} + \frac{B_n^I}{A_n^I} y_n^{(2)}; \quad (19)$$

$$R_n^{II}(r) = y_n^{(1)} + \frac{B_n^{II}}{A_n^{II}} y_n^{(2)}. \quad (20)$$

Тогда:

$$\mathfrak{R}_n^I = A_n^I R_n^I(r); \quad (21)$$

$$\mathfrak{R}_n^{II} = A_n^{II} R_n^{II}(r). \quad (22)$$

Условие (13) выполняется, если положить:

$$A_n^I = A_n^{II} R_n^{II}(r_0); \quad (23)$$

$$A_n^{II} = A_n^I R_n^I(r_0). \quad (24)$$

Тогда из условия (14) получаем:

$$A_n^I = \frac{i}{r_0 \pi} \frac{R_n^I(r_0)}{S^I R_n^{II} \frac{dR_n^I}{dr} \Big|_{r=r_0} - S^{II} R_n^I \frac{dR_n^{II}}{dr} \Big|_{r=r_0}}; \quad (25)$$

$$A_n^{II} = \frac{i}{r_0 \pi} \frac{R_n^I(r_0)}{S^I R_n^{II} \frac{dR_n^I}{dr} \Big|_{r=r_0} - S^{II} R_n^I \frac{dR_n^{II}}{dr} \Big|_{r=r_0}}. \quad (26)$$

Особого рассмотрения требует нулевой член решения  $\mathfrak{R}_0(r)$ . При  $n=0$  уравнение (3) имеет одно нетривиальное решение:

$$\mathfrak{R}_0 = A_0 \int_a^r \frac{dr}{rS(r)} + B_0. \quad (27)$$

Здесь интеграл берется от  $r=a$ , но это может быть и любое другое постоянное значение  $r$ . Решение  $\mathfrak{R}_0$  представляет собой потенциал точечного источника тока, расположенного в центре, т.е. полное решение (16) предполагает наличие в центре второго источника тока противоположного знака, который обеспечивает электронейтральность. Решение (27) должно удовлетворять условиям (13) и (15). Кроме того, оно должно удовлетворять условию отсутствия тока через границу  $r=a$  и должно приводить к наличию источника тока в центре пластины. Всем этим условиям можно удовлетворить, если положить:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{R}_0 &= -\frac{i}{2\pi} \int_a^r \frac{dr}{rS(r)}, & 0 < r < r_0; \\ \mathfrak{R}_0 &= -\frac{i}{2\pi} \int_{r_0}^a \frac{dr}{rS(r)}, & r > r_0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi) &= \frac{i}{\pi r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^{II}(r_0) R_n^I(r) \cos n(\varphi - \varphi_0)}{S^I R_n^{II} \frac{dR_n^I}{dr} \Big|_{r=r_0} - S^{II} R_n^I \frac{dR_n^{II}}{dr} \Big|_{r=r_0}} - \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \int_a^r \frac{dr}{rS(r)}, \quad 0 < r < r_0; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{i}{\pi r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^I(r_0) R_n^{II}(r) \cos n(\varphi - \varphi_0)}{S^I R_n^I \frac{dR_n^I}{dr} \Big|_{r=r_0} - S^{II} R_n^I \frac{dR_n^{II}}{dr} \Big|_{r=r_0}} - \frac{i}{2\pi} \int_{r_0}^a \frac{dr}{r S(r)}, \quad r_0 < r < a. \quad (30)$$

Рассмотрим теперь общий случай двух произвольно расположенных источников тока  $+i$  и  $-i$  (рис. 3). Пусть координаты источника тока  $+i$  будут  $r=r_1$ ,  $\varphi=\varphi_1$ , а координаты источника  $-i$  будут  $r=r_2$ ,  $\varphi=\varphi_2$ . Решение в этом случае можно рассматривать как суперпозицию двух предыдущих решений. При этом, поскольку каждое из этих решений предполагает наличие в точке  $r=0$  точечного источника тока, то при суперпозиции эти источники взаимно компенсируются.

Если источники расположены на разных расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от центра и  $r_2 > r_1$ , то всю область определения потенциала следует разбить на три области: область I (при  $0 \leq r \leq r_1$ ), область II (при  $r_1 \leq r \leq r_2$ ) и область III (при  $r_2 \leq r \leq a$ ).

В этом случае примем следующие обозначения:

$\mathfrak{R}_n^I$  — решение уравнения (3) в области I при  $0 \leq r \leq r_1$ ;

$\mathfrak{R}_n^{II}$  — решение (3) в области II при  $r_1 \leq r \leq r_2$ ;

$\mathfrak{R}_n^{III}$  — решение (3) в области III при  $r_2 \leq r \leq a$ .

Проводимость будем обозначать так:

$S^I$  — проводимость в области I при  $0 \leq r \leq r_1$ ;

$S^{II}$  — проводимость в области II при  $r_1 \leq r \leq r_2$ ;

$S^{III}$  — проводимость в области III при  $r_2 \leq r \leq a$ .

Проводимость может претерпевать разрыв непрерывности и на линии, где нет источников тока. Во всех этих случаях величина  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dr}$  в уравнении (3) становится на линии разрыва неопределенной. Поэтому решение следует рассматривать по разные стороны линии разрыва раздельно. На самой линии разрыва решения по обе стороны от нее должны удовлетворять условиям непрерывности потенциала и тока. При

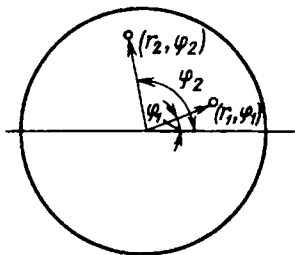


Рис. 3. Общий случай расположения источников тока в произвольных точках  $(r_1, \varphi_1)$  и  $(r_2, \varphi_2)$

этом под  $R_n^I$  будем подразумевать такое решение уравнения (3), которое удовлетворяет этому уравнению во всей области I, а на линии разрыва непрерывности  $S(r)$  внутри этой области (если он существует) удовлетворяет условиям, необходимым для обеспечения непрерывности потенциала и тока через линию разрыва. Нетрудно видеть, что эти условия таковы:

$$\mathfrak{R}_n^I(r_l - 0) = \mathfrak{R}_n^I(r_l + 0); \quad (31)$$

$$S^I \frac{d\mathfrak{R}_n^I}{dr} \Big|_{r_l-0} = S^I \frac{d\mathfrak{R}_n^I}{dr} \Big|_{r_l+0}, \quad (32)$$

где  $r_l$  — радиус границы разрыва непрерывности проводимости.

В этом случае мы сохраняем обозначение проводимости  $S^I$  для всей области I, но предполагаем, что  $S(r_l-0)$  и  $S(r_l+0)$  могут иметь разные значения. То же самое следует сказать и о функциях  $\mathfrak{R}_n^{II}$  и  $\mathfrak{R}_n^{III}$  в областях II и III.

Таким образом, в дальнейшем будем предполагать, что обозначения  $\mathfrak{R}_n^I$ ,  $\mathfrak{R}_n^{II}$ ,  $\mathfrak{R}_n^{III}$  означают функции определенные в областях I, II, III с учетом возможных разрывов непрерывности проводимости внутри этих областей.

С учетом принятых обозначений можно написать

$$\mathfrak{R}_n^I = \frac{i}{\pi r_1} \frac{R_n^{II}(r_1) R_n^I(r)}{S^I R_n^{II} \frac{dR_n^I}{dr} \Big|_{r=r_1} - S^{II} R_n^I \frac{dR_n^{II}}{dr} \Big|_{r=r_1}} \quad \begin{matrix} \text{в области I} \\ \text{I при} \end{matrix} \quad (33)$$

$$\mathfrak{R}_n^{II} = R_n^{III} = \frac{i}{\pi r_1} \frac{R_n^{II}(r_1) R_n^I(r)}{S^I R_n^{II} \frac{dR_n^I}{dr} \Big|_{r=r_1} - S^{II} R_n^I \frac{dR_n^{II}}{dr} \Big|_{r=r_1}} \quad \begin{matrix} \text{в областях} \\ \text{II и III} \end{matrix} \quad (34)$$

для источника  $-i$ :

$$\mathfrak{R}_n^I = \mathfrak{R}_n^{II} = -\frac{i}{\pi r_2} \times \frac{R_n^{II}(r_2) R_n^I(r)}{S^{II} R_n^{II} \frac{dR_n^I}{dr} \Big|_{r=r_2} - S^{III} R_n^I \frac{dR_n^{II}}{dr} \Big|_{r=r_2}} \quad \begin{matrix} \text{в областях} \\ \text{I и II} \end{matrix} \quad (35)$$

$$\mathfrak{R}_n^{III} = -\frac{i}{\pi r_2} \times \frac{R_n^I(r_2) R_n^{II}(r)}{S^{II} R_n^{II} \frac{dR_n^I}{dr} \Big|_{r=r_2} - S^{III} R_n^I \frac{dR_n^{II}}{dr} \Big|_{r=r_2}} \quad \begin{matrix} \text{в области III} \\ \text{при } r_2 \leq r \leq a. \end{matrix} \quad (36)$$

Распределение потенциала от двух источников тока ( $i$  и  $-i$ ) получается суммированием потенциалов для каждого источника. При сумми-

ровании нулевых членов следует обратить внимание на то, что в области I от  $r=0$  до  $r=r_1$  функции  $R_0$  для источника  $i$  и для источника  $-i$  одинаковы, но имеют разные знаки. Поэтому их сумма равна нулю. Далее после значения  $r=r_1$  функция  $R_0$  для источника  $i$  имеет постоянное значение  $R_0 = -\frac{i}{2\pi} \int_{r_1}^a \frac{dr}{rS(r)}$ , а функция  $R_0$

для источника  $-i$  имеет вид  $\frac{i}{2\pi} \int_{r_1}^a \frac{dr}{r}$ . Поэтому их сумма равна  $-\frac{i}{2\pi} \int_{r_1}^r \frac{dr}{rS(r)}$ . Наконец, после точки  $r=r_2$  сумма этих функций является величиной

постоянной и равной  $-\frac{i}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{rS(r)}$ .

Таким образом, распределение потенциала от двух источников тока противоположных знаков в круглой неоднородной пластине имеет вид: при  $0 \leq r \leq r_1$

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{i}{\pi r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n''(r_1) R_n'(r) \cos n(\varphi - \varphi_1)}{S'' R_n' \frac{dR_n''}{dr} \Big|_{r_1} - S' R_n'' \frac{dR_n'}{dr} \Big|_{r_1}} - \frac{i}{\pi r_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n''(r_2) R_n'(r) \cos n(\varphi - \varphi_2)}{S''' R_n' \frac{dR_n''}{dr} \Big|_{r_2} - S'' R_n'' \frac{dR_n'}{dr} \Big|_{r_2}}; \quad (37)$$

при  $r_1 \leq r \leq r_2$

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{i}{\pi r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n'(r_1) R_n''(r) \cos n(\varphi - \varphi_1)}{S'' R_n' \frac{dR_n''}{dr} \Big|_{r_1} - S' R_n'' \frac{dR_n'}{dr} \Big|_{r_1}} - \frac{i}{\pi r_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n''(r_2) R_n'(r) \cos n(\varphi - \varphi_2)}{S''' R_n' \frac{dR_n''}{dr} \Big|_{r_2} - S'' R_n'' \frac{dR_n'}{dr} \Big|_{r_2}} - \frac{i}{2\pi} \int_{r_1}^r \frac{dr}{S(r)r}; \quad (38)$$

при  $r_2 \leq r \leq a$

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{i}{\pi r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n'(r_1) R_n''(r) \cos n(\varphi - \varphi_1)}{S'' R_n' \frac{dR_n''}{dr} \Big|_{r_1} - S' R_n'' \frac{dR_n'}{dr} \Big|_{r_1}} - \frac{i}{\pi r_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n''(r_2) R_n'(r) \cos n(\varphi - \varphi_2)}{S''' R_n' \frac{dR_n''}{dr} \Big|_{r_2} - S'' R_n'' \frac{dR_n'}{dr} \Big|_{r_2}} - \frac{i}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{S(r)r}. \quad (39)$$

Рассмотрим в качестве примера неоднородную круглую пластину, проводимость которой  $S$  зависит от радиуса по степенному закону

$$S = S_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{2\alpha}. \quad (40)$$

Положительное значение показателя  $2\alpha$  означает, что проводимость возрастает от нуля в центре до значения  $S_0$  на краю пластины. При малых значениях  $2\alpha$  проводимость быстро воз-

растает вначале при малых значениях  $r$  ( $\frac{r}{a} \ll 1$ ) и остается практически постоянной в остальной области. При больших значениях  $2\alpha$ , наоборот, имеет место малая проводимость во всей области и быстрый рост проводимости к краю пластины. Если  $2\alpha = 1$ , то имеем линейное возрастание проводимости от 0 до  $S_0$ .

В случае степенной зависимости  $S(r)$  уравнение (3) принимает вид

$$r^2 \frac{d^2 R_n}{dr^2} + r(1+2\alpha) \frac{dR_n}{dr} - n^2 R_n = 0. \quad (41)$$

Двумя линейно независимыми решениями этого уравнения являются функции:

$$y_n^{(1)} = \left(\frac{r}{a}\right)^{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + n^2}}; \quad (42)$$

$$y_n^{(2)} = \left(\frac{r}{a}\right)^{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 + n^2}}. \quad (43)$$

Из граничного условия при  $r=0$  следует, что

$$R_n^I = \left(\frac{r}{a}\right)^{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + n^2}}. \quad (44)$$

Если граница  $r=a$  является свободной, т.е. ток через нее равен нулю, то

$$\frac{B_n''}{A_n''} = -\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + n^2}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + n^2}} \quad (45)$$

и, следовательно,

$$R_n^{II} = \left(\frac{r}{a}\right)^{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + n^2}} - \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + n^2}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + n^2}} \left(\frac{r}{a}\right)^{-(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + n^2})}. \quad (46)$$

Подставляя полученные значения  $R_n^I$  и  $R_n^{II}$  в формулы (37), (38), (39), получаем: если  $0 < r < r_1$

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi) = & \frac{i}{2\pi S_0} \left(\frac{r_1}{a}\right)^{-\alpha} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r_1}{a}\right)^{\sqrt{\alpha^2 + n^2}}}{\sqrt{\alpha^2 + n^2}} \frac{\left(\frac{a - \sqrt{\alpha^2 + n^2}}{a + \sqrt{\alpha^2 + n^2}}\right)}{\left(\frac{a - \sqrt{\alpha^2 + n^2}}{a + \sqrt{\alpha^2 + n^2}}\right)} - \right. \\ & \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^{\sqrt{\alpha^2 + n^2}}}{\sqrt{\alpha^2 + n^2}} \right] \cos n(\varphi - \varphi_1) - \frac{i}{2\pi S_0} \left(\frac{r_2}{a}\right)^{-\alpha} \times \\ & \times \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r_2}{a}\right)^{\sqrt{\alpha^2 + n^2}}}{\sqrt{\alpha^2 + n^2}} \frac{\left(\frac{a - \sqrt{\alpha^2 + n^2}}{a + \sqrt{\alpha^2 + n^2}}\right)}{\left(\frac{a - \sqrt{\alpha^2 + n^2}}{a + \sqrt{\alpha^2 + n^2}}\right)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^{\sqrt{\alpha^2 + n^2}}}{\sqrt{\alpha^2 + n^2}} \right] \times \\ & \times \cos n(\varphi - \varphi_2); \end{aligned} \quad (47)$$

если  $r_1 < r < r_2$

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{i}{2\pi S_0} \left(\frac{r_1}{a^2}\right)^{-\alpha} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r_1}{a^2}\right)^{\sqrt{\alpha^2+n^2}}}{\sqrt{\alpha^2+n^2} \left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+n^2}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2+n^2}}\right)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\sqrt{\alpha^2+n^2}}}{\sqrt{\alpha^2+n^2}} \right] \cos n(\varphi - \varphi_1) - \frac{i}{2\pi S_0} \left(\frac{r_2}{a^2}\right)^{-\alpha} \times$$

$$\times \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r_2}{a^2}\right)^{\sqrt{\alpha^2+n^2}}}{\sqrt{\alpha^2+n^2} \left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+n^2}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2+n^2}}\right)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r_2}{r}\right)^{\sqrt{\alpha^2+n^2}}}{\sqrt{\alpha^2+n^2}} \right] \times$$

$$\times \cos n(\varphi - \varphi_2) + \frac{i}{2\pi S_0} \frac{1}{2\alpha} \left[ \left(\frac{r_1}{a}\right)^{-2\alpha} - \left(\frac{r}{a}\right)^{-2\alpha} \right]; \quad (48)$$

если  $r_2 < r < a$

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{i}{2\pi S_0} \left(\frac{r_1}{a^2}\right)^{-\alpha} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r_1}{a^2}\right)^{\sqrt{\alpha^2+n^2}}}{\sqrt{\alpha^2+n^2} \left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+n^2}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2+n^2}}\right)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\sqrt{\alpha^2+n^2}}}{\sqrt{\alpha^2+n^2}} \right] \cos n(\varphi - \varphi_1) - \frac{i}{2\pi S_0} \left(\frac{r_2}{a^2}\right)^{-\alpha} \times$$

$$\times \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r_2}{a^2}\right)^{\sqrt{\alpha^2+n^2}}}{\sqrt{\alpha^2+n^2} \left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+n^2}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2+n^2}}\right)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r_2}{r}\right)^{\sqrt{\alpha^2+n^2}}}{\sqrt{\alpha^2+n^2}} \right] \times$$

$$\times \cos n(\varphi - \varphi_2) + \frac{i}{2\pi S_0} \frac{1}{2\alpha} \left[ \left(\frac{r_1}{a}\right)^{-2\alpha} - \left(\frac{r_2}{a}\right)^{-2\alpha} \right]. \quad (49)$$

Нетрудно доказать сходимость полученных рядов. Для доказательства используем признак сходимости Коши [5], который гласит, что если для общего члена ряда  $u_n$  имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} = q < 1,$$

то ряд сходится абсолютно.

Рассмотрим первую сумму в квадратных скобках в выражении (47). Для общего члена этой суммы имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{r_1}{a^2}\right)^{\sqrt{\alpha^2+n^2}}}{\sqrt{\alpha^2+n^2} \left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+n^2}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2+n^2}}\right)} \right|^{\frac{1}{n}} = \frac{r_1}{a^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{r_1}{a^2} < 1. \quad (50)$$

Для второй суммы в квадратных скобках имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\sqrt{\alpha^2+n^2}}}{\sqrt{\alpha^2+n^2}} \right|^{\frac{1}{n}} = \frac{r}{r_1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{r}{r_1} < 1. \quad (51)$$

Аналогично можно показать, что для каждой из сумм в выражениях (47)–(49) критерий Коши выполняется и, следовательно, все ряды сходятся абсолютно.

Ряды (47)–(49) сходятся медленно и, следовательно, мало пригодны для практических расчетов. Поэтому преобразуем эти ряды таким образом, чтобы ими было удобно пользоваться при расчетах.

Рассмотрим ряд (47). Используя известное соотношение [5]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \cos n\varphi = -\ln \sqrt{1 - 2r \cos \varphi + r^2},$$

этот ряд можно представить в виде

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{i}{2\pi S_0} \left(\frac{r_1}{a^2}\right)^{-\alpha} \times$$

$$\times \left\{ \ln \sqrt{1 - 2 \frac{r_1}{a^2} \cos(\varphi - \varphi_1) + \left(\frac{r_1}{a^2}\right)^2} + \ln \sqrt{1 - 2 \frac{r}{r_1} \cos(\varphi - \varphi_1) + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2} + R_1 - Q_1 \right\} -$$

$$- \frac{i}{2\pi S_0} \left(\frac{r_2}{a^2}\right)^{-\alpha} \left\{ \ln \sqrt{1 - 2 \frac{r_2}{a^2} \cos(\varphi - \varphi_2) + \left(\frac{r_2}{a^2}\right)^2} + \ln \sqrt{1 - 2 \frac{r}{r_2} \cos(\varphi - \varphi_2) + \left(\frac{r}{r_2}\right)^2} + R_2 - Q_2 \right\}, \quad (52)$$

где

$$R_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\left(\frac{r_1}{a^2}\right)^{\sqrt{\alpha^2+n^2}}}{\sqrt{\alpha^2+n^2} \left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+n^2}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2+n^2}}\right)} - \frac{\left(\frac{r_1}{a^2}\right)^n}{n} \right] \times$$

$$\times \cos n(\varphi - \varphi_1); \quad (53)$$

$$Q_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\sqrt{\alpha^2+n^2}}}{\sqrt{\alpha^2+n^2}} - \frac{\left(\frac{r}{r_1}\right)^n}{n} \right] \cos n(\varphi - \varphi_1); \quad (54)$$

$$R_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\left(\frac{r_2}{a^2}\right)^{\sqrt{\alpha^2+n^2}}}{\sqrt{\alpha^2+n^2} \left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+n^2}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2+n^2}}\right)} - \frac{\left(\frac{r_2}{a^2}\right)^n}{n} \right] \times$$



$$\times \cos n(\varphi - \varphi_2); \quad (55)$$

$$Q_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\left(\frac{r}{r_2}\right)^n \sqrt{\alpha^2 + n^2}}{\sqrt{\alpha^2 + n^2}} - \frac{\left(\frac{r}{r_2}\right)^n}{n} \right] \cos n(\varphi - \varphi_2). \quad (56)$$

Если  $\alpha^2 \ll 1$ , то

$$R_1 \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^n}{n} \cdot \frac{2\alpha(\alpha+n)}{n^2} \cos n(\varphi - \varphi_1); \quad (57)$$

$$R_2 \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r r_2}{a^2}\right)^n}{n} \cdot \frac{2\alpha(\alpha+n)}{n^2} \cos n(\varphi - \varphi_2); \quad (58)$$

$$Q_1 \approx 0; \quad Q_2 \approx 0.$$

Ряды  $R_1$  и  $R_2$  быстро сходятся. Поэтому для практических расчетов достаточно ограничиться суммой нескольких первых членов этих рядов. Действительно, оценим погрешность, допускаемую при этом. Рассмотрим сумму всех членов ряда  $R_1$ , начиная с некоторого  $n=N$ . Имеем

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^n}{n} \cdot \frac{2\alpha(\alpha+n)}{n^2} \cos n(\varphi - \varphi_1) \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{2\alpha(\alpha+n)}{n^2} =$$

$$= 2\alpha \sum_{n=N}^{\infty} \left( \frac{\alpha}{n} + 1 \right) \frac{1}{n^2} < 2\alpha \left( 1 + \frac{\alpha}{N} \right) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{2\alpha}{N-1} \left( 1 + \frac{\alpha}{N} \right).$$

Отсюда видно, что при  $2\alpha \sim 0,1$  для расчетов с точностью до 10% вполне достаточно первого члена бесконечного ряда  $R_1$ . То же самое имеет место и для  $R_2$ . Таким образом, при  $2\alpha < 0,1$  в пределах 10%-ной погрешности можно использовать простые выражения:

$$\varphi(r, \varphi) = \frac{i}{2\pi} \sqrt{\rho(r)\rho(r_1)} \left\{ \ln \frac{l_1}{a} + \ln \frac{l'_1}{a} + \frac{r r_1}{a^2} 2(\alpha+1) \times \right.$$

$$\times \cos(\varphi - \varphi_1) \left. \right\} - \frac{i}{2\pi} \sqrt{\rho(r)\rho(r_2)} \times$$

$$\times \left\{ \ln \frac{l_2}{a} + \ln \frac{l'_2}{a} + \frac{r r_2}{a^2} 2(\alpha+1) \cos(\varphi - \varphi_2) \right\}, \quad (59)$$

где

$$l_1 = \sqrt{r^2 - 2r r_1 \cos(\varphi - \varphi_1) + r_1^2};$$

$$l'_1 = \sqrt{r^2 - 2r \left(\frac{a}{r_1}\right) \cos(\varphi - \varphi_1) + \left(\frac{a}{r_1}\right)^2};$$

$$l_2 = \sqrt{r^2 - 2r r_2 \cos(\varphi - \varphi_2) + r_2^2};$$

$$l'_2 = \sqrt{r^2 - 2r \left(\frac{a}{r_2}\right) \cos(\varphi - \varphi_2) + \left(\frac{a}{r_2}\right)^2};$$

$\rho(r) = \frac{1}{S(r)} = \rho_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{-2\alpha}$  — удельное сопротивление поверхности на расстоянии  $r$  от центра;

$$\rho_0 = 1/S_0.$$

Рассмотрим теперь случай линейной зависимости проводимости от радиуса

$$S = S_1 + \frac{S_2 - S_1}{a} r. \quad (60)$$

Здесь  $S_1$  — проводимость в центре пластины, а  $S_2$  — проводимость на краю пластины. Этот случай представляет наибольший интерес с точки зрения практического применения. Однако этот случай представляет большие трудности для аналитического решения. Поэтому представляется целесообразным для линейной зависимости воспользоваться полученным выше решением для случая степенной зависимости проводимости. Для этого представим степенную зависимость в виде ряда по возрастающим степеням величины  $(r-a)/a$ :

$$S = S_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{2\alpha} = S_0 \left[ \frac{a + (r-a)}{a} \right]^{2\alpha} =$$

$$= S_0 \left[ 1 + 2\alpha \frac{r-a}{a} + 2\alpha \frac{(2\alpha-1)}{2} \left(\frac{r-a}{a}\right)^2 + \dots \right]. \quad (61)$$

Если выполняются условия

$$\left| \frac{(2\alpha-1)}{2} \frac{(r-a)}{a} \right| \ll 1, \quad (62)$$

то можно ограничиться первыми двумя членами этого ряда. тогда, если положить

$$2\alpha = \frac{S_2 - S_1}{S_2}, \quad S_0 = S_2, \quad (63)$$

то линейную зависимость (60) можно заменить степенной зависимостью (40) и использовать результаты, полученные выше.

Учитывая, что приближенные формулы (59) справедливы при  $\alpha < 0,1$ , условие (62) можно записать в виде

$$\left| \frac{r-a}{a} \right| \ll 2. \quad (64)$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мейер А.А. Распределение потенциала точечных источников постоянного тока в круглых неоднородных пластинах. — Науч. тр. Гиредмета, 1977, т. 80.
2. Мейер А.А. Распределение потенциала по краю круглой неоднородной пластины. — Науч. тр. Гиредмета, 1977, т. 80.
3. Мейер А.А. Потенциал двух точечных источников тока на бесконечной неоднородной проводящей плоскости с радиальным распределением проводимости. — Электричество, 1977, т. 9.
4. Иваненко Д., Соколов А. Классическая теория поля. — М.: 1949.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М., 1962.

[06.12.94]

**А в т о р:** Мейер Александр Аркадьевич окончил в 1948 г. физический факультет Московского государственного университета. Кандидатскую диссертацию, посвященную квантовой теории оптических свойств металлов, защитил в 1952 г. в Московском государственном педагогическом институте. В настоящее время пенсионер.

## Борис (Багаудин) Хамидович Гайтов

(К 60-летию со дня рождения)

Исполнилось 60 лет со дня рождения известного ученого-электромеханика, заслуженного деятеля науки и техники РФ, члена-корреспондента Академии электротехнических наук РФ, доктора технических наук, профессора Бориса (Багаудина) Хамидовича Гайтова.

Б.Х. Гайтов окончил электромеханический факультет Карагандинского политехнического института в 1961 г. В 1961—1962 гг. он — младший научный сотрудник Карагандинского НИИ угольной промышленности (КНИУИ), в 1962—1963 гг. — ассистент Грозненского нефтяного института. Окончив очную аспирантуру и защитив в 1965 г. кандидатскую диссертацию по высокоскоростным частотно-управляемым асинхронным двигателям повышенной частоты (400 Гц), Б.Х. Гайтов переходит на работу в Краснодарский политехнический институт. Здесь молодой ученый прошел путь от старшего преподавателя, доцента, до заведующего кафедрой, декана факультета. С 1977 г. по настоящее время он заведует кафедрой электротехники, читает курс «Электрические машины».

В 1983 г. Б.Х. Гайтов защитил в МЭИ докторскую диссертацию по теме «Управляемые асинхронные двигатели с массивными многофункциональными роторами» и получил ученое звание профессора.

Проф. Б.Х. Гайтов является одним из основоположников нетрадиционной электромеханики, служащей основой развития ряда специальных электроприводов и нетрадиционной энергетики. Его научная деятельность охватывает вопросы теории, математического моделирования, методов расчета и конструирования специфических частотно-управляемых асинхронных двигателей, в том числе двигателей-машин, а также двухвходовых, двухмерных машин для нетрадиционной энергетики. Управляемые двигатели-машины представляют



собой машины нового поколения, выполненные с бесконтактным электроприводом и выгодно отличающиеся от известных по своим технико-экономическим показателям.

В 1978—1984 гг. Б.Х. Гайтовым совместно с сотрудниками фирмы «Alfa-laval» (Швеция) в рамках межправительственного соглашения разработаны и внедрены новые типы высокоскоростных двигателей-сепараторов для пищевой промышленности. Они успешно экспонировались на ВДНХ, получили признание общественности, а проф. Б.Х. Гайтов был награжден медалями ВДНХ. Двигатели-сепараторы для микробиологической промышленности успешно экспонировались на международных выставках, где также получили высокую оценку и международное признание.

Ряд изобретений в области специальных аксиальных электрических машин проф. Б.Х. Гайтов внедрил и довел до серийного выпуска на электромашиностроительной фирме «Бей Гуань» (Китай), работая там в течение 1993 г. на контрактной основе. В 1992 и 1994 гг. он в качестве научного руководителя и исполнителя

стал победителем конкурса грантов Российской Федерации в области исследований по электротехнике и энергетике.

Б.Х. Гайтовым опубликовано свыше 20 научных работ и более 40 изобретений. Под его руководством защищено 10 кандидатских диссертаций, в том числе аспирантами зарубежных стран.

Проф. Б.Х. Гайтов много сделал для совершенствования учебного процесса, подготовки инженерных и научно-педагогических кадров, развития материально-технической базы вуза. В 1992 г. он награжден знаком «За отличные успехи в высшей школе» Минвуза РФ.

Плодотворную научную и педагогическую деятельность профессор Б.Х. Гайтов успешно сочетает с научно-организаторской и организационно-методической работой.

В 1968—1974 гг. Б.Х. Гайтов — председатель научно-технической секции Краснодарской краевой организации «Знание», в 1968—1989 гг. — член Научно-методического совета (НМС) по электромеханике Минвуза СССР, в настоящее время — член президиума НМС по теоретической электротехнике МО и ПО, председатель регионального методического объединения НМС по теоретической электротехнике вузов юга России и Северного Кавказа.

С 1993 г. проф. Б.Х. Гайтов является членом редколлегии журнала «Известия вузов. Электромеханика», с 1995 г. возглавляет постоянное представительство республики Ингушетия в Краснодарском крае. В 1995 г. Б.Х. Гайтову присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки и техники РФ», в 1997 г. он избран членом-корреспондентом Академии электротехнических наук РФ.

Ученый и педагог, человек высокой эрудиции и культуры, проф. Б.Х. Гайтов пользуется заслуженным уважением среди коллег и студентов.

# Указатель материалов, помещенных в журнале «Электричество» в 1997 г.

Автор и название статьи	№ жур-нала	Стр.	Автор и название статьи	№ жур-нала	Стр.
<b>Теоретические основы электротехники</b>			зовании эквивалентных по надежности схем «треугольник-звезда»		
<b>Миронов Ю.М., Лавин И.А.</b> Переходные процессы в установках электрошлаковой тигельной плавки	1	58	<b>Ершов Р.Е.</b> К вычислению потерь на гистерезис в ферромагнетике	6	55
<b>Баранов М.И.</b> Соотношения между компонентами импульсного электромагнитного поля на поверхности проводника	1	63	<b>Прищепенко А.Б., Щелкачев М.В.</b> Работа взрывомагнитного генератора импловизионного типа на емкостную нагрузку	7	54
<b>Пенин А.А.</b> «Относительные режимы» параллельно соединенных четырехполюсников: геометрический подход	2	49	<b>Шакиров М.А.</b> Применение диакоптики для расчета динамических режимов электрических цепей	7	58
<b>Филаретов В.В.</b> О преобразовании полного электрического многоугольника к параллельным лучевым схемам	2	58	<b>Шувалов М.Ю., Маврин М.А., Овсиенко В.Л., Ромашкин А.В.</b> Видеомикроскопия электрических и водных триингов	7	68
<b>Арамян М.А.</b> Расчет потенциальных полей и средних параметров дисперсных систем регулярных структур с различными формами включений	2	64	<b>Анненков В.З.</b> Метод расчета импульсного сопротивления стержневого заземлителя	8	59
<b>Радкевич И.А.</b> Методы доказательства достоверности результатов обработки и анализа данных	2	70	<b>Мейер А.А.</b> Поле точечного заземления в полубесконечной неоднородной среде	8	67
<b>Кузнецов И.Ф., Цицикян Г.Н.</b> О расчетных выражениях, предложенных Арнольдом для определения потерь в проводах	3	48	<b>Юсупов Р.Х.</b> Особенности моделирования электромеханических цепей в низкочастотном диапазоне	8	72
<b>Прищепенко А.Б., Третьяков Д.В., Щелкачев М.В.</b> Баланс энергии взрывного пьезоэлектрического генератора частоты	3	56	<b>Казаков М.К.</b> Использование закона полного тока в дискретной форме для измерения больших постоянных токов	9	56
<b>Шушкевич Г.Ч.</b> Электростатическое поле тонкой незамкнутой сферической и сфероидальной оболочек	3	59	<b>Мейер А.А.</b> О применении метода разделения переменных для решения задач теории потенциала на плоскости	9	64
<b>Волохов С.А., Кильдишев А.В.</b> Нормализованные магнитные сигнатуры мультipoльного источника, движущегося по оси кругового контура	3	65	<b>Цатурян А.И.</b> Коэффициент трения сыпучих материалов в электрическом поле	9	70
<b>Пенин А.А.</b> К проблеме определения относительных показателей преобразования энергии	4	56	<b>Рудаков М.Л.</b> Эмпирические формулы для определения электрических параметров биологических тканей в высокочастотном диапазоне	9	75
<b>Хачатрян В.С., Бадалян Г.А., Этмекчян Э.А.</b> Особенности применения теоремы Телледжена для электроэнергетической системы	4	60	<b>Бондаренко А.В., Бондаренко В.В.</b> Реализация некоторых нелинейных динамических цепей при моделировании сложных технических и биологических систем	10	66
<b>Евтич М., Андреев А.М.</b> Влияние неорганического наполнителя и способа сшивания полиэтилена на триинговость кабельной изоляции	4	63	<b>Шаталов А.С.</b> Разреживание матриц и графов, отображающих уравнения линейных цепей в операторной форме	11	51
<b>Абрамкин Ю.В., Извеков В.И., Кузнецов В.А.</b> Сравнительный анализ математических моделей электромагнитного поля Максвелла и Лоренца	5	37	<b>Бородулин М.Ю.</b> Оценка точности численного моделирования вынужденных процессов в электрических цепях	11	57
<b>Львов Е.Л.</b> Объемные и поверхностные силы в моделях магнетиков, основанных на различных физических законах	5	50	<b>Зинченко Л.А.</b> Численно-аналитические преобразования нелинейных резистивных активных двухполюсников лестничной структуры	11	62
<b>Белов М.В., Синицкий Л.А.</b> Энергетические соотношения в реактивных элементах при дискретизации уравнений элементов	5	60	<b>Витков М.Г.</b> Операторные схемы замещения двухполюсника при ненулевых начальных условиях	11	65
<b>Казаков О.И.</b> О преобразовании полного $n$ -угольника резисторов $n$ -лучевой звездой	5	63	<b>Лурье А.И.</b> Об определении максимального тока при включении цепи $RL$ на переменное напряжение	12	23
<b>Левшин Г.Е.</b> О размагничивающем действии дисперсной среды	5	65	<b>Цицикян Г.Н.</b> Электромагнитное поле линейного проводника с током, параллельного граничной плоскости «воздушная среда — проводящее полупространство»	12	55
<b>Колли Я.Н.</b> Внутреннее поле нескольких поляризуемых тел	5	69	<b>Витков М.Г., Виткова А.А.</b> Операторные схемы замещения зависимых источников при ненулевых начальных условиях	12	62
<b>Белоусенко И.В., Ковалев А.П., Совпель В.Б., Ярмоленко В.И.</b> О преобра-			<b>Мейер А.А.</b> Распределение потенциала от двух точечных источников тока в круглой неоднородной пластине	12	66

Автор и название статьи	№ жур-нала	Стр.	Автор и название статьи	№ жур-нала	Стр.
<b>Электротехнические материалы</b>			<b>Шейкман А.Г.</b> Вычисление симметричных составляющих токов генератора по действующим значениям токов фаз	5	15
<b>Мецик М.С., Новиков Г.К.</b> Электретный эффект в кристаллах слюды и слюдяных бумагах	3	43	<b>Окин А.А., Портной М.Г., Шелухин Н.Н.</b> Унифицированные состав и структура информации, используемые в системе диспетчерского управления при решении электрических задач	6	2
<b>Сажин Б.И., Канискин В.А., Костенко Э.М., Левандовская Е.В., Таджибаев А.И.</b> Экспресс-метод определения ресурса кабелей с полимерной изоляцией	7	27	<b>Смирнов К.А.</b> Оптимизация режимов энергосистемы с учетом ограничений по напряжениям	6	8
<b>Белоусов Ф.А., Вердина Я.В., Гапченко Е.Л., Канискин В.А., Сажин Б.И.</b> Влияние электрического поля на увлажнение полимерной электрической изоляции	11	68	<b>Малафеев С.И.</b> Автоматическая система управления тиристорно-реакторным компенсатором	6	13
<b>Электроэнергетика</b>			<b>Дьяков А.Ф., Ишкин В.Х., Мамиконянц Л.Г.</b> Актуальные проблемы и прогресс в области электроэнергетики (по материалам 36 сессии СИГРЭ)	6	61
<b>Иофьев Б.И.</b> Структуры противоаварийной автоматики электроэнергетической системы	1	2	<b>Гамм А.З., Глазунова А.М., Колосок И.Н., Овчинников В.В.</b> Методы оценки дисперсий телеизмерений в электроэнергетических системах	7	2
<b>Дмитриев К.С., Гоник Я.Е.</b> Новый способ плавки гололеда на проводах ВЛ	1	11	<b>Федин В.Т., Чернецкий А.М.</b> Управление послеаварийными режимами линий электропередачи с переменным фазовым сдвигом	7	10
<b>Каневский Я.М.</b> Обеспечение стойкости токоограничивающих реакторов 6—10 кВ при коротких замыканиях	1	17	<b>Гребченко Н.В., Нури А.</b> О применении быстродействующего АВР двигательной нагрузки	7	15
<b>Дьяков А.Ф., Ишкин В.Х., Семенов В.А.</b> Интегрированные системы управления подстанциями за рубежом (по материалам СИГРЭ)	1	71	<b>Надточий В.М.</b> Система поддержки принятия решений для персонала электростанции	7	19
<b>Тарасов В.И.</b> Особенности алгоритмической и программной реализации методов минимизации при решении уравнений установившихся режимов электроэнергетических систем	2	2	<b>Дубовой В.Г.</b> Теория оперативных переключений в электроустановках	8	2
<b>Рагозин А.А., Пинегин А.Л.</b> Параллельная работа с сетью асинхронизированных синхронных ветроэлектрических генераторов	2	8	<b>Глушко В.И., Ямный О.Е., Ковалев Э.П., Науменок Н.А.</b> Расчет наведенного напряжения на линиях электропередачи и обеспечение безопасности работ на этих линиях	8	13
<b>Строев В.А., Штробель В.А., Сыромятников С.Ю., Бейм Р.С., Малик О.П., Хэнкок Д.К.</b> Испытания адаптивного микропроцессорного регулятора возбуждения на физической модели ЭЭС	3	2	<b>Меньшов Б.Г., Ершов М.С., Егоров А.В.</b> Исследование новой системы электроснабжения, обеспечивающей повышение устойчивости двигательной нагрузки	8	19
<b>Потребич А.А.</b> Моделирование нагрузок для расчета потерь энергии в электрических сетях энергосистем	3	7	<b>Кочкин В.И., Шакарян Ю.Г.</b> Режимы работы управляемых линий электропередачи	9	2
<b>Зеленохат Н.И.</b> Анализ режимных характеристик межсистемной связи со статическими компенсаторами	3	13	<b>Аношин О.А., Барсуков А.И., Максимов Б.К., Матвеев Д.А., Юркин П.Л.</b> Защита электрооборудования собственных нужд электростанций от перенапряжений, вызываемых вакуумными выключателями	9	9
<b>Григорьев Ю.Г.</b> Биоэлектромагнитная совместимость (проблема защиты населения от электромагнитного излучения)	3	19	<b>Левченко И.И., Аллилуев А.А., Засыпкин А.С.</b> Релейная защита выпрямительных установок для плавки гололеда постоянным током	9	22
<b>Суханов О.А., Тимофеев В.А., Чандра Ш.С.</b> Применение принципов функционального (кибернетического) моделирования для решения задач управления и проектирования электроэнергетических систем	4	2	<b>Окин А.А., Тимченко В.Ф., Цветков В.А., Киладзе В.А., Толасов А.Г.</b> Оперативное резервирование мощности на основе вероятностного анализа и статистического оценивания эксплуатационных возмущений в энергосистемах	10	2
<b>Алексеев Б.А., Мамиконянц Л.Г.</b> Актуальные проблемы электроэнергетики (СИГРЭ-98)	4	67	<b>Скачков Ю.В., Ляпидов К.С., Юрлов Ю.Е.</b> Выбор структур автономных электроэнергетических систем по показателю отказоустойчивости при автоматизированном проектировании	10	18
<b>Дьяков А.Ф., Левченко И.И., Никитин О.А., Аношин О.А., Кужекин И.П., Максимов Б.К.</b> Электромагнитная обстановка и оценка влияния ее на человека	5	2			
<b>Рагозин А.А.</b> Условия статической устойчивости дальних линий электропередачи с управляемыми шунтирующими реакторами	5	11			

Автор и название статьи	№ жур-нала	Стр.	Автор и название статьи	№ жур-нала	Стр.
<b>Кошеев Л.А., Семенов В.А.</b> Системные аварии в Западном энергообъединении США	10	24	<b>Кучинский Г.С., Вехорева Л.Т., Шилин О.В.</b> Принципы конструирования мощных формирующих линий высокого напряжения для создания импульсов нано- и микросекундного диапазона	9	16
<b>Карякин Р.Н.</b> Нормативные основы использования проводящих частей в качестве PEN-проводников	10	29	<b>Михайлов М.С., Дубовой Э.И.</b> Возможность оценки положения молнии в пространстве по измерению ее электромагнитного излучения в одной точке	12	8
<b>Алиевский Б.Л., Мизюрин С.Р.</b> Процессы заряда электромеханического накопителя энергии в автономной системе генерирования постоянного тока	10	60	<b>Аксенов Ю.П., Голубев А.А., Ляпин А.Г.</b> Градуировка схемы измерения частичных разрядов при эксплуатационных испытаниях	12	16
<b>Скопинцев В.А., Морошкин Ю.В.</b> Анализ и прогноз аварийности в электроэнергетических системах	11	2	<b>Электрические машины</b>		
<b>Якимец И.В., Глускин И.З., Наровлянский В.Г.</b> Обобщенные способы выявления асинхронного режима энергосистемы	11	9	<b>Кузнецов В.А., Федотов А.И.</b> Расчет электромагнитных переходных процессов в системе «синхронный генератор — выпрямительная нагрузка»	1	28
<b>Соколов Н.И., Соколова Р.Н.</b> Некоторые особенности режимов дальних линий электропередачи	11	16	<b>Мощинский Ю.А., Бессмертных Н.А.</b> Математическая модель однофазного асинхронного двигателя с пусковым сопротивлением	1	33
<b>Левченко И.И., Аллилуев А.А., Засыпкин А.С.</b> Способы отключения поврежденной выпрямительной установки для плавки гололеда	11	21	<b>Кутузов С.И.</b> Об улучшении формы кривой напряжения трехфазных синхронных генераторов, используемых в однофазных режимах	2	26
<b>Кудрявцев Е.П., Неклепаев Б.Н.</b> Оценка тяжелей в проводниках гибких шинных линий и линий электропередачи при коротких замыканиях	11	25	<b>Инкин А.И.</b> Математическое описание магнитного поля в объемах явнополюсных электрических машин	2	30
<b>Беляков Ю.С.</b> Расчет взаимной индукции длинных линий электропередачи	11	29	<b>Данилевич Я.Б., Карымов А.А.</b> Оценка сокращения «срока жизни» вала ротора турбогенератора	2	36
<b>Ишкин В.Х., Семенов В.А.</b> Развитие волоконно-оптических линий связи в зарубежных энергосистемах	11	73	<b>Сивокобыленко В.Ф., Нури Абделбасет.</b> Диагностика состояния короткозамкнутых роторов асинхронных машин	3	25
<b>Ершов М.С., Егоров А.В., Яценко Д.Е.</b> Методы определения показателей качества электроснабжения промышленных комплексов	12	2	<b>Цуканов В.И.</b> К расчету электромагнитных сил в шаговых электродвигателях	4	34
<b>Паздерин А.В.</b> Повышение достоверности показаний счетчиков электроэнергии расчетным способом	12	30	<b>Казаков Ю.Б.</b> Матричный анализ и синтез схем статорных обмоток неявнополюсных машин постоянного тока	4	41
<b>Техника высоких напряжений</b>			<b>Лопухина Е.М., Захаренко А.Б.</b> Математическое моделирование асинхронных двигателей с многослойными роторами методом передаточных функций	5	30
<b>Кадомская К.П.</b> О «приведении к норме» изоляции кабельных линий высокого напряжения	2	14	<b>Смирнов Ю.В.</b> Аналитическое описание механических характеристик трехфазных асинхронных двигателей малой мощности	5	34
<b>Шахтактинский Т.И.</b> О влиянии удельной поверхностной проводимости и электрического состояния материала барьера на электрическую прочность промежутка «острие—плоскость»	2	61	<b>Иванов-Смоленский А.В., Кузнецов В.А., Аванесов М.А., Гончаров В.И., Серихин Н.А., Фисенко В.Г., Ширинский С.В.</b> Развитие методов электромагнитного расчета turbo- и гидрогенераторов	6	23
<b>Войтович Р.А., Кадомская К.П.</b> Влияние конструктивных параметров подводных кабельных линий высокого напряжения на электромагнитное поле в водной среде	4	15	<b>Качин С.И.</b> Улучшение эксплуатационных характеристик коллекторных машин малой мощности	6	28
<b>Лоханин А.К.</b> Вопросы координации изоляции электрооборудования высокого напряжения для сетей переменного тока в мировой практике	5	19	<b>Инкин А.И., Темлякова З.С.</b> Метод расчета комплексного сопротивления стержня короткозамкнутого ротора с учетом насыщения зубцов	7	37
<b>Семенов В.К.</b> К теории факельной короны постоянного тока	6	19	<b>Беспалов В.Я., Алиев И.И., Клоков Ю.Б.</b> Асинхронный генератор с гарантированным самовозбуждением	7	43
<b>Бочковский Б.Б., Рогожин И.Б., Росанов Н.И., Тимашова Л.В.</b> Определение координат ударов молнии и амплитудных значений ее токов	8	24	<b>Курбасов А.С.</b> Опыт создания индукторных реактивных электрических двигателей	7	46
<b>Олексевич И.В., Орлов А.В., Темников А.Г.</b> Анализ причин интенсивного искрения электрофилтров ТЭС, улавливающих угольную золу	8	30			

Автор и название статьи	№ жур-нала	Стр.	Автор и название статьи	№ жур-нала	Стр.
<b>Булычев А.В., Ванин В.К.</b> Контроль состояния механической части асинхронного электродвигателя	8	45	ний электромагнитных нагрузок для электро-механических преобразователей со спиральным вторичным элементом	6	47
<b>Джэндубаев А.-З.Р.</b> Жесткое самовозбуждение асинхронного генератора с ферромагнитным короткозамкнутым ротором	9	26	<b>Щербаков С.А., Алиевский Б.Л.</b> О повышении эксплуатационной надежности транзисторов и расширении области их применения	6	50
<b>Афанасьев А.А., Степанов В.Э.</b> Новые подходы к расчету постоянных конформного преобразования в задачах электромеханики	9	32	<b>Тарасов А.Н.</b> Аварийные процессы в тиристорных преобразователях частоты с промежуточным звеном постоянного тока	8	48
<b>Мартынов В.А.</b> Исследование ненасыщенных электрических машин с использованием методов зубцовых контуров и комплексных величин (часть I)	9	37	<b>Абдалов Ш.И.</b> Моделирование параметрического стабилизатора напряжения с взаимно ортогональными магнитопроводами	8	76
<b>Попов Д.А., Попов С.Д.</b> Критерии оценки полюсопереключаемых статорных обмоток трехфазных многоскоростных асинхронных двигателей	9	44	<b>Абдалов Ш.И.</b> Выбор и синтез дифференциальных корректоров мультипликативно-аддитивной фильтрации	11	70
<b>Попов В.И.</b> Определение и оптимизация электромагнитных параметров трехфазных дробных обмоток по многоугольникам МДС	9	53	<b>Чаплыгин Е.Е., Алешин М.Л., Николенко М.П.</b> Параметрическое управление преобразователями с дозированной передачей энергии в нагрузку	12	35
<b>Попов В.И., Макаров Л.Н., Ахунов Т.А.</b> Дифференциальное рассеяние короткозамкнутого ротора с чередующимися пазами	10	41	<b>Электрические аппараты и трансформаторы</b>		
<b>Федотов А.И.</b> Определение индуктивности коммутации для синхронных электрических машин с гармонической системой возбуждения	10	44	<b>Бондина Н.Н., Михайлов В.М., Райнин В.Е.</b> О мощности потерь в первичной обмотке шинного трансформатора тока с пазами	3	27
<b>Мартынов В.А.</b> Исследование ненасыщенных электрических машин с использованием методов зубцовых контуров и комплексных величин (часть II)	10	49	<b>Багинский Л.В.</b> Особенности переходных процессов в трехфазных группах трансформаторов тока с преимущественно активной нагрузкой при последовательных коротких замыканиях	4	7
<b>Торопцев Н.Д.</b> К расчету рабочих характеристик конденсаторного двигателя	10	55	<b>Электрический привод</b>		
<b>Попов Д.А., Попов С.Д.</b> Характеристики двухскоростных асинхронных двигателей с отношением чисел пар полюсов 1:2 и 1:4	11	33	<b>Лихоманов А.М., Панин С.Ю., Писарев А.Ю.</b> Синтез следящих электроприводов на основе частотного подхода	1	39
<b>Данилевич Я.Б., Антонов Ю.Ф.</b> Топологический генератор с магниторезистивным коммутатором из висмута	11	41	<b>Литвиненко А.М.</b> Двухскоростной орбитальный электропривод	1	43
<b>Мошинский Ю.А., Киселева М.М.</b> К расчету емкости конденсатора однофазного асинхронного двигателя	12	51	<b>Петров Ю.П.</b> Реализация гарантирующего управления и «Н <sup>∞</sup> -управления» на основе промышленных регуляторов	2	41
<b>Преобразовательная техника</b>			<b>Дроздов В.Н., Никифоров В.О., Волков М.А.</b> Математическая модель мехатронного поворотного стола	2	46
<b>Бородулин М.Ю.</b> Статическая устойчивость одномотового преобразователя с регуляторами тока, напряжения и мощности	1	51	<b>Полещук В.И.</b> Инвариантная оптимизация упругой двухмассовой системы с подчиненным регулированием	3	33
<b>Кадацкий А.Ф.</b> Гармонический анализ электрических процессов в многофазных импульсных преобразователях постоянного напряжения с ШИМ-методом регулирования	3	37	<b>Кобзев А.А., Новикова П.А., Мишулин Ю.Е.</b> Система управления электроприводом с модуляцией управляющего сигнала	4	21
<b>Попов В.И.</b> Исследование трехфазного обратимого асинхронного одномашинного преобразователя частоты	4	26	<b>Шестаков В.М.</b> Построение и оптимизация многодвигательных регулируемых электроприводов переменного тока непрерывно-поточных агрегатов	4	45
<b>Бородулин М.Ю.</b> Статическая устойчивость одномотового инвертора с регулятором угла отключения	4	49	<b>Полещук В.И.</b> Настройка регуляторов инвариантных систем подчиненного регулирования с учетом фильтров в датчиках тока и скорости	7	30
<b>Рывкин С.Е., Изосимов Д.Б.</b> Широтно-импульсная модуляция напряжения трехфазных автономных инверторов	6	33	<b>Кухаренко Н.В.</b> Синтез быстродействующих систем позиционирования при недетерминированных параметрах объектов	7	35
<b>Жусубалиев Ж.Т.</b> К исследованию хаотических режимов преобразователя напряжения с широтно-импульсной модуляцией	6	40	<b>Бычков М.Г.</b> Элементы теории вентильно-индукторного электропривода	8	35
<b>Исмагилов Ф.Р., Хайруллин И.Х., Янгиров И.Ф.</b> Определение допустимых значе-			<b>Литвиненко А.М.</b> Аэродинамика цилиндрического ротора орбитального вентилятора	11	46

Автор и название статьи	№ жур-нала	Стр.	Автор и название статьи	№ жур-нала	Стр.
<b>Бычков М.Г., Кисельникова А.В., Семенчук В.А.</b> Экспериментальные исследования шума и вибраций в вентильно-индукторном электроприводе	12	41	<b>Григорьев Ю.Г.</b> I Всероссийская конференция с международным участием «Проблема электромагнитной безопасности человека»	4	72
<b>Симаков Г.М., Кромм А.А.</b> Быстродействующий микроэлектропривод постоянного тока с амплитудно-импульсным управлением	12	47	<b>Иманов Г.М., Розет В.Е., Халилов Ф.Х.</b> О разработке и перспективах производства нелинейных ограничителей перенапряжений нового поколения	5	72
<b>Электрический транспорт</b>			<b>Розанов Ю.К.</b> Юбилей ассоциации инженеров силовой электроники (1992—1997)	5	74
<b>Конча А.А., Косарев А.Б.</b> Система тягового энергоснабжения с экранирующим проводом и отсоединенными от рельсов опорами контактной сети	2	19	<b>Герасимов В.Г.</b> Общее собрание Академии электротехнических наук РФ	10	74
<b>Фигурнов Е.П.</b> Сопротивления электро-тяговой сети однофазного переменного тока	5	23	<b>Юбилей</b>		
<b>Розанов В.А.</b> Тяговая сеть переменного тока с нейтрализацией индуктивного влияния	7	50	<b>Кира Пантелеймоновна Кадомская</b>	2	77
<b>Дискуссии</b>			<b>Давид Эммануилович Брускин</b> (К 85-летию со дня рождения)	2	77
<b>Нетушил А.В.</b> — по ст. Филаретова В.В. («Электричество», 1996, № 4). Ответ автора	3	67	<b>Александр Сергеевич Васильев</b> (К 70-летию со дня рождения)	2	78
<b>Бутковский А.Г.</b> Обобщение закона Ома вольт-амперными операторами (статья Нетушила А.В., «Электричество», 1996, № 8)	4	69	<b>Памяти Тихона Павловича Губенко</b> (К 100-летию со дня рождения)	2	79
<b>Фаттахов К.М.</b> О Г-образной схеме замещения трансформатора и асинхронной машины	6	70	<b>Алексей Владимирович Иванов-Смоленский</b> (К 75-летию со дня рождения)	3	76
<b>Китаев А.В.</b> Точку в споре о формах записи уравнений трансформатора должен поставить эксперимент	7	75	<b>Памяти Дмитрия Петровича Морозова</b> (К 100-летию со дня рождения)	3	79
<b>Заметки и письма</b>			<b>Юрий Яковлевич Щелькалов</b> (К 60-летию со дня рождения)	4	73
<b>Жилейко Г.И., Московкин Д.И., Хомутов М.А.</b> Приближенные решения одномерного волнового уравнения с переменным коэффициентом	2	74	<b>Олег Георгиевич Булатов</b> (К 60-летию со дня рождения)	4	74
<b>Гаврилов Л.П.</b> Моделирование переходных процессов в цепях с силовыми диодами при использовании системы PSPICE	3	69	<b>Виктор Яковлевич Беспалов</b> (К 60-летию со дня рождения)	5	75
<b>Илларионова Е.А., Ларионов В.П.</b> Расчетная модель ступенчатого лидера отрицательной молнии	5	70	<b>Мансур Акмелович Шакиров</b> (к 60-летию со дня рождения)	5	76
<b>Илларионова Е.А., Ларионов В.П.</b> Поражаемость воздушных линий электропередачи молнией	10	71	<b>Роблен Хоренович Бальян</b> (К 70-летию со дня рождения)	5	77
<b>Из истории электротехники</b>			<b>Олег Константинович Никольский</b> (К 60-летию со дня рождения)	6	77
<b>Крыжановский Л.Н.</b> «Медицинское электричество» в XVIII в.	3	71	<b>Владимир Александрович Лабунцов</b> (К 70-летию со дня рождения)	7	78
<b>Хроника</b>			<b>Владимир Андреевич Строев</b> (К 60-летию со дня рождения)	8	78
<b>Список статей журнала «Электричество» за 1996 г., переведенных в издательстве «Elsevier Science Ltd»</b>	1	76	<b>Юринов Виктор Макарович</b> (К 70-летию со дня рождения)	10	73
<b>Герасимов В.Г., Бутырин П.А.</b> Научная сессия ОФТПЭ РАН и общее собрание АЭН РФ	2	75	<b>Семенов Владимир Александрович</b> (К 70-летию со дня рождения)	10	77
<b>Герасимов В.Г., Иванченко Г.Е.</b> В Академии электротехнических наук РФ	3	75	<b>Ахунов Турсун Абдалимович</b> (К 60-летию со дня рождения)	10	78
			<b>Борис (Багаудин) Хамидович Гайтов</b> (К 60-летию со дня рождения)	12	73
			<b>Некрологи</b>		
			<b>Евгений Львович Львов</b>	1	79
			<b>Юрий Георгиевич Толстов</b>	3	77
			<b>Виктор Павлович Морозкин</b>	3	78
			<b>Владимир Степанович Комельков</b>	4	75
			<b>Яков Соломонович Гельфанд</b>	4	77
			<b>Виктор Александрович Игнатов</b>	5	78
			<b>Игорь Николаевич Орлов</b>	11	79
			<b>Климентий Георгиевич Митюшкин</b>	11	80

# Алфавитный указатель

<b>А</b>		Глускин И.З.	11,9	Казаков Ю.Б.	4,41
Абдалов Ш.И.	8,76; 11,70	Глушко В.И.	8,13	Каневский Я.М.	1,17
<b>Абрамкин Ю.В.</b>	5,37	Голубев А.А.	12,16	Канискин В.А.	7,27; 11,68
Аванесов М.А.	6,23	Гоник Я.Е.	1,11	<b>Карымов А.А.</b>	2,36
Аксенов Ю.П.	12,16	Гончаров В.И.	6,23	Карякин Р.Н.	10,29
Алексеев Б.А.	3,67	Гребченко Н.В.	7,15	Качин С.И.	6,28
Алешин М.Л.	12,35	Григорьев Ю.Г.	3,19; 4,72	Киладзе В.А.	10,2
Алиев И.И.	7,43			Кильдишев А.В.	3,65
Алиевский Б.Л.	6,50; 10,60	<b>Д</b>		Киселева М.М.	12,51
Алليلуев А.А.	9,22; 11,21			Кисельникова А.В.	12,41
Андреев А.М.	3,63			Китаев А.В.	7,75
Аношин О.А.	5,2; 9,9	Данилевич Я.Б.	2,36; 11,41	Клоков Ю.Б.	7,43
Анненков В.З.	8,59	Джэндубаев А.-З.Р.	9,26	Кобзев А.А.	4,21
Антонов Ю.Ф.	11,41	Дмитриев К.С.	1,11	Ковалев А.П.	6,55
Арамян М.А.	2,64	Дроздов В.Н.	2,46	Ковалев Э.П.	8,13
Афанасьев А.А.	9,32	Дубовой В.Г.	8,2	Колли Я.Н.	5,69
Ахунов Т.А.	10,41	Дубовой Э.И.	12,8	Колосок И.Н.	7,2
		Дьяков А.Ф.	1,71; 5,2; 6,61	Конча А.А.	2,19
<b>Б</b>				Косарев А.Б.	2,19
Бадалян Г.А.	4,60	<b>Е</b>		Костенко Э.М.	7,27
Багинский Л.В.	4,7	Евтич М.	4,63	Кочкин В.И.	9,2
Баранов М.И.	1,63	Егоров А.В.	8,19; 12,2	Кошечев Л.А.	10,24
Барсуков А.И.	9,9	Ершов М.С.	8,19; 12,2	Кромм А.А.	12,47
Бейм Р.С.	3,2	Ершов Р.Е.	6,59	Крыжановский Л.Н.	3,71
Белов М.В.	6,60			Кудрявцев Е.П.	11,25
Белоусенко И.В.	6,55	<b>Ж</b>		Кужекин И.П.	5,2
Белоусов Ф.А.	11,68			Кузнецов В.А.	1,28; 5,37; 6,23
Беляков Ю.С.	11,29			Кузнецов И.Ф.	3,48
Беспалов В.Я.	7,43	Жилейко Г.И.	2,74	Курбасов А.С.	7,46
Бессмертных Н.А.	1,33	Жусубалиев Ж.Т.	6,40	Кутузов С.И.	2,26
Бондаренко А.В.	10,66			Кухаренко Н.В.	7,35
Бондаренко В.В.	10,66			Кучинский Г.С.	9,16
Бондина Н.Н.	3,27				
Бородулин М.Ю.	1,51; 4,49; 11,57	<b>З</b>		<b>Л</b>	
Бочковский Б.Б.	8,24	Засыпкин А.С.	9,22; 11,21	Лавин И.А.	1,58
Булычев А.В.	8,45	Захаренко А.Б.	5,30	Ларионов В.П.	5,70; 10,71
Бутковский А.Г.	4,69	Зеленохат Н.И.	3,13	Левандовская Е.В.	7,27
Бутырин П.А.	2,75	Зинченко Л.А.	11,62	Левченко И.И.	5,2; 9,22; 11,21
Бычков М.Г.	8,35; 12,41			Левшин Г.Е.	5,65
<b>В</b>		<b>И</b>		Литвиненко А.М.	1,43; 11,46
Ванин В.К.	8,45	Иванов-Смоленский А.В.	6,23	Лихоманов А.М.	1,39
Вердина Я.В.	11,68	Иванченко Г.Е.	3,75	Лопухина Е.М.	5,30
Вехорева Л.Т.	9,16	Извеков В.И.	5,37	Лоханин А.К.	5,19
Витков М.Г.	11,65; 12,62	Изосимов Д.Б.	6,33	Лурье А.И.	12,23
Виткова А.А.	12,62	Илларионова Е.А.	5,70; 10,71	<b>Львов Е.Л.</b>	5,50
Войтович Р.А.	4,15	Иманов Г.М.	5,72	Ляпидов К.С.	10,18
Волков М.А.	2,46	Инкин А.И.	2,30; 7,37	Ляпин А.Г.	12,16
Волохов С.А.	3,65	Иофьев Б.И.	1,2		
		Исмагилов Ф.Р.	6,47	<b>М</b>	
		Ишкин В.Х.	1,71; 6,61; 11,73	Маврин М.А.	7,68
<b>Г</b>				Макаров Л.Н.	10,41
Гаврилов Л.П.	3,69	<b>К</b>		Максимов Б.К.	5,2; 9,9
Гамм А.З.	7,2			Малафеев С.И.	6,13
Гапченко Е.Л.	11,68	Кадацкий А.Ф.	3,37	Малик О.П.	3,2
Герасимов В.Г.	2,75; 3,75; 10,74	Кадомская К.П.	2,14; 4,15	Мамиконянц Л.Г.	4,67; 6,61
Глазунова А.М.	7,2	Казаков М.К.	9,56	Мартынов В.А.	9,37; 10,49
		Казаков О.И.	5,63	Матвеев Д.А.	9,9
				Мейер А.А.	8,67; 9,64; 12,66



