

ISSN 0013-5380

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

1995

7

Уважаемые читатели!

115 лет назад, в июле 1880 г., вышел первый номер журнала «Электричество».

Редколлегия и редакция поздравляют Вас с этой знаменательной датой, выражают надежду на дальнейшее плодотворное сотрудничество на благо развития электротехники и энергетики.

Адреса редакции: 103012 Москва, К-12, Б.Черкасский пер., 2/10

☎ 924-24-80

101000 Москва, Главный почтамт, абонентный ящик № 648

Художественный редактор Т.А. Дворецкова

Сдано в набор 26.05.95. Подписано в печать 19.06.95. Формат 60×88¹/₈.
Бумага офсетная № 2. Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,8. Тираж 1010 экз. Заказ 1020

Энергоатомиздат, 113114, Москва, М-114, Плюзовая наб., 10
Макет выполнен АО «Знак», 103012, Москва, Б Черкасский пер., 2/10
Типография № 9 Комитета РФ по печати
Москва, 109033, Волочаевская ул., 40

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

7
ИЮЛЬ
1995

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

УЧРЕДИТЕЛИ: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК (Отделение физико-технических проблем энергетики),
ФЕДЕРАЦИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ ОБЩЕСТВ

СОДЕРЖАНИЕ

Шакарян Ю.Г. Вопросы теории синхронной машины с двумя системами статорных обмоток	2
Солодовников С.Т., Ягнов В.А., <u>Воздвиженский В.А.</u> , Иванов В.П. Оценка отключающей способности вакуумных размыкателей	8
Попов В.И. Электромашинные трехфазные дробные обмотки с пониженным дифференциальным рассеянием	14
Смирнов А.Ю. Подразделенные обмотки с полюсной модуляцией и их применение в машинах переменного тока	24
Алиевский Б.Л., Базарнов Б.А., Вербский В.А., Жарков В.Д., Чукаева Н.Я. Униполярный генератор со стержневой обмоткой якоря для автономной системы электропитания	29
Лихоманов А.М., Куцанов Л.А. Синтез стандартных настроек для следящих электроприводов по назначенным переходным характеристикам	35
Юркевич В.М. Численный расчет электрического поля методом сферических элементов	40
Чечурин В.Л. Оптимизация структуры и формы тел, находящихся в плоскопараллельном магнитном поле	47
Кувалдин А.Б., Андришин Н.Ф., Захаров И.В. Расчет электрических и энергетических параметров многослойного индуктора с самокомпенсацией реактивной мощности	55
Карпов Д.И., Лопатин В.В., Носков М.Д. Влияние высокопроводящих барьеров на развитие дендритов в диэлектрике	59
Резинкина М.М., Резинкин О.Л. Расчет трехмерного распределения напряженности электрического поля в неоднородном диэлектрике	62
Кадников С.Н., Шишкова И.Е. Вычисление емкости тонкого гиперболоидального сегмента	66
Смирнов В.П., Сапаев Ч.Б. Численный анализ электрических цепей с использованием зарядной модели двухполюсников	69

ДИСКУССИИ

Попов П.А. Об обозначениях элементов схем замещения	72
---	----

ИЗ ИСТОРИИ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Котли Я.Н. Две работы по теоретической электротехнике	73
---	----

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

<u>Бургсдорф В.В.</u> , Злобинский Э.Л. Ветровые нагрузки воздушных линий электропередачи	76
---	----

Ларионов В.П., Прохоров Е.Н. Задачи и методы лабораторных исследований систем молниезащиты	78
--	----

ХРОНИКА

Борис Павлович Борисов (некролог)	80
-----------------------------------	----

CONTENTS

Shakaryan Yu.G. Problems of Two Armature Windings Synchronous Machine Theory	2
Solodovnikov S.G., Yagnov V.A., Kravchenko S.A., <u>Vozdvizhenskii V.A.</u> , Ivanov V.P. Evaluation of Vacuum Circuit Breaker Main Parameters	8
Popov V.I. Electrical Machine Fractional Windings with Reduced Differential Dissipation	14
Smirnov A.Yu. Subdivided Windings with Pole Modulation and their Application in Alternating Current Machines	24
Aliyevskii B.L., Bazarnov B.A., Verbskii V.A., Zharkov V.D., Chukayeva N.Ya. Unipolar Generator with a Shaft Winding of Armature for Autonomous Power Supply System	29
Likhomanov A.M., Kutzanov L.A. Synthesis of Standard Equations for Electrical Servodrives by Means of Fixed Transitional Characteristics	35
Yurkevich V.M. Calculation of Electrical Field by Means of Sphere Elements Method	40
Chechurin V.L. Optimization of Shape and Structure of Magnetic Bodies in Flat-Parallel Magnetic Field	47
Kuvaldin A.B., Andryushin N.F., Zakharov I.V. Calculation of Electric and Energetic Parameters of Multilayer Inductor with Self-Compensation of Reactive Power	55
Karpov D.I., Lopatin V.V., Noskov M.D. The Influence of High-Conductive Barriers on the Dendrite Development in Dielectric	59
Rezinkina M.M., Rezinkin O.L. Calculation of 3-D Electrical Field Intensity Distribution in Heterogeneous Dielectric	62
Kadnikov S.N., Shishkova I.E. Calculation of Capacity of thin Hyperboloidal Segment	66
Smirnov V.P., Sapayev H.V. Numerical Analysis of an Electrical Circuits by Means of the Charging Model of a Two-terminal Network	69

DISCUSSIONS

Popov P.A. On Designations of Elements of Equivalent Circuit	72
--	----

FROM the HISTORY of ELECTRICAL ENGINEERING

Colley Ya.N. Two Papers on Theoretical Electrical Engineering	73
---	----

NOTES and LETTERS

<u>Burgsdorf V.V.</u> , Zlobinskii E.L. Wind Loads of Aerial Power Transmission	76
---	----

Larionov V.P., Prokhorov E.N. Problems and Methods of Laboratory Investigation of Lightning Protection Systems	78
--	----

CHRONICLE

Boris Pavlovich Borisov (Obituary Notice)	80
---	----

Вопросы теории синхронной машины с двумя системами статорных обмоток

ШАКАРЯН Ю.Г.

Рассмотрены установившиеся и переходные (при постоянной частоте вращения) процессы, протекающие в синхронной машине, содержащей две трехфазные системы обмоток на статоре. Получены соотношения для коэффициентов связи между обмотками $k_{свq}$ и $k_{свd}$ обмоток статора для машины с демпферными и без демпферных контуров на роторе. Показано существенное влияние на эти коэффициенты соотношения между собственным (x_d) рассеянием фазы статора и так называемым взаимным сопротивлением рассеяния (Δx_{12}) статора.

Ключевые слова: синхронная машина, обмотка статора, демпферный контур, сопротивление рассеяния, теория

В последние годы большое внимание уделяется электромашинновентильным комплексам (ЭМВК), состоящим из синхронной машины и тиристорного преобразователя частоты в статоре. Такие ЭМВК находят широкое применение в качестве регулируемых электроприводов и генераторов, обеспечивающих стабильную выходную частоту при переменной частоте вращения ротора.

Как правило, синхронные машины, входящие в состав этих ЭМВК, содержат на статоре две системы трехфазных обмоток, сдвинутых одна относительно другой на определенный угол, что обеспечивает лучшее качество генерируемой или потребляемой энергии, хорошее использование собственно электрической машины (меньшие потери, более полное использование машины по моменту) и т.д. Вместе с тем, такое выполнение статорных обмоток вызывает ряд новых проблем, связанных с влиянием процессов, протекающих в одной из систем статорных обмоток на другую, что должно быть учтено при расчете установившихся и переходных процессов, протекающих в данном ЭМВК.

В отечественной и зарубежной литературе опубликованы многочисленные материалы, относящиеся к исследованию различного рода процессов, протекающих в таких синхронных машинах и ЭМВК на их основе.

В статье рассмотрено влияние индуктивного сопротивления, обусловленного взаимоиндукцией между упомянутыми выше системами статорных обмоток на установившиеся и переходные процессы, протекающие в рассматриваемых ЭМВК, получены соответствующие аналитические соотношения.

Основные уравнения и исходные положения. Машина и преобразователь частоты идеализи-

Steady-state and transient operating conditions at constant speed of rotation of the synchronous machine with two 3-phase armature windings are considered. Formulae for coupling factors $k_{свq}$ and $k_{свd}$ between armature windings are given for the machine with and without damper winding on the rotor. Substantial influence of the armature phase winding own leakage reactance (k_d) and so called mutual leakage reactance (Δx_{12}) on the mentioned factors is shown.

Key words: synchronous machines, 3-phase armature windings, damper windings, leakage reactance, theory

руются в общепринятом смысле: для машины это, в частности, — учет вытеснения и насыщения высших пространственных гармоник, для преобразователя — высших временных гармоник, создаваемых при работе, углов коммутации.

Предполагается, что на статоре находятся две симметричные системы обмоток, сдвинутых одна относительно другой на угол α . Рассматриваются два случая: для двухфазных обмоток, когда общее число фаз статора $m=4$, и для трехфазных обмоток, когда $m=6$. На неявнополюсном роторе расположены две симметричные системы демпферных обмоток, одна из которых — реально существующая система, а вторая — эквивалент массивного ротора. Принято, что обмотка возбуждения расположена в продольной оси.

Основные дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} -u_{1q} &= r i_{1q} + p \psi_{1q} - \omega \psi_{1d}; \\ -u_{1d} &= r i_{1d} + p \psi_{1d} + \omega \psi_{1q}; \\ -u_{2q} &= r i_{2q} + p \psi_{2q} - \omega \psi_{2d}; \\ -u_{2d} &= r i_{2d} + p \psi_{2d} + \omega \psi_{2q}; \\ u_B &= r_B I_B + p \psi_B; \\ 0 &= R'_1 i'_{1d} + p \psi'_{1d}; \\ 0 &= R'_1 i'_{1q} + p \psi'_{1q}; \\ 0 &= R'_2 i'_{2d} + p \psi'_{2d}; \\ 0 &= R'_2 i'_{2q} + p \psi'_{2q}; \\ M_T &= T_j p \omega + (i_{q1} \psi_{1d} - i_{d1} \psi_{2q}). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Не нарушая общности, принято, что параметры всех обмоток статора одинаковы, также одинаковы параметры каждой из пар демпферных обмоток.

$$r_a = r_b = r_A = r_B = r; \quad l_a = l_b = l_A = l_B = l;$$

Таблица 1

Потоко- сцепление	Общее число фаз m	Соотношение
$\bar{\Psi}_1$	4	$\lambda_1 w_1^2 \bar{I}_1 + \lambda_{12} w_1^2 \bar{I}_2 + j \lambda_{1f} \frac{m}{2} w_1^2 I_B + \lambda_{1f} \frac{m}{2} w_1^2 (\bar{I}'_{1d} + \bar{I}'_{2d})$
	6	$\left(\lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_{12}\right) w_1^2 \bar{I}_1 + \frac{3}{2} \lambda_{12} w_1^2 \bar{I}_2 + j \lambda_{1f} \frac{m}{2} w_1^2 I_B + \lambda_{1f} \frac{m}{2} w_1^2 (\bar{I}'_{1d} + \bar{I}'_{2d})$
$\bar{\Psi}_2$	4	$\lambda_1 w_1^2 \bar{I}_2 + \lambda_{12} w_1^2 \bar{I}_1 + j \lambda_{1f} \frac{m}{2} w_1^2 I_B + \lambda_{1f} \frac{m}{2} w_1^2 (\bar{I}'_{1d} + \bar{I}'_{2d})$
	6	$\left(\lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_{12}\right) w_1^2 \bar{I}_2 + \frac{3}{2} w_1^2 \bar{I}_1 + j \frac{m}{2} \lambda_{1f} w_1^2 I_B + \lambda_{1f} \frac{m}{2} w_1^2 (\bar{I}'_{1d} + \bar{I}'_{2d})$
Ψ_B	4	$\lambda_{1f} w_1^2 (i_{1d} + i_{2d}) + \lambda_f \frac{m}{2} w_1^2 I_B + \lambda_{fd} \frac{m}{2} w_1^2 (i'_{1d} + i'_{2d})$
	6	$\frac{3}{2} w_1^2 \lambda_{1f} (i_{1d} + i_{2d}) + \lambda_f \frac{m}{2} w_1^2 I_B + \lambda_{fd} \frac{m}{2} w_1^2 (i'_{1d} + i'_{2d})$
$\bar{\Psi}'_{1d}$	4	$\lambda_{1f} w_1^2 (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) + j \lambda_{fd} \frac{m}{2} w_1^2 I_B + \lambda_d \frac{m}{2} w_1^2 \bar{I}'_{1d} + \lambda_{1d} \frac{m}{2} w_1^2 \bar{I}'_{2d}$
	6	$\frac{3}{2} \lambda_{1f} w_1^2 (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) + j \lambda_{fd} \frac{m}{2} w_1^2 I_B + \lambda_d \frac{m}{2} w_1^2 \bar{I}'_{1d} + \lambda_{fd} \frac{m}{2} w_1^2 \bar{I}'_{2d}$
$\bar{\Psi}'_{2d}$	4	$\lambda_{1f} w_1^2 (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) + j \lambda_{fd} \frac{m}{2} w_1^2 I_B + \lambda_{fd} \frac{m}{2} w_1^2 \bar{I}'_{1d} + \lambda_d \frac{m}{2} w_1^2 \bar{I}'_{2d}$
	6	$\frac{3}{2} \lambda_{1f} w_1^2 (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) + j \lambda_{fd} \frac{m}{2} w_1^2 I_B + \lambda_{fd} \frac{m}{2} w_1^2 \bar{I}'_{1d} + \lambda_d \frac{m}{2} w_1^2 \bar{I}'_{2d}$

$$r_{d1}=r_{Q1}=R_1; \quad r_{d2}=r_{Q2}=R_2; \quad l_{d1}=l_{Q1}=l_1;$$

$$l_{d2}=l_{Q2}=l_2.$$

Эта система дифференциальных уравнений записана в системе относительных единиц статора в предположении, что токи, напряжения, потокоцепления и параметры обмотки возбуждения и демпферных обмоток приведены к статорным. В качестве базисных приняты синхронная частота вращения ротора (частота сети), амплитуды номинальных токов и напряжений статора, полная номинальная мощность машины (статора):

$$S_6 = S_{\text{ном}} = m U_n I_n = \frac{m}{2} U_6 I_6.$$

Потокоцепления обмоток статора ($\Psi_{1d}; \Psi_{1q}; \Psi_{2d}; \Psi_{2q}$), возбуждения (Ψ_B), демпферных обмоток ($\Psi'_{1d}; \Psi'_{1q}; \Psi'_{2d}; \Psi'_{2q}$) связаны с токами машины соотношениями, приведенными в табл. 1.

Удобнее, однако, пользоваться не этими соотношениями, а несколько видоизмененными, записанными через индуктивные сопротивления машины.

Индуктивные сопротивления. Для дальнейшего анализа введем в рассмотрение следующие параметры: x — полное индуктивное сопротивление каждой из систем обмоток статора; x_{12} — индуктивное сопротивление взаимоиндукции двух статорных систем обмоток; x_a — сопротивление реакции якоря между ротором и одной из систем статорных обмоток; x_{ad} — полное сопротивление реакции якоря между обмоткой возбуждения или

каждой из демпферных обмоток ротора и обеими системами статорных обмоток; x_B — полное индуктивное сопротивление обмотки возбуждения; $x'_{B,d}$ — сопротивление взаимоиндукции между обмоткой возбуждения* и каждой из демпферных обмоток; для практических расчетов допустимо считать, что $x'_{B,d} = x_{ad} = x'_{BQ}$; x_d — полное индуктивное сопротивление каждой из демпферных обмоток.

Значения этих индуктивных сопротивлений в соответствии с уравнениями табл. 1 приведены в табл. 2.

Таблица 2

Индуктивное сопротивление	Соотношение	
	$m=4$	$m=6$
x	$\omega_0 \lambda_1 w_1^2$	$\omega_0 \left(\lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_{12}\right) w_1^2$
x_{12}	$\omega_0 \lambda_{12} w_1^2$	$\omega_0 \frac{3}{2} \lambda_{12} w_1^2$
$x_a = \frac{x_{ad}}{2}$	$\omega_0 \lambda_{1f} w_1^2 = \frac{2}{m} x_{ad}$	$\omega_0 \lambda_{1f} \frac{3}{2} w_1^2 = \frac{3}{m} x_{ad}$
x_{ad}	$\frac{m}{2} \omega_0 \lambda_{1f} w_1^2$	$\frac{m}{2} \omega_0 \lambda_{1f} w_1^2$
x'_B	$\frac{m}{2} \omega_0 \lambda_{fd} w_1^2$	$\frac{m}{2} \omega_0 \lambda_{fd} w_1^2$
x_B	$\frac{m}{2} \omega_0 \lambda_f w_1^2$	$\frac{m}{2} \omega_0 \lambda_f w_1^2$
x'_{d1}	$\frac{m}{2} \omega_0 \lambda_{d1} w_1^2$	$\frac{m}{2} \omega_0 \lambda_{d1} w_1^2$
x'_{d2}	$\frac{m}{2} \omega_0 \lambda_{d2} w_1^2$	$\frac{m}{2} \omega_0 \lambda_{d2} w_1^2$

Легко показать, что

$$\left. \begin{aligned} x &= x_{\sigma} + x_a = x_{\sigma} + \frac{x_{ad}}{2}; \\ x_{12} &= \Delta X_{12} + X_a = \Delta x_{12} + \frac{x_{ad}}{2}; \\ x_B &= x_{B\sigma} + x_{ad}; \\ x'_{d1} &= x_{d1\sigma} + x_{ad}; \\ x'_{d2} &= x_{d2\sigma} + x_{ad}; \\ x'_{B,d} &= \Delta X_{B,d} + x_{ad}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где x_{σ} — сопротивление рассеяния обмотки статора; $x_{B\sigma}$ — сопротивление рассеяния обмотки возбуждения; $x_{d1\sigma}$; $x_{d2\sigma}$ — сопротивления рассеяния первой и второй систем демпферных обмоток; Δx_{12} ; $\Delta x_{B,d}$ — некоторые реактивные сопротивления, добавочные к соответствующим индуктивным сопротивлениям реакции якоря.

Пользуясь формулами табл. 2 и соотношениями (2), можно на базе табл. 1 записать соотношения для потокосцеплений машины через введенные ранее индуктивные сопротивления. Эти уравнения здесь не приводятся.

Установившийся режим. В этом режиме к статорным обмоткам приложены синусоидальные напряжения одинаковой частоты ω_1 , в общем случае отличающейся от базисной (ω_0). Эти напряжения сдвинуты относительно друг друга на угол φ . В соответствии с принятыми положительными направлениями вращения векторов напряжений (против часовой стрелки) запишем:

$$\begin{aligned} u_b &= U_1 \cos \omega_1 t; \quad u_a = U_1 \sin \omega_1 t; \\ u_B &= U_2 \cos(\omega_1 t + \varphi); \quad u_A = U_2 \sin(\omega_1 t + \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

В координатных осях, связанных с ротором, получим

$$\bar{u}_1 = U_1 e^{j(\omega_1 t - \gamma)}; \quad \bar{u}_2 = U_2 e^{j(\omega_1 t + \varphi - \gamma)}.$$

В установившемся режиме ($\omega = \omega_1 = \text{const}$) имеем

$$\gamma = \int \omega dt + \gamma_0 = \omega_1 t + \gamma_0,$$

следовательно,

$$\bar{u}_1 = \dot{U}_1 = U_1 e^{-j\delta_1}; \quad \bar{u}_2 = \dot{U}_2 = U_2 e^{-j\delta_2},$$

где

$$\delta_1 = \gamma_0; \quad \delta_2 = \gamma_0 + \alpha - \varphi.$$

Обозначим

$$\delta_{12} = \delta_2 - \delta_1 = \alpha - \varphi. \quad (4)$$

Эти углы и векторы $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ показаны на рис. 1. Напряжения, токи и потокосцепления ус-

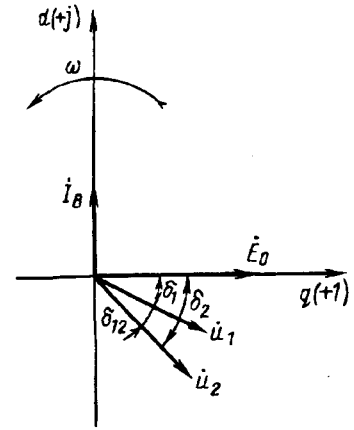


Рис. 1. Расположение векторов машины

тановившегося режима, как это общепринято, обозначены переменными с точками. Уравнения установившегося режима получим по (1), принимая $p=0$ и учитывая введенные ранее параметры (активные и индуктивные сопротивления):

$$\begin{aligned} -\dot{U}_1 &= r\dot{I}_1 + j\omega_1(x\dot{I}_1 + x_{12}\dot{I}_2 + jx_{ad}I_B); \\ -\dot{U}_2 &= r\dot{I}_2 + j\omega_1(x\dot{I}_2 + x_{12}\dot{I}_1 + jx_{ad}I_B); \end{aligned}$$

$$U_B = r_B I_B.$$

Обозначив через ЭДС статора переменную

$$\dot{E}_0 = -j\omega_1(jx_{ad}I_B) = \omega_1 x_{ad} I_B,$$

которая, отставая от тока I_B на $\pi/2$, направлена по поперечной оси q , запишем:

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= \dot{U}_1 + (r + j\omega_1 x)\dot{I}_1 + j\omega_1 x_{12}\dot{I}_2; \\ E_0 &= \dot{U}_2 + (r + j\omega_1 x)\dot{I}_2 + j\omega_1 x_{12}\dot{I}_1. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Из (5) можно определить токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, а далее — активные и реактивные мощности. Приведем эти соотношения в окончательной форме (в отн. ед.) без учета активного сопротивления r^* :

$$P_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{U_1 E_0 \sin \delta_1}{\omega_1 (x + x_{12})} - \frac{x_{12} U_1 U_2}{\omega_1 (x^2 - x_{12}^2)} \sin \delta_{12} \right];$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{U_2 E_0 \sin \delta_2}{\omega_1 (x + x_{12})} + \frac{x_{12} U_1 U_2}{\omega_1 (x^2 - x_{12}^2)} \sin \delta_{12} \right];$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{U_1 E_0 \cos \delta_1}{\omega_1 (x + x_{12})} - \frac{x_{12} U_1^2}{\omega_1 (x^2 - x_{12}^2)} + \frac{x_{12} U_1 U_2 \cos \delta_{12}}{\omega_1 (x^2 - x_{12}^2)} \right];$$

* Неучет r допустим для частот вращения $\omega \geq 0,05\omega_0$. Происхождение коэффициента $1/2$ перед $P_1; Q_1; P_2; Q_2$ следует из принятой системы относительных единиц. Для двухфазной обмотки статора $S_1 = P_1 + jQ_1$; $S_6 = \frac{m}{2} U_6 I_6 = 2U_6 I_6$; для трехфазной $S_1 = P_1 + jQ_1 = \frac{3}{2} U_1 I_1$, при $S_6 = 3U_6 I_6$.

$$Q_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{U_1 E_0 \cos \delta_2}{\omega_1 (x+x_{12})} - \frac{x_{12} U_2^2}{\omega_1 (x^2 - x_{12}^2)} + \frac{x_{12} U_1 U_2 \cos \delta_{12}}{\omega_1 (x^2 - x_{12}^2)} \right].$$

Отсюда видно, что в составе активных и реактивных мощностей каждой из систем статорных обмоток присутствуют так называемые «собственные» и «взаимные» мощности, последние обусловлены сдвигом напряжений U_1 и U_2 одна относительно другой. Если сдвиг между напряжениями отсутствует, то взаимная составляющая в активных мощностях отсутствует. Если же $\delta_{12} = \pi/2$, то взаимная составляющая отсутствует в реактивных мощностях. Этот фактор должен учитываться при проектировании машины.

Если обмотки статора подключаются непосредственно или через трансформатор к одному и тому же источнику, то результирующие активная и реактивные мощности определяются как

$$P = \frac{1}{2} \left[\frac{U_1 E_0}{\omega_1 (x+x_{12})} \sin \delta_1 + \frac{U_2 E_0}{\omega_1 (x+x_{12})} \sin \delta_2 \right];$$

$$Q = \frac{1}{2} \left[\frac{U_1 E_0 \cos \delta_1}{\omega_1 (x+x_{12})} + \frac{U_2 E_0 \cos \delta_2}{\omega_1 (x+x_{12})} - \frac{x (U_1^2 + U_2^2)}{\omega_1 (x^2 - x_{12}^2)} + \frac{x_{12} U_1 U_2}{\omega_1 (x^2 - x_{12}^2)} \cos \delta_{12} \right].$$

Практически важным является случай, при котором каждая из систем статорных обмоток подключена к источнику (например преобразователь частоты), выходные напряжения которого U_1 и U_2 по времени сдвинуты на тот же угол, что и обмотки статора в пространстве, т.е. когда $\varphi = \alpha$ (обычно 30 эл. град). Но из (4) при $\varphi = \alpha$ следует, что $\delta_{12} = 0$, поэтому в системе координат dq ротора напряжения U_1 и U_2 совпадают по фазе. Это означает, что

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{U_1 E_0 \sin \delta_1}{\omega_1 (x+x_{12})}; \quad P_2 = \frac{1}{2} \frac{U_2 E_0 \sin \delta_1}{\omega_1 (x+x_{12})}.$$

При $U_1 = U_2 = U$, что обычно и имеет место на практике, получим

$$P = P_1 + P_2 = \frac{U E_0 \sin \delta}{\omega_1 (x+x_{12})}, \quad (6)$$

где $\delta = \delta_1 = \delta_2$.

Для реактивных мощностей

$$Q = Q_1 + Q_2 = \left[\frac{U E_0 \cos \delta}{\omega_1 (x+x_{12})} - \frac{U^2}{\omega_1 (x+x_{12})} \right]. \quad (7)$$

Индуктивное сопротивление $x+x_{12}$, входящее в (6) и (7) можно с учетом (2) представить в виде

$$x+x_{12} = x_\sigma + \frac{1}{2} x_{ad} + \Delta x_{12} + \frac{1}{2} x_{ad} = x_\sigma + x_{ad} + \Delta x_{12}.$$

Получается весьма интересный результат. В синхронной машине, содержащей одну систему обмоток на статоре, в формулах для P и Q содержатся, как известно, индуктивные сопротивления $x_\sigma + x_{ad}$. В машине же с двумя системами обмоток к этому индуктивному сопротивлению следует формально добавить индуктивное сопротивление Δx_{12} . Но здесь следует иметь в виду, что входящее в уравнения (6) и (7) сопротивление x_σ — сопротивление рассеяния одной из систем статорных обмоток. Если бы машина содержала одну систему статорных обмоток, то ее полное индуктивное сопротивление было бы равно

$$2 \left(x_\sigma + \frac{x_{ad}}{2} \right) = 2x_\sigma + x_{ad},$$

и, следовательно, при оценке соотношения мощностей надо сравнивать между собой индуктивные сопротивления $x_\sigma + \Delta x_{12} + x_{ad}$ и $2x_\sigma + x_{ad}$, т.е. все будет зависеть от того, в каком соотношении по отношению друг к другу находятся сопротивления x_σ и Δx_{12} . При $x_\sigma = \Delta x_{12}$ индуктивные сопротивления, определяющие значения P и Q , будут одинаковыми. В другом крайнем случае при $\Delta x_{12} = 0$ результирующие индуктивные сопротивления для машины с разделенными обмотками будет меньше, а значения P и Q при прочих равных условиях — больше.

Векторная диаграмма установившегося режима может быть построена на основании уравнений (4). Можно эти уравнения и несколько видоизменить. Введем некие эквивалентные напряжения:

$$\dot{U}_{13} = \frac{x}{x-x_{12}} \dot{U}_1 - \frac{x_{12}}{x-x_{12}} \dot{U}_2;$$

$$\dot{U}_{23} = \frac{x}{x-x_{12}} \dot{U}_2 - \frac{x_{12}}{x-x_{12}} \dot{U}_1.$$

Тогда уравнения установившегося режима запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} E_0 - j\omega_1 (x+x_{12}) \dot{I}_1 - r \dot{I}_1 &= \dot{U}_{13}; \\ E_0 - j\omega_1 (x+x_{12}) \dot{I}_2 - r \dot{I}_2 &= \dot{U}_{23}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

При произвольном соотношении $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ метод построения векторной диаграммы может быть таким: задаются ЭДС E_0 и токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, далее по (8) определяются напряжения $\dot{U}_{13}$ и $\dot{U}_{23}$, а уже потом определяются истинные напряжения:

$$\dot{U}_1 = \frac{x}{x+x_{12}} \dot{U}_{13} + \frac{x_{12}}{x+x_{12}} \dot{U}_{23};$$

$$\dot{U}_2 = \frac{x}{x+x_{12}} \dot{U}_{2\sigma} + \frac{x_{12}}{x+x_{12}} \dot{U}_{1\sigma}.$$

Пример построения векторной диаграммы дан на рис. 2. Для интересующего нас случая $U_1=U_2=U$; $I_1=I_2=I$ уравнения (8) вырождаются в

$$2E_0 - 2[r + j\omega_1(x+x_{12})]I = 2\dot{U}$$

или

$$E_0 = U + rI + j\omega_1(x+x_{12})I.$$

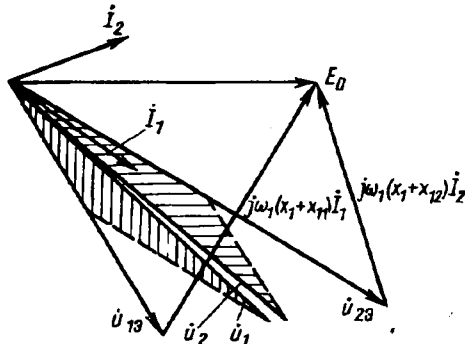


Рис. 2. Векторная диаграмма

Следовательно, при равенстве $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ имеем две совпадающие друг с другом векторные диаграммы, отличающиеся от традиционной векторной диаграммы синхронной машины тем, что вместо реактивного сопротивления $x_\sigma + x_{ad}$ приходится иметь дело с реакторным сопротивлением $x_\sigma + x_{ad} + \Delta x_{12}$. По сравнению с машиной, имеющей одну систему обмоток на статоре, расположенную на месте исследуемых двух, справедливы выводы, сделанные ранее, т.е. все будет определяться соотношением параметров $2x_\sigma + x_{ad}$ и $x_\sigma + x_{ad} + \Delta x_{12}$ (или иначе, соотношением между параметрами x_σ и Δx_{12}).

Коэффициенты связи между статорными обмотками. Коммутационные процессы, протекающие в одной из статорных систем обмоток, оказывают влияние на другую. Это влияние характеризуется коэффициентами связи по продольной и поперечным осям машины $k_{свд}$ и $k_{свq}$.

Эти коэффициенты имеют большое значение при проектировании и расчете режимов работы как собственно электрической машины, так и преобразователя частоты, подключенного к статорным обмоткам машины.

Коэффициенты определяются в виде отношений

$$k_{свд} = \frac{\Delta u_{2d}}{\Delta u_{1d}}; \quad k_{свq} = \frac{\Delta u_{2q}}{\Delta u_{1q}},$$

где Δu_{1d} и Δu_{1q} представляют собой некие малые отклонения напряжений u_{1d} и u_{1q} источника пи-

тания первичной обмотки статора, а Δu_{2d} и Δu_{2q} — также отклонения напряжений на разомкнутых концах второй системы статорных обмоток машины.

Анализ электромагнитных переходных процессов, протекающих при отклонениях напряжений Δu_{1d} и Δu_{1q} , допустимо вести, как это принято, при постоянстве частоты вращения ротора и напряжения возбуждения. Следовательно, при анализе считается, что

$$\omega = \omega_1 = \omega_0 = \text{const}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_2 = 0; \quad U_B = \text{const}.$$

Сначала, как часто это делается, не учитываем активные сопротивления и трансформаторные ЭДС статора.

Неучет активных сопротивлений и трансформаторных ЭДС статора. С учетом (2) и (3) дифференциальные уравнения (1) в малых отклонениях можно записать в виде двух независимых систем дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_{1q} &= x \Delta i_{1d} + x_{ad} \Delta I_B + x_{ad} \Delta i_{1d} + x_{ad} \Delta i_{2d}; \\ \Delta u_{2q} &= x_{12} \Delta i_{1d} + x_{ad} \Delta I_B + x_{ad} \Delta i_{1d} + x_{ad} \Delta i_{2d}; \\ 0 &= p \frac{x_{ad}}{2} \Delta i_{1d} + (r'_B + p x'_B) \Delta I_B + p x_{B,d} \Delta i_{1d} + p x_{B,d} \Delta i_{2d}; \\ 0 &= p \frac{x_{ad}}{2} \Delta i_{1d} + p x_{B,d} \Delta I_B + (r'_{1d} + p x'_{1d}) \Delta i_{1d} + p x_{B,d} \Delta i_{2d}; \\ 0 &= p \frac{x_{ad}}{2} \Delta i_{1d} + p x_{B,d} \Delta I_B + p x_{B,d} \Delta i_{1d} + \\ &+ (r'_{2d} + p x'_{2d}) \Delta i_{2d}; \end{aligned} \right\} (9)$$

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u_{1d} &= x \Delta i_{1q} + x_{ad} \Delta i_{1q} + x_{ad} \Delta i_{2q}; \\ -\Delta u_{2d} &= x_{12} \Delta i_{1q} + x_{ad} \Delta i_{1q} + x_{ad} \Delta i_{2q}; \\ 0 &= p \frac{x_{ad}}{2} \Delta i_{1q} + (r'_{1d} + p x'_{1d}) \Delta i_{1q} + p x_{B,d} \Delta i_{2q}; \\ 0 &= p \frac{x_{ad}}{2} \Delta i_{1q} + p x_{B,d} \Delta i_{2q} + (r'_{2d} + p x'_{2d}) \Delta i_{2q}. \end{aligned} \right\} (10)$$

Из (9) и (10) определяются искомые $k_{свд}$ и $k_{свq}$. При этом отметим, что наибольший интерес представляют собой значения этих коэффициентов в первый момент коммутации (при $t=0$), когда взаимовлияние наибольшее.

Далее приведем окончательные формулы для $k_{свд}$ и $k_{свq}$, опуская все достаточно громоздкие преобразования. При этом с достаточной степенью точности при выводе формул можно считать, что $x_{B,d} = x_{ad}$.

Рассмотрим значения $k_{свд}$ и $k_{свq}$ для различных случаев.

Коэффициент $k_{свд}$.

Машина без демпферных обмоток

$$k_{свд} = \frac{x_{12}}{x} = \frac{2\Delta x_{12} + x_{ad}}{2x_\sigma + x_{ad}}. \quad (11)$$

Машина с одной системой демпферных об-

МОТОК

$$k_{свд} = \frac{x''_{12q}}{x'_q} = \frac{x_{12} x_{д1} - \frac{1}{2} x_{ad}^2}{x x_{д1}} - \frac{1}{2} \frac{x_{ad}^2}{x_{ad}^2} \approx \frac{2\Delta x_{12} + x_{д1\sigma}}{2x_{\sigma} + x_{д1\sigma}}. \quad (12)$$

Машина с двумя системами демпферных обмоток

$$k_{свд} = \frac{x''_{12q}}{x'_q} = \frac{x_{12} (x'_{д1} x'_{д2} - x_{ad}^2) - x_{ad} \left(\frac{x'_{д1} + x'_{д2}}{2} - x_{ad} \right)}{x (x'_{д1} x'_{д2} - x_{ad}^2) - x_{ad} \left(x'_{д1} + \frac{x'_{д2}}{2} - x_{ad} \right)} \approx$$

$$\approx \frac{2\Delta x_{12} (x_{д1\sigma} + x_{д2\sigma}) + x_{д1\sigma} x_{д2\sigma}}{2x_{\sigma} (x_{д1\sigma} + x_{д2\sigma}) + x_{д1\sigma} x_{д2\sigma}}, \quad (13)$$

где x''_q — сверхпереходное индуктивное сопротивление одной из статорных систем обмоток, равное $\left(x - \frac{x_{ad}^2}{2x'_{д1}} \right)$; x''_{12q} — так называемое сверхпереходное взаимное индуктивное сопротивление статора.

При выводе последних формул в (12) и (13) мы пренебрегли произведениями малых величин $\Delta x_{12} x_{д1\sigma}$, $x_{\sigma} x_{д2\sigma}$, $\Delta x_{12} x_{д2\sigma} x_{1\sigma}$ и т.д. Несмотря на некоторую их приближенность эти формулы весьма удобны для анализа. Интересно, что при $x_{д2\sigma} = \infty$ получаем формулу (12), а при $x_{д2\sigma} = x_{д1\sigma} = \infty$ — формулу (11).

Все эти формулы свидетельствуют о том, что характер и переходного процесса и установившегося зависит от соотношения между сопротивлениями Δx_{12} и x_{σ} .

Более подробно на этом вопросе остановимся несколько ниже.

Коэффициент $k_{свq}$.

Машина без демпферных обмоток

$$k_{свq} = \frac{x'_{12d}}{x'_d} = \frac{x'_b x_{12} - \frac{1}{2} x_{ad}^2}{x'_b x - \frac{1}{2} x_{ad}^2} \approx \frac{2\Delta x_{12} + x_{в\sigma}}{2x_{\sigma} + x_{в\sigma}}. \quad (14)$$

Машина с одной системой демпферных обмоток

$$k_{свq} = \frac{x''_{12d}}{x'_d} = \frac{x_{12} (x'_b x'_{д1} - x_{ad}^2) - x_{ad} \left[x'_1 + \frac{x'_2}{2} - x_{ad} \right]}{x (x'_b x'_{д1} - x_{ad}^2) - x_{ad} \left[\frac{x'_{д1} + x'_{д2}}{2} - x_{ad} \right]} \approx$$

$$\approx \frac{2\Delta x_{12} (x_{в\sigma} + x_{д1\sigma}) + x_{в\sigma} x_{д1\sigma}}{2x_{\sigma} (x_{в\sigma} + x_{д1\sigma}) + x_{в\sigma} x_{д1\sigma}}.$$

Машина с двумя системами демпферных обмоток

$$k_{свq} = \frac{x''_{12d}}{x'_d} = \frac{\left(x_{12} x'_{2д} - \frac{x_{ad}^2}{2} \right) [(x'_{2д} x'_{в} - x_{ad}^2)(x'_{1д} x'_{2д} - x_{ad}^2) - x_{ad}^2 x'_{2д\sigma}] -}{\left(x x'_{2д} - \frac{x_{ad}^2}{2} \right) [x'_{2д} x'_{в} - x_{ad}^2)(x'_{д1} x'_{д2} - x_{ad}^2) - x_{ad}^2 x'_{2д\sigma}] -}$$

$$\rightarrow \frac{-x_{ad}^2 x'_{2д} x'_{2д\sigma} \left(\frac{x'_{д1} + x'_{в}}{2} - x_{ad} \right)}{-x_{ad}^2 x'_{2д} x'_{2д\sigma} \left(\frac{x'_{д1} + x'_{в}}{2} - x_{ad} \right)} \approx$$

$$\approx \frac{2\Delta x_{12} (x_{д1\sigma} + x_{в\sigma} + x_{1д\sigma} x_{2д\sigma} + x_{в\sigma} x_{2д\sigma}) + x_{1д\sigma} x_{2д\sigma} x_{в\sigma}}{2x_{\sigma} (x_{1д\sigma} x_{в\sigma} + x_{1д\sigma} x_{2д\sigma} + x_{в\sigma} x_{2д\sigma}) + x_{1д\sigma} x_{2д\sigma} x_{в\sigma}}.$$

Эти формулы также свидетельствуют о существенном влиянии на значение $k_{свq}$ соотношения реактивных сопротивлений Δx_{12} и x_{σ} .

Проанализируем несколько крайних случаев. При $\Delta x_{12} = x_{\sigma}$ коэффициенты $k_{свq} = k_{свд} = 1,0$ независимо от наличия или отсутствия демпферных контуров на роторе, что физически вполне понятно, ибо мы по- существу имеем дело с машиной, имеющей одну систему статорных обмоток.

При $\Delta x_{12} = 0$, принимая $x_{\sigma} = \frac{x_{д1\sigma}}{2} = \frac{x_{д2\sigma}}{2} = \frac{x_{в\sigma}}{2}$, получим, что для машины без демпферных обмоток $k_{свд} = 1,0$, $k_{свq} = 0,5$, для машины с одной системой демпферных обмоток $k_{свд} = 0,5$; $k_{свq} = 0,33$, для машины же с двумя системами демпферных обмоток и принятых условиях $k_{свд} = k_{свq} = 0,33$.

Учет активных сопротивлений и трансформаторных ЭДС статора. Для выяснения принципиальных вопросов, связанных с влиянием активного сопротивления и трансформаторных ЭДС, рассмотрим машину без демпферных обмоток. Из (1) получим:

$$-\Delta u_{1q} = (r + px) \Delta i_{1q} - x \Delta i_{1d} - x_{ad} \Delta I_B;$$

$$-\Delta u_{1d} = (r + px) \Delta i_{1d} + x \Delta i_{1q} + p x_{ad} \Delta I_B;$$

$$0 = p \frac{x_{ad}}{2} \Delta i_{1d} + (r'_B + p x'_B) \Delta I_B,$$

отсюда

$$\Delta i_{1q} = - \frac{\left[(r + px)(r'_B + p x'_B) - \frac{1}{2} p^2 x_{ad}^2 \right] \Delta u_{1q} + \left[(r'_B + p x'_B) x - \frac{1}{2} x_{ad}^2 \right] \Delta u_{1d}}{(r + px)^2 (r'_B + p x'_B) - \frac{1}{2} p x x_{ad}^2 - \frac{1}{2} p^2 x_{ad}^2 (r + px) + x^2 (r'_B + p x'_B)};$$

$$\Delta i_{1d} = \frac{-(r'_B + p x'_B) (r + px) \Delta u_{1d} + (r'_B + p x'_B) x \Delta u_{1q}}{(r + px)^2 (r'_B + p x'_B) - \frac{1}{2} p x x_{ad}^2 - \frac{1}{2} p^2 x_{ad}^2 (r + px) + x^2 (r'_B + p x'_B)};$$

$$\Delta I_B = \frac{-\frac{1}{2} p x x_{ad} \Delta u_{1q} + \frac{1}{2} p x_{ad} (r + px) \Delta u_{1d}}{(r + px)^2 (r'_B + p x'_B) - \frac{1}{2} p x x_{ad}^2 - \frac{1}{2} p^2 x_{ad}^2 (r + px) + x^2 (r'_B + p x'_B)}.$$

Из этих формул после достаточно простых

преобразований имеем:

$$(k_{свq})_{p=\infty} = \frac{\Delta u_{2q}}{\Delta u_{1q}} = \frac{x_{12}}{x};$$

$$(k_{свd})_{p=\infty} = \frac{\Delta u_{2d}}{\Delta u_{1d}} = \frac{x_{12}x'_b - \frac{1}{2}x_{ad}^2}{xx'_b - \frac{1}{2}x_{ad}^2}.$$

Эти формулы полностью совпадают с (11) и (14), но только с «переменной местами осей». Это понятно, ибо в первый момент коммутации основную роль играет не ЭДС вращения, в трансформаторная ЭДС.

Легко показать, что учет демпферных контуров этого результата не изменяет. Это означает, что коэффициенты связи могут определяться по более простым уравнениям, не учитывающим активные сопротивления и трансформаторные ЭДС статора.

Заключение. Полученные аналитические соотношения свидетельствуют о существенном влиянии на коэффициенты связи соотношения между индуктивными сопротивлениями рассеяния x_σ и

Δx_{12} , которые определяются геометрией машины, схемой укладки обмоток статора. Можно решать и другую задачу: задаваться диапазоном изменения коэффициентов $k_{свq}$ и $k_{свd}$ для конкретных случаев расчета режимов работы и параметров тиристорного преобразователя, т.е. увязать вопросы проектирования машины и преобразователя. Все это представляется важной и, разумеется, самостоятельной задачей, выходящей за рамки статьи.

[20.12.1993]

Автор: Шакарян Юрий Гевондович окончил электромеханический факультет Ереванского политехнического института в 1956 г. В 1974 г. защитил докторскую диссертацию по теме «Режимы работы асинхронизированных синхронных машин в электроэнергетических системах» в Энергетическом институте им. Г.М. Кржижановского. Заместитель директора по научной работе Всероссийского научно-исследовательского института электроэнергетики.

Оценка отключающей способности вакуумных размыкателей

СОЛОДОВНИКОВ С.Г., ЯГНОВ В.А., КРАВЧЕНКО С.А.,
ВОЗДВИЖЕНСКИЙ В.А., ИВАНОВ В.П.

Предлагается физическая модель, дающая возможность оценить предельные характеристики вакуумных выключателей при отключении сильноточной дуги постоянного тока. Полученные соотношения связывают параметры внешней цепи (такие, как скорость, с которой разрядный ток уменьшается от своей максимальной величины до нуля, и скорость роста напряжения на контактах) с внутренними параметрами выключателя, среди которых важнейшая роль принадлежит характерному времени жизни ионов в дуге.

Ключевые слова: вакуумный выключатель, сильноточная дуга, отключение, характеристики, моделирование

Широкое применение индуктивных накопителей в мощных импульсных энергосистемах во многом сдерживается из-за отсутствия надежного размыкателя постоянного тока, обладающего высокой скоростью срабатывания и многократностью действия. Весьма перспективным выглядит использование в этой роли вакуумных выключателей, прекрасно зарекомендовавших себя в по-

Physical model, which makes it possible to evaluate limit characteristics of vacuum circuit breaker under switching-off high current arc is proposed. Obtained relationships associate parameters of external circuits (such as speed of discharge current decreasing from its maximum value to zero and speed of changing voltage across the contacts) and internal parameters of switch, among which the major role belongs characteristics life time of ions in arc.

Key words: vacuum breaker, high current arc, switching-off, characteristics, simulation

следние годы в цепях переменного тока промышленной частоты. Принцип действия данных коммутаторов прост: короткозамкнутые электроды, находящиеся в хорошо вакуумированной камере, разводятся в требуемый момент времени, и токоведущим элементом становится дуга, горящая в парах материала этих электродов. При прохождении тока через нуль вместе с последним

катодным пятном угасает и дуга: в итоге осуществляется размыкание цепи. Успех коммутации зависит от того, удастся или нет избежать повторного пробоя межэлектродного промежутка при нарастании напряжения на нем вскоре после прохождения тока через нулевое значение. Пробой, в свою очередь, происходит лишь тогда, когда электрическое поле E_c у отрицательного в рассматриваемый момент электрода превышает некоторое критическое значение E_0 , зависящее только от материала электрода и состояния его поверхности. Поэтому необходимо выполнение требования

$$E_c(t) < E_0. \quad (1)$$

Нарушение этого условия приводит к возникновению катодных пятен, образованию вакуумной дуги и, в результате, повторному закорачиванию промежутка.

Существует принципиальное различие в работе вакуумного коммутатора при переключении переменного и постоянного тока. В первом случае прохождение тока через нуль происходит естественным способом и является неотъемлемым свойством отключаемой цепи, а все управление размыкателем, по сути, сводится к разведению контактов в заданный момент времени; во втором — необходима специальная система протivotока.

При выборе параметров этой системы приходится считаться с требованием (1), а для этого, в свою очередь, необходимо знать зависимость напряженности электрического поля E_c от таких величин, как скорость обращения тока в нуль I , скорость восстановления напряжения на межэлектродном промежутке U_0 и т.д. Существует большое число физических моделей, дающих ответ на эти вопросы. Однако многочисленные полумпирические соотношения имеют ограниченную область применения и, как правило, не позволяют судить о степени их адекватности реальным условиям в каждом конкретном случае. Максимально корректные с точки зрения постановки задачи сложные численные модели, основанные на решении системы кинетических или МГД-уравнений, нуждаются в задании точных исходных данных, в частности по составу и концентрации заполняющих промежуток частиц, о распределении их скоростей. К сожалению, значительные расхождения в этих данных, существующие в настоящее время, приводят к заметной неопределенности в результатах, тем самым такие модели лишаются их главного преимущества — высокой степени точности. В то же время трудности, связанные с обобщением результатов конкретных расчетов, ставят под со-

мнение использование на данном этапе этого столь подробного способа описания исследуемых процессов.

Таким образом, необходима достаточно общая, простая в применении, но физически вполне обоснованная модель, со степенью точности, соответствующей уровню современных представлений о процессах в вакуумной дуге. Описание такой модели является целью предлагаемой статьи.

Построение модели. Физическая картина явления в последдуговой период (вслед за прохождением тока через нулевое значение) в общих чертах известна [1—3]. Плазма, заполняющая межэлектродный промежуток, квазинейтральна всюду, за исключением приэлектродных слоев, причем в силу значительно большей подвижности электронов по сравнению с ионами слой у отрицательного электрода существенно превосходит слой у положительного. Поэтому принято считать, что практически все падение напряжения $U_0(t)$, приложенного к промежутку, происходит в слое положительного заряда у отрицательного электрода, и, соответственно, искомая зависимость напряженности поля $E_c(t)$ определяется поведением этой своеобразной экранирующей оболочки.

Существует большое число исследований динамики приэлектродного слоя в самых различных условиях. Для интересующего нас случая наиболее общие результаты, представлены в [4]. Не претендуя на полноту описания данного явления, получим, в свою очередь, выражение для зависимости от времени электрического поля $E_c(t)$ на границе плазма—электрод при следующих предположениях.

1. Толщина оболочки l много меньше характерного размера электродов D .

2. Толщина оболочки l много меньше расстояния между электродами L .

3. Приложенное напряжение U_0 многократно превышает выраженную в вольтах характерную кинетическую энергию частиц, заполняющих межэлектродный промежуток вне оболочки.

4. Отсутствует как вторичная эмиссия, так и отражение ионов от электрода.

Выполнение п. 1 дает возможность ограничиться рассмотрением задачи в плоской геометрии. Справедливость п. 2 свидетельствует о квазистационарности процессов в приэлектродном слое; п. 3 означает, что внутри оболочки отсутствуют электроны, а ее граница достаточно резкая, Условие п. 4 позволяет утверждать, что в рассматриваемом слое все ионы движутся в одном направлении — к отрицательному электроду, и в квазистационарной ситуации их поток не зависит от координаты:

$$mv \approx \text{const}, \quad (2)$$

где n и v — значения плотности ионов и их характерной скорости.

Поскольку электрический потенциал φ в оболочке однозначно и монотонно зависит от координаты, уравнение Максвелла $\text{div } E = qn/\epsilon_0$ можно записать в более удобном для нашего рассмотрения виде:

$$\partial E^2 / \partial \varphi = 2qn(\varphi)/\epsilon_0, \quad (3)$$

где q — эффективный заряд иона.

Уравнение (3) дополняется очевидными граничными условиями: у электрода $\varphi = 0$, $E = E_c(t)$; в квазинейтральной плазме $\varphi = U_0(t)$, $E = 0$. Выражение для $n(\varphi)$ легко определить, воспользовавшись соотношением (2) и законом сохранения энергии для ионов.

$$mv^2(\varphi)/2 + q\varphi = mv_0^2/2 + qU_0,$$

где m — эффективная масса ионов; v_0 — характерная скорость ионов в квазинейтральной плазме у границы с оболочкой.

Согласно условию п. 3 $mv_0^2/2 < qU_0$, следовательно

$$qn(\varphi) = j_0/v(\varphi) = j_0/[2q(U_0 - \varphi)/m]^{1/2}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3) и интегрируя, находим

$$E_c(t) = [8j_0^2 m U_0 / (\epsilon_0^2 q)]^{1/4}. \quad (5)$$

Выражение (5) показывает, что поведение напряженности электрического поля $E_c(t)$ зависит только от характера изменения во времени двух величин: полного напряжения $U_0(t)$, приложенного к межэлектродному промежутку, и плотности ионного тока $j_0(t)$, поступающего из квазинейтральной плазмы в экранирующую ионную оболочку. Если первая из них задается внешней системой управления, то вторая определяется процессом деионизации межэлектродного промежутка. Описание этого процесса представляет самостоятельную задачу, связанную с известными трудностями. Проблемы возникают не при решении задачи, а во время ее постановки при определении начальных условий и вызваны отсутствием надежных данных по составу эмитируемых катодом частиц и распределению их скоростей на этапе горения вакуумной дуги. Единственная величина, известная с удовлетворительной точностью для целого ряда материалов, это коэффициент пропорциональности K между массой испаренного с катода вещества M и протекающим через разряд электрическим зарядом Q :

$$M = KQ. \quad (6)$$

В такой ситуации чем более высокоточное приближение используется для описания процесса деионизации, тем большее число параметров, известных с заметной долей неопределенности, приходится при этом привлекать. В нуль-мерном по координатам приближении задействован всего лишь один параметр такого рода: среднее время жизни ионов в межэлектродном промежутке τ . В принципе, при наличии необходимой информации τ легко оценивается. Например, в случае близкорасположенных плоскопараллельных электродов ($L \ll D$), когда процессы рождения и гибели ионов внутри самой плазмы несущественны, $\tau = L/2v_0$. Данное приближение позволяет получить хотя и грубое, но все же верное представление о характере исследуемых процессов.

В нуль-мерном приближении уравнение баланса частиц выглядит следующим образом:

$$dN/dt = (Kgl/m) - (N/\tau), \quad (7)$$

где N — полное число ионов в межэлектродном промежутке; g — безразмерный коэффициент (доля ионов в испаряемой массе материала катода) $0 \leq g \leq 1$; I — полный ток, протекающий в вакуумной дуге.

Аналогичное уравнение использовалось в [3].

Выделим два ключевых момента времени: t_0 — момент срабатывания системы противотока (начиная с t_0 происходит спад I); t_1 — время прохождения тока через нулевую отметку.

При $t < t_0$, когда $I = \text{const} = I_0$, уравнение (7) имеет стационарное решение:

$$N_0 = (Kg\tau/m)I_0. \quad (8)$$

Любые отклонения по каким-либо причинам N от N_0 при неизменном токе $I = I_0$ быстро (за времена порядка τ) затухают, возвращая N к исходному значению N_0 .

На отрезке времени $t_0 \leq t \leq t_1$ остановимся на линейном спаде тока [3]:

$$I = I_0(t_1 - t)/(t_1 - t_0).$$

Приводить решение простейшего уравнения (7) на всем отрезке времени нет нужды. Первостепенное значение имеет момент нуля тока:

$$N(t_1) = N_0[\tau/(t_1 - t_0)] \{1 - \exp[-(t_1 - t_0)/\tau]\}. \quad (9)$$

Рассмотрим два предельных случая быстрого и медленного отвода тока. В первом из них ($t_1 - t_0 \ll \tau$) число ионов в промежутке не успевает заметно изменяться и, как следует из (9),

$$N(t_1) \approx N_0. \quad (10)$$

Во втором случае ($t_1 - t_0 > \tau$)

$$N(t_1) \approx N_0[\tau/(t_1 - t_0)]. \quad (11)$$

Подставляя в (11) выражение (8), а также учитывая, что $I_0 [\tau/(t_1 - t_0)]$ есть ни что иное, как значение тока при $t=t_1 - \tau$, получаем, что при медленном спаде тока число ионов в момент нуля тока соответствует стационарному решению (8), но при $I = \text{const} = I(t=t_1 - \tau)$:

$$N(t_1) = (Kg\tau/m)I(t_1 - \tau). \quad (12)$$

Физический смысл этого результата понятен и вытекает из самого определения τ — характерного времени релаксации ионов плазмы. Вполне естественно, что ионы «помнят» лишь те события, что происходили в межэлектродном промежутке в τ -окрестности. Очевидно, что формула (12) в случае медленного отвода тока с соответствующей точностью справедлива не только при линейном, но и при любом другом плавном убывании тока вблизи нуля. Соотношение же (10) выполняется вообще при любом законе изменения тока.

Наконец, при $t > t_1$ не остается ни одного катодного пятна, первый член из правой части уравнения (7) выпадает, и на этом участке происходит экспоненциальное убывание ионов:

$$N(t) = N(t_1) \exp [-(t - t_1)/\tau]. \quad (13)$$

Связь между плотностью ионного тока j_0 и суммарным количеством ионов N , находящихся в промежутке, все в том же τ -приближении можно записать в общем виде следующим образом:

$$j_0 = I_i/S = (1/S)q\theta N/\tau, \quad (14)$$

где I_i — полный ионный ток, поступающий в оболочку; S — имеющий размерность площади коэффициент пропорциональности между I_i и j_0 ; θ — доля полного числа исчезающих в единицу времени из межэлектродного промежутка ионов, идущая на поддержание тока I_i .

Эффективная поверхность S является чисто геометрическим фактором и полностью определяется конструкцией конкретной камеры. Безразмерный коэффициент θ может быть представлен как произведение двух сомножителей, один из которых, так же как и S , зависит только от геометрии камеры, а второй — учитывает процессы рождения и гибели ионов в самой плазме. В упомянутом уже случае близкорасположенных плоскопараллельных электродов, опять-таки, в отсутствие процессов типа рекомбинации и ионизации $\theta = 1/2$, а S совпадает с площадью отрицательного электрода.

Подставляя в формулу (14) выражения для N (13), (12) и (10), получим искомую зависимость плотности ионного тока от времени:

$$j_0(t) = j_m \exp [-(t - t_1)/\tau], \quad (15)$$

где

$$j_m = \begin{cases} wI(t_1 - \tau)/S, & \tau < (t_1 - t_0); \\ wI_0/S, & \tau > (t_1 - t_0); \end{cases}$$

$w = g\theta Kq/m$ — безразмерный коэффициент.

При $t=t_1$ приложенное к межэлектродному промежутку напряжение U_0 равно нулю. Дальнейший его рост определяется внешней цепью, поэтому в общем виде интерполируем $U_0(t)$ степенной зависимостью, совпадающей с реальной функцией в точках $t=t_1$ и $t=t_1 + \tau$:

$$U_0(t) = U_m [(t - t_1)/\tau]^n, \quad (16)$$

где $U_m = U(t=t_1 + \tau)$, а показатель степени n выбирается из условия наилучшего приближения к реальной функции на интервале $t_1 < t < t_1 + \tau$.

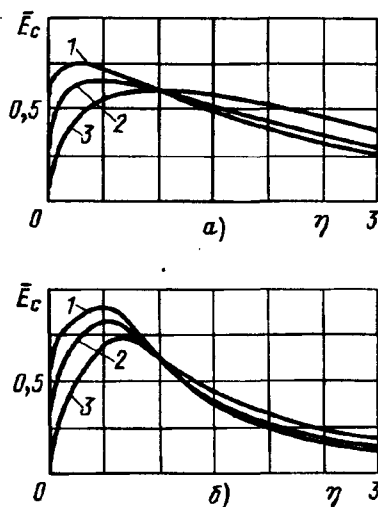
Запишем выражение (5) для напряженности электрического поля с учетом (15) и (16) в безразмерной форме:

$$\bar{E}_c(\eta) = \exp(-\eta/2) \eta^{n/4}, \quad (17)$$

где $\bar{E}_c = E_c/E_m$; $\eta = (t - t_1)/\tau$;

$$E_m = [8j_m^2 m U_m / (\epsilon_0^2 q)]^{1/4}. \quad (18)$$

График функции (17) при различных n представлен на рисунке, а. Все зависимости имеют



Зависимость безразмерной напряженности электрического поля $\bar{E}_c$ от безразмерного времени η : а — по результатам τ -приближения; б — с использованием данных [5]: 1 — $n=0,5$; 2 — $n=1,0$; 3 — $n=2,0$

качественно подобную структуру: напряженность электрического поля сначала возрастает, а затем, достигнув максимума, асимптотически спадает до нуля. Такое поведение напряженности электрического поля есть не специфическая особенность

использованного нами нуль-мерного приближения, а характерная черта исследуемого процесса. Оно объясняется высокой реальной скоростью деионизации межэлектродного промежутка, асимптотически близкой к экспериментальной, что подтверждается как экспериментальными данными [3], так и другими расчетами [5]. Для примера приведем результаты расчетов деионизации бесстолкновительной плазмы, выполненные в [5]. В однородном плоском приближении для случая однородного по координатам и максвелловского по скоростям начального распределения ионов при $t=t_1$

$$dn(x, v, t_1) = n_0 (\pi v_0^2)^{-3/2} \exp(-v^2/v_0^2) dx dv_x dv_y dv_z$$

имеет место следующая зависимость $j_0(\eta)$:

$$j_0(\eta) = j_m^* [1 - \exp(-\eta^{-2})],$$

где $\eta = (t - t_1)/\tau$, $\tau = L/2v_0$, $j_m^* = qn_0 v_0 / (2\sqrt{\pi})$.

Соответствующая этому случаю зависимость

$$\bar{E}_c(\eta) = [1 - \exp(-\eta^{-2})] \eta^{n/4}, \quad (19)$$

полученная тем же путем, что и (17), представлена на рисунке 6.

Из приведенного анализа следует, что в последующий период максимум напряженности электрического поля у отрицательного электрода достигается в τ -окрестности момента прерывания тока. Значение этого максимума по своему порядку совпадает с амплитудным значением напряженности поля E_m (18), которое становится ключевым элементом модели. Подставляя его в качестве верхней границы для $E_c(t)$ в неравенство (1), получаем искомые ограничения на параметры системы противотока:

$$\dot{U}_0 < \begin{cases} (U_0^*/\tau) (I_0/\tau)^2 / \dot{I}^2, & I_0/\dot{I} > \tau; \\ (U_0^*/\tau), & I_0/\dot{I} < \tau, \end{cases} \quad (20)$$

где $\dot{I}$ и $\dot{U}_0$ — характерные значения скорости отвода тока и скорости нарастания напряжения на промежутке вблизи нуля тока, а

$$U_0^* = (\varepsilon_0 E_0^2 / 2)^2 / [2(w I_0 / S)^2 / (q/m)].$$

При выводе (20) учитывалось, что $I(t_1 - \tau) \approx I\tau$, а $U_m \approx \dot{U}_0 \tau$.

Вводя безразмерные аналогии величин $\dot{U}_0$ и $\dot{I}$

$$\bar{U}_0 = \dot{U}_0 / (U_0^*/\tau); \quad \bar{I} = \dot{I} / (I_0/\tau),$$

запишем выражение (20) в более наглядном виде:

$$\bar{U}_0 < \begin{cases} 1/\bar{I}^2, & \bar{I} < 1; \\ 1, & \bar{I} > 1. \end{cases} \quad (21)$$

Обсуждение результатов. При построении мо-

дели был сделан ряд упрощающих рассмотрение предположений. Остановимся на них более подробно.

В реальных коммутационных аппаратах расстояние между электродами L , как правило, одного порядка или меньше характерного размера самих электродов D . Поэтому при выполнении условия по п. 2 обычно справедливо и условие по п. 1.

Температура частиц, заполняющих межэлектродный промежуток, обычно не превышает нескольких десятков вольт, а значения прикладываемого напряжения U_0 как минимум на два порядка больше, поэтому условие по п. 3 в практически интересных случаях выполняется с высокой степенью точности

Условие по п. 4 является одним из самых сильных ограничений, накладываемых на область применимости предлагаемой модели. Бомбардирующие отрицательный электрод ионы после прохождения оболочки приобретают дополнительную энергию, равную разности потенциалов U_0 . Такие высокоэнергетические ионы обладают способностью выбивать из металлической поверхности заряженные частицы, особенно электроны [6], которые в определенных условиях могут существенно исказить картину обсуждаемого явления. Рассмотрение этого вопроса выходит за рамки предлагаемой статьи.

При выводе формулы (5) считалось, что граница оболочки неподвижна, плотность n_0 и средняя скорость ионов v_0 на границе с квазинейтральной плазмой, а также приложенное напряжение U_0 не зависят от времени. Иными словами, развитие оболочки рассматривалось как последовательность стационарных состояний. Указанное предположение справедливо лишь в том случае, если время установления подобного стационарного состояния Δt достаточно мало, и перечисленные параметры (l, n_0, v_0, U_0) в течение Δt изменяются незначительно:

$$\dot{l} \Delta t \ll l; \quad (22)$$

$$\dot{U}_0 \Delta t \ll U_0; \quad (23)$$

$$\dot{n}_0 \Delta t \ll n_0; \quad (24)$$

$$\dot{v}_0 \Delta t \ll v_0, \quad (25)$$

где $\dot{l}, \dot{n}_0$ и $\dot{v}_0$ — типичные скорости движения границы оболочки, спада концентрации и уменьшения средней скорости ионов, соответственно.

В рассматриваемой задаче в качестве Δt выступает время прохождения ионами заряженного приэлектродного слоя. Поскольку ионы только ускоряются в этом слое, в качестве оценки сверху для Δt можно принять l/v_0 т.е.

$$\Delta t < l/v_0. \quad (26)$$

С учетом (26) условия квазистационарности (22)–(25) могут быть записаны следующим образом:

$$\dot{i} \ll v_0; \quad (27)$$

$$l(\dot{U}_0/U_0) \ll v_0; \quad (28)$$

$$l(\dot{n}_0/n_0) \ll v_0; \quad (29)$$

$$l(\dot{v}_0/v_0) \ll v_0. \quad (30)$$

По своему определению τ является характерным временем изменения n_0 . Примерно за такой же срок происходит и заметное снижение средней скорости ионов v_0 , поэтому $n_0/\dot{n}_0 \sim \tau$ и $v_0/\dot{v}_0 \sim \tau$. Замечая также, что $v_0\tau \sim L$, условия (29) и (30) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$l \ll L. \quad (31)$$

Неравенства (27) и (28) также идентичны между собой. Учитывая, что l/l и $U_0/\dot{U}_0$ по порядку совпадают со временем, прошедшим с момента начала нарастания напряжения, т.е. $l/l \sim t - t_1$ и $U_0/\dot{U}_0 \sim t - t_1$, выражение (28) легко преобразовать к виду (27).

Итак, приближение квазистационарности оправдано, когда $l \ll v_0$ и $l \ll L$, т.е. если скорость роста оболочки много меньше средней скорости ионов, поступающих из квазинейтральной плазмы [условие (27)], а сама оболочка много меньше межэлектродного промежутка [условие (31)].

Домножим обе части неравенства (27) на τ :

$$\dot{i}\tau \ll v_0\tau.$$

По порядку $\dot{i}\tau$ совпадает с размером оболочки в момент времени $t_1 + \tau$:

$$\dot{i}\tau \sim l(t_1 + \tau),$$

а $v_0\tau$, как уже отмечалось, имеет порядок L . В результате, условие (27) может быть записано в следующей эквивалентной форме:

$$l(t_1 + \tau) \ll L, \quad (32)$$

которая является частным случаем (31).

Таким образом, как и отмечалось при построении модели, справедливость условия по п.2 действительно свидетельствует о квазистационарности процессов в приэлектродном слое.

Отметим в заключение, что в случае невыполнения условия (31) ситуация значительно уп-

рощается, и необходимость в данной модели отпадает. При $l \sim L$ для определения E_c верна следующая оценочная формула:

$$E_c \sim U_0(t)/L,$$

которая и должна приниматься в расчет при выборе параметров системы противотока.

Вывод. Предложенная физическая модель проста в использовании и дает возможность оценить основные коммутационные характеристики вакуумных размыкателей. Она имеет достаточно общий характер и, хотя не претендует на детальное описание процессов в последуговой плазме, позволяет получить правильные по значениям результаты. Точность этих результатов может быть существенно повышена при экспериментальном определении имеющего наибольшую неопределенность параметра модели — характерного времени деионизации межэлектродного промежутка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вакуумные дуги / Под ред. Дж.Лаферти. — М.: Мир, 1982.
2. Раховский В.И. Физические основы коммутации электрического тока в вакууме. — М.: Наука, 1970.
3. Childs S.E., Greenwood A.N., Sullivan I.S. Events Associated with Zero Current Passage During the Rapid Commutation of Vacuum Arc. — IEEE Transaction on Plasma Science, 1983, vol PS-11, № 3.
4. Andrews J.G., Valey R.H. Sheath Growth in a Low Pressure Plasma. — Phys. Fluids, 1971, vol. 14, № 2.
5. Мусин А.К., Тимофеева Г.Г. Деионизация разреженной плазмы в газоразрядном промежутке. — Физика плазмы, 1977, т. 3, вып. 4.
6. Грановский В.Л. Электрический ток в газе. Т. 1. — М.: ГИТТЛ, 1952.

[26.10.94]

Авторы: Солодовников Сергей Георгиевич окончил факультет технической физики Московского инженерно-физического института (МИФИ) в 1979 г. В 1987 г. защитил кандидатскую диссертацию по тематике, связанной с сильноточными разрядами в плотных газах в Институте высоких температур АН СССР. Старший научных сотрудник Троицкого института инновационных и термоядерных исследований (ТРИНИТИ).

Ягнов Владимир Алексеевич окончил факультет экспериментальной и теоретической физики МИФИ в 1967 г. В 1981 г. защитил кандидатскую диссертацию по тематике, связанной с импульсными источниками энергии на основе индуктивных накопителей в НИИЭФА (С.-Петербург). Начальник лаборатории в ТРИНИТИ.

Кравченко Сергей Александрович окончил факультет экспериментальной и теоретической физики МИФИ в 1983 г. Научный сотрудник ТРИНИТИ.

Воздвиженский Валерий Александрович скончался в 1994 г.

Иванов Валерий Павлович окончил энергетический факультет Московского энергетического института в 1972 г. Начальник сектора Всероссийского электротехнического института.

Электромашинные трехфазные дробные обмотки с пониженным дифференциальным рассеянием

ПОПОВ В.И.

Предложены и исследованы симметричные трехфазные обмотки с дробным числом $q \geq 1$ пазов на полюс и фазу, характеризующиеся пониженным дифференциальным рассеянием по сравнению с известными дробными обмотками. Применение таких обмоток в асинхронных и синхронных машинах единых серий улучшает их энергетические и виброакустические характеристики.

Ключевые слова: асинхронные и синхронные машины, дробные обмотки, дифференциальное рассеяние

В статье исследуются новые петлевые трехфазные симметричные дробные обмотки с пониженным дифференциальным рассеянием, выполняемые двухслойными с концентрическими неравновитковыми катушками с известной их группировкой [1]. Число пазов на полюс и фазу $2p$ -полюсной m -фазной обмотки представляется в виде [1—4]

$$q = z/2pm = b + c/d = N/d, \quad (1)$$

где c/d и N/d — несократимые дроби; $N = bd + c = q_z$ — эквивалентное число пазов на полюс и фазу.

Исследуемые обмотки удовлетворяют известным условиям симметрии

$$2p/d = \text{ц.ч. и } d/m \neq \text{ц.ч.}, \quad (2)$$

а минимальные числа полюсов $2p'$ и пазов $z' = 3(2p'/d)N$, при которых возможно выполнение трехфазной симметричной обмотки, равны:

$$\left. \begin{aligned} 2p' &= 2d \text{ и } z' = 6N \text{ — при нечетных } d; \\ 2p' &= d \text{ и } z' = 3N \text{ — при четных } d. \end{aligned} \right\} (3)$$

Гармонический состав МДС дробной двухслойной трехфазной симметричной обмотки с фазной зоной в 60° определяется в виде ряда [2]

$$\nu = 2mk/d \pm 1 = 6k/d \pm 1, \quad (4)$$

где k — любое положительное или отрицательное целое число (включая $k=0$ для $\nu=1$), при котором порядок гармонической $\nu > 0$; знаку (+) соответствуют прямые, а (–) — обратные гармонические.

Для оценки дифференциального рассеяния (без учета скоса и раскрытия пазов, а также демпфирующего действия ротора) используются многоугольники МДС [3, 7—8], по которым определяется коэффициент дифференциального рассеяния σ_d , характеризующий уровень содержания

Symmetric three-phase windings with a fractional number $q \geq 1$ slots for a pole and for a phase characterized by the reduced (by 50...60%) differential dissipation as compared to the traditional fractional windings are proposed and investigated. Use of such windings in asynchronous machines of the same series improves their energetic, vibration and acoustic characteristics.

Key words: asynchronous and synchronous machines, fractional windings, differential dissipation

гармонических в кривой МДС обмотки:

$$\sigma_d = [(R_d/R)^2 - 1] 100\%; \quad R_d^2 = \frac{1}{z} \sum_{1}^z R_{m}^2; \quad R = (z K_{об}/p\pi), \quad (5)$$

где R_d^2 — квадрат среднего радиуса пазовых точек многоугольника МДС; R — радиус окружности для основной гармонической МДС с обмоточным коэффициентом $K_{об}$. Многоугольники МДС строятся с использованием вспомогательной треугольной сетки, соответствующей симметричной $2m=6$ -фазной системе векторов токов фазных зон $A-Z-B-X-C-U$ и те же буквенные обозначения приняты для чередований по пазам фазных зон, где зоны A, B, C соответствуют начальным сторонам катушечных групп, а X, Y, Z — их конечным сторонам.

Отметим, что известные публикации по обмоткам с неравновитковыми катушками (в том числе синусными) ограничиваются исследованием обмоток с целым числом пазов на полюс и фазу [5—6], а гармонический анализ в них проводится для отдельных гармонических без оценки изменения полного дифференциального рассеяния обмотки.

Рассмотрим дробные трехфазные симметричные обмотки при различных значениях знаменателя дробности в (1) $d=2, 4, 5$, соответствующих числам полюсов $2p=2 \div 10$ обмоток современных единых серий асинхронных и синхронных машин мощностью до 400 кВт [4].

Обмотки при $d=2$ в соответствии с (1) имеют два вида чередующихся групп с числами катушек $b=(q-0,5)$ для нечетных и $(b+1)=(q+0,5)$ для четных групп. При концентрических катушках обмоточный коэффициент определяется по их коэффициентам укорочения $K_{y(i)} = \sin(\pi y_{pi(i)}/6q)$ и в общем случае для неравновитковых катушек запишется в виде

$$K_{об} = \left[\sum_1^b (K_{yi} w_{ki}) + \sum_1^{b+1} (K_{yj} w_{kj}) \right] / \left(\sum_1^b w_{ki} + \sum_1^{b+1} w_{kj} \right), \quad (6)$$

где w_{ki}, w_{kj} — числа витков катушек с шагами по пазам y_{pi} и y_{pj} малых ($i=1 \div b$) и больших [$j=1 \div (b+1)$] групп; эквивалентный средний шаг катушек по пазам $y_{эп.ср}$ определяется при этом по (6) подстановкой вместо коэффициентов укорочения K_{yi} и K_{yj} шагов катушек y_{pi} и y_{pj} . В случае равенства чисел витков всех катушек в группах из (6) следует

$$K_{об} = \left(\sum_1^b K_{yi} + \sum_1^{b+1} K_{yj} \right) / 2q. \quad (7)$$

Если двухслойную обмотку с $d=2$ выполнять с шагом катушек по пазам $y_p=2q$, то фазные зоны малых и больших групп в пазах не перекрываются. При $y_p=2q+1$ перекрытие этих зон составит один паз, и тогда обмотку можно выполнять с $b=(q-0,5)$ катушками (концентрическими) в каждой группе за счет исключения наружной катушки четных групп и выполнения наружной катушки нечетных групп однослойной с $2w_k$ витками. Структура такой одно-двухслойной концентрической обмотки с шагами катушек по пазам для нечетных и четных групп, равными соответственно

$$\left. \begin{aligned} y_{pi} &= 3q - 0,5 - 2(i-1); y_{п.н} = 3q - 0,5; y_{п.в} = q + 2,5; \\ y_{pj} &= 3q - 1,5 - 2(j-1); y'_{п.н} = 3q - 1,5; y'_{п.в} = q + 1,5, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

составляет основу исследуемых неравновитковых обмоток при $d=2$, где $i=j=1 \div (q-0,5)$, а $y_{п.н}$ и $y_{п.в}$ — шаги наружной и внутренней катушек. Однослойная катушка с шагом $y_{п.н}$ по (8) имеет $2w_k$ витков, а для всех остальных двухслойных катушек число витков изменяются таким образом, чтобы в возможно большей мере приближать к окружности многоугольник МДС обмотки, сохраняя при этом одинаковое число витков $2w_k$ во всех пазах. При больших значениях q однослойной $2w_k$ -витковой можно выполнять также наружную катушку четных групп с шагом $y'_{п.н}$ по (8) за счет исключения их внутренней катушки с шагом $y'_{п.в}$ (см. табл. 2 для $q=7,5$).

Формирование неравновитковой обмотки при $d=2$ поясняется матрицами [7] верхнего и нижнего слоев $[C_B]$ (9) и $[C_H]$ (10), составленными при $w_k=1$ для обмотки с $q=4,5$ ($b=4, N=9$), имеющей в соответствии с (3) минимальные числа пар полюсов и пазов $p'=d/2=1, z'=3N=27$ и выполненной в соответствии с (8) с шагами катушек $y_{pi}=13, 11, 9, 7$ и $y_{pj}=12, 10, 8, 6$.

$$[C_B] = \begin{matrix} & A & Z & B & X & C & Y \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 26 \\ 27 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 1+x \\ 1 \\ 1-x \\ \\ 1+x' \\ 1+x'' \\ 1-x'' \\ 1-x' \\ \\ 2 \\ 1+x \\ 1 \\ 1-x \\ \\ 1+x' \\ 1+x'' \\ 1-x'' \\ 1-x' \\ \\ 2 \\ 1+x \\ 1 \\ 1-x \\ \\ 1+x' \\ 1+x'' \\ 1-x'' \\ 1-x' \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (9)$$

$$[C_H] = \begin{matrix} & A & Z & B & X & C & Y \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 26 \\ 27 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \\ \\ 1-x \\ 1 \\ 1+x \\ 2 \\ \\ 1-x' \\ 1-x'' \\ 1+x'' \\ 1+x' \\ \\ 1-x \\ 1 \\ 1+x \\ 2 \\ \\ 1-x' \\ 1-x'' \\ 1+x'' \\ 1+x' \\ \\ 1-x \\ 1 \\ 1+x \\ 2 \\ 1-x' \\ 1-x'' \\ 1+x'' \\ 1+x' \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (10)$$

Таблица 1

Параметр		q=2,5				q=3,5 (рис. 1)				q=4,5 (рис. 2)		
		K _y	w _к [*]			K _y	w _к [*]			K _y	w _к [*]	
y _{пi}	7	0,9945	1,0	2,0	10	0,9972	1,0	2,0	13	0,9983	1,0	2,0
	5	0,8660		8	0,9309	1,25		11	0,9580	1,25		
				6	0,7818	0,75		9	0,8660	1,0		
									7	0,7274		0,75
y _{пj}	8	0,9945	1,0	—	11	0,9972	1,0	—	14	0,9983	1,0	—
	6	0,9511		9	0,9749	1,5		12	0,9848	1,75		
				7	0,8660	1,0		10	0,9182	1,25		
	4	0,7431		0,5	5	0,6802		0,5	8	0,8021		0,75
								6	0,6428		0,25	
y _{п.ср}	6,0/6,0				8,0/8,21				10,0/10,56			
K _{об}	0,9099/0,9307				0,8898/0,9161				0,8773/0,9155			
σ _д	1,726/1,534 = 1,12				0,975/0,787 = 1,24				0,656/0,463 = 1,42			

Элементы матриц слоев $[C_B]$, $[C_H]$ и суммарной $[C_B] + [C_H] = [C]$ показывают соответственно числа витков катушек и пазов; они выбираются из условия получения одинакового числа витков $2w_k$ во всех пазах, а также максимального приближения к окружности многоугольника МДС обмотки. По матрицам (9)–(10) катушки с шагами $y_{\Pi} = 2q = 9$, занимающие общие пазы (3, 12, 21), должны иметь одинаковое число витков w_k , а для каждой пары катушек в группе с шагами в соотношении $(y_{\Pi}' + y_{\Pi}'')/2 = 2q$ и $y_{\Pi}' > y_{\Pi}''$ числа витков равны $(1 \pm x)w_k$, где знак (+) относится к катушке с большим шагом y_{Π}' , при этом значения x могут варьироваться в общем случае в пределах $0 \leq x \leq 1$ и для исследуемых обмоток следует принимать значения 0,25; 0,5; 0,75 (см. табл. 1 и 2).

С учетом сделанных замечаний покажем формирование и исследование таких дробных ($d=2$) неравновитковых обмоток на конкретных примерах при $q=2,5$; 3,5; 4,5 (рис. 1 и 2), многоугольники МДС которых построены на рис. 1 и 2, пунктирными линиями для равновитковых катушек и сплошными линиями — для неравновитковых; сторона сетки на многоугольниках принята за единицу длины. Обмотка с $q=3,5$ ($b=3$, $N=7$) имеет по (3) минимальные значения $p'=1$ и $z'=21$ при числе катушечных групп $\Gamma=6p'=6$ (с номерами от 1Г до 6Г). Для такой обмотки с полюсным делением $\tau=3q=10,5$ и средним шагом катушек $y_{\Pi, \text{ср}} = 2q + 1 = 8$ чередования по пазам фазных зон при равновитковых катушках показаны на рис. 1, а, и им соответствует наружный (пунктирный) многоугольник МДС на рис. 1, б; токи фазных зон изображены единичными векторами в центре многоугольников. Рис. 1, б соответствует обмотке с неравновитковыми катушками: с шагами по (8) $y_{\Pi i} = 10, 8, 6$ и числами витков $2w_k$, $(1+x)w_k$, $(1-x)w_k$ —

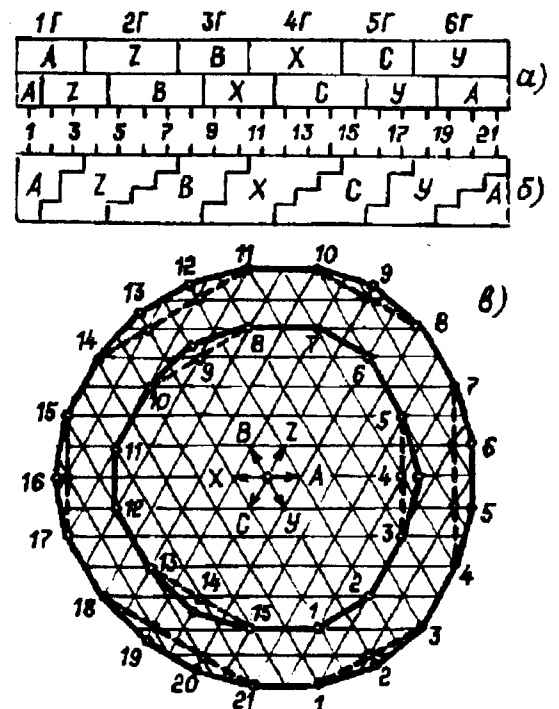


Рис. 1. Чередования по пазам фазных зон трехфазной дробной обмотки при $q=3,5$, $p'=1$, $z'=21$ для катушек равновитковых (а) и неравновитковых (б); многоугольники МДС (в) при $q=2,5$ (наружные) и $q=2,5$ (внутренние)

для нечетных групп (1Г, 3Г, 5Г); с шагами $y_{\Pi j} = 9, 7, 5$ и числами витков $(1+x')w_k$, w_k , $(1-x')w_k$ — для четных групп (2Г, 4Г, 6Г), где принято $x=0,25$ и $x'=0,5$. Значения коэффициентов укорочения и чисел витков катушек приведены в табл. 1, по которым определяются обмоточные коэффициенты.

Для обмотки рис. 1, а по (7) — $K_{\text{об}} = 0,8898$ при $y_{\Pi, \text{ср}} = 8$; для обмотки рис. 1, б по (6) — $K_{\text{об}} = 0,9161$ при $y_{\Pi, \text{ср}} = 57,5/7 \approx 8,21$. По (5) и наружным многоугольникам рис. 1, б, содержащим

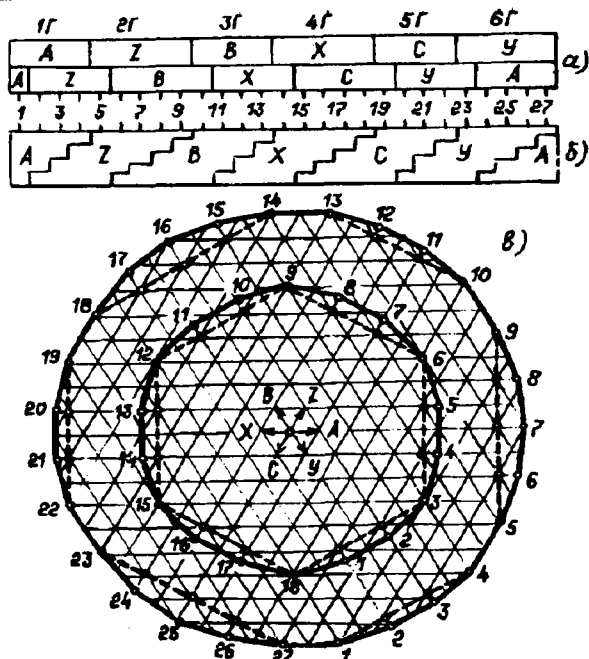


Рис. 2. Чередования по пазам фазных зон трехфазной дробной обмотки при $q=4,5$, $p'=1$, $z'=27$ для катушек равновитковых (а) и разновитковых (б); многоугольники МДС (в) $q=4,5$ (наружные) и $q=3$ (внутренние)

в одной повторяющейся части $2q=7$ пазовых точек, по треугольной сетке определяются:

для обмотки рис. 1,а — $R_{п1}^2=R_{п3}^2=5^2+2^2+10=39$; $R_{п2}^2=6^2=36$; $R_{п4}^2=R_{п7}^2=4^2+3^2+12=37$; $R_{п5}^2=R_{п6}^2=5^2+1^2+5=31$ и $R_{пд}^2=[R_{п2}^2+2(R_{п1}^2+R_{п4}^2+R_{п5}^2)]/7=250/7$; $R=(21 \cdot 0,8898/\pi)$, и тогда $\sigma_d=0,975\%$;

для обмотки рис. 1,б — $R_{п1}^2=R_{п3}^2=39$; $R_{п2}^2=6,25^2=39,0625$; $R_{п4}^2=R_{п7}^2=37$; $R_{п5}^2=R_{п6}^2=5,5^2+1^2+5,5=36,75$ и $R_{пд}^2=264,5625/7$; $R=(21 \cdot 0,9161/\pi)$ и $\sigma_d=0,787\%$. Таким образом, неравновитковая обмотка рис. 1,б имеет более высокий обмоточный коэффициент (в $0,9161/0,8898=1,03$ раза) и меньшее дифференциальное расстояние (в $0,975/0,787=1,24$ раза).

Обмотке с $q=2,5$ ($p'=1$ и $z'=15$) соответствуют многоугольники внутренние на рис. 1,в, а обмотке с $q=4,5$ ($p'=1$ и $z'=27$) с матрицами (9) и (10) — наружные на рис. 2,в, по которым определяются параметры обмоток, приведенные в табл. 1, где значения $u_{п.ср}$, $K_{об}$ и σ_d над чертой соответствуют равновитковым катушкам; $w_k^*=w_{ki}/w_k$.

Сравним обмотку рис. 1,б с трехфазной дробной обмоткой якоря синхронных генераторов серии ОС (мощностью до 100 кВт) с системой возбуждения от третьей гармонической магнитного поля [7], имеющей $2p=4$, $z=42$ ($q=3,5$ при $p'=1$ и $z'=21$), $u_{п}=9$ и $K_{об}=0,8139$ (для ОС габаритов 7 и 9). Такая обмотка выполняется двухслойной с равновитковыми катушками, и по многоугольнику МДС для нее $\sigma_d=0,882\%$, т. е. обмотка рис. 1,б с неравновитковыми катушками

(по табл. 1) имеет примерно на 13% меньшее дифференциальное расстояние при меньшем расходе меди примерно на 10% (из-за меньшего среднего шага катушек по пазам в $9 \cdot 7/57,5 \approx 1,1$ раза) и ее применение позволяет снижать коэффициент нелинейных искажений напряжения серийного генератора. Оценим по многоугольникам МДС также электромагнитные свойства трехфазной двухслойной целой обмотки с $q=3$, занимающей среднее положение между обмотками с $q=2,5$ и $3,5$, для которой при $p'=1$ и $z'=18$, среднем шаге катушек по пазам $u_{п.ср}=2q=6$ построены многоугольники — внутренние на рис. 2,в, при этом для равновитковых катушек $K_{об}=0,8312$ и $\sigma_d=1,408\%$. При выполнении такой обмотки в соответствии с [5] концентрической с шагами катушек $u_{п}=8,6,4$ и числами витков $1,5w_k$, w_k , $0,5w_k$ она имеет $K_{об}=8,882$, $u_{п.ср}=20/3$, и по ее многоугольнику МДС $\sigma_d=1,037\%$, т. е. дифференциальное рассеяние снижается в $1,408/1,037=1,36$ раза. Для сравнения отметим, что обмотка с $q=3$ однослойная при $u_{п.ср}=3q=9$ имеет $K_{об}=0,9598$ и $\sigma_d=1,404\%$, а двухслойная равновитковая при $u_{п}=2q+1=7$ — $K_{об}=0,9019$ и $\sigma_d=1,112\%$.

Подобно обмоткам рис. 1 и 2 формируются и исследуются по многоугольникам МДС неравновитковые обмотки при $q=5,5$; $6,5$; $7,5$, результаты которых сведены в таб. 2, где значения $u_{п.ср}$, $K_{об}$ и σ_d в числителе соответствуют равновитковым обмоткам.

Обмотки при $d=4$ ($b>1$) в соответствии с (1) и [1] имеют группировку катушек по ряду:

$$b, b, b, (b+1) \text{ при } c=1 \text{ или}$$

$$(b+1), (b+1), (b+1), b \text{ при } c=3, \quad (11)$$

повторяемую для всей обмотки bp/d раз, а оси соседних катушечных групп смещены на углы (см. рис. 3,д для $c=1$)

$$60^\circ \pm \alpha \text{ при } \alpha = 15^\circ/q. \quad (12)$$

При концентрических неравновитковых катушках обмоточный коэффициент определяется по их коэффициентам укорочения подобно (6) и, например, при $c=1$ и одинаковом выполнении всех малых ($i=1 \div b$) групп с учетом углов (12) сдвига групп запишется в виде

$$K_{об} = \left[(1+2\cos \alpha) \sum_{1}^b (K_{yi} w_{ki}) + \sum_{1}^{b+1} (K_{yj} w_{kj}) \right] / \left(3 \sum_{1}^b w_{ki} + \sum_{1}^{b+1} w_{kj} \right), \quad (13)$$

а при $c=3$ и одинаковом выполнении всех больших [$j=1 \div (b+1)$] групп множители $(1+2\cos \alpha)$

Таблица 2

Значение q	Параметры							
	z'	$y_{\Pi i}$	w_{ki}^*	$y_{\Pi j}$	w_{kj}^*	$y_{\Pi, \text{ср}}$	$K_{\text{об}}$	σ_d
5,5	33	16	2,0	15	1,75	$\frac{12,0}{12,82}$	$\frac{0,8690}{0,9114}$	$\frac{0,493}{0,317}=1,56$
		14	1,5	13	1,25			
		12	1,0	11	1,0			
		10	1,0	9	0,75			
		8	0,5	7	0,25			
6,5	39	19	2,0	18	1,5	$\frac{14,0}{14,85}$	$\frac{0,8630}{0,9056}$	$\frac{0,396}{0,242}=1,65$
		17	1,5	16	1,5			
		15	1,5	14	1,0			
		13	1,0	12	1,0			
		11	0,5	10	0,5			
7,5	45	9	0,5	8	0,5	$\frac{(17,0)}{16,0}$ $\frac{17,53}{17,53}$	$\frac{(0,8856)}{0,8585}$ $\frac{0,9131}{0,9131}$	$\frac{(0,259)}{0,342}$ $\frac{(1,47)}{0,176}=1,92$
		22	2,0	21	2,0			
		20	1,5	19	1,5			
		18	1,5	17	1,0			
		16	1,0	15	1,0			
		14	1,0	13	1,0			
		12	0,5	11	0,5			
		10	0,5	9	—			

в числителе и 3 в знаменателе (13) должны относиться к большим группам. Эквивалентный средний шаг катушек по пазам в соответствии с (13) определяется по выражению

$$y_{\text{эп.ср}} = \left[3 \sum_{i=1}^b (y_{\Pi i} w_{ki}) + \sum_{j=1}^{b+1} (y_{\Pi j} w_{kj}) \right] / \left[3 \sum_{i=1}^b w_{ki} + \sum_{j=1}^{b+1} w_{kj} \right]. \quad (14)$$

При равенстве чисел витков всех катушек групп выражение (13) принимает вид

$$K_{\text{об}} = \left[(1+2 \cos \alpha) \sum_{i=1}^b (K_{yi}) + \sum_{j=1}^{b+1} (K_{yj}) \right] / 4q. \quad (15)$$

Основу исследуемых неравновитковых обмоток при $d=4$ составляет структура двухслойной об-

мотки при $y_{\Pi, \text{ср}}=2q+0,5$ с шагами катушек по пазам для малых и больших групп, равными соответственно при $c=1$

$$\left. \begin{aligned} y_{\Pi i} &= 3q - 0,75 - 2(i-1); \quad y_{\Pi, \text{н}} = 3q - 0,75; \\ y_{\Pi, \text{в}} &= q + 1,75; \\ y_{\Pi j} &= 3q + 0,25 - 2(j-1); \quad y_{\Pi, \text{н}} = 3q + 0,25; \\ y_{\Pi, \text{в}} &= q + 0,75, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

числа витков катушек которой изменяются (подобно обмоткам при $d=2$) исходя из условия наибольшего приближения к окружности многоугольника МДС обмотки при сохранении в пазах одинакового числа витков $2w_k$.

Формирование неравновитковой обмотки при $d=4$ поясняется матрицами верхнего и нижнего слоев $[C_v]$ (17) и $[C_n]$ (18), составленными, подобно матрицам (9)–(10), для обмотки с $q=2,25$ ($b=2, c=1, N=9$), имеющей в соответствии с (3) минимальные числа пар полюсов и пазов $p'=d/2=2, z'=3N=27$ и выполняемой в соответствии с (16) с шагами катушек по пазам $y_{\Pi i}=6, 4$ и $y_{\Pi j}=7, 5, 3$ при группировке катушек по ряду 2 2 2 3 (повторяется $bp'/d=3$ раза). В соответствии с (17)–(18) все малые ($i=1 \div 2$) группы выполнены одинаковыми с числами витков $(1+x)w_k$ и $(1-x)w_k$, а большие ($j=1 \div 3$) группы — с числами витков $(1-x)w_k, (1+x)w_k, (1-x)w_k$, при этом пазы 6, 15, 24 имеют $2(1-x)w_k$ витков, а все остальные пазы — $2w_k$ витков; значение x принимается равным $x=0,5$.

Наиболее простыми и технологичными являются обмотки по варианту при $c=1$ и $y_{\Pi, \text{ср}}=2q+0,5$ (или $y_{\Pi, \text{ср}}=2q+1,5$) с $0,5w_k$ витками для внутренней катушки больших групп и w_k витками для всех остальных катушек групп,

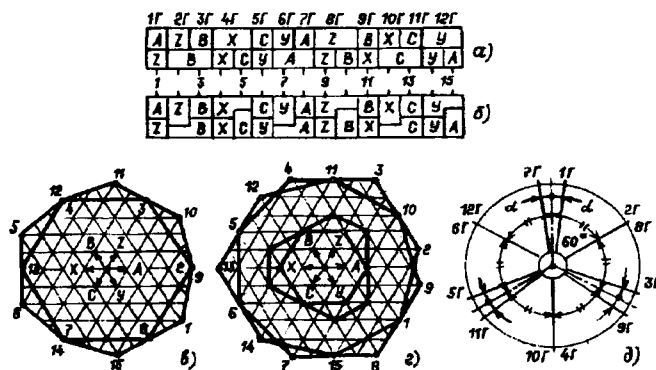


Рис. 3. Чередования по пазам фазных зон трехфазной дробной обмотки при $q=1,25, p'=2, z'=15$ для катушек равновитковых (а) и разновитковых (б); многоугольники МДС (в, г) при катушках разновитковых (наружные) и равновитковых (внутренний); диаграмма сдвига осей катушечных групп (д) при угле $\alpha=15^\circ/q$

заполнение пазов ($1,5 w_k$ витков).

	A	Z	B	X	C	Y
1	1+x					
2	1-x					
3		1+x				
4		1-x				
5			1+x			
6			1-x			
7				1-x		
8				1+x		
9				1-x		
10					1+x	
11					1-x	
12						1+x
13						1-x
14	1+x					
15	1-x					
16		1-x				
17		1+x				
18		1-x				
19			1+x			
20			1-x			
21				1+x		
22				1-x		
23					1+x	
24					1-x	
25						1-x
26						1+x
27						1-x

(17)

	A	Z	B	X	C	Y
1		1-x				
2		1+x				
3			1-x			
4			1+x			
5			1-x			
6				1-x		
7				1+x		
8					1-x	
9					1+x	
10						1-x
11						1+x
12	1-x					
13	1+x					
14	1-x					
15		1-x				
16		1+x				
17			1-x			
18			1+x			
19				1-x		
20				1+x		
21					1-x	
22					1+x	
23						1-x
24						1+x
25						
26	1-x					
27	1+x					

(18)

С учетом сделанных замечаний покажем формирование и исследование таких дробных ($d=4$) неравновитковых обмоток на конкретных примерах при $q=1,25$; $2,25$; $3,25$; $3,75$ (рис. 3—6).

Обмотка при $q=1,25$ ($b=c=1$, $N=5$) в соответствии с (3) имеет минимальные значения $p'=2$ и $z'=15$ при числе катушечных групп $\Gamma=6p'=12$ (с номерами от 1Γ до 12Γ) и группировке катушек по ряду 1112 (рис. 3). При полюсном делении $\tau=3q=3,75$ и среднем шаге катушек по пазам $y_{п.ср}=2q+0,5=3$ чередования по пазам фазных зон для равновитковых катушек показаны на рис. 3,а, и им соответствует внутренний многоугольник МДС на рис. 3,з (при его построении сторона треугольной сетки принята за единицу длины). Разновитковая обмотка имеет чередования фазных зон по рис. 3,б при шагах катушек по (16): $y_{п}=3$ для малых групп; $y_{п}=4$, 2 и числах витков w_k , $(1-x)w_k$ для больших групп (4Γ , 8Γ , 12Γ), при этом малые группы 2Γ , 6Γ , 10Γ имеют $(1+x)w_k$ витков, а остальные — w_k витков, и для всех пазов число витков одинаково ($2w_k$). По рис. 3,б при $x=0,5$ построен наружный многоугольник МДС на рис. 3,з (сторона сетки принята за 0,5 единиц длины); при $x=0,5$ и одинаковых числах витков w_k для всех малых групп многоугольник МДС построен на рис. 3,г; для этого случая пазы: 2, 5, 7, 10, 12, 15 содержат по $1,5w_k$ витков и эквивалентное число полностью заполненных пазов равно $z'_3=13,5$.

Для обмотки с $q=2,25$ с матрицами (17)—(18) чередования по пазам фазных зон показаны на рис. 4, б, и им соответствует наружный многоугольник на рис. 4,з (сторона сетки принята за 0,5 единицы длины); по коэффициентам укорочения и числам витков катушек, приведенным

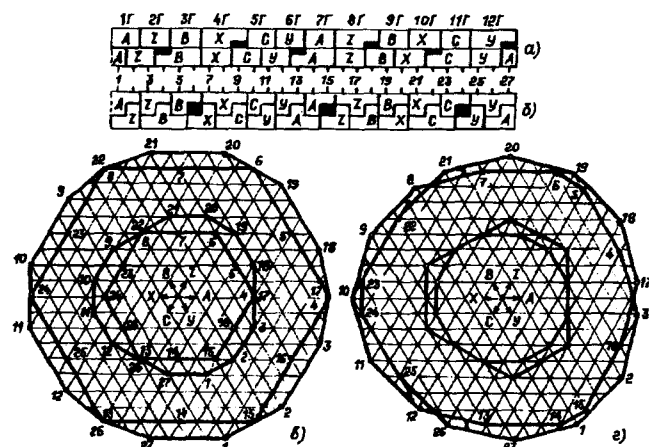


Рис. 4. Чередования по пазам фазных зон трехфазной дробной обмотки при $q=2,25$, $p'=2$, $z'=27$ для катушек с шагом $y_{п.ср}=6$ (а) и $y_{п.ср}=5$ (б); многоугольники МДС при $y_{п.ср}=6$ (в) и $y_{п.ср}=5$ (з) обмоток равновитковых (внутренние) и разновитковых (наружные)

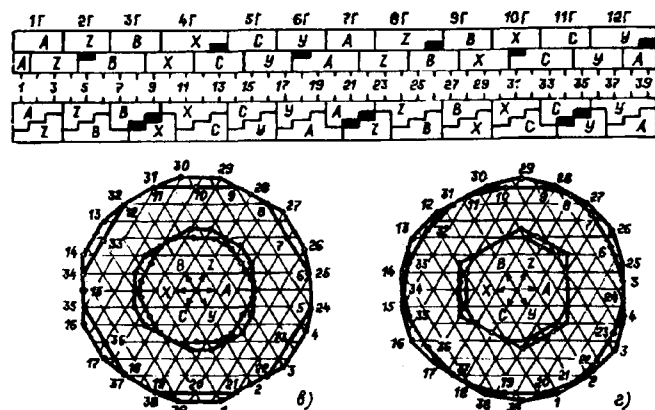


Рис. 5. Чередования по пазам фазных зон трехфазной дробной обмотки при $q=3,25$, $p'=2$, $z'=39$ для катушек с шагом $u_{п.ср}=8$ (а) и $u_{п.ср}=7$ (б); многоугольники МДС при $u_{п.ср}=8$ (в) и $u_{п.ср}=7$ (г) обмоток равновитковых (внутренние) и разновитковых (наружные)

в табл. 3, определяются:

для обмотки рис. 4,б по (13)–(14) при угле $\alpha=15^\circ/2,25$

$$K_{об}=0,9185 \text{ и } u_{эп.ср}=[3(1,5 \cdot 6 + 0,5 \cdot 4) + (0,5 \cdot 7 + 1,5 \cdot 5 + 0,5 \cdot 3)]/8,5=5,35;$$

по наружному многоугольнику рис. 4,з (одна повторяющаяся часть содержит $4q=9$ пазовых точек)

$$R_{п1}^2=8^2=64; R_{п2}^2=R_{п9}^2=5^2+4^2+20=61; R_{п3}^2=R_{п5}^2=R_{п6}^2=R_{п8}^2=7^2+1^2+7=57; R_{п4}^2=R_{п7}^2=5^2+3^2+15=49 \text{ и } R_{д}^2=512/(4 \cdot 9)=128/9; R=(25,5 \times 0,9185/2\pi) \text{ и } \sigma_{д}=2,35, \text{ где } z'_3=25,5;$$

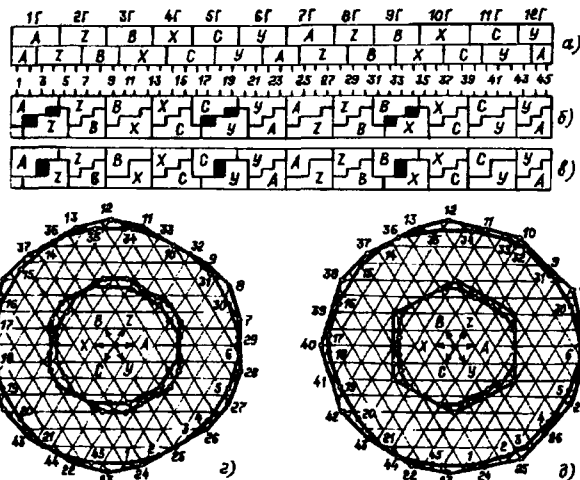


Рис. 6. Чередования по пазам фазных зон трехфазной дробной обмотки при $q=3,75$, $p'=2$, $z'=45$ для катушек с шагом $u_{п.ср}=9$ равновитковых (а) и $u_{п.ср}=8$ разновитковых по первому (б) и второму (в) вариантам; многоугольники МДС (г, д) — наружные при $u_{п.ср}=8$ для вариантов первого (г) и второго (д), внутренние для равновитковых катушек при $u_{п.ср}=9$ (е) и $u_{п.ср}=8$ (д)

для равновитковой обмотки при $u_{п.ср}=2q+0,5=5$ по (15)

$$K_{об}=0,8773;$$

по внутреннему многоугольнику МДС рис. 4,з $R_{д}^2=132/9$; $R=(27 \cdot 0,8773/2\pi)$ и $\sigma_{д}=3,20\%$.

Параметры обмотки рис. 4,а при $u_{п.ср}=2q+1,5=6$ определяются по многоугольникам рис. 4,в — наружному для неравновитковых и

Таблица 3

Значение q	Рисунок	Параметры								
		$u_{пi}; K_{yi}; w_{ki}^*$			$u_{пj}; K_{yj}; w_{kj}^*$			$u_{п.ср}$	$K_{об}$	σ_d
1,25	3,а и г	3	0,9511	1,0	4	0,9945	1,0	3,0	0,9099	10,203
	2				0,7431	0,5	3,11	0,9284	8,066	
	3,б и в				3,б и г	3,10	0,9307	6,345		
2,25	4,а и в	7	0,9983	1,0	8	0,9580	1,0	$\frac{6,0}{6,12}$	$\frac{0,9410}{0,9491}$	$\frac{3,29}{2,60}=1,27$
	5	0,9182	6		0,9848	0,5		$\frac{0,9410}{0,9491}$		
	4,б и г	6	0,9848	1,5 0,5	7	0,9983	0,5 1,5 0,5	$\frac{5,0}{5,35}$	$\frac{0,8773}{0,9185}$	$\frac{3,20}{2,35}=1,36$
		4	0,8021		5	0,9182				
		5	0,9182		3	0,6428				
		3	0,6428							
3,25	5,а и в	10	0,9992	1,0	11	0,9798	1,0	$\frac{8,0}{8,12}$	$\frac{0,9175}{0,9253}$	$\frac{1,512}{1,205}=1,25$
	5,б и г	8	0,9605		9	0,9927		1,5	$\frac{0,8630}{0,9044}$	
		6	0,8230		7	0,9035		1,0	$\frac{1,603}{1,053}=1,52$	
		9	0,9927		10	0,9992		0,5	$\frac{7,0}{7,52}$	
		7	0,9035	8	0,9605	1,5	$\frac{0,8630}{0,9044}$			
	5	0,7212	0,5	6	0,8230	1,0	$\frac{1,603}{1,053}=1,52$			
	4	0,6007	0,5	4	0,6007	0,5				
	3,75	6,а и г	11	0,9994	1,5	10	0,9848	1,5	9,0	0,9084
6,б и г		9	0,9511	1,0	8	0,8988	1,0	8,59	0,8971	0,757
		7	0,8290		6	0,7315	0,5			
		5	0,6428		0,5					
6,в и д		11		1,5	10		1,5	$\frac{8,0}{8,72}$	$\frac{0,8585}{0,9055}$	$\frac{1,185}{0,805}=1,47$
		9		1,5	8		1,0	$\frac{0,8585}{0,9055}$		
		7		0,5	6		0,5			
		5		0,5						

внутреннему для равновитковых катушек. Подобным образом исследуются обмотки при $q=3,25$ ($p'=2$, $z'=39$) по рис. 5 и при $q=3,75$ ($p'=2$, $z'=45$) по рис. 6, для наружных многоугольников которых сторона сетки принята за единицу длины, а для внутренних — за две единицы длины. Особенностью обмотки с $q=3,75$ ($c=3$) является неодинаковое выполнение ее больших групп в каждой группировке (4 4 4 3), что учитывается при вычислении обмоточных коэффициентов.

Результаты расчетов параметров обмоток рис. 3—6 сведены в табл. 3, сравнение данных которой показывает высокую эффективность разработанных дробных неравновитковых обмоток при $d=4$. Наибольшее уменьшение дифференциального рассеяния (в $10,203/6,345=1,61$ раза) достигается в обмотке с $q=1,25$ (рис. 3, б и г), в которой полностью заполнены все пазы, а для всех остальных обмоток по табл. 3 часть пазов имеет неполное заполнение, и эквивалентное число полностью заполненных пазов равно $z'_3=z'-1,5$. Сравним, например, обмотку рис. 5 с обмоткой якоря синхронных генераторов серии ОС [7], имеющей (для габарита 5) $2p=4$, $z=39$ ($q=3,25$), $u_n=8$, $K_{об}=0,9175$ и выполненной двухслойной равновитковой, для которой по внутреннему многоугольнику рис. 5, в коэффициент дифференциального рассеяния равен $\sigma_d=1,512$ (см. табл. 3 для $q=3,25$ и $u_n=8$). При выполнении такой обмотки неравновитковой по рис. 5, а ее дифференциальное рассеяния снижается (см. табл. 3) на 25 % при некотором увеличении обмоточного коэффициента ($K_{об}=0,9253$) и среднего шага катушек ($u_{н.ср}=8,12$); при выполнении обмотки по рис. 5, б снижение σ_d достигает 44% ($1,512/1,053=1,44$) при некотором уменьшении $K_{об}$ (0,944) и снижении расхода меди из-за уменьшения среднего шага катушек ($8/7,52 \approx 1,06$), т. е. применение неравновитковой обмотки по рис. 5 улучшает показатели серийной машины.

Обмотка при $d=4$ и $b=0$ ($q<1$) в соответствии с (11) имеет в числовом ряду группировки катушек нулевые элементы, т. е. на ее полюсных делениях отсутствуют отдельные фазные зоны. Например, для обмотки при $q=3/4=0,75$ ($c=N=3$) в соответствии с (3) минимальные значения чисел пар полюсов и пазов равны $p'=d/2=2$, $z'=3N=9$ при числе групп $\Gamma=z'=9$, и такая обмотка формируется в следующем виде [1]:
 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 — группировка катушек;
 A Z B X C Y A Z B X C Y — фазные зоны;
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 — номера пазов.

В соответствии с этим чередования фазных зон по пазам такой двухслойной обмотки при шаге катушек $u_n=2q+0,5=2$ показаны на рис. 7, а, где также построен многоугольник МДС обмотки (сторона сетки принята за 0,5 единицы длины).

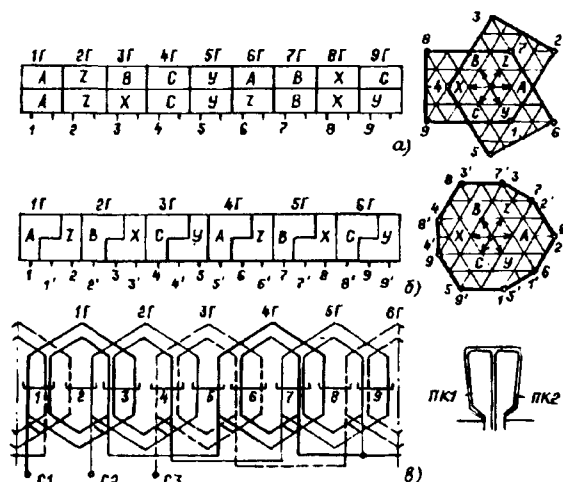


Рис. 7. Чередования по пазам фазных зон и многоугольник МДС трехфазной дробной обмотки при $q=0,75$, $p'=2$, $z'=9$ (а) и $q_3=1,5$, $p'=2$, $z_3=2z'=18$ (б); схема одно-двухслойной обмотки при $q_3=2q=1,5$ и изоляция реального паза с двумя элементарными (в)

Если при выполнении обмотки рис. 7, а под-разделять каждый паз по ширине на два элементарных ($z_3=2z$), то эквивалентное число пазов на полюс и фазу удваивается, т. е. $q_3=2q=1,5$. Такую обмотку с $q_3=1,5$, $p'=2$, $z_3'=18$ целесообразно выполнять одно-двухслойной (рис. 7, б и в) из $\Gamma=6p'/2=6$ катушечных групп с двумя концентрическими катушками в каждой с шагами по элементарным пазам $u_{н.э}=5$, 3 и числами витков $2w_k$, w_k . Чередования ее фазных зон по пазам и многоугольник МДС показаны на рис. 7, б, где для каждого реального паза одному элементарному пазу приписан номер паза, а другому — тот же номер со штрихом. Развернутая схема обмотки в соответствии с рис. 7, б выполнена на рис. 7, в с разметкой реальных пазов, где показана также разбивка реального паза на два элементарных изоляционными пазовыми «коробочками» ПК1 и ПК2. Для определения обмоточных коэффициентов составим матрицы обмотки рис. 7, а [C] (19) и рис. 7, б [C] (20):

$$[C] = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & Z & B & X & C & Y \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2 \\ 1 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad (19)$$

$$[C] = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & Z & B & X & C & Y \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1' \\ 2 \\ 2' \\ 3 \\ 3' \\ 4 \\ 4' \\ 5 \\ 5' \\ 6 \\ 6' \\ 7 \\ 7' \\ 8 \\ 8' \\ 9 \\ 9' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 2 \\ 2 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (20)$$

Обычный коэффициент определяется по матричным выражениям [7]

$$\dot{E}_\phi = [C_\phi]^T [\dot{e}_z]; \quad |\dot{E}_\phi| = \sqrt{([C_\phi]^T [\dot{e}_z'])^2 + ([C_\phi]^T [\dot{e}_z''])^2};$$

$$K_{об} = |\dot{E}_\phi| / N_\pi, \quad (21)$$

где $[C_\phi]_A = [C]_A - [C]_X$ — матрица фазы (A), получаемая из матрицы обмотки [C] путем вычитания столбцов зон A и X, а $[C_\phi]^T$ — ее транспонированная матрица; $[\dot{e}_z]$ — матрица векторов единичных пазов ЭДС, i -й элемент которой равен $\dot{e}_{zi} = e_{zi}' + j e_{zi}'' = \cos(i-1)\gamma + j \sin(i-1)\gamma$ при угле $\gamma = (360^\circ \cdot p)/z$ сдвига векторов ЭДС соседних пазов для основной гармонической, равному для обмотки рис. 7 $\gamma = (360^\circ \cdot 2)/9 = 80^\circ$; N_π — число проводников фазы, равное сумме элементов матрицы $[C_\phi]$.

В соответствии с (21) определяются:

для обмотки рис. 7,а по матрице (19)

$$E_\phi = 2 \cos 0 - \cos 2\gamma + \cos 5\gamma - 2 \cos 7\gamma + j(2 \sin 0 - \sin 2\gamma + \sin 5\gamma - 2 \sin 7\gamma) = 5,58513 + j \cdot 0,98481;$$

$$|\dot{E}_\phi| = 5,671288 \text{ и } K_{об} = |\dot{E}_\phi| / 6 = 0,9452,$$

а по (5) и многоугольнику МДС рис. 7,а

$$R_d^2 = (4 + 2 \cdot 12) / (4 \cdot 3) = 7/3; \quad R = (9 \cdot 0,9452 / 2\pi);$$

$$\sigma_d = 27,29\%;$$

для обмотки рис. 7,б по матрице (20)

$$E_\phi = 3 \cos 0 - 3 \cos 2\gamma + 2 \cos 4\gamma + \cos 5\gamma - \cos 6\gamma - 2 \cos 7\gamma + j(3 \sin 0 - 3 \sin 2\gamma + 2 \sin 4\gamma + \sin 5\gamma - \sin 6\gamma - 2 \sin 7\gamma) = 10,4966 - j \cdot 1,85083; \quad |\dot{E}_\phi| = 10,65853;$$

$$K_{об} = |\dot{E}_\phi| / 12 = 0,8882,$$

а по (5) и многоугольнику МДС рис. 7,б

$$R_d^2 = (2 \cdot 7 + 9) / 3 = 23/3; \quad R = (18 \cdot 0,8882 / 2\pi) \text{ и } \sigma_d = 18,41\%.$$

Таким образом, дифференциальное рассеяние обмотки рис. 7,б и в по сравнению с обмоткой рис. 7,а снижается в $27,29/18,41 = 1,48$ раза, вслед-

ствие чего в асинхронной машине с такой обмоткой снижаются более чем вдвое добавочные потери в роторе, а также магнитные шумы и вибрации.

Предлагаемая обмотка с $q < 1$ может выполняться, например, в двухскоростных лифтовых асинхронных двигателях в качестве многополюсной при ограниченном числе пазов сердечника; например, при $2p = 24$ и $z = 54$ обмотка по рис. 7,в повторяется $p/p' = 12/2 = 6$ раз. Подобным образом могут формироваться и исследоваться также другие дробные обмотки при $q < 1$; технология их укладки упрощается при применении на сердечнике открытых пазов.

Обмотки при $d = 5$ ($b > 1$), разработанные в виде неравновитковых для совмещенного магнитопровода [9–12] из условия устранения их взаимной индуктивной связи с полем $2p = 2$ -полюсной обмотки, могут использоваться и в несомещенных магнитопроводах асинхронных и синхронных машин. Покажем формирование дробной неравновитковой обмотки с $d = 5$ на примере трехфазной симметричной обмотки с $q = 6/5 = 1,2$ ($b = c = 1$, $N = 6$), для которой в соответствии с (3) $p' = 5$, $z' = 6N = 36$, а катушки группируются по ряду [1] 2 1 1 1 1, повторяемому $6p'/d = 6$ раз. Аналогично предыдущему составляем матрицы верхнего $[C_v]$ и нижнего $[C_n]$ слоев такой обмотки при шаге катушек по пазам $y_\pi = 3$ ($\beta = y_\pi/3q = 5/6$), по которым в соответствии с (21) можно определять ЭДС фазы и обмоточный коэффициент при различных значениях x , а по многоугольнику МДС — исследовать дифференциальное рассеяние обмотки; матрицы $[C_v]$ и $[C_n]$ показывают, что обмотка имеет полное заполнение всех пазов.

Такая обмотка содержит $\Gamma = 6p' = 30$ катушечных групп, каждая группировка из $N = 6$ катушек и $d = 5$ групп (2 1 1 1 1) выполнена одинаковым образом и для первой из них (группы 1Г–5Г) числа витков катушек равны:

$$\begin{matrix} 1Г & 2Г & 3Г & 4Г & 5Г \\ (1-x)w_k & w_k & (1+x)w_k & (1+x)w_k & w_k \end{matrix}.$$

При равновитковых катушках ($x = 0$) обмотка имеет $K_{об} = 0,9236$, а по ее многоугольнику МДС (здесь не показанному) — $R_d^2 = 5,0$ и $\sigma_d = 11,59\%$; при $x = 0,2$ — $K_{об} = 0,9294$; $R_d^2 = 14,6/3$ и $\sigma_d = 7,27\%$; при $x = 0,25$ — $R_d^2 = 4,875$; $K_{об} = 0,9308$ и $\sigma_d = 7,13\%$; для значений $x > 0,25$ значение σ_d возрастает. Таким образом, трехфазная неравновитковая обмотка при $d = 5$ и $q = 1,2$ имеет наилучшие электромагнитные параметры при значении $x = 0,25$, и ее дифференциальное расстояние в $11,59/7,13 = 1,63$ раза ниже, чем у равновитковых катушек, что значительно улучшает показатели электрической машины с такой обмоткой. Снижение дифференциального рассеяния в ней до-

тигается в основном за счет устранения дробной изшей гармонической поля порядка $\nu=1/p'$ с числом пар полюсов $p=\nu p'=1$. Принципы формирования приведенной обмотки при $d=5$ могут использоваться и для обмоток с другими числами пазов [10–12], а также при $d=7$ [9].

Выводы. 1. Трехфазные симметричные дробные обмотки электрических машин переменного тока, выполняемые из равновитковых катушек, характеризуются повышенным дифференциальным рассеянием, значительного снижения которого можно добиться путем выполнения обмоток неравновитковыми.

2. Разработанные дробные обмотки при числе пазов на полюс и фазу $q>1$ и его знаменателе дробности $d=2$ и 4 выполняется из концентрических неравновитковых катушек в каждой катушечной группе и имеют полное и одинаковое заполнение всех пазов сердечника при $d=2$, а при $d=4$ эквивалентное число полностью заполненных обмоткой пазов равно $z'_3=(z'-1,5)p/p'$. Обмотки при $d=5$ выполняются равношаговыми с изменением чисел витков катушечных групп в пределах каждой их группировки при одинаковом заполнении всех пазов.

3. Предлагается формировать дробные обмотки с $q<1$ при эквивалентном значении $q_3=2q$ подразделением каждого реального пазы по ширине на два одинаковых элементарных, что позволяет выполнять многополюсные трехфазные обмотки при ограниченном числе пазов сердечника серийных машин, например, в двухскоростных лифтовых асинхронных двигателях.

4. Построение многоугольников МДС позволяет достаточно просто определять дифференциальное рассеяние, проводить объективную оценку и сравнение электромагнитных параметров неравновитковых обмоток с равновитковыми. Снижение дифференциального рассеяния в исследованных обмотках достигает 60 %, что значительно улучшает показатели электрических машин и де-

лает целесообразным применение таких обмоток в серийных асинхронных и синхронных машинах мощностью до 400 кВт.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лившиц-Гарик. Обмотки машин переменного тока / Пер. с англ. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1959.
2. Вольдек А.И. Электрические машины: Учебник. — Л.: Энергия, 1978.
3. Геллер Б., Гамата В. Высшие гармоники в асинхронных машинах / Пер. с англ. под ред. З.Г.Каганова. — М.: Энергия, 1981.
4. Жерве Г.К. Обмотки электрических машин. — Л.: Энергоатомиздат, 1989.
5. Обмотка асинхронного двигателя с переменным числом витков / Г.А.Вихров, А.С.Гитман, Ю.Д.Муравьев и др. — ЭП. Электрические машины, 1978, № 2 (84).
6. Дегтев В.Г. Принципы структурного проектирования двухкоординатных обмоток. — Электричество, 1989, № 11.
7. Попов В.И. Матричный анализ схем обмоток совмещенных электрических машин. — Электричество, 1984, № 11.
8. Попов В.И. Определение дифференциального рассеяния многофазных совмещенных обмоток ротора. — Электричество, 1987, № 6.
9. Попов В.И. Взаимоиндуктивные связи многофазных разнополюсных обмоток совмещенного магнитопровода. — Электричество, 1990, № 4.
10. А.С. № 1529354. Трехфазная якорная обмотка совмещенной электрической машины / В.И.Попов. — Оpubл. в Б.И., 1989, № 46.
11. А.С. № 1539900. Трехфазная обмотка электрической совмещенной машины / В.И.Попов. — Оpubл. в Б.И., 1990, № 4.
12. А.С. № 1539902. Трехфазная обмотка совмещенной электрической машины / В.И.Попов. — Оpubл. в Б.И., 1990, № 4.

[28.03.94]

Автор: Попов Виктор Иванович окончил электротехнический факультет Ереванского политехнического института в 1962 г. Защитил докторскую диссертацию по теме «Электромашинные преобразователи энергии с совмещенными обмотками» в Московском энергетическом институте в 1986 г. Профессор Волжского инженерно-педагогического института (ВИПИ) в Нижнем Новгороде.

Уважаемые авторы!

Редакция публикует при каждой статье краткие биографические сведения об авторах. В связи с этим просим всех авторов при направлении статьи в редакцию сообщить следующие сведения:

1. Полные имена и отчества всех авторов
2. Какой факультет, какого вуза и когда закончил
3. Когда получил ученую степень, где и по какой тематике (теме) была защита
4. Место настоящей работы и должность.

Кроме того, напоминаем, что на каждую статью следует представлять краткий (4–5 предложений) реферат на русском и английском языках, а также ключевые слова.

Подразделенные обмотки с полюсной модуляцией и их применение в машинах переменного тока

СМИРНОВ А.Ю.

Рассмотрены обмотки с переключением числа пар полюсов в соотношении 2:1, составленные из катушек, подразделенных на две одинаковые секции. Приведен подробный алгоритм построения таких обмоток на основе обычных схем концентрических и петлевых обмоток машин переменного тока с числом пазов на полюс и фазу для поля большей полюсности, кратным 0,5. Дано описание конструкции магнитной системы синхронных и индукторных машин с подразделенной обмоткой и приведены экспериментальные характеристики такой машины с магнетозлектрическим индуктором.

Ключевые слова: асинхронный двигатель, обмотка, число пар полюсов, катушечная группа, индуктивные параметры обмотки, метод проводимостей зубцовых контуров, исследование

Возрастающее использование специальных электрических машин, позволяющих в различных конкретных механизмах достигать более высоких экономических и технических показателей [1], чем у серийных машин делает актуальным поиск новых полезных модификаций и изучение их эксплуатационных возможностей.

Традиционными и наиболее широко распространенными модификациями специальных электрических машин являются машины с переключением числа пар полюсов, позволяющие осуществлять ступенчатое регулирование скорости приводимого механизма. В большинстве случаев обмотка такого электродвигателя выполняется с переключением чисел пар полюсов в соотношении 2:1. Принцип ее работы основан на использовании полюсной модуляции: реверсирование тока в одной половине каждой фазы обмотки после переключения. При этом чаще всего применяются способы, при которых оба числа пар полюсов сопряжены в звезду с одним и тем же отличающимся вдвое числом параллельных ветвей, либо при большем числе пар полюсов фазы сопрягаются в треугольник с вдвое большим числом параллельных ветвей [2].

Менее известным является способ переключения, применимый в машине с обмоткой, все катушки которой подразделены на две одинаковые секции — катушки с уменьшенным в 2 раза числом витков. Аналогичные обмотки применяются в машинах постоянного тока, где секции, расположенные в одних и тех же пазах, последовательно подключаются к соседним коллекторным пластинам [3].

Схема простейшей подразделенной обмотки с переключением пар полюсов в соотношении 2:1 показана на рис. 1,а. Особенностью такой обмотки

The paper considers windings of electrical machines with pole changing ratio 2:1, which are formed from coils, subdivided in two identical sections. Detailed algorithm of designing such windings on the base of ordinary concentric and loop windings for alternating current machines with a number of slots for pole and phase, divisible by 0,5, is presented. The design of magnetic system of synchronous and inductor motor with subdivided winding is described and experimental characteristics of such of motor with magnetoelectric inductor are presented.

Key words: asynchronous motor, winding, quantity of pole's pairs, coils group, inductive parameters of winding, Method of Tooth-Circuit Admittances, investigation

является соединение катушек (катушечных групп) в фазах по мостовой схеме, с включением в противоположные ветви катушек, расположенных в одних и тех же пазах (рис. 1,б). Относительно зажимов, подключенных к одной диагонали моста (A1—A2), фазы содержат две параллельные ветви с встречным включением катушек в каждой ветви и образуют поле с числом пар полюсов $2p=4$. Относительно зажимов, подключенных к другой диагонали (A3—A4), обмотка содержит параллельные ветви с уменьшенным в 2 раза числом пар полюсов $2p=2$. Распределение МДС этих полей, изображенное для момента времени, когда первая фаза обтекается полным током, а вторая

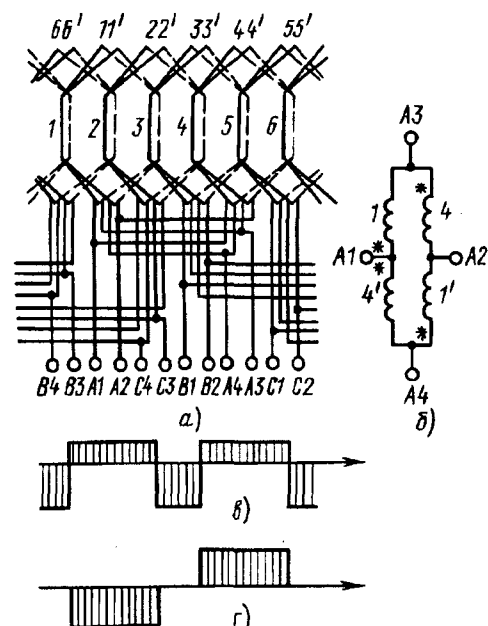


Рис. 1. Схема простейшей подразделенной обмотки: расположение и соединение катушек (а); соединение катушек в фазе (б); распределение МДС полей большей (в) и меньшей (г) полюсности

и третья половинным током противоположного направления, показано на рис. 1, в и г.

В отличие от других аналогов с полюсной модуляцией такая обмотка допускает любое сопряжение фаз — как в звезду, так и в треугольник, для обоих чисел пар полюсов. Это свойство может оказаться полезным для осуществления многоступенчатого пуска асинхронных двигателей, а также для ступенчатого регулирования скорости асинхронных микродвигателей. Разные ступени пуска или регулирования в этих машинах создаются за счет комбинации числа полюсов и сопряжения фаз.

Сравнивая электромагнитные параметры подразделенной обмотки с ее традиционным аналогом, переключаемым в соотношении 2:1, следует отметить их полную идентичность по обмоточным коэффициентам для основной и высших гармоник в случае выполнения их из катушек с одинаковым шагом по пазам.

Очень полезным свойством описываемой обмотки является отсутствие взаимного влияния напряжения на первой группе зажимов ($A1-A2$ и в остальных фазах), подаваемого для образования поля большей полюсности, и напряжения на второй группе зажимов ($A3-A4$ и в остальных фазах), подаваемого для образования поля меньшей полюсности. Это свойство является следствием эквипотенциальности средних точек параллельных ветвей, с которыми указанные группы зажимов соединены выводами. Оно позволяет создать в одной и той же машине одновременно два поля, вращающихся со скоростями, отличающимися в 2 раза. Причем, в зависимости от чередования фаз напряжения на каждой группе зажимов, направления вращения этих полей могут совпадать, а могут быть противоположными.

Необходимым условием одновременного создания двух полей в машине с подразделенной обмоткой является лишь одно: многофазное устройство, питающее или использующее энергию одного из полей (любого), образуемого обмоткой, обязательно должно иметь гальванически несвязанные друг с другом фазы. В двигателе это условие должно обеспечиваться питанием через трансформатор с несопряженными фазами вторичной обмотки. При использовании же указанного поля для торможения и рекуперации энергии нагрузка должна быть составлена из однофазных элементов.

В общем случае схемы подразделенных обмоток можно получить на основе обычных схем петлевых и концентрических обмоток машин переменного тока с числом пазов на полюс и фазу, кратным 0,5.

Синтез схемы подразделенной обмотки осуществляется в следующей последовательности.

1. Для большего числа пар полюсов синтезируемой обмотки изображаются катушечные

группы любой концентрической или петлевой обмотки машины переменного тока с числом пазов на полюс и фазу, кратным 0,5, наиболее приемлемой по технологическим соображениям.

2. Каждой фазе обмотки отводятся ее катушечные группы, те же, что и в исходной обмотке.

3. Отведенные катушечные группы соединяются в фазах в две ветви таким образом, что в одну ветвь включаются группы четных пар полюсов, отсчитывая вдоль окружности от пары, произвольно принятой за первую, а в другую ветвь — катушечные группы нечетных пар полюсов.

4. В каждой фазе начало первой, конец второй, конец первой и начало второй ветвей соединяются выводами с зажимами $F1, F2, F3$ и $F4$ соответственно (F — символьное обозначение фазы). Эти ветви составляют первую половину подразделенной обмотки.

5. В тех же пазах изображаются, распределяются по фазам и соединяются в ветви катушечные группы второй половины подразделенной обмотки, точно такой же, что и в п. 1—3 первой половины подразделенной обмотки.

6. Начало второй, конец первой, начало первой и конец второй ветвей второй половины соединяются в фазах с зажимами $F1, F2, F3$ и $F4$ соответственно.

7. Зажимы $F1-F2$ или $F3-F4$ всех фаз обмотки сопрягаются в звезду или в треугольник.

При питании обмотки многофазным током через зажимы $F1-F2$ она образует поле с числом полюсов, равным удвоенному числу полюсов поля, образуемого при питании обмотки через зажимы $F3-F4$.

Теперь обратимся к важным областям практического применения подразделенных обмоток, менее очевидным, чем в многоскоростных асинхронных двигателях.

В некоторых установках энергетического машиностроения получили применение сервоприводы, осуществляющие вертикальное перемещение и позиционирование регулирующего органа в рабочем режиме, и быстрое опускание его вниз под действием силы тяжести в аварийном режиме [4]. Наилучшим образом для работы в указанных приводах подходят синхронные двигатели с электромагнитной редукцией скорости: индукторно-реактивные [5—7], эксплуатируемые в режиме перемещения и позиционирования регулирующего органа как шаговые. Их главные достоинства — максимальная надежность и предельно высокий ресурс. Аварийный режим работы обеспечивается обесточиванием двигателя. Однако в этом режиме приходится ограничивать чрезмерно высокую скорость регулирующего органа, приобретаемую им в конце хода, во избежание поломки механизма вследствие ударного взаимодействия его подвижных частей с ограни-

чителями хода.

Применение в данном механизме индукторной машины с подразделенной обмоткой позволяет эффективно решить проблему ограничения скорости опускания регулирующего органа в конце хода (притормаживания) без использования мощных воспринимающих пружин или дополнительных тормозных устройств.

Подразделенная обмотка такой машины, выполненная в восьми пазах ($z=8$), показана на рис. 2. Она составлена из сосредоточенных катушек (шаг по пазам $y=1$) и обеспечивает следующие значения обмоточных параметров:

$$m_1=m_2=4; \quad 2p_1=4; \quad 2p_2=2; \quad q_1=0,5; \quad q_2=1,0; \\ \beta_1=0,5; \beta_2=0,25; k_{y1}=k_{o61}=0,707; k_{y2}=k_{o62}=0,383.$$

Здесь $m, p, q, \beta, k_y, k_{o6}$ — соответственно числа фаз, пар полюсов, пазов на полюс и фазу, относительный шаг, коэффициенты укорочения и обмоточный для первого и второго полей, образуемых обмоткой.

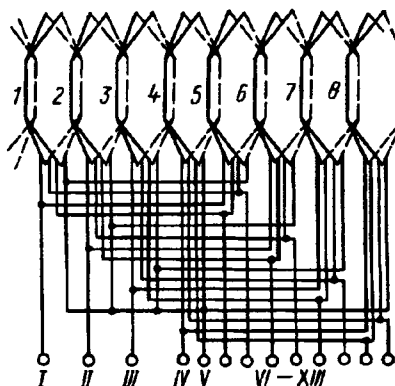


Рис. 2. Схема расположения и соединения катушек подразделенной обмотки индукторной машины [$z=8$, $m=4$; $2p(1)=4$; $2p(2)=2$]

Фазы обмотки, образующие поле полюсностью $2p_1=4$, сопряжены в четырехлучевую звезду с выводами фаз I—IV и выводом нулевой точки V. Несопряженные фазы обмотки, образующие двухполюсное поле, соединены с группой зажимов VI—XIII, предназначенных для подключения к устройству с гальванически несвязанными фазами.

При питании любой группы зажимов подразделенной обмотки с четным числом фаз неревверсивным током с чередующимся по фазам направлением обтекания катушек она образует еще одно поле — неподвижное однофазное с удвоенным числом полюсов по отношению к числу полюсов многофазного поля, образуемого посредством этой же группы зажимов. В частности, при питании зажимов I—IV обмотки однополярными импульсами таким образом, что напряжение одного знака подается только на нечетные

зажимы, а напряжение противоположного знака — только на четные зажимы в последовательности I, II—II, III—III, IV—IV, I—I, II и т. д., одновременно образуются два поля: вращающееся с полюсностью $2p_1=4$ и неподвижное с полюсностью $2p_0=8$.

Однонаправленное преобразование энергии в индукторной машине с числом пар полюсов поля якоря p_1 и поля индуктора p_0 обеспечивается при следующих значениях числа зубцов магнитопровода ротора:

$$z_p = p_0 \pm p_1 \quad (1)$$

(в нашем случае $z_p=2$ или $z_p=6$).

Можно показать, что в такой машине допустимо создать еще одно поле, которое имело бы вдвое больший период дискретных структур [9], чем число зубцов ротора z_p . Это достигается, например, путем установки на роторе постоянных магнитов. Число полюсов поля, образуемого магнитами, должно удовлетворять соотношению

$$2p_p = z_p. \quad (2)$$

Это поле не будет взаимодействовать с образованием отличного от нуля среднего за период электромагнитного момента ни с полем p_0 , ни с полем p_1 . Кроме того, и знакопеременные моменты от взаимодействия поля ротора с указанными полями имеют принципиально небольшое значение вследствие равенства нулю момента от взаимодействия первой гармоники поля p_p с первыми гармониками полей p_0 и p_1 .

Поле p_p взаимодействует с полем p_2 , в результате чего преобразуется энергия, подводимая или снимаемая через зажимы VI—XIII. При полюсности $2p_p=p_0-p_1$, определяемой в соответствии с (1) и (2), относительно зажимов VI—XIII получаем классическую синхронную машину со всеми свойственными ей характеристиками, так как в этом случае

$$2p_p = p_0 - p_1 = 4p_2 - 2p_2 = 2p_2.$$

Во втором случае, когда число зубцов ротора z_p выбирается в соответствии с другим вариантом формулы (1), электрохимическое преобразование энергии через зажимы VI—XIII осуществляется посредством высшей (третьей) гармоники поля полюсностью p_2 , как в машинах с электромагнитной редукцией скорости. В рассматриваемой машине обмоточный коэффициент подразделенной обмотки для третьей гармоники поля p_2 весьма высок, $k_{o62}=k_{y2}=0,924$.

Итак, для преобразования энергии как посредством поля полюсности p_1 , так и посредством поля полюсности p_2 , ротор синхронной машины с подразделенной обмоткой должен содержать зубчатый магнитопровод с числом зубцов, определяемым в соответствии с (1), и создавать собственное поле с

числом полюсов $2p_r$, равным числу зубцов магнитопровода z_p . Нетрудно представить, что изложенным требованиям удовлетворяет обычный $2p_r$ -полюсный ротор синхронной машины с высоким коэффициентом явнополюсности.

Из всех конструкций магнитоэлектрических роторов наибольшим коэффициентом явнополюсности, отношением значений проводимости по продольной и поперечной осям, обладают магнитные системы с коттеобразным магнитопроводом [10], а также специально сконструированные системы, в которых радиально намагниченные постоянные магниты расположены между зубцами магнитопровода индукторной машины [11]. Для увеличения коэффициента явнополюсности на одном валу с магнитоэлектрическим ротором может быть установлен чисто реактивный пакет, выполняющий одновременно и функции защиты постоянных магнитов от размагничивания при воздействии ударных токов короткого замыкания.

Рабочие характеристики машины с таким ротором показаны на рис. 3. Статические и предельные механические характеристики (рис. 3, а, б) получены при парной коммутации обмотки через зажимы I—IV с электрической нагрузкой, постоянно подключенной к зажимам VI—IX. Для сокращения числа выводов эта нагрузка выбрана несимметричной. Она представляет собой два конденсатора одинаковой емкости, соединенных с указанными зажимами. Выводы X—XIII не задействованы.

При испытаниях отмечены высокие демпфирующие свойства машины, обеспечивающие плавное движение ротора равномерными шагами. Они достигаются благодаря тормозному моменту, раз-

виваемому в результате взаимодействия поля ротора и полей фаз полюсности p_2 , замкнутых на электрическую нагрузку. Из тормозных характеристик (рис. 3, в) следует, что при скоростях вращения ротора, имеющих место в шаговом режиме, моменты от действия поля p_2 невелики. Они могут оказывать заметное влияние только в случае существенного возрастания мгновенной скорости по сравнению с синхронной.

В тормозном режиме машина обеспечивает эффективное ограничение скорости исполнительного органа, опускаемого под действием собственного веса, механически связанного с ротором через редуктор. Левая, «восходящая», часть тормозных характеристик по рис. 3, в является областью устойчивой работы привода в этом режиме. Она ограничена значением скорости, при котором емкостное сопротивление нагрузки уравнивает индуктивное сопротивление якоря по продольной оси.

Благодаря использованию постоянных магнитов для взаимодействия с полем меньшей полюсности достигаются близкие к оптимальным размеры в сечении магнитопровода статора как для индукторной машины, так и для магнитоэлектрической, поскольку сечение магнитоэлектрической машины целесообразно формировать менее «железным», чем электромагнитной.

Так как магнитоэлектрическая машина с подразделенной обмоткой является нетрадиционной конструкцией, следует коротко остановиться на особенностях ее расчета. Расчет рабочих характеристик такой машины проще всего выполнить, используя обычные уравнения для мощности, тока, момента, КПД и коэффициента мощности синхронной машины [3, 8]. Однако для такого расчета необходимо адекватно определить индуктивные параметры обмотки: индуктивности по продольной и поперечной осям, а также коэффициент взаимной индукции с полем ротора. Обычные аналитические и графоаналитические методы [10, 12] расчета магнитоэлектрических машин для этой цели мало подходят, так как предполагают симметрию машины по каждому ее полюсному делению или двойному полюсному делению.

Более общее решение можно получить, если определять искомые параметры методом проводимостей зубцовых контуров [13, 14]. Их можно определить из следующего матричного выражения:

$$L_B = F^T \cdot (\Lambda^{-1} + R)^{-1} \cdot F. \quad (3)$$

Здесь F — матрица преобразования токов ветвей к токам зубцовых контуров; Λ — матрица проводимостей само- и взаимоиндукции зубцовых контуров, R — матрица магнитных сопротивлений участков магнитной цепи магнитопроводов статора и ротора, содержащая только один ненулевой блок R_p , значимые элементы которого представ-

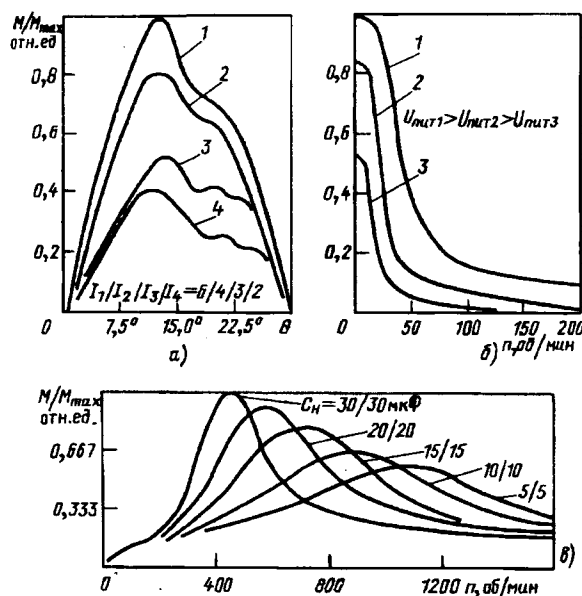


Рис. 3. Статические (а), предельные механические (б) и тормозные (в) характеристики индукторной машины с подразделенной обмоткой

ляют магнитные сопротивления магнитотвердых участков магнитной цепи ротора:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & | & 0 \\ \hline 0 & | & R_p \end{bmatrix}$$

(«т» — знак транспонирования; -1 — знак обращения).

При отсутствии насыщения эта система линейна, имеет однозначное решение относительно матрицы само- и взаимоиндуктивностей ветвей L_b и может быть решена без учета в рабочем алгоритме дополнительных условий преобразования токов ветвей к токам зубцовых контуров. В случае применения постоянных магнитов с нелинейной кривой размагничивания предполагается, что их работа стабилизирована прямой магнитного возврата на частном цикле перемагничивания магнита, предварительно определенной с учетом воздействия максимально возможного (ударного) тока короткого замыкания в машине.

После определения положения оси d (а потом оси q) ротора эта ось совмещается в расчетной модели с осью одной из фаз обмотки, после чего вычисляется матрица L_b . Один ее элемент, соответствующий ориентированной вдоль оси d (q) фазе, и есть искомый параметр L_d (L_q) машины. Элемент матрицы L_b , соответствующий взаимоиндуктивности вдоль оси d ротора, фазы, и фиктивного контура возбуждения, эквивалентирующего постоянные магниты, есть амплитуда коэффициента взаимной индукции фазы обмотки с полем постоянных магнитов. Критерием правильности расчетов, выполненных по (3), является равенство нулю коэффициента взаимной индукции в положении, при котором ось фазы совпадает с осью q ротора. Последующий расчет рабочих характеристик с применением найденных параметров идентичен расчету характеристик машины с электромагнитным возбуждением.

Достоинство изложенного подхода состоит в том, что формализованные матричные процедуры метода проводимостей зубцовых контуров одинаково применимы к расчетам как симметричных машин, так и несимметричных: с произвольным расположением и числом катушек каждой фазы, при любом числе, форме и положении на окружности ротора или статора постоянных магнитов. Поэтому расчеты по (3) особенно эффективны для машин нетрадиционных конструкций, с дробным числом пазов на полюс и фазу при больших значениях знаменателя дробности, а также при исследовании многофазных машин в однофазных и несимметричных режимах работы. Заинтересованным лицам автор готов предоставить действующие алгоритмы и компьютерные программы.

Выводы. 1. Подразделенные обмотки обеспе-

чивают переключение числа пар полюсов в соотношении 2:1 путем изменения направления обхода тока в половине ее секций.

2. Подразделенные обмотки могут быть получены путем укладки в одни и те же пазы двух одинаковых concentрических или петлевых обмоток машин переменного тока и объединения в определенной последовательности их катушечных групп в четыре ветви, соединенные в каждой фазе по мостовой схеме.

3. Основным преимуществом подразделенных обмоток является возможность сопряжения фаз как в звезду, так и в треугольник для любого из образуемых ими полей.

4. Подразделенные обмотки обеспечивают возможность преобразования энергии посредством как поля большей полюсности, так и поля меньшей полюсности без переключения катушек, что может использоваться в специальных машинах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Свечарник Д.В. Электрические машины непосредственного привода: Безредукторный электропривод. — М.: Энергоатомиздат, 1988.
2. Жерве Г.К. Обмотки электрических машин — Л.: Энергоатомиздат, 1989.
3. Костенко М.П., Пиотровский Л.М. Электрические машины Т. 1, Т. 2 — М.-Л.: Энергия. 1964; Л.: Энергия, 1973.
4. Лабзин М.Д. Судовые электроприводы с шаговыми электродвигателями. — Л.: Судостроение, 1970.
5. Истомин С.Д., Смирнов А.Ю., Шашкин С.Л. Исследование влияния схемы возбуждения на динамические характеристики герметичного шагового двигателя с реактивным ротором. — ЭП. Электрические машины, 1983, вып. 7 (149).
6. Смирнов А.Ю., Болнов В.А., Шашкин С.Л. Математическая модель экранированного шагового двигателя. — Электричество, 1985, № 11.
7. Смирнов А.Ю. Расчет электромагнитного момента экранированной индуктивной машины. — Электротехника, 1993, № 7.
8. Иванов-Смоленский А.В. Электромагнитные поля и процессы в электрических машинах и их физическое моделирование. — М.: Энергия, 1969.
9. Иванов-Смоленский А.В. Электрические машины: Учебник для вузов. — М.: Энергия, 1980.
10. Балагуров В.А., Галтеев Ф.Ф. Электрические генераторы с постоянными магнитами. — М.: Энергоатомиздат, 1988.
11. Смирнов А.Ю. Разработка и исследование экранированных шаговых двигателей. Автореф. канд. техн. наук. — М.: МЭИ, 1988.
12. Балагуров В.А., Галтеев Ф.Ф., Ларионов А.Н. Электрические машины с постоянными магнитами. — М.-Л.: Энергия, 1964.
13. Универсальный метод расчета электромагнитных процессов в электрических машинах / А.В. Иванов-Смоленский, Ю.В. Абрамкин, А.И. Власов, В.А. Кузнецов; Под ред. А.В. Иванова-Смоленского. — М.: Энергоатомиздат, 1986.
14. Смирнов А.Ю. Расчет электрических машин с магнитоэлектрическим индуктором методом проводимостей зубцовых контуров. — Электричество, 1989, № 12.

[12.09.94]

А в т о р : Смирнов Александр Юрьевич окончил электротехнический факультет Горьковского политехнического института (ныне Нижегородский государственный технический университет) в 1980 г. В 1989 г. защитил кандидатскую диссертацию по теме «Разработка и исследование экранированных шаговых двигателей» в Московском энергетическом институте. Ведущий инженер Опытного конструкторского бюро машиностроения (г. Нижний Новгород).

Униполярный генератор со стержневой обмоткой якоря для автономной системы электропитания

АЛИЕВСКИЙ Б.Л., БАЗАРНОВ Б.А., ВЕРБСКИЙ В.А., ЖАРКОВ В.Д., ЧУКАЕВ Н.Я.

Изложены итоги разработки и испытаний нового экспериментального униполярного генератора (УГ) постоянного тока для системы электропитания с повышенными требованиями к показателям качества электроэнергии в установившихся и динамических режимах. Указаны общие принципы конструирования подобных УГ. Подтверждена правильность исходных расчетно-теоретических предположений и конструкторских решений, положенных в основу экспериментально-проектной разработки УГ. Даны рекомендации по усовершенствованию генератора.

Ключевые слова: электропитание, качество электроэнергии, конструирование, эксперимент, униполярный генератор постоянного тока

Введение. Электрические униполярные машины (УМ), изобретенные М. Фарадеем, являются исторически первыми электродвигателем (1821 г.) и электромашинным генератором (1931 г.). В дальнейшем наряду с опережающим развитием разнотеннополюсных (биполярных) машин переменного и постоянного тока (МПТ) совершенствовались также УМ, их магнитные системы и токосъемные устройства [1]. Различные конструкции УМ с ферромагнитопроводом и щеточными или жидкометаллическими контактными устройствами якоря реализованы электротехнической промышленностью ряда стран при достаточно широком диапазоне мощностей и частот вращения для эксплуатации в длительных и кратковременных или ударных режимах работы [2–4]. К настоящему времени мощность униполярных генераторов (УГ) единичного исполнения длительного режима достигает 10 МВт при 3600 об/мин (фирма «Дженерал Электрик», США), что существенно превосходит предельную мощность для МПТ традиционной конструкции с щеточно-коллекторным коммутатором якоря при соответствующей частоте вращения.

Характерные параметры различных УМ — большой ток порядка 10^4 – 10^5 А в длительном режиме (или порядка 10^5 – 10^6 А при кратковременном отборе мощности) и относительно низкое напряжение до 10 – 10^2 В. Кривая напряжения якоря УГ не имеет коллекторных, вентильных, зубцовых и полюсных пульсаций, поэтому целесообразно применять УМ для генерирования постоянного тока в системах с повышенными требованиями к показателям качества электроэнергии [2]: как тахометрические генераторы в устройствах электромашинной автоматики [5]; как источники питания установок гальваностегии и др. В качестве главных и регулирующих (вольтодобавочных) генераторов УМ применяются для питания серий электролизеров алюминия или галогенов (хлора, фтора), которые потребляют ток порядка 10^5 А. Такие УГ созданы в

Results of elaboration and tests of a new experimental unipolar DC generator for a power supply system with higher requirements for electric power quality indexes under steady-state and dynamic regimes are considered. General construction principles of such generators are presented.

Key words: power supply, electrical power quality, unipolar DC generator, construction, experiment

США [1] и в России [6]. Униполярные двигатели и генераторы используются в системах Г–Д большой мощности для электродвижения морских судов и кораблей [7].

Наряду с УМ, которые выполнены с ферромагнитопроводом, изготовлены и испытаны УМ с индукторами из сверхпроводников, не имеющие сердечника (они могут быть снабжены стальными магнитоэстатическими экранами). Характерным примером сверхпроводниковой УМ служит тихоходный электродвигатель мощностью 2400 кВт английской фирмы IRD, который имеет коллекторный якорь со стержневой обмоткой для повышения напряжения, составляющего 430 В [8].

Отличительная особенность всех разновидностей УМ постоянного тока состоит в том, что их принципиально невозможно выполнить без подвижных контактов в цепи якоря. В различных конструкциях УМ находят применение щеточные (твердотельные) скользящие контакты и жидкометаллические токосъемные устройства [1]. Последние допускают повышенные окружные скорости и большие значения плотности тока, что существенно для высоконагруженных УМ. Общий недостаток УМ со сплошными якорями определяется низким уровнем напряжения.

Задачей данной работы явилось создание быстрогоходного УГ для автономной системы электроснабжения напряжением примерно 30 В с повышенными требованиями к показателям качества электроэнергии постоянного тока: низким уровнем пульсаций напряжения в установившемся режиме; узкими допустимыми пределами изменения напряжения якоря при варьировании статической нагрузки и при динамических процессах (это условие распространяется и на работу УГ без регулятора в цепи тока индуктора). Одним из требований автономной системы является возможность работы генератора в режиме параллельного самовозбуждения. Номинальные данные

УГ: мощность 15 кВт, напряжение 30 В, ток нагрузки 500 А, частота вращения 12000 об/мин.

Особенности конструкции экспериментального УГ. В автономной электроэнергетической системе для уменьшения удельной массы, приходящейся на единицу мощности, генератор должен иметь повышенную частоту вращения (в данном случае $12 \cdot 10^3$ об/мин), которая ограничена механическими параметрами ротора, подшипниковых узлов и токоъемных устройств (щеточно-контактного аппарата). Для снижения воздействия вариаций угловой скорости якоря на изменение его напряжения привод УГ выбран стабилизированным с допустимым отклонением не более 2—4 об/с при фиксированных уровнях постоянной частоты вращения, заданных дискретно в диапазоне от 100 до 200 об/с (6000—12000 об/мин), которым соответствуют значения напряжения генератора 15—30 В. Для привода генераторов автономных энергоустановок известны различные устройства автоматически регулируемых агрегатов привода постоянной угловой скорости: фрикционные, пневмо- или гидромеханические, электромеханические и др. При испытаниях использован электромеханический стенд.

На основании общих расчетно-теоретических исследований [1, 2] и ряда проектных разработок установлено, что рациональной компоновкой УГ является цилиндрическая конструкция с четырехполюсной схемой магнитопровода индуктора (рис. 1). Ее достоинство состоит в уменьшении числа пар подвижных контактов вследствие выполнения средних полюсов двоянными и соответствующего осевого удлинения активного участка якоря

(между разнополярными контактными кольцами), на котором наводится ЭДС. Недостаток этой компоновки — 50%-ное использование магнитного потока индуктора: наводимые под крайними полюсами ЭДС могут сниматься для повышения степени использования только при наличии на якоре дополнительных щеточно-контактных устройств.

Согласно теории и принципу действия УМ постоянного тока мгновенные бесконтактные обмотки якорей невыполнимы ни для генераторов, ни для двигателей униполярного типа [1, 2]. Для увеличения напряжения УГ необходимо посредством скользящих контактов включить последовательно несколько активных участков цепи якоря. Рациональный способ решения этой проблемы — применение разомкнутых стержневых обмоток, уложенных в пазы, которые профрезерованы или просверлены на периферии цилиндрического расширения массивного магнитопровода в средней части ротора диаметром 0,16 м (ее можно назвать бочкой ротора по аналогии с турбогенераторами). Наличие бочки ротора позволяет уменьшить МДС возбуждения вследствие увеличения площади активной поверхности якоря и снижения магнитной индукции в зазорах под средними полюсами. Электроизолированные от ротора стержни обмотки выведены на соответствующие пары электрически разнополярных контактных колец, укрепленных по обеим сторонам от роторного расширения (см. рис. 1). Каждая пара колец может соединяться с несколькими стержнями, образующими параллельные ветви обмотки. С помощью установленных на кольцах щеток и неподвижных токоотводов, размещенных на статоре,

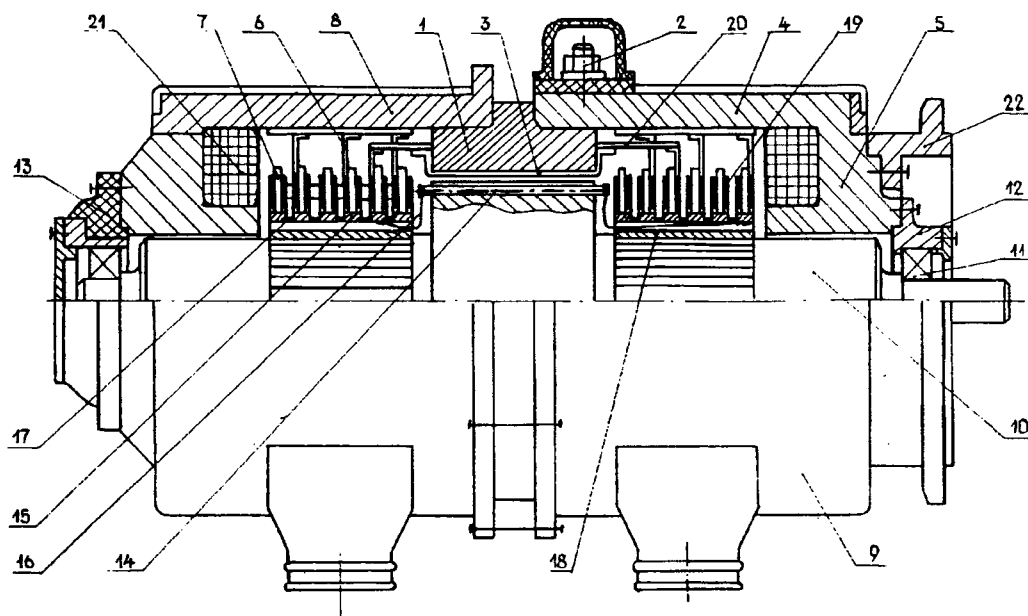


Рис. 1. Схема конструкции экспериментального УГ со стержневой обмоткой якоря; 1 — двоянные средние полюсы; 2 — вывод якоря (закрит транспортной крышкой); 3 — сектор компенсационной обмотки; 4 — ярмо; 5 — боковой полюс; 6 — планка щеткодержателя; 7 — щетка; 8 — магнитный стержень; 9 — кожух воздухопровода; 10 — ротор; 11 — подшипник; 12 — втулка подшипника; 13 — изоляционный корпус подшипника; 14 — стержень обмотки якоря; 15 — контактное кольцо; 16, 20 — соединительные шинки; 17 — изоляционное кольцо; 18 — коническая втулка; 19 — щеткодержатель; 21 — катушка индуктора; 22 — фланец

осуществляется последовательное включение пар контактных колец, напряжения этих пар суммируются. Известны также стержневые обмотки якоря, выведенные на пару коллекторов [8], но их нецелесообразно применять для УМ с ферромагнитопроводом.

Экспериментальный УГ выполнен с электромагнитным возбуждением. Массивный магнитопровод статора изготовлен из малоуглеродистой стали Ст 20880, ротор — из легированной стали марки 30ХГСА. Круглые катушки возбуждения с прямоугольными сечениями размещены в полых цилиндрических пазах индуктора. Каждая катушка содержит 140 витков сдвоенного медного провода марки ПНЭТП 1,32 × 3,15. Катушки включены электрически последовательно и магнитно встречно. Их магнитные потоки складываются в рабочем зазоре под сдвоенными средними полюсами генератора, проходят в осевом направлении по ротору, затем идут через зазоры под боковыми полюсами и замыкаются по этим полюсам и ярму статора. Вариант возбуждения УГ от постоянных магнитов рассмотрен ранее в [9].

Реакция якоря в УМ имеет поперечное направление, но ее проявление более существенно, чем в разноименнополюсных МПТ традиционного исполнения. Магнитный поток якоря УМ замыкается в окружном направлении по массивным участкам (сдвоенным средним полюсам и ярмам) статора, а также средней части ротора (при отсутствии на нем обмотки и двойном использовании материала якоря одновременно как магнито- и токопровода), не проходя радиально через рабочий зазор. Вследствие насыщения указанных участков магнитной цепи взаимно ортогональными потоками индуктора и якоря возникает продольно-размагничивающий эффект поперечной реакции якоря, который может вызывать заметное уменьшение ЭДС в УГ (или повышение частоты вращения униполярного электродвигателя). Поэтому в УМ целесообразно уменьшать МДС реакции якоря с помощью немагнитных зазоров, прокладок, расположенных в меридиональных плоскостях [1], или компенсировать ее посредством МДС обратных токоведущих шин либо стержневых обмоток, которые в общем случае могут быть размещены в пазах на сдвоенных полюсах статора или на поверхности его расточки.

В экспериментальном УГ компенсационная обмотка выполнена в виде цилиндрических секторов, которые приклеены к поверхности расточки сдвоенных полюсов. Секторы электрически изолированы от магнитопровода, они составляют полый тонкостенный цилиндр с шестью целевыми разрезами вдоль образующих (по числу пар контактных колец). Такая конструкция компенсационной системы позволяет избежать двухсторонней зубчатости в активном слое УМ и предотвратить возникновение продольной пульсации магнитного потока, которые могли бы привести к пульсациям напряжения и по-

явлению добавочных потерь мощности. Бифилярное включение стержней якоря и компенсационных шин обуславливает снижение индуктивности внутреннего участка цепи якоря и соответствующее уменьшение изменения его напряжения при динамических процессах УГ из-за ослабления реактивной ЭДС обмотки. Следует заметить, что индуктивность якоря в УМ существенно меньше, чем в МПТ традиционного типа.

Схема-развертка стержневой якорной и компенсационной обмоток экспериментального УГ — приведена на рис. 2. Обмотка якоря состоит из 18 медных изолированных стержней диаметром 5 мм, которые равномерно распределены вдоль окружности якоря по одному в круглых закрытых пазах. Возможно фрезерование узких шлицевых раскрытий пазов. Роль неподвижных токоотводов, соединяющих посредством щеток пары колец в последовательную цепь, выполняют компенсационные секторы из медной фольги толщиной 0,5 мм.

Контактные кольца имеют наружный диаметр 116 мм. Изготовлены они из хромовой бронзы БрХ. Кольца укреплены на втулке с помощью клиньев, равномерно распределенных по внешней конической поверхности втулки и ориентированных вдоль ее образующих. При запрессовке втулки получающие огранку кольца удерживаются клиновым распором. От колец клинья изолированы тонкими слоями слюды. В промежутках между клиньями проходят в осевом направлении соединенные с кольцами проводники (шинки), которые припаиваются к стержням обмотки якоря после напрессовки узлов контактных колец на ротор по внутренней поверхности втулки (перед этой операцией контакт-

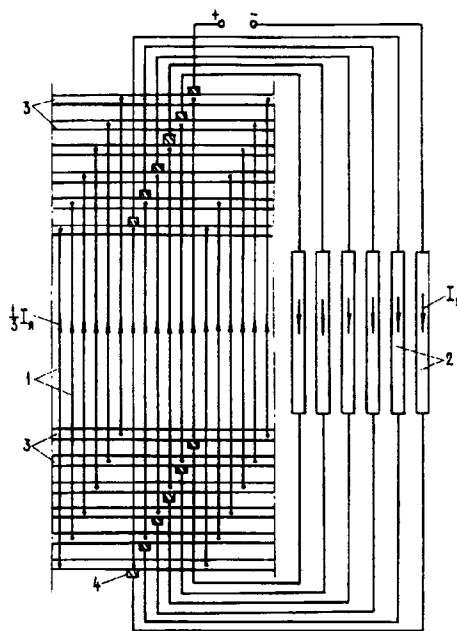


Рис. 2. Схема-развертка обмотки якоря и компенсационной обмотки: 1 — стержни якоря; 2 — компенсационные секторы; 3 — контактные кольца; 4 — группы щеток

ные кольца подвергают проточке). Клинья и втулка выполняются из магнитной стали 0ХНЗМ для увеличения площади поперечного сечения наиболее узких (в буквальном и переносном смысле) участков магнитной цепи УМ — частей ротора, охваченных контактными кольцами.

Магнитный поток, пронизывающий окружности колец, определяет ЭДС якоря УМ. На каждом кольце установлено по 12 щеток марки МГ сечением $8 \text{ мм} \times 16 \text{ мм}$. Щетки ориентированы длинной стороной сечения вдоль окружности кольца, что позволяет сократить осевой размер ротора. Нажатие на щетки ($0,03 \text{ МПа}$) осуществляется спиральными пружинами. Щеткодержатели радиального типа имеют кольцевую конструкцию. Они отделены один от другого электроизоляционными перегородками (шайбами) и стянуты шпильками, которые прикрепляют узлы щеткодержателей к статору. Токосводящие канатики щеточной группы каждого кольца контактируют с соответствующим щеткодержателем, который прямоугольным проводом соединен с сектором компенсационной обмотки согласно схеме рис. 2. Выводы цепи якоря УГ подключены к одному из щеткодержателей и к концу одного из секторов (рис. 2).

Статор УГ выполнен составным для облегчения разборки машины и обеспечения доступа к токосъемным узлам, например для замены щеток. По обеим сторонам сдвоенных средних полюсов закреплены силовые несущие элементы корпуса — ярма с боковыми полюсами (см. рис. 1). Ярм имеют по шесть сквозных пазов, ориентированных вдоль образующих цилиндра. В пазы ярм вставляются магнитные стержневые секторы, которые с торцевых сторон корпуса замкнуты кольцевой перемычкой. Перемычка вместе с шестью стержнями представляет отдельную часть магнитопровода, которая может выдвигаться в осевом направлении при разборке [10].

Подшипниковые опоры ротора выполнены на базе шарикоподшипников легкой серии типа 208 с консистентной смазкой. Особенность конструкции опор ротора УГ состоит в том, что один из подшипников (задний) установлен в корпусе из электроизоляционного материала АГ-4 для предотвращения подшипниковых токов при возможной несимметрии магнитной цепи относительно средней плоскости, ортогональной к оси вращения. В магнитопроводе ротора под разноименными полюсами наводятся встречно направленные ЭДС, которые в общем случае не сбалансированы и могут обусловить замыкание уравнительного тока через массив ротора и подшипники, если не принять мер для разрыва его внутренней цепи.

Щеточно-контактные узлы экспериментально УГ охлаждаются продувом. Воздух от внешнего напорного устройства подводится под давлением $5 \cdot 10^3 \text{ Па}$ к входным патрубкам тонкостенных кожухов, поступает по внутреннюю полость ма-

шины через нижние щели в ярмах, проходит в диаметральной направлении, огибая токосъемные кольца якоря, и выбрасывается наружу сквозь верхние щели ярм и кожухов.

Экспериментальный УГ имеет фланцевое соединение с проводом. Для уменьшения нагрузки на узел крепления и снижения уровня вибраций УГ в средней части статора под сдвоенными полюсами опирается на подставку домкратного типа. Узлы магнитных стержневых секторов и кожухов воздухопровода не являются несущими силовыми элементами, поэтому их демонтаж и последующая установка, выполняемые при замене щеток, не нарушают балансировку ротора.

Результаты экспериментального исследования. Цель проведения экспериментов состояла в проверке главных теоретических предпосылок и апробировании основных расчетно-методических рекомендаций и конструкторских решений, на базе которых выполнена проектная разработка. Исследовались: статические характеристики УГ при независимом и зависимом (параллельном) возбуждении; динамические процессы самовозбуждения, включения и выключения нагрузки; пульсации напряжения якоря; тепловое состояние обмотки индуктора, щеток и подшипниковых опор, уровень вибраций корпуса. Предварительно измерялось сопротивление электроизоляции цепей индуктора и якоря от корпуса, которое составило $0,6 \text{ МОм}$, производилась обкатка УГ и притирка щеток к контактными кольцам. Контрольный разгон ротора был осуществлен в испытательном технологическом приспособлении до повышенной частоты вращения $15 \cdot 10^3 \text{ об/мин}$, которая поддерживалась в течение 5 мин при температуре среды 473 К (200°C). Установлен достаточный запас прочности ротора (при $n = 250 \text{ об/с}$ окружная скорость составила 126 м/с на периферии бочки ротора и 91 м/с на поверхности контактных колец). Уровень вибраций ротора составил $0,3g$, что свидетельствует о его хорошей динамической балансировке. При испытаниях УГ учитывались рекомендации [11, 12].

Для статических характеристик (рис. 3) при $n = (10 \div 12) \cdot 10^3 \text{ об/мин}$ и $I_{\text{я}} > I_{\text{я.ном}} = 500 \text{ А}$ опытные данные получены в режимах кратковременных испытаний, чтобы исключить влияние интенсивного нагрева якоря и щеточно-контактных узлов из-за несовершенства упрощенной схемы охлаждения, принятой для экспериментальной разработки УГ. В частности, при холостом ходе полностью возбужденного УГ для $n \geq 10000 \text{ об/мин}$ из-за значительных тепловыделений, обусловленных потерями трения, измеренная встроенными термомпарами температура щеток превышала 400 К , подшипников — 380 К (с учетом теплопритока от катушек индуктора).

Вибрации корпуса определялись с помощью виброизмерительного комплекса. Максимальный уровень вибраций на роторной составляющей ча-

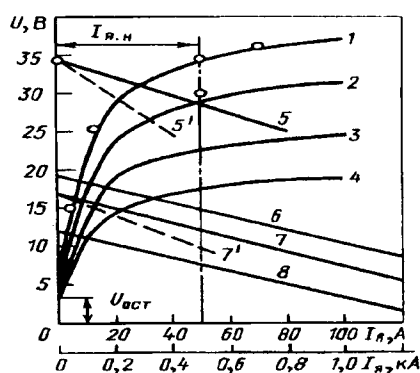


Рис. 3. Экспериментальные статические характеристики УГ при независимом возбуждении (сплошные линии) и параллельном самовозбуждении (прерывистые): холостого хода $U=U(I_B)$ при $I_B=0$ (1 — 12000 об/мин; 2 — 10000 об/мин; 3 — 8000 об/мин; 4 — 6000 об/мин) и внешние $U=U(I_B)$ при $n=12000$ об/мин, $I_B=50$ А (5); $n=6000$ об/мин (6 — $I_B=70$ А; 7 — $I_B=40$ А; 8 — $I_B=14,5$ А); для характеристик 5', 7' сопротивление цепи возбуждения $R_B=\text{const}$, расчетные точки характеристик 1 и 5 отмечены кружками (I_B — ток возбуждения)

стоты имел место в узле стыковки УГ с агрегатом привода и достигал приблизительно 6g при $n=12 \cdot 10^3$ об/мин (собственные вибрации привода были незначительны). Вибрациями щеток и их заклиниванием в щеткодержателях из-за нагрева и «распухания» обуславливаются высокочастотные пульсации напряжения якоря. Экспериментально установлено, что амплитуда напряжения пульсаций может превышать 10 В при $n > 10000$ об/мин; пульсации незначительны при уровне $n \leq 9000$ об/мин, их напряжение менее 0,3–0,8 В.

Динамические процессы экспериментального УГ изучались при его параллельном возбуждении. Характерные примеры осциллографических зависимостей изменения напряжения якоря в функции времени при холостом ходе и при коммутациях сопротивления нагрузки $R_{\text{наг}}=0,036$ Ом представлены на рис. 4.

Анализ достаточно большого объема информации осциллографических исследований позволил: апробировать критерии [2] самовозбуждения и устойчивости последующего установившегося режима генератора (см., например, участки А на рис. 4, а и б); оценить электромагнитное быстродействие собственно цепи якоря компенсированного УГ, для которой постоянная времени составляет $\tau_{\text{я}} \approx 10^{-5}$ с (см., например, участки Б, В на рис. 4, б); определить эквивалентную постоянную времени продольных демпферов $\tau_{\text{э,дл}} \approx 0,5$ –0,8 с, учитывающую эффект замедления изменений магнитного потока возбуждения Φ_B под влиянием вихревых токов в короткозамкнутых контурах массива магнитопровода, компенсационных секторов, контактных колец и других элементов, пронизываемых Φ_B (см., например, участки Г на рис. 4, а и б). Порядок значения $\tau_{\text{я}}$ проверялся расчетом индуктивности и изменением сопротивления цепи якоря.

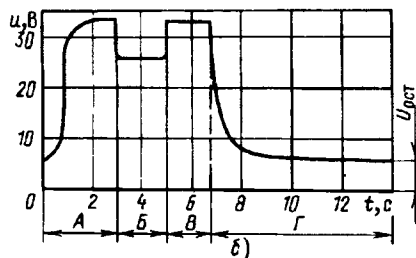
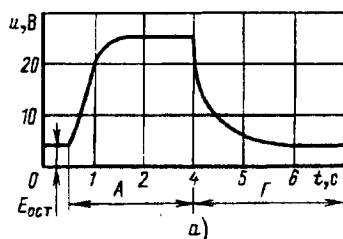


Рис. 4. Результаты обработки осциллограмм напряжения УГ: а — при холостом ходе ($n=9000$ об/мин); б — при наличии внешнего сопротивления $R_{\text{наг}}=0,036$ Ом в цепи якоря ($n=12000$ об/мин); участки А — самовозбуждение при подключении параллельной обмотки индуктора; Б, В — включение (наброс) и выключение (сброс) нагрузки (сопротивлению $R_{\text{наг}}$ соответствует установившийся ток якоря $I_{\text{я.ном}} \approx 1,5 I_{\text{я.ном}} = 730$ А); Г — развозбуждение при отключении обмотки индуктора ($E_{\text{ост}}$, $U_{\text{ост}}$ — значения ЭДС и напряжения обмотки якоря, обусловленные остаточным намагничиванием сердечника УГ)

Испытания УГ показали, что при статических и динамических процессах варьирования нагрузки в широких пределах (от номинальной до холостого хода или до 1,5-кратной перегрузки) изменения напряжения якоря могут оставаться в допустимом диапазоне, если обеспечен необходимый температурный режим наиболее теплонапряженных частей УГ — щеточно-контактных узлов и обмотки возбуждения. В экспериментальном УГ определенная по методу измерения сопротивления средняя температура катушек индуктора достигала приблизительно 430 К. Указанное условие можно выполнить только интенсивными способами теплоотвода, модернизируя систему охлаждения.

В номинальном режиме КПД экспериментального УГ составил $\eta \approx 0,8$, начальный момент трения — приблизительно $M_{\text{то}} \approx 55$ Н·м (по мере разгона и увеличения нагрузки якоря $M_{\text{т}}$ снижается); масса УГ равна 117 кг.

Рекомендации. Итоги создания экспериментального УГ позволяют считать апробированными концептуальные положения разработки генераторов аналогичного типа. На основе анализа данных проведенного исследования можно рекомендовать дальнейшее усовершенствование высоконагруженных контактных узлов. В этом плане проводились испытания УГ с использованием щеток марки МГСО, а также макета токосъемного устройства, с металловолоконистыми щетками. Их применение может обусловить некоторое улучшение параметров в отдельных режимах УГ. Однако в целом выявлена необходимость проведения новых работ, направленных на подбор контактных пар

«щетка—кольцо», обеспечивающих пониженную мощность потерь при окружных скоростях колец $v_k = 100$ м/с и плотностях тока щеток более $J_{щ} = 0,4$ МА/м². Целесообразна оптимизация щеточно-контактных узлов на минимум суммарных электрических и механических потерь $P_{э.м}$ посредством выбора рациональных размеров, удельных нажатий $p_{щ}$ и количества щеток на кольцо. Расчетное исследование, в частности, показывает, что при степенной функциональной аппроксимаций ВАХ переходного падения напряжения $u_{щ} = QJ_{щ}^q$ и линейной аппроксимации для коэффициента трения $c_T = a - bJ_{щ}$ оптимизированное значение плотности тока щеток составляет

$$J_{щ.о} = {}^{1+q}\sqrt{ap_{щ}v_k/qQ},$$

где a, b, q, Q — постоянные; например, для щеток МГСО (в среднем при их анодной и катодной поляризациях)

$$a = 0,2; \quad b = 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{А}; \quad q = 0,65; \\ Q = 8,45 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{1,3} \cdot \text{В}/\text{А}^{0,65}.$$

Зависимость $P_{э.м} = f(J_{щ})$ обычно имеет пологий экстремум, что позволяет на практике отступать от расчетного значения $J_{щ.о}$ вследствие дискретности стандартных размеров поперечного сечения щеток, а также по конструктивно-технологическим соображениям. Экспериментальное изучение основных факторов, влияющих на работу различных марок щеток, проводилось также на макете контактного устройства; установлена высокая эффективность таких исследований при применении методов планирования эксперимента.

В качестве общих направлений модернизации конструкции экспериментального УГ следует рекомендовать: переход к интенсивному каналному жидкостному охлаждению токосъемных узлов (щеткодержателей), катушек индуктора, корпусов подшипников; усовершенствование компоновки контактных устройств и магнитопровода для обеспечения замены щеток в эксплуатации без разборки узла присоединения УГ к агрегату привода.

В разработке экспериментального генератора, подготовке и проведении его испытаний участвовали также И.М. Глазунов, Н.П. Кошелева, А.С. Якушев, которым авторы приносят искреннюю благодарность.

Выводы. 1. Проведенные исследования экспериментального УГ подтверждают возможность создания (с учетом указанных выше рекомендаций) генераторов униполярного типа мощностью 10—100 кВт при напряжении 6—30 В и целесообразность их применения для питания электропотребителей постоянного тока наряду с химическими аккумуляторными батареями.

2. Показано соответствие разработанной конструктивной схемы компенсированного УГ со стержневой обмоткой якоря повышенным требованиям к качеству электрической энергии по-

стоянного тока автономной системы электропитания в статических и динамических режимах.

3. При подсоединении обмотки индуктора параллельно к якору достигнуто надежное самовозбуждение экспериментального УГ при холостом ходе и под нагрузкой; установлено высокое быстродействие компенсированного УГ при переходных процессах в цепи якоря, имеющего стержневую обмотку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бертинов А.И., Алиевский Б.Л., Троицкий С.Р. Униполярные электрические машины. — М.-Л.: Энергия, 1966.
2. Специальные электрические машины. — Кн. 2 / А.И. Бертинов, Д.А. Бут, С.Р. Мирюзин и др. Под ред. Б.Л. Алиевского. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Энергоатомиздат, 1993.
3. Накопители энергии / Д.А. Бут, Б.Л. Алиевский, С.Р. Мизюрин, П.В. Васюкевич. Под ред. Д.А. Бута. — М.: Энергоатомиздат, 1991.
4. Ударные униполярные генераторы / В.А. Глухих, Г.А. Баранов, Б.Г. Карасев, В.В. Харитонов. — Л.: Энергоатомиздат, 1987.
5. Встроенный униполярный тахогенератор с возбуждением от постоянного магнита / Б.Л. Алиевский, А.Е. Кенжибаев, В.Я. Таубес, С.К. Чирков. — Электротехника, 1986, № 7.
6. Работы по созданию униполярных электрических генераторов с жидкометаллическим токосъемом / Ю.П. Глазков, Ф.Р. Кореневит, С.С. Кутателадзе, Г.Н. Перельштейн. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1985, № 4.
7. Косыкин Ю.П., Гилеревич Ю.М., Смирнова Н.Н. Электрические машины и устройства большой мощности с водяным охлаждением для судовых систем электродвижения. — Судостроение за рубежом, 1983, № 8 (20).
8. Анализ униполярного двигателя IRD со сверхпроводящим индуктором / Б.Л. Алиевский, А.И. Бертинов, В.К. Исаев и др. — Электричество, 1975, № 10.
9. Алиевский Б.Л. Особенности проектирования униполярных электрических машин с возбуждением от постоянных магнитов. — Электричество, 1987, № 5.
10. А.с. 1145419 (СССР). МКИ Н02К 31/00. Униполярная машина / Б.Л. Алиевский, Б.А. Базарнов, В.А. Вербский, В.Д. Жарков и др.
11. Жерве Г.К. Промышленные испытания электрических машин. — Л.: Энергоатомиздат, 1984.
12. Гольдберг О.Д. Испытания электрических машин. — М.: Высшая школа, 1990.

[11.03.94]

Авторы: Алиевский Борис Львович окончил в 1956 г. электромеханический факультет Московского энергетического института (МЭИ). Докторскую диссертацию по электрическим машинам защитил в 1989 г. в Московском авиационном институте (МАИ). Профессор кафедры электроэнергетических и электромеханических систем МАИ.

Базарнов Борис Александрович окончил в 1965 г. факультет систем управления МАИ. Кандидатскую диссертацию по электрическим машинам защитил в 1982 г. в МАИ. Старший научный сотрудник кафедры электроэнергетических и электромеханических систем МАИ.

Вербский Владимир Александрович окончил в 1953 г. электромеханический факультет МЭИ. Инженер АО «Аэроэлектрик».

Жарков Владимир Дмитриевич окончил в 1949 г. электромеханический факультет МЭИ. Член-корреспондент Академии электротехнических наук, главный конструктор АО «Аэроэлектрик».

Чукаева Нина Яковлевна окончила в 1956 г. энергетический факультет Всесоюзного заочного политехнического института. Инженер АО «Аэроэлектрик».

Синтез стандартных настроек для следящих электроприводов по назначенным переходным характеристикам

ЛИХОМАНОВ А.М., КУЦАНОВ Л.А.

Рассмотрен синтез стандартных настроек для следящих электроприводов применительно к П- и ПИ-регуляторам на основе искусственной периодизации переходных характеристик с треугольным изменением скорости. Синтезированные настройки по своим фильтрующим свойствам не уступают настройкам Баттерворта 3—4-го порядков, имеют достаточно линейную фазо-частотную характеристику и более высокие динамические показатели на отработку ступенчатого входного воздействия.

Ключевые слова: следящий электропривод, характеристики, П- и ПИ-регуляторы, расчет

При проектировании следящих электроприводов в рамках традиционных структур модально-подчиненного управления используются стандартные настройки. Наибольшее распространение получили полиномиальные настройки Баттерворта (ВТ) [1], достаточно хорошо аппроксимирующие амплитудно-частотную характеристику идеального П-образного фильтра нижних частот, что обеспечивает необходимый уровень защиты от высокочастотных помех, и имеющие для уравнений 3—4-го порядков приемлемые динамические показатели при отработке ступенчатого воздействия [2], а также более низкую чувствительность к параметрическим возмущениям по сравнению с настройками Чебышева и Лежандра [3].

Однако данные настройки имеют в полосе пропускания нелинейную фазо-частотную характеристику, что приводит к искажению входных задающих воздействий, а также значительное перерегулирование при отработке ступенчатого воздействия для уравнений 5—8-го порядков [4], каковыми описываются следящие приводы с упругостью в кинематической цепи. В случае использования ПИ- или ПИД-регуляторов в контуре положения при отработке ступенчатого воздействия для устранения неприемлемых значений перерегулирования возникает необходимость установки задатчика интенсивности на входе контура положения [5], который просто реализуется лишь при задании входного сигнала в цифровом коде [6], или использовании настроек с биномиальным распределением полюсов, которые обладают низкими селективными свойствами [7]. Поэтому синтез стандартных настроек, лишенных указанных недостатков, представляет несомненный практический интерес.

Поставленная проблема связана с решением следующей аппроксимационной задачи.

The paper considers synthesis of standard equations for P- and PI-regulators based on artificial division of transitional characteristics into periods with triangular speed change. The synthesized equations do not cede by their filtering characteristics to Butterworth's equation of 3rd and 4th orders and have sufficiently linear phase-frequency characteristic and higher dynamic indexes of processing of step input action.

Key words: electrical servodrive, characteristics, P- and PI-regulators, calculation

Пусть на множестве $E(0-T_1)$ задана переходная функция $h^*(t)$. Необходимо синтезировать передаточную функцию $W(s, X)$ из условия

$$\int_E \left\{ h^*(t) - L^{-1} \left[\frac{W(s, X)}{s} \right] \right\}^2 dt \leq \delta, \quad t \in E \quad (1)$$

при выполнении

$$W(s, X) \in G,$$

где G — множество физически реализуемых $W(s, X)$; δ — заданное значение погрешности; X — вектор варьируемых параметров, которые являются коэффициентами дифференциального уравнения

$$A(p)h(t) = B(p)1(t); \quad p = \frac{d}{dt}; \quad a_0 = 1;$$

$$A(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^{n-i}; \quad B(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^{m-i}, \quad m \leq n. \quad (2)$$

Для решения сформулированной задачи используем метод гармонического синтеза [8]. Для этой цели $1(t)$ и $h^*(t)$ подвергаются искусственной периодизации [9—11] в соответствии с правилом (рис. 1):

$$\begin{aligned} Z_1(t) &= 1(t); \quad Z_2(t) = h^*(t) \quad \text{при } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}; \\ Z_1(t) &= 0; \quad Z_2(t) = h^* \left(\frac{T}{2} \right) - h^* \left(t - \frac{T}{2} \right) \quad \text{при } \frac{T}{2} < t \leq T \end{aligned} \quad (3)$$

и соответствующие периодические движения $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ аппроксимируются тригонометрическими рядами Фурье:

$$\left. \begin{aligned} Z_1(t) &= D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin k\omega t; \quad D_0 = 0,5, \quad D_k = \frac{2}{\pi k}; \\ Z_2(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega t; \\ \omega &= \frac{2\pi}{T}, \quad T = mT_y; \quad k = 2e + 1; \quad e = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

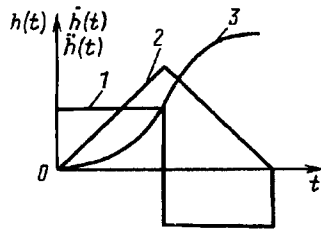


Рис. 1. Искусственная периодизация $h^*(t)$ и $1(t)$

где t_y — время управления.

В соответствии с [9–11] для нахождения вектора X необходимо решить систему алгебраических уравнений:

$$\frac{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}}{D_k} = |W(j\omega k)|; \operatorname{arctg} \frac{A_k}{B_k} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} W(j\omega k)}{\operatorname{Re} W(j\omega k)}, \quad (5)$$

порядок которой определяется числом оптимизируемых коэффициентов в уравнении (1), а $W(j\omega k)$ — частотная передаточная функция. Решая систему (5), может быть построено многообразие уравнений (2), определяемое размерностью вектора X , реализующих заданный выход $h^*(t)$. При этом в качестве условий доопределения выступает точность воспроизведения $h^*(t)$, т.е. число гармоник, учитываемых в синтезе, а в качестве условия решаемости задачи — условие устойчивости получаемого дифференциального уравнения (2). Значение отношения периода искусственной периодизации T к времени t_y определяет быстроту сходимости (4) к $h^*(t)$, т.е. при заданном порядке дифференциального уравнения значение погрешности аппроксимации на множестве $0-T_1$, а также время t_y и частотные характеристики синтезируемых настроек. Выбор m достаточно прозрачен. Очевидно, что наибольшая сходимость ряда (4) к $h^*(t)$, а следовательно и наименьшее значение δ при заданном порядке уравнения (2), будет при $m=2$. Однако в данном случае не контролируется процесс при $t > t_y$. Поэтому в практическом плане при решении задач аппроксимации рекомендуется выбирать m равным $3 \div 4$ [9–11].

Ряд (4), построенный в соответствии с (3), обладает быстрой сходимостью, поэтому приемлемое значение δ может быть получено для монотонных процессов при использовании ограниченного числа членов ряда (4). В качестве $h^*(t)$ рассмотрим переходную функцию с треугольным изменением скорости выходной координаты рис. 2. В данном случае в соответствии с формулами Эйлера

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{2m^2 S}{(\pi k)^3} \left(-2 \sin \frac{\pi k}{m} + \sin \frac{2\pi k}{m} \right); \\ B_k &= \frac{2m^2 S}{(\pi k)^3} \left(-1 + 2 \cos \frac{\pi k}{m} - \cos \frac{2\pi k}{m} \right); \quad t_y = \sqrt{\frac{4S}{a}}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

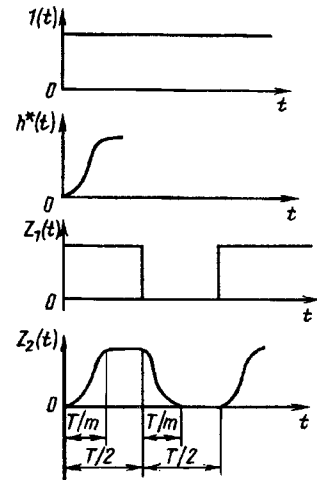


Рис. 2. Переходная функция с треугольным изменением скорости выходной координаты: 1 — ускорение выходной координаты; 2 — скорость выходной координаты; 3 — выходная координата

где S — значение единичного ступенчатого воздействия; a — ускорение выходной координаты при разгоне и торможении привода. При синтезе уравнения (2) применительно к следящим электроприводам следует рассмотреть:

П-регулятор: $B(p) = b_m$; $b_m = a_n$;

ПИ-регулятор: $B(p) = b_{m-1}p + b_m$; $b_{m-1} = a_{n-1}$; $b_m = a_n$;

ПИД-регулятор: $B(p) = b_{m-2}p^2 + b_{m-1}p + b_m$; $b_{m-1} = a_{n-1}$; $b_m = a_n$.

В практическом плане для синтеза $\vec{X}$ поступаем следующим образом. В уравнение (2) подставляем $Z_1(t)$, $Z_2(t)$ в форме (4) и, сравнивая полиномы при одинаковых функциях времени, получаем систему алгебраических уравнений [10, 11]:

$$[A][Y] = [B],$$

порядок которой определяется размерностью вектора X .

Так для $n=2, 3, 4$:

$$[Y]^T = [a_1 \ a_2]; \quad [Y]^T = [a_1 \ a_2 \ a_3]; \quad [Y]^T = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4];$$

$$[B]^T = [A_1 \omega^2, B_1 \omega^2]; \quad [B]^T = [B_1 \omega^3, -A_1 \omega^3, 3^3 \omega^3 B_3];$$

$$[B]^T = [-A_1 \omega^4, -B_1 \omega^4, -A_3 3^4 \omega^4, -B_3 3^4 \omega^4].$$

Матрица A для П-регулятора:

$$[A] = \begin{bmatrix} B_1 \omega & A_1 \\ -A_1 \omega & B_1 - D_1 \end{bmatrix};$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -A_1 \omega^2 & B_1 \omega & A_1 \\ -B_1 \omega^2 & -A_1 \omega & B_1 - D_1 \\ -A_3 3^2 \omega^2 & 3\omega B_3 & A_3 \end{bmatrix};$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -B_1 \omega^3 & -\omega^2 A_1 & \omega B_1 & A_1 \\ A_1 \omega^3 & -\omega^2 B_1 & -\omega A_1 & B_1 - D_1 \\ -3\omega^3 B_3 & -3\omega^2 A_3 & 3\omega B_3 & A_3 \\ 3\omega^3 A_3 & -3\omega^2 B_3 & -3\omega A_3 & B_3 - D_3 \end{bmatrix}.$$

При использовании ПИ-регулятора в случае учета электромагнитной постоянной времени $n=4$. В данном случае изменяются только элементы a_{31} и a_{33} :

$$a_{31} = (B_1 - D_1) \omega, \quad a_{33} = 3\omega (B_3 - D_3).$$

Коэффициенты, рассчитанные в соответствии с (6), для различных m применительно к П- и ПИ-регуляторам представлены в табл. 1. Значение перерегулирования $\sigma\%$, максимальное значение добротности полюса Q_m , максимальное отклонение фазо-частотной характеристики от линейной Δb (град), время переходного процесса с учетом 5%-ной трубки точности t_{nn}/T_q , максимальное значение колебательности μ , максимальное ускорения привода при отработке ступенчатого единичного воздействия a_m/ω^2 и частоты среза ω_q , определяемой из выражения

$$20 \lg |W(j\omega)| = -3 \text{ дБ},$$

для уравнений 3- и 4-го порядков применительно к П- и ПИ-регуляторам приведены соответственно в табл. 2. Из рис. 3 видно, что при $m=2,5 \div 3$ синтезированные настройки по своим фильтрующим свойствам не уступают настройкам Баттерворта 3—4-го порядков. Фазо-частотные характеристики в диапазоне частот $(1-1,2)\omega/\omega_q$ достаточно точно аппроксимируются линейной зависимостью

$$\varphi(\omega) = \frac{180^\circ}{m} \omega.$$

Максимальное отклонение фазо-частотной характеристики от линейной Δb (табл. 2) значительно меньше по сравнению с настройками Баттерворта. Из табл. 2 следует, что синтезированные настройки по сравнению с настройками Баттер-

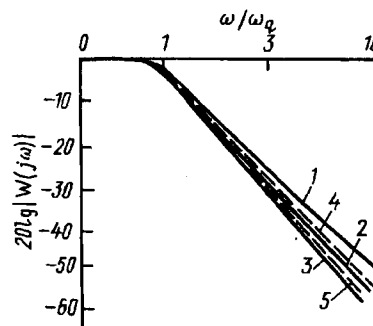


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики: П-регулятор: 1 — $m=4$; 2 — $m=3$; 3 — $m=2,5$; ПИ-регулятор: 4 — $m=4$; 5 — $m=3$

ворта обладают более высокими динамическими показателями на отработку единичного ступенчатого воздействия. Известно, что чувствительность настроек к параметрическим возмущениям косвенно может оцениваться максимальной добротностью одного из корней характеристического уравнения [3]. Из табл. 2 видно, что при $m \geq 3$ синтезированные настройки имеют меньшее значение Q_m по сравнению с настройками Баттерворта. Для оценки погрешности аппроксимации и инерционных нагрузок, испытываемых конструкцией привода, рассмотрим переходные процессы при отработке ступенчатого единичного воздействия для времени $t_y = 1,57$ с. Из рис. 4 видно, синтезированные уравнения 3- и 4-го порядков достаточно точно аппроксимируют заданную $h^*(t)$, а максимальное ускорение, развиваемое исполнительным элементом, в зависимости от m на 30÷40% меньше по сравнению с настройкой Баттерворта. При этом максимальное ускорение превышает расчетное

$$a = \frac{4S}{t_y^2} = 1,63 \text{ рад/с}^2$$

на стадии разгона в зависимости от m и типа регулятора примерно на 50÷70%, а на стадии торможения практически не превышает. Попытка синтеза уравнений в соответствии с (6) более высокого порядка, т.е. уравнений, описывающих

Таблица 1

Значение m	Значение коэффициентов, рассчитанных по формулам (6)												
	П-регулятор									ПИ-регулятор			
	$n=2$		$n=3$			$n=4$				$n=4$			
	$a_1 \omega$	$a_2 \omega^2$	$a_1 \omega$	$a_2 \omega^2$	$a_3 \omega^3$	$a_1 \omega$	$a_2 \omega^2$	$a_3 \omega^3$	$a_4 \omega^4$	$a_1 \omega$	$a_2 \omega^2$	$a_3 \omega^3$	$a_4 \omega^4$
2,5	1,68	1,547	2,31	4,866	3,558	10,17	29,38	57,88	43,92	2,032	6,048	4,253	0,6613
3	2,11	2,216	3,81	9,014	8,441	14,31	55,51	129,0	120,0	3,233	9,237	8,397	0,5863
4	2,91	3,92	6,59	20,17	25,81	21,8	124,8	382,1	485,0	5,29	17,68	22,83	0,5258
5	3,71	6,11	10,9	41,45	66,62	28,8	214,0	818,9	1301,0	7,092	28,51	45,17	0,4964

Значение <i>m</i>	Значение параметра									
	ω/ω_q	a_m/ω^2		σ	t_{nn}/T_q	Δb	Q_m		μ	
		<i>n</i> =3	<i>n</i> =4				<i>n</i> =3	<i>n</i> =4	<i>n</i> =3	<i>n</i> =4
ПИ-регулятор										
2,5	1,85	0,76	1,06	3—4	0,621	2—3	1,44	1,18	2,7	2,18
3	2,05	1,3	1,51	1—2	0,576	1—2	0,99	1,02	1,79	1,68
4	2,6	2,5	2,9	0,5—1	0,54	1—2	0,785	0,85	1,23	1,38
5	2,7	4,1	4,45	0,5—1	0,474	1—2	0,65	0,805	0,845	1,26
ПИ-регулятор										
2,5	2,15	—	0,905	10—11	2,3	4—5	—	1,85	—	3,56
3	2,2	—	1,43	3—4	0,63	3—4	—	1,2	—	2,38
4	2,75	—	2,45	2—3	0,59	2—3	—	0,99	—	1,74
5	3,15	—	3,93	1—2	0,55	1—1,5	—	0,92	—	1,56
БТ	—	—	—	8,1	0,93	4,9	—	1,0	—	1,73
БТ	—	—	—	10,8	1,1	8	—	1,31	—	2,4

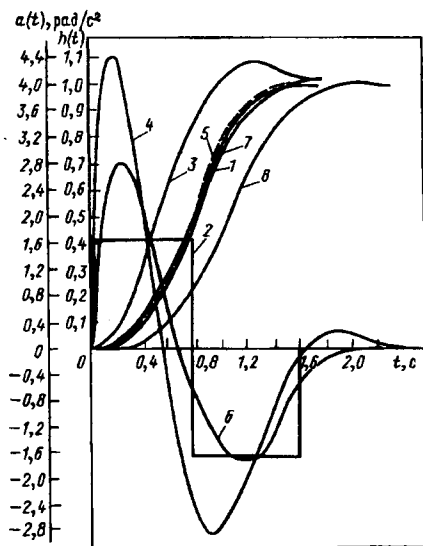


Рис. 4. Временные характеристики: 1 — $h^*(t)$ в соответствии с (6); 2 — ускорение выходной координаты в соответствии с (6); 3 — $h(t)$ настройки Баттерворта 3-го порядка; 4 — ускорение выходной координаты в соответствии с настройкой по Баттерворту 3-го порядка; 5 — синтезированная $h(t)$ для ПИ-регулятора при $m=3$, $n=4$; 6 — ускорение выходной координаты синтезированной настройки для ПИ-регулятора при $m=3$, $n=4$; 7 — $h(t)$ для синтезированной настройки (7) при $k=10$; 8 — $h(t)$ для синтезированной настройки (7) при $k=2$ ($I=3$, $5-8$ $t_y=1,57$ с; $4 - t_{nn}=1,57$)

движение привода с упругостью в кинематической цепи, приводит к нарушению условия устойчивости, что указывает на невозможность строгой реализации заданной траектории линейным управлением [12]. В данном случае характеристический полином рассматривается как произведение нескольких полиномов [13]. Полином, определяющий переходный процесс, синтезируется для реального времени t_y и берется для ПИ- и ПИД-регулятора из табл. 1. Вспомогательные полиномы берутся также из табл. 1 и синтезируются

для времени $t_y' < t_y$. Так, для уравнений 8-го порядка применительно к ПИД-регулятору для $m=4$ имеем

$$A(p) = (p^4 + 5,29\omega p^3 + 17,68\omega^2 p^2 + 22,83\omega^3 p + 0,5258\omega^4)(p^4 + 21,8\omega k p^3 + 124,8\omega^2 k^2 p^2 + 382,1\omega^3 k^3 p + 485,0\omega^4 k^4). \quad (7)$$

При $k \rightarrow \infty$ временные и частотные характеристики синтезируемых уравнений будут асимптотически приближаться к рассмотренным. Практически при $k > 5$ влияние вспомогательного полинома будет незначительно (рис. 4). При этом качественные показатели системы практически не отличаются от приведенных в табл. 2. Возможность использования ПИД-регулятора в контуре положения связана с влиянием коэффициента b_{m-2} в уравнении (2) на частотные и временные характеристики. Экспериментально установлено, что при $b_{m-2} \leq a_{n-1}/5$ влияние коэффициента b_{m-2} на временные и частотные характеристики незначительно.

В заключение сформулируем рекомендации по настройке модально-адаптивных регуляторов, вытекающие из специфических свойств синтезированных настроек. Так, отклонение коэффициентов a_1 и a_2 на $\pm 100\%$ расчетного значения практически не влияет на качественные показатели. Увеличение коэффициента a_n на 100% увеличивает перерегулирование до $4,5\%$, а уменьшение a_n на $200 \div 300\%$ приводит к устранению незначительного перерегулирования. Следовательно, применяя при настройке способ последовательного достижения частных целей с использованием модального управления [6], можно уменьшить необходимое число измеряемых или восстанавливаемых координат по сравнению с классическим

юдальным регулятором. При этом незначительные параметрические возмущения могут не оказывать существенного влияния на качественные показатели. В условиях значительных параметрических возмущений возникает необходимость проведения дополнительных исследований, связанных с моделированием частотных и временных характеристик, или использовать методы параметрической и сигнальной самонастройки [5, 14].

Вывод. Синтезированы стандартные настройки применительно к П- и ПИ-регуляторам, которые при $m \approx 3$ по своим фильтрующим свойствам неступают настройкам Баттерворта 3–4-го порядков и имеют достаточно линейную фазо-частотную характеристику, а также более высокие динамические показатели на отработку ступенчатого воздействия и меньшие значения максимальной обротоности корней характеристического полинома.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башарин А.В., Новиков В.А., Соколовский Г.Г. Управление электроприводами. — Л.: Энергоиздат, 1982.
2. Михайлов О.П. Автоматизированный электропривод ганков и промышленных роботов. — М.: Машиностроение, 1990.
3. Синтез активных RC-цепей. Современное состояние проблемы / Ю.П. Галямичев, А.А. Ланнэ, В.З. Лундин, В.А. Тетраков. — М.: Связь, 1975.
4. Справочник по расчету и проектированию ARC-цепей / Под ред. А.А. Ланнэ. — М.: Радио и связь, 1984.
5. Борцов Ю.А., Соколовский Г.Г. Автоматизированный электропривод с упругими связями. — С.-Пб.: Энергоатомиздат, 1992.
6. Бургин Б.Ш. Анализ и синтез двухмассовых электромеханических систем. — Н.: Министерство науки, высшей школы и технической политики Российской Федерации, 1992.
7. Титце У., Шенк К. Полупроводниковая схемотехника. — М.: Мир, 1982.
8. Заездный А.М. Гармонический синтез в радиотехнике электросвязи. — Л.: Энергия, 1972.
9. Андреев С.Н., Ворошилов М.С., Петров Б.А. Про-

ектирование приводов манипуляторов. — Л.: Машиностроение, 1975.

10. Лихоманов А.М. Параметрический синтез линейных систем на основе искусственной периодизации переходных характеристик. — Изв. вузов. Приборостроение, 1990, т. XXXIII, № 2.

11. Лихоманов А.М. Параметрический синтез систем с кусочно-непрерывными нелинейностями на основе искусственной периодизации сигнала ошибки управления. — Изв. вузов. Приборостроение, 1991, т. XXXIV, № 7.

12. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. — М.: Наука, 1966.

13. Соколов Т.Н. Электромеханические системы автоматического управления. — М.; Л.: Госэнергоиздат, 1952.

14. Борцов Ю.А., Поляхов Н.Д., Путов В.В. Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением. — Л.: Энергоатомиздат, 1984.

[09.11.93]

Авторы: Лихоманов Андрей Михайлович окончил приборостроительный факультет Ленинградского института авиационного приборостроения в 1975 г. В 1991 г. защитил кандидатскую диссертацию по теме «Параметрический синтез следящих электроприводов на основе искусственной периодизации переходных характеристик» в Санкт-Петербургском техническом университете. Доцент кафедры «Автоматизация производственных систем» Санкт-Петербургского института машиностроения (ВТУЗ—ЛМЗ).

Куцанов Леонид Анатольевич окончил механико-машиностроительный факультет Ленинградского политехнического института в 1975 г. В 1980 г. защитил кандидатскую диссертацию по теме «Исследование точности и устойчивости гидроконтрольной системы» в Ленинградском политехническом институте. Доцент кафедры «Технология машиностроения» Санкт-Петербургского института машиностроения (ВТУЗ—ЛМЗ).

К сведению авторов и читателей!

Каждый автор имеет право бесплатно получить 1 экз. журнала с его статьей.

Экземпляры номеров журнала «Электричество» за последние годы можно приобрести в редакции журнала (Б. Черкасский пер., 2/10, тел. 924-24-80).

Численный расчет электрического поля методом сферических элементов

ЮРКЕВИЧ В.М.

Описаны принципы построения нового метода численного расчета электрического поля, основанного на теореме о среднем теории потенциала. Сделаны сравнения с известными методами. Показано, что новый метод способен составить конкуренцию известным, а по ряду признаков — превосходит их.

Ключевые слова: теорема о среднем, сферический элемент, численный расчет поля, краевая задача, узловые потенциалы, передача, граничные условия

В теоретической электротехнике («ТОЭ») в числе главных всегда была задача нахождения наиболее удобных методов расчета. В разделе «теория электрических цепей» здесь надо прежде всего назвать методы узловых потенциалов (МУП) и контурных токов (МКТ), выбор из которых при анализе конкретной цепи диктуется чаще всего соотношением чисел узлов и контуров. При анализе электрического поля первичная классификация метода расчета задается типом условий краевой задачи с дальнейшим переходом к выбору метода расчета. Наиболее распространены теперь методы численного расчета краевых задач, среди которых наибольшую популярность имеют методы: а) конечно-разностные («сеточные»); б) конечных элементов; в) интегральных уравнений. Аналитические методы расчета полевых задач в силу известных причин имеют ограниченное применение.

При том, что основу всех явлений, присущих электрическим цепям, составляют процессы, описываемые уравнениями Максвелла («полевыми уравнениями»), методы расчета электрических цепей и краевых задач оказываются совершенно непохожими. Отличия оказываются не только внешними, относящимися к виду уравнений, но также и по способу записи этих уравнений, их структуре и, часто, содержанию. И даже при некотором иногда внешнем сходстве (метод узловых потенциалов и метод сеток, где на схеме также есть узлы) существо расчетов, исходные соотношения методов оказываются несвязанными.

В этой статье описывается метод расчета краевой задачи, который по существу является методом узловых потенциалов; название его («сферических элементов») продиктовано исходными «полевыми» уравнениями, адаптация которых приводит к форме алгебраических уравнений, присущих методу узловых потенциалов теории цепей. Недостаток объема позволяет здесь дать лишь основные положения и идеи метода, однако

The paper considers a new method for calculating electrical field. The method is based on the average theorem of the potential theory. Comparisons with the known methods for calculating electrical field are performed. It is shown that the method described is concurrent with the other known methods and in some cases even surpass them.

Key words: average theorem, sphere element, numerical calculation of electrical field, boundary problem, nodes potentials, transfer ratio, boundary conditions

сразу следует сказать, что сочетание преимуществ метода узловых потенциалов с простотой формулировки краевой задачи в этом методе сферических элементов (МЭС), а также заметный меньший объем вычислительной работы (по сравнению с методами сеток, конечных элементов и интегральных уравнений) позволяют видеть в нем конкурента этим широко известным методом.

В основе метода — формулы, известные как формулы Грина, для поля, описываемого уравнением Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = 0, \quad (1)$$

где φ — потенциал.

Для такого поля справедливо соотношение [1]

$$\varphi_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \iiint_G \frac{1}{r} \Delta \varphi d\alpha. \quad (2)$$

В последнем слагаемом (2) S — поверхность ограничивающая область G ; $\varphi_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0)$ — потенциал в точке (x_0, y_0, z_0) ; $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали на поверхности S .

Выражение (2) интересно следующим: 1) последнее слагаемое справа определяет в φ_0 часть зависящую от заряда, размещенного внутри области G ; 2) первое слагаемое справа (интеграл по поверхности S) определяет в φ_0 вклад от источников (зарядов), расположенных за пределами области G .

Особо следует отметить, что (2) задает потенциал φ_0 в дискретной точке, т.е. в узле. Фактически (2) есть уравнение узлового потенциала в интегральной («полевой») формулировке. Надо подчеркнуть еще одно важное обстоятельство, связанное с точным определением с помощью (2) потенциала φ_0 в дискретной точке. Численный

расчет поля обычно всегда имеет этап перехода от непрерывных функций к дискретным (например в методе вторичных источников [3] — переход от интегральных уравнений к системе алгебраических). В нашем случае (2) уже задает точное значение потенциала в точке, так что переход к множеству узлов в области G не требует приближенных выражений потенциала (аппроксимаций), а требует (в простейшем случае) лишь вычислений интегралов в правой части (2) для каждого из узлов.

От (2) несложно перейти к соотношению, составляющему фундамент МСЭ. Оно определяется известной теоремой о среднем теории потенциала [1]: значение гармонической (т.е. удовлетворяющей уравнению Лапласа) функции в центре шара равно среднему арифметическому ее значений на поверхности этого шара. Не приводя здесь несложного доказательства теоремы, запишем ее:

$$\varphi_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} \varphi dS. \quad (3)$$

Здесь φ_0 — потенциал в центре шара; R — его радиус.

Для плоского поля теорема о среднем записывается в виде

$$\varphi_0 = \varphi(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint \varphi dl, \quad (4)$$

где φ_0 — потенциал в центре круга радиуса R .

При переходе от (2) к (3) и (4) источники, расположенные внутри сферы, не рассматриваются, поэтому теорема о среднем описывает потенциал поля, источники которого находятся вне сферы.

Название «метод сферических элементов» определено видом конечных элементов («сферы»), которыми в соответствии с (3) должна быть покрыта область G . Все последующее рассмотрение здесь далее проводится для плоской задачи, поэтому используется теорема о среднем для круга.

При численных решениях краевых задач обычным является этап перехода от непрерывных функций распределения потенциала (или напряженности) к дискретным, определенным на множестве точек. Поэтому необходимо перейти от интегрального вида теоремы о среднем (4) к дискретному.

Выражение (4) мы рассматриваем как точное решение уравнения Лапласа в точке (x_0, y_0) . Поэтому нет необходимости заниматься поиском приближенного решения (или аппроксимации) уравнения Лапласа; наша задача — приближенное вычисление имеющегося точного решения (4) уравнения Лапласа.

Итак, рассматривается

$$\varphi_0 = \varphi(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint \varphi dl.$$

Поскольку $dl = R d\theta$, где θ — угол (рис. 1), то это уравнение можно переписать в виде

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta, \quad (5)$$

где $\varphi(\theta)$ — функция потенциала от угла при перемещении вдоль окружности (отметим, что значение φ_0 не связано с величиной радиуса R окружности).

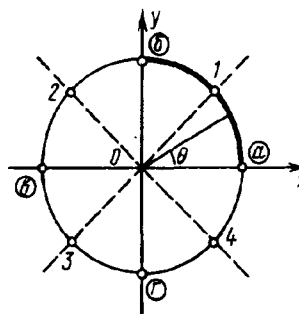


Рис. 1

Интеграл в (5) заменяем суммой

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \varphi(\theta) d\theta \quad (6)$$

путем разбиения окружности на n частей (на рис. 1 — на четыре равные части координатными осями; границы участков обозначены буквами a, b, v, z). Интеграл для одного участка (например $a-b$ на рис. 1) можно записать через среднее значение:

$$\int_a^b \varphi(\theta) d\theta = \varphi_{ср a-b} \int_a^b d\theta = \varphi_{ср a-b} (\Delta_{a-b} \theta).$$

В результате (6) представляется суммой

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \varphi_{ср i} \Delta_i \theta = \sum_{i=1}^n (k_i \varphi_{ср i}), \quad (7)$$

где $k_i = \frac{\Delta_i \theta}{2\pi}$; очевидно, что $\sum_{i=1}^n k_i = 1$.

Вернемся к рис. 1 и представим себе, как может меняться потенциал при перемещении точки наблюдения по окружности. На рис. 2 показана некая произвольная кривая $\varphi(\theta)$, иллюстрирующая, что $\varphi(\theta)$ является периодической и непрерывной функцией, достигающей максимума и минимума; φ_0 является средним значением $\varphi(\theta)$.

От точного соотношения (7) переходим к приближенному

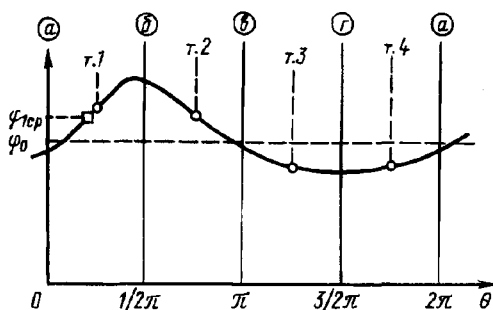


Рис. 2

$$\varphi_0 \approx \sum_{i=1}^n k_i \varphi_i \quad (8)$$

за счет замены среднего на интервале $\varphi_{ср}$ на его приближенное значение φ_i .

Рассмотрим пример. Пусть окружность (рис. 1) разбита на четыре равных интервала точками $a, b, в, z$; при этом $\Delta_i \theta = \pi/2$ и $k_i = 1/4$. Тогда

$$\varphi_0 = \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4), \quad (9)$$

т.е. получена известная расчетная формула для симметричной пятиточечной звезды (точки 0 и 1, 2, 3, 4) методом сеток. При нашем способе вывода этой формулы нетрудно видеть, что погрешность ее определяется исключительно заменой точного среднего значения $\varphi_{ср}$ на интервале приближенным значением (например, заменой $\varphi_{ср1}$ значением потенциала в точке 1, рис. 2).

Вообще, если окружность разбита на n равных интервалов, то (8) переходит в формулу

$$\varphi_0 \approx \frac{1}{n} \sum_i \varphi_i. \quad (10)$$

Из определения интеграла следует, что точность (10) увеличивается с увеличением n .

Однако разбиение окружности на равные интервалы случается редко. Поэтому рабочим остается соотношение (8), в котором угловые коэффициенты $k_i = \frac{1}{2\pi} \Delta_i \theta$ различны для каждого углового интервала. Выбор $\Delta_i \theta$ может быть сделан разными способами; здесь приведем один, кажущийся естественным при подготовке краевой задачи к расчету. За исходные данные при этом приняты положения на окружности расчетных точек i [точек, задающих φ_i в (8); на рис. 1 это были точки 1, 2, 3, 4]. На рис. 3 показаны расчетные точки 1–6, расположенные на окружности неравномерно. Они задают приближенно средние потенциалы φ_i на интервалах, границы которых еще не указаны. Наиболее простой способ выбора интервалов состоит в задании их границ биссектрисами углов, образованных радиусами, проведенными в расчетные точки. Например (рис. 3),

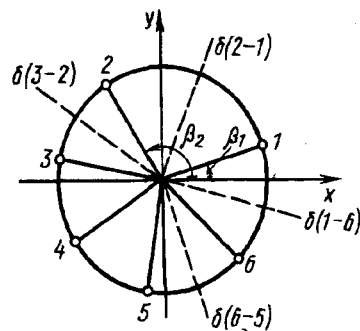


Рис. 3

биссектриса $b(2-1)$ проведена для угла, образованного лучами 2 и 1. Итак, угловые интервалы получим как углы между соседними биссектрисами:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 \theta &= \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_6); \\ \Delta_2 \theta &= \frac{1}{2}(\beta_3 - \beta_1); \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta_i \theta &= \frac{1}{2}(\beta_{i+1} - \beta_{i-1}), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

после чего вычисляются угловые коэффициенты k_i для (8).

Однако (8) не может служить в таком виде рабочей формулой для расчета краевой задачи из-за того, что плоскую расчетную область оказывается невозможно «покрыть» конечными элементами в форме окружности. Надо сделать дополнительные преобразования. Пусть на плоскости задана (или выбрана) система узлов (рис. 4) 1, 2, ... Если они соединены отрезками, то получается система треугольников, что присуще методу конечных элементов; можно эту картину рассматривать как нерегулярную сетку, размеры ячейки которой определяются положениями узлов. Будем рассматривать каждый узел вместе с лучами как звезду, образующую «сферический» элемент; на рис. 4 выделена звезда с узлом a . Проводим окружность произвольного радиуса R (центр в узле a). С каждым лучом окружность пересекается в точке i_p . В соответствии с (8) можем записать

$$\varphi_n = \sum_i k_i \varphi_{i_p}. \quad (12)$$

Потенциал φ_{i_p} можно выразить через потенциалы центра φ_a и соседних узлов 1, 2, ... в простейшем случае с помощью линейной интерполяции; например $\varphi_{1p} = \varphi_1 \frac{R}{l_1} + \varphi_a \frac{l_1 - R}{l_1}$; здесь l_1 — длина луча от центра a к узлу 1.

Обозначая $\frac{R}{l_1} = \alpha_1, \dots, \frac{R}{l_i} = \alpha_i$, подставляем φ_{i_p} в (12) и получаем

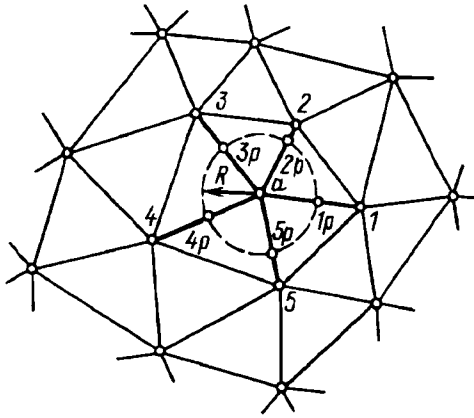


Рис. 4

$$\varphi_a = \frac{g_1 \varphi_1 + \dots + g_n \varphi_n}{g_1 + \dots + g_n} = \frac{\sum_i g_i \varphi_i}{\sum_i g_i}. \quad (13)$$

Здесь $g_i = k_i \alpha_i$; φ_a — потенциал центрального узла; φ_i — потенциал периферийного узла звезды.

Выражение (13) является основной расчетной формулой, связывающей потенциал центрального узла звезды (расчетного элемента) с периферийными. В расчетных коэффициентах $g_i = k_i \alpha_i$ один из сомножителей $k_i = \frac{1}{2\pi} \Delta_i \theta$ задает угловой «вес» периферийного узла (при разбиении окружности на интервалы), а другим сомножителем α_i значение потенциала периферийного узла пересчитывается на окружность.

Расчетная формула (13) имеет вид, характерный для метода узловых потенциалов теории электрических цепей. Коэффициенты g_i здесь могут интерпретироваться как эквивалентные проводимости между узлами. С учетом этого (13) может трактоваться как первый закон Кирхгофа ($\sum I_i = 0$), если задача ставится для проводящей среды, или в еще более общей форме — как дискретное представление уравнения

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0.$$

Это соотношение могло бы быть взято за основу для вывода (13). Однако при таком «обратном» подходе проблема определения коэффициентов g_i оказалась нерешаемой.

Уравнение (13) для практических расчетов удобнее записать в форме, присущей принципу суперпозиции:

$$\varphi_a = \sum_{i=1}^n h_i \varphi_i, \quad (14)$$

где $h_i = \frac{g_i}{\sum g_i}$ — коэффициенты передачи из периферийного узла в центральный.

Очевидно, что для узла

$$\sum_i^n h_i = 1. \quad (15)$$

Поскольку каждый из коэффициентов $g_i = k_i \alpha_i = \frac{1}{2\pi} \Delta_i \theta \frac{R}{l_i}$, то при вычислении передачи h_i общая для всех g_i дробь $\frac{R}{2\pi}$ сокращается, так что в нашем линейном приближении коэффициенты передачи h_i определяются лишь угловыми интервалами $\Delta_i \theta$ и длинами лучей l_i :

$$h_i = \frac{\Delta_i \theta / l_i}{\sum_i (\Delta_i \theta / l_i)}. \quad (16)$$

Это означает, что размер круга (т.е. радиус окружности) не оказывает влияния на конечный результат при расчете с помощью (13) или (14); на это же указывает запись теоремы о среднем в «угловой» форме (5). Размер круга (в неявной форме) сказывается лишь на точности расчета краевой задачи при сопоставлении размеров сферических элементов (звезд), покрывающих расчетную область G .

Проиллюстрируем возможности рабочей формулы (13). На рис. 5 в масштабе изображена система электродов «цилиндр—плоскость», поле которой несложно рассчитать. Взяты следующие численные значения: радиус цилиндра $r = 5$ см, расстояние от оси цилиндра до плоскости $H = 10$ см; заряд оси τ определен из $\frac{\tau}{2\pi\epsilon} = 1$. На рис. 5 представлены два варианта расчетной звезды с общим центральным узлом a . Вариант I — меньшего размера (взят произвольно), вариант II — большего, причем он получается из варианта I продлением лучей до пересечения с краями области. С помощью (13) получаем расчетные значения потенциала центрального узла a ; из сравнения с точным значением потенциала φ_a определяется погрешность δ :

вариант I: $\delta_I = 1,4 \cdot 10^{-3} \%$; вариант II: $\delta_{II} = 0,27\%$.

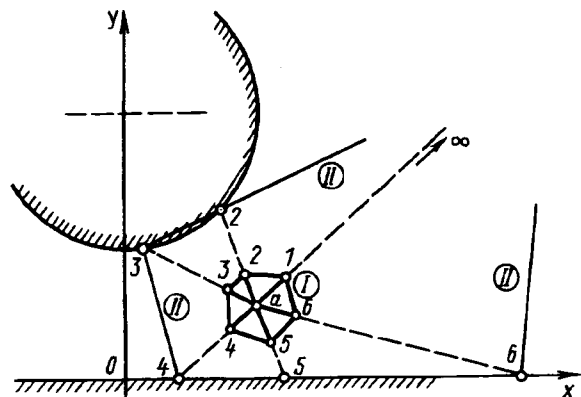


Рис. 5

Этот пример показывает, что точность применения (13) может быть высокой, и она зависит от размера расчетного элемента (звезды). Однако более полная информация о точности расчета краевой задачи может быть получена только после отдельного исследования.

Теперь можно сформулировать алгоритм расчета краевой задачи с условиями первого рода (условия Дирихле).

1. Проводится разбиение расчетной области на элементы. Процедура сводится к выбору в этой области расчетных узлов (например как на рис. 4) и формированию сферических элементов путем соединения каждого узла с соседними. Если это делается без пересечения лучей, то область оказывается покрыта системой многолучевых звезд. Внешне это может выглядеть нерегулярной сеткой, составленной из треугольников. На границе области располагаются узлы с заданными значениями потенциала.

2. Задается нумерация всех узлов и вычисляются их координаты.

3. Вычисляются все коэффициенты передачи h_i для каждого из узлов. При решении краевой задачи эти коэффициенты остаются неизменными (например, если вычисления проводят итерационным способом, то h_i остаются неизменными для всех итераций).

4. Для каждого из расчетных узлов записываются выражения типа (14), что составляет систему алгебраических уравнений.

5. Решение полученной системы уравнений проводится на ЭВМ каким-либо подходящим методом. Обычно применяется итерационный метод с ускоряющим множителем, как это делается при работе с конечно-разностным методом («сетки»).

При решении краевой задачи необходимо учитывать граничные условия

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \quad (17)$$

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (18)$$

(ограничиваемся здесь рассмотрением границы раздела двух диэлектрических сред с проницаемостями $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1}$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2}$).

Условие (17) обычно заменяется равенством

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad (19)$$

т.е. условием непрерывности потенциала на границе раздела сред.

Численный метод должен предусматривать выполнение условий (18) и (19) при записи системы уравнений для всех узлов в расчетной области.

Предварительно еще раз обратимся к физической трактовке коэффициентов g_i в основной расчетной формуле (13). В теории электрических

цепей g_i есть проводимость ветви. В нашем случае (электростатическое поле) g_i имеет смысл емкости. На рис. 6 показано равномерное поле между двумя параллельными плоскостями — эквипотенциалами i и O' , образующими цилиндр (призму). Выражение

$$g_i = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta_i \theta R}{l_i} \quad (20)$$

сравниваем с $C_{0i} = \varepsilon \frac{S}{l}$ (емкость плоского конденсатора). Очевидно, что сходство их не только внешнее. По существу g_i трактуется как емкость цилиндра (рис. 6), если коэффициент $\frac{1}{2\pi}$ заменить на ε . При такой замене (20) приобретает вид

$$g_i = \varepsilon \frac{\Delta_i \theta R}{l_i}, \quad (21)$$

однако на результат вычисления (13) это не влияет, так как ε и R при расчете однородного пространства из (13) выпадают.

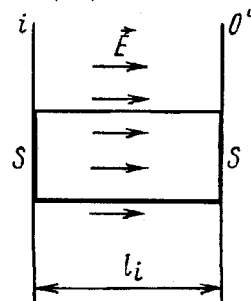


Рис. 6

Еще одно напоминание о смысле формулы (13). Будучи записанной в виде

$$\sum_i (\varphi_0 - \varphi_i) g_i = 0, \quad (22)$$

она повторяет в дискретной форме известное соотношение $\text{div } \vec{E} = 0$, либо его интегральную форму $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 0$. Поэтому слагаемое $(\varphi_0 - \varphi_i) g_i$ в (22) может представлять поток вектора напряженности $\vec{E}$ через площадку S (рис. 6), определяемую сектором окружности $\Delta_i \theta$.

Перейдем теперь к рассмотрению расчетного элемента (звезды), приходящегося на границу раздела двух сред (рис. 7); при решении краевой задачи в кусочно-однородной области это расположение является типичным. Пусть S_Σ — граница (поверхность) между двумя средами с разными диэлектрическими проницаемостями (ε_1 и ε_2). Центральный узел звезды и два периферийных узла размещаются на границе раздела сред (узлы O_1 и $1, 4$). В большинстве случаев применяется шестилучевая звезда, поэтому еще два луча (2, 3) располагаем в среде ε_1 и еще

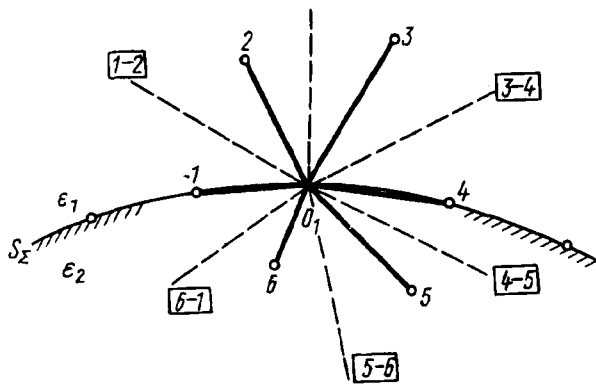


Рис. 7

два (5, 6) — в среде ϵ_2 .

Из предыдущих пояснений (21) следует, что коэффициенты g_2 и g_3 входят в (13) с множителем ϵ_1 ; например

$$g_2 = \epsilon_1 \frac{\Delta_2 \theta R}{l_2}. \quad (23)$$

Аналогично имеем для g_5 и g_6 ; например

$$g_5 = \epsilon_2 \frac{\Delta_5 \theta R}{l_5}.$$

Отдельно надо рассмотреть коэффициенты g_1 и g_4 для периферийных точек звезды, расположенных на границе раздела сред. Лучом 1 сектор $\Delta_1 \theta$ (на рис. 7 он образован двумя пунктирными лучами 1-2 и 6-1) разделен на две части: $\Delta_1 \theta = (\Delta_1 \theta)_{\epsilon_1} + (\Delta_1 \theta)_{\epsilon_2}$, принадлежащие двум средам ϵ_1 и ϵ_2 . Поэтому коэффициент g_1 также определяется двумя слагаемыми:

$$g_1 = \epsilon_1 \frac{(\Delta_1 \theta)_{\epsilon_1} R}{l_1} + \epsilon_2 \frac{(\Delta_1 \theta)_{\epsilon_2} R}{l_1}. \quad (24)$$

Очевидно, что этим описывается емкость двух параллельно соединенных конденсаторов (или сумма двух проводимостей). Аналогично записывается выражение

$$g_4 = \epsilon_1 \frac{(\Delta_4 \theta)_{\epsilon_1} R}{l_4} + \epsilon_2 \frac{(\Delta_4 \theta)_{\epsilon_2} R}{l_4}.$$

Фактически сделано «расщепление» точки, находящейся на границе раздела сред, с самостоятельным учетом каждой ее «половинки».

Таким образом, основная расчетная формула (13) учитывает различие проницаемостей (ϵ_1 и ϵ_2) для всех точек, составляющих расчетную звезду. Отметим отдельно, что фактически при расчете потенциала центрального узла звезды O_1 лежащего на границе раздела (рис. 7), требуется не абсолютные значения проницаемостей ϵ_1 и ϵ_2 , а их соотношение $\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)$ или обратное.

Учет проницаемостей ϵ_1 и ϵ_2 в (22) или (13) разделяет расчетную звезду (рис. 7) на две части

(половины) в соответствии с расположением каждой из них в своей среде. Это и обеспечивает выполнение граничного условия (18). Условие (19) выполняется «автоматически».

Таким образом, основная расчетная формула (13) оказывается применимой и для однородной области, и для расчета на границе раздела сред кусочно-однородной области. Заметим, что процедура расчета при этом не изменяется, поскольку вносится лишь коррекция в коэффициенты g_1 и g_4 для лучей (рис. 7), которые аппроксимируют линию раздела сред; эти коэффициенты определяют в (14) коэффициенты передачи h_i из периферийных узлов в центральный, причем эти коэффициенты при вычислениях, например итерационным методом, остаются неизменными.

На рис. 8 показан результат решения тестовой задачи с краевыми условиями первого рода. Взята система плоских электродов с металлическим бруском между ними. В силу симметрии относительно осей X, Y результаты приведены для одного квадранта в виде семейства эквипотенциалей. Расчет сделан двумя методами: а) методом сеток; б) методом сферических элементов (узловых потенциалов). Количество расчетных узлов каждого из методов определено максимальным отклонением потенциала узла, не превышающим 1% от стационарного значения. Число узлов в методе сеток составило 425, для метода сферических элементов 63. Расчет сделан методом верхней релаксации (с ускоряющим множителем). Максимальное расхождение в результатах расчета методами сеток и сферических элементов пришлось на узлы в зоне наибольшей неоднородности поля (вблизи выступающего угла); оно оценивается примерно в 2%. По мере удаления от угла расхождение результатов исчезает (расчеты выполнила И.С. Козьмина). Аналогично рассчитано поле при замене металлического бруска на диэлектрический.

Сделаем некоторые сравнения метода сфери-

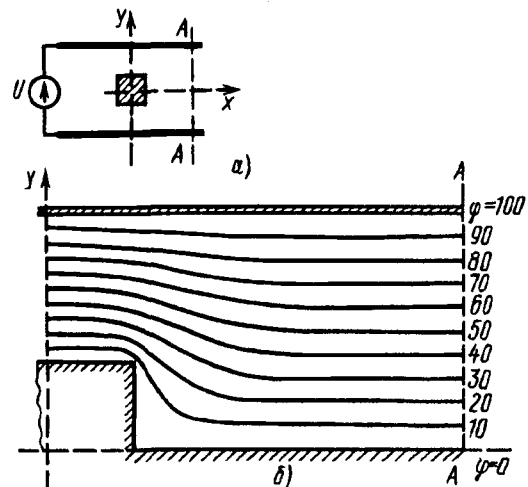


Рис. 8

ческих элементов с известными. В большей мере сравнение сделаем с методами конечно-разностным и конечных элементов [2], поскольку они требуют разбиения области, занимаемой полем, на элементы (ячейки).

Рассмотрим применение сеточного метода. В простейшем случае область покрывается сеткой с квадратной ячейкой. Размер ячейки определен требованием точности в части области с наибольшей неоднородностью поля (на рис. 8 вблизи угла). Размер ячейки обычно одинаков для всей области, т.е. и там, где она могла бы быть больше. Это и приводит к появлению неоправданно большого количества расчетных узлов. В нашем примере (рис.8) их оказалось 425 против 63 для метода сферических элементов. Понятно, что решение системы уравнений со значительно меньшим (здесь семикратное отличие) количеством неизвестных предпочтительнее.

В методе конечных элементов распределение потенциала внутри элемента (часто это треугольник) описывается многочленом, для которого искомыми неизвестными являются коэффициенты, выражаемые в дальнейшем через потенциалы вершин треугольников (узлов). При такой процедуре в конечном алгоритме число неизвестных равно числу узлов. Однако число неизвестных метода (а не вычислительного алгоритма) определяется многочленом, описывающим конечный элемент, и числом элементов. Сделаем подсчет общего числа неизвестных для всей расчетной области, где выбраны расчетные узлы, соединение которых отрезками задает систему треугольников (конечных элементов), как, например, на рис. 4. К каждому расчетному узлу (например a на рис. 4) примыкает несколько треугольников, число которых равно порядку N звезды. Каждый треугольник «принадлежит» трем узлам, поэтому общее число треугольников

$$n_{\Delta} = \frac{1}{3} UN, \quad (25)$$

где n_{Δ} — число треугольников; U — число узлов.

Каждый треугольник (конечный элемент) описывается полиномом; число искоемых коэффициентов полинома для «скромной» оценки возьмем равным шести ($k_{\Delta}=6$) [2]. Тогда общее число неизвестных для всей расчетной области

$$n_{к.э} = \frac{1}{3} UN k_{\Delta} = 2 UN. \quad (26)$$

Чаще всего применяется порядок звезды $N=6$. Тогда число неизвестных в уравнениях по методу конечных элементов составит

$$n_{к.э} = 12 U. \quad (27)$$

В методе сферических элементов (узловых потенциалов) число неизвестных в уравнениях в точности равно числу узлов

$$n_{с.э} = U, \quad (28)$$

т.е. много меньше (примерно на порядок), чем в методе конечных элементов, чем и определяется одно из основных достоинств метода сферических элементов.

Эти сравнения свидетельствуют о преимуществе по числу искоемых неизвестных метода сферических элементов перед известными. Однако заметим, что этот вывод — предварительный, окончательное заключение можно делать только по результатам длительных и всесторонних проверок при практической работе.

Есть ряд особенностей применения метода сферических элементов. Например, выбор распределения узлов (т.е. нерегулярной сетки) в расчетной области. Следует указать также на ряд различных способов вычисления распределения силового поля (напряженности), на методы вычисления распределений зарядов на границах сред, на различия в подходах к расчету краевых задач с условиями первого и второго рода и др. Однако описание всего этого связано с анализом точности метода, который требует отдельного изложения и здесь не приводится.

Уже приобретенный опыт работы с методом сферических элементов (узловых потенциалов) показывает не только его эффективность и конкурентоспособность с широко известными методами, но и его преимущества методического характера, как объединяющего расчеты электрического поля и цепей в один способ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. — М.: Наука, 1964.
2. Демирчян К.С., Чечурин В.Л. Машинные расчеты электромагнитных полей. — М.: Высшая школа, 1966.
3. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. — М.: Энергия, 1975.

[31.03.94]

Автор: Юркевич Владимир Михайлович окончил в 1960 г. факультет электрификации промышленности и транспорта Московского энергетического института (МЭИ). В 1989 г. защитил в МЭИ докторскую диссертацию на тему «Теоретические основы и техника экспериментального исследования распределений вектора напряженности и потенциала электрических полей». Профессор кафедры «Электрофизика» МЭИ.

Оптимизация структуры и формы тел, находящихся в плоскопараллельном магнитном поле

ЧЕЧУРИН В.Л.

Рассмотрен метод оптимизации структуры и формы тел в магнитном поле заданных сторонних источников. Целью оптимизации являются магнитный поток, индуктивность, электромагнитная сила, другие интегральные характеристики. Разыскиваются форма тела и распределение в пространстве вещества с известным диапазоном значений магнитной проницаемости. Использован вариационный метод, реализуемый на заключительном этапе численно.

Ключевые слова: электротехнические устройства, конструкции, материалы, электромагнитное поле, характеристики, расчет

Введение. Хотя задачи поиска оптимальных конструкций в технике, в особенности в механике, встречаются часто и теория оптимизации разработана и успешно применяется в теории упругости, теплотехнике, при управлении автоматическими системами и в других областях техники, методы этой теории не получили широкого распространения при анализе конструкций элементов электротехнических устройств, находящихся в электромагнитном поле. В то же время в ряде случаев необходимо оптимизировать не только форму элементов, но и их структуру, в частности, характер распределения разнородных материалов в объеме элементов.

Из многочисленных задач оптимизации в электротехнике выделим два типа задач, решение которых связано с анализом электромагнитного поля. К первому отнесем задачи, в которых цель оптимизации достигается размещением дискретных либо непрерывно распределенных в пространстве источников, а ко второму — те, в которых отыскивают оптимальные характеристики материалов и геометрии тел. Задачи первого типа решают при создании активных экранов, поиске расположения источников поля, создающих заданное поле, и т.п.; методы их решения хорошо известны [1]. Характерной для электрических машин является задача получения синусоидального распределения магнитной индукции в воздушном зазоре, достигаемого, например, подбором формы полюса или введением магнитных клиньев, уменьшающих зубцовые гармоники поля. В ряде задач второго типа определяют оптимальную геометрию однородных либо неоднородных тел, обеспечивающих минимальный критерий или заданный закон изменения некоторого вектора на поверхности или в объеме. Решению этих задач посвящено значительно меньшее число работ; в применяемых методах их решения зачастую не

A method of optimization of shape and structure of magnetic bodies placed in magnetic fields of detached currents is considered. Objects of optimization are magnetic flux, inductance, electromagnetic force and other integral parameters. The minimum and maximum magnetic permeabilities of distribution of magnetic material are specified. Variational method is used at the first step and numerical method — at the final step.

Key words: electric installations, constructions, materials, electromagnetic field, characteristics, calculation

используются подходы теории оптимизации, использование численных методов на начальных этапах решения требует большего объема вычислений, в связи с чем во многих случаях такие задачи решают приближенно на основе имеющегося инженерного опыта.

Специфика оптимизационных задач теории электромагнитного поля связана с видом ограничений на характеристики поля, параметры сред и геометрию тел. Обычными являются ограничения на дифференциальные характеристики поля, например, на напряженность H поля ($H < H_{\text{доп}}$), на интегральные параметры: индуктивность ($L < L_{\text{max}}$), емкость, проводимость, на геометрические размеры областей с источниками ($S_r < S_0$) и с оптимизируемым материалом ($S_\mu < S_1$). Специфическими же являются ограничения на параметры среды ($\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2$, $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$), в силу чего задачи оптимизации источников и сред в электромагнитном поле отличны от вариационных и относятся к неклассическим задачам вариационного исчисления. Здесь и в дальнейшем для упрощения записи под величинами μ, ε, γ будем понимать абсолютные величины, опуская индекс a , для того чтобы избежать использования двойных индексов (μ_{a1}, μ_{a2}).

Будем рассматривать задачи второго типа, связанные с оптимизацией распределения сред с различными заданными свойствами в области S_μ , обеспечивающими цель оптимизации.

Постановка задачи. В поле источников плотностью $\Upsilon(x, y, z)$, распределенных в объеме V_Υ (рис. 1), выделен объем V , в котором определена цель оптимизации, например, энергия поля либо отличие поля от заданного. Среда характеризуется наперед заданными свойствами, например значением проницаемости μ, ε . Цель оптимизации достигается нахождением функции

$\mu(x_1, y_1, z)$ в объеме V_μ при ограничениях вида $\mu_1 \leq \mu(x_1, y_1, z) \leq \mu_2$, $V_\mu < V_0$. Поверхность S_μ , ограничивающая объем V_μ , является допустимой поверхностью, вне которой свойства среды фиксированы и изменяться не могут. При решении задачи оптимизации искомая поверхность может не совпадать с S_μ , а проходить частично или полностью внутри V_μ . Отметим, что объем V может вырождаться в замкнутую или незамкнутую поверхность, линию либо точки. Объем V_μ может также переходить в поверхность S_μ , что соответствует тонкостенной оболочке либо пластине, толщина которых значительно меньше других их размеров. Области V_Y , V , V_μ могут пересекаться, а также могут быть многосвязными. Задачи с указанными особыми видами областей в статье не анализируются.

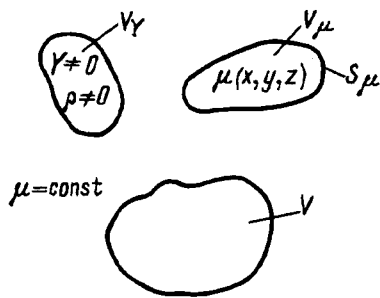


Рис. 1

С точки зрения поиска оптимума выделенные два типа задач теории поля различаются тем, что величина, оптимизирующая функцию цели, по-разному входит в описывающее поле уравнение: плотность источников входит обычно в правую часть, тогда как характеристика среды — под знак дифференциального оператора; последнее существенно усложняет поиск решения. Задачи теории оптимизации неоднородных тел схожи с задачами теории оптимального управления, в связи с чем часто используются методы и терминология теории управления и применяются вариационные методы.

Представляется целесообразным искать алгоритмы оптимизации подобно тому, как это делают при оптимизации формы упругих тел, т. е. вариационными методами [2, 3]. Алгоритм оптимизации находят аналитически, и на заключительном этапе его реализуют численно, что значительно сокращает время решения в сравнении с другими известными методами поиска оптимума [4]. Этот подход был применен при оптимизации теплового потока [5] и привел к хорошим результатам, так как не требовал выполнения трудоемких операций обращения матриц высокого порядка. При таком подходе в соответствие с терминологией методов оптимизации

в теории автоматического управления характеристики среды называют переменными управления, тогда как потенциалы поля рассматривают как переменные состояния.

Будем различать случаи задания поля в ограниченной или безграничной области. В первом случае на границе области должны быть заданы условия для потенциала или его нормальной к ней производной. Функция, определяющая цель оптимизации, может быть задана как внутри области, так и на ее границе.

Примем следующие допущения и упрощения при решении задачи оптимизации. При поиске структуры вещества в области V_μ принимаем, что она образуется двумя линейными средами с проницаемостями $\mu_1 = \mu_{\min}$ и $\mu_2 = \mu_{\max}$. При таком предположении оптимальное решение может достигаться, когда область V_μ заполнена как однородной средой с проницаемостью $\mu_{\min}$ (либо $\mu_{\max}$), так и слоистой (т. е. анизотропной средой с тензором $\hat{\mu}$), образованной двумя средами, характеризующимися концентрациями m_1 и m_2 , проницаемостями μ_1, μ_2 и углом α между осью x и одной из главных осей анизотропии. Таким образом, в общем случае заполняющая область среда может быть неоднородной и анизотропной.

Ограничимся рассмотрением задач, в которых магнитное поле является статическим либо стационарным плоскопараллельным полем. Используем прямоугольную систему координат x, y, z , в которой характеристики поля неизменны вдоль координаты z .

Учитывая, что анализ поля можно выполнить с помощью скалярного φ , так и векторного A потенциалов, функционалы, экстремум которых разыскивается, будем выражать через одну из этих величин. Так как при указанном ограничении векторный магнитный потенциал имеет единственную составляющую A_z (обозначаемую ниже как скаляр A), запишем уравнения, которым удовлетворяют потенциалы φ, A :

$$\operatorname{div} \hat{\mu} \operatorname{grad} \varphi = -\rho, \quad \operatorname{div} \hat{\nu} \operatorname{grad} A = -Y.$$

Области существования поля могут быть как ограниченными контуром l , так и неограниченными (здесь ρ, Y — объемные плотности «магнитных» зарядов [6] и токов соответственно).

На начальном этапе решения составляется расширенный функционал вида

$$J = I + \int_S \lambda (\operatorname{div} \hat{\mu} \operatorname{grad} \varphi + \rho) dS$$

либо вида

$$J_1 = I + \int_S \lambda (\operatorname{div} \hat{\nu} \operatorname{grad} A + Y) dS,$$

где I — функционал, выражающий цель опти-

мизации; $\lambda(x, y)$ — подлежащая расчету вспомогательная функция (функция Лагранжа).

Требую выполнения необходимого условия $\delta Y=0$ экстремума функционала (здесь символ δ означает вариацию) при вариации его по потенциалу, а также по искомым переменным, определяющим направление одной из главных осей анизотропии и концентрацию материала с проницаемостью, например, μ_1 , можно найти уравнение относительно функции $\lambda(x, y)$ и алгоритм вычисления характеристик материала в каждой точке. Вычисления приводят к следующему алгоритму расчета угла α между осью x и главной осью n анизотропии [5]: на каждом шаге угол α должен быть равным среднему двух углов, а именно угла между вектором $\text{grad} \varphi$ и осью x , а также между вектором $\text{grad} \lambda$ и осью x . Если угол между векторами $\text{grad} \varphi$ и n_1 обозначить через ψ , а между векторами $\text{grad} \lambda$ и n_1 через η , то $\alpha = 0,5(\psi + \eta) + \alpha_1$, т.е. вектор $\vec{n}$ должен лежать на биссектрисе угла $\psi + \eta$.

Значение проницаемости μ в точке зависит от угла ψ и выражается по-разному: при $\psi = \psi_{\text{max}}(\mu_{\text{min}})^{-1}$ следует принять $\mu = \mu_{\text{max}}$, при $\text{tg}^2 \psi < \mu_{\text{min}}(\mu_{\text{max}})^{-1}$ надо принять $\mu = \mu_{\text{min}}$ и при $\mu_{\text{min}}(\mu_{\text{max}})^{-1} < \text{tg}^2 \psi < \mu_{\text{max}}(\mu_{\text{min}})^{-1}$ значение μ равно $\mu = \sqrt{\mu_{\text{max}} \mu_{\text{min}}} \text{tg} \psi$. Концентрации вещества с проницаемостями μ_{min} и μ_{max} равны соответственно $m_1 = (\mu_{\text{max}} - \mu)(\mu_{\text{max}} + \mu_{\text{min}})^{-1}$, $m_2 = (\mu - \mu_{\text{min}})(\mu_{\text{max}} + \mu_{\text{min}})^{-1}$.

Уравнения и граничные условия для функции Лагранжа. Рассмотрим наиболее распространенные на практике цели оптимизации и получим для них необходимые условия экстремума, позволяющие определить структуру и геометрию тел. К ним можно отнести магнитный поток и другие интегральные величины, такие как МДС F_{AB} , электромагнитная сила $F_{\text{эм}}$, энергия поля W , взаимная индуктивность M , индуктивность L , емкость C , сопротивление R либо проводимость G . Указанные величины, как известно, могут быть определены и в условиях плоскопараллельного поля.

В других задачах важно найти условия, при которых отклонение величины от заданного значения либо от требуемого закона ее распределения в пространстве достигнет наименьшего значения, что приводит к использованию функционалов

$$I = I_1 = \int_l \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} + f \right)^2 dl; \quad I = I_2 = \int_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + f \right)^2 d\tau;$$

$$I = I_3 = \int_S (\text{grad} \varphi)^2 dS$$

(здесь f — заданная функция координат, определяющая, например, требуемый закон изменения составляющей напряженности магнитного поля

вдоль некоторой линии). Функционал I_1 определяет среднеквадратичное отклонение напряженности поля, а I_2 — МДС от функции $f(x, y)$; минимизация означает минимизацию поля в области S .

Найдем уравнения, которым удовлетворяет функция $\lambda(x, y)$ при достижении различных целей оптимизации, а также граничные условия для величин λ и $\frac{\partial \lambda}{\partial n}$ в случаях ограниченных областей существования поля. Используя теорему Грина, запишем расширенный функционал J в виде

$$J = I + \oint_l \hat{\mu} \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl - \oint_l \hat{\mu} \varphi \frac{\partial \lambda}{\partial n} dl + \int_S \varphi \text{div} \hat{\mu} \text{grad} \lambda dS + \int_S \lambda \rho dS. \quad (1)$$

Аналогично можно записать и функционал J_1 :

$$J_1 = I + \oint_l \hat{\nu} \lambda \frac{\partial A}{\partial n} dl - \oint_l \hat{\nu} A \frac{\partial \lambda}{\partial n} dl + \int_S A \text{div} \hat{\nu} \text{grad} \lambda dS + \int_S \lambda \gamma dS. \quad (2)$$

Рассмотрим задачу оптимизации структуры и геометрии тела в условиях, когда поле создано токами плотностью γ , распределенными в области S_γ . Искомое вещество может располагаться в области S_μ , причем вне ее $\mu = \mu_{\text{min}} = \mu_1$ (рис. 2).

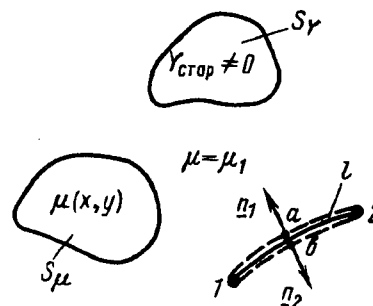


Рис. 2

Магнитный поток сквозь поверхность, следом которой в плоскости x, y является линия 1—2, должен принимать экстремальное значение. Так как $\Phi = \int_1^2 B_n dl = A_2 - A_1$, то расширенный функционал принимает вид

$$J_1 = A_2 - A_1 + \int_S A \text{div} \hat{\nu} \text{grad} \lambda dS + \int_S \lambda \gamma dS,$$

откуда получаем

$$\delta J_1 = \delta A_2 - \delta A_1 + \int_S \text{div} \hat{\nu} \text{grad} \lambda (\delta A) dS = 0.$$

Записывая потенциалы A_2, A_1 в виде

$$A_2 = \int_S \beta(x_2, y_2) A dS, \quad A_1 = \int_S \beta(x_1, y_1) A dS,$$

где $\beta(x_2, y_2)$, $\beta(x_1, y_1)$ — дельта-функции, отличные от нуля в точках 2 и 1, получаем в силу основной леммы вариационного исчисления

$$\operatorname{div} \hat{\nu} \operatorname{grad} \lambda = \begin{cases} +1 & \text{в точке } 1; \\ -1 & \text{в точке } 2; \\ 0 & \text{всюду, за исключением точек } 1, 2, \end{cases}$$

причем $\nu = \hat{\nu}$ лишь в области S_μ , тогда как вне ее $\nu = \mu_1^{-1} = \nu_{\max}$.

Использование скалярного магнитного потенциала требует представления магнитного потока в рассмотренной выше задаче в виде $\Phi = -\int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl$. Для получения уравнения относительно функции $\lambda(x, y)$ охватим линию l весьма близким к ней замкнутым контуром (рис. 2), причем входящий в (1) интеграл $-\int_1^2 \mu_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl$ будем понимать как интеграл вдоль средней линии l контура. Задавая на контуре граничные условия для потенциала в виде $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_1}\right)_a = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_2}\right)_b$, выражающем непрерывность напряженности поля на линии l , находим:

$$\begin{aligned} \oint_l \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl &= \int_l \lambda_a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_a dl + \int_l \lambda_b \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_b dl = \\ &= \int_l (\lambda_a - \lambda_b) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_a dl. \end{aligned}$$

Из условия $\delta J = 0$ получаем, используя (1),

$$-\int_l \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_a dl + \int_l (\lambda_a - \lambda_b) \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_a dl = 0,$$

откуда

$$\lambda_a - \lambda_b = C = \text{const}.$$

Таким образом, сопряженная задача для величины λ описывается уравнением $\operatorname{div} \hat{\mu} \operatorname{grad} \lambda = 0$, причем источники поля распределены вдоль линии l , образуя двойной слой зарядов постоянной плотности, так что $\Delta \lambda = C = \text{const}$. С другой стороны, можно, варьируя (1) по потенциалу φ на контуре, записать $\oint_l \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} (\delta \varphi) dl = 0$, откуда $\left(\frac{\partial \lambda}{\partial n_1}\right)_a = -\left(\frac{\partial \lambda}{\partial n_2}\right)_b$, что означает непрерывность нормальной к l производной $\frac{\partial \lambda}{\partial n}$ и, следовательно, размещение на l двойного слоя зарядов. Этот результат можно получить, если от вихревого поля с источниками в точках 1 и 2 перейти к потенциальному полю, источником которого является эквивалентный «токама» в точках 1 и 2 двой-

ной слой «магнитных» зарядов [6].

Полностью аналогично рассмотренному получается уравнение относительно величины $\lambda(x, y)$ при поиске структуры и геометрии тела из условия экстремума МДС

$$F_{12} = \int_1^2 H dl = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{\mu_1} \int_1^2 \frac{\partial A}{\partial n} dl.$$

Как следует из изложенного выше, при $I = \varphi_1 - \varphi_2$ источниками поля λ сопряженной задачи являются «токи» различных знаков, размещенные в точках 1 и 2, тогда как при $I = \frac{1}{\mu_1} \int_1^2 \frac{\partial A}{\partial n} dl$ источником потенциального поля λ будет двойной слой зарядов, эквивалентный «токама» и опирающийся на точки 1, 2, т.е. аналогом МДС F является магнитный поток Φ в условиях применения потенциалов φ, A .

Задача об экранировании поля может быть сведена к поиску условий, в которых в двумерной области S экранирования функционалы различного вида принимают минимальные значения. В частном случае поток сквозь заданную поверхность S_0 внутри экрана, переходящую в условиях плоскопараллельного поля в линию, должен быть минимальным.

Задача нахождения уравнений относительно функции λ , рассмотренная выше, полностью соответствует задаче экранирования поля с той особенностью, что двумерная область S_μ , являющаяся сечением замкнутого экрана плоскостью $z = \text{const}$ преобразует исходную область в двухсвязную, так как экран имеет внутренний l_i и внешний l_e контуры, форма которых подлежит определению. Если требуется минимизировать поле во всем пространстве S_i внутри экрана, то можно использовать функционал вида $I = \int_{S_i} (\operatorname{grad} \varphi)^2 dS$, который при отсутствии источников внутри S_i можно записать в соответствии с теоремой Грина в виде $I = \oint_{l_i} \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl_i$ (здесь l_i — внутренний контур области S_μ). Возможен также поиск формы и структуры экрана при условии $I = \oint_{l_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^2 dl_i$.

Иной вид принимает функционал I при отыскании условий, при которых действующая на проводник с током электромагнитная сила достигает экстремального значения. Пусть на проводник сечением S_1 плоскостью $z = \text{const}$ с током плотностью $\Upsilon(x, y)$ действует со стороны внешнего магнитного поля электромагнитная сила $\underline{E}$, составляющая которой F_τ в направлении вектора $\underline{\tau}$ должна принять экстремальное значение. Управление значением осуществляется распределе-

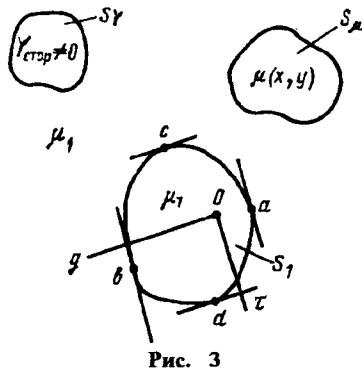


Рис. 3

нием сред в области S_μ (рис. 3). Вводя локальные ортогональные прямолинейные координаты g и τ , запишем силу в виде $F_\tau = \int_{S_1} Y(g, \tau) B_g dS$ и, ограничивая вихревую зону сечением S_γ , введем скалярный магнитный потенциал [6], так что

$$F_\tau = -\mu_1 \int_{S_1} Y(g, \tau) \frac{\partial \varphi}{\partial g} dS = -\mu_1 \int_{S_1} \left(\int_{S_1} Y(d, \tau) \frac{\partial \varphi}{\partial g} dg \right) d\tau.$$

Вычисляя последний интеграл, находим

$$I = -\mu_1 \int_{S_1} [Y(g_b(\tau)) \varphi(g_b(\tau)) - Y(g_a(\tau)) \varphi(g_a(\tau))] d\tau + \\ + \mu_1 \int_{S_1} Y'_g(g, \tau) \varphi(g, \tau) dS,$$

где $g_b(\tau)$, $g_a(\tau)$ — значения координат на сторонах контура сечения проводника; $Y'_g(g, \tau)$ — производная плотности тока по переменной g . При $Y = \text{const}$ получаем

$$I = -\mu_1 Y \int_{S_1} [\varphi(g_b(\tau)) - \varphi(g_a(\tau))] d\tau = \mu_1 Y \int_{S_1} F_{ab} d\tau,$$

где F_{ab} — МДС между точками контура сечения проводника, вычисленная вдоль пути, параллельного координате g . Варьируя функционал $J = I + \int_S \varphi \operatorname{div} \hat{\mu} \operatorname{grad} \lambda dS$ по потенциалу φ , находим уравнение относительно λ :

$$\operatorname{div} \hat{\mu} \operatorname{grad} \lambda = \begin{cases} +1 & \text{при } g, \tau \in cbd; \\ -1 & \text{при } g, \tau \in cad; \\ 0 & \text{при } g, \tau \notin cbd, cad. \end{cases}$$

При этом $\hat{\mu} = \mu_1$ всюду, кроме области S_μ .

Можно убедиться в том, что при использовании векторного магнитного потенциала (при $Y = \text{const}$)

$$F_\tau = Y \int_g \left(\int_{\tau} \frac{\partial A}{\partial \tau} d\tau \right) dg = Y \int_g [A(\tau_d(g)) - A(\tau_c(g))] dg,$$

и уравнение относительно λ принимает вид

$$\operatorname{div} \hat{\nu} \operatorname{grad} \lambda = \begin{cases} +1 & \text{при } g, \tau \in adb; \\ -1 & \text{при } g, \tau \in bca; \\ 0 & \text{при } g, \tau \notin adb, bca. \end{cases}$$

Сопоставление последних двух уравнений для λ , полученных при использовании скалярного φ и векторного A потенциалов, подтверждает эквивалентность полей токов и магнитных зарядов [6], согласно которому линейный ток, распределенный на контуре $acbd$, эквивалентен с точки зрения создаваемого им поля (вне контура) магнитному заряду, размещенному на том же контуре, но распределенному по отличному от тока закону.

Задача поиска распределения сред и геометрии тела представляет интерес при нахождении экстремальных значений коэффициента взаимной индукции M между двумя контурами или в частном случае между двумя парами проводов с токами (рис. 4).

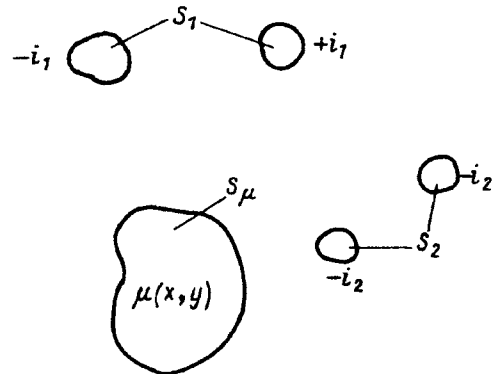


Рис. 4

Учитывая, что $M = (i_1 i_2)^{-1} \times \int_{S_2} Y_2 A_2 dS_2$,

где A_2 — векторный потенциал стороннего (в данном случае тока i_2) поля, запишем функционал в виде

$$J = \int_{S_2} Y_2 A_2 dS_2 + \int_S \lambda (\operatorname{div} \hat{\nu} \operatorname{grad} A + Y_1) dS$$

и после его варьирования по A получим

$$\delta J = \int_{S_2} Y_2 \delta A_2 dS_2 + \int_S \operatorname{div} \hat{\nu} \operatorname{grad} \lambda (\delta A) dS = 0,$$

откуда находим уравнение для λ :

$$\operatorname{div} \hat{\nu} \operatorname{grad} \lambda = \begin{cases} 0 & \text{вне } S_2; \\ -Y_2 & \text{в точках сечения } S_2. \end{cases}$$

Отметим, что если целью оптимизации является индуктивность проводов с токами $\pm i_1$, то вариация функционала

$$J = \int_{S_1} Y_1 A_1 dS_1 + \int_S \lambda (\operatorname{div} \hat{\nu} \operatorname{grad} A + Y) dS$$

приводит к уравнению $\operatorname{div} \hat{\nu} \operatorname{grad} \lambda = -Y_1$, откуда следует, что задача является самосопряженной и имеет тривиальные решения $\nu = \nu_{\min}$ либо $\nu = \nu_{\max}$ во всей области S_μ , причем выбор

$\nu_{\min}$ либо $\nu_{\max}$ определяется тем, является ли целью оптимизации минимальное или максимальное значение индуктивности. Подобный результат получается и в тех случаях, когда в аналогичных условиях ищут экстремальные значения емкости, сопротивления, проводимости.

Так как интегральные параметры (индуктивность, взаимная индуктивность и другие) зависят от свойств среды, то достижение заданных значений параметров может быть осуществлено подбором структуры и геометрии тел, для чего можно воспользоваться аппаратом оптимизации. При минимизации отклонения индуктивности либо взаимной индуктивности от заданного значения необходимо минимизировать функционал вида $I = \int_S (YA - C)^2 dS$, где A — векторный потенциал тока плотностью Y (когда речь идет об индуктивности) либо стороннего тока (при минимизации отклонения взаимной индуктивности от заданного значения). Уравнение относительно переменной λ имеет в этом случае, как нетрудно убедиться, вид $\operatorname{div} \hat{\nu} \operatorname{grad} \lambda = -2(YA - C)$. В задачах подобного типа источником поля является невязка, которая должна быть сведена к нулю. Это обстоятельство может усложнить решение и требует некоторой модификации алгоритма численного расчета.

При поиске оптимума в ограниченной области условия для потенциала на контуре l области зависят от вида минимизируемого функционала, который может быть задан как внутри области, так и на ее границе. Рассмотрим вначале первый случай, считая, что на l имеются участки, где задан потенциал, а также участки с заданной нормальной производной потенциала. Определим граничные условия для переменной сопряженной задачи и учтем, что варьирование потенциала можно выполнить лишь на тех участках контура, где задана его нормальная производная, тогда как варьирование нормальной производной — на участках с заданным потенциалом [3]. В силу изложенного выше после варьирования потенциала и нормальной производной в контурных интегралах (1), (2) на участках 1 и 2 границы (рис. 5) получаем, учитывая основную линию вариационного исчисления: на границе 1 $\lambda = 0$, на границе 2 $\frac{\partial \lambda}{\partial n} = 0$. Таким образом, граничные условия для переменной λ сопряженной задачи являются однородными того же рода, что и условия для потенциала на соответствующих участках границы.

Во втором случае, когда цель оптимизации выражается контурным интегралом по части границы области, для всей остальной части границы условия для переменной λ являются однородными того же рода, что и условия для потенциала.

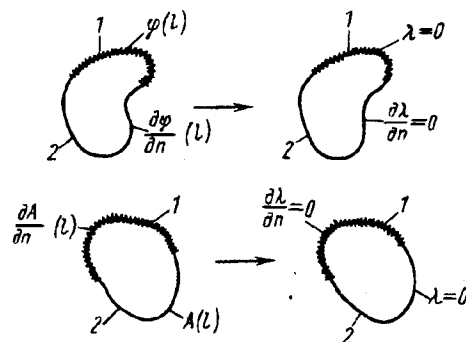


Рис. 5

Пусть целью оптимизации является поток вектора напряженности поля $I = - \int_c^d \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl$ на части cd границы, где задан потенциал $\varphi = \text{const}$ (рис. 6). Тогда уравнение $\delta J = 0$ можем записать в виде

$$- \int_c^d \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dl + \oint_l \lambda \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dl + \oint_l \frac{\partial \lambda}{\partial n} (\delta \varphi) dl,$$

откуда следует, что на участке cd границы следует задать условие $\lambda = \text{const} \neq 0$. Решая задачу с помощью векторного потенциала, предварительно выразив поток участка cd в виде (рис. 6)

$$A_d - A_c = \int_c^d (\beta_d A - \beta_c A) dl,$$

где β_d, β_c — дельта-функция, отличные от нуля в точках d и c соответственно, из условия

$$\int_c^d (\beta_d - \beta_c) \delta A dl + \oint_l \frac{\partial \lambda}{\partial n} (\delta A) dl + \oint_l \lambda \delta \left(\frac{\partial A}{\partial n} \right) dl = 0$$

находим

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n} = \begin{cases} +1 & \text{в точке } c; \\ -1 & \text{в точке } d; \\ 0 & \text{в остальных точках линии } cd. \end{cases}$$

В частном случае, когда точки d и b контура совпадают, и, следовательно, потенциал A_d задан и не варьируется, на всем участке cd в сопря-

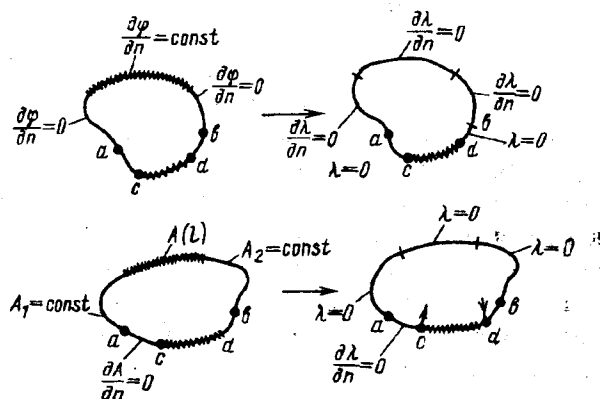


Рис. 6

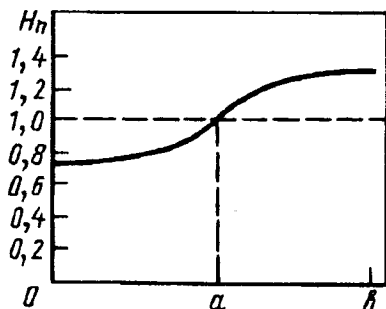


Рис. 8

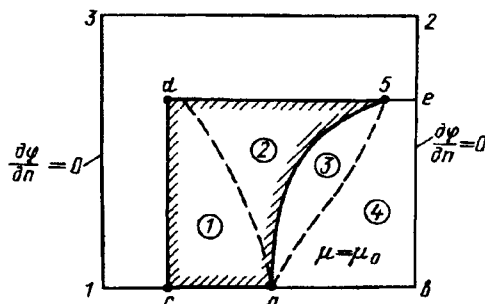


Рис. 10

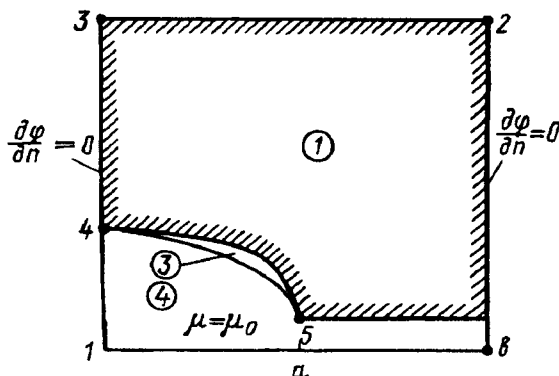


Рис. 9

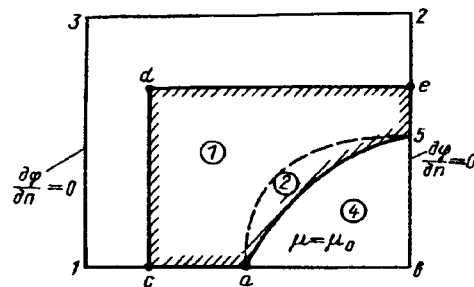


Рис. 11

$\mu_{\max}/\mu_{\min}$ было тем же, что связано с увеличением потока Φ_{ab} при заполнении области средой с магнитной проницаемостью $\mu_{\max}$. Результаты расчетов выявили существенную зависимость решения от значения $\mu_{\max}/\mu_{\min}$.

На рис. 10, 11 показана форма оптимального экрана с заданной внешней границей cde . В качестве цели оптимизации принят минимум потока $\Phi = -\mu_{\min} \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl$ на участке ab границы lb в области $lb23$. Задача решена при заданном потоке $\Phi=1$ (рис. 10) или МДС $F=1$ (рис. 11). Условия на границе $lb23$ области, а также обозначения цифрами 1, 2, 3, 4 приняты те же, что и выше.

Рассмотренные задачи были также решены одним из известных методов оптимизации в классе изотропных сред. Сопоставление решений обоими методами выявило их совпадение в классе изотропных сред; изложенный метод оптимизации более экономичен и позволяет улучшить решение за счет возможности его поиска в классе анизотропных сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стоян Ю.Г., Путятин В.П. Оптимизация технических систем с источниками физических полей. — Киев: Наукова думка, 1988.
2. Арман Ж.П. Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимального конструирования. — М., 1977.
3. Троицкий В.А., Петухов Л.В. Оптимизация формы упругих тел. — М.: Наука, Главная редакция физико-математ. лит-ры, 1982.
4. Frullani S. et al. Optimization of the magnetic elements of the multipurpose spectrometer (MPC). — Trans. of IEEE, Magnetics 1992, № 1, vol. 28.
5. Гибянский Л.В., Лурье К.А., Черкаев А.В. Оптимизация фокусировки теплового потока неоднородной теплопроводящей средой (задача о термолинзе). — ЖТФ, 1988, т. 58, № 1.
6. Демирчян К.С., Чечурин В.Л. Машинные расчеты электромагнитных полей. — М. Высшая школа, 1986.

[21.03.94]

Автор: Чечурин Владимир Леонидович окончил электромеханический факультет Ленинградского политехнического института (ЛПИ) в 1962 г. Защитил докторскую диссертацию по теме «Метод магнитных зарядов и его приложения для расчета статических и квазистационарных электромагнитных полей» в 1983 г. Профессор кафедры теоретических основ электротехники Санкт-Петербургского государственного технического университета (бывш. ЛПИ).

Расчет электрических и энергетических параметров многослойного индуктора с самокомпенсацией реактивной мощности

КУВАЛДИН А.Б., АНДРЮШИН Н.Ф., ЗАХАРОВ И.В.

Для снижения реактивной мощности и активных потерь предложена специальная конструкция многослойного индуктора, выполняемого из двух металлических лент с диэлектрической прокладкой между ними. При этом индуктивность катушки компенсируется емкостью между лентами. Разработанная математическая модель такого индуктора реализована в виде пакета программ для расчета распределения токов и напряжений по длине индуктора, а также энергетических показателей, в том числе электрического КПД и коэффициента мощности. Исследованы распределение плотности тока в индукторе и перенапряжения, возникающие вследствие резонанса. Показана возможность применения индукторов данного типа.

Ключевые слова: многослойные индукторы, математическая модель, энергетические показатели, расчет

Вопросы, связанные с разработкой математического аппарата, используемого для расчетов индукторов с высокими технико-экономическими показателями, во многом решены [1–3]. В предложенных методах основное внимание было уделено оптимизации конструкций индуктора (например за счет многослойности) с целью снижения потерь активной мощности, т.е. повышения коэффициента полезного действия. Снижение реактивной энергии, потребляемой индуктором (составляет порядка 70% полной), достигается в основном техническими средствами искусственной компенсации, требующими дополнительных материально-технических затрат.

Существенно снизить значение реактивной мощности в индукционной установке возможно при использовании индуктора с самокомпенсацией реактивной мощности (ИСРМ) [4], который представляет собой конструкцию, где совмещены функции нагревательного устройства и конденсатора. Индуктор выполнен из двух проводящих лент, изолированных друг от друга диэлектриком, в виде многослойной катушки (рис. 1). Подключением источника питания к началу первого проводника и концу второго при разомкнутых соответственно конце первого и начале второго достигается принудительно согласное направление токов в разноименных проводниках и суммирование магнитных полей, создаваемых этими токами. Напряженность суммарного поля, определяющая степень нагрева загрузки, зависит от числа ампер-витков Iw обмотки индуктора, варьи-

Special construction of multilayer inductor for decreasing reactive power and active losses is proposed. Inductor consists of two metallic bands with dielectric layer between them. Inductance of coil is compensated by the capacity between bands. Mathematical model of this inductor is realized as a programme package for calculation of distribution of currents and voltages along inductor and of energetic parameters, including electrical efficiency and power factor. Distribution of current density in inductor and overvoltages in consequence of resonance are investigated. Possible application of such an inductor is shown.

Key words: multilayer inductor, mathematical model, energetic parameters, calculation

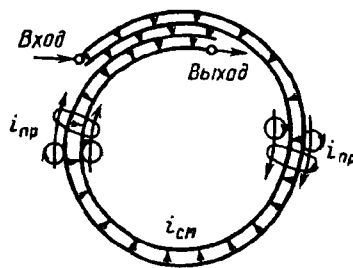


Рис. 1. Эскиз многослойного индуктора с самокомпенсацией реактивной мощности (один виток); стрелками показаны токи в проводниках ($i_{пр}$) и диэлектрике ($i_{см}$)

рованием которых при заданной частоте источника питания обеспечивается работа индуктора в режиме резонанса при чисто активном входном сопротивлении $R_{вх}$. При этом отпадает необходимость в применении средств искусственной компенсации. Указанное выше подключение источника питания приводит к протеканию в обмотке тока, который в токоведущих проводниках существует в виде тока проводимости $i_{пр}$, а в диэлектрике — в виде тока смещения $i_{см}$.

Процессы, протекающие в ИСРМ, существенно отличающиеся от процессов в индукторе традиционного исполнения, ставят ряд самостоятельных задач (распределение тока и напряжения по длине обмотки индуктора, расчет потерь активной мощности в обмотке и др.), решение которых невозможно путем прямого использования математического аппарата, например [5] или [2].

Так, в [5] предложено решение задачи распределения тока и напряжения по длине катушки

индуктивности, конструкция которой аналогична конструкции ИСРМ, аналитическим методом. Авторами рассмотрен общий случай, без учета специфики индукционного нагрева, в частности наличия в рабочей области индуктора загрузки и степени ее влияния на распределение искомых параметров.

Учесть большое количество влияющих факторов, а также устранить недостатки аналитического метода решения позволяют численные методы расчетов, основанные на использовании быстродействующих ЭВМ.

В статье представлен математический аппарат моделирования, позволяющий рассчитывать и исследовать рассматриваемые индукторы (рис. 2) в широком диапазоне изменения геометрических

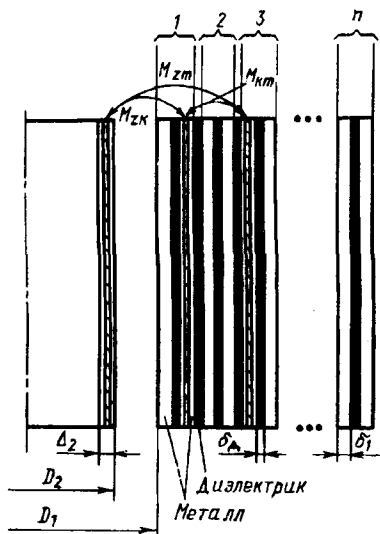


Рис. 2. Эскиз системы «многослойный индуктор с самокомпенсацией реактивной мощности — загрузка», где M_{zk} , M_{zm} , M_{km} — взаимные индуктивности между загрузкой и k -м элементом разбиения обмотки, загрузки и m -м элементом разбиения обмотки, k -м и m -м элементами разбиения обмотки соответственно

размеров обмотки, электрофизических параметров материала, уровня охлаждения, влияния загрузки, частоты источника питания. Он основан на использовании разработанных программ, одна из которых позволяет получить распределение тока и напряжения по длине обмотки индуктора. Необходимость этого возникла в связи с тем, что ток в ИСРМ, в отличие от индуктора традиционного исполнения, не будет оставаться постоянным в каждой точке x обмотки по ее длине и будет отличаться от тока в точке $x + \Delta x$ на значение $\frac{\partial i}{\partial x} \Delta x$. Это происходит потому, что вследствие сильной емкостной связи между отдельными слоями обмотки и несовершенства изолирующего диэлектрика ток ответвляется от одного проводника к другому в виде тока смещения $C dx \frac{\partial u}{\partial t}$ и тока проводимости $G dx$.

Напряжение так же как и ток, не будет оставаться постоянным в любой точке x индуктора вследствие падения на активном $R dx$ и индуктивном $L dx \frac{\partial i}{\partial t}$ сопротивлениях, а также вследствие наличия взаимной индуктивности проводников. Таким образом, уравнения для определения напряжения и тока в любой точке x обмотки индуктора запишутся как

$$-\frac{\partial u_k}{\partial x} = R_k i_k + L_k \frac{\partial i_k}{\partial t} + \sum_{m=1}^n M_{km} \frac{\partial i_m}{\partial t}; \quad (1)$$

$$-\frac{\partial i_k}{\partial x} = G_k u_k + \sum_{m=1}^n G_k (u_k - u_m) + C_k \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{m=1}^n C_{km} \frac{\partial (u_k - u_m)}{\partial t}, \quad (2)$$

где индекс k относится к рассматриваемому элементу обмотки, а индекс m — ко всем остальным.

Используя конечно-разностный метод разбиваем проводник индуктора на элементы в радиальном направлении. При этом уравнения (1) и (2) для элемента с номером k запишутся как

$$-\dot{U}_k = R_k \dot{I}_k + j\omega L_k \dot{I}_k + j\omega \sum_{m=1}^n M_{km} \dot{I}_k; \quad (3)$$

$$-\dot{I}_k = G_k \dot{U}_k + \sum_{m=1}^n G_{km} (\dot{U}_k - \dot{U}_m) + j\omega \left(C_k \dot{U}_k + \sum_{m=1}^n C_{km} (\dot{U}_k - \dot{U}_m) \right). \quad (4)$$

Решение задачи при использовании метода конечных разностей сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей (пример для четырех участков):

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & 0 & 0 \\ -Z_{21} & Z_{22} & -Z_{23} & 0 \\ 0 & -Z_{32} & Z_{33} & -Z_{34} \\ 0 & 0 & -Z_{43} & Z_{44} \\ Z_{51} & Z_{52} & -Z_{53} & -Z_{54} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{15} \\ Z_{25} \\ Z_{35} \\ Z_{45} \\ Z_{55} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \\ \dot{U} \end{bmatrix}$$

где $Z_{11}, \dots, Z_{55}$ — собственные комплексные сопротивления участков индуктора.

Остальные сопротивления, входящие в уравнения данной системы, являются взаимными сопротивлениями и определяют взаимную связь между смежными участками, а также между участками и загрузкой. Многослойная обмотка индуктора разбивается на элементарные участки, длина которых в зависимости от требуемой точ-

ности расчета равна длине витка, половины витка и т.д., в пределах которых плотность тока в аксиальном направлении принимается постоянной. Для решения СЛАУ использовалась модификация метода Гаусса — метод Гаусса с выбором главного элемента, что позволяет уменьшить вычислительную погрешность, поскольку в качестве диагонального выбирается то неизвестное, при котором коэффициент является наибольшим по абсолютной величине.

На рис. 3 представлено рассчитанное по описанной выше программе распределение тока по длине двадцатипятислойной системы индуктор—загрузка в резонансном и околорезонансном режимах. Показано, что у полностью скомпенсированного индуктора распределение тока по длине обмотки весьма близко к линейному. Причем ток, спадая от максимального значения на входе до нуля к периферии в одном проводнике, в другом соответственно возрастает. При наличии емкостного или индуктивного характера входного сопротивления $Z_{вх}$ индуктора распределение тока по длине обмотки сильно отличается от линейного. При этом большая нелинейность соответствует индуктивному характеру входного сопротивления.

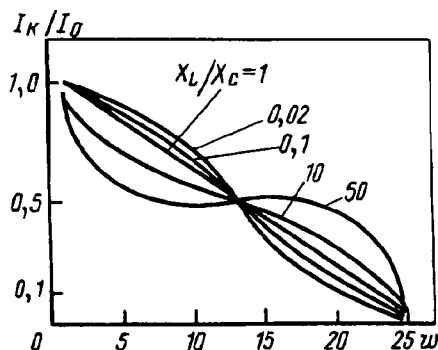


Рис. 3. Влияние индуктивного X_L и емкостного X_C сопротивлений на распределение тока по длине обмотки индуктора; k — элемент разбиения обмотки индуктора

Исследование распределения потенциала по длине обмотки индуктора показало, что оно также весьма близко к линейному. Характерно, что напряжение между разноименными проводниками обмотки постоянно во всей длине и не зависит от координаты x .

Следующая модель предназначена для исследования влияния распределения тока по ширине проводника на энергетические показатели ИСРМ. Она базируется на программе «Model 1» [2] и является ее модификацией. При прямом использовании программы «Model 1» для расчета ИСРМ невозможно учесть зависимость тока в разноименных проводниках от координаты x . Модель основана на методе индуктивно связанных эле-

ментов. Частотный диапазон работы ИСРМ широк (от промышленной до повышенной частоты с резко выраженным поверхностным эффектом), поэтому использование метода индуктивно связанных элементов является оправданным, так как аналогия между загрузкой и тонкостенным витком является приемлемой. Система индуктор—загрузка представляется в виде контуров с током. Загрузка заменяется цилиндрическим витком, радиальный размер которого равен глубине проникновения Δ_2 электромагнитной волны в материал загрузки.

Многослойный индуктор представляется в виде контуров с током, число которых равно удвоенному количеству витков w в обмотке. Для определения распределения тока по сечению витка все проводники и загрузка разбиваются на элементарные кольца. Число разбиений более пяти нецелесообразно вследствие резкого увеличения порядка СЛАУ, объема оперативной памяти ЭВМ и времени счета без существенного уменьшения ошибки расчета интегральных параметров, которая, как показал сравнительный анализ, не превышала 7%. Характерно, что несмотря на непостоянство в любой точке x индуктора токов в разноименных проводниках i_1 и i_2 , сумма их не зависит от координаты x , т.е.

$$i_1 + i_2 = \text{const.} \quad (5)$$

Отличием модифицированной программы является учет изменения тока в разноименных проводниках по длине обмотки индуктора. Таким образом, решить СЛАУ в данном случае можно, введя реальные значения тока, меняющегося в аксиальном направлении. Определив токи и напряжения на элементах разбиения, рассчитываются энергетические параметры системы (электрический КПД и $\cos \varphi$).

На рис. 4 представлено полученное по данной программе распределение тока по сечению разноименных проводников ИСРМ. Показано, что наиболее неравномерно ток распределен в слоях индуктора, расположенных у входа, причем степень неравномерности тем больше, чем больше число слоев. Для слоев, находящихся в середине обмотки, характерна относительная равномерность

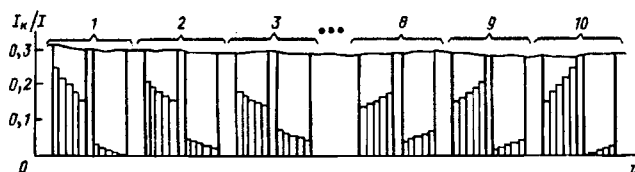


Рис. 4. Распределение тока по сечению проводника при следующих параметрах обмотки индуктора: $\delta_1/\Delta_1=1$; $D_1=0,3$ м; $\delta_d=50 \cdot 10^{-6}$ м, где I_k — ток k -го элемента разбиения обмотки индуктора; I — ток проводника индуктора ($I=I_{вх}/2$)

распределения тока независимо от их толщины. По сравнению с многослойным индуктором традиционного исполнения, в рассматриваемом индукторе распределение тока носит более равномерный характер, что объясняется сильным влиянием погонной емкостной проводимости, оказывающей компенсирующее воздействие на индуктивное сопротивление витка.

Расчеты позволяют оценить потери в индукторе с самокомпенсацией при учете неравномерности распределения плотности тока. Оценка проводилась в сравнении с конструкцией индуктора традиционного типа.

Было определено, что при равной толщине токоведущих проводников в исследуемых конструкциях ($\delta_1 = \delta_{16аз}$) потери в индукторе с самокомпенсацией меньше на 30–35%. Однако при этом расход металла в индукторе с самокомпенсацией вдвое больше. При $\delta_1 = \delta_{16аз}$, т.е. при равном расходе металла, потери в ИСРМ больше на 30–33%. Оптимизируя исследуемую конструкцию по равенству потерь с базовым индуктором, получаем несколько больший расход металла (около 30%) в случае ИСРМ.

Исследования по совершенствованию конструкции ИСРМ позволили предложить эффективные мероприятия по значительному снижению в нем расхода металла [6]. Эксперименты показали, что в рабочем режиме вследствие резонанса напряжений в обмотке индуктора с самокомпенсацией возникают перенапряжения, характеризующиеся добротностью обмотки Q . Уровень перенапряжения определяется перенапряжением на индуктивном и емкостном элементах индуктора:

$$U_L = \frac{\omega L U_{вх}}{\sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}; \quad (6)$$

$$U_C = \frac{U_{вх}}{\omega C \sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \quad (7)$$

Так, для двадцатипятислойной секции индуктора при толщине диэлектрика $\delta_d = (200 \div 300)$ мкм была достигнута высокая добротность ($Q = 100 \div 300$), которая с понижением охлаждения обмотки индуктора до температур $77 \div 23$ К резко возрастала за счет снижения активного сопротивления индуктора. Высокий уровень перенапряжений выдвигает повышенные требования к электрической прочности $E_{пр}$ диэлектриков, используемых в индукторе. С этой точки зрения предпочтительны полимерные диэлектрические материалы на основе политетрафторэтилена ($E_{пр} = 100\text{--}200$ кВ/м). Однако высокая добротность рассматриваемого индуктора имеет положительную сторону, поскольку позволяет получить большие токовые нагрузки при малых напря-

жениях источника питания, что дает возможность применять низковольтные источники питания и тем самым улучшить экономические показатели индукционной установки.

Выводы. 1. Разработанный математический аппарат позволяет проводить эффективные исследования осесимметричной цилиндрической системы индуктор—загрузка в широком диапазоне изменения ее геометрических и электрофизических характеристик.

2. Теоретически оправдано использование метода индуктивно связанных элементов, на котором базируются разработки, позволяющего с достаточной точностью проводить инженерные расчеты с применением ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кувалдин А.Б. Индукционный нагрев ферромагнитной стали. — М.: Энергоатомиздат, 1988.
2. Соколов М.М., Кувалдин А.Б., Сальникова И.П. Применение метода индуктивно связанных элементов для электромагнитного расчета многослойных индукторов. — Электричество, 1987, № 1.
3. Аркусский Л.Ю., Слухоцкий А.Е. Расчет потерь в цилиндрических обмотках из многослойного провода. — ЭП. Электротермия, 1971, вып. 107.
4. Андрияшин Н.Ф., Захаров И.В. Снижение реактивной мощности в индукционной ЭТУ. — Сб. научн. трудов, МЭИ 1988, № 160.
5. Демирчян К.С., Гусев Г.Г. Синтез схем замещения катушки индуктивности с самокомпенсацией реактивной мощности. — Изв. АН СССР. Сер. Энергетика и транспорт, 1987, № 2.
6. А.с. 1538287 (СССР). Устройство для индукционного нагрева / М.М. Соколов, А.Б. Кувалдин, Г.Г. Гусев и др. — Оpubл. в Б.И., 1990, № 3.

[17.03.94]

Авторы: Кувалдин Александр Борисович окончил факультет электрификации промышленности и транспорта Московского энергетического института (МЭИ) в 1959 г. Докторскую диссертацию на тему «Устройства индукционного нагрева ферромагнитной стали» защитил в МЭИ в 1988 г. Профессор кафедры автоматизированных электротехнологических установок и систем МЭИ.

Андрияшин Николай Федорович окончил факультет теоретической и экспериментальной физики Московского инженерно-физического института в 1959 г. Защитил кандидатскую диссертацию по вопросам взаимодействия проникающего излучения с веществом в 1968 г. Заведующий отделом Центра Роскоминформ Министерства сельского хозяйства РФ.

Захаров Игорь Вячеславович окончил энергетический факультет Павлодарского индустриального института в 1981 г. Защитил кандидатскую диссертацию в области индукционных электротермических установок в МЭИ в 1988 г. Доцент кафедры «Электроснабжение промышленных предприятий» Казахского государственного технического университета (г. Павлодар).

Влияние высокопроводящих барьеров на развитие дендритов в диэлектрике

КАРПОВ Д.И., ЛОПАТИН В.В., НОСКОВ М.Д.

С помощью метода компьютерного моделирования рассмотрено влияние высокопроводящих барьеров на развитие разряда в конденсированном диэлектрике. Исследование выполнено для модифицированной фрактальной модели пробоя. Проведено сопоставление с экспериментальными результатами. Установлено, что характер дендритообразования определяется соотношениями между тремя характерными временами: роста дендрита τ_d , релаксации заряда в барьере τ_b и в разрядных каналах τ_c . Показано, что наиболее эффективными является использование барьеров с $\tau_b \leq \tau_d$.

Ключевые слова: конденсированные диэлектрики, разряды, высокопроводящие барьеры, фрактальные модели пробоя, исследования

Введение. Увеличение электрической прочности высоковольтной изоляции может быть достигнуто путем создания условий, затрудняющих развитие дендритов, возникновение которых предотвратить не удастся. Одним из методов, позволяющих затормозить развитие разряда в изоляции, является введение барьеров-прослоек из материалов с высокой диэлектрической проницаемостью [1 и 2], проводимостью [3] или электрической прочностью [4]. В одних случаях барьер является механическим препятствием для развития канала разряда, в других приводит к перераспределению электрического поля в разрядном промежутке. Изменение поля может быть обусловлено оседанием на барьере избыточных зарядов, а также возникновением объемных зарядов вследствие созданной барьером неоднородности диэлектрической проницаемости и/или проводимости диэлектрика. Последнее в большей степени относится к конденсированным диэлектрикам.

Барьеры с высокой диэлектрической проницаемостью используются в производстве кабелей и изоляторов и достаточно хорошо исследованы. Менее изучено влияние барьеров с высокой электрической проводимостью. В настоящей статье делается попытка исследовать общие закономерности влияния высокопроводящих барьеров на пространственно-временные и токовые характеристики дендритообразования. Такая задача актуальна и потому, что обычно барьер с высокой проницаемостью обладает и повышенной проводимостью. Исследования проводились методом компьютерного моделирования, результаты которого сопоставлялись с экспериментальными данными. Моделирование выполнялось в рамках

A method of computer simulation is used to study the influence of high-conductive barriers on the discharge development in a condensed dielectric. The studies have been carried out by means of the modified fractal breakdown model; the results obtained are compared with the experimental data. The dendrite formation has been found to be characterized by the relationships between the specific times of the dendrite growth τ_d , charge relaxation in barrier τ_b and in discharge channels τ_c . Application of the barrier with $\tau_b \leq \tau_d$ is shown to be more efficient.

Key words: condensed dielectric, high-conductive barriers, discharges, fractal breakdown models, investigation

фрактальной модели пробоя (ФМП) диэлектриков [5 и 6].

К настоящему времени на основе ФМП удалось описать развитие дендритов [5], кустообразных и линейных разрядных структур [6], а также трансформацию их друг в друга [7]. Плодотворным оказалось применение ФМП для описания эффектов внедренного заряда [8], барьеров с повышенной электрической прочностью [9] и диэлектрической проницаемостью [10]. Для применения ФМП к описанию дендритообразования в диэлектриках с высокопроводящим барьером была проведена существенная модификация модели.

Описание модели. В рамках ФМП процесс дендритообразования описывается стохастическим процессом роста фрактальной структуры. Стохастичность обусловлена флуктуациями как параметров плазмы в разрядных каналах, так и состояния диэлектрика. Основным допущением ФМП является то, что ответственные за развитие дендрита процессы определяются локальной напряженностью поля E . Это означает, что вероятность роста дендрита в данном месте диэлектрика выражается через напряженность поля E и параметры, определяющие свойства диэлектрика. Хорошее соответствие с экспериментом дает выбор закона для вероятности роста P в виде [5–10]:

$$P = \begin{cases} E^\eta / Z & \text{при } E > E_c; \\ 0 & \text{при } E < E_c, \end{cases} \quad (1)$$

где Z — нормирующий множитель; $Z = \sum E^\eta$ (суммирование выполняется по всем возможным направлениям роста). (Значения параметра роста

η и критической напряженности E_c зависят от свойств диэлектрика и происходящих при пробое процессов.)

В настоящей работе ФМП реализована как двумерная дискретная модель роста на квадратной решетке. Дендрит растет на одно ребро или диагональ решетки за один шаг. На каждом шаге роста n потенциалы $\Phi_{ij}^{(n)}$ во всех узлах (i, j) решетки рассчитываются методом итераций согласно уравнению Пуассона в дискретной форме:

$$\Phi_{ij}^{(n)} = \frac{1}{4} (\Phi_{i+1,j}^{(n)} + \Phi_{i-1,j}^{(n)} + \Phi_{i,j+1}^{(n)} + \Phi_{i,j-1}^{(n)} + \rho_{ij}^{(n)}), \quad (2)$$

где $\rho_{ij}^{(n)}$ — условный заряд в узле с координатами (i, j) на шаге роста n .

Граничными условиями являются потенциалы электродов. Изменение распределения $\Delta\rho_{ij}^{(n)}$ в каналах дендрита и диэлектрике определяется из закона Ома и уравнения непрерывности после каждого шага роста n :

$$\Delta\rho_{ij}^{(n)} = -\Delta t^{(n)} \sum \left(\frac{\sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{lm}^{(n)}}{2} \right) (\Phi_{ij}^{(n)} - \Phi_{lm}^{(n)}). \quad (3)$$

Здесь $\sigma_{ij}^{(n)}$ — проводимость на n -м шаге, соответствующая узлу (i, j) , $\Delta t^{(n)}$ — интервал времени, соответствующий n -му шагу роста, суммирование выполняется по соседним с (i, j) узлам. Исходя из законов теории вероятностей, в качестве первого приближения можно положить, что интервал $\Delta t^{(n)}$ обратно пропорционален величине нормировочного множителя $Z^{(n)}$ на n -м шаге в соотношении (1):

$$\Delta t^{(n)} = v/Z^{(n)}, \quad (4)$$

где v — параметр скорости роста дендрита.

Протекающий в каналах дендрита ток приводит к увеличению их проводимости. В настоящей модели для изменения проводимости канала $\Delta\sigma_{ij}^{(n)}$ на n -м шаге роста был выбран эмпирический закон Ромпе—Вайцеля [11], записанный в виде

$$\Delta\sigma_{ij}^{(n)} = \chi \sigma_{ij}^{(n)} (\Delta\Phi_{ij})^2 \Delta t^{(n)}, \quad (5)$$

здесь χ — параметр, связывающий энерговыделение в каналах с их проводимостью; $\Delta\Phi_{ij}$ — падение напряжения вдоль канала.

Начальная проводимость образовавшегося канала равна σ_0 . Вне каналов проводимость основного диэлектрика σ и барьерного слоя σ_b принимается постоянной.

Результаты и обсуждение. На основе описанной модели было создано программное обеспечение и проведена серия компьютерных экспериментов с целью изучения влияния проводящих барьеров. Моделирование выполнялось для системы острие—плоскость с коэффициентом усиления поля

на острие 2,6. Потенциал острия Φ_0 оставался постоянным в процессе моделирования. Диэлектрик описывался решеткой из 40×60 узлов. Значения проводимости $\sigma_{ij}^{(0)}$ были распределены так, чтобы имитировать барьер с высокой проводимостью $\sigma_b > 10\sigma$, расположенный между острием и плоскостью (рис. 1,а); в начальный момент времени объемные заряды в диэлектрике отсутствовали, т.е. $\rho_{ij}^{(0)} = 0$.

Исследования показали, что характер дендри-

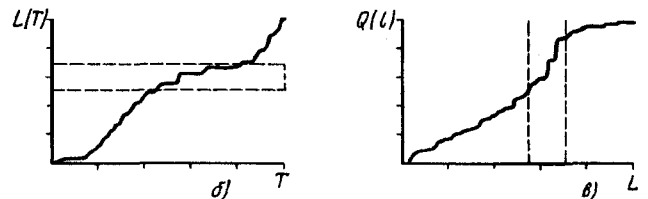
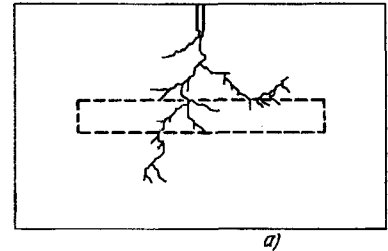


Рис. 1. Задержка развития дендрита на барьере: а — типичная картина разряда при $\tau_b \approx \tau_d$; б — зависимость глубины проникновения L дендрита в диэлектрик от времени; в — зависимость внедренного в диэлектрик заряда от L (пунктиром выделено положение барьера)

тообразования определяется соотношениями между тремя различными характерными временами: роста дендрита в основном диэлектрике τ_d , релаксации заряда в барьере τ_b и каналах дендрита τ_c . Время роста дендрита τ_d прямо пропорционально параметру v и убывает с увеличением напряженности поля. Время релаксации заряда в барьере τ_b прямо пропорционально диэлектрической проницаемости и обратно пропорционально проводимости и толщине барьера. Время τ_c определяет скорость выноса заряда в диэлектрик и уменьшается с ростом начальной проводимости каналов σ_0 параметра χ и разности потенциалов Φ_0 между электродами.

Проводящий барьер задерживает развитие дендрита, если время релаксации заряда в барьере τ_b меньше времени роста дендрита τ_d . В этом случае после достижения дендритом барьера его скорость роста уменьшается (рис. 1,б). Одновременно с этим увеличивается ток через разрядные каналы, т.е. происходит разряд емкости между электродом и барьером (рис. 1,в). Дальнейшее развитие дендрита зависит от величины проводимости разрядных каналов. Для высокопроводящих каналов ($\tau_c < \tau_d$) характерно расползание

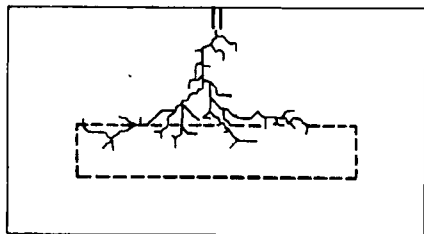


Рис. 2. Моделирование трекинга на проводящем барьере ($\tau_c < \tau_b < \tau_d$)

(трекинг) разрядной структуры по поверхности и огибание барьера (рис. 2). Если сформировавшиеся каналы дендрита имеют малую про-

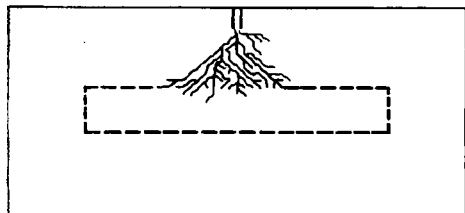


Рис. 3. Увеличение ветвистости дендрита после достижения высокопроводящего барьера при ($\tau_b < \tau_d < \tau_c$)

водимость ($\tau_c > \tau_d$), то происходит увеличение числа ветвей дендрита, но прорастания сквозь барьер не наблюдается (рис. 3). Проводящий барьер не оказывает заметного влияния на развитие разряда, если $\tau_b > \tau_d$. В этом случае дендрит прорастает сквозь барьер без замедления.

Подобные эффекты наблюдались при изучении влияния барьеров на развитие дендритов в полиэтилене с проводимостью $\sigma = 10^{-15}$ См/м [3]. При использовании в качестве барьера полупроводящего полиэтилена (σ_b от 10^{-2} до 10^{-12} См/м) остановка роста и увеличение ветвистости имеет место при $\sigma_b > 10^{-8}$ См/м. Если $\sigma_b < 10^{-8}$ См/м, дендрит достаточно быстро прорастал сквозь барьер. В этой статье также было отмечено увеличение разрядного тока при соприкосновении дендрита с барьером.

В случае барьера с очень большой проводимостью ($\tau_b \ll \tau_d$) рост дендрита по достижении барьера прекращается и происходит зарождение вторичных дендритов от краев проводящего барьера (рис. 4). В экспериментах [3] также наблюдалось инициирование вторичных дендритов с краев барьеров, если они изготавливались из металла.

Обнаруженные закономерности объясняются перераспределением электрического поля вследствие образования объемных зарядов на границе барьера. В реальных диэлектриках введение барьера сопровождается возникновением различных контактных эффектов на границе раздела двух материалов. Это также может влиять на развитие разряда. В данной статье мы выделили только макроскопический эффект неоднородности проводимости и исследовали его влияние на ден-

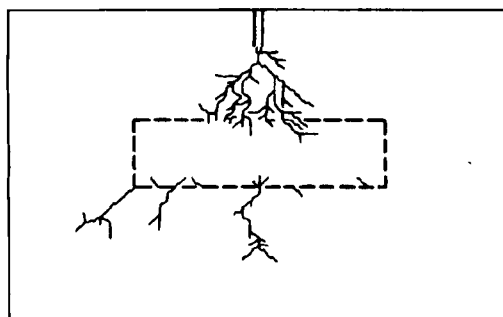


Рис. 4. Развитие вторичных дендритов от краёв проводящего барьера ($\tau_b \ll \tau_c < \tau_d$)

дритообразование. Тем не менее, результаты компьютерного моделирования согласуются с экспериментальными данными.

Таким образом, в рамках модифицированной ФМП удастся описать влияние проводящих барьеров на процесс дендритообразования. В частности, через характерные времена τ_d, τ_b, τ_c установлена связь между параметрами барьера, диэлектрика, разрядных каналов и скоростью роста дендрита. Исследования показали, что наиболее эффективным является использование барьеров с временем релаксации, соизмеримым с характерным временем роста дендрита ($\tau_b \approx \tau_d$). Полученные результаты и предложенная модель пробоя могут быть использованы для разработки барьерной изоляции, в частности для определения оптимальной толщины и проводимости барьера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Влияние барьеров с повышенной диэлектрической проницаемостью на характеристики дендритообразования полиметилметакрилата / О.С.Гефле, С.М.Лебедев, А.И.Затулий и др. — Электричество, 1988, № 10.
2. Казанчий Г.П., Ликах С.Ф. Барьеры с повышенной диэлектрической проницаемостью в полимерной монолитной электрической изоляции. — Электричество, 1990, № 6.
3. Кучинский Г.С., Лысаковский Г.Г., Пильщиков В.Е. Влияние промежуточных барьеров на скорость разрушения полиэтилена дендритами. — Материалы Второго симпозиума по физике диэлектрических материалов. — М.: МИРЭА, 1976.
4. Николаевский Н.Н. К вопросу о механизме барьерного эффекта в воздухе при импульсном напряжении. — Тр. ЛПИ, 1954.
5. Niemeyer L., Pietronero L., Wiesman H.J. Fractal dimension of dielectric breakdown. — Phys. Rev. Lett., 1984, vol. 52, № 12.
6. Wiesman H.J., Zeller H.R. A fractal model of dielectric breakdown and prebreakdown in solid dielectrics. — J. Appl. Phys., 1986, vol. 60, № 5.
7. Кухта В.Р., Лопатин В.В., Носков М.Д. Фрактальная модель трансформации разрядных структур в диэлектриках. — Письма в ЖТФ, 1992, т. 18, вып. 19.
8. Кухта В.Р., Лопатин В.В., Носков М.Д. Влияние внедренного объемного заряда на формирование разрядной структуры в диэлектрике. — Письма в ЖТФ, 1993, т. 19, вып. 23.
9. Sweeney P.J.J., Dissado L.A., Cooper J.M. Simulation of the effects of barriers upon electrical tree propagation. — J. Phys.D: Appl. Phys., 1992, vol. 25, № 1.
10. Развитие разряда в слоистых диэлектриках / О.С.Гефле, А.В.Демин, В.Р.Кухта и др. — Электричество, 1994, № 7.
11. Pompe R., Weizel W. Ueber das Toeplersche Funkengesetz. — Z. Physik, 1944, B.122, H.9-12.

[28.09.94]

Расчет распределения напряженности трехмерного электрического поля в неоднородном диэлектрике

РЕЗИНКИНА М.М., РЕЗИНКИН О.Л.

Описана методика расчета распределения напряженности трехмерного электрического поля в неоднородном диэлектрике, содержащем проводящие включения. Численное решение получено с помощью метода конечных разностей. Выполнен расчет переходного процесса измерения напряженностей электрического поля в слоях конденсаторной секции в процессе разряда конденсатора. Приведены рассчитанные картины эквипотенциальных линий вокруг дендритов, образующихся в процессе электрического старения полиэтиленовой изоляции.

Ключевые слова: конденсаторы, полиэтиленовая изоляция, неоднородные диэлектрики, дендриты, трехмерное электрическое поле

При разработке и эксплуатации электротехнических устройств необходима информация о распределении напряженности электрического поля в изоляции. Причем, в ряде случаев в качестве изоляции используются слоистые диэлектрики (например, «бумага—пленка», «бумага—масло»). Вследствие неидеальности используемых материалов, обусловленной технологией их изготовления, в толще диэлектрика присутствуют проводящие и непроводящие включения. Для расчета распределения напряженности электрического поля в такого рода диэлектриках, помещенных в электрическое поле, разработана расчетная методика, выполненная в трехмерной постановке. Большинство известных расчетных методик (см., например, [1]) не позволяет учесть объемную конфигурацию, а также произвольное расположение в диэлектрике проводящих и непроводящих включений.

Рассмотрим систему из двух плоских обкладок, между которыми расположен слоистый диэлектрик, содержащий проводящие включения. Нанесем на область диэлектрика прямоугольную сетку, узлы которой расположены на границах раздела сред. Выберем направление осей так, чтобы ось OY была перпендикулярна, а ось OX и

A method for calculation 3-D electrical field intensity distribution on heterogeneous dielectric with conductive inclusions is proposed. Numerical solution has been obtained by means of finite differences method. Calculation of transient process of changing of the electrical field intensity in the depth of the layers of capacitor section is performed. Calculated pictures of equipotential lines around dendrites formed during electrical ageing of the polyethylene insulation are presented.

Key words: capacitors, polyethylene insulation, heterogeneous dielectrics, dendrites, 3-D electrical field

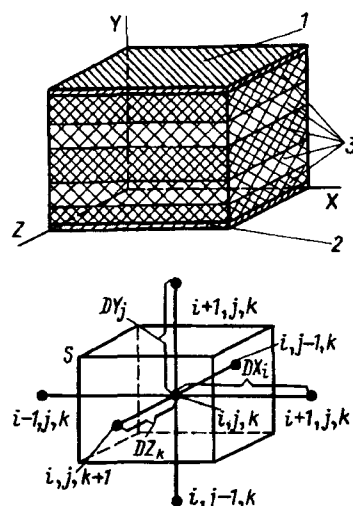


Рис. 1. Расчетная схема: 1, 2 — обкладки; 3 — слои диэлектрика

OZ — параллельны обкладкам (см. рис. 1). Будем полагать, что в пределах каждой из образовавшихся ячеек свойства среды однородны. Для каждого узла расчетной сетки запишем первый закон Максвелла, возьмем дивергенцию от обеих частей и проинтегрируем каждое слагаемое по S (где S — поверхность, охватывающая узел и разделяющая пополам расстояния между соседними

Авторы: Лопатин Владимир Васильевич окончил в 1967 г. электрофизический факультет Томского политехнического института (ТПИ). В 1993 г. защитил докторскую диссертацию в Институте сильноточной электроники Сибирского отделения РАН по теме «Физико-технические основы применения нитридной керамики в электрофизической аппаратуре». Заведующий лабораторией НИИ высоких напряжений (НИИ ВН) при Томском политехническом институте (ТПУ, ранее ТПИ).

Носков Михаил Дмитриевич окончил физический факультет Томского государственного университета (ГТУ) в 1984 г. В 1988 г. защитил в том же университете кандидатскую диссертацию по теме «Вопросы квантовой электродинамики с интенсивным внешним полем». Старший научный сотрудник НИИ ВН при ТПУ.

Карпов Денис Иванович окончил физический факультет ТГУ в 1994 г. Инженер НИИ ВН при ТПУ.

узлами). Проинтегрировав полученное выражение по времени, для момента времени t_m окончательно запишем:

$$\int_0^{t_m} \oint_S \gamma(t) E_n(t) ds + \oint_S \varepsilon(t_m) E_n(t_m) dS = 0, \quad (1)$$

где $E_n(t)$ — проекция напряженности электрического поля на нормаль к поверхности S в момент времени t ; $\gamma(t)$ и $\varepsilon(t)$ — удельная проводимость и относительная диэлектрическая проницаемость сред в момент времени t .

Первое слагаемое выражения (1) соответствует заряду, накопленному на границе раздела сред к моменту времени t_m . После замены интегрирования по времени суммированием по формуле трапеций, перенесем слагаемые, соответствующие временным шагам, предшествующим t_m , вправо, к известным и, выполнив подстановку $E = -\text{grad } \varphi$, запишем уравнение (1) в разностном виде:

$$\Lambda_x \varphi_{ijk}(t_m) + \Lambda_y \varphi_{ijk}(t_m) + \Lambda_z \varphi_{ijk}(t_m) = f_{ijk}(t_m), \quad (2)$$

где $\Lambda_x \varphi_{ijk}(t_m) = \varphi_{i-1,j,k}(t_m) AX_{ijk}(\lambda_{ijk}^{t_m}) - \varphi_{ijk}(t_m) \times (AX_{ijk}(\lambda_{ijk}^{t_m}) + BX_{ijk}(\lambda_{ijk}^{t_m})) + \varphi_{i+1,j,k}(t_m) BX_{ijk}(\lambda_{ijk}^{t_m})$; $\Lambda_y \varphi_{ijk}(t_m) = \varphi_{i,j-1,k}(t_m) AY_{ijk}(\lambda_{ijk}^{t_m}) - \varphi_{ijk}(t_m) (AY_{ijk}(\lambda_{ijk}^{t_m}) + BY_{ijk}(\lambda_{ijk}^{t_m})) + \varphi_{i,j+1,k}(t_m) BY_{ijk}(\lambda_{ijk}^{t_m})$; $\Lambda_z \varphi_{ijk}(t_m) = \varphi_{i,j,k-1}(t_m) AZ_{ijk}(\lambda_{ijk}^{t_m}) - \varphi_{ijk}(t_m) (AZ_{ijk}(\lambda_{ijk}^{t_m}) + BZ_{ijk}(\lambda_{ijk}^{t_m})) + \varphi_{i,j,k+1}(t_m) BZ_{ijk}(\lambda_{ijk}^{t_m})$; $\varphi_{ijk}(t_m)$ — значение потенциала (i, j, k) -го узла расчетной сетки в момент времени t_m ; $AX_{ijk}(\lambda_{ijk}^{t_m})$, $BX_{ijk}(\lambda_{ijk}^{t_m})$, $AY_{ijk}(\lambda_{ijk}^{t_m})$, $BY_{ijk}(\lambda_{ijk}^{t_m})$, $AZ_{ijk}(\lambda_{ijk}^{t_m})$, $BZ_{ijk}(\lambda_{ijk}^{t_m})$ — прогоночные коэффициенты в момент времени t_m (см. приложение); $\lambda_{ijk}^{t_m} = \varepsilon_{ijk}(t_m) + \gamma_{ijk}(t_m) \tau_0$; $\varepsilon_{ijk}(t_m)$, $\gamma_{ijk}(t_m)$ — соответственно величины относительной диэлектрической проницаемости и удельной проводимости (i, j, k) -й ячейки в момент времени t_m ; $\tau_0 = h_{t_m} / \varepsilon_0$; $\varepsilon_0 = 1/4\pi \cdot 9 \cdot 10^9$ Ф/м; h_{t_m} — величина шага по времени в момент времени t_m ($h_{t_m} = t_m - t_{m-1}$); $f_{ijk}(t_m)$ — разностный аналог выражения для заряда, накопленного на границе раздела сред к моменту времени t_m , без слагаемого, соответствующего текущему моменту времени (см. приложение).

При расчете использовались следующие граничные условия: по Y — заданные потенциалы на обкладках; по X и Z — однородные условия Неймана [2]. Начальные условия полагались нулевыми.

Для решения данного уравнения на каждом временном шаге был использован итерационный

метод переменных направлений. Из [2] известно, что данный метод используется для решения двумерных эллиптических задач. Несмотря на то, что полное теоретическое обоснование метода переменных направлений до сих пор отсутствует, во многих случаях его применение оказывается наиболее эффективным [3]. По аналогии с методом локально-одномерных схем [2] переход от l -й к $(l+1)$ -й итерации осуществлялся с помощью последовательного применения метода прогонки по направлениям X , Y и Z для трехточечных уравнений:

$$F_{IT} \varphi_{ijk}^{l+1/3} - \Lambda_x \varphi_{ijk}^{l+1/3} = F_{zy}^l; \quad F_{zy}^l = \Lambda_y \varphi_{ijk}^l + \Lambda_z \varphi_{ijk}^l + f_{ijk}(t_m) + F_{IT} \varphi_{ijk}^l; \quad (3)$$

$$F_{IT} \varphi_{ijk}^{l+2/3} - \Lambda_y \varphi_{ijk}^{l+2/3} = F_{zx}^{l+1/3}, \quad F_{zx}^{l+1/3} = \Lambda_x \varphi_{ijk}^{l+1/3} + \Lambda_z \varphi_{ijk}^{l+1/3} + f_{ijk}(t_m) + F_{IT} \varphi_{ijk}^{l+1/3}; \quad (4)$$

$$F_{IT} \varphi_{ijk}^{l+1} - \Lambda_z \varphi_{ijk}^{l+1} = F_{yx}^{l+2/3}, \quad F_{yx}^{l+2/3} = \Lambda_x \varphi_{ijk}^{l+2/3} + \Lambda_y \varphi_{ijk}^{l+2/3} + f_{ijk}(t_m) + F_{IT} \varphi_{ijk}^{l+2/3}, \quad (5)$$

где F_{IT} — итерационный параметр; φ_{ijk}^l — значение потенциала в момент времени t_m при вычислении l -й итерации.

Прогонка по X [см. (3)] осуществлялась во всей исследуемой области при каждом Y последовательно на всех слоях Z . Аналогично производилась погонка по Y [см. уравнение (4)] и по Z [см. уравнение (5)]. Описанная схема решения трехмерного уравнения (2) была реализована в виде программы для IBM PC на языке FORTRAN-77.

Для учета наличия в диэлектрике проводящих включений был использован следующий прием. В подобных расчетах относительная диэлектрическая проницаемость проводящих тел обычно полагается равной бесконечности: $\varepsilon_{пр} = \infty$ (см., например, [4, с. 234]). Поэтому величина относительной диэлектрической проницаемости ячеек, содержащих данные включения, выбиралась в F_{pr} раз большей, чем ε рассматриваемого диэлектрика. Величина удельной проводимости проводящих ячеек также выбиралась в F_{pr} раз большей, чем удельная проводимость γ рассматриваемого диэлектрика.

В результате математических экспериментов, заключавшихся в варьировании величины F_{pr} , обнаружено, что увеличение F_{pr} свыше 2500 не приводит к изменению распределению напряженности электрического поля в системе в рамках заданной при расчете относительной погрешности ($\varepsilon_{отн} = 3\%$). Таким образом, учет наличия в ди-

электрике проводящих включений, а также их появления в процессе электрического старения изоляции не связан с изменением граничных условий при расчете, меняются лишь свойства среды: областям с проводящими включениями присваиваются ϵ и γ , в F_{pr} раз превышающие ϵ и γ диэлектрика.

Для тестирования разработанной программы были выполнены расчеты распределения напряженности электрического поля в системах «стержень—плоскость» и «скругленный стержень на поверхности плоского электрода». Сравнение результатов расчета напряженности электрического поля вблизи проводящих выступов, выполненного с помощью данной методики, с вычисленными с помощью аналитических методов значениями максимальной напряженности электрического поля (см. [5], стр. 65, 85), показало их совпадение в пределах 3 %, что лежит в пределах заданной при расчете относительной погрешности.

С помощью описанной выше методики был произведен расчет изменения напряженности электрического поля в слоях изоляции в процессе разряда предварительно заряженной конденсаторной секции. Напряжение на обкладках $U(t)$ было задано в виде затухающей косинусоиды с $U_0 = 10$ кВ, периодом $T = 0,423 \cdot 10^{-5}$ с и декрементом затухания $\delta = 0,8099 \cdot 10^6$. Исследуемая секция содержала чередующиеся слои бумаги ($\epsilon = 5,888$, $\gamma = 2,5 \cdot 10^{-13}$ Ом·м) и пленки ($\epsilon = 3,2$, $\gamma = 2,3 \cdot 10^{-13}$ Ом·м), электроды были изготовлены напылением на бумагу алюминия толщиной 0,1 мкм. Было учтено, что для заряженной секции на границах раздела сред с различными значениями γ и ϵ («пленка—бумага») присутствуют поверхностные заряды σ , определяемые соотношениями ϵ и γ сред. Поскольку длительность разрядного импульса не превышает десятков микросекунд, а постоянная времени перераспределения зарядов на границах диэлектриков «бумага—пленка» составляет доли секунды, то установившееся в процессе заряда секции распределение σ не изменится за все время разряда. Таким образом, процесс изменения E в каждой точке межэлектродной изоляции в различные моменты времени представляет собой наложение двух полей: поля E_z , связанного с распределением зарядов на границах раздела сред, и поля E_e , определяемого изменением напряжения на электродах и величинами диэлектрических проницаемостей сред.

На рис. 2 приведены зависимости, характеризующие изменение во времени модуля напряженности электрического поля E в бумаге (см. рис. 2, кривые 1, 3) и пленке (см. рис. 2, кривые 2, 4). Кривые 3 и 4 соответствуют точкам под обкладками секции, кривые 1 и 2 — точкам

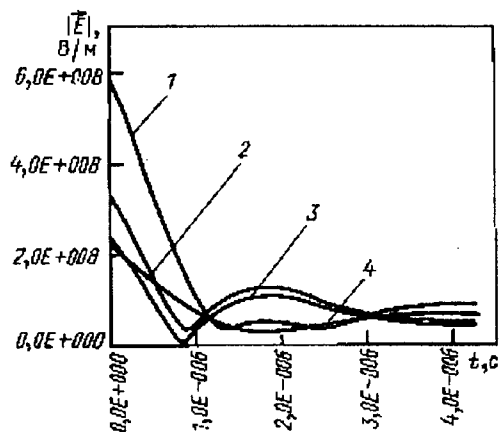


Рис. 2. Изменение во времени уровней напряженности электрического поля в слоистом диэлектрике

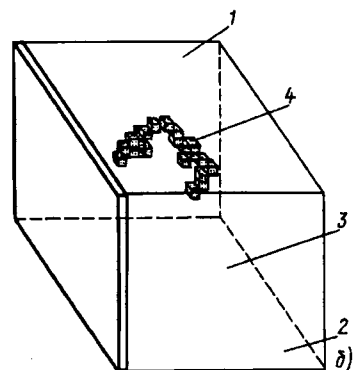
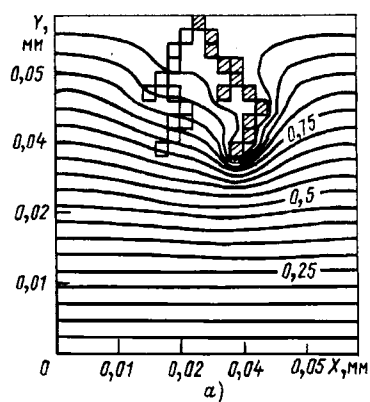


Рис. 3. Картина распределения эквипотенциальных линий вокруг дендрита, обращающегося в процессе электрического старения полиэтиленовой изоляции (а); изометрия дендрита (б): 1 — потенциальная обкладка, 2 — заземленная обкладка, 3 — изоляция; 4 — дендрит

на ее закраине. Большие уровни E в бумаге на закраине объясняются тем, что приведенные значения соответствуют слою, непосредственно прилегающему к краю обкладки.

В процессе электрического старения некоторых изоляционных материалов, например полиэтилена, в их толще происходит образование разветвленных структур — так называемых дендритов. Основываясь на экспериментальных данных о

удельной поверхностной проводимости каналов дендритов [6], эти каналы можно считать проводящими. Величина относительной диэлектрической проницаемости зон, имитирующих при расчете проводящие каналы дендритов, выбиралась в F_{pr} раз больше, чем ε полиэтилена. Разработанная методика была использована для расчета искажения электрического поля дендритами, наблюдаемыми в экспериментах.

На рис. 3,а представлена картина эквипотенциальных линий вокруг дендрита в процессе электрического старения полиэтиленовой изоляции. Эквипотенциальные линии показаны в сечении $Z = \text{const}$, проходящем через одну из ветвей дендрита (см. заштрихованную часть дендрита).

На этом рисунке также показана проекция другой ветви дендрита на плоскость $Z = \text{const}$ (см. незаштрихованную часть дендрита). На рис. 3,б показан дендрит в изометрии.

Выводы. 1. Разработана и реализована на персональном компьютере программа расчета объемного распределения напряженности электрического поля в диэлектрике, содержащем проводящие включения произвольной формы. Программа позволяет анализировать влияние формы проводящих включений на искажение электрического поля в диэлектрике.

2. Использование метода переменных направлений, разработанного для решения двумерных эллиптических уравнений, применительно к решению трехмерных задач позволило рассчитать распределение объемного электрического поля.

3. Разработанная программа позволила рассчитать переходной процесс изменения напряженности электрического поля в слоистом диэлектрике, а также распределение потенциалов вокруг дендритов, образующихся в процессе электрического старения полиэтиленовой изоляции.

Приложение. Выражения для прогоночных коэффициентов и правой части уравнения (2):

$$\begin{aligned} AX_{ijk}(\lambda_{ijk}^t) = & (DY_{j-1} DZ_{k-1} \lambda_{i,j-1,k-1}^t + DY_{j-1} \times \\ & \times DZ_k \lambda_{i-1,j-1,k}^t + DY_j DZ_{k-1} \lambda_{i-1,j,k-1}^t + \\ & + DY_j DZ_k \lambda_{i-1,j,k}^t) / (4DX_{i-1}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BX_{ijk}(\lambda_{ijk}^t) = & (DY_{j-1} DZ_{k-1} \lambda_{i,j-1,k-1}^t + DY_{j-1} \times \\ & \times DZ_k \lambda_{i,j-1,k}^t + DY_j DZ_{k-1} \lambda_{i,j,k-1}^t + \\ & + DY_j DZ_k \lambda_{i,j,k}^t) / (4DX_i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AY_{ijk}(\lambda_{ijk}^t) = & (DX_{i-1} DZ_{k-1} \lambda_{i-1,j-1,k-1}^t + DX_{i-1} \times \\ & \times DZ_k \lambda_{i-1,j-1,k}^t + DX_i DZ_{k-1} \lambda_{i,j-1,k-1}^t + \end{aligned}$$

$$+ DX_i DZ_k \lambda_{i,j-1,k}^t) / (4DY_{j-1});$$

$$\begin{aligned} BY_{ijk}(\lambda_{ijk}^t) = & (DX_{i-1} DZ_{k-1} \lambda_{i-1,j,k-1}^t + DX_{i-1} \times \\ & \times DZ_k \lambda_{i-1,j,k}^t + DX_i DZ_{k-1} \lambda_{i,j,k-1}^t + \\ & + DX_i DZ_k \lambda_{i,j,k}^t) / (4DY_j); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AZ_{ijk}(\lambda_{ijk}^t) = & (DX_{i-1} DY_{j-1} \lambda_{i-1,j-1,k-1}^t + DX_i \times \\ & \times DY_{j-1} \lambda_{i,j-1,k-1}^t + DX_{i-1} DY_j \lambda_{i-1,j,k-1}^t + \\ & + DX_i DY_j \lambda_{i,j,k-1}^t) / (4DZ_{k-1}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BZ_{ijk}(\lambda_{ijk}^t) = & (DX_{i-1} DY_{j-1} \lambda_{i-1,j-1,k}^t + DX_i \times \\ & \times DY_{j-1} \lambda_{i,j-1,k}^t + DX_{i-1} DY_j \lambda_{i-1,j,k}^t + \\ & + DX_i DY_j \lambda_{i,j,k}^t) / (4DZ_k), \end{aligned}$$

где DX_i, DY_j, DZ_k — величины шагов пространственной сетки в направлениях X, Y, Z соответственно.

Выражение для $f_{ijk}(t_m)$ получим следующим образом. Как уже упоминалось, в первом слагаемом выражения (1) интегрирование по времени было заменено суммированием по формуле трапеций:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_m} \oint_S \gamma E_n dS \approx & \frac{1}{2} \sum_{q=1}^m \left[\oint_S \gamma E_n(t_{q-1}) dS + \right. \\ & \left. + \oint_S \gamma E_n(t_q) dS \right] h_{t_q}. \end{aligned}$$

Перенеся слагаемое, соответствующее текущему моменту времени t_m , влево, к неизвестным, а остальные слагаемые, содержащие известные значения напряженности электрического поля в предыдущие моменты времени, — вправо, и выполнив подстановку $E = -\text{grad } \varphi$, окончательно запишем правую часть уравнения (2) в разностном виде:

$$f_{ijk}(t_m) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{m-1} [f_{ijk}(t_{q-1}) + f_{ijk}(t_q)],$$

где

$$f_{ijk}(t_q) = \Lambda_{xf} \varphi_{ijk}(t_q) + \Lambda_{yf} \varphi_{ijk}(t_q) + \Lambda_{zf} \varphi_{ijk}(t_q);$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{xf} \varphi_{ijk}(t_q) = & (\varphi_{i+1,j,k}(t_q) - \varphi_{i,j,k}(t_q)) BX_{ijk}(\beta_{ijk}^t) - \\ & - (\varphi_{i,j,k}(t_q) - \varphi_{i-1,j,k}(t_q)) AX_{ijk}(\beta_{ijk}^t); \end{aligned}$$

$$\Lambda_{yf} \varphi_{ijk}(t_q) = (\varphi_{i,j+1,k}(t_q) - \varphi_{i,j,k}(t_q)) BY_{ijk}(\beta_{ijk}^t) -$$

$$-(\varphi_{ijk}(t_q) - \varphi_{ij-1,k}(t_q))BX_{ijk}(\beta_{ijk}^t);$$

$$\Delta_{zf}\varphi_{ijk}(t_q) = (\varphi_{ijk+1}(t_q) - \varphi_{ijk}(t_q))BZ_{ijk}(\beta_{ijk}^t) -$$

$$-(\varphi_{ijk}(t_q) - \varphi_{ij,k-1}(t_q))AZ_{ijk}(\beta_{ijk}^t);$$

$$\beta_{ijk}^t = \gamma_{ijk}(t_q)\tau_0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рудаков В.В. Исследование электрических полей на краях обкладок высоковольтных импульсных конденсаторов. Дис... канд. техн. наук. Харьков, 1978.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.
3. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. — М.: Мир, 1986.
4. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. — М.: Энергия, 1975.
5. Кучинский Г.С., Кизеветтер В.Е., Пинталь Ю.С. Изоляция установок высокого напряжения. — М.: Энергоатомиздат, 1987.
6. Кучинский Г.С. Частичные разряды в высоковольтных конструкциях. — Л.: Энергия, 1979.

[19.05.94]

Авторы: Резинкина Марина Михайловна окончила в 1979 г. физико-технический факультет Харьковского политехнического института (ХПИ). Кандидатскую диссертацию по теме «Исследование влияния геометрических параметров плоских индукторных систем для магнитно-импульсных устройств на их характеристики» защитила в 1987 г. в ХПИ. Старший научный сотрудник НИПКИ «Молния» при Харьковском государственном политехническом университете (бывш. ХПИ), Украина.

Резинкин Олег Лукьянович окончил в 1984 г. физико-технический факультет ХПИ. Кандидатскую диссертацию по теме «Исследование и компьютерное моделирование воздействия сильных электрических полей на деструкционные процессы в изоляции» защитил в 1994 г. в ХПИ. Научный сотрудник НИПКИ «Молния» при Харьковском государственном политехническом университете, Украина.

Вычисление емкостного тонкого гиперболического сегмента

КАДНИКОВ С.Н., ШИШКОВА И.Е.

Рассмотрена электростатическая задача для одиночного гиперболического сегмента. Применен метод парных интегральных уравнений. Решение получено в форме интегрального уравнения Фредгольма второго рода с непрерывным ядром, выраженным через эллиптический интеграл. Приведены результаты расчета электрической емкости.

Ключевые слова: электрическая емкость, гиперболический сегмент, интегральное уравнение Фредгольма, расчеты

The electrostatic problem for individual hyperboloidal segment is considered. The method of twin integral equations is applied. Solution classified as Fredholm's integral equation of the second order with continuous nucleus expressed through elliptical integral is derived. Results of calculating electrical capacity are presented.

Key words: electrostatic problem, hyperboloidal segment, twin integral equations, Fredholm's integral equation, electric capacity

Осесимметричная электростатическая задача для заряженной бесконечно тонкой оболочки, лежащей на гиперboloиде вращения, рассматривалась [1]. Ниже дается более простое решение этой задачи, также основанное на методах парных интегральных уравнений.

Поверхность S гиперболидоидального сегмента задается соотношениями $\theta \leq \theta_0$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$, где θ , η — криволинейные вытянутые сфероидальные координаты, связанные с цилиндрическими координатами r, z известными формулами

$$r = c \operatorname{sh} \eta \sin \theta, \quad z = c \operatorname{ch} \eta \cos \theta,$$

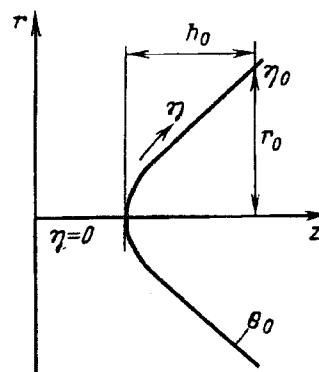


Рис. 1

здесь c — половина фокусного расстояния сфероиды (рис. 1). Геометрические параметры h_0 и r_0 связаны с θ_0, η_0 соотношением

$$\frac{h_0}{r_0} = \operatorname{ctg} \theta_0 \operatorname{th}^2 \frac{\eta_0}{2}. \quad (1)$$

Пусть оболочка (сегмент) заряжена до потенциала $\varphi_0 = 1$. В отличие от [1], искомый потенциал представляется в следующей форме:

$$\varphi = \begin{cases} \int_0^\infty p(\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \eta) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos \theta) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\cos \theta_0) d\tau, & 0 \leq \theta \leq \theta_0, \quad 0 < \eta < \infty; \\ \int_0^\infty p(\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \eta) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\cos \theta) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos \theta_0) d\tau, & \theta_0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \eta < \infty, \end{cases} \quad (2)$$

где $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \eta)$, $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos \theta)$ — сферические функции, $p(\tau)$ — неизвестная спектральная функция.

Нетрудно видеть, что такое представление обеспечивает непрерывность потенциала при $\theta = \theta_0$, $0 \leq \eta < \infty$.

Краевое условие на оболочке $\varphi|_S = \varphi_0$ и условие непрерывности производной $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ вне оболочки при $\theta = \theta_0$, $\eta_0 < \eta < \infty$ приводят к следующим парным интегральным уравнениям:

$$\int_0^\infty p(\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \eta) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos \theta_0) \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \eta) (\cos \theta_0) d\tau = \varphi_0, \quad (3)$$

$$0 \leq \eta \leq \eta_0;$$

$$\int_0^\infty p(\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \eta) \operatorname{ch} \pi \tau d\tau = 0, \quad (4)$$

$$\eta_0 < \eta \leq \infty.$$

Здесь при получении (3) была использована формула для вронскиана [3]:

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) \frac{dP_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{dx} - P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x) \frac{dP_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)}{dx} = \frac{2 \operatorname{ch} \pi \tau}{\pi (1-x^2)}, \quad -1 < x < 1.$$

Для сведения (3), (4) к интегральному уравнению Фредгольма используется известная техника парных уравнений, изложенная, например, в [2].

Подстановка

$$p(\tau) = \sin \theta_0 \tau \frac{\operatorname{sh} \pi \tau}{\operatorname{ch}^2 \pi \tau} \int_0^{\eta_0} f(t) \cos \tau t dt \quad (5)$$

тождественно удовлетворяет (4), а (5) после

композиции с ядром $[2(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} \eta)]^{-1/2}$ преобразуется к виду

$$\sin \theta_0 \int_0^{\eta_0} f(t) \int_0^\infty \cos \tau t \cos \tau x \left[\tau \frac{\operatorname{sh} \pi \tau}{\operatorname{ch}^2 \pi \tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos \theta_0) \times \right. \\ \left. \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos \theta_0) \right] d\tau dt = \varphi_0 \operatorname{ch} \frac{x}{2}. \quad (6)$$

В силу специфической асимптотики произведения сферических функций выражение в квадратных скобках в (6) при $\tau \rightarrow \infty$ может быть представлено как $1 + O(\tau^2)$. Это означает, что внутренний интеграл является суммой дельта-функции, дающей внеинтегральный член непрерывной функции, определяющей ядро. Для ее вычисления используется известная формула [3]:

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \eta_0 - \cos \gamma} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n (2n+1) Q_n(\operatorname{ch} \eta_0) P_n(-\cos \gamma). \quad (7)$$

После замены n на комплексную переменную s ряд можно заменить контурным интегралом:

$$-\frac{1}{2j} \int_c \frac{2s+1}{\sin \pi s} Q_s(\operatorname{ch} \eta_0) P_s(-\cos \theta) ds,$$

где контур c окружает действительную ось.

Асимптотика сферических функций такова, что контур интегрирования можно расширить до мнимой оси. Тогда, после подстановки $s = -\frac{1}{2} + i\tau$ и применения формулы

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \eta) - Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \eta) = -j\pi \operatorname{th} \pi \tau P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \eta)$$

выражение (7) сводится к следующему:

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \eta_0 - \cos \gamma} = \pi \int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{sh} \pi \tau}{\operatorname{ch}^2 \pi \tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \eta_0) \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\cos \gamma) d\tau. \quad (8)$$

Если положить $\cos \gamma = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \times \sin \theta_2 \cos \alpha$, то в результате интегрирования (8) от 0 до 2π и использования теоремы сложения для сферических функций возникает искомая формула:

$$\frac{1}{(\operatorname{ch}^2 \eta_0 - 2 \operatorname{ch} \eta_0 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2)^{1/2}} = \\ = \pi \int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{sh} \pi \tau}{\operatorname{cg}^2 \pi \tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \eta) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos \theta_1) \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\cos \theta_2) d\tau, \quad \theta_1 < \theta_2. \quad (9)$$

Соотношение (8) с помощью других теорем

θ_0	Нормированные значения емкости при h_0/r_0 , равном									
	0,1	0,3	0,5	0,8	1,0	1,5	2,0	2,5	2,8	3,0
2,5	1,3399	1,6320	1,8207	2,0312	2,1449	2,3714	2,5610	2,7158	2,7980	2,84
5,0	1,2171	1,4291	1,5687	1,7252	1,8099	1,9834	2,1199	2,2351	2,2962	2,3342
7,5	1,1628	1,3351	1,4502	1,5796	1,6495	1,7923	1,9033	1,9961	2,0447	2,0748
10,0	1,1309	1,2777	1,3770	1,4885	1,5486	1,6616	1,7639	1,8406	1,8800	1,9939
15,0	1,0939	1,2080	1,2864	1,3741	1,4209	1,5140	1,5816	1,6332	1,6569	1,6695
25,0	1,0584	1,1356	1,1892	1,2476	1,2772	1,3217	1,3549	0	0	0
40,0	1,0338	1,0798	1,1104	1,1393	1,1501	0	0	0	0	0
50,0	1,0238	1,0553	1,0741	1,0857	0	0	0	0	0	0
60,0	1,0161	1,0353	1,0435	0	0	0	0	0	0	0
70,0	1,0095	1,0179	0	0	0	0	0	0	0	0

сложения позволяет получить ряд других формул, в том числе и формулу разложения обратного расстояния по сферическим функциям с комплексным значком.

Использование (9) позволяет преобразовать (6) к искомому интегральному уравнению:

$$f(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\eta_0} F(t) [H(x-t) + H(x+t)] dt = \frac{2}{\pi} \operatorname{ch} \frac{x}{2}, \quad (10)$$

где $H(y) = \frac{1}{2^{1/2}} \operatorname{cth} \frac{|y|}{2} \frac{\sin \theta_0}{(\operatorname{ch} y - \cos 2\theta_0)^{1/2}} [K(k) - E(k)]$; $K(k), E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем

$$k = \left[\frac{\operatorname{ch} y - 1}{\operatorname{ch} y - \cos 2\theta_0} \right]^{1/2}.$$

Формула для полного заряда сегмента, полученная с использованием теоремы Гаусса и соотношением (5), имеет вид

$$q = 4\epsilon_d c \int_0^{\eta} f(t) \operatorname{ch} \frac{t}{2} dt.$$

Ядро уравнения (10) непрерывно, что допускает его эффективное численное решение на ЭВМ путем редукции к системе линейных алгебраических уравнений. Результаты расчета даны в таблице, где представлены нормированные значения емкости (нормирующая величина — емкость диска радиусом r_0) в функции параметров

h_0, θ_0 . Из соотношения (1) следует, что диапазон изменения θ_0 ограничен интервалом $0 < \theta_0 < \arctg \frac{h_0}{r_0}$, что объясняет отсутствие соответствующих значений емкости в таблице. Точность представленных результатов не менее 0,1%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедев Н.Н., Скальская И.П. Распределение электричества на тонком гиперболическом сегменте. — Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 2.
2. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. — Л.: Наука, 1977.
3. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. — М.: 1963.

[10.03.94]

Авторы: Кадников Сергей Николаевич окончил в 1965 г. Рязанский радиотехнический институт. В 1989 г. защитил докторскую диссертацию по теме: «Методы расчета электрического поля тонких оболочек». Профессор кафедры ТОЭ Ивановского государственного энергетического университета.

Шишкова Ирина Евгеньевна окончила в 1964 г. Ивановский энергетический институт. В 1975 г. в Московском энергетическом институте защитила кандидатскую диссертацию на тему «Исследование на основе применения ЭВМ процессов нейтрализации статического электричества». Доцент кафедры техники и электрофизики высоких напряжений Ивановского государственного энергетического университета.

Численный анализ электрических цепей с использованием зарядной модели двухполюсников

СМИРНОВ В.П., САПАЕВ Х.Б.

Рассматриваются возможности использования интегральных и дифференциальных уравнений, связывающих заряд и напряжение, для получения итеративных схем замещения при численном анализе линейных и нелинейных электрических цепей, в которых отсутствуют трансформаторы и нелинейные индуктивности. Показано различие итеративных схем замещения для временных итераций и итераций до сходимости.

Ключевые слова: электрические цепи, двухполюсники, итеративные схемы замещения, зарядные модели, численный анализ

При использовании зарядной модели двухполюсников для анализа линейных электрических цепей компонентные уравнения двухполюсников представляются в одной из следующих двух форм:

$$\left. \begin{aligned} q_C &= CU_C; \\ q_R &= \frac{1}{R} \int U_R dt; \\ q_L &= \frac{1}{L} \iint U_L dt; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} U_C &= \frac{1}{C} q_C; \\ U_R &= R \frac{dq_R}{dt}; \\ U_L &= L \frac{d^2 q_L}{dt^2}; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

представляющих собой интегральные или дифференциальные уравнения, связывающие заряд и напряжения. Уравнения (1) регулярны в узловом базисе, а уравнения (2) — в контурном базисе.

Ниже рассматриваются возможности использования уравнений (1) и (2) при численном анализе: линейных и нелинейных электрических цепей, в которых отсутствуют трансформаторы и нелинейные индуктивности. Предполагаем, что при наличии трансформаторов и нелинейных индуктивностей предпочтительно использовать потоковые модели двухполюсников [1].

Численный анализ цепей целесообразно проводить с помощью итеративных схем замещения (ИСЗ) [2], которые позволяют свести расчеты переходных процессов в нелинейных электрических цепях с реактивными элементами к повторяющимся расчетам линейных ИСЗ, являющихся цепями постоянного тока.

Если для алгебраизации линейных дифференциальных уравнений двухполюсников, представленных (1) или (2), использовать аппроксимацию производной или интеграла на базе неявного ме-

The possibility of using of an integral and differential equations which bind up the dependence between the charge and voltage is considered for the development of the iterative equivalent circuit under numerical analysis of the linear and non-linear electrical circuits where the transformers and non-linear inductors are absent. A difference of the iterative equivalent circuits is shown for the time-dependent iterations and for the iterations before the convergence.

Key words: electrical circuits, two-terminal networks, iterative equivalent circuits, charging model, numerical analysis

тода Эйлера, то для $(n+1)$ -го шага временной итерации получим следующие соотношения:

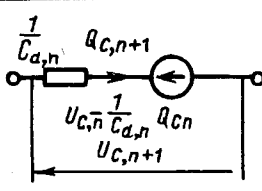
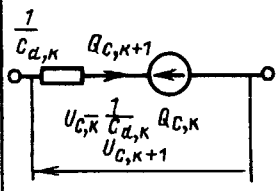
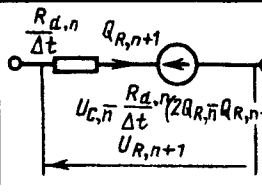
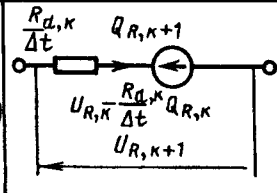
$$\begin{aligned} Q_{C,n+1} &= CU_{C,n+1}; \\ Q_{R,n+1} &= \frac{\Delta t}{R} U_{R,n+1} - \frac{\Delta t}{R} U_{R,n}; \\ Q_{L,n+1} &= \frac{\Delta t^2}{L} U_{R,n+1} - \frac{\Delta t^2}{L} (2U_{L,n} - U_{L,n-1}); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} U_{C,n+1} &= \frac{1}{C} Q_{C,n+1}; \\ U_{R,n+1} &= \frac{R}{\Delta t} Q_{R,n+1} - \frac{R}{\Delta t} Q_{R,n}; \\ U_{L,n+1} &= \frac{L}{\Delta t^2} Q_{L,n+1} - \frac{L}{\Delta t^2} (2Q_{L,n} - Q_{L,n-1}), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ — величина шага интегрирования.

В ИСЗ линейных двухполюсников (табл. 1), полученных на основе (3) и (4), заряд (Q) представляет собой последовательную, а напряжение (U) — параллельную переменные. Тогда вполне допустимо трактовать коэффициенты C , $\Delta t/R$, $\Delta t^2/L$ как проводимости, а коэффициенты $1/C$, $R/\Delta t$, $L/\Delta t^2$ как сопротивления ИСЗ постоянного тока в базисе переменных Q , U .

Таблица 1

	Временные итерации	Итерации до сходимости
C $U(q)$		
R $U(i)$		

Легко увидеть, что ИСЗ линейных двухполюсников C, R, L (табл. 1) имеют две взаимно дуальных форм: Z -форму, соответствующую (4) и (2), и Y -форму, соответствующую (3) и (1). Отсюда вытекает и возможный способ их конструирования при заданной системе координат. Например, если в качестве базисной задается или выбирается контурная система координат, производится алгебраизация (2) путем аппроксимирования производных по формуле Эйлера и получается (4) и ИСЗ в Z -форме. При использовании узловых координат производится дуальный переход из Z -формы к Y -форме и соответственно получается ИСЗ для расчета в узловом базисе. Такой же подход применим для получения ИСЗ нелинейной емкости и резистора.

В базисе переменных Q, U зарядная модель нелинейной емкости безынерционна и представляется нелинейными алгебраическими уравнениями

$$q_C = \varphi(U_C) \text{ или } U_C = f(q_C).$$

Проведем конструирование ИСЗ для выражения $U_C = f(q_C)$. Итерационный процесс поиска режима в чисто емкостной цепи для данного двухполюсника описывается с использованием формулы Тейлора, учитывающей только линейный член:

$$U_{C,k+1} = U_{C,k} + \left. \frac{df}{dq_C} \right|_{Q_{C,k}} (Q_{C,k+1} - Q_{C,k}). \quad (5)$$

Выражение (5) подразумевает выполнение такого количества итераций $m=k+1=1, 2, 3, \dots$ от начальных значений $U_{C,0}, Q_{C,0}$, после которых достигается $U_{C,k+1} \approx U_{C,k}$ с заданной степенью точности. Итерации производятся по параметру $\left. \frac{df}{dq_C} \right|_{Q_{C,k}}$, который вычисляется по вольт-кулонной характеристике и является величиной, обратной дифференциальной емкости C_d со значением, вычисленным по ординате $Q_{C,k}$, так как имеет место соотношение

$$\left. \frac{df}{dq_C} \right|_{Q_{C,k}} = \frac{dU_C}{dq_C} \Big|_{Q_{C,k}} = \frac{1}{C_d} \Big|_{Q_{C,k}}.$$

Однако в цепях, содержащих инерционные элементы (в базисе переменных Q, U это R, L — линейные и нелинейные элементы), причиной движения рабочей точки емкостного элемента по вольт-кулонной характеристике $U_C(q_C)$ являются еще и временные изменения переменных $U_R(t)$ и $U_L(t)$. В расчетах итерация по времени переводит цепь в точку t_{n+1} . В этой точке выражение (5) должно иметь вид

$$U_{C,n+1,k+1} = U_{C,n+1,k} + \left. \frac{1}{C_d} \right|_{Q_{C,n+1,k}} (Q_{C,n+1,k+1} - Q_{C,n+1,k}),$$

в котором последовательность индексов переменных указывает на порядок выполнения расчетов: сначала итерация по времени, затем итерация до сходимости $U_{C,n+1,k+1} \approx U_{C,n+1,k}$.

Итерация по времени от точки t_n к точке t_{n+1} , естественно, выполняется в соответствии с выражением

$$U_{C,n+1} = U_{C,n} + \left. \frac{1}{C_d} \right|_{Q_{C,n}} (Q_{C,n+1} - Q_{C,n}), \quad (6)$$

и в результате расчета ИСЗ по (6) определяют $U_{C,n+1,0}, Q_{C,n+1,0}$, которые будут являться начальными для итераций до сходимости по ИСЗ, определяемой выражением (5).

Итеративные схемы замещения нелинейной емкости с характеристикой $U_C = f(q_C)$ согласно (5) и (6) представлены в табл. 2, а ИСЗ с характеристикой $q_C = \varphi(U_C)$ могут быть получены дуальным преобразованием этих схем постоянного тока. Важно отметить, что в ИСЗ всей цепи на временной итерации формируются и используются обновленные активные и пассивные параметры всех двухполюсников, линейных и нелинейных. На шаге итерации до сходимости все параметры линейных двухполюсников неизменны, варьируются только параметры ИСЗ нелинейных элементов типа (5).

Таблица 2

	Z -форма	Y -форма
R		
L		
C		

Нелинейный резистор в базисе переменных Q, U описывается нелинейными дифференциальными уравнениями первого порядка:

$$q_R = \varphi \left(\frac{dU_R}{dt} \right) = \varphi(U'_R) \text{ или } U_R = f \left(\frac{dq_R}{dt} \right) = f(q'_R).$$

Используем для конструирования ИСЗ в Z-форме последнее выражение. Тогда общее выражение итераций для нелинейного резистора имеет вид

$$U_{R,n+1,k+1} = U_{R,n+1,k} + \frac{df}{dq_R} \Big|_{Q'_{R,n+1,k}} \times (Q'_{R,n+1,k+1} - Q'_{R,n+1,k}) \quad (7)$$

и частные:

для временной итерации от точки t_n к точке t_{n+1} —

$$U_{R,n+1} = U_{R,n} + \frac{df}{dq_R} \Big|_{Q'_{R,n}} (Q'_{R,n+1} - Q'_{R,n}), \quad (8)$$

и для итераций до сходимости —

$$U_{R,k+1} = U_{R,k} + \frac{df}{dq_R} \Big|_{Q'_{R,k}} (Q'_{R,k+1} - Q'_{R,k}). \quad (9)$$

В выражении (9) подразумевается уточняемая производная Q'_R в одной и той же точке t_{n+1} .

Следовательно, имеют место соотношения вида

$$Q'_{R,n+1} - Q'_{R,n} = \frac{1}{\Delta t} Q_{R,n+1} - \frac{1}{\Delta t} (2Q_{R,n} - Q_{R,n-1}), \quad (10)$$

а в точке t_{n+1} —

$$Q'_{R,k+1} - Q'_{R,k} = \frac{1}{\Delta t} (Q_{R,n+1,k+1} - Q_{R,n+1,k}). \quad (11)$$

Учитывая пассивный параметр итерации —

$$\frac{df}{dq_R} = \frac{dU_R}{di_R} \Big|_{Q'_{R,n,k}} = R_d \Big|_{i=Q'_{R,n,k}} = R_{d,n,k}, \quad (12)$$

получаем из (8)—(11) выражения для ИСЗ временной итерации:

$$U_{R,n+1} = U_{R,n} - \frac{R_{d,n}}{\Delta t} (2Q_{R,n} - Q_{R,n-1}) + \frac{R_{d,n}}{\Delta t} Q_{R,n+1} \quad (13)$$

и для ИСЗ итераций до сходимости:

$$U_{R,k+1} = U_{R,k} + \frac{R_{d,k}}{\Delta t} (Q_{R,n+1,k+1} - Q_{R,n+1,k}), \quad (14)$$

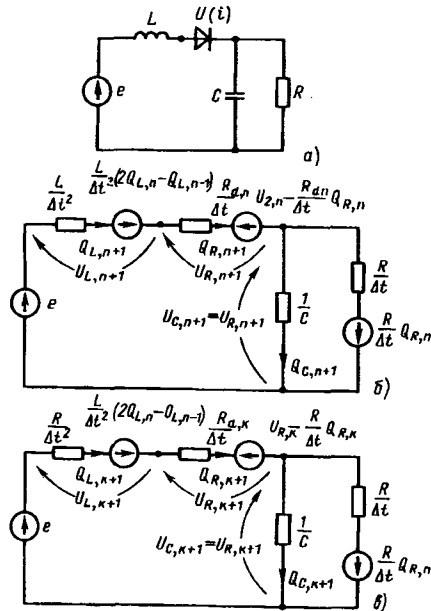
причем $Q_{R,0}$ в (14) есть $Q_{R,n+1}$, получаемое из расчетов ИСЗ с применением (13), а R_d вычисляется при $k=0, 1, 2, \dots$ по значениям

$$i = Q'_{R,n+1,k} = \frac{1}{\Delta t} (Q_{R,n+1,k} - Q_{R,n}).$$

Итеративные схемы замещения, построенные на основе (13) и (14), и дуальные им Y-формы, соответствующие характеристике резистора вида $q_R = \varphi(U_R)$, приведены в табл. 2.

Последние ИСЗ опровергают распространенное мнение [3] о том, что ИСЗ временных итераций и итераций до сходимости всегда подобны по форме и содержанию и нет особой нужды в их отдельном представлении.

В заключение покажем на примере однополупериодного выпрямителя (см. рисунок, а), формирование ИСЗ цепи для временных (см. рисунок, б) итераций и итераций до сходимости



Однополупериодный выпрямитель (а), ИСЗ для временной итерации (б) и ИСЗ для итерации до сходимости (в)

(см. рисунок, в) двухполюсников представлены в Z-форме, пригодной для расчета в контурном базисе.

Выводы. 1. Итеративные схемы замещения (дискретные модели) могут быть единым инструментом численного анализа цепей при использовании различных базисных переменных $i, U; i, \Psi; Q, U$.

2. При конструировании итеративных схем замещения цепей целесообразно раздельное формирование схем для временных итераций и итераций до сходимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савиновский Ю.А., Курганов С.А., Кайнов А.П. Применение метода независимых потоков для анализа электрических цепей. — М.: Электричество, 1986, № 2.
2. Смирнов В.П. Численный анализ процессов в линейных электрических цепях с помощью итеративных схем замещения. — Электричество, 1976, № 5.
3. Нерртер В. Расчет электрических цепей на персональной ЭВМ / Пер. с нем. — М.: Энергоатомиздат, 1991. [01.04.93]

Авторы: Смирнов Владимир Павлович окончил энергетический факультет Ташкентского политехнического института (ТПИ) в 1961 г. Кандидатскую диссертацию по тематике «Автономные тиристорные инверторы» защитил в Московском энергетическом институте в 1968 г. Главный научный сотрудник НПО «Гидрометприбор», Узбекистан.

Сапаев Хушнуд Бабажанович окончил в 1971 г. инженерно-физический факультет ТПИ. В 1978 г. в Московском авиационном институте защитил кандидатскую диссертацию по тематике «Транзисторные преобразователи напряжения и частоты». Доцент кафедры «Промышленная энергетика» Ташкентского государственного технического университета (ранее ТПИ), Узбекистан.

Об обозначениях элементов схем замещения

(статья А.К. Тер-Акопова, «Электричество», 1993, № 3)

ПОПОВ В.А.

Расчет электрической цепи начинается с составления системы уравнений Кирхгофа для ее расчетной модели. И уже на этом, первом, этапе обнаруживается, что единая система графических обозначений расчетных моделей электрических цепей до настоящего времени отсутствует. Связанные с этим затруднения и недоразумения в профессиональной, издательской и учебной практике общеизвестны. Они проистекают из невозможности еще на уровне графических обозначений провести грань между принципиальной схемой электрической цепи и схемой ее расчетной модели.

В системе обозначений элементов расчетных моделей (элементов схем замещения), предложенной А.К. Тер-Акоповым, устраняются все упомянутые затруднения. Система имеет ряд несомненных достоинств. Во-первых, в ней учитывается действующая система графических обозначений реальных устройств на принципиальных схемах цепей. Это облегчает адаптацию к системе обозначений элементов расчетных моделей. Вместе с тем, возможность отождествления двух видов схем полностью исключается. Второе достоинство, которое осознается только в процессе практического применения, состоит в том, что при вычерчивании моделирующей схемы не требуется разрывать соединительные линии для включения необходимых элементов.

Предложенная А.К. Тер-Акоповым система обозначений применяется мною при проведении всех видов занятий по курсу «Теория электрических цепей» в Московском институте связи (ны-

не Московском техническом университете связи и информатики). Многолетний опыт преподавания показывает, что студенты легко воспринимают и усваивают ее. Исключается характерное для начинающих отождествление элемента индуктивности с катушкой индуктивности, источника напряжения — с реальным источником энергии и т.д.

Эта же система обозначений была применена в двух учебных пособиях, изданных Московским институтом связи по представлению кафедры теории электрических цепей: Попов П.А. Моделирование и расчет электрических цепей. Ученое пособие, 1990 и Алексенцев Ю.Г., Попов П.А. Метод комплексных амплитуд. Учебное пособие, 1991.

Считаю, что эту систему обозначений можно вводить в отечественную практику, не ожидая решения вопроса о принятии стандарта на условные обозначения. С этой целью, учитывая ограниченный тираж журнала «Электричество», можно было бы издать большим тиражом проект стандарта или предложенную систему обозначений.

И последнее. Термин «трансформация» (дословно преобразование), предлагаемый вместо «идеального трансформатора», представляется совершенно неприемлемым, поскольку воспринимается читателем или слушателем не как обозначение предмета или устройства, а как обозначение действия (операции, совершаемой над некоторым объектом).

Ответ автора

По обсуждаемой статье получены два отклика: Ю.Г. Мамиконова («Электричество», 1994, № 4) и П.А. Попова, публикуемый в настоящем номере. Оба выступления положительно оценивают предложение о введении стандарта на элементы схем замещения, отмечают достоинства предложенной системы обозначений. В откликах содержатся два конструктивных предложения. Мамиконов Ю.Г. предлагает использовать косую черту в условном обозначении полного сопротивления, а П.А. Попов предлагает издать большим тиражом «Рекомендуемую систему условных обозначений». Оба предложения автор статьи принимает с благодарностью.

В откликах высказаны два замечания, не имеющие прямого отношения к рассматриваемому вопросу. Тем не менее, надо ответить на эти замечания. В обоих выступлениях термин «трансформация» отмечен как неудачный. Во-первых, замечу, что он

предложен не мной, а давно уже используется в электротехнической литературе. И, во-вторых, альтернативный термин «идеальный трансформатор» также неудачен, так как в этом случае придется называть емкость «идеальным конденсатором», а индуктивность — «идеальной катушкой». Можно предложить третий вариант — трансформер.

Второе замечание высказано в отклике Ю.Г. Мамиконова; речь идет о выборе положительных направлений напряжения и тока в источниках. Да, они выбираются встречно (а не согласно) во всей мировой литературе, и это правильно, так как в противном случае, если принять предложение Ю.Г. Мамиконова, можно прийти к тупиковому результату. Так, например, если в цепи только один источник напряжения и одно сопротивление, то на этих элементах будет одно и то же напряжение, но оно будет обозначено почему-то «дважды» (!) в разные стороны.

Две работы по теоретической электротехнике

В конце 40-х годов на кафедре ТОЭ Московского энергетического института (МЭИ) работал профессор, доктор технических наук В.Ю. Ломоносов (1899—1962). Его работы и, в особенности лекции, отличались точностью формулировок и изяществом математических приемов решения задач. В.Ю. Ломоносов и К.М. Поливанов регулярно обменивались письмами, в которых сообщали друг другу предварительные результаты своих исследований. В архиве покойного профессора К.М. Поливанова сохранились две заметки В.Ю. Ломоносова, которые публикуются ниже с некоторыми добавлениями. Первая заметка посвящена расчету проникновения магнитного поля в ферромагнитную ленту сердечника (переходный процесс), вторая — расчету электромагнитного поля токопроводящей шины прямоугольного сечения с произвольным соотношением сторон. Во второй заметке автор, к сожалению, выполнил только первую половину задачи — написал решение, удовлетворяющее уравнениям поля. Вторую половину задачи — наложение граничных условий — он оставил нам, своим ученикам и последователям. По мнению публикатора, эти заметки не потеряли своего значения и в настоящее время.

Я.Н. Колли
январь 1995 г.

Проникновение (двухстороннее) электромагнитной волны

ЛОМОНОСОВ В.Ю., проф., докт. техн. наук

Прежде чем перейти к операционному решению уравнения

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \mu_0 \sigma \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

изменим масштаб времени, положив $t = \alpha \tau$ и $p = \frac{\partial}{\partial \tau}$. Тогда

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\mu \mu_0 \sigma}{\alpha} p H = 0$$

и

$$H = H_0 \frac{\operatorname{ch} \left(x \sqrt{\frac{\mu \mu_0 \sigma p}{\alpha}} \right)}{\operatorname{ch} \left(a \sqrt{\frac{\mu \mu_0 \sigma p}{\alpha}} \right)}$$

(см. рис. 1).

Чтобы привести полученный результат к табличному ([1], стр. 176, (4.34)), делаем $\alpha = \mu \mu_0 a^2$, и тогда

$$H = H_0 \left[1 + \int_1^{\frac{x}{a}} \vartheta_1 \left(\frac{u}{2}, \frac{t}{\mu \mu_0 \sigma a^2} \right) du \right].$$

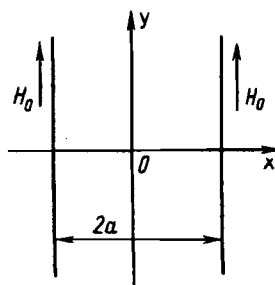


Рис. 1

Обращаясь к [1], стр. 104, находим

$$\vartheta_1 \left(\frac{u}{2}, \tau \right) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{\pi^2 \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 \tau} \sin \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) u$$

и так как

$$\int_1^{\frac{x}{a}} \sin \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) u du = - \frac{\cos \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{x}{a}}{\pi \left(k + \frac{1}{2} \right)},$$

то

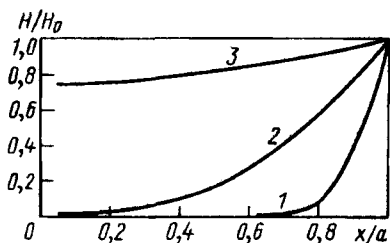


Рис. 2

$$H = H_0 \left[1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-\pi^2 \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \tau} \frac{\cos \pi \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{x}{a}}{k + \frac{1}{2}} \right]$$

Добавление¹. Для расчета по последней формуле на алгоритмическом языке Fortran для PC IBM написана программа TRANS. В качестве примера на рис. 2 приведены результаты расчета зависимостей H/H_0 от x/a при различных моментах времени после начала процесса и $\mu = 4000$, $\sigma = 10^4$ (Ом·см)⁻¹, $2a = 0,35$ мм, (1 — $t = 1$ мкс, 2 — $t = 10$ мкс, 3 — $t = 100$ мкс).

Магнитный поток

$$\Phi = \int_s B ds = 2\mu\mu_0 \int_0^a H dx.$$

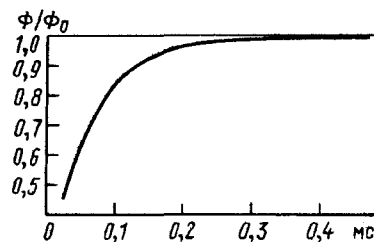


Рис. 3

Подставляя сюда выражение для H , получаем

$$\Phi = \Phi_0 \left[1 - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2} e^{-\pi^2 \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \tau} \right],$$

где $\Phi_0 = 2a\mu\mu_0 H_0$.

На рис. 3 приведены результаты расчета. Исходные данные см. рис. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Диткин В.А., Кузнецов П.И. Справочник по операционному исчислению. Основы теории и таблицы формул. — М.Л.: ГИТТЛ, 1951.

Поверхностный эффект в проводах прямоугольного сечения

ЛОМОНОСОВ В.Ю., проф., докт. техн. наук

Даны: E_z, H_x, H_y . Функция E_z должна удовлетворять уравнениям поля и условиям симметрии $E_z(-x, y) = E_z(x, y)$ и $E_z(x, -y) = E_z(x, y)$ (см. рис. 4).

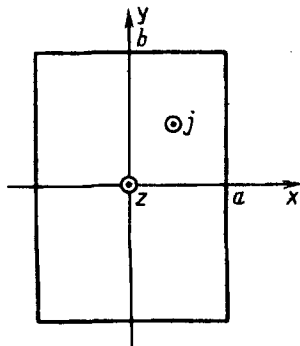


Рис. 4

Очевидно, что выражение

$$E_z = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx \sin \vartheta \cos(ky \cos \vartheta)) F(\vartheta) d\vartheta,$$

где $k = \sqrt{-j\omega\mu\mu_0\sigma}$ и $F(\vartheta)$ — произвольная функция своего аргумента, удовлетворяет условиям симметрии.

Остается показать, что оно удовлетворяет уравнениям поля:

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{1}{j\omega\mu\mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\sigma}{k^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = \\ &= -\frac{\sigma}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx \sin \vartheta) \sin(ky \cos \vartheta) \cos \vartheta F(\vartheta) d\vartheta; \end{aligned}$$

¹Добавление написано Я.Н. Колли.

$$H_y = \frac{1}{j\omega\mu\mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\sigma}{k^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} =$$

$$F(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\vartheta.$$

$$= \frac{\sigma}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx \sin \vartheta) \cos(ky \cos \vartheta) \sin \vartheta F(\vartheta) d\vartheta;$$

Далее имеем

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \sigma \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx \sin \vartheta) \cos(ky \cos \vartheta) \sin^2 \vartheta F(\vartheta) d\vartheta +$$

$$\cos(kx \sin \vartheta) \cos(ky \cos \vartheta) = R_0(x, y) + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos m\vartheta$$

и

$$+ \sigma \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx \sin \vartheta) \cos \vartheta \cos^2 \vartheta F(\vartheta) d\vartheta = \sigma E_z,$$

$$E_z = \pi (a_0 R_0 + a_1 R_1 + a_2 R_2 + \dots),$$

как это и должно быть.

т.е., все, что угодно.

Функция $F(\vartheta)$ должна быть четной [при нечетной $F(\vartheta)$ E_z будет нулем], например

Вниманию предприятий, организаций, НИИ, вузов стран СНГ и зарубежных фирм!

Журнал «Электричество» представляет свои страницы для

- **РЕКЛАМЫ ИЗДЕЛИЙ** отечественных предприятий и зарубежных фирм в области энергетики, электротехники, электроники, автоматики
- **ПУБЛИКАЦИИ ОБЪЯВЛЕНИЙ** о научных симпозиумах, конференциях, совещаниях, семинарах
- **ДРУГОЙ ИНФОРМАЦИИ**, соответствующей тематике журнала

Сообщаем, что журнал поступает к зарубежным подписчикам во многих странах мира на русском и английском языках. Реклама в черно-белом изображении может быть помещена на страницах журнала или на его обложке. Напоминаем наш адрес: **103012 Москва, К—12, Б. Черкасский пер., 2/10** или **101000 Москва, Главпочтамт, абонемента ящик № 648**. Телефоны для справок: **924-24-80, 928-88-69**.

Ветровые нагрузки воздушных линий электропередачи

БУРГСДОРФ В.В. , ЗЛОБИНСКИЙ Э.Л.

Работа по исследованию ветровых нагрузок воздушных линий была впервые начата в СССР в 1955 г. [1]. В 1956 г. был сделан доклад на конференции CIGRE в Париже о постановке задачи и результатах первых исследований. Доклад был воспринят с интересом, и было рекомендовано продолжать работу в том же направлении, расширив круг опытных пролетов, смонтированных в различных климатических районах СССР, и усовершенствовав специальную аппаратуру.

Наиболее трудным вопросом является измерение и регистрация скорости ветра, поскольку анемометры либо дают неприемлемую погрешность, либо записывают микроструктуру ветра (которая не представляет большого интереса) и требуют постоянной работы с ними квалифицированных специалистов.

Известно, что ветер в атмосфере носит турбулентный характер и представляет собой совокупность отдельных вихрей, обладающих различными скоростями и направлениями. Ветровое поле не только резко неравномерно в пространстве, но и чрезвычайно быстро пульсирует во времени, причем эти пульсации особенно велики и характерны для скорости ветра.

Наиболее обстоятельные исследования атмосферной турбулентности и микроструктуры ветра были проведены Геофизическим институтом АН СССР [2]. Осциллограммы скорости ветра, снятые с помощью электротермоанемометра, показали, что мгновенная скорость, так же как и разность скоростей, измеренных в двух точках на базе нескольких сантиметров, содержит характерные пульсации, длительностью от 0,03 до нескольких секунд.

Если в ветровой поток поместить более грубый анемометр, с большими размерами и большей инерцией, то он, не реагируя на отдельные кратковременные или локальные пульсации, покажет какую-то осредненную скорость. При этом анемометры разных систем измеряют разные скорости. Так, для отдельных типов анемометров это различие может составлять от 20 до 80%. Что касается измерения амплитуды отдельных порывов длительностью 2÷5 с, то здесь разница еще больше; чашечные анемометры типа АРМЭ на такие порывы вообще не реагируют. В то же время порывы длительностью в несколько секунд пред-

ставляют весьма существенный практический интерес, так как определяют расчетную ветровую нагрузку на ряд типов сооружений, которая пропорциональна квадрату мгновенной скорости ветра.

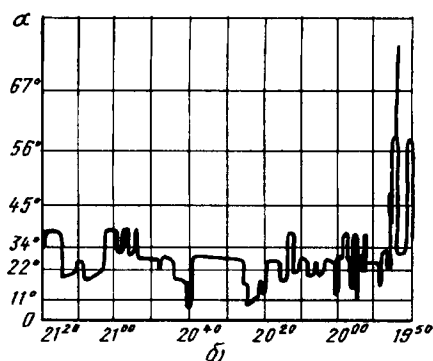
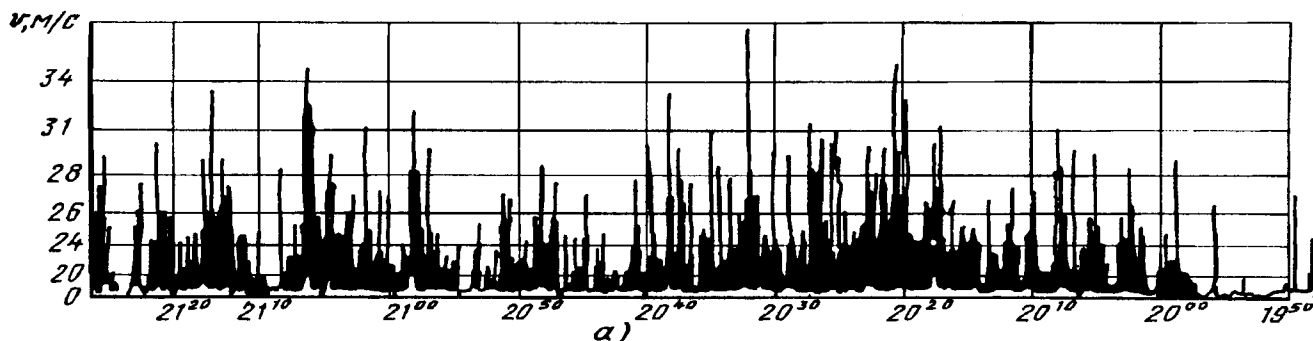
Инерция анемометров зависит от характера причин, ее вызывающих (механические, пневматические, тепловые), от конструкции и массы приемной части анемометра, а для каждого данного прибора — от средней скорости ветра, частоты и амплитуды порывов. Теоретический учет всех этих факторов чрезвычайно труден, а иногда и вовсе невозможен, из-за сложности аэродинамических процессов, происходящих при обтекании анемометрических приемников турбулентным потоком в атмосфере, поэтому сравнение показаний анемометров разных систем требует экспериментальных исследований с последующей статистической обработкой.

Естественно, потребовалась увязка результатов измерений скорости ветра на опытных пролетах с многолетними данными метеорологических станций СССР о ветрах, полученными на основании показаний флюгера Вильда. Поэтому анемометр для исследований был разработан на базе флюгера Вильда. Помимо этой причины необходимо было учесть следующие обстоятельства:

анемометр, предназначенный для опытных установок, должен регистрировать порывы ветра длительностью 1—10 с, что позволит решить вопрос о реакции провода на отдельные порывы, поэтому интегрирующие приборы с чашечной вертушкой типа АГРЭ не годятся;

аппаратура должна быть проста в эксплуатации, чтобы ее мог обслуживать персонал метеостанций, поэтому такие приборы, как заторможенный чашечный анемометр Суражского, также не представляют существенного интереса; применение регистрирующего флюгера позволило в значительной мере решить задачу, повысить надежность и точность измерений, а также получить значительно большее по сравнению с визуальными измерениями, число данных.

Датчики регистрирующего флюгера просты: это потенциометры, движки которых жестко связаны с доской и флюгаркой. Они должны быть: компактными, чтобы не вносить возмущений в измеряемый воздушный поток (это относится в



основном к датчику скорости); герметичными, чтобы удовлетворительно работать при дожде, снеге и пылевых бурях; достаточной мощности, чтобы от них могли питаться стандартные регистрирующие вольтметры, потребляющие сравнительно большую мощность. Они должны удовлетворять требованиям надежности и безопасности и, кроме того, показания вольтметров не должны зависеть от колебаний напряжения сети (с этой целью схема питается от стабилизатора напряжения).

Примеры записи показаний регистрирующего флюгера показаны на рисунке а и б.

Академик А.Н. Крылов теоретически показал [3], что для регистрации процесса с периодом колебаний β_1 измерительная система должна обладать таким периодом β_2 , чтобы $\beta_1/\beta_2 = 10$. Иными словами, измеритель, имеющий период собственных колебаний, может правильно измерить только процесс, период колебаний которого на порядок больше.

Собственный период колебаний доски флюгера Вильда составляет около 1 с, поэтому амплитуда порывов длительностью около 10 с отмечается доской правильно. Как известно, анемометр Дайнса вследствие демпфирующего влияния соединительных трубок регистрирует без искажений амплитуду порывов длительностью не менее 12 с. [4]. Таким образом, с точки зрения реакции на отдельные порывы регистрирующий флюгер, в целом, не уступает анемометру Дайнса. Другие вопросы, связанные с флюгером, освещены более

подробно в [5].

Провод в пролете можно рассматривать как математический маятник, период колебаний которого зависит от стрелы провеса и, следовательно, от длины пролета и от длины гирлянды изоляторов на промежуточной опоре воздушной линии. Под воздействием ветра провод отклоняется, передавая механическую нагрузку на опоры. При комбинированном действии ветра и гололеда, увеличивающего парусность и тяжение проводов, может произойти обрыв провода или падение опор линии, что является тяжелой аварией, приносящей колоссальные убытки. Значение нормальной составляющей ветровой нагрузки на опоры от провода зависит от угла отклонения провода в пролете, или, что то же, от амплитуды колебаний маятника-провода, которая, в свою очередь, зависит от среднего по длине пролета мгновенного значения скорости ветра. Провод интегрирует значение скорости ветра и как бы измеряет ее, поэтому синхронная регистрация скорости ветра и угла отклонения провода в пролете дают достаточные данные для расчета ветровых нагрузок на провод и опоры. Аэродинамическое сопротивление различных типов опор было определено на основании продувки их моделей в аэродинамической трубе ЦАГИ еще на начальной стадии исследований; подробно об этом говорится в упоминавшемся выше докладе CIGRE.

В настоящее время исследования продолжают. Опытные пролеты ВНИИЭ, на которых измеряются ветровые нагрузки, оснащены новой, более современной аппаратурой, в частности, новыми анемометрами, смонтированы новые пролеты в районах с сильными ветрами. Работы по исследованию ветровых нагрузок, проводимые нами, представляют интерес для других стран с большой территорией, поскольку проектирование высоковольтных воздушных линий связано, прежде всего, с расчетами их на механическую прочность при ураганных ветрах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бургсдорф В.В. Ветровые нагрузки проводов воздушных линий. — Электричество, 1957, № 5.
2. Кречмер С.И. Методика измерений микропульсаций

скорости ветра и температуры в атмосфере. — Ан СССР. Труды Геофизического института, 1954, № 24 (151).

3. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. — М.: Изд. АН СССР, 1933.

4. Гольцман М.И. Основы методики аэрофизических из-

мерений. — М.: Гостехиздат, 1950.

5. Злобинский Э.Л. Регистрирующий флюгер РФ. — Труды ВНИИЭ, 1961, вып. XI.

[06.06.94]

Задачи и методы лабораторных исследований систем молниезащиты

ЛАРИОНОВ В.П., ПРОХОРОВ Е.Н.

Одной из задач исследований молниезащиты различных объектов является установление тока поражения в системе «молниеотвод—объект» и определение условий, обеспечивающих с заданной надежностью экранирование защищаемого объекта молниеотводом. Исследования молниезащиты в лабораторных условиях проводятся в большинстве случаев с использованием геометрически подобных моделей.

В качестве модели молнии применяется искровой разряд в воздушном промежутке, возбуждаемый импульсом напряжения. Известно, что в промежутке типа «стержень—стержень» преимущественное развитие получает разряд с электрода положительной полярности, поэтому при положительной полярности модели молниеотвода с него развивается канал разряда на значительную длину, модель объекта оказывается хорошо заэкранированной и зона защиты молниеотвода сильно преувеличенной в размерах. В связи с этим эксперименты приводятся при отрицательной полярности модели и положительной полярности импульса, подаваемого на высоковольтный электрод.

Значения напряжений, подаваемых на промежутки «стержневой электрод—модель», поддерживаются близкими к 50%-му разрядному. При более высоких напряжениях канал разряда мало отклоняется от силовой линии, кратчайшей между электродами и моделью.

На результаты опытов большое влияние оказывает высота, на которой располагается высоковольтный электрод. Часто эту высоту связывают с так называемой высотой ориентировки канала молнии и устанавливают равной ей в том же масштабе, что и исследуемая модель. Высота ориентировки не имеет достаточного обоснования и значения ее продолжают дискутироваться.

Изложенная кратко методика лабораторных исследований молниезащиты разработана А.А. Акопяном [1]. В опытах по определению зон защиты

молниеотводов им принималось отношение высоты высоковольтного электрода H к высоте модели объекта h для стержневых электродов $H/h=20$, а для тросовых $H/h=10$, поскольку тросы используются для защиты часто поражаемых молнией линий электропередачи и для них необходимо обеспечить более высокую надежность зон защиты.

Такие объекты, как высотные здания и сооружения, практически не могут быть защищены молниеотводами и будут заведомо поражаться молнией. С целью выявления возможных точек поражения молнией в опытах по молниезащите высотных зданий Москвы и Варшавы (ВЭИ, 1949—51 гг.) принималось соотношение $H/h=2,5\div3,0$ (h — высота модели здания), а в некоторых случаях значение H в принятом масштабе соответствовало 300 м — нижнему уровню грозовых облаков в средних широтах.

Определение возможных точек поражения молнией самолетов и других летательных аппаратов имеет особо важное значение. Однако модельные исследования поражаемости летательных аппаратов в соответствии с действующей в настоящее время методикой проводятся при расстоянии между электродами H не менее, чем в 5 раз превышающем наибольший линейный размер модели аппарата. Модель располагается в разрядном промежутке изолированно от электродов. Такой подход к методике экспериментов, практически мало отличающийся от метода определения зон защиты молниеотводов, не позволяет достаточно полно установить возможные точки поражения аппарата молнией [2].

Вместе с тем, очевидно, что задачи исследований существенно отличаются друг от друга. Молниеотвод с той или иной степенью надежности обеспечивает защиту объекта, расположенного полностью в защитной зоне, вне зависимости от конфигурации самого объекта. Задача ставится по-другому, если объект (например, са-

молет или высотное здание) заведомо будет поражаться молнией. В этом случае необходимо с достаточной полнотой выявить возможные точки поражения, чтобы предусмотреть меры защиты соответствующих элементов объекта от повреждения.

Лабораторные исследования поражаемых молнией объектов основываются на электрогеометрическом методе [3], в соответствии с которым при приближении лидерного канала молнии к объекту на нем растет напряженность электрического поля и при достижении критического значения с объекта начинает развиваться встречный разряд. Расстояние между лидером и объектом в момент начала встречного разряда — расстояние ориентировки R (или дистанция поражения) — зависит от заряда лидера и, таким образом, от тока молнии I_m . Каждому значению тока с вероятностью $P(I_m)$ соответствует вполне определенное расстояние $R(I_m)$, имеющее такую же вероятность, как и ток молнии. Связь расстояния ориентировки с током молнии (до 50 кА) определяется уравнением:

$$R = 9,4 I_m^{2/3}.$$

При изменении R от 60 до 20 м эффективность защиты возрастает от 0,85 до 0,99. Вероятность появления R , меньше некоторого заданного значения, составляет $1 - P(I_{mR})$, что является вероятностью поражения непредусмотренных точек или элементов объекта.

В лабораторных исследованиях расстояние ориентировки устанавливается в соответствии с заданной эффективностью защиты в принятом масштабе модели объекта. Следует иметь в виду, что получаемые результаты зависят от масштаба модели, и картина поражения объекта разрядами

становится тем полнее, чем больше масштаб модели.

Применительно к летательным аппаратам в значение R может быть внесена поправка, учитывающая изменение атмосферных условий в полете по сравнению с наземными [4].

Таким образом, в модельных исследованиях молниезащиты имеются два типа задач:

исключение поражений объекта молнией с помощью молниеотводов;

выявление мест поражения объекта, незащищенного молниеотводами, с последующей разработкой мер защиты поражаемых элементов.

В соответствии с поставленной задачей применяется та или иная методика эксперимента: определение зон защиты молниеотводов с возможным варьированием высоты ориентировки молнии;

использование расстояния ориентировки (дистанции поражения), основанного на положениях электрогеометрического метода, для определения возможных точек удара и вероятности их поражения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акопян А.А. Исследование защитного действия молниеотводов. — Труды ВЭИ. — М.: Госэнергоиздат, 1940. вып. 36.
2. Определение поражаемости объекта молнией / В.П. Ларионов, М.П. Кокуркин, А.Е. Мосолов и др. — Электричество, 1985, № 7.
3. Darveniza M., Popolansky F., Whitehead E.R. Lightning protection of UHV transmission lines. — Electra, 1975, № 41.
4. Ларионов В.П. О возможностях расчета молниезащиты электрогеометрическим методом. — Электричество, 1992, № 8.

[26.01.95]

Борис Павлович Борисов

31 января 1995 г. ушел из жизни замечательный человек, известный ученый в области электротехники, член-корреспондент Национальной Академии наук Украины, профессор Борис Павлович Борисов.

Б.П. Борисов родился в 1940 г. в Караганде. Трудовую деятельность начал на Новокраматорском машиностроительном заводе в 1958 г. Высшее образование получил в Краматорском индустриальном институте, который успешно окончил в 1968 г. по специальности «Электрические машины и аппараты».

С 1970 г. Б.П. Борисов работал в Институте электродинамики НАН Украины (аспирант, младший научный сотрудник, ученый секретарь института, заведующий лабораторией, заведующий отделом, заместитель директора по научной работе). В 1974 г. защитил кандидатскую, в 1989 г. — докторскую диссертации. В 1992 г. ему было присвоено ученое звание профессора, и он был избран членом-корреспондентом НАН Украины по специальности «Электроэнергетика».

Научная деятельность Б.П. Борисова была посвящена исследованиям процессов преобразования и стабилизации параметров электромагнитной энергии, развитию теории многофазных цепей, систем электропитания и электроснабжения, а также созданию современных электротехнических систем и установок.

Важное значение для науки имеют выполненные Б.П. Бори-



совым, его научной школой и учениками работы в области электроснабжения промышленных предприятий. Результаты научной деятельности Б.П. Борисова отражены в 200 трудах в области электротехники и электрооборудования, в том числе 6 монографиях, 35 авторских свидетельствах на изобретения и патентах. За цикл работ «Электроснабжение электротехнологических установок» ему в 1989 г. была присуждена премия АН Украины в области энергетики имени академика Г.Ф. Проскуры.

Б.П. Борисов осуществил теоретическое обобщение и решение научной проблемы разработки теории, принципов построения и создания ряда электромагнитных и полупроводниковых систем электропитания и управления нового класса электротехнологического оборудования — магнитодинамических установок, имеющих важное народнохозяйственное и социальное значение.

Научно-исследовательскую

работу Б.П. Борисов совмещал с большой научно-организационной и общественной деятельностью, являясь заместителем директора института по научной работе, руководителем двух Государственных научно-технических программ ГКНТ Украины по вопросам науки и технологии.

Б.П. Борисов был членом научного совета НАН Украины по комплексной проблеме «Научные основы электроэнергетики», Научно-технического совета Министерства машиностроения, военно-промышленного комплекса и конверсии, членом редколлегии журнала «Техническая электродинамика».

Б.П. Борисов большое внимание уделял подготовке научных и инженерных кадров. Он создал научную школу в области разработки и оптимизации электротехнологических систем. Под его руководством подготовлены и защищены 7 кандидатских диссертаций. Он был профессором кафедры целевой подготовки «Электроэнергетика и электротехника» на факультете «Электроэнергетика и автоматика» Киевского политехнического института.

Б.П. Борисов награжден орденом, двумя медалями и Почетной грамотой Президиума Национальной Академии наук Украины.

С кончиной Бориса Павловича Борисова мы потеряли замечательного человека и крупного ученого.

Группа товарищей

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Секция теоретических основ электротехники, преобразовательной техники, электротехнических материалов

Лабунцов В.А., главный редактор, председатель секции (Московский энергетический институт), Бутырин П.А. (Институт высоких температур Российской Академии наук, Москва), Иоссель Ю.Я. (Научно-исследовательский институт постоянного тока, Санкт-Петербург), Комельков В.С. (Научно-исследовательский энергетический институт, Москва), Нетушил А.В. (Московская государственная академия тонкой химической технологии), Розанов Ю.К. (Московский энергетический институт), Пищиков В.И. (Московский энергетический институт), Тареев Б.М. (Всероссийский институт научной и технической информации, Москва), Толстов Ю.Г. (Научно-исследовательский энергетический институт, Москва), Чечурин В.Л. (Санкт-Петербургский государственный технический университет).

Научный редактор — Макашкин Б.Д.

Секция электроэнергетики

Мамиконянц Л.Г., председатель секции (Всероссийский научно-исследовательский институт электроэнергетики, Москва), Гельфанд Я.С. (Всероссийский научно-исследовательский институт электроэнергетики, Москва), Еришевич В.В. (Проектный и научно-исследовательский институт «Энергосетьпроект», Москва), Митюшкин К.Г. (Всероссийский научно-исследовательский институт электроэнергетики, Москва), Морозкин В.П. (Московский энергетический институт), Семенов В.А. (Центральное диспетчерское управление Единой энергетической системы России), Строев В.А. (Московский энергетический институт).

Научный редактор — Кудинова Л.С.

Секция техники высоких напряжений, электрических аппаратов, трансформаторов

Ларионов В.П., председатель секции (Московский энергетический институт), Белкин Г.С. (Всероссийский электротехнический институт, Москва), Бортник И.М. (Министерство науки и технической политики России), Костенко М.В. (Санкт-Петербургский государственный технический университет), Лизунов С.Д. (Московский электрозаовод).

Научный редактор — Кудинова Л.С.

Секция электрических машин

Иванов-Смоленский А.В., председатель секции (Московский энергетический институт), Данилевич Я.Б. (Всероссийский институт электромашиностроения, Санкт-Петербург), Евсеев Б.Н., заместитель главного редактора журнала, Шакарян Ю.Г. (Всероссийский научно-исследовательский институт электроэнергетики, Москва).

Научный редактор — Евсеев Б.Н.

Секция электропривода и автоматизации технологических процессов

Слежановский О.В., председатель секции (Всероссийский научно-исследовательский институт «Электропривод», Москва), Андерс В.И. (Московский энергетический институт), Борцов Ю.А. (Санкт-Петербургский электротехнический институт), Ильинский Н.Ф. (Московский энергетический институт), Шаталов А.С. (Научно-техническое объединение «Антей», Москва).

Научный редактор — Евсеев Б.Н.