



ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

1990

•ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ•

11

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОРГАН АКАДЕМИИ НАУК СССР, ГОСУДАРСТВЕННОГО КОМИТЕТА СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ, ЦП ВСЕСОЮЗНОГО НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА ЭНЕРГЕТИКОВ
И ЭЛЕКТРОТЕХНИКОВ ИМЕНИ АКАДЕМИКА Г. М. КРЖИЖАНОВСКОГО

МОСКВА

ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ

УДК 621.311.016.3.001.24

Питание потребителей энергии с резкопеременной нагрузкой от электроэнергетических систем

БАРИНОВ В. А., ГУРОВ А. А., КОРЧАК В. Ю., МАНЕВИЧ А. С., МИТИН Ю. В.

В последнее время значительное внимание уделяется разработке мощных источников энергии для электроснабжения различного рода электрофизических установок с резкопеременной циклической нагрузкой. Эти исследования связаны с созданием мощных термоядерных установок и реакторов, внедрением в различных отраслях народного хозяйства новых промышленных технологий, требующих значительной импульсной мощности. Эти разработки до недавнего времени были в основном связаны с созданием специальных источников энергии на базе емкостных и индуктивных накопителей энергии, электромеханических агрегатов с маховиками, магнетогидродинамических и магнитокумулятивных генераторов. Эти генераторы позволяют получить импульсы электроэнергии без ее предварительного накопления, тогда как накопители требуют зарядки от дополнительного источника, мощность которого определяет длительность режима заряда [1—3]. В последнее время рассматриваются также возможности использования для этих целей обычных электроэнергетических систем (ЭЭС) [4].

Мощные потребители с циклической нагрузкой имеются в металлургии, строительной индустрии, на электрифицированном транспорте и в других отраслях промышленности. С учетом тенденции увеличения количества и мощности потребителей с резкопеременной нагрузкой вопросы выбора наиболее рациональных схем электроснабжения таких потребителей становятся все более актуальными. Ниже рассматриваются вопросы использования ЭЭС для питания мощных потребителей с резкопеременной нагрузкой.

Покрывание переменной нагрузки при ее подключении к ЭЭС может происходить за счет из-

менения кинетической энергии роторов синхронных генераторов, изменения мощности обычной нагрузки вследствие изменений напряжения и частоты в электрической сети, вызванных подключением переменной нагрузки, а также регулирования мощности первичных двигателей генераторов.

Последняя возможность может быть реализована для потребителей с медленно изменяющейся нагрузкой, скорость изменения которой соизмерима со скоростью изменения мощности первичных двигателей генераторов. По данным [5] изменение мощности ТЭС на $\pm 10\%$ номинального значения мощности осуществляется за несколько секунд, дальнейшее изменение мощности на ту же величину происходит за одну — несколько десятков секунд. Изменение мощности агрегатов ТЭС во времени зависит от многих факторов (диапазона регулирования мощности, типа и режима работы котла, вида топлива и др.) и составляет не более 15% от номинальной мощности в минуту. Для маневренных агрегатов АЭС, которые используются за рубежом, изменение мощности составляет около 5% номинальной мощности в минуту. Газотурбинные и дизельные агрегаты позволяют значительно быстрее изменять свою мощность, однако доля суммарной мощности таких агрегатов в ЭЭС страны очень мала и составляет всего $0,44\%$ установленной мощности электростанций СССР.

С учетом маломаневренного оборудования, различного рода задержек и ограничений регулировочные возможности первичных двигателей энергообъединений в целом оцениваются приблизительно в $0,5\%$ располагаемой мощности энергообъединения в минуту

Быстрое освобождение энергии ЭЭС для питания мощных потребителей с резкопеременной нагрузкой может происходить за счет изменения кинетической энергии роторов генераторов, которое следует непосредственно за изменением их скорости вращения.

Предполагая, что пропускная способность электрической сети достаточна для передачи мощности от генераторов энергообъединения подключаемой нагрузке и замещая генераторы энергообъединения одним эквивалентным генератором, можно получить оценку предельной энергии, которая может освободиться в отдельных энергообъединениях страны и ЭЭС СССР в целом при подключении нагрузки и снижении частоты в ЭЭС для нормально допустимого значения 49,8 Гц (ГОСТ 13109—87), максимально допустимого значения 49,6 Гц и до ограниченно допустимого (не более 90 ч в год) значения 49 Гц в послеаварийных режимах работы электрической сети.

Величину оценки предельной мощности, которую можно подключить к тем или иным энергообъединениям, можно получить с помощью выражения

$$\Delta P = \frac{\Delta W \alpha}{\Delta t}, \quad (1)$$

где Δt — время подключения потребителя; α — коэффициент неравномерности графика нагрузки.

Принимая, например, время подключения нагрузки 20 с (что соответствует среднему времени питания в экспериментах термоядерного реактора типа «Токамак» — диапазон 10—30 с [6]), коэффициент неравномерности равным двум, получаем, что предельная мощность нагрузки, которая может быть подключена к отдельным энергообъединениям страны за счет уменьшения кинетической энергии генераторов при снижении частоты до максимально допустимого значения, составит: для ОЭС Центра — 261,0 МВт; ОЭС Средней Волги — 137,0 МВт; ОЭС Урала — 189,0 МВт; ОЭС Северо-Запада — 174,0 МВт; ОЭС Юга — 267,0 МВт; ОЭС Северного Кавказа — 62,0 МВт; ОЭС Закавказья — 87,0 МВт; ОЭС Казахстана — 56,0 МВт; ОЭС Сибири — 268,0 МВт; ОЭС Средней Азии — 147,0 МВт; ОЭС Дальнего Востока — 72,0 МВт. При сокращении времени действия нагрузки величина предельной мощности увеличивается обратно пропорционально сокращаемому времени.

Приведенные в табл. 1 данные имеют оценочный характер. В действительности они могут отличаться в меньшую сторону из-за неучета возможности перегрузки отдельных связей и нарушения устойчивости энергообъединений при подключении потребителей с резкопеременной нагрузкой и нарушения устойчивости энергообъединения при подключении рассматриваемых потребителей. Расчеты устойчивости конкретных схем ЭЭС показывают, что основные ограничения связаны с пере-

Таблица 1

Оценка предельной энергии ΔW , МДж, освобождаемой в отдельных энергообъединениях страны при подключении мощной нагрузки

Энергообъединение	Предельная энергия ΔW при частоте		
	49,8 Гц	49,6 Гц	49,0 Гц
ОЭС Центра	1310	2610	6500
ОЭС Средней Волги	690	1370	3410
ОЭС Урала	950	1890	4690
ОЭС Северо-Запада	870	1740	4310
ОЭС Юга	1340	2670	6630
ОЭС Северного Кавказа	310	620	1550
ОЭС Закавказья	430	870	2160
ОЭС Казахстана	280	560	1400
ОЭС Сибири	1340	2680	6670
ОЭС Средней Азии	740	1470	3660
ОЭС Дальнего Востока	360	720	1780
ЭЭС СССР	7520	15 020	37 320

грузкой по условиям устойчивости шунтирующих сетей более низкого класса напряжения. Для уровня ЭЭС СССР эти ограничения связаны с тем, что большинство межсистемных связей между ОЭС являются относительно слабыми. Степень отличия зависит от структуры энергообъединения — типа, мощности, расположения электростанций, структуры электрической сети, места подключения потребителей. Кроме того, весьма существенное значение имеет характер изменения мощности резкопеременной нагрузки — как с точки зрения сохранения устойчивости, так и опасности возникновения различных резонансных явлений. К таким явлениям относятся:

электрохимический резонанс, связанный с колебательным движением роторов генераторов; диапазон частот электрохимического резонанса составляет, как показали проведенные расчеты модальной структуры для ряда ОЭС страны, от 0,05 до 40 Гц;

резонанс, связанный с крутильными колебаниями валов турбоагрегатов; диапазон частот крутильных колебаний охватывает как зону субсинхронного, так и зону суперсинхронного резонанса и составляет от 5 до 180 Гц;

резонанс, связанный с электромагнитными процессами в обмотках статоров генераторов и электрической сети; диапазон частот составляет от десятков до тысячи и более герц (например, для одного из энергообъединений США эти частоты находятся в пределах от 37 до 1560 Гц [7]);

резонанс, связанный с низкочастотными колебаниями в системах возбуждения, демпферных контурах синхронных генераторов; диапазон частот составляет доли герц [7].

Проведенные авторами исследования различных схем ЭЭС при подключении потребителей с различными временными характеристиками показали реальную опасность возникновения резонансных явлений.

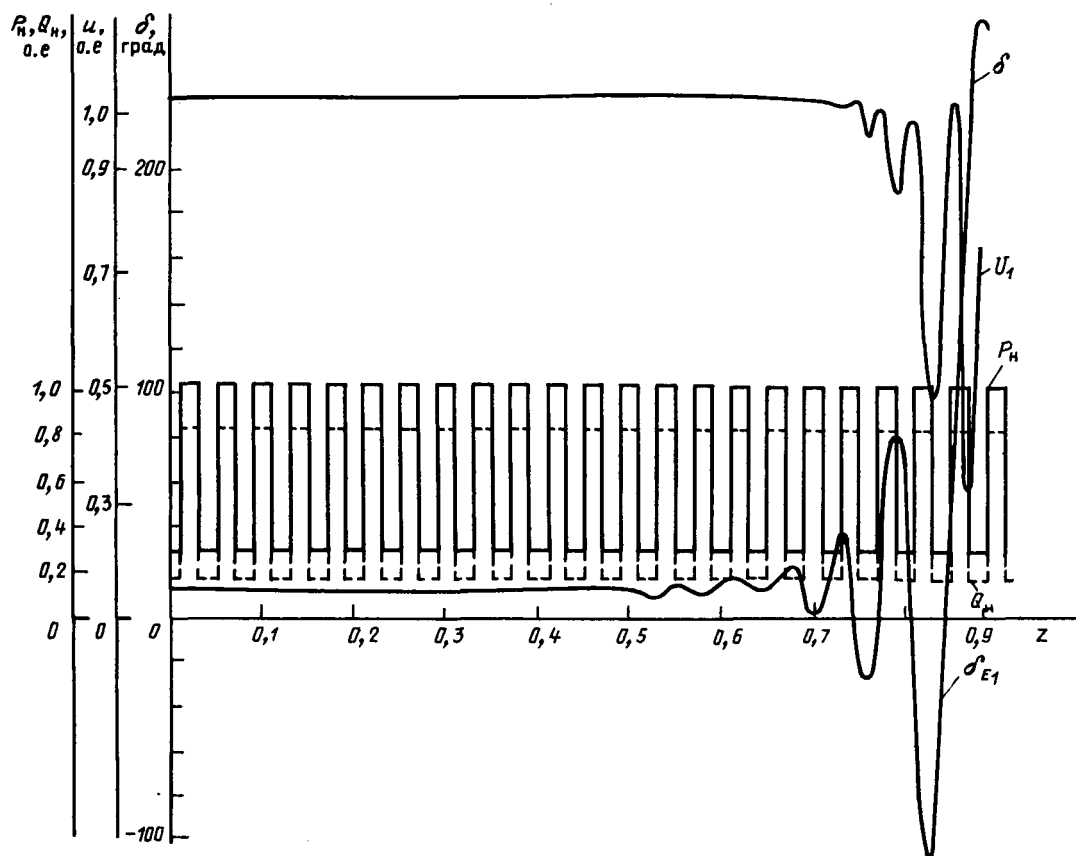


Рис. 1. Зависимость угла сдвига ротора, фазы и модуля напряжения генератора U от времени при действии резкопеременной нагрузки с $\Delta t_{\text{имп}} = 0,019$ с

нансных явлений [2]. На рис. 1 и 2 показан характер развития переходных процессов для реальной схемы ЭЭС, содержащей более 200 узлов, при возмущениях резкопеременной нагрузки на частотах, совпадающих с частотами модальных составляющих, соответствующих электромеханическим колебаниям роторов генераторов. Кривые изменения углов сдвига роторов генераторов построены для узлов, для которых коэффициенты распределения амплитуд колебаний являются наибольшими, т. е. в которых в наибольшей степени проявляются заданные модальные составляющие.

Подключение резкопеременной нагрузки к ЭЭС сопровождается ухудшением качества электрической энергии. Для устранения опасности возникновения резонансных явлений и уменьшения влияния резкопеременной нагрузки на качество электрической энергии могут быть использованы статические компенсаторы реактивной мощности, накопители и поглотители энергии.

Изменение мощности обычных потребителей при изменении напряжения и частоты в сети, обусловленных подключением переменной нагрузки, определяется регулирующим эффектом нагрузки по частоте и напряжению, который зависит от

состава нагрузки и наличия регулирующих устройств. Регулирующий эффект активной нагрузки по частоте обычно составляет 1—2, по напряжению 0—2 отн. ед. Величина мощности резкопеременной нагрузки, которая может быть подключена за счет изменения мощности обычной нагрузки, зависит от степени концентрации обычных потребителей энергии, степени связности и пропускной способности электрической сети, а также от действия регулирующих устройств в месте подключения потребителей к ЭЭС.

Величина мощности, освобождаемая обычными потребителями при снижении напряжения на 1 % при хорошо развитой электрической сети энергообъединения, может быть [4] оценена с помощью выражения

$$P_{\text{ос}} = AS_n^{1/3} S_n^{2/3}, S_n = \frac{U^2}{X_0} n, \quad (2)$$

где S_n — плотность обычных потребителей энергии, $\text{МВ} \cdot \text{А} / \text{км}^2$; S_n — показатель, характеризующий развитость электрической сети, $\text{МВ} \cdot \text{А} \cdot \text{км}$; U — номинальное напряжение сети, кВ; X_0 — удельное индуктивное сопротивление ЛЭП, $\text{Ом} / \text{км}$; n — среднее количество ЛЭП, присоединенных к распределительным устройствам данного напряже-

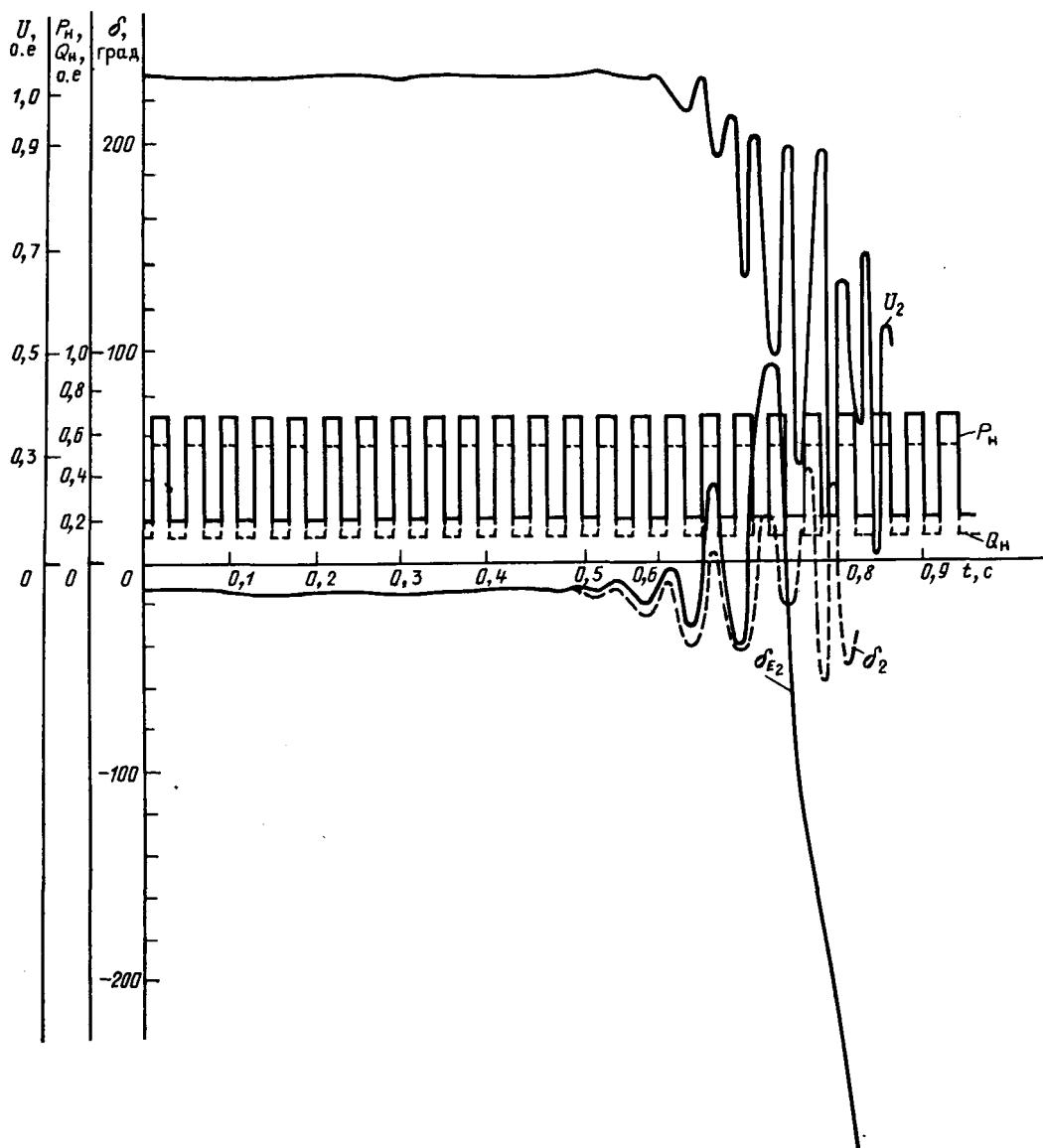


Рис. 2. Зависимость угла сдвига ротора, фазы и модуля напряжения генератора 2 от времени при действии резкопеременной нагрузки с $\Delta t_{\text{нмр}} = 0,0174$ с

ния; A — коэффициент, изменяющийся в пределах от 0,03 до 0,046.

Используя (2), можно получить оценку значения мощности резкопеременной нагрузки, которая компенсируется изменением мощности обычных потребителей энергии. Например, для концентрированного энергообъединения с располагаемой мощностью порядка 100 000 МВт значение $P_{\text{ос}}$ оценивается величиной 500 МВт [4]. В условиях СССР хорошо развитой сетью является электрическая сеть в ОЭС Юга. Освобождаемая мощность $P_{\text{ос}}$ для этого энергообъединения, определенная с помощью (2), составляет 240 МВт.

Подключение потребителей с резкопеременной нагрузкой к ЭЭС обычно осуществляется с по-

мощью вентильных преобразователей. Расчеты переходных электромагнитных процессов в вентильных преобразователях и ЭЭС показали, что существенное влияние на качество электрической энергии в электрической сети ЭЭС имеет схема преобразователя, при мощности нагрузки порядка 100 МВт и выше необходимо применение 12-пульсной и выше схем преобразователя; значительное влияние на качество электрической энергии оказывают статические тиристорные компенсаторы реактивной мощности, фильтрокомпенсирующие цепи, управляемые резисторы или накопители, а также закон управления тиристорами. Исследования показали, что для заданного вида резкопеременной нагрузки можно выбрать оптималь-

ную схему вентильного преобразователя и состав средств компенсации возмущений со стороны резкопеременной нагрузки на ЭЭС.

Была проведена оценка технико-экономических показателей различных систем электроснабжения потребителей энергии, выполненных на основе емкостных, индуктивных и инерционных накопителей энергии, а также систем электроснабжения, работающих параллельно с ЭЭС, с учетом средств компенсации импульсных возмущений на ЭЭС до допустимого уровня по требованиям ГОСТ на качество электрической энергии. Длительность подключения резкопеременной нагрузки принималась равной 20 с. Как показали расчеты, наименьшую стоимость имеют системы электроснабжения, работающие параллельно с ЭЭС СССР. Системы электроснабжения, построенные на основе только накопителей, оказываются дороже, степень удорожания зависит от вида накопителя и характеристик нагрузки; наименьшую стоимость имеет система электроснабжения с инерционными накопителями, наибольшую — система электроснабжения с емкостными накопителями.

В табл. 2 приведены полученные авторами оценочные величины стоимости системы электроснабжения потребителя резкопеременной нагрузки мощностью 100 МВт на основе емкостных, индуктивных, электромеханических накопителей и с использованием ЭЭС при длительности действия резкопеременной нагрузки 20 с. При этом величины стоимостей накопителей определялись на основе [3, 8], а стоимость ЛЭП и электротехнического оборудования — на основе [9]. Предполагалось, что колебания мощности нагрузки проис-

ходят на частотах, отличных от частот модальных составляющих ЭЭС, а требуемое качество электроэнергии обеспечивается фильтрокомпенсирующими устройствами, и накопители энергии не требуются.

Необходимо отметить, что с увеличением времени подключения резкопеременной нагрузки эффективность использования для этих целей ЭЭС повышается, поскольку стоимость систем электроснабжения, построенных только на емкостных, индуктивных или электромеханических накопителях, растет почти пропорционально увеличению длительности времени, в то время как стоимость систем электроснабжения, работающих параллельно с ЭЭС, растет с увеличением длительности подключения нагрузки значительно в меньшей степени, поскольку при этом состав средств компенсации импульсных возмущений будет изменяться незначительно и на длительных интервалах времени уже могут быть использованы регулировочные возможности первичных двигателей генераторов.

Заключение. Электроэнергетические системы могут быть использованы для питания мощных импульсных нагрузок электрофизических установок и других промышленных потребителей, использующих новые технологии и потребляющих значительную импульсную мощность. Покрытие быстроменяющейся нагрузки может быть осуществлено за счет изменения кинетической энергии роторов синхронных генераторов и изменения мощности обычных потребителей энергии, обусловленных изменением напряжения и частоты электрической сети вследствие подключения нагрузок. Допустимая мощность нагрузки зависит от места подключения нагрузки к ЭЭС СССР и характера изменения ее во времени. При периодическом характере изменения нагрузки существенным требованием является устранение опасности резонансных явлений, что может быть обеспечено применением различных управляемых устройств, в том числе статических компенсаторов реактивной мощности, фильтрокомпенсирующих цепей, накопителей или поглотителей энергии, совершенствованием схем вентильных преобразователей и их систем управления. Эти же средства могут быть использованы для обеспечения требуемого качества электрической энергии в электрической сети. С увеличением длительности подключения резкопеременной нагрузки к ЭЭС эффективность использования системы электроснабжения, работающей параллельно с ЭЭС СССР, повышается.

Компенсация возмущений, оказываемых медленно изменяющейся нагрузкой на ЭЭС, может осуществляться за счет регулирования первичных двигателей генераторов и использования статических компенсаторов реактивной мощности и фильтров.

Таблица 2

Оценка стоимости вариантов систем электроснабжения потребителя с резкопеременной нагрузкой

Наименование оборудования	Расчетная стоимость систем электроснабжения, млн. руб.	
	с накопителями энергии	без накопителей энергии
Накопители энергии:		
емкостный ($8 \cdot 10^8$ Дж)	80	—
сверхпроводниковый ($1,6 \times 10^9$ Дж)	22,4	—
инерционный ($8 \cdot 10^8$ Дж)	2,4	—
Воздушные ЛЭП трансформаторы ОРУ	3,1	3,1
Управляемый тиристорный преобразователь	2,4	2,4
Фильтрокомпенсирующие устройства	—	0,8
Итого:		
система электроснабжения с накопителями		
емкостным	85,5	—
сверхпроводящим	27,9	—
инерционным	7,9	—
система электроснабжения от ЭЭС	6,3	—

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физика и техника мощных импульсных систем / Под ред. Е. П. Велихова.— М.: Энергоатомиздат, 1987.
2. Тезисы докладов третьей Всесоюзной конференции «Импульсные источники энергии».— Л.: ЦНИИАтоминформ, 1989.
3. Сюсюкин А. И. Сравнительная характеристика возможностей импульсных источников электроэнергии.— Техническая электродинамика, 1984, № 3.
4. Bronner G. Analytical study of power grid pulsing.— Fusion Technology, 1986, vol. 10, N 11.
5. Руммель Д. Работа электростанций в нормальных и аварийных режимах. В сб.: Управление энергосистемами / Пер. докладов на сессии СИГРЭ-82.— М.: Энергоатомиздат, 1984.

6. Giesen B., Petree F. Power system disturbances by fusion reactor experiments.— 3-rd Int. Conf. Sources and Eff. Power Syst. Disturbances, London, 5—7 May 1982, London; New York, 1982.

7. Gross G., Imparato C. F., Look P. M. A tool for the comprehensive analysis of power system dynamic stability.— IEEE Trans. on PAS, 1982, vol. PAS-101, N 1.

8. Накопители энергии в электрических системах: Учебное пособие для электроэнерг. спец. вузов / Ю. Н. Астахов, В. А. Веников, А. Г. Тер-Газарян.— М.: Высшая школа, 1989.

9. Справочник по проектированию электроэнергетических систем / Под ред. С. С. Рокотяна и И. М. Шапиро.— 3-е изд., перераб. и доп.— М.: Энергоатомиздат, 1985.

[14.05.90]

УДК 621.311.16.072.8.077.4.001.1

Применение фазоповоротных устройств для упрощения потокораспределением в энергосистемах

БУШУЕВ В. В., доктор техн. наук, КАЛЮЖНЫЙ А. Х., канд. техн. наук, КРЕЧМЕР Л. В., канд. техн. наук, ШУШУЕВ А. А., инж.

Введение. Современные электрические сети включают контуры, которые характеризуются большой неоднородностью (параметрической, режимной, схемной). Естественное потокораспределение в таких контурах является неоптимальным, так как приводит к перегрузке участков сетей более низкого напряжения и повышенным потерям в сетях. В связи с этим возникает необходимость в принудительном потокораспределении, которое можно осуществить [1] с помощью поперечного регулирования напряжения (ПРН). ПРН реализуется введением дополнительной э. д. с. ΔE , смещенной относительно вектора основного напряжения U_0 на 90° , которая обеспечивает поворот вектора результирующего напряжения U на угол θ :

$$\theta = \arctg \frac{\Delta E}{U_0}$$

Для реализации ПРН применяются фазоповоротные трансформаторы (ФПТ) и устройства (ФПУ). В контурах, образованных дальними электропередачами и распределительными сетями, следует вместо обычных автотрансформаторов применять ФПТ с диапазоном ПРН $\pm(12 \div 15)^\circ$ и более. В больших кольцах возникает необходимость ПРН с диапазоном до $\pm 60^\circ$, которое реализуется с помощью ФПУ [2, 3].

С развитием ЕЭС СССР требуется обеспечить управление сложным энергообъединением, включающим объединенные энергосистемы (ОЭС). Осуществить такое управление можно с помощью

многих ФПТ и ФПУ, работающих одновременно. Так, например, в частном случае связи дальней электропередачи с распределительной сетью более низкого напряжения в n точках имеет место $(n-1)$ независимых контуров, и для управления потокораспределением нужно установить $n-1$ ФПТ или ФПУ. В сложном энергообъединении таких независимых контуров и соответственно необходимых ФПТ или ФПУ оказывается весьма большое количество. Однако неоднородность этих контуров, их загрузка оказываются различными. Поэтому эффект от установки одних ФПТ намного больше, чем от установки других. Кроме того, при установке в схеме нескольких ФПУ или ФПТ одновременно они могут оказывать взаимное влияние на работу друг друга. Поэтому вопрос выбора наиболее эффективных мест установки ФПТ или ФПУ и управления ими требует специального рассмотрения.

В статье рассмотрено применение ФПУ для управления сложным энергообъединением на примере Азиатской части ЕЭС СССР. Для управления сложным энергообъединением применен иерархический подход, при котором работа ФПУ на более высоких иерархических уровнях не зависит от ФПУ, применяемых на последующих уровнях. Результаты могут быть распространены на любые сложные энергообъединения.

Стратегия управления сложным энергообъединением. Общим для энергообъединения является то, что с увеличением плотности размещения мощностей и плотности электрических сетей и их

пропускной способности уменьшается неоднородность контуров в этой сети. Обычно наименьшая плотность электрических сетей и наибольшие контуры имеют место между отдельными ОЭС. Поэтому представляется наиболее эффективным в качестве первоочередных рассмотреть сечения между ОЭС, которые содержат наименьшее количество связей и характеризуются минимальной пропускной способностью, и в этих сечениях с помощью ФПУ (или ФПТ) оптимизировать потокораспределение. Такая оптимизация не исключает дальнейшей оптимизации потоко-распределения внутри той или иной ОЭС или энергосистемы.

Структурная схема Азиатской части ЕЭС СССР на уровне до 2000 года представлена на рис. 1. Как видно из рис. 1, энергообъединение включает ОЭС Урала, Казахстана, Сибири, Средней Азии и Востока. Первые три ОЭС образуют замкнутое кольцо, и межсистемные перетоки между ними являются взаимно связанными. Управление потокораспределением в кольце из ОЭС Урала, Сибири и Казахстана следует рассматривать как управление первого (самого высокого) иерархического уровня. Управляя потокораспределением в кольце и оптимизируя его, можно в результате определить для каждого сечения между ОЭС оптимальную величину суммарного перетока. Далее распределение этого суммарного перетока по межсистемным связям различного напряжения может рассматриваться как задача следующего (второго) иерархического уровня. К задачам этого уровня следует отнести оптимизацию и в том случае, если величина суммарного перетока между ОЭС является независимой. К независимым относятся, например, сечения между ОЭС Казахстана и Средней Азии, Сибири и Востока. В этих сечениях величина суммарного межсистемного перетока определяется балансом генерируемой и потребляемой мощности в «концевых» ОЭС Средней Азии и Востока. Аналогично задачами следующих иерархических уровней (третьего и четвертого) могут рассматриваться управления потокораспределением в контурах внутри ОЭС и энергосистем.

Рассмотрим реализацию управления потоко-распределением в большом кольце из ОЭС. Для этого нужно выбрать наиболее слабое сечение в кольце и замкнуть каждую связь этого сечения через ФПУ. Наиболее слабым в рассматриваемом кольце Сибирь — Казахстан — Урал — Сибирь является сечение Сибирь — Урал. Следовательно, управлять суммарным перетоком нужно именно в этом сечении. На первом этапе до 1995 года в сечении Сибирь — Урал может быть замкнута двухцепная ВЛ 220 кВ Парабель — Мегион (рис. 2, а). Эта линия в масштабах ЕЭС имеет малую пропускную способность, и ее замыкание обусловлено необходимостью по-

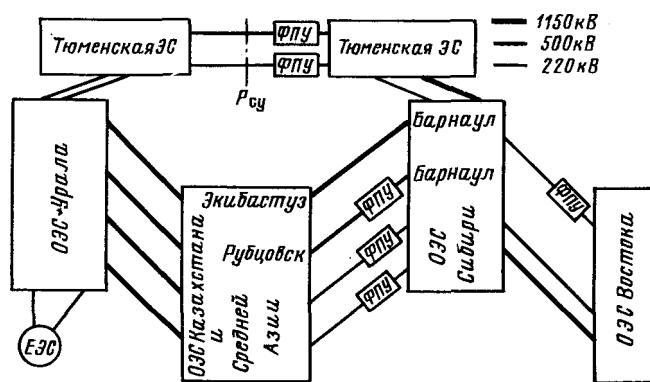


Рис. 1. Структурная схема Азиатской части ЕЭС СССР

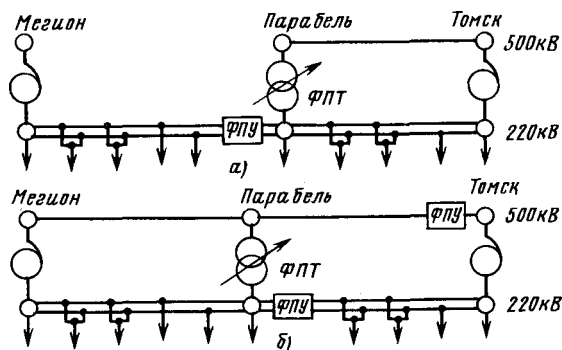


Рис. 2. Схемы соединения ОЭС Сибири и Урала (а — первый этап; б — второй этап)

шения надежности электроснабжения ответственных потребителей вдоль ВЛ 220 кВ, которые не допускают даже кратковременных перерывов питания. Замыкание ВЛ 220 кВ Парабель — Мегион без ФПУ может привести в зависимости от режимов ЕЭС к недопустимой перегрузке этой линии, снижению напряжения на ней ниже 170 кВ и большим потерям. Поэтому предлагается замкнуть эту линию через ФПУ 220/220 кВ, установленное на Парабели (рис. 2, а). Осуществляя на ФПУ требуемое ПРН, удастся при любых нормальных и послеаварийных режимах ЕЭС ограничить переток мощности с шин Парабели на Мегион в допустимых пределах или поддерживать его неизменным на оптимальном уровне. На втором этапе планируется строительство одной или двух цепей ВЛ 500 кВ Томск — Парабель — Мегион. В этом случае следует установить ФПУ 500/500 кВ в районе Томска, а ФПУ 220/220 кВ на Парабели переключить в плечо ВЛ 220 кВ Томск — Парабель, как показано на рис. 2, б. Тогда оба ФПУ позволят управлять перетоком мощности в сечении Сибирь — Урал при любых режимах в ЕЭС. Диапазон ПРН обоих ФПУ согласно выполненным расчетам должен быть равен $\pm 60^\circ$. Необходимо отметить, что в связи с резкой

неоднородностью большого кольца из трех ОЭС замыкание его без ФПУ, т. е. без принудительного потокораспределения в нем, оказывается невозможным из-за недопустимой перегрузки слабого сечения Сибирь — Урал.

Оптимизация потокораспределения в сечениях между ОЭС. В частном случае сечения между ОЭС Сибири и Урала, замкнутого через ФПУ, для оптимизации потокораспределения между ВЛ 500 и 220 кВ Томск — Парабель достаточно корректировать угол θ_n на ФПУ 220/220 кВ Парабели относительно угла θ_r ФПУ 500/500 кВ Томска (рис. 2, б).

В общем случае оптимизации потокораспределения в сечении между двумя ОЭС, связанных с помощью m электропередач, необходимо включить до $m-1$ ФПУ в эти электропередачи. Целесообразно не включать ФПУ в наиболее мощную электропередачу, например ВЛ 1150 кВ. Рассмотрим оптимизацию потокораспределения в зависимых и независимых сечениях между ОЭС.

ОЭС Сибири и Востока могут быть связаны по ВЛ 500 и 220 кВ Южного транзита, который расположен вдоль Транссибирской магистрали, и по ВЛ 220 кВ Северного транзита вдоль БАМ. Вдоль Южного транзита расположены Гусиноозерская и Харанорская ГРЭС, Читинская ТЭЦ. Вдоль Северного транзита между Усть-Илимской ГЭС и Нерюнгринской ГРЭС генерирующих мощностей практически до 2000 г. не будет. Поэтому оба транзита образуют резко неоднородный контур протяженностью около 2000 км. Для замыкания Северного транзита и оптимизации потокораспределения в контуре между ОЭС Сибири и Востока предлагается [3] установить ФПУ 220/220 кВ на участке Чара — Хани Северного транзита. При этом повышается надежность электроснабжения потребителей вдоль БАМ качество электрической энергии (уменьшаются колебания напряжения при изменении нагрузок), а также выравнивается график нагрузки ОЭС Востока благодаря смещению точки потокораздела мощности вдоль Северного транзита. Диапазон ПРН составляет $\pm 60^\circ$, и поэтому на подстанции Чара может быть установлено такое же ФПУ 220/220 кВ, как на подстанции Парабель.

ОЭС Сибири и Казахстана будут связаны ВЛ 1150 кВ Барнаул — Экибастуз и ВЛ 500 кВ Барнаул — Рубцовск. Кроме того, могут быть замкнуты ВЛ 220 кВ Барабинск — Омск и Барнаул — Иртышская (рис. 1). Вопрос замыкания ВЛ 220 кВ при наличии ВЛ 1150 кВ не является однозначным. В некоторых случаях предлагается размыкать транзиты 220 кВ при наличии связей 500 и 1150 кВ. Действительно, размыкание ВЛ 220 кВ приводит к снижению потерь по сравнению с их замыканием без ФПУ. Однако замыкание ВЛ 220 кВ через ФПУ позволяет благодаря оптимизации потокораспределения сни-

зить потери по сравнению со схемой с разомкнутыми ВЛ 220 кВ. При таком замыкании дополнительно повышаются надежность электроснабжения потребителей и пропускная способность сечения. Поэтому замыкание ВЛ 220 кВ представляется оправданным. Установка ФПУ 500/500 кВ на ВЛ 500 кВ Барнаул — Рубцовск, двух ФПУ 220/220 кВ на ВЛ 220 кВ Барабинск — Омск, Барнаул — Иртышская и оптимизация потокораспределения позволяет благодаря загрузке ВЛ 1150 кВ и соответственно разгрузке ВЛ 500 и 220 кВ снизить потери в сетях ОЭС Сибири и Казахстана на 30—40 МВт при расчетных перетоках в сечении. Такое снижение потерь делает весьма эффективной установку ФПУ. Возможно осуществить частичную оптимизацию режима, установив лишь ФПУ 220/220 кВ на одной или двух межсистемных ВЛ 220 кВ, а ФПУ 500/500 кВ установить несколько позднее, когда увеличится напряженность режимов в сечении. Сопоставление режимов при разомкнутых ВЛ 220 кВ и замкнутых через ФПУ показало, что оптимизация режимов по сравнению с разомкнутыми ВЛ 220 кВ дает снижение потерь на 5—12 МВт. И в этом случае даже при неучете повышения пропускной способности и надежности от замыкания ВЛ 220 кВ установка ФПУ 220/220 кВ оказывается эффективной, а срок окупаемости ФПУ составляет менее трех лет. Таким образом, в сечении Сибирь — Казахстан целесообразно установить сначала ФПУ 220/220 кВ на ВЛ 220 кВ Барнаул — Иртышская и Барабинск — Омск, а затем ФПУ 500/500 кВ на ВЛ 500 кВ Барнаул — Рубцовск. Проведенные исследования показали, что ФПУ 220/220 кВ могут быть выполнены на проходную мощность 160—240 МВА и иметь диапазон ПРН около $\pm (30-40)^\circ$. Для ФПУ 500/500 кВ соответственно $S=800$ МВА, $\theta=\pm 30^\circ$.

Оптимизация потокораспределения в сечении Казахстан — Урал может быть проведена аналогично предыдущему с помощью ФПУ, установленных во всех ВЛ 500 и 220 кВ, связывающих ОЭС Казахстана и Урала. Однако можно рассмотреть и частичную оптимизацию. Так, с учетом наличия ФПУ в сечении Сибирь — Казахстан, можно рассмотреть реализацию ПРН на Экибастузской подстанции между шинами 1150 и 500 кВ, например, с помощью специального линейного ВДТ 500/500 кВ, включенного последовательно с шинами 500 кВ автотрансформатора 1150/500 кВ.

Оптимизация потокораспределения в сечении Казахстан — Средняя Азия может быть выполнена аналогично вышеизложенному. В качестве первоочередного следует рассмотреть установку ФПУ 220/220 кВ на ВЛ 220 кВ, а затем — необходимость оптимизации между ВЛ 1150 и 500 кВ с помощью ФПУ или специального ВДТ 500/500 кВ. Вопросы управления потокораспределением в сечении Казахстан — Средняя Азия и Казахстан —

Урал нуждаются в более детальном рассмотрении.

Законы управления ФПУ. В сложном энергообъединении с одновременно работающими несколькими ФПУ возникает трудность в выборе законов управления ФПУ и их реализации. Применение иерархического подхода позволяет ранжировать ФПУ и назначить последовательность управления ФПУ с учетом их взаимного влияния. Однако и в этом случае не снимаются трудности реализации законов управления из-за необходимости большого объема информации. Закон управления ПРН одного ФПУ в контуре ранее [3] приведен в виде

$$\begin{aligned} \text{при } P_{нб} = P_{л} - P_y < \varepsilon_p \quad \theta = \text{const}; \\ \text{при } P_{нб} = P_{л} - P_y \geq \varepsilon_p \quad \Delta\theta = \alpha_{ср} P_{нб}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $P_y < P_{л}$ — заданный переток мощности; $\alpha_{ср}$ — среднее значение наклона угловой характеристики мощности, рад/МВт; ε_p — точность регулирования перетока; $P_{л}$ — допустимый переток по связи с ФПУ.

Вместо (1) закон управления может быть представлен в форме углов

$$\theta - \theta_y < \varepsilon_\theta, \quad (2)$$

где θ_y — заданный угол на ФПУ; ε_θ — точность регулирования угла.

Величины P_y или θ_y зависят от режима в контуре. Для оптимизации потокораспределения следует найти минимум целевой функции, зависящей от добротности и загрузки каждого из элементов контура. Необходимость сбора информации со всех элементов сложного контура, каким, например, является кольцо из ОЭС Сибири, Казахстана и Урала, делает задачу точной оптимизации технически неосуществимой. В то же время кривая суммарных потерь $p_2 = F(\theta)$ в контуре имеет пологий минимум, что свидетельствует о возможности приближенной оптимизации.

Приближенная оптимизация применима в большом кольце Сибирь — Казахстан — Урал — Сибирь. Более того, на первом этапе, когда замыкается ВЛ 220 кВ Парабель — Мегион (рис. 2, а), режим этой линии мало влияет на оптимизацию режима в ЕЭС. Поэтому можно с помощью ФПУ 220/220 кВ поддерживать неизменный переток, оптимальный для ВЛ 220 кВ, что соответствует $P_y = \text{const}$ в выражении (1). Величина этого неизменного перетока может периодически изменяться:

$$\text{в период } t_1 \div t_2 \quad P_y = P_{y1} = \text{const};$$

$$\text{в период } t_2 \div t_3 \quad P_y = P_{y2} = \text{const} \text{ и т. д.}$$

На втором этапе, когда замыкается ВЛ 500 кВ и устанавливается ФПУ 500/500 кВ в Томске, можно применить упрощенный закон для управления режимом в большом кольце с помощью обоих

ФПУ. Достаточно для приближенной оптимизации режима в кольце ограничиться входной информацией о перетоках по ВЛ 1150 кВ в сечениях Барнаул — Экибастуз и Экибастуз — Кокчетав, а также перетоком между Сургутским энергорайоном и ОЭС Урала. Тогда для оптимизации потокораспределения в большом кольце можно управлять углом обоих ФПУ по следующему закону:

$$\theta_y = \theta_0 + a(P_{БЭ} \alpha_{БЭ} + P_{ЭК} \alpha_{ЭК}) \left(\frac{\Delta P_{СЭ}}{\Delta P_{ОС0}} \right)^\beta, \quad (3)$$

где θ_0 , a , β — полуэмпирические величины, зависящие в основном от схемы и режима в энергообъединении; $\alpha_{БЭ}$, $\alpha_{ЭК}$ — величины, характеризующие наклон угловых характеристик электропередач 1150 кВ Экибастуз — Барнаул и Экибастуз — Кокчетав; $P_{БЭ}$, $P_{ЭК}$ — перетоки по этим линиям; $\Delta P_{СЭ}$ и $\Delta P_{ОС0}$ — текущая и средняя величина дефицита (избытка) мощности в Сургутском энергорайоне.

Выбирая для каждого этапа развития схемы энергообъединения и диапазона его режимов величины θ_0 , a , β и регулируя на обоих ФПУ углы θ , согласно выражению (2) с учетом (3) можно обеспечить достаточно эффективную оптимизацию потокораспределения в большом кольце. Это не исключает применения других упрощенных выражений для управления ФПУ.

Оба ФПУ, как указывалось, можно дополнительно использовать для оптимизации потокораспределения в контуре 500/220 кВ Томск — Парабель, для чего вводится на них рассогласование углов θ . Такая оптимизация относится к более низкому иерархическому уровню и не должна искажать результатов оптимизации в большом кольце. Поэтому на ФПУ 500/500 кВ, оказывающем определяющее влияние на режим большого кольца, устанавливаются углы θ_{yt} согласно выражению (3), а на ФПУ 220/220 кВ Парабели учитываются коррективы, обусловленные суммарным перетоком P_{cy} в сечении Сибирь — Урал:

$$\theta_{yp} = \theta_{yt} + k_p P_{cy}. \quad (4)$$

Как показали расчеты, моделирования такой упрощенной зависимости оказывается достаточно.

Упрощенные законы управления ФПУ применимы и для оптимизации потокораспределения между смежными ОЭС. В качестве исходной информации достаточно ограничиться перетоками по наиболее мощным межсистемным связям. В частном случае сечения Сибирь — Казахстан применяется до трех ФПУ (ФПУ 500/500 кВ и два ФПУ 220/220 кВ). Следует отметить, что управление с помощью ФПУ 500/500 кВ более существенно влияет на потокораспределение в сечении, чем управление обоими ФПУ 220/220 кВ, и что законы управления ФПУ 220/220 кВ зависят от законов управления ФПУ 500/500 кВ, но не наоборот.

Частичная оптимизация потокораспределения в сечении возможна с помощью одного или двух ФПУ 220/220 кВ при отсутствии ФПУ на ВЛ 500 кВ. В то же время нельзя оптимизировать режим с помощью ФПУ 500/500 кВ при отсутствии ФПУ 220/220 кВ на одной или двух ВЛ 220 кВ. В последнем случае ВЛ 220 кВ без ФПУ должна быть разомкнута.

Закон управления ФПУ 500/500 кВ, оптимизирующий потокораспределение в сечении Сибирь — Казахстан с целью снижения потерь, может упрощенно зависеть лишь от перетока $P_{БЭ}$ по ВЛ 1150 кВ Барнаул — Экибастуз:

$$\theta_y = \theta_0 + k P_{БЭ}. \quad (5)$$

В выражении (5) переток по ВЛ 1150 кВ может быть реверсивным, т. е. $P_{БЭ}$ — любого знака.

При достижении допустимых значений перетока $P_{БЭ}$, когда управляемые источники реактивной мощности могут выйти на ограничения, необходимо по условиям повышения пропускной способности сечения предотвратить дальнейшую загрузку ВЛ 1150 кВ, более интенсивно нагружая ВЛ 500 и 220 кВ. Для этого следует уменьшать угол ПРН на ФПУ по закону:

$$\text{при } P_{БЭ} > P_d \quad \theta_y = \theta_d - k_*(P_{БЭ} - P_d), \quad (6)$$

где $\theta_d = \theta_0 + k P_d$ — допустимый по условиям пропускной способности угол на ФПУ; $k_* > k$.

С учетом реверсивных перетоков мощности и ограничений закон управления ФПУ имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{при } P_{d+} \geq P_{БЭ} \geq P_{d-} \quad \theta_y &= \theta_0 + k P_{БЭ}; \\ \text{при } P_{БЭ} > P_{d+} \quad \theta_{y+} &= \theta_{d+} - k_+(P_{БЭ} - P_{d+}); \\ \text{при } P_{БЭ} < P_{d-} \quad \theta_{y-} &= \theta_{d-} - k_-(P_{БЭ} - P_{d-}). \end{aligned} \quad (7)$$

Для управления ФПУ 220/220 кВ можно применить закон управления, аналогичный (7). Однако более точная оптимизация режимов имеет место, если у каждого ФПУ 220/220 кВ угол будет определяться в зависимости от угла θ на ФПУ 500/500 кВ:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \theta^{(500)} > 0 \quad \theta_i^{(220)} &= k_i' \theta^{(500)}; \\ \text{при } \theta^{(500)} < 0 \quad \theta_i^{(220)} &= k_i'' \theta^{(500)}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $i = 1, 2 \dots$ — номер ФПУ 220/220 кВ.

В общем случае для ФПУ 220/220 кВ следует использовать при отсутствии ФПУ 500/500 кВ закон управления типа (7), а после установки ФПУ 500/500 кВ целесообразно применить закон управления типа (8).

Аналогично можно выбрать упрощенные законы управления для ФПУ между ОЭС Сибири и Востока, а также для других сечений и контуров. Следовательно, для каждого большого кольца

сечения или контура можно выбрать упрощенный закон управления ФПУ, который обеспечит достаточную точность при оптимизации режимов в энергообъединении.

Первоочередные ФПУ предназначены для управления стационарными режимами, так как у них используются для РПН обычные механические устройства, переключающие анцапфы в течение нескольких секунд. При тяжелых аварийных возмущениях в системе действует штатная противоаварийная автоматика. В случае деления предполагается размыкать сравнительно слабые сети, замкнутые через ФПУ, что не должно усугубить последствия от аварий. Соответственно на это ориентированы описанные выше законы управления стационарными режимами. В дальнейшем для управления перетоками в мощных контурах 500—1150 кВ с целью обеспечения динамической устойчивости предполагается у ФПУ 500/500 кВ предусмотреть фазовое управление, при котором углы ПРН будут изменяться ступенчато за десятые доли секунды. Для этого можно концы регулируемых частей обмоток вывести на крышку бака ФПУ и коммутировать их с помощью выключателей или рассмотреть применение тиристорных коммутаторов [4]. Такая модернизация ФПУ и разработка законов управления ими при возмущениях предусматривается в дальнейшем.

Выводы. 1. В сложных энергообъединениях эффективно в первую очередь применение ФПУ для управления потоками мощности в больших кольцах, образованных из нескольких ОЭС, а затем — для оптимального потокораспределения межсистемных перетоков в сечениях между смежными ОЭС, в контурах внутри ОЭС и энергосистем. Управление потоками мощности в сложных энергообъединениях следует рассматривать с применением иерархического подхода. Сначала оптимизируется потокораспределение в больших кольцах из ОЭС, затем между смежными ОЭС, а затем уже в контурах внутри ОЭС или энергосистем.

2. Для управления потоком мощности в большом кольце выбирается наиболее слабое сечение этого кольца и во всех линиях выбранного сечения устанавливаются ФПУ. Для оптимизации потокораспределения между m линиями разного напряжения, связывающими смежные ОЭС, необходимо установить ФПУ не более чем в $m-1$ линиях сравнительно меньшей пропускной способности. При этом, если сечение включает, например, линии 220, 500 и 1150 кВ, в качестве первоочередных устанавливаются ФПУ 220/220 кВ, а затем устанавливаются ФПУ 500/500 кВ.

3. Оптимизацию потокораспределения возможно осуществить применяя упрощенные законы управления ФПУ. Упрощенные законы примени-

мы и для управления потоками мощности в больших кольцах, и для оптимизации потокораспределения в сечениях между ОЭС, и на более низких иерархических уровнях. Применение упрощенных законов делает технически возможным оперативное управление ФПУ, так как существенно ограничивает объем телеинформации.

4. В качестве первоочередных должны быть изготовлены ФПУ 220/220 кВ с диапазоном ПРН $\pm 60^\circ$, уже заказанные электротехнической промышленности, а затем следует разработать и изготовить ФПУ на другие напряжения и другие диапазоны ПРН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Холмский В. Г. Применение регулируемых трансформаторов в электрических сетях.— М.: Госэнергоиздат, 1950.
2. Эффективность поперечного регулирования напряжения при работе ВЛ 1150 кВ с сетями 500 кВ / И. И. Батюк, А. Х. Калюжный, Г. Б. Мезенцева, В. В. Могирев.— Электрические станции, 1984, № 12.
3. Калюжный А. Х. Управление потоками мощности в электрических сетях с помощью фазоповоротных трансформаторов.— Электричество, 1986, № 11.
4. Stemmler H., Guth G. Der vollstatische Querregler, eine neue Möglichkeit zur Leistungssteuerung in Drehstromnetzen.— Broun Boveri Mitt., 1982, 69, N 3, S. 73—78

[27.06.89]

УДК 621.316.727.001.24

Расчет несимметричных режимов работы фазорегулирующего трансформатора с соединением обмоток в зигзаг

БОШНЯГА В. А.

Фазорегулирующие трансформаторы, как известно, являются эффективным средством управления потоками мощности в электрической сети. Однако в литературе, особенно отечественной, мало внимания уделено исследованию и сравнительному анализу свойств различных схем фазорегулирующих трансформаторов, в том числе и с учетом особенностей работы в несимметричных установившихся режимах. Одной из простейших схем фазорегулятора, наряду со схемой многоугольника [1, 2], является схема с соединением обмоток в зигзаг [3], обеспечивающая сопоставимый с многоугольником диапазон регулирования угла. Между тем, практически нет публикаций, посвященных исследованию указанной схемы, что не позволяет провести ее сопоставление с другими известными техническими решениями и определить области возможного применения.

В связи с изложенным рассмотрим несимметричные режимы работы на примере расчетной схемы (рис. 1), к которой могут быть сведены некоторые возможные принципиальные схемы фазорегулятора с соединением обмоток в зигзаг. Отметим, что соотношение чисел витков обмоток w_1 и w_2 может изменяться в процессе работы с помощью переключающих устройств, которые здесь не рассматриваются.

При анализе пренебрегаем взаимным влиянием обмоток разноименных фаз, что справедливо, на пример, для трехфазной группы однофазных

трансформаторов. Кроме того, считаем ток намагничивания равным нулю. Используем модель многообмоточного трансформатора, описанную в [4] и основанную на парных сопротивлениях короткого замыкания обмоток. В случае двухобмоточного трансформатора для фазы А устройства получим:

$$\dot{U}'_{1A} - \dot{U}''_{2A} = I'_{1A} Z'_{k12A};$$

$$I'_{1A} + I'_{2A} = 0.$$

Здесь штрихами обозначены приведенные к числу витков первичной обмотки w_{1A} токи, напряжения и сопротивления к. з. обмоток w_{1A} и w_{2A} . Аналогичные уравнения можно записать для трансформаторов, составляющих фазы В и С устройства.

Выразим из полученной системы уравнений токи и, переходя от приведенных к полным значениям токов и напряжений обмоток, запишем уравнения для трансформатора фазы А в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} I_{1A} \\ I_{2A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_A & -\frac{Y_A}{K_A} \\ -\frac{Y_A}{K_A} & \frac{Y_A}{K_A^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{1A} \\ \dot{U}_{2A} \end{bmatrix} = [Y_{BA}] \begin{bmatrix} \dot{U}_{1A} \\ \dot{U}_{2A} \end{bmatrix},$$

где $Y_A = \frac{1}{Z_{k12A}}$, $K_A = \frac{w_{2A}}{w_{1A}}$.

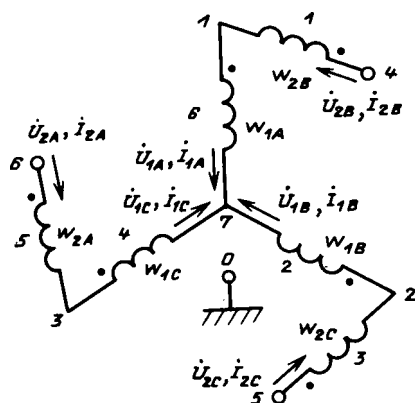


Рис. 1

Принимая аналогичные обозначения для трансформаторов, составляющих фазы *B* и *C* устройства, т. е.

$$Y_B = \frac{1}{Z'_{k12B}}; Y_C = \frac{1}{Z'_{k12C}}; K_B = \frac{w_{2B}}{w_{1B}};$$

$$K_C = \frac{w_{2C}}{w_{1C}},$$

и записав аналогичные уравнения для трансформаторов *B* и *C*, получим блочно-диагональную матрицу проводимостей ветвей для рассматриваемого

мой схемы:

$$\begin{bmatrix} I_{1A} \\ I_{2A} \\ I_{1B} \\ I_{2B} \\ I_{1C} \\ I_{2C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [Y_{BA}] & & \\ & [Y_{BB}] & \\ & & [Y_{BC}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{1A} \\ \dot{U}_{2A} \\ \dot{U}_{1B} \\ \dot{U}_{2B} \\ \dot{U}_{1C} \\ \dot{U}_{2C} \end{bmatrix}$$

Приняв нумерацию узлов и ветвей в соответствии с рис. 1 и используя известные матричные соотношения (см. [5], формула 2-52), определим эквивалентную матрицу узловых проводимостей $[Y_3]$, связывающую узловые токи $\dot{I}_1 \div \dot{I}_7$ и напряжения $\dot{U}_1 \div \dot{U}_7$ рассматриваемого семиполусника:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \vdots \\ \dot{I}_7 \end{bmatrix} = [Y_3] \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \vdots \\ \dot{U}_7 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

причем положительными считаем узловые токи, втекающие в соответствующие узлы, и узловые напряжения, направленные от точки отсчета «0» к узлам. Выполнив операции умножения матриц соединения для схемы на рис. 1 и блочно-диагональной матрицы проводимостей ветвей схемы в соответствии с [5], получаем эквивалентную матрицу узловых проводимостей $[Y_3]$:

	1	2	3	4	5	6	7
1	$-Y_C$ $-Y_A/K_A^2$	$-Y_A/K_A$	$-Y_C/K_C$	Y_A/K_A^2	0	Y_C/K_C	Y_C $+Y_A/K_A$
2	$-Y_A/K_A$	$-Y_A$ $-Y_B/K_B^2$	$-Y_B/K_B$	Y_A/K_A	Y_B/K_B^2	0	Y_A $+Y_B/K_B$
3	$-Y_C/K_C$	$-Y_B/K_B$	$-Y_B$ $-Y_C/K_C^2$	0	Y_B/K_B	Y_C/K_C^2	Y_B $+Y_C/K_C$
4	Y_A/K_A^2	Y_A/K_A	0	$-Y_A/K_A^2$	0	0	$-Y_A/K_A$
5	0	Y_B/K_B^2	Y_B/K_B	0	$-Y_B/K_B^2$	0	$-Y_B/K_B$
6	Y_C/K_C	0	Y_C/K_C^2	0	0	$-Y_C/K_C^2$	$-Y_C/K_C$
7	Y_C $+Y_A/K_A$	Y_A $+Y_B/K_B$	Y_B $+Y_C/K_C$	$-Y_A/K_A$	$-Y_B/K_B$	$-Y_C/K_C$	$-Y_A-Y_B$ $-Y_C$

(2)

Полученная матрица может быть использована в качестве математической модели фазорегулятора при расчетах несимметричных режимов электрической системы, содержащей фазорегулирующие трансформаторы, и позволяет провести расчет для случаев сложной несимметрии или, например, различных параметров фаз. Используя полученную матрицу, по известной методике [6] найдем параметры трехфазной схемы замещения рассматриваемого устройства в виде полного семиполюсника:

$$\begin{aligned} Y_{12} &= Y_A/K_A; \quad Y_{13} = Y_C/K_C; \quad Y_{14} = -Y_A/K_A^2; \quad Y_{15} = 0; \\ Y_{16} &= -Y_C/K_C; \quad Y_{17} = -(Y_C + Y_A/K_A); \quad Y_{23} = Y_B/K_B; \\ Y_{24} &= -Y_A/K_A; \quad Y_{25} = -Y_B/K_B^2; \quad Y_{26} = 0; \quad Y_{27} = \\ &= -(Y_A + Y_B/K_B); \quad Y_{34} = 0; \quad Y_{35} = -Y_B/K_B; \quad Y_{36} = \\ &= -Y_C/K_C^2; \quad Y_{37} = -(Y_B + Y_C/K_C); \quad Y_{45} = Y_{46} = 0; \\ Y_{47} &= Y_A/K_A; \quad Y_{56} = 0; \quad Y_{57} = Y_B/K_B; \quad Y_{67} = Y_C/K_C. \end{aligned}$$

Полученная матрица (2) позволяет рассчитать любые несимметричные режимы работы рассмотренной схемы, однако в двух крайних случаях — при глухозаземленной и изолированной нейтрали — она может быть несколько упрощена. Рассмотрим сначала случай глухозаземленной нейтрали, когда $\dot{U}_7 = 0$. При этом, очевидно, эквивалентная матрица Y_3^* , описывающая поведение схемы рис. 1, получается из (2) вычеркиванием последних строки и столбца и для случая одинаковых параметров всех фаз, т. е. при

$$Y_A = Y_B = Y_C = Y; \quad K_A = K_B = K_C = K$$

она имеет вид

$$Y_3^* = Y \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & -1 & -b & -b & b^2 & 0 & b \\ & -b^2 & & & & & \\ 2 & -b & -1 & -b & b & b^2 & 0 \\ & & -b^2 & & & & \\ 3 & -b & -b & -1 & 0 & b & b^2 \\ & & & -b^2 & & & \\ 4 & b^2 & b & 0 & -b^2 & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ 5 & 0 & b^2 & b & 0 & -b^2 & 0 \\ & & & & & & \\ 6 & b & 0 & b^2 & 0 & 0 & -b^2 \end{array}, \quad (3)$$

где $b = 1/K$.

При этом ток нейтрали I_7 является зависимой переменной и определяется суммой токов остальных полюсов.

При работе схемы на рис. 1 с изолированной нейтралью $I_7 = 0$, а напряжение нейтрали \dot{U}_7 должно быть определено из системы уравнений (1)

Запишем систему (1), разбив матрицы на блоки, следующим образом:

$$\begin{bmatrix} I_{1-6} \\ I_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{1-6} \\ \dot{U}_7 \end{bmatrix}.$$

Или иначе

$$[I_{1-6}] = [Y_{11}][U_{1-6}] + [Y_{12}]\dot{U}_7; \quad (4)$$

$$I_7 = 0 = [Y_{21}][U_{1-6}] + [Y_{22}]\dot{U}_7. \quad (5)$$

Определим \dot{U}_7 из (5) и, подставив его значение в (4), получим эквивалентную матрицу узловых проводимостей Y_3^* для схемы с изолированной нейтралью. Для случая одинаковых параметров трансформаторов она имеет следующий вид:

$$Y_3^* = Y \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 2A & -A & -A & C & D & E \\ 2 & -A & 2A & -A & E & C & D \\ 3 & -A & -A & 2A & D & E & C \\ 4 & C & E & D & 2B & -B & -B \\ 5 & D & C & E & -B & 2B & -B \\ 6 & E & D & C & -B & -B & 2B \end{array}, \quad (6)$$

$$\text{где } A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3K^2} - \frac{1}{3K}; \quad B = -\frac{1}{3K^2}; \quad C = -\frac{1}{3K} + \frac{2}{3K^2}; \quad D = -\frac{1}{3K} - \frac{1}{3K^2}; \quad E = \frac{2}{3K} - \frac{1}{3K^2}.$$

Полученные эквивалентные матрицы узловых проводимостей (3), (6) позволяют рассчитывать несимметричные режимы работы рассмотренной схемы и, наряду с матрицей (2), могут быть использованы в качестве моделей фазорегулирующего трансформатора в программах расчета установившихся режимов электрических сетей.

В ряде случаев, например для расчета симметричных режимов, а также при моделировании элементов электрической сети в координатах симметричных составляющих, необходимо располагать соответствующими схемами замещения фазорегулирующего трансформатора. Такие схемы могут быть получены на основе матриц (3), (6) для частного случая симметричного режима. Определим их параметры для двух рассмотренных режимов — с заземленной и изолированной нейтралью. Рассмотрим сначала режим с глухим заземлением нейтрали.

Предположим, что системы приложенных и выходных напряжений симметричны, т. е.

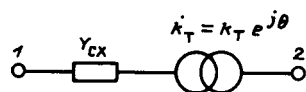


Рис. 2

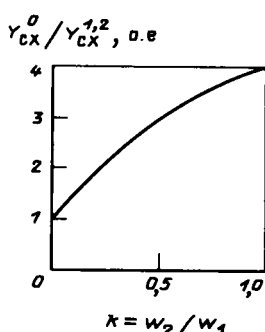


Рис. 3

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_n; \dot{U}_2 = a^2 \dot{U}_n; \dot{U}_3 = a \dot{U}_n; \dot{U}_4 = \dot{U}_k; \dot{U}_5 = a^2 \dot{U}_k; \dot{U}_6 = a \dot{U}_k,$$

где a — общий случай комплексный оператор поворота, и, кроме того, параметры всех фаз одинаковы.

Тогда, используя (3), легко убедиться, что токи также образуют симметричные системы, поэтому достаточно рассматривать один входной и соответствующий ему выходной токи, например I_1 и I_4 . Подставляя выражения для напряжений в два уравнения систем (1), получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \dot{U}_n Y [-1 - 1/K^2 - a^2/K - a/K] + \dot{U}_k Y [1/K^2 + a/K]; \\ I_4 &= \dot{U}_n Y [1/K^2 + a^2/K] + \dot{U}_k Y [-1/K^2]. \end{aligned} \quad (7)$$

Анализируя (7), видим, что в общем случае матрица проводимостей, описывающая однофазный эквивалент исходной трехфазной схемы, несимметрична. Поэтому однофазную схему замещения будем искать в изображенном на рис. 2 виде, где, как и в принятой модели трансформатора, учитывается только проводимость к. з. Y_{cx} . Матрица узловых проводимостей схемы на рис. 2 имеет вид

$$Y_{30} = Y_{cx} \begin{bmatrix} -1 & 1/\dot{K}_T \\ 1/\dot{K}_T & -1/\dot{K}_T^2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где \dot{K}_T — комплексный коэффициент трансформации идеального трансформатора.

Сравнивая (7) и (8), определим параметры однофазной схемы замещения рассматриваемого устройства для симметричного режима, которая при $a = e^{\pm j120^\circ}$ будет соответственно схемой замещения для составляющих прямой и обратной последовательностей:

$$Y_{cx}^{1,2} = Y (1 - 1/K + 1/K^2); K_T = \sqrt{K^2 - K + 1}. \quad (9)$$

Значение угла θ идеального фазовращателя также одинаково для схем замещения прямой и обратной последовательностей, отличие состоит лишь в знаке. Из (7), (8) получим:

$$e^{j2\theta} = \frac{1 + a^2 K}{1 + a K}. \quad (10)$$

Несколько другие значения имеют параметры схемы замещения нулевой последовательности ко-

торые также можно получить из (7), (8) считая $a = 1$:

$$Y_{cx}^0 = Y (1 + 1/K)^2; K_T = K + 1; \theta = 0^\circ. \quad (11)$$

На рис. 3 представлена зависимость отношения проводимости к. з. схем замещения нулевой и прямой последовательностей $Y_{cx}^0/Y_{cx}^{1,2}$ от коэффициента K . Видно, что в диапазоне изменения K от 0 до 1 (что соответствует примерному диапазону регулирования $0-60^\circ$) проводимость к. з. нулевой последовательности может в четыре раза превышать проводимость к. з. прямой и обратной последовательностей.

Очевидно, что параметры схем замещения прямой и обратной последовательностей для схемы с изолированной нейтралью будут совпадать с найденными ранее для случая глухого заземления. Параметры же схемы замещения нулевой последовательности определим аналогично предыдущему, используя полученную для данного случая матрицу (6). После преобразований получим $Y_{cx}^0 = 0$, т. е. сопротивление к. з. имеет бесконечно большое значение, что согласуется с физическими представлениями, так как в данном случае отсутствует путь для протекания токов нулевой последовательности. Значения других элементов схемы не определены.

Рассмотрим далее примеры расчета на основе эквивалентных матриц узловых проводимостей (3), (6) некоторых наиболее типичных существенно несимметричных режимов работы схемы — однофазных и двухфазных к. з. на выходных зажимах при симметричной системе питающего напряжения. Расчет проведем в относительных единицах, принимая $\dot{U}_1 = 1$; $\dot{U}_2 = a^2$; $\dot{U}_3 = a$, где $a = e^{j120^\circ}$. Сопротивления к. з. трансформаторов всех фаз будем считать чисто реактивными, одинаковыми и равными 10 % сопротивления нагрузки, которое примем за единицу ($z_n = 1$). Коэффициенты трансформации трансформаторов примем одинаковыми и равными, например, единице, что соответствует углу фазового сдвига 60° в режиме холостого хода.

Рассмотрим сначала схему с глухим заземлением нейтрали. Для режима однофазного к. з. из схемных условий имеем: $\dot{U}_4 = 0$; $\dot{I}_5 = \dot{I}_6 = 0$. Подставляя известные токи и напряжения в систему уравнений, соответствующую матрице (3), найдем неизвестные токи и напряжения (в относительных единицах):

$$\begin{aligned} \dot{U}_5 &= -1; \dot{U}_6 = -a^2; \\ \dot{I}_1 &= -\dot{I}_4 = \dot{I}_2 = -j10a; \dot{I}_3 = 0. \end{aligned}$$

Полученный результат наглядно отображен на векторной диаграмме рис. 4, где сплошными линиями разной толщины показаны приложенные и выходные напряжения, пунктиром — напряжения на обмотках трансформаторов. Из рис. 4 видно, что при однофазном к. з. напряжения «здоровых»

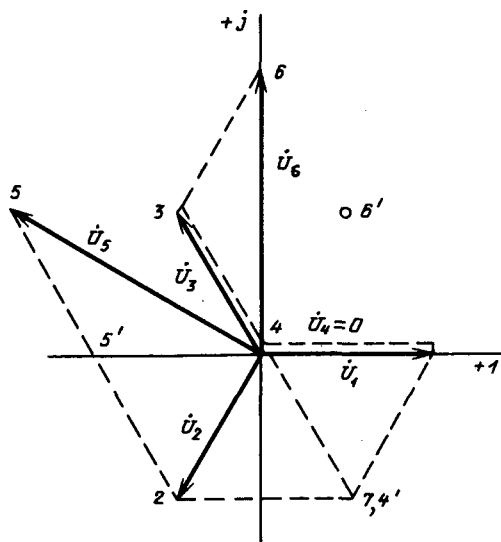


Рис. 7

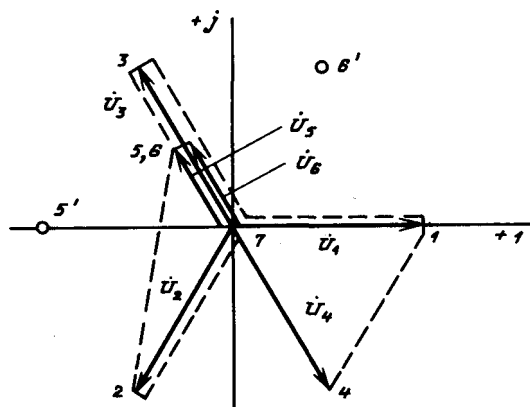


Рис. 8

дены в таблице. Как видно из диаграммы, напряжение смещения нейтрали и перенапряжение на обмотках трансформаторов в этом случае значительно меньше, чем при однофазном к. з. Следует отметить, что режимы двухфазного к. з. и двухфазного к. з. на землю практически совпадают вследствие того, что при замыкании двух фаз их напряжение падает до нуля и соединение этой точки с землей не изменяет распределение токов в схеме. Как следует из таблицы, в этом случае наблюдаются наибольшие токи в обмотках трансформаторов по сравнению с другими видами повреждений.

Сравнивая результаты, полученные для рассмотренной схемы при заземленной и изолированной нейтрали, следует отметить, что схема с заземленной нейтралью более устойчива к воздействию факторов, нарушающих симметричный режим работы, характеризуется меньшими значениями перенапряжений и токов и вследствие этого более предпочтительна для применения.

Выводы. 1. Получена эквивалентная матрица узловых проводимостей и соответствующая ей трехфазная схема замещения в виде полного семиполюсника для фазорегулирующего трансформатора с соединением обмоток в зигзаг, позволяющие рассчитывать различные несимметричные режимы работы электрических сетей с такими устройствами.

2. Определены параметры элементов схем замещения для симметричных составляющих на основе проводимостей к. з. между обмотками исходного трансформатора, необходимые при расчетах как несимметричных, так и нормальных установившихся режимов электрической сети с фазорегуляторами.

3. Результаты проведенных расчетов несимметричных режимов свидетельствуют о том, что особенности последних необходимо учитывать при выборе способа заземления нейтрали и при проектировании фазорегулирующих устройств.

Схема	Вид к. з.	Токи полюсов и обмоток фазорегулирующего трансформатора при различных повреждениях ($\theta=60^\circ$) в относительных единицах ($\times j$)								
		I_1	I_{17}	I_2	I_{27}	I_3	I_{37}	$I_4=I_{14}$	$I_5=I_{25}$	$I_6=I_{36}$
С заземленной нейтралью ($\dot{U}_7=0$)	Однофазное	$10a$	0	$10a$	$10a$	0	0	$-10a$	0	0
	Двухфазное на землю	$\frac{10a^2}{5(a^2-1)}$	$\frac{10a^2}{5(a^2-1)}$	$\frac{10}{5(1-a^2)}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{-10a}{0}$	$\frac{10}{5(1-a^2)}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{-10a}{5(a^2-1)}$	$\frac{-10a}{5(1-a^2)}$
С изолированной нейтралью ($\dot{I}_7=0$)	Однофазное	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Двухфазное	$15(a^2-1)$	$15(a^2-1)$	$15(1-a^2)$	0	0	$15(1-a^2)$	0	$15(a^2-1)$	$15(1-a^2)$

Примечание. $a=e^{j120^\circ}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Evenepoel W. Problemes poses par la conception et la realisation du decaleur de phase 155 kV \pm 30 $^{\circ}$ ·290 MVA de puissance traversante.— Revue Electricite, 1967, vol. 5, N 5, p. 177—183.
2. А. с. 788195 (СССР). Трансформаторный фазорегулятор / Л. П. Калинин, В. А. Бошняга. Оpubл. в Б. И., 1980, № 46.

3. Dobsa J. Transformers for in phase, phase-angle, and quadrature phase regulation.— Brown Boveri Review, 1972, vol. 59, N 8, p. 376—383.
4. Лейтес Л. В., Пинцов А. М. Схемы замещения многообмоточных трансформаторов.— М.: Энергия, 1974.
5. Мельников Н. А. Матричный метод анализа электрических цепей. М.— Л.: Энергия, 1966.
6. Ионкин П. А. О схемах замещения пассивных многополюсников.— Электричество, 1950, № 11.

[09.03.89]

УДК 621.313.392.001.2

Бесконтактный совмещенный синхронный генератор

КАРАВАЕВ В. Т., канд. техн. наук

Кировский политехнический институт

Применение в качестве источников энергии синхронных машин, бесконтактность в которых получена за счет отдельного выполнения на общем валу генератора и возбудителя, приводит к увеличению длины синхронной машины, уменьшению ресурса работы подшипников, росту вибраций и аэродинамического сопротивления продуву, повышению трудоемкости изготовления за счет дополнительной штамповки железа возбудителя, увеличению удельного расхода материалов на 1 кВт мощности. Отдельный возбудитель [1] обладает ограниченной мощностью, что снижает устойчивость работы бесконтактной синхронной машины. Ввиду недостаточной эффективности и неэкономичности такие синхронные машины не могут считаться совершенными.

Одним из эффективных методов решения проблем электромеханики является осуществление идеи совмещения, т. е. объединения нескольких электрических машин, реализация которой дает значительный технико-экономический эффект [2].

Совмещение в одном агрегате всех или части функций генератора и возбудителя, двигателя и возбудителя и многих других конструкций привело к развитию новых электрических машин, которые получили название совмещенных электрических машин [2].

Для обеспечения оптимальной работы генератора и возбудителя была предложена [3] конструкция бесконтактного совмещенного генератора (БССГ), один из вариантов которой показан на рис. 1 и 2, позволяющий регулировать распределение электромагнитных нагрузок генератора и возбудителя. Указанный эффект достигается благодаря последовательному соединению обмоток ротора при электрическом совме-

щении обмотки якоря возбудителя в обмотке возбуждения генератора.

Особенность предлагаемого БСС заключается в том, что в общих пазах статора (рис. 1, в) расположена обмотка возбуждения возбудителя (ОВВ), обмотка якоря генератора (ОЯГ), а обмотка ротора состоит из совмещенной обмотки (СО), выполняющей функции якорной обмотки возбудителя (ЯОВ) и обмотки возбуждения генератора (ОВГ1), и двух совершенно идентичных частей обмотки возбуждения генератора ОВГ2 и ОВГ3, причем все эти обмотки соединены последовательно с выпрямительным блоком ВВ, вентили которых соединены по двухполупериодной схеме А. Н. Ларионова. Части обмоток ОВГ1, ОВГ2 и ОВГ3 в целом составляют полную обмотку возбуждения генератора.

Развернутые схемы обмоток статора и ротора показаны на рис. 1, а, б и рис. 2, а. Ряд стрелок на рис. 1, а указывает направление постоянного тока в обмотке возбуждения возбудителя ОВВ, подведенного к положительному и отрицательному зажимам ОВВ от источника постоянного тока с числом пар полюсов $p_1 =$.

Ряд стрелок на рис. 1, б указывает направление переменного тока в обмотке якоря генератора ОЯГ для некоторого момента времени трехфазной системы с числом пар полюсов p_2 и тока на выходных зажимах А2, В2, С2.

Технология обмотки статора не отличается по выполнению от обычной петлевой обмотки для машин переменного тока. Влияние асимметрии при выполнении намоточных работ не превышает уровня обычной машины переменного тока. Укладка обмотки возбуждения возбудителя в нижней части паза (рис. 1, в), а

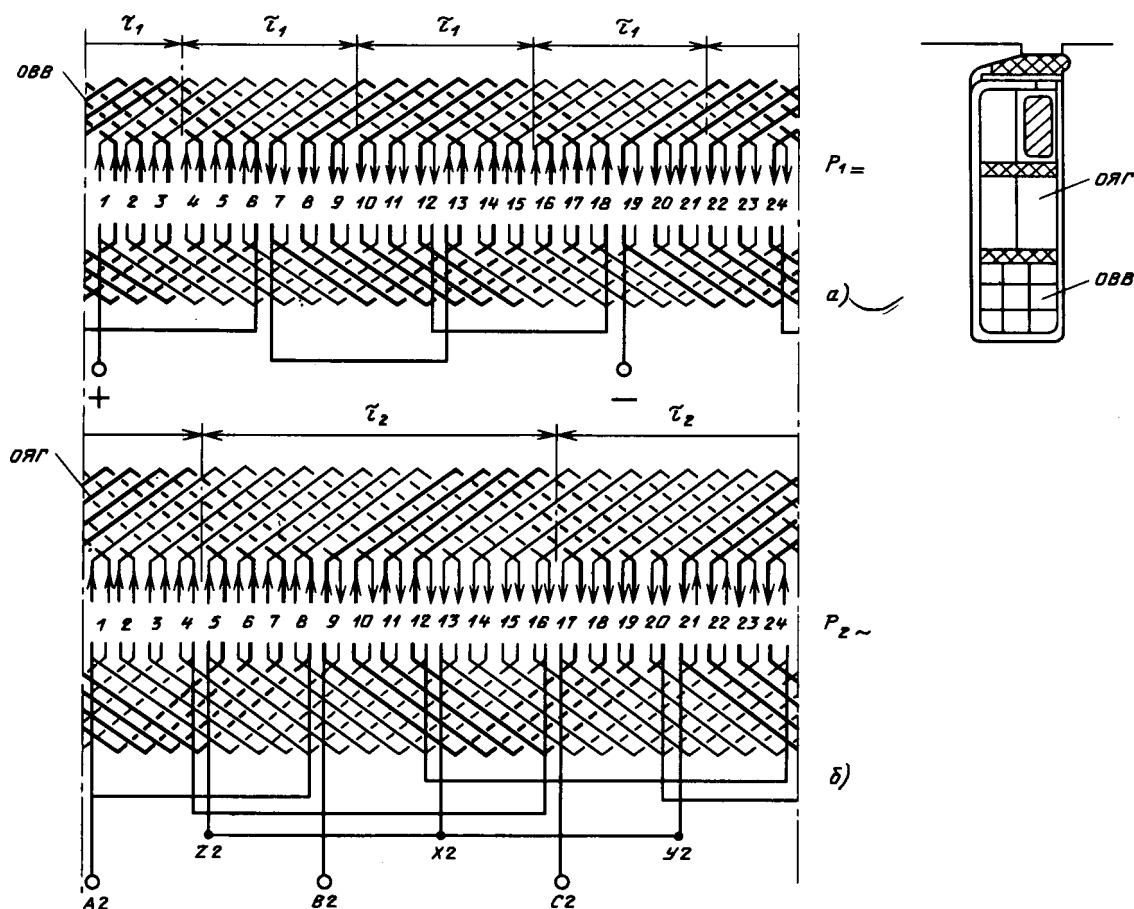


Рис. 1

обмотки якоря генератора в верхней части паза позволяет уменьшить индуктивное сопротивление рассеяния обмотки якоря ОЯГ, уменьшить падение напряжения и увеличить выходную мощность генератора.

Рассмотрим развернутую схему совмещенной обмотки ротора рис. 2, а. Верхний ряд стрелок СО указывает направление переменного тока ОЯВ, создающего переменное поле с числом пар полюсов $p_1 \sim$ возбuditеля, и тока снимаемого с зажимов А1, В1, С1. Нижний ряд стрелок указывает направление постоянного выпрямленного тока этой же СО, подводимого в ОВГ1 через идентичные части ОВГ2 и ОВГ3 к зажимам 01 и 02 от вращающегося блока выпрямителей ВБ и создающего в обмотках ОВН1, ОВГ2, ОВГ3 поле возбуждения генератора с числом пар полюсов $p_2 =$. Совмещенная обмотка представляет собой двухслойную обмотку с двумя параллельными ветвями в фазе возбuditеля на паре полюсов p_2 генератора, которые соединены в две симметричные звезды э. д. с. (рис. 2, а) А1, Х1; В1, У1; С1, Z1 и А'1, Х'1; В'1, У'1; С'1, Z'1 в поле возбuditеля. Ввиду полной симметрии звезд напряжение выходной частоты возбuditеля между точками 01 и 02 отсутствуют.

Кривые м. д. с. каждой обмотки получаются симметричными в том случае, когда выполняется условие: отношение z_2/p равно целому числу (z_2 — число пазов; p — число пар полюсов соответствующей обмотки). Число пар полюсов не может быть выбрано произвольно. При этом:

должна отсутствовать взаимоиндуктивная связь между совмещенными обмотками;

должно выполняться условие Р. Рихтера: $p_1 \pm p_2 \neq \pm 1$, где p_1 и p_2 — число пар полюсов возбuditеля и генератора;

должно быть обеспечено получение необходимой частоты.

В данном случае выбрано соотношение $p_1/p_2 = 2$, но возможны и другие соотношения.

Одной из отличительных особенностей работы БССГ является обтекание СО двумя токами различных частот: током возбuditеля с частотой f_1 и постоянным током, что учитывается при выборе суммарной линейной нагрузки уравнением (5), линейной нагрузкой генератора (7) и, соответственно, оптимальной магнитной нагрузкой генератора (11).

Таким образом, БССГ состоит из двух синхронных машин: генератора нормального исполнения и возбuditеля обращенного исполнения. Маг-

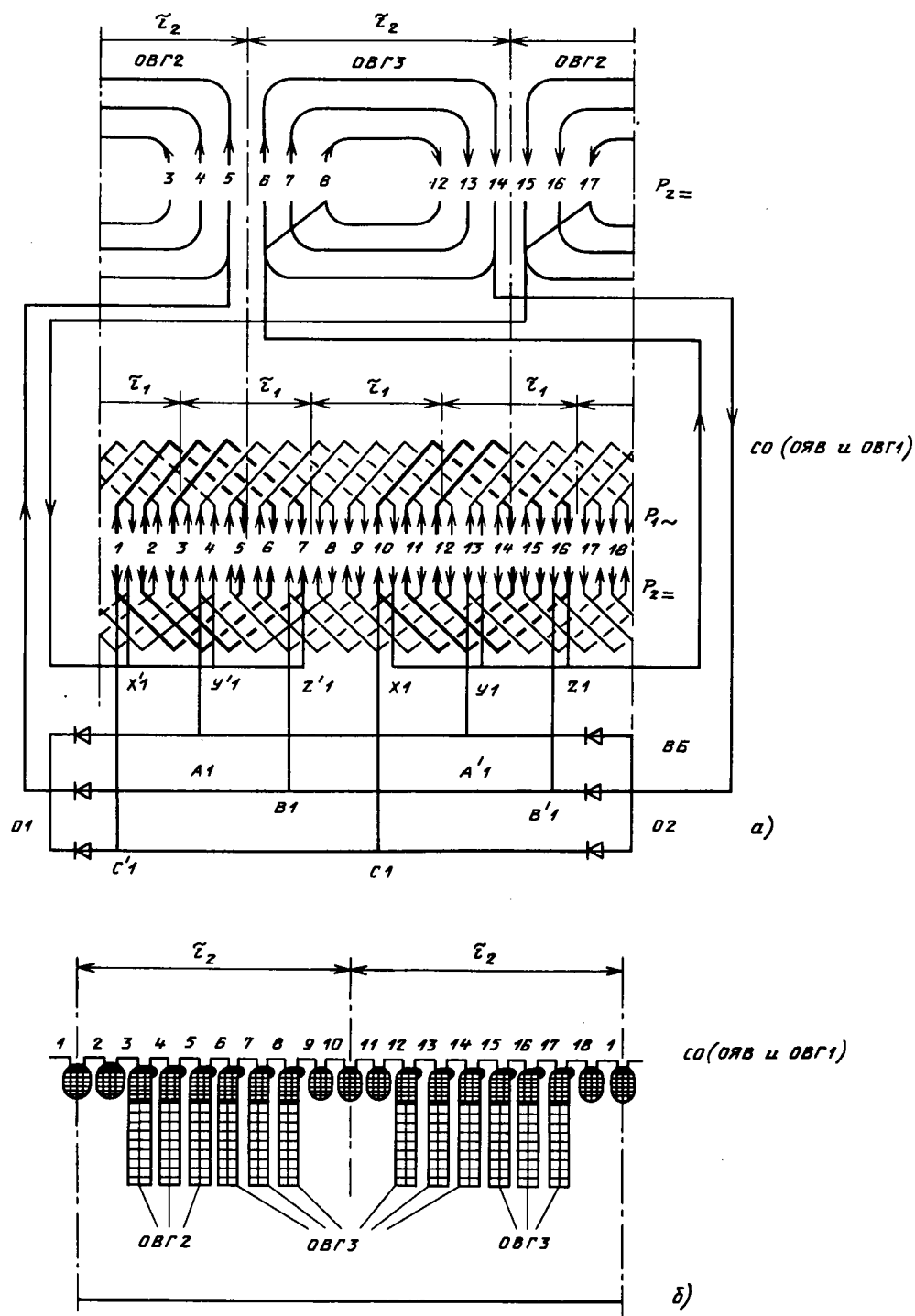


Рис. 2

нитные потоки этих двух разнополюсных машин объединены в общем магнитопроводе. Для особых технических условий на проектируемый генератор ОВВ и ОЯГ выполняются раздельными, а обмотка возбуждения генератора состоит из двух совершенно идентичных частей ОВГ2 и ОВГ3, а часть ОВГ1 в совмещенной обмотке СО рис. 2, а

ОЯВ через зажимы А1, В1, С1 и выпрямительный блок ВБ, выполненный на вентилях Д231А по схеме А. Н. Ларионова, питает три части обмотки возбуждения генератора ОВГ1, ОВГ2, ОВГ3, включенные между собой последовательно. При этом в ОЯГ (рис. 1, б, зажимы А2, В2, С2) индуцируется э. д. с. E_2 .

Изменяя число витков обмотки возбуждения возбудителя, можно применить известные стандартные конструкции регуляторов напряжения, а при изменении числа витков двух идентичных частей ОВГ2 и ОВГ3 рис. 2, а становится возможным согласовать сопротивление нагрузки возбудителя (т. е. сопротивление трех частей ОВГ1, ОВГ2 и ОВГ3 обмотки возбуждения генератора) с критическим сопротивлением нагрузки возбудителя, при котором возбудитель с определенного объема отдает максимальную мощность в номинальном режиме работы генератора. На базе проведенных испытаний макетного образца БССГ мощностью 9,6 кВт были разработаны, изготовлены и испытаны генераторы на мощность 40 кВт, а также выполнены расчеты генераторов на мощность 630, 1000, 3200 кВт. Масса электропроводящих, магнитных и изоляционных материалов остается практически такой же, как при раздельном выполнении генератора и возбудителя, так и у БССГ при к. п. д. 92,7 %, а общая масса БССГ уменьшена за счет лучшего использования объема машины и 10-кратного запаса по мощности возбудителя. Мощность, подаваемая на обмотку возбуждения возбудителя, составляет менее 60 % мощности возбуждения отдельно генератора при статической системе возбуждения генератора СГД-2.

Расчет данного генератора на номинальную мощность 40 кВт и частоту 400 Гц доказывает возможность получения удельной мощности 0,5—1 кВт на 1 кг массы.

На макетных образцах проведено исследование статических характеристик холостого хода, внешних, короткого замыкания, регулировочных отдельно для генератора и возбудителя, а также при совместной их работе в двухфазном и трехфазном режимах при различных коэффициентах мощности. Данные исследования показали, что БССГ обладает свойствами нормальных синхронных машин.

В отличие от обычных синхронных машин при динамическом режиме в БССГ, имеющей включенный между возбудителем и генератором выпрямительный блок, проявляются два взаимно связанных и взаимно обуславливающих процесса: изменение во времени медленно меняющейся составляющей постоянного тока и перераспределение напряжения источника питания схемы между сопротивлением обмотки якоря возбудителя z_1 и входом выпрямительного блока. Совокупность этих процессов является динамическим перераспределением напряжений [7], вызывающее эффект форсирования возбуждения и увеличения динамического момента при включении и форсированное развозбуждение и уменьшение динамического момента при отключении нагрузки, что увеличивает устойчивость работы БССГ.

Принципиальным отличием в выборе главных размеров и электромагнитных нагрузок

[4] от оптимальных размеров и электромагнитных нагрузок одномашинного преобразователя частоты [8, 9] является совмещение в одном магнитопроводе «отдельных» электрических машин, отличающихся по мощности в 5—100 раз, соединенных каскадно. Кроме того, обмотка якоря возбудителя и обмотка возбуждения генератора совмещены электрически.

Масса активных материалов БССГ, выполненного в неявнополюсном исполнении, как и в обычной асинхронной машине, определяется произведением внутреннего диаметра расточки статора на его длину (D^2l).

Из основного расчетного уравнения электрической машины выразим D^2l через мощность и электромагнитные нагрузки возбудителя

$$D^2l = \frac{6,1 \cdot 10^{11} P'_1}{\alpha_{11} k_{\alpha 1} k_{01} A_1 B_1 n_1} = \frac{6,1 \cdot 10^{11} P'_1}{\alpha_{11} k_{\alpha 1} k_{01} \sqrt{1 - \xi_1^2} (1 - b_2) A B n} \quad (1)$$

и генератора

$$D^2l = \frac{6,1 \cdot 10^{11} P'_2}{\alpha_{12} k_{\alpha 2} k_{02} A_2 B_2 n_2} = \frac{6,1 \cdot 10^{11} P'_2}{\alpha_{12} k_{\alpha 2} k_{02} \xi_2 b_2 A B n} \quad (2)$$

Здесь P'_1 , P'_2 — расчетные мощности возбудителя и генератора, равные:

$$P'_1 = k_{E1} P_1; \quad (3)$$

$$P'_2 = k_{E2} P_2; \quad (4)$$

P_1 и P_2 — отдаваемые мощности возбудителем и генератором, кВт; $k_{E1} = 1,06 \div 1,1$; $k_{E2} = 1,04 \div 1,08$ — отношение э. д. с к напряжению на зажимах обмотки якоря возбудителя и генератора; n_1 и n_2 — частота вращения магнитных полей Φ_1 и Φ_2 : $n_1 = n_2 = n$, мин⁻¹; k_{01} и k_{02} — обмоточные коэффициенты обмоткой якоря возбудителя и генератора; A_1 и A_2 — линейные нагрузки возбудителя и генератора, А/м; B_1 и B_2 — магнитные индукции от полей Φ_1 и Φ_2 в воздушном зазоре, Тл; $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ — суммарная линейная нагрузка, А/м; $B = B_1 + B_2$ — суммарная магнитная нагрузка, Тл; $\xi_1 = A_1/A$; $\xi_2 = A_2/A$; $b_1 = B_1/B$; $b_2 = B_2/B$ — величины, характеризующие относительное распределение линейных и магнитных нагрузок между электрическими машинами.

На основании изложенного уравнения линейных и магнитных нагрузок можно записать следующим образом:

$$\xi_1^2 = \xi_2^2 = 1; \quad (5)$$

$$b_1 + b_2 = 1. \quad (6)$$

Решая уравнения (1) и (2) с учетом (3) — (6), после преобразований получаем значение нагрузки генератора:

$$\xi_2 = \frac{1 - \xi_2}{\sqrt{k^2 b_2^2 + (1 - b_2)^2}}, \quad (7)$$

где

$$k = \frac{\alpha_{12} k_{\alpha 2} k_{E1} k_{02} P_1}{\alpha_{11} k_{\alpha 1} k_{E2} k_{01} P_2} = M \frac{P_1}{P_2}. \quad (8)$$

Подставив выражение (7) в уравнение (2), определим величины D^2l :

$$D^2l = \frac{6,1 \cdot 10^{11} k_{E2} P_2 \sqrt{k^2 b_2^2 + (1-b_2)^2}}{\alpha_2 k_{B2} k_{02} A B n b_2 (1-b_2)} = N \frac{\sqrt{k^2 b_2^2 + (1-b_2)^2}}{b_2 (1-b_2)} \quad (9)$$

В уравнении (9) выходная мощность P_2 и частота вращения являются для конструктора заданными величинами. Суммарная магнитная индукция B зависит от числа пар полюсов обеих машин и геометрических размеров машины.

Суммарная линейная нагрузка A выбирается в зависимости от числа пар полюсов, геометрических размеров и выходной мощности. Электромагнитные нагрузки A и B при заданной мощности генератора P_2 можно считать практически постоянными.

Значение b_2 , характеризующее распределение магнитных нагрузок между возбудителем и генератором, значительно влияет на объем и массу активных материалов. При увеличении b_2 от 0 до 1 значение D^2l изменяется от ∞ к некоторому минимальному значению и затем опять стремится к ∞ . На рис. 3 приведены зависимости $D^2l = f(b_2)$ для различных значений коэффициента k при постоянстве всех остальных членов уравнения (9). Оптимальное значение $b_{2\text{опт}}$ получаем из уравнения

$$\frac{\partial(D^2l)}{\partial b_2} = 0. \quad (10)$$

Подставляя значение D^2l из уравнения (9) в (10) и преобразуя его, находим:

$$b_{2\text{опт}} = \frac{1}{1 + k^{2/3}}. \quad (11)$$

Как показали исследования БССГ, мощность возбуждения генератора, или соответственно отдаваемая мощность возбудителя, равна $P_1 = 0,11 P_2$, а коэффициент M уравнения (8) для выполненного БССГ равен 0,725, следовательно, значения коэффициента k для данного типа машин будет находиться в пределах от 0,09 до 0,11.

Из анализа кривых рис. 3 можно сделать вывод, что при полученных значениях коэффициента k минимальные размеры БССГ будут при $b_2 = 0,75 \div 0,85$.

Оптимальное значение линейной нагрузки генератора определяем подстановкой оптимального значения $b_{2\text{опт}}$ (11) в уравнение (7): $\xi_2 = 0,955 \div 0,83$.

В статье рассматривается также возможность получения оптимальной геометрии возбудителя при сохранении оптимальной геометрии бесконтактного синхронного генератора для значительно отличающихся по мощности генератора и возбудителя в 5—100 раз [5].

Приведем некоторые соотношения для отдельных участков магнитной цепи двух неявнополюс-

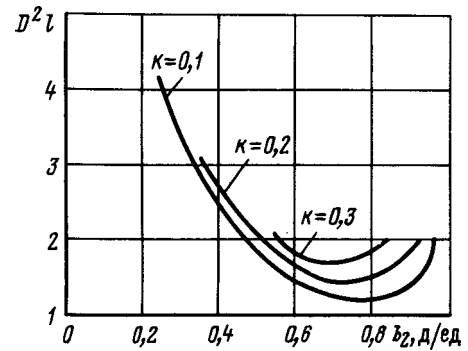


Рис. 3

ных совмещенных в одном магнитопроводе и обмотках синхронных электрических машин с учетом допустимых суммарных магнитных нагрузок.

Минимальное значение высоты ярма $h_{ар}$ ротора определяется из условия, что магнитный поток, приходящийся на пару полюсов, равен

$$\Phi = \frac{\pi D l}{2 p_2} B_{\delta} \alpha' = 2 h_{ар} \delta_{ар} k_c, \quad (12)$$

отсюда

$$h_{ар} = \frac{\pi D \alpha'}{4 p_2 \gamma_{ар} k_c},$$

где D — диаметр ротора; l — расчетная длина машины; α' — расчетное полюсное перекрытие; $\gamma_{ар} = B_{ар}/B_{\delta}$ — отношение индукции в ярме ротора к индукции в воздушном зазоре; k_c — коэффициент заполнения пакета сталью.

Ввиду того, что значение индукции в ярме ротора $B_{ар}$ меньше, чем индукция в зубце ротора $B_{зр}$ и мало влияет на значение индуктивного сопротивления, принимаем высоту ярма ротора $h_{ар}$ и значение индукции в ярме ротора $B_{ар}$ постоянными и определяемым суммарной магнитной индукцией B_{δ} .

Минимальное значение ширины зубца $b_{зр}$ определяется при условии, что весь магнитный поток проходит через зубец ротора, и находится из равенства

$$B_{\delta} \frac{\pi D}{z_p} = B_{зр} b_{зр} k_c, \quad (13)$$

отсюда

$$b_{зр} = \frac{\pi D}{z_p \gamma_{зр} k_c},$$

где z_p — число пазов ротора; $\gamma_{зр} = B_{зр}/B_{\delta}$ — отношение максимальной индукции в зубце ротора к индукции воздушного зазора.

В расчете принимаем, что $k_c = 1$.

Для оценки зависимости безразмерных параметров машины от геометрии магнитопровода найдем приближенную зависимость площади паза ротора от габаритных размеров машины.

Площадь пазов ротора с учетом (12) и (13):

$$S_{п.р} = b_{п.р} h_{п.р} z_p = \frac{\pi D^2}{2} k_D^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma_{zp}}\right) \left(1 - \frac{\lambda_c}{k_D} - \frac{\pi \alpha'}{2 p_2 \gamma_{ap}}\right), \quad (14)$$

где ширина паза ротора определяется по формуле

$$b_{п.р} = \frac{\pi D}{z_p} \left(1 - \frac{1}{\gamma_{zp}}\right); \quad (15)$$

высота паза ротора $h_{zp} = \frac{D - D_0 - 2h_{ap}}{2}$; $k_D = D/D_n$ — отношение диаметра расточки ротора к наружному диаметру; $\lambda_c = D_0/D_n$ — отношение внутреннего диаметра яра ротора и внешнему диаметру.

С другой стороны, площадь паза ротора можно определить по формуле

$$S_{п.р} k_{з.п} = 2m_1 \omega_1 a_1 a_2 q_{п.р},$$

где $k_{з.п}$ — коэффициент заполнения паза ротора; m_1 — число фаз обмотки якоря возбuditеля; ω_1 — число витков в фазе возбuditеля; $q_{п.р} = I_{\Sigma np} / j_{п.р}$ — сечение проводника обмотки ротора; $I_{\Sigma np}$ — суммарный ток в проводнике обмотки ротора; $j_{п.р}$ — суммарная плотность в проводнике обмотки ротора; a_1 — число параллельных ветвей якорной обмотки возбuditеля одной параллельной ветви с разношаговыми секциями обмотки ротора; a_2 — число параллельных ветвей с разношаговыми секциями обмотки ротора.

Отсюда

$$S_{п.р} = \frac{2m_1 a_1 a_2 I_{\Sigma np} \omega_1}{k_{з.п} j_{п.р}}. \quad (16)$$

Значение суммарного тока $I_{\Sigma np}$ в проводнике определяем из соотношений намагничивающих сил БССГ:

$$\beta_1 \left(k_{\mu 1} \frac{k_{\delta} \delta}{\mu_0} B_1 \cdot 0,45 \frac{A_1 D}{p_1} k_{01} k_{a1} \right) = \frac{m \sqrt{2}}{\pi} \times$$

$$\times \frac{a_1 a_2 \omega_1 k_{01}}{p_1} I_{1np};$$

$$\beta_2 \left(k_{\mu 2} \frac{k_{\delta} \delta}{\mu_0} B_2 \cdot 0,45 \frac{A_2 D}{p_2} k_{02} k_{a2} \right) = a_2 \omega_{в.г} k_{0.в.г} k_n I_{в.г.п.р}.$$

Произведя простые преобразования этих соотношений и учитывая, что $\omega_{в.г}$ — число витков обмотки возбуждения генератора в одной параллельной ветви с равношаговыми секциями на один полюс, определяемое схемой обмотки; p_1 — число пар полюсов возбuditеля; β_1 , β_2 — коэффициенты, учитывающие векторное сложение основной м. д. с. и реакции якоря для возбuditеля и генератора; A_1 , A_2 — линейные нагрузки возбuditеля и генератора; B_1 , B_2 — магнитные индукции возбuditеля и генератора в воздушном

зазоре; $A = \frac{2m_1 a_1 a_2 \omega_1 I_{\Sigma np}}{\pi D}$ — соотношение суммарной линейной нагрузки и суммарного тока в проводнике обмотки ротора; B_{zp} — суммарная магнитная индукция в зубце ротора; $B = B_1 + B_2$ — суммарная магнитная индукция в воздушном зазоре; k_{01} , k_{02} , $k_{0.в.г}$ — коэффициенты обмотки якоря возбuditеля, генератора и обмотки возбуждения генератора; k_n — коэффициент неравномерности тока в обмотке возбуждения генератора; k_{a1} , k_{a2} — коэффициенты приведения реакции якоря возбuditеля и генератора; k_{δ} , δ — коэффициент воздушного зазора и воздушный зазор машины; $k_{\mu 1}$, $k_{\mu 2}$ — коэффициент насыщения возбuditеля и генератора; $I_{1np} = 0,33 k_n I_{в.г.п.р}$ — соотношение переменного и постоянного тока в проводнике обмотки ротора; $I_{1np} = I_{\Sigma np} / 3,19$ — соотношение переменного и суммарного тока в проводнике обмотки ротора, получим

$$I_{1np} = \frac{k}{\gamma_{zp}}; \quad k_n I_{в.г.п.р} = \frac{k_1}{\gamma_{zp}}; \quad I_{\Sigma np} = \frac{1}{\gamma_{zp}} \sqrt{k^2 + k_1^2}, \quad (17)$$

$$\text{где } k = \frac{2\beta_1 k_{\mu 1} \delta k_{\delta} b_1 B_{zp} p_1}{\mu_0 m_1 a_1 a_2 \omega_1 k_{01} (0,9 - 5,68\beta_1 \xi_1 k_{a1})};$$

$$k_1 = \frac{\beta_2 k_{\mu 2} \delta k_{\delta} b_2 B_{zp} p_2}{a_2 p_2 \omega_{в.г} k_{0.в.г} - 0,475\beta_2 k_{02} \xi_2 m_1 a_1 a_2 \omega_1 k_{a2}} \quad \text{— коэффициенты, зависящие от электромагнитных нагрузок БССГ.}$$

Подставляя значение суммарного тока (17) в проводнике обмотки ротора в формулу (16), получим зависимость площади пазов ротора $S_{п.р}$ от электромагнитных нагрузок совмещенных электрических машин:

$$S_{п.р} = \frac{k_2}{\gamma_{zp}} \sqrt{k^2 + k_1^2}, \quad (18)$$

$$\text{где } k_2 = \frac{2m_1 a_1 a_2 \omega_1}{k_{з.п} j_{п.р}}.$$

Решая уравнения (16) и (18) относительно λ_c , получим:

$$\lambda_c = k_D \left(1 - \frac{\pi \alpha'}{2 p_2 \gamma_{zp}}\right) - \frac{2k_2 \sqrt{k^2 + k_1^2}}{\pi D_n k_D (\gamma_{zp} - 1)}.$$

Изменение λ_c для различных значений коэффициента k_D и при постоянном значении коэффициентов k , k_1 и k_2 показано на рис. 4 (кривые 1—3).

Оптимальный режим работы возбuditеля возможен при минимальном полном сопротивлении обмотки якоря возбuditеля, т. е. при оптимальной геометрии листа ротора и при равенстве сопротивления обмотки возбуждения генератора критическому сопротивлению обмотки якоря возбuditеля. Полное сопротивление обмотки якоря возбу-

дителя равно:

$$z_1 = \sqrt{r_1^2 + x_1^2} = \sqrt{\frac{N_1}{S_{n.p}} - N_2 \left[\frac{S_{n.p} - h_2 b_{n.p} z_p}{9 z_p b_{n.p}^2} + \frac{h_2}{b_{n.p}} + \Sigma \lambda \right]^2}, \quad (19)$$

где r_1 — активное сопротивление обмотки якоря возбуждателя; x_1 — индуктивное сопротивление рассеяния обмотки якоря возбуждателя; h_2 — высота клина паза ротора и толщина пазовой изоляции; $\Sigma \lambda$ — удельная магнитная проводимость, не зависящая от геометрии паза ротора;

$N_1 = \frac{16 m_1^2 p_1 l^2 (1 + l_1/l)^2 \omega_1^4}{k_{3,n}^2}$; ρ — удельное сопротивление; l_1 — длина лобовой части обмотки ротора; $N_2 = 16 \pi^2 \mu_0^2 \rho_1^2 l^2 \frac{\omega_1^4}{p_1^2 q_1^2}$; μ_0 — магнитная проницаемость вакуума; f_1 — выходная частота возбуждателя; q_1 — число пазов на полюс и фазу возбуждателя.

С учетом уравнений (14) и (16) и проведя простые преобразования уравнения (19), получим:

$$z_1 = \sqrt{\frac{N_1}{\left[\frac{\pi D^2}{2} k_D \left(1 - \frac{1}{\gamma_{zp}} \right) (0,48 k_D - \lambda_c) \right]^2} + N_2 \left\{ \frac{[0,5 D_n (0,48 k_D - \lambda_c) + 8,63] z_p}{9 \pi D_n (1 - 1/\gamma_{zp})} - \Sigma \lambda \right\}^2}. \quad (20)$$

Уравнение (20) исследовалось на ЭВМ на минимум полного сопротивления обмотки якоря возбуждателя z_1 при различных значениях γ_{zp} , k_D и z_p для выполненной машины с данными: $D_n = 24,5$ см; $D = 15$ см; $D_0 = 4,8$ см; $\delta = 0,04$ см; $k_8 = 1,585$; $\alpha' = 0,72$; $p_1 = 6$; $z_p = 54$; $p_2 = 3$; $m_1 = 3$; $\omega_{в.г} = 90$; $\omega_1 = 54$; $k_{01} = 0,83$; $k_{02} = 0,682$; $k_{0.в.г} = 0,735$; $q_{np} = 0,00152$ см²; $a_1 = 6$; $a_2 = 4$; $a_3 = 9$; $\beta_1 = 0,75$; $k_{a1} = 0,8$; $k_{a2} = 0,8$; $k_n = 0,4$; $B_{zp} = 1,6200$ Тл; $\beta_2 = 0,75$; $k_{\mu 1} = 1,49$; $k_{\mu 2} = 1,2$; $\xi_1 = 0,316$; $b_1 = 0,15$. По данным исследования была получена зависимость

$$\lambda_c = f_2(\gamma_{zp}),$$

представленная на рис. 4 (кривые 4—6). Точки пересечения кривых 4—6 с кривыми 2—3 определяют оптимальные значения коэффициента γ_{zp} , позволяющие определить оптимальное значение λ_c и пазовую геометрию по формулам (13) — (15). Анализ рис. 4 показывает, что с уменьшением числа пазов ротора z_p и увеличением k_0 , а следовательно и λ_c , т. е. увеличением полюсности совмещенных электрических машин, уменьшается оптимальное значение коэффициента γ_{zp} , а следовательно, соответственно будут уменьшаться основные намагничивающие силы возбуждателя и генератора.

Согласованные сопротивления нагрузки возбуждателя (сопротивления обмоток возбуждения генератора) с критическим сопротивлением об-

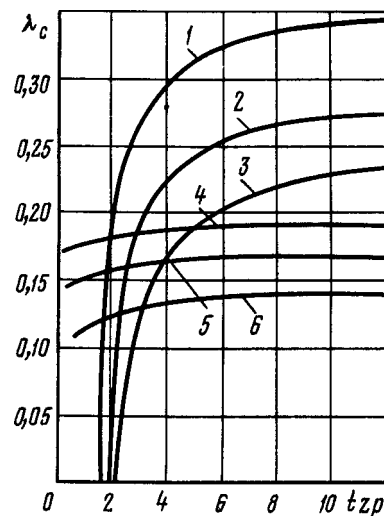


Рис. 4

мотки якоря возбуждателя возможно посредством некоторого увеличения λ_c при оптимальном значении γ_{zp} , так как при этом уменьшается индуктивное сопротивление, в то время как активное сопротивление увеличивается.

Сложность расчета магнитных цепей каждой из совмещаемых электрических машин, значительно отличающихся по мощности, заключается в том, что при одновременном намагничивании магнитопровода двумя и более потоками, имеющими различные полюсные деления, происходит отклонение распределения результирующей магнитной индукции на различных участках магнитной цепи от синусоидального. Учесть эти отклонения в каждой точке магнитной цепи трудно вследствие того, что м. д. с. возбуждателя и генератора вращаются относительно друг друга.

Ниже приводится методика получения аналитических выражений м. д. с. возбуждателя и генератора БССГ, которые позволяют просто определить токи возбуждения этих машин. При расчете магнитной цепи БССГ принимается, что м. д. с. каждой из совмещенных машин создает в общем магнитопроводе БССГ свой магнитный поток: ОВВ создает поток Φ_1 с индукцией B_1 , а ОВГ создает поток Φ_2 с индукцией B_2 .

При исследовании магнитной цепи ОВВ и ОВГ подключались к регулируемым источникам постоянного тока, при этом выпрямитель ВБ отключался; ОЯГ и ОЯВ использовались в качестве измерительных.

Оптимальное значение индукции $B_2 = (0,75 \div 0,85) B$, где B — суммарная магнитная индукция магнитопровода [4].

При расчете м. д. с. возбуждателя и генератора БССГ принимаем, что наличие высших гармонических индукций потоков Φ_1 и Φ_2 приводит к увеличению необходимых м. д. с. зубцов статора и ротора. Пренебрегаем гистерезисом,

считая, что кривые намагничивания для разных частот совпадают. Магнитная цепь БССГ рассматривается состоящей из двух «отдельных» магнитных цепей — возбuditеля и генератора, совмещенных в общем магнитопроводе.

Основную кривую намагничивания стали аппроксимируем уравнением [7]:

$$H = aB - bB^3 + cB^5,$$

где $a = 378,6$; $b = 235,3$ и $c = 306,1$ для стали 1211, 1212, 1213 при размерности индукции в теслах.

Магнитодвижущая сила возбuditеля F_1 неподвижна относительно статора. Относительные частоты вращения м. д. с. возбuditеля n_1 и генератора n_2 равны между собой ($n_1 = n_2$). Их значение определяется выражением

$$n_i = 60f_i/p_i, \quad i = 1, 2,$$

где f_i , p_i — частота тока и число пар полюсов обмотки якоря i -й мощности БССГ.

Магнитная цепь каждой совмещенной машины в БССГ, как и магнитная цепь обычной электрической машины, состоит из пяти участков: воздушного зазора, зубцов статора и ротора, ярма статора и ротора, м. д. с. каждой из совмещенных машин на один полюс равна сумме м. д. с. отдельных участков:

$$F_i = F_{\delta i} + F_{zi} + F_{z(i+2)} + F_{ai} + F_{a(i+2)}, \quad i = 1, 2.$$

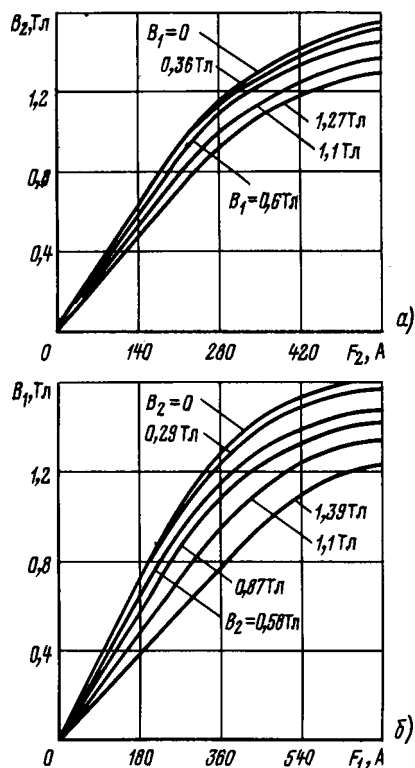


Рис. 5

Здесь $F_{\delta i}$, $F_{zi}(F_{z(i+2)})$, $F_{ai}(F_{a(i+2)})$ — м. д. с. воздушного зазора, зубцов статора (ротора) и ярма статора (ротора) i -й машины соответственно.

Магнитодвижущая сила воздушного зазора i -й машины равна:

$$F_{\delta i} = 80\delta k_{\delta} k_k B_{\delta i} \cdot 10^4, \quad \text{А},$$

где δ — воздушный зазор БССГ, см; k_{δ} — коэффициент воздушного зазора; k_k — коэффициент радиальных каналов; $B_{\delta i}$ — амплитудное значение расчетной индукции i -й машины.

Для зубцов i -й машины м. д. с. равна:

$$\left. \begin{aligned} F_{zi} &= 0,01 h_{zi} H_{zi} \gamma_{zc}; \\ F_{z(i+2)} &= 0,01 h_{zp} H_{z(i+2)} \gamma_{zp}, \end{aligned} \right\} i = 1, 2,$$

где $h_{zc}(h_{zp})$ — расчетная высота зубца статора (ротора) БССГ, м; $H_{z1}(H_{z3})$ — амплитудное значение первой гармонической напряженности результирующего поля в зубцах статора (ротора) БССГ (А/м), обусловленное потоком Φ_1 [6]; $H_{z2}(H_{z4})$ — то же, обусловленное потоком Φ_2 [6].

Коэффициент $\gamma_{zc}(\gamma_{zp})$ характеризует увеличение м. д. с. зубцов статора (ротора) при наличии высших гармонических.

Для предварительных расчетов можно принять:

$$\gamma_{zc} \approx \gamma_{zp} = 1,05 \div 1,1.$$

Для ярма статора (ротора) i -й машины м. д. с. равна:

$$\left. \begin{aligned} F_{ai} &= 0,01 l_{ai} H_{ai} \gamma_{ai}; \\ F_{a(i+2)} &= 0,01 l_{a(i+2)} H_{a(i+2)} \gamma_{a(i+2)}, \end{aligned} \right\} i = 1, 2,$$

где $l_a(l_{a(i+2)})$ — расчетная длина силовой линии в ярме статора (ротора) «отдельной» машины, м; $H_{a1}(H_{a3})$ — амплитудное значение первой гармонической напряженности результирующего поля в ярме статора (ротора) БССГ, обусловленное потоком Φ_1 (А/м); $H_{a2}(H_{a4})$ — то же, обусловленное потоком Φ_2 (А/м); $B_{a1}(B_{a2})$ — расчетная индукция в ярме статора возбuditеля (генератора), Тл; $B_{a3}(B_{a4})$ — то же ротора возбuditеля (генератора), Тл; коэффициент γ_a ($\gamma_{a(i+2)}$) учитывает неравномерное распределение индукции в ярме статора (ротора) «отдельных» машин.

Подставляя выражение H_z и H_a в выражения F_z и F_a с последующей подстановкой последних в выражения F_1 и F_2 , можно получить уравнения для определения м. д. с. «отдельных» машин на один полюс в функции B_1 и B_2 :

$$\begin{aligned} F_1 &= B_1(N_1 - N_2 B_1^2 + N_3 B_1^4 - N_4 B_2^2 + \\ &\quad + N_5 B_1^2 B_2^2 + N_6 B_1^4); \\ F_2 &= B_2(M_1 - M_2 B_2^2 + M_3 B_1^2 - M_4 B_1^4 + \\ &\quad + M_5 B_2^2 B_1^2 + M_6 B_1^4), \end{aligned}$$

где $N_1 \div N_6$ и $M_1 \div M_6$ — постоянные коэффициенты магнитной цепи [6].

Токи возбуждения «отдельных» машин БССГ

можно определить по выражению

$$I_{bi} = F_i / (k_{0i} \omega_i), \quad i = 1; 2,$$

где $F_i = f(B_1; B_2)$ — число витков обмотки возбуждения i -й машины; k_{0i} — обмоточный коэффициент.

На рис. 5, а, б приведены расчетные зависимости индукции B_1 и B_2 от м. д. с. F_i и токов возбуждения I_{bi} для «отдельных» машин. Они аналогичны зависимостям, полученным на опытных моделях БССГ, выполненных на базе асинхронного двигателя АК-51/6, имеющих выходную частоту генератора $f_2 = 150$ Гц и выходную частоту возбудителя $f_1 = 300$ Гц при раздельном и совместном намагничивании.

Исследования моделей также показали, что из-за реакции якоря в номинальном режиме работы БССГ с оптимальными обмотками должна иметь м. д. с. генератора F_2 , увеличенную на 8 %, а м. д. с. возбудителя F_1 — на 50 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Специальные электрические машины (Источники и преобразователи энергии). Учебное пособие для вузов / А. И. Бертинов, Д. А. Бут, Р. С. Мизюрин и др. Под ред. А. И. Бертинова. — М.: Энергоиздат, 1982.

2. Загрядикий В. И. Совмещенные электрические машины (основы теории). — Кишинев: Картия Молдавия, 1971.

3. А. с. 440748 (СССР). Бесконтактная синхронная машина / В. Т. Караваев. — Опубл. в Б. И., 1973, № 11.

4. Караваев В. Т. Главные размеры и оптимальные электромагнитные нагрузки бесконтактного синхронного генератора с совмещенными магнитными и электрическими цепями. — Элементы электрооборудования и системы автоматики. Труды ГПИ. Том XXV, выпуск 15. — Горький, 1969.

5. Караваев В. Т. Оптимальная геометрия совмещенных бесконтактных синхронных машин. — Известия ТПИ им. С. М. Кирова. Электрические машины. Томск: Изд. Томского университета, 1972, т. 242.

6. Караваев В. Т. Расчет и исследование магнитной цепи бесконтактной синхронной машины (БСМ). Электрические машины и аппараты. — Сб. статей Чувашского Государственного университета им. И. Н. Ульянова. — Чебоксары, 1974. вып. 5.

7. Бессонов Л. А. Нелинейные электрические цепи / Учебн. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 1977.

8. Павлинин В. И., Сиунов Н. С. Оптимальные размеры и электромагнитные нагрузки одномашиного преобразователя частоты. — Электромеханика, 1962, № 12.

9. Новокшенов В. С. Главные размеры двигательно-преобразовательной части асинхронного преобразователя частоты и оптимальное распределение его электромагнитных нагрузок. — Известия Томского политехнического института, 1960, т. 98.

[01.02.90]

УДК 62-592.35.001.24

Вопросы теории и расчет высокомоментных электромагнитных тормозов

ЛУПКИН В. М., канд. техн. наук

ВНИИЭлектромаш

Теории электромагнитных тормозов посвящен ряд работ [1—8], восходящих к работе Брука И. С. [1] по теории асинхронного двигателя со сплошным ферромагнитным ротором, однако некоторые существенные аспекты теории электромагнитных тормозов не получили должного освещения. К ним можно отнести следующие вопросы теории.

1. Вопрос о корректности перенесения решения полевой задачи, справедливого для неподвижных сред, на движущуюся среду.

2. Вопрос о корректности применения вектора Пойнтинга — Умова для определения потерь в электромагнитном тормозе.

3. Вопросы применения метода наложения и векторных диаграмм в нелинейных цепях для определения результирующей м. д. с. индуктора.

4. Вопрос учета изменения индукции по длине зазора и выбора граничных условий для этого учета.

5. Важными для расчета тормоза являются также вопросы выбора эквивалентной магнитной

проницаемости ферромагнитной среды при учете поверхностного эффекта и угла сдвига м. д. с. реакции якоря относительно м. д. с. зазора.

В статье сделана попытка внести ясность в поставленные вопросы теории электромагнитного тормоза и дать аналитическое решение уравнений электромагнитных процессов, происходящих в тормозе, с анализом факторов, поддающихся учету.

Анализ проблемы. В [1] принимается, что магнитная проницаемость железа статора равна бесконечности, токовый слой статора распределен равномерно по его расточке. В силу круговой симметрии двигателя учет явнополюсности индуктора не производится. Решение в декартовой системе координат для асинхронного двигателя, данное в [2], является упрощением решения [1]. В обеих работах нет учета изменения магнитной проницаемости ферромагнитного ротора. Работы [3—5] относятся преимущественно к небольшим тормозам и в них упомянутые вопросы теории не рассматриваются. Работа [6] отно-

сится также к небольшим тормозам, но по ней можно сделать следующие замечания: в решении не учтено изменение индукции по длине зазора; решение, данное Нейманом Л. Р. [10] для плоской поляризованной волны, распространено для волны, векторы \vec{E} и \vec{H} которой зависят от двух пространственных координат. В результате решение, потеряв прозрачность, свойственную решению в предположении $\mu = \text{const}$, не приобрело большей достоверности. В [8] дана теория электромагнитного тормоза, однако, здесь не учитываются потоки рассеяния и насыщение индуктора, а также насыщение ярка. В [9] дана теория асинхронного двигателя с ферромагнитным ротором, в которой учет явнополюсности индуктора и его рассеяния также не производится.

В [7] рассмотрены вопросы теории и расчета маломоментных электромагнитных тормозов, но автор подвергает сомнению возможность перенесения решения динамических полевых задач, справедливого для неподвижной среды, на движущуюся среду; утверждает, что вектор Пойнтинга — Умова на поверхности движущегося ярка равен нулю и поэтому уравнение для определения потерь в ярке через этот вектор неприменимо; называет «недопустимыми операциями» применение метода наложения и векторных диаграмм для нелинейных магнитных сред [11],

в результате автором определяется насыщение магнитной цепи при неподвижном ярке.

Постановка задачи и принимаемые допущения. На рис. 1, а показана принципиальная схема высокомоментного электромагнитного тормоза с явнополюсным индуктором. В действительности конструктивное исполнение тормоза иное (рис. 1, б в), однако, с точки зрения теории, различия несущественны. Тормоз развернут в плоскость ($R = \infty$), что вполне допустимо, поскольку радиус ярка $R_y = 1-1,6$ м, длина зазора $\delta = (1,5 \div 2,5) \times 10^{-3}$ м. При отношении $\delta/R_y \approx 10^{-3}$ погрешность замены цилиндрической задачи задачей в плоскости пренебрежимо мала, ибо решение подобной задачи [12] с отношением $\delta/R = 0,008/0,12$ показывает, что ошибка не превышает 5 %. Задача формулируется следующим образом.

Для электромагнитного тормоза с неподвижным явнополюсным индуктором и движущимся ферромагнитным ярком (ротором) найти решение полевой задачи для областей зазора и ярка с учетом явнополюсности индуктора. Принимаемые допущения: 1) зазор δ в пределах ширины полюса b_p индуктора равномерный; 2) магнитная проницаемость ферромагнитного ярка $\mu_2 = \text{const}$; 3) скорость движения ярка $v = \text{const}$; 4) распределение нормальной составляющей индукции в зазоре на поверхности индуктора косинусоидальное; 5) длина тормоза l_δ в осевом направлении бесконечно большая, поэтому $E_x = E_y = H_z = 0$, т. е. задача из трехмерной становится плоской; учет конечной длины тормоза проводится коэффициентом ξ при удельном сопротивлении ярка; 6) влияние гистерезиса не учитывается [9, 10]; 7) ферромагнитная среда простирается вдоль оси y бесконечно.

В действительности толщина ярка h_y имеет конечное значение, однако, вследствие малой глубины проникновения ($3\Delta_2 < h_y$) последним обстоятельством можно пренебречь. Корректировка решения на реальное $\mu_2 = \text{var}$ производится в окончательных выражениях по известным результатам экспериментальных исследований.

Решение задачи. В воздушном зазоре δ (среда 1) между индуктором и ярком имеем:

$$\text{rot } \vec{E}^{(1)} = - \frac{\partial \vec{B}^{(1)}}{\partial t} = 0,$$

поэтому $\vec{E}^{(1)} = 0^*$, в силу чего

$$\vec{J}_z^{(1)} = \frac{E_r^{(1)}}{\rho_1} + \epsilon \frac{\partial E_t^{(1)}}{\partial t} = 0,$$

где \vec{J} — вектор плотности тока.

Уравнение для напряженности магнитного поля в неподвижной системе координат:

$$\nabla^2 \vec{H}^{(1)} = \frac{\partial^2 \vec{H}^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}^{(1)}}{\partial y^2} = 0,$$

Рис. 1. Расчетная схема тормоза: а — упрощенная схема; б — продольный разрез; в — полюсная система индуктора

поскольку $\bar{H}^{(1)} = iH_x + kH_y$, имеет решение:

$$B_x^{(1)} = \mu_0 H_x^{(1)} = -j \left(C_1 e^{-\frac{\pi}{\tau} y} + C_2 e^{\frac{\pi}{\tau} y} \right) e^{j \frac{\pi}{\tau} x};$$

$$B_y^{(1)} = \mu_0 H_y^{(1)} = \left(C_1 e^{-\frac{\pi}{\tau} y} + C_2 e^{\frac{\pi}{\tau} y} \right) e^{j \frac{\pi}{\tau} x}.$$

Из условия для нормальной составляющей индукции на поверхности полюса индуктора при $x=y=0$ в соответствии с допущением по п. 4 получим $C_1 + C_2 = B_{y0}^{(1)}$.

В движущемся якоре (среда 2) имеются составляющие магнитного поля H_x , H_y и напряженности электрического поля E_z . При движении проводящего тела во внешнем синусоидально распределенном в пространстве, но постоянном во времени магнитном поле, целесообразно использовать систему координат, жестко связанную с движущимся телом. В этой системе координат тело неподвижно, а внешнее поле изменяется во времени по синусоидальному закону, который можно представить в виде движущейся в обратном направлении волны поля. Эквивалентность обеих задач есть следствие принципа относительности, впервые высказанного Максвеллом [13] и строго сформулированного Эйнштейном [14].

В движущейся вместе с телом системе координат справедливы те же уравнения Максвелла, что и для неподвижного тела в неподвижной системе координат [13—17]:

$$\text{rot } \bar{E}^{(2)} = -\frac{\partial \bar{B}^{(2)}}{\partial t}; \quad \text{rot } \bar{H}^{(2)} = -\bar{J}^{(2)} = \frac{\bar{E}^{(2)}}{\rho_2}; \quad (1)$$

$$\bar{B}^{(2)} = \mu_2 \bar{H}^{(2)}; \quad \bar{E}^{(2)} = \rho_2 \bar{J}^{(2)},$$

где $\bar{J}^{(2)}$ — плотность вихревого тока в среде 2; ρ_2, μ_2 — удельное сопротивление и магнитная проницаемость среды 2.

По условию имеются составляющие $E_z^{(2)}, H_x^{(2)}, H_y^{(2)}$. Применяя операцию rot к первому уравнению системы (1), учитывая второе уравнение и тождество $\text{rot rot } \bar{E} = \text{grad div } \bar{E} - \nabla^2 \bar{E}$, помня, что $\text{div } \bar{E}^{(2)} = \rho_2 \text{ div } \bar{J}^{(2)} = 0$, получим:

$$\nabla^2 E_z^{(2)} = \frac{\partial^2 E_z^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z^{(2)}}{\partial y^2} = \frac{\mu_2}{\rho_2} \frac{\partial E_z^{(2)}}{\partial t}. \quad (2)$$

Решение (2) будем искать методом Фурье с учетом того, что вдоль оси x поле должно быть бегущим, а вдоль оси y — затухающим в соответствии с диффузией поля в проводящую среду:

$$E_z^{(2)} = [C_3 e^{-\beta_2(y-\delta)} + C_4 e^{\beta_2(y-\delta)}] e^{j \frac{\pi}{\tau} x - j \frac{\pi}{\tau} vt},$$

где $\beta_2 = \alpha_2(1+j)$, так как $\frac{\rho_2 \pi^2}{\omega \mu_2} \ll 1$ [2]; $\alpha_2 =$

$$= \frac{1}{\Delta_2}; \quad \Delta_2 = \sqrt{\frac{2\rho_2}{\omega \mu_2}}; \quad \omega = \frac{\pi}{\tau} v.$$

Вследствие того, что $3\Delta_2 < h_a$, $C_4 = 0$.

Из системы (1) с учетом граничных условий при $y = \delta$: $H_x^{(1)} = H_x^{(2)}$ и $B_y^{(1)} = B_y^{(2)}$ на верхней границе якоря и условия $C_1 + C_2 = B_{y0}^{(1)}$ получим:

$$H_x^{(2)} = \frac{\alpha_2(1+j) B_{y0}^{(1)} e^{-\alpha_2(1+j)(y-\delta)} e^{j \frac{\pi}{\tau} x} e^{-j \frac{\pi}{\tau} vt}}{j \mu_2 \frac{\pi}{\tau} D};$$

$$H_y^{(2)} = \frac{B_{y0}^{(1)} e^{-\alpha_2(1+j)(y-\delta)} e^{j \frac{\pi}{\tau} x} e^{-j \frac{\pi}{\tau} vt}}{\mu_2 D}; \quad (3)$$

$$E_z^{(2)} = \frac{v B_{y0}^{(1)} e^{-\alpha_2(1+j)(y-\delta)} e^{j \frac{\pi}{\tau} x} e^{-j \frac{\pi}{\tau} vt}}{D}.$$

Постоянные C_1, C_2, C_3 и D определяются следующим образом:

$$C_1 = \frac{B_{y0}^{(1)} e^{\frac{\pi}{\tau} \delta} \left[1 + \frac{\mu_0 \tau \alpha_2}{\mu_2 \pi} (1+j) \right]}{2\delta};$$

$$C_2 = \frac{B_{y0}^{(1)} e^{-\frac{\pi}{\tau} \delta} \left[1 - \frac{\mu_0 \tau \alpha_2}{\mu_2 \pi} (1+j) \right]}{2D};$$

$$C_3 = v B_{y0}^{(1)}, \quad D = \text{ch } \frac{\pi}{\tau} \delta + (1+j) \frac{\mu_0 \tau \alpha_2}{\mu_2 \pi} \text{sh } \frac{\pi}{\tau} \delta; \quad D' =$$

$$= \left(\text{ch } \frac{\pi}{\tau} \delta + \frac{\mu_0 \tau \alpha_2}{\mu_2 \pi} \text{sh } \frac{\pi}{\tau} \delta \right)^2 + \left(\frac{\mu_0 \tau \alpha_2}{\mu_2 \pi} \text{sh } \frac{\pi}{\tau} \delta \right)^2.$$

Величина D в знаменателе характеризует уменьшение составляющих поля в функции величины зазора δ . В случае небольшого зазора, когда $\frac{\pi}{\tau} \delta$ мало, $\text{sh } \frac{\pi}{\tau} \delta \approx \frac{\pi \delta}{\tau}$, $\text{ch } \frac{\pi}{\tau} \delta \approx 1$.

Из второго и третьего выражения (3) получим $E_z^{(2)} = v B_y^{(2)}$, что соответствует уравнению Максвелла для напряженности электрического поля в движущемся проводнике.

Среднее значение мощности, рассеивающейся в объеме V якоря тормоза в виде тепла (джоулевых потерь) при периодических во времени полях равна среднему значению потока Пойнтинга — Умова, втекающего внутрь объема V через движущуюся поверхность S якоря. Действительно, из выражения для скорости изменения энергии электромагнитного поля для случая отсутствия источников поля внутри объема V , ограниченного поверхностью S [16]:

$$-\frac{d\bar{W}_s}{dt} = \oint_S [\bar{E} \times \bar{H}] dS + \int_V \bar{J} \cdot \bar{E} dV$$

при периодически изменяющихся во времени полях, когда среднее значение плотности энергии постоянно, получим, что $d\bar{W}_s/dt = 0$ (черта сверху обозначает среднее значение функции за период).

Таким образом, мощность джоулевых потерь, рассеивающаяся в объеме V якоря тормоза, равна среднему значению потока Пойнтинга — Умова, втекающего внутрь объема V через движущуюся поверхность S . Перенос энергии электромагнитного поля в движущийся якорь осуществляется за счет механического движения якоря. Вектор Пойнтинга — Умова равен:

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_z^{(2)} H_x^{(2)}) = \frac{\alpha_2 v \tau (B_{y0}^{(1)})^2}{2\mu_2 \pi \left[\left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{\tau} \delta + \frac{\mu_0 \tau \alpha_2}{\mu_2 \pi} \operatorname{sh} \frac{\pi}{\tau} \delta \right)^2 + \left(\frac{\mu_0 \tau \alpha_2}{\mu_2 \pi} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \operatorname{sh} \frac{\pi}{\tau} \delta \right)^2 \right]} \quad (4)$$

Механическая мощность на валу якоря тормоза при $v = \text{const}$ в точности равна мощности потерь, поэтому

$$M = f_x R_\pi = \frac{W}{\omega_p}; \quad f_x = \frac{\tau \alpha_2 (B_{y0}^{(1)})^2}{2\mu_2 \pi D'},$$

где f_x — среднее значение тормозной силы, приложенной к поверхности якоря тормоза, отнесенной к единице поверхности якоря; ω_p — угловая частота вращения якоря; M — тормозной момент на валу якоря, отнесенный к единице поверхности якоря; $F_x = f_x S_\pi$ — полная сила, действующая на поверхности якоря в тангенциальном направлении; S_π — поверхность якоря.

Выражение для пондеромоторной силы F_x в магнитном поле можно записать как через произведение векторов поля \vec{J} и \vec{B} , так и через тензор напряжений Максвелла [15], поэтому для нашего случая получим:

$$F_x = \int_V f'_x dV = \int_S J_z B_y dx dy dz = \oint_S T_{xy} dS,$$

где T_{xy} — составляющая тензора напряжений Максвелла вдоль оси x , действующая на поверхность якоря.

Среднее значение силы f_x получается равным:

$$f_x = \frac{1}{2\tau} \frac{1}{l_\delta} \frac{1}{T} \int_0^{2\tau} \int_0^{l_\delta} \int_0^T \int_0^\infty \frac{E_z^{(2)}}{\rho_2} B_y^{(2)} dx dz dt dy = \\ = \frac{\Delta_2 v (B_{y0}^{(1)})^2}{4\rho_2 D'} = \frac{\tau \alpha_2 (B_{y0}^{(1)})^2}{2\mu_2 \tau D'}.$$

Значение D' определено ранее. Среднее значение тензора напряжений

$$T_{xy} = \frac{F_x}{S_\pi} = f_x.$$

Определим тангенциальную составляющую тензора напряжений по [7, уравнение 12)]:

$$T_{xy} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(H_x^{(2)} B_y^{(2)*}) = \frac{\tau \alpha_2 (B_{y0}^{(1)})^2}{2\mu_2 \pi D'} = \frac{\Delta_2 v (B_{y0}^{(1)})^2}{4\rho_2 D'},$$

т. е. в точности равно f_x .

Таким образом, момент сил, действующий на якорь, может быть определен как через поток Пойнтинга—Умова, так и через тензор напряжений Максвелла, а также из выражения для пондеромоторной силы. Выражение для W целесообразно записать в форме

$$W = \frac{\sqrt{\omega \mu_2 \rho_2}}{2\sqrt{2}} (H_{xm}^{(2)})^2. \quad (5)$$

Отметим следующий факт. Для любого замкнутого неподвижного воображаемого контура, расположенного в движущемся ферромагнитном теле якоря, $\oint \vec{E} d\vec{l} = -d\Phi^{(2)}/dt = 0$, следовательно $\vec{E}^{(2)} = 0$ (если и имеется поле $\vec{E}^{(2)}$, то оно должно быть безвихревым). Тем не менее в этом воображаемом контуре протекает вихревой ток, с которым связано постоянное магнитное поле $\operatorname{rot}_z \vec{H}^{(2)} = J_z^{(2)}$, определенное в неподвижной системе координат. Таким образом, приходим к результату $E_z^{(2)} = 0$, $J_z^{(2)} \neq 0$ и связь $E_z^{(2)} = \rho_2 J_z^{(2)}$ нарушается для выделенного неподвижного контура.

Рассмотрим это обстоятельство более подробно. В соответствии с формулами преобразования Максвелла [13] для полей имеем:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = E_z + v B_y = E'_z = v B_y,$$

где $E_z = 0$ ($\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi$, $\vec{A} = \text{const}$, сла-

гаемым $\operatorname{grad} \varphi$ пренебрегаем), поэтому $E'_z = v B_y$ и $E_z = E'_z - v B_y = 0$ (штрих означает, что измерено в движущейся точке, а отсутствие штриха — поле в неподвижной точке, имеющей то же мгновенное положение, что и точка движущегося тела).

Таким образом, в неподвижной системе координат для неподвижной точки действительно $E_z = 0$. Что касается соотношения $\vec{E} = \rho \vec{J}$, то необходимо отметить, что связь между током и полем справедлива, вообще говоря, для системы координат, в которой проводники неподвижны (17), т. е.

$$J'_z = E'_z / \rho_2 = v B_y / \rho_2.$$

В результате проведенного анализа ясно, что вопрос о «перенесении» решения о неподвижной среды на движущуюся (7) является праздным. Важным представляется другой вопрос — о влиянии синусоидальности распределения индукции и напряженности магнитного поля вдоль осей x и y на выбор значения эквивалентной магнитной проницаемости μ_2 при замене нелинейной задачи адекватной линейной. Для случая неподвижных тел при постоянстве поля вдоль оси x в [9] рекомендуется $\mu_2 = (1,8 - 2,1) \mu_{st}^{(1m)*}$; нами принято $\mu_2 = 2\mu_{st}^{(1m)}$. Амплитуда потока в теле якоря определяется в сечении, на поверхности

* $\mu_{st}^{(1m)}$ — статическая магнитная проницаемость, определенная из кривой намагничивания по амплитудному значению напряженности синусоидально изменяющегося магнитного поля.

которого $H_x^2 = H_{xm}^2$ и именно для этого значения H_{xm}^2 определяется B_{xm}^2 и $\mu_{st}^{(1m)}$. При $\Delta_2 \ll \tau$ изменение μ_2 вдоль оси y гораздо существеннее, чем вдоль оси x и это влияет на значение Δ_2 и потерь в якоре W . Представляется правдоподобным, что эквивалентное μ_2 укладывается в приведенное ранее для него соотношение.

Проведенный расчет показал хорошее совпадение расчетных и опытных данных, полученных на серийном тормозе (рис. 2).

Полученные выражения определены при $\mu_2 = \text{const}$. Для учета $\mu_2 = \text{var}$ в функции x и y будем принимать $\mu_2 = 2\mu_{st}^{(1m)}$ (9), где $\mu_{st}^{(1m)}$ определяется из основной кривой намагничивания для заданного (принимаемого) H_{xm}^2 .

Таким образом, для $\mu_2 = \text{var}$ будем иметь

$$W = \frac{\sqrt{\omega \mu_{st}^{(1m)} \rho_2}}{2} (H_{xm}^{(2)})^2. \quad (5a)$$

Поток в якоре равен:

$$\Phi_x^{(2)} = \mu_2 l_\delta \int_{y=\delta}^{\infty} H_{xm}^{(2)} e^{-\alpha_2(1+j)(y-\delta)} dy = \\ = (1-j) \sqrt{\frac{\mu_2 \rho_2}{2\omega}} H_{xm}^{(2)} l_\delta.$$

Амплитуда потока при $\mu_2 = \text{const}$

$$\Phi_{xm}^{(2)} = \sqrt{\frac{\mu_2 \rho_2}{\omega}} H_{xm}^{(2)} l_\delta. \quad (6)$$

Для $\mu_2 = \text{var}$

$$\Phi_{xm}^{(2)} = \sqrt{\frac{2\mu_{st}^{(1m)} \rho_2}{\omega}} H_{xm}^{(2)} l_\delta. \quad (6a)$$

Поскольку тот же поток проходит через зазор,

то

$$\frac{1}{2} \Phi_{\delta(y=\delta)} = \frac{1}{2} \frac{2}{\pi} B_{y(y=\delta)}^{(1)} l_\delta = \\ = \frac{B_{y0}^{(1)} l_\delta}{\pi \left[\text{ch} \frac{\pi}{\tau} \delta + (1+j) \frac{\mu_0 \tau \alpha_2}{\mu_2 \pi} \text{sh} \frac{\pi}{\tau} \delta \right]},$$

что при $\frac{\pi}{\tau} \delta \ll 1$ дает для $\mu_2 = \text{var}$

$$B_{y0}^{(1)} \approx \frac{\pi}{\tau} \sqrt{\frac{2\mu_{st}^{(1m)} \rho_2}{\omega}} H_{xm}^{(2)}. \quad (7)$$

Расчет м. д. с. F_b и тока I_b обмотки возбуждения.

Магнитодвижущая сила обмотки возбуждения состоит из следующих слагаемых (рис. 1, а, контур $abcde0a$): м. д. с., приходящаяся на ярмо индуктора $F_{я.и}$ (отрезок ab); м. д. с., приходящаяся на два полюса $2F_n$ (отрезок $a0=bc$); м. д. с., приходящаяся на два зазора $2F_\delta$ (отрезок $cd=e0$); м. д. с. реакции якоря F_a (отрезок ed). Таким образом, $\dot{F}_b = \dot{F}_{я.и} + 2\dot{F}_n + 2\dot{F}_\delta + \dot{F}_a$, где F_b — геометрическая сумма. Значение \dot{F}_b вследствие магнитной

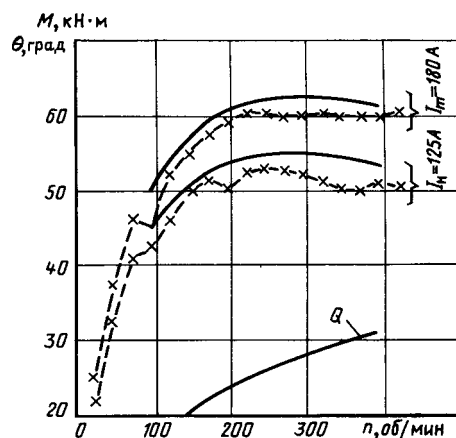


Рис. 2. Зависимость тормозного момента от скорости вращения: — — — расчет; — — — эксперимент

несимметрии индуктора может быть определена подобно тому, как это делается в синхронной машине на основе теории двух реакций Блонделя (11). Значение \dot{F}_2 , приходящееся на полюсное деление при $y=\delta$:

$$\dot{F}_2 = \int_0^\tau H_x^{(2)} dx = \frac{2\sqrt{2}\alpha_2 B_{y0}^{(1)} e^{j\frac{\pi}{4}}}{\mu_2 \frac{\pi^2}{\tau^2} \left[\text{ch} \frac{\pi}{\tau} \delta + (1+j) \frac{\mu_0 \tau \alpha_2}{\mu_2 \pi} \text{sh} \frac{\pi}{\tau} \delta \right]},$$

или с учетом (3):

$$\dot{F}_2 = \frac{2\tau}{\pi} H_x^{(2)} e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad F_2 = \frac{2\tau}{\pi} H_{xm}^{(2)}.$$

Значение м. д. с., приходящееся на два зазора,

$$2\dot{F}_\delta = \frac{2}{\mu_0 \tau} \int_0^\tau \int_0^\delta B_y^{(1)} dx dy = \\ = \frac{4B_{y0}^{(1)} \left[\frac{\tau}{\pi} \text{sh} \frac{\pi}{\tau} \delta + (1-j) \frac{\mu_0 \tau \alpha_2}{\mu_2 \pi} \left(1 - \text{ch} \frac{\pi}{\tau} \delta \right) \right]}{\pi \mu_0 \left[\text{ch} \frac{\pi}{\tau} \delta + (1+j) \frac{\mu_0 \tau \alpha_2}{\mu_2 \pi} \text{sh} \frac{\pi}{\tau} \delta \right]}.$$

При $\frac{\pi}{\tau} \delta \ll 1$, $\text{sh} \frac{\pi}{\tau} \delta \approx \frac{\pi}{\tau} \delta$, $\text{ch} \frac{\pi}{\tau} \delta \approx 1$ и тогда

$$2\dot{F}_\delta = \frac{4B_{y0}^{(1)} \delta}{\pi \mu_0 \left[1 + (1+j) \frac{\mu_0 \alpha_2 \delta}{\mu_2} \right]}.$$

Значение м. д. с., приходящееся на полюса и ярмо индуктора $2F_n$ и $F_{я.и}$, определяется таким же образом, как при расчете магнитной цепи синхронной машины. При этом поток рассеяния полюсов индуктора должен определяться с учетом

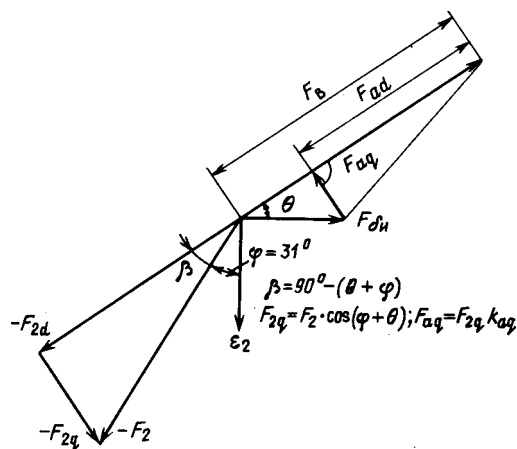


Рис. 3. Векторная диаграмма составляющих м.д.с. обмотки возбуждения

проникновения поля в тело движущегося якоря с учетом фазового сдвига между м. д. с. зазора и якоря. Следует отметить, что коэффициент рассеяния полюсов индуктора в высокомоментных электромагнитных тормозах обычно высокий, до двух.

Для того чтобы определить приведенную к индуктору м. д. с. реакции якоря $F_a = F_2$, следует уточнить угол сдвига F_2 по отношению к $B_{y0}^{(1)}$ и учесть коэффициент приведения ее к индуктору. Увеличение эквивалентной магнитной проницаемости ($\mu_2 = 2\mu_{st}^{(1m)}$) влияет на пространственный сдвиг м. д. с. F_2 по отношению к $B_{y0}^{(1)}$, при этом сдвиг равен не $\pi/4$, а $\pi/2 - \varphi = 90^\circ - 31^\circ = 59^\circ$. На рис. 2 показана векторная диаграмма для определения F_a , где $F_{dh} = 2F_\delta + 2F_n + F_{я,н}$, $F_{ad} = F_2 \sin(\theta + \varphi) k_{ad}$, $F_{aq} \cos(\theta + \varphi) k_{aq}$, θ — угол между вектором м. д. с. возбуждения F_b и м. д. с. F_{dh} ; k_{ad} , k_{aq} — коэффициент приведения реакции якоря (11, рис. 8, 10, с. 175). На рис. 3 приведены расчетные и экспериментальные кривые момента тормоза в функции скорости вращения якоря.

Выводы. 1. Решение задачи по расчету вихревых токов в движущемся якоре электромагнитного тормоза может производиться на основе уравнений Максвелла, записанных в системе координат, жестко связанной с движущимся якром.

2. На поверхности движущегося в постоянном магнитном поле проводящего тела существует поток вектора Пойнтинга—Умова, перенос которого осуществляется за счет механического движения тела.

3. Тангенциальная тормозная сила на поверхности якоря может быть вычлена из выражения

для пондеромоторной силы, через тензор напряжений Максвелла, а также посредством вектора Пойнтинга—Умова.

4. С целью учета значительных потоков рассеяния полюсов в высокомоментных электромагнитных тормозах м. д. с. полюсов, создающих потоки рассеяния, необходимо определять по реальной картине проникновения поля в движущийся якорь.

5. Полученное решение позволяет учитывать все основные особенности высокомоментных тормозов: величину воздушного зазора, непостоянство магнитной проницаемости якоря и индуктора, потоки рассеяния индуктора. Совпадение расчетных и экспериментальных кривых при определении момента электромагнитного тормоза хорошее, и расхождение их не превышает 10 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брук И. С. Теория асинхронного двигателя с массивным ротором.— Вестник теоретической и экспериментальной электротехники, 1928, № 2; 1929, № 5.
2. Постников И. М. Вихревые токи в синхронных и асинхронных машинах с массивным ротором.— Электричество, 1958, № 10.
3. Панасенков М. А. Расчет электромагнитного тормоза.— Электричество, 1965, № 12.
4. Иогансон Р. А. Индуктивные тормоза.— М.: Энергия, 1966.
5. Шетинин Т. Л. Электромагнитные муфты скольжения.— М.: Энергоатомиздат, 1985.
6. Поздеев А. Д., Розман Я. Б. Электромагнитные муфты и тормоза с массивным якром.— М.: ГЭИ, 1963.
7. Потапов Л. А. Уравнение момента электромагнитного тормоза с ферромагнитным ротором.— Электричество, 1986, № 10.
8. Ламмеранер И., Штафль М. Вихревые токи.— М.; Л.: Энергия, 1967.
9. Туровский Я. Техническая электродинамика.— М.: Энергия, 1974.
10. Нейман Л. Р. Поверхностный эффект в ферромагнитных телах.— М.; Л.: ГЭИ, 1949.
11. Костенко М. П., Пиотровский Л. М. Электрические машины. Ч. II.— Л.: Энергия, 1973.
12. Лупкин В. М. Распространение волн внешних перенапряжений в первичной обмотке электровазного трансформатора.— Известия вузов. Электромеханика, 1966, № 1.
13. Максвелл Д. К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля.— М.: ГИТТЛ, 1954.
14. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Работы по теории относительности. 1905—1920.— М.: Наука, 1965.
15. Тамм И. Е. Основы теории электричества.— М.: Наука, 1976.
16. Страттон Дж. Теория электромагнетизма.— М.: Гостехиздат, 1948.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: ГИФМЛ, 1959.

[17.04.89]

Аналитическая модель электромагнитных процессов в линейном асинхронном двигателе

ТОЗОНИ О. В.

Киев

Основные ветви древовидной структуры базы научных знаний по электродинамике, рассмотренные в [1], состоят из математических моделей (ММ), основанных на численно-аналитических методах вторичных источников и электродинамической теории цепей. Составляющие их фрагменты содержат как аналитические, так и численные модели преобразования информации, а ММ требуют применения приближенных численных алгоритмов для решения функциональных уравнений.

Однако возможности аналитических методов шире, чем обычно предполагают. Даже для весьма сложных конструкций новых устройств электротехники иногда удается построить ММ, не требующие дискретизации и численных алгоритмов. В статье приведен пример ММ электромагнитного процесса в линейном асинхронном двигателе (ЛАД), которая сводится к совокупности аналитических выражений для определения всех величин, характеризующих процесс, а также изложен ход дедуктивных преобразований, потребовавшихся для создания аналитического фрагмента.

Линейный асинхронный двигатель (рис. 1) состоит из сердечников индуктора — двух симметричных половин развернутого статора, в пазах которого уложена трехфазная обмотка, и длинной проводящей шины прямоугольного сечения, расположенной в зазоре между сердечниками. Многофазный синусоидальный ток, протекающий в обмотке, создает в зазоре магнитное поле, пронизывающее шину. В шине индуцируются вихревые токи, вторичное магнитное поле которых, взаимодействуя с полем индуктора, создает силу тяги.

Связь вихревых токов в шине ЛАД с полем его индуктора. В [2] из уравнений теоретической модели найдена связь между векторными магнитными потенциалами \vec{A}^0 первичного поля созданного сердечниками индуктора и \vec{A}^n вторичного поля токов в тонкой неограниченной пластине (формула (38) из [2]):

$$\vec{A}^n(Q) = -2\vec{A}^0(Q) - 2 \int_{\xi_Q}^{\infty} \frac{\partial \vec{A}^0}{\partial \xi_P} (Q\xi_P) e^{+j\omega\lambda(\xi_P - \xi_Q)} d\xi_P, \quad (1)$$

где $(Q\xi_P)$ означает точку с координатами $[\xi_Q - v\lambda(\xi_P - \xi_Q), \eta_Q, \xi_P]$; \vec{A}^0 — гармоническая в полу-пространстве $\xi > 0$ часть поля \vec{A}^0 ; $\lambda = \frac{\mu_0 \gamma v}{2}$; ω — угловая частота тока в обмотке; v — толщина пластины; v — скорость пластины.

Плотность \vec{J} вихревого тока в тонкой шине толщиной v и шириной h с поверхностной электропроводностью γv выражается формулой

$$\begin{aligned} \vec{J}(Q) = & + \frac{4\lambda}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[v \frac{\partial^2 \vec{A}^0}{\partial \xi_P \partial \xi_Q} (Q\xi_P) + j\omega \frac{\partial \vec{A}^0}{\partial \xi_P} (Q\xi_P) \right] \times \\ & \times e^{j\omega\lambda\xi_P} d\xi_P - \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{J}^n(\tau, -\frac{h}{2}) \times \\ & \times \frac{\bar{e}_x \operatorname{sh} k(\tau - \eta_Q) - \bar{e}_\eta \cos k\eta_Q}{\operatorname{ch} k(\tau - \eta_Q) + \sin k\eta_Q} d\tau - \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{J}^n(\tau, \frac{h}{2}) \times \\ & \times \frac{\bar{e}_x \operatorname{sh} k(\tau - \eta_Q) + \bar{e}_\eta \cos k\eta_Q}{\operatorname{ch} k(\tau - \eta_Q) - \sin k\eta_Q} d\tau, \quad (2) \end{aligned}$$

где \vec{J}^n — плотность вихревых токов в неограниченной пластине.

Первый интеграл в (2) получен из выражения

$\vec{J}^n \approx \frac{-2}{\mu_0} \frac{\partial \vec{A}^n}{\partial \xi}$ (формула (17) из [2]) дифференцированием (1). Второй и третий интегралы (формула (53) из [2]) отражает влияние границ шины, выраженное в виде интеграла Пуассона для полосы через краевое условие $\vec{J}^n(\tau, \pm \frac{h}{2}) =$

$= -\gamma v \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$, где $\vec{J}^n(\tau, \pm \frac{h}{2})$ — значения первого интеграла в (2) на прямых $\eta = \pm \frac{h}{2}$, представляющие собой компоненты плотности вихревого тока в неограниченной пластине; ψ — гармоническая функция в пределах шины — потенциал электрического поля. Формулы для вторичного поля в ЛАД связывают векторы поля с распределением вихревых токов в шине и имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{A}^n(Q) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_M \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\vec{J}(M)}{r_{QM}} d\eta_M; \\ \vec{B}^n(Q) = & - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_M \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\vec{J}(M) \times \vec{r}_{QM}}{r_{QM}^3} d\eta_M, \quad (3) \end{aligned}$$

где $\vec{J}(M)$ определено выражением (2).

Следовательно, если найти аналитическое выражение для составляющей векторного потенциала \vec{A}^0 первичного поля индуктора, то можно вычислить вторичное поле и построить аналитическую ММ.

Замена зубчатого индуктора эквивалентным гладким. В [3] предложен способ построения такой ММ посредством изменения формы сердечников так, чтобы обеспечить условия приме-

нимости метода зеркальных изображений (МЗИ). Идея способа состоит в отыскании такого распределения тока в активном слое гладких сердечников индуктора, которое создает первичное поле в его рабочем зазоре, совпадающее с полем в зазоре реального зубчатого индуктора. Исходными являются следующие соображения.

Согласно теореме единственности гармонических функций для идентичности полей в рабочих зазорах зубчатого и гладкого индукторов необходимо и достаточно, чтобы на границах зазоров значения касательных напряженностей \dot{H}_x совпадали. Если сталь индуктора не насыщена, то магнитный потенциал в стали и на ее поверхности (в том числе на торцах зубцов) не меняется. На участках раскрытия пазов скалярный магнитный потенциал будет изменяться на значение, равное значению тока \dot{I}_a в пазу. Следовательно, для замены зубчатого индуктора эквивалентным гладким надо найти распределение \dot{H}_x на полосках раскрытия пазов, и затем на таких же полосках поверхности гладкого индуктора распределить ток \dot{I}_a с поверхностной плотностью $\dot{J}_\eta = \dot{H}_x$. Поскольку все пазы прямолинейны и параллельны, то магнитное поле в них плоское и эта задача решается аналитически методом конформных отображений [3].

Распределения \dot{J}_η были рассчитаны для различных отношений $\beta = g/d$ ширины зазора $2g$ к ширине паза $2d$ (рис. 7—9 из [3]) в интервале $[0,1 \leq \beta \leq 10]$, представлены в виде семейства кривых и аппроксимированы формулой (26) из [3]. Еще более удобной и точной является аппроксимация вида

$$\dot{J}_\eta(x) = \frac{a_0}{\sqrt{1-x^2}} + a_1 x^2 + a_3 x^4 + a_5 x^6, \quad (4)$$

упрощающая замену непрерывного распределения эквивалентными совокупностями нитей тока.

Размеры индуктора ЛАД ограничены, а витки намагничивающих обмоток выступают за пределы сердечников ($\eta = \pm l/2$), образуя лобовые части.

Разобъем поле \dot{B}^0 в зазоре между гладкими сердечниками на две составляющих \dot{B}_\parallel и \dot{B}_\perp . Первичными источниками поля \dot{B}_\parallel будем считать параллельные пленки пазовых токов, поля \dot{B}_\perp — токи в лобовых частях обмоток. Индукция \dot{B}_\parallel имеет лишь две компоненты, лежащие в плоскости ($\eta = \text{const}$), нормальной к направлению пазовых токов. Источников для ее третьей компоненты нет, и, следовательно, поле \dot{B}_\parallel — плоскопараллельное, а все его магнитные линии замыкаются только через зазор, торцевые и наружные поверхности сердечников, параллельные пазовым токам.

Конформное отображение зазора индуктора на полосу. Плоскопараллельная структура поля позволяет построить точное выражение для индукции \dot{B}_\parallel в зазоре реального индуктора ЛАД. Размеры сердечников индуктора удовлетворяют неравенствам (рис. 2):

$$L \geq 100g, \quad 15 < k_0 = 1 + P/g < 30. \quad (5)$$

На плоскости $\eta = 0$ внешняя к сердечникам область D , включающая зазор, двухсвязная. Если найти функцию, конформно отображающую бесконечную полосу шириной $2g$ на Риманову поверхность, каждый лист которой совпадает с D (рис. 2), то магнитное поле в D можно будет определить интегралом Пуассона для полосы [6]. Покажем, что при условиях (5) искомая отображающая функция почти совпадает с функцией [4]:

$$w(u) = \frac{q}{\pi} \left[\frac{a+1}{\sqrt{a}} \operatorname{arth} R_0 + \frac{a-1}{\sqrt{a}} \frac{R_0}{1-R_0^2} + \ln \frac{R_0 \sqrt{a-1}}{R_0 \sqrt{a+1}} \right]; \quad (6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} w = \kappa + i\zeta; \quad u = x + iz; \quad k_0 = 1 + P/g; \\ R_0 = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{e^g} u + 1}{\frac{\pi}{e^g} u + a}}; \quad a = 2k_0^2 - 1 + 2k_0 \sqrt{k_0^2 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Нетрудно проверить, что в зазоре при $\operatorname{Re} u < -g$,

$$w(u) \approx u + \frac{g}{\pi} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{a}} - \ln 4 \right) \approx u + 0,2g, \quad (8)$$

и с высокой точностью линия $\operatorname{Re} w = -\frac{L}{2}$ совпадает с отрезком прямой $\operatorname{Re} u = \text{const}$.

Следовательно, по принципу симметрии Шварца [7], функция (6) может быть аналитически симметрично продолжена на левую сторону зазора и индуктора. Короче говоря, формулу (6) можно считать хорошим приближением многолистного конформного отображения двухсвязной области D на полосу.

Из формулы (6) при условиях (5) следует, что на участке зазора $-L^* + 8g < \operatorname{Re} u < -4g$; $-g \leq \operatorname{Im} u \leq g$, где $L^* = L + 6,4g$, с высокой точностью выполняется соотношение

$$|w'|^2 = \left| \frac{\left(\frac{\pi}{e^g} u + 1 \right) \left(\frac{\pi}{e^g} u + a \right)}{a} \right| \approx 1. \quad (9)$$

Смысл конформного отображения одной области (D) на другую (участок полосы) состоит в установлении соответствия между точками обеих областей. Следовательно, для многолистного конформного отображения двухсвязной области D на полосу шириной $2g$ необходимо:

1) соответствующие при отображении (6) друг

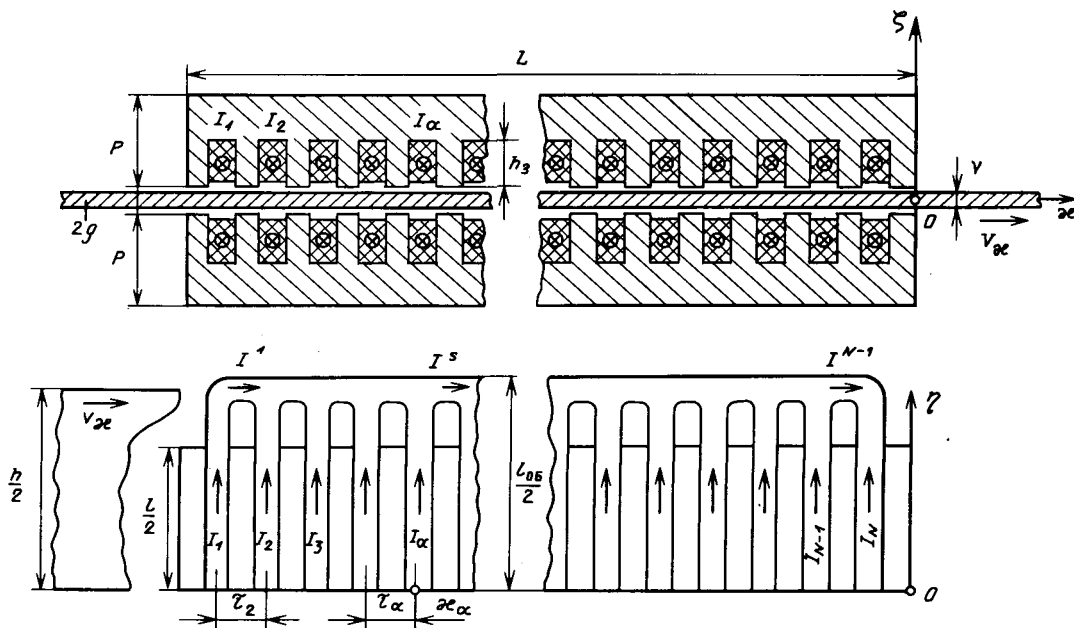


Рис. 1

другу точки контуров с координатами $(0, ig)$ [правые углы сердечников (рис. 2) на плоскости w и точки границ полосы на плоскости u] принять за начальные;

2) на верхней границе полосы в обе стороны от начальной точки $u=0+ig$ отложить интервал $[-L/2-0,2g+ig, 3g+ig]$ и разместить на нем массив точек с заданным шагом h_0 ;

3) по формуле (6) вычислить координаты $w(u)$ точек, соответствующих точкам массива, и нанести их на правую половину контура верхнего сердечника;

4) на остальных участках контуров обоих сердечников разместить точки, симметричные найденным в п. 3 относительно осей $\xi=0$ и $x=-L/2$ и считать их соответствующими при отображении (6) точкам границ участка полосы симметричным относительно осей $z=0$ и $x=-L/2-0,2g$;

5) аналогично установить соответствие внутренних точек участка полосы (плоскость u) длинной L^* и области D (плоскость w).

Расчет плоской составляющей поля индуктора. Расчет поля в двухсвязной области D сводится к решению «видоизмененной задачи Дирихле» [6]. Граничные значения скалярного магнитного потенциала ϕ на одном из контуров сердечников определяются с точностью до постоянной c , определяемой из условия равенства нулю магнитного потока сквозь всю поверхность сердечника [6].

Источниками потенциала ϕ являются намагниченность стали и пленки пазовых токов I_α , расположенные на противоположащих поверхностях сердечников симметрично относительно плоскости $\xi=0$. Расположение тока на границе области D обеспе-

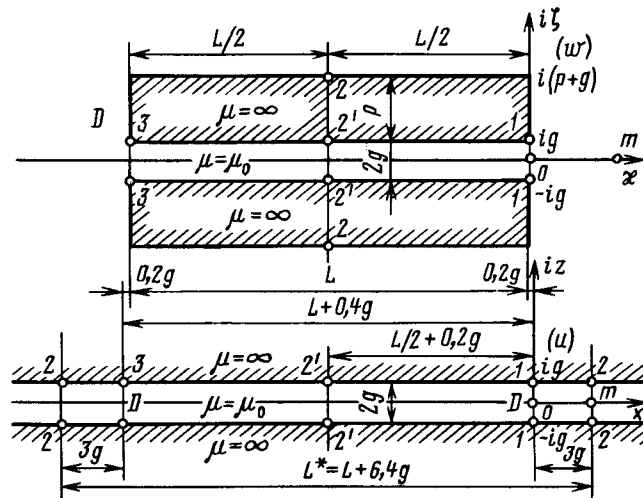


Рис. 2

чивает гармоничность потенциала ϕ внутри области. Для определения граничных значений ϕ примем, что на контуре своего сердечника составляющая потенциала $\Delta\phi_\alpha$, созданная пленкой тока I_α в соответствии с законом Ампера, меняется по ширине пленки от $I_\alpha/2$ до $-I_\alpha/2$. Результирующий потенциал ϕ , созданный всеми пленками токов I_α , при таком способе его определения и при условии $\sum_{\alpha=1}^N I_\alpha=0$ на торце q -го зубца верхнего сердечника (рис. 3) равен

$$\dot{\phi}_{\text{в}q} = - \sum_{\alpha=q}^N I_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{q-1} I_\alpha. \quad (10)$$

На торце q -го зубца нижнего сердечника

$$\dot{\phi}_{\text{в}q} = - \dot{\phi}_{\text{в}q}. \quad (11)$$

Постоянная c определится формулой (14.30) из [6]:

$$c = \frac{1}{L^*} \int_{L^*} [\varphi(\tau + ig) - \varphi(\tau - ig)] d\tau. \quad (12)$$

В индукторе ЛАД все пленки пазовых токов I_α расположены в той части зазора, где выполняются равенства (8), (9). Следовательно, после отображения области D на прямоугольный участок полосы $[-L - 3,4g \leq x \leq 3g]$ их взаимное расположение не изменится. Поэтому интеграл (12) можно вычислить непосредственно в координатах плоскости (ω), где он принимает вид

$$c = \frac{2}{L} \int_L \varphi_b(\kappa) d\kappa. \quad (13)$$

Распределение плотности пазового тока I_η в каждой пленке симметрично относительно оси паза [3], поэтому значение интеграла (13) не изменится, если пленки пазовых токов I_α заменить нитями токов I_α , совпадающими с осями пазов. Обозначим через τ_q расстояние между осями $(q-1)$ -го и q -го пазов, тогда интеграл (13) можно представить в виде суммы

$$c = \frac{2}{L} \sum_{q=2}^N \tau_q \sum_{\alpha=1}^{q-1} I_\alpha = - \frac{2}{L} \sum_{q=2}^N \tau_q \sum_{\alpha=q}^N I_\alpha. \quad (14)$$

Чтобы сохранить симметрию распределения потенциала в области D и нулевое значение на плоскости ($\zeta=0$), его граничные значения примем равными

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{bq} &= \sum_{\alpha=1}^{q-1} I_\alpha - \frac{1}{L} \sum_{q=2}^N \tau_q \sum_{\alpha=1}^{q-1} I_\alpha = \\ &= - \sum_{\alpha=q}^N I_\alpha + \frac{1}{L} \sum_{q=2}^N \tau_q \sum_{\alpha=q}^N I_\alpha = - \dot{\varphi}_{nq}. \end{aligned} \quad (15)$$

В [3] непрерывное распределение тока I_α в пленке, замещающей паз в совпадающей с полоской его раскрытия на поверхности сердечника, было заменено $2n$ нитями тока $I_\alpha = 2 \sum_{j=1}^n I_{aj}$ в точках с координатами $\zeta = \pm g$, $\kappa_{ajl} = \kappa_\alpha \pm \frac{d_\alpha}{n} (j - 1/2)$, где $2d_\alpha$ — ширина паза номера α ; κ_α — координата его оси. Отображение (6) переводит все нити тока на границы полосы без искажения расстояний между ними.

Скалярный потенциал $\Delta\varphi^*$ магнитного поля, созданного на полосе парой нитей тока I , симметричных относительно плоскости $z=0$, можно найти, вычислив интеграл Пуассона [6] для полосы.

В принятых обозначениях он имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta\varphi^*(x, z) &= \frac{1}{4g} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\tau - ig) \frac{\cos kz}{\operatorname{ch} k(\tau - x) + \sin kz} d\tau + \\ &+ \frac{1}{4g} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\tau + ig) \frac{\cos kz}{\operatorname{ch} k(\tau - x) - \sin kz} d\tau, \quad k = \frac{\pi}{2g}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi^*(\tau - ig) &= \frac{1}{2} \begin{cases} I, & \tau < 0; \\ -I, & \tau > 0; \end{cases} \\ \varphi^*(\tau + ig) &= \frac{1}{2} \begin{cases} -I, & \tau < 0; \\ I, & \tau > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

Подставив в (16) граничные значения (17) и взяв интеграл, найдем:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi^*(x, z) &= \frac{I}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{1 + \operatorname{ch} kx \sin kz}{\operatorname{sh} kx \cos kz} - \right. \\ &\left. - \operatorname{arctg} \frac{1 - \operatorname{ch} kx \sin kz}{\operatorname{sh} kx \cos kz} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Результирующий потенциал $\dot{\varphi}^*$ определится наложением потенциалов (18) от всех пар нитей пазовых токов I_{aj} , а магнитное поле \dot{B}_\parallel^* на полосе будет пропорционально градиенту $\dot{\varphi}^*$.

При многолистном отображении на полосу шириной $2g$ (6) области D , размеры которой удовлетворяют соотношениям (5), наименьшие расстояния на полосе между токами I_1 и I_N соседних участков L^* полосы превышают $6g$ [4]. Доказано [6], что на таких расстояниях влияние источника на интенсивность поля пренебрежимо мало и его можно не учитывать. Поэтому, суммируя градиенты выражения (18) только по $2Nn$ парам нитей тока I_{aj} одного участка L^* и добавив к ним однородное поле, созданное на полосе постоянной (14), получим формулу для вычисления распределения первичного магнитного поля на участке полосы длиной L^* , соответствующем области D :

$$\begin{aligned} \dot{B}_\parallel^*(M) &= \frac{\mu_0}{4g} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{j=1}^n I_{aj} \sum_{l=1}^2 \times \\ &\times \left\{ \bar{e}_x \left[\frac{\cos kz_M}{\operatorname{ch} k(x_{ajl} - x_M) + \sin kz_M} - \right. \right. \\ &- \frac{\cos kz_M}{\operatorname{ch} k(x_{ajl} - x_M) - \sin kz_M} \left. \right] - \left[\frac{\operatorname{sh} k(x_{ajl} - x_M)}{\operatorname{ch} k(x_{ajl} - x_M) + \sin kz_M} + \right. \\ &+ \frac{\operatorname{sh} k(x_{ajl} - x_M)}{\operatorname{ch} k(x_{ajl} - x_M) - \sin kz_M} \left. \right] \bar{e}_z \left. \right\} - \\ &- \frac{\mu_0}{gL} \sum_{g=z}^N \tau_q \sum_{\alpha=1}^{q-1} I_\alpha \bar{e}_z. \end{aligned} \quad (19)$$

Чтобы перейти к распределению индукции в реальной магнитной системе ЛАД, воспользуемся формулой (27) из [8]:

$$\dot{B}_\parallel(M) = \frac{1}{\psi(\omega)} \frac{\partial \kappa}{\partial x} \dot{B}_\parallel^*(M) \pm \frac{\partial \zeta}{\partial x} \dot{B}_\parallel^*(M). \quad (20)$$

В той части рабочего зазора ЛАД, которая находится между крайними зубцами сердечников, выполняется соотношение (9). При этом формулы (20) упрощаются и принимают вид

$$\dot{B}_{\parallel z}(M) = \dot{B}_{\parallel z}^*(M), \quad \dot{B}_{\parallel x}(M) = \dot{B}_{\parallel x}^*(M). \quad (21)$$

В действительности вблизи торцов индуктора поле слабее, чем дает формула (20). В открытом пространстве Фарадеевы силы расширяют сечения трубок поля по координате η и уменьшают индукцию, особенно на краях проводящей шины.

Расчет трехмерной составляющей поля индуктора. Провода в пазах реальных сердечников и замещающие их пленки тока в гладком зазоре ограничены боковыми поверхностями индуктора — участками плоскостей $\eta = \pm l/2$. За пределами этих участков источниками поля являются токи лобовых частей обмотки.

Вернемся к полю \dot{B}_{\parallel}^* на бесконечной полосе и применим для его расчета МЗИ, заменив влияние границ полосы ($z = \pm g$) влиянием изображений отрезков пленок ($-l/2 \leq y \leq l/2$) пазовых токов в пустом пространстве. Как показано в [4], каждая пара противолежащих пленок пазового тока I_α создает бесконечный ряд изображений пленок удвоенного тока $2I_\alpha$, лежащих на параллельных плоскостях $z = \pm(2m+1)g$, $m=0, 1, 2, \dots$.

Введем в рассмотрение две параллельные плоскости S_0 ($y = \pm l/2$), касающиеся концов всех изображений отрезков пленок пазовых токов $2I_\alpha$. Внутри объема V_0 , ограниченного плоскостями S_0 , индукция \dot{B}_{\parallel}^* касательна к S_0 , т. е. $(\vec{n}_M \dot{B}_{\parallel}^*(M)) = (\vec{e}_y \dot{B}_{\parallel}^*(M)) = 0$. Таким образом, плоскости S_0 являются поверхностями разрыва непрерывности вектора поля. Источники, расположенные внутри объема V_0 , за его пределами поля не создают, и наоборот. Иначе говоря, плоскопараллельное

поле \dot{B}_{\parallel}^* пазовых токов обращается в ноль всюду вне объема V_0 . Следовательно, для объема V_0 выполнены условия применимости к векторам поля формулы Стреттона [5]:

$$\begin{aligned} \dot{B}_{\parallel}^*(Q) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \dot{\delta}(M) \times \vec{\nabla}_M \left(\frac{1}{r_{QM}} \right) dV_M - \\ & - \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} (\vec{n}_M \times \dot{B}_{\parallel}^*(M)) \times \vec{\nabla}_M \left(\frac{1}{r_{QM}} \right) dS_M - \\ & - \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} (\vec{n}_M \dot{B}_{\parallel}^*(M)) \vec{\nabla}_M \left(\frac{1}{r_{QM}} \right) dS_M. \end{aligned} \quad (22)$$

Так как $(\vec{n}_M \dot{B}_{\parallel}^*(M)) = (\vec{e}_y \dot{B}_{\parallel}^*) = 0$, заключаем, что последний интеграл в (22) равен нулю. Определяют магнитное поле B_{\parallel}^* только первые два интеграла, имеющие смысл составляющих индукции, созданных изображениями отрезков пленок

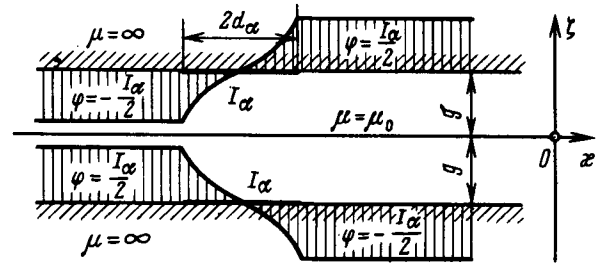


Рис. 3

пазовых токов $2I_\alpha$, расположенных в объеме V_0 , и простым слоем тока, плотностью \dot{J}_0 , распределенного по плоскостям S_0 . Следовательно, источниками

плоскопараллельного поля \dot{B}_{\parallel}^* в объеме V_0 будут:

- 1) бесконечный ряд зеркальных изображений отрезков пленок пазовых токов $2I_\alpha$;
- 2) замыкающие их поверхностные токи, распределенные на плоскостях S_0 с плотностью

$$\begin{aligned} \dot{J}_0(M) = & \frac{1}{\mu_0} \vec{n}_M \times \dot{B}_{\parallel}^*(M) = \\ = & \frac{1}{\mu_0} [\vec{e}_y \times (\dot{B}_x^* \vec{e}_x + \dot{B}_z^* \vec{e}_z)] = \frac{1}{\mu_0} (\dot{B}_z^* \vec{e}_x - \dot{B}_x^* \vec{e}_z). \end{aligned} \quad (23)$$

Периодичность и четная симметрия слоев зеркальных изображений пленок пазовых токов обуславливает подобную же периодичность и

симметрию поля \dot{B}_{\parallel}^* в объеме V_0 , а следовательно, периодичность и симметрию распределения по-

верхностного тока \dot{J}_0 на плоскостях S_0 . Каждая плоскость S_0 оказывается разделенной прямыми линиями $y = \pm l/2$, $z = \pm 2mg$, $m=0, 1, 2, \dots$,

поверхностной плотности тока \dot{J}_0 на полосы шириной $2g$, замыкающие изображения пленок пазовых токов. В результате образуется бесконечный ряд параллельных многовитковых слоев тока лестничной структуры (рис. 4).

Применив закон Ампера, можно показать, что значение тока в сечениях ($x = c_i$) замыкающих полос равно удвоенному току в тех же сечениях ($x = c_i$) лобовых частей обмоток. Следовательно, линии тока в многовитковом слое лестничной структуры непрерывны.

Определив индукцию \dot{B}_{\parallel}^* по формуле (19) и подставив ее значения в (23), вычислим распределение плотности \dot{J}_0 поверхностных токов в замыкающих полосах.

В пустом пространстве МЗИ воздушного зазора между сердечниками индуктора соответствуют две щели в плоскостях S_0 ($y = \pm l/2$) размерами ($-g \leq z \leq g$). Следовательно, для того чтобы найти поле \dot{B}_{\parallel}^* в объеме V_0 , надо из всего распре-

для той части \vec{A}_i^0 векторного потенциала \vec{A}^0 , которая является гармонической, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа в полупространстве ($\xi > 0$). Следовательно, все источники поля \vec{A}_i^0 расположены в полупространстве ($\xi < 0$). В общем случае разделить гармоническую функцию на части, источники которых расположены в разных полупространствах, сложно. Однако в нашем случае эта задача упрощается.

Векторный потенциал \vec{A}^0 может быть получен МЗИ и, следовательно, непосредственно выражается через распределение источников в неограниченном пустом пространстве. Его источниками являются параллельные многовитковые слои тока лестничной структуры (рис. 5), а источниками его

составляющей \vec{A}_i^0 будут те же слои тока, находящиеся в полупространстве ($\xi < 0$).

Заменив непрерывные распределения токов в пазовых пленках нитями токов I_{aj} [3] и поверхностных токов в замыкающих полосах последовательно соединенными отрезками нитей токов

$I_x^s = \sum_{\alpha=1}^S I_\alpha$, можно, подобно тому как это показано в [8], построить явные выражения для производных \vec{A}_i^0 , входящих в формулу (2).

На участке плоскости ($-l/2 \leq \eta \leq l/2$, $\xi = 0$), пересекающем рабочий зазор индуктора, составляющая магнитной индукции B_{xi} вблизи торцов сердечника связана с индукцией (19) отображающей функцией (6). Поэтому для производной векторного потенциала $A_{\eta i}^0$, источниками которого являются отрезки пазовых токов I_α длиной l , с достаточной точностью можно написать:

$$\begin{aligned} B_{xi} \Big|_{\xi=0} &= \frac{-\partial A_{\eta i}^0}{\partial \xi_Q} \Big|_{\xi=0} \approx \frac{-1}{w'(x)} \frac{\partial A_{\eta i}^0}{\partial z_Q} \Big|_{z=0} = \\ &= \frac{-1}{w'(x)} + \frac{\mu_0}{2\pi g} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{\lambda=1}^2 I_{aj} \sum_{v=1}^2 (-1)^{v-1} \times \\ &\times \left[\sum_{m=1}^q \frac{\tilde{y}_v \tilde{z}_{mi}}{(\tilde{x}_{aj\lambda}^2 + \tilde{z}_{mi}^2) r_{mv}} + \frac{1}{8} \sum_{m=q}^{q+1} \ln \frac{r_{mv} + \tilde{y}_v}{r_{mv} - \tilde{y}_v} \right], \quad (26) \end{aligned}$$

где $\tilde{x}_{aj\lambda} = \frac{1}{g} (x_{aj\lambda} - x_Q)$; $x_{aj\lambda} = x_\alpha \pm \frac{d_\alpha}{n} (j - \frac{1}{2})$;

$\tilde{y}_v = \frac{1}{2g} (\pm l - 2y_Q)$; $z_{mi} = -(2m+1)$; $r_{mv} = \sqrt{\tilde{x}_{aj\lambda}^2 + \tilde{y}_v^2 + \tilde{z}_{mi}^2}$.

На соседней полуплоскости ($\eta > l/2$, $\xi = 0$), расположенной вне рабочего зазора индуктора, в выражение для производной потенциала отображающую функцию вводить не следует, но надо

добавить составляющую, созданную отрезками N нитей пазовых токов I_α , заменяющих участки лобовых частей обмотки нижнего сердечника:

$$\begin{aligned} B_{xi} \Big|_{\xi=0} &= \frac{\partial A_{\eta i}^0}{\partial \xi_Q} \Big|_{\xi=0} = \frac{\mu_0}{2\pi g} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{j=1}^n I_{aj} \times \\ &\times \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{v=1}^2 (-1)^{v-1} + \left[\sum_{m=1}^q \frac{\tilde{y}_v \tilde{z}_{mi}}{(\tilde{x}_{aj\lambda}^2 + \tilde{z}_{mi}^2) r_{mv}} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{8} \sum_{m=q}^{q+1} \ln \frac{r_{mv} + \tilde{y}_v}{r_{mv} - \tilde{y}_v} \right] - \\ &- \frac{\mu_0}{4\pi g} \sum_{\alpha=1}^N I_\alpha \sum_{v=1}^2 (-1)^{v-1} \frac{\tilde{y}_{0v} z_{06}}{(\tilde{x}_\alpha^2 + z_{06}^2) r_{0v}}, \quad (27) \end{aligned}$$

где $\tilde{x}_\alpha = \frac{1}{g} (x_\alpha - x_Q)$; $\tilde{y}_{01} = \frac{1}{2g} (l_{06} - 2y_Q)$;

$\tilde{y}_{02} = \frac{1}{2g} (l - 2y_Q)$; $z_{06} = -\left(1 + \frac{h_3}{2g}\right)$;

$r_{0v} = \sqrt{\tilde{x}_\alpha^2 + \tilde{y}_{0v}^2 + z_{06}^2}$;

l_{06} — расстояние между торцами лобовых частей витка обмотки сердечника; h_3 — глубина пазов сердечника.

В (27) принято, что пазовые стержни обмотки на всей длине параллельны плоскости $\xi = 0$.

Отметим, что каждая из составляющих вектора

поля \vec{B}_i^0 , гармоническая в своем полупространстве ($\vec{B}_{\eta i}^0$ в $\xi > 0$ и $\vec{B}_{\eta e}^0$ в $\xi < 0$), содержит все три компоненты. Иначе говоря, плоскопараллельное магнитное поле в рабочем зазоре индуктора состоит из наложения трехмерных полей, компоненты $\vec{B}_{\eta i}^0$ и $\vec{B}_{\eta e}^0$ которых равны и противоположно направлены.

Заменим нижнюю половину замыкающей полосы ($-g \leq z \leq 0$) с распределенными по ней обратными токами $-\frac{1}{2} I_x^s$ отрезками нитей токов длиной τ_s , совпадающими с прямой $y = l/2$, $z = -g/2$, а торцы лобовых частей обмотки нижнего сердечника такими же отрезками нитей токов $\frac{1}{2} I_x^s$, совпадающими с прямой ($y = l_{06}/2$, $z = -(2g + h_3)/2$). Тогда, учитывая, что все отрезки τ_s нитей тока I_x^s находятся на участке зазора, где выполняется соотношение (9), производную от A_{xi}^0 на полуплоскости ($y > 0$, $\xi = 0$) определим формулой

$$B_{\eta i} \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial A_{\eta i}^0}{\partial \xi_Q} \Big|_{\xi=0} = \frac{\mu_0}{4\pi g} \sum_{s=1}^{N-1} \sum_{\lambda=1}^2 (-1)^s I_x^s \times$$

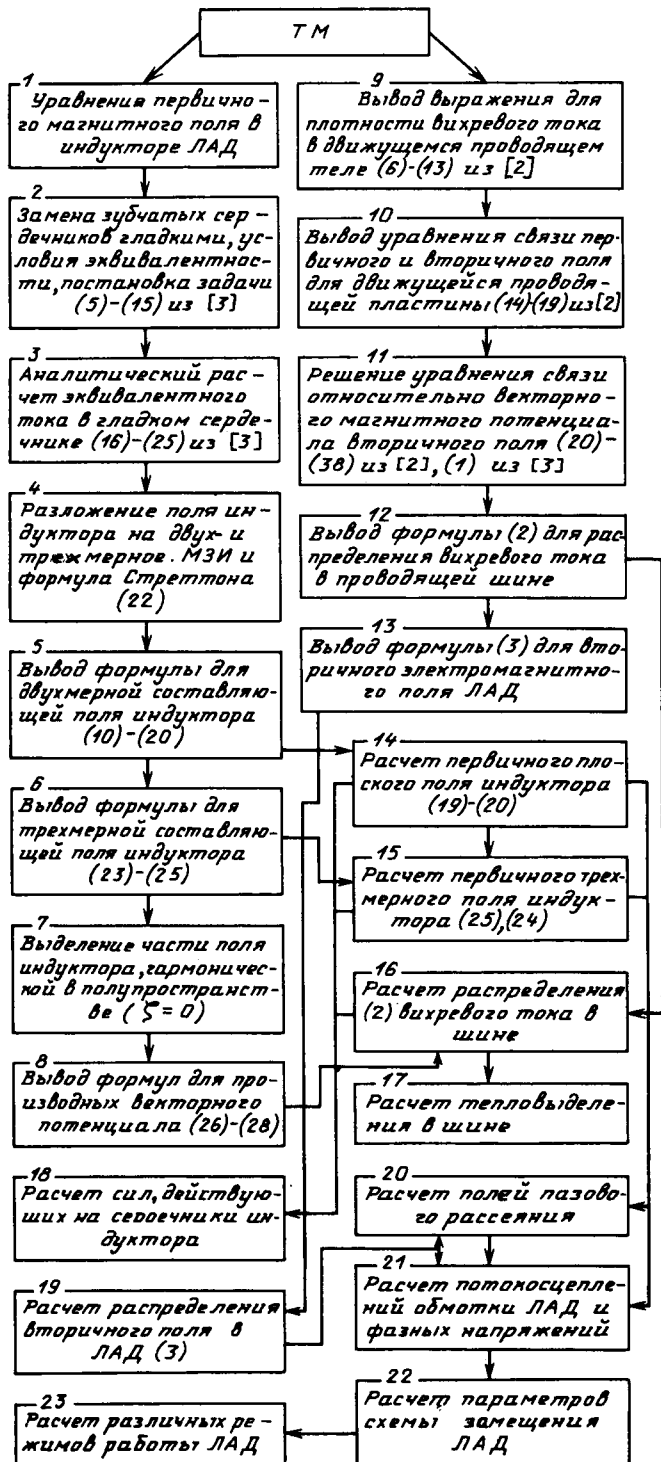


Рис. 6.

$$\times \sum_{v=1}^2 (-1)^v \left[\sum_{m=1}^q \frac{x_v \tilde{z}_{mi}}{(y_v^2 + \tilde{z}_{mi}^2) r_{mvl}} + \frac{1}{8} \sum_{m=q+1}^{q+1} \ln \frac{r_{mvl} + x_v}{r_{mvl} - x_v} + \frac{x_v z_{06}}{2(y_{0l}^2 + z_{06}^2) r_{v\lambda 06}} + \frac{x_v z_{06}}{2(y_{0l}^2 + z_{06}^2) r_{v\lambda 06}} \right] \quad (28)$$

$$\text{где } x_v = \frac{1}{g} \begin{cases} x_s - x_Q, & v=1; \\ x_{s+1} - x_Q, & v=2; \end{cases} \quad y_\lambda = \frac{\pm l - 2y_Q}{2g}; \quad y_{0\lambda} = \frac{\pm l_{06} - 2y_Q}{2g}; \quad z_{06} = - \left(1 + \frac{h_3}{2g} \right); \quad z_0 = - \frac{1}{2};$$

$$r_{mvl} = \sqrt{x_v^2 + y_\lambda^2 + z_{mi}^2}; \quad r_{v\lambda 0} = \sqrt{x_v^2 + y_\lambda^2 + z_0^2}; \quad r_{v\lambda 06} = \sqrt{x_v^2 + y_{0\lambda}^2 + z_{06}^2}.$$

В формуле (2) под знаком первого интеграла стоит быстро осциллирующая функция, поэтому этот интеграл следует вычислять по методу Филона [9]. Для его вычисления в одной точке Q требуется определить ряд значений первых и вторых производных потенциала \dot{A}_i^0 на контуре интегрирования в точках (Q, ζ_p) . Из выражения $(Q, \zeta_p) = (\kappa_Q - v\lambda\zeta_p, \eta_Q, \zeta_p)$ видно, что контур интегрирования первого интеграла из (2) является прямой линией, наклонной к оси $O\zeta$ под углом $\psi = \arctg v\lambda$. С ростом скорости v пластины угол ψ увеличивается и, если точка Q находится со стороны заднего торца индуктора ($\kappa_Q > 0$), то контур интегрирования приближается к источникам поля \dot{A}_i^0 и, следовательно, попадает в область пространства, заполненную все более интенсивным полем. При этом значение интеграла будет увеличиваться, что и объясняет возникновение шлейфа тока в проводящей пластине с задней стороны индуктора при его движении относительно пластины.

При вычислении полигона векторов плотности вихревых токов (2) на проводящей шине громоздкость формул (26) — (28) приводит к большим затратам машинного времени. Чтобы существенно сократить объем вычислений, воспользуемся гармоничностью \dot{A}_i^0 в верхнем полупространстве и локализацией его интенсивности непосредственно над рабочим зазором индуктора и представим

значения производных \dot{A}_i^0 в точках (Q, ζ_0) контура интегрирования, проходящего через точку $Q(\kappa_Q, \eta_Q, 0)$ в виде интегралов Пуассона [10] от распределений $\partial \dot{A}_{\eta\kappa i}^0 / \partial \zeta_Q$ на плоскости $(\zeta=0)$. Тогда выражения для производных будут иметь вид:

$$\frac{\partial \dot{A}_{\eta\kappa i}^0}{\partial \zeta_p}(Q, \zeta_p) = \frac{\zeta_p}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \dot{A}_{\eta\kappa i}^0}{\partial \zeta_Q} \Big|_{\zeta=0} \frac{d\kappa_m d\eta_m}{r_{pQM}^2}; \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_{\eta\kappa i}^0}{\partial \zeta_p \partial \kappa_Q}(Q, \zeta_p) =$$

$$= \frac{3\zeta_p}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \dot{A}_{\eta\kappa i}^0}{\partial \zeta_Q} \Big|_{\zeta=0} \frac{\kappa_m - \kappa_Q + v\lambda\zeta_p}{r_{pQM}^3} d\kappa_m d\eta_m. \quad (30)$$

$$\text{где } r_{pQM} = \sqrt{(\kappa_m - \kappa_Q + v\lambda\zeta_p)^2 + (\eta_m - \eta_Q)^2 + \zeta_p^2}.$$

Формулы (29), (30) позволяют построить следующий более экономный алгоритм вычисления полигона векторов плотности вихревых токов в проводящей шине.

1. По формулам (26) — (28) вычислить значения первых производных потенциала \dot{A}_i^0 в узлах прямоугольной сетки, покрывающей область $[-L - l/2 < \kappa < l/2, 0 \leq \eta \leq h, \xi = 0]$.

2. По формулам (29), (30) вычислить значения первой и второй производных потенциала \dot{A}_i^0 в узловых точках квадратурной формулы Филона [9].

3. По формуле (2) вычислить значения плотности вихревого тока в неограниченной проводящей пластине в узлах прямоугольной сетки на участке $[-L - l/2 \leq \kappa \leq l/2, 0 \leq \eta \leq h/2, \xi = 0]$, включая его контур (первый интеграл).

4. Подставив найденные в п. 3 значения $J_\eta^n(\tau, h/2)$ во второй и третий интегралы формулы (2), вычислить их значения в узлах того же участка и просуммировать со значениями плотности тока, вычисленными в п. 3.

Зная распределение первичного поля \dot{B}^0 в зазоре индуктора (19), (20), (24), (25) и вихревого тока \dot{J} в проводящей шине, нетрудно вычислить рабочие характеристики проектируемой конструкции ЛАД.

Таким образом, математическая модель электромагнитного процесса в ЛАД не включает в себя численных решений функциональных уравнений, а содержит аналитические зависимости векторов поля от исходно заданных величин: токов (I_α, ω, n) в обмотке индуктора; размеров $L, l, p, g, \tau_\alpha, h_\alpha, d_\alpha, \kappa_\alpha$ сердечников и $l_{об}, N_\alpha$ обмотки, характеризующих конструкцию индуктора, размеров ν, h проводящей шины (вторичного элемента ЛАД) и электромагнитных характеристик сред μ_0, γ , из которых изготовлены детали ЛАД. Следовательно, математическая модель является аналитической, так же как и включающий ее фрагмент базы научных знаний.

Расчет электромагнитного процесса в ЛАД с ее помощью сводится к вычислению по формулам:

значений токов $\dot{I}_{\alpha j l}$ в нитях и их расположения на поверхностях рабочего зазора гладкого сердечника (формулы (26) — (30) из [2]);

распределения индукции \dot{B}^0 первичного магнитного поля в рабочем зазоре ЛАД [формулы (19), (20), (24), (25)];

распределения производных векторного потенциала \dot{A}_i^0 на поверхности $\xi = 0$ [формулы (26) — (28)] и в полупространстве $\xi > 0$ [формулы (29), (30)];

распределения векторов плотности вихревых токов \dot{J} в шине [формулы (2)];

распределения векторов вторичного электромагнитного поля \dot{B}^B [формулы (3)];

рабочих характеристик конструкции ЛАД. На рис. 6 показана структурная схема аналитического фрагмента базы научных знаний для АСНИ и САПР ЛАД, составленная в соответствии с изложенным ходом дедуктивных преобразований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тозони О. В. О создании базы научных знаний для АСНИ и САПР устройств электротехники. — Электричество, 1988, № 1.
2. Тозони О. В. Аналитический расчет электромагнитного процесса в линейном двигателе. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1977, № 5.
3. Построение расчетной модели поля в зазоре линейного асинхронного двигателя / М. Э. Мамедшахов, М. М. Нежинская, Н. С. Николаева, О. В. Тозони. — Электричество, 1985, № 10.
4. Мамедшахов М. Э., Тозони О. В. Применение метода зеркальных изображений к расчету поля в ограниченном плоском зазоре магнитных систем. — Электричество, 1986, № 9.
5. Стреттон Дж. А. Теория электромагнетизма. — М.: Гостехиздат, 1948.
6. Тозони О. В. Математические модели для расчета электрических и магнитных полей. — Киев: Наукова думка, 1964.
7. Коппенфельс В., Штильман Ц. Практика конформного отображения. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.
8. Первичное магнитное поле в зазоре статора линейного асинхронного двигателя / М. Э. Мамедшахов, М. М. Нежинская, Н. С. Николаева, О. В. Тозони. — Электричество, 1986, № 11.
9. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. — М.: Гостехиздат, 1956.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. — М.: Л.: ГИТТЛ, 1948.

[15.09.88]

Обобщенная структурная модель многофазных обмоток электрических машин

ДЕГТЕВ В. Г., канд. техн. наук

Одесский политехнический институт

В классической теории обмоток электрических машин переменного тока [1] основное внимание уделено изучению свойств только двух разновидностей, характеризующихся целыми или дробными числами пазов на полюс и фазу q . Главным достоинством этой теории следует считать создание аналитических методов определения основных электромагнитных свойств обмоток уже в начальной стадии проектирования: при выборе исходных данных для формирования обмоток.

Развитие техники и, в частности, необходимость проектирования высокоиспользованных модификаций специальных электрических машин (многоскоростных асинхронных двигателей с переключением полюсов, различные виды преобразователей с вращающимся магнитным полем и др. [2—5] потребовали создания нетрадиционных обмоток (НО), которые отличаются от ранее применяемых своеобразным распределением активных катушечных сторон (АКС) вдоль развертки рабочего воздушного зазора и поэтому не подчиняются закономерностям классической теории.

Некоторые из методов проектирования НО [6—8] отличаются простотой формирования распределения АКС. Комплексное применение этих методов позволяет на базе одних и тех же исходных данных получать рациональные, т. е. удовлетворяющие заданному диапазону технических требований, варианты НО. Однако эти варианты не являются единственными и сопровождаются рядом побочных нерациональных решений. Отсеять их в начальной стадии проектирования не удастся, так как анализ свойств НО в настоящее время возможен только после окончания формирования распределения АКС конкретного варианта. Универсальный метод [9], применяемый обычно для решения этой задачи, является одной из самых трудоемких фаз проектирования НО. Несоответствие простоты вариантного формирования распределений АКС и невозможности предварительного анализа их свойств существенно осложняет процесс проектирования НО и снижает его эффективность. Причиной этого несоответствия является отсутствие обобщенного подхода при изучении НО.

В статье поставлена задача разработки обобщенной структурной модели однослойных многофазных обмоток с целью последующего создания методик их синтеза и анализа.

Условимся, что понятию однослойные многофазные обмотки (ОМО) соответствует множество R_m обмоток с числом фаз m , АКС которых конструктивно идентичны и равномерно распре-

лены вдоль рабочего воздушного зазора. Пренебрегая влиянием лобовых частей обмоток и используя общепринятую при исследовании их свойств систему допущений [10], осуществим переход от множества R_m реальных объектов к множеству S_m структурных моделей (СМ). Любая СМ из множества S_m является пространственно-временной, т. е. характеризуется совокупностью пространственных и временных параметров. Оба вида структурных параметров (СП) могут быть выражены угловыми величинами в координатах пространства α_{xj} и времени α_{ti} . С целью упрощения СМ и обеспечения универсальности условимся обозначать СП в виде чисел, кратных базовым значениям углов $\alpha_{ax}(t)$:

$$\alpha_{\delta x} = 360^\circ / z_0 \quad (1)$$

$$\alpha_{\delta t} = 180^\circ / m, \quad (2)$$

где z_0 — число АКС повторяющейся части ОМО.

При этих условиях пространственные СП задаются в виде массивов порядковых номеров определенным образом сгруппированных АКС $\{x_j\}$, а временные СП — в виде массивов целых чисел $\{t_i\}$, равных относительным значениям углов сдвига токов в АКС произвольной i -й фазы относительно первой ($t_i = \alpha_{ti} / \alpha_{\delta t}$). Соответствие временных СП (t_i) и общепринятых буквенных обозначений фаз для m -фазных и трехфазных обмоток устанавливается номограммами на рис. 1.

Любую пару СП (x_j, t_i), характеризующую фазу тока и пространственное положение произвольной АКС отображаемой ОМО, назовем структурным элементом (СЭ) и условимся обозначать e_{ji} или $e(x_j, t_i)$. Обычно, при исследованиях свойств обмоток СЭ принято различным образом объединять в группы (катушка, катушечная группа, фазная зона, фаза и т. д.). Назовем группу СЭ, объединенных определенным, принятым для данного вида СМ способом, структурным блоком (СБ) и условимся обозначать его b . Таким образом, СП представляет собой совокупность всех СЭ или, что то же, — совокупность всех СБ.

При построении СМ полезно допустить возможность формирования пространственных b_x или временных b_t блоков, объединяющих в группы только пространственные или только временные СП. Обобщенный подход при исследовании ОМО может быть обеспечен только на базе такой СМ, которая содержала бы инвариантный блок [11], т. е. такой b , b_x или b_t , который остается неизменным при любой вариации исходных данных или при переходе от одного типа ОМО к другому.

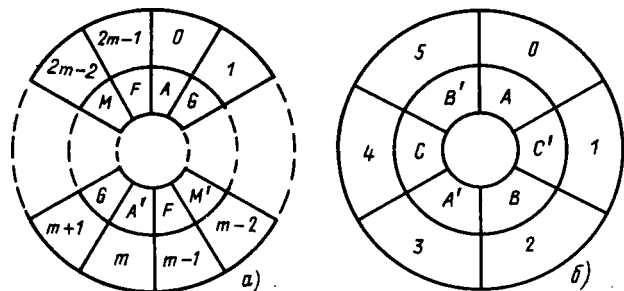


Рис. 1. Номограмма временных структурных параметров

Построим СМ на базе пространственного инвариантного блока b_{xi} , представляющего собой стабильный набор из $(2m)$ пространственных СП $\{x_{ij}\}$, в котором каждое последующее значение x_j отличается от предыдущего $x_{(j-1)}$ на значение Q , равное

$$Q = z_0 / 2m. \quad (3)$$

Учитывая соответствие чисел x_j и углов α_{xj} , нетрудно построить физическую (рис. 2, а) — в виде совокупности пронумерованных координат расположения АКС (пазов) — и структурную (рис. 2, б) модели блока b_{xi} . Последнее отображение удобнее представлять в виде матрицы-строки с регламентированной нумерацией ячеек (рис. 2, в).

Последовательное присоединение матриц-строк b_{xij} при изменении j от 1 до Q приводит к образованию пространственной СМ произвольной ОМО в матричной форме M_{ax} (рис. 3). Нумерация ячеек M_{ax} однозначно определена числом фаз m и значением Q в соответствии с алгоритмами на рис. 2, в и 3, поэтому в дальнейшем внутри ячеек не указывается, оставляя их поля свободными. Заполнение пустых ячеек матрицы M_{ax} значениями временных СП t_i в соответствии с парными комбинациями СП (x_j, t_i) равносильно переходу к полной пространственно-временной СМ, обозначаемой M_Q .

Сформируем полную матрицу M_Q , элементарной электрической машины с $2m$ -фазной обмоткой, число АКС которой равно $2m$. Физическая модель такой машины (рис. 4, а) получена в результате размещения АКС (обозначены кружками) с токами всех $2m$ фаз (отличие основных фаз токов указано разными вставками кружков, а сопряженные фазы выделены двойными окружностями в z_0 пазах, равномерно распределенных по расточке статора. Соответствующая ей естественная полная СМ показана на рис. 4, б, причем по внутренней периферии окружности проставлены значения пространственных (x_j) , а по внешней — временных (t_i) СП. Матричная модель (рис. 4, в) имеет вид строки, т. е. представляет собой полный структурный блок b_0 . Назовем этот блок основным.

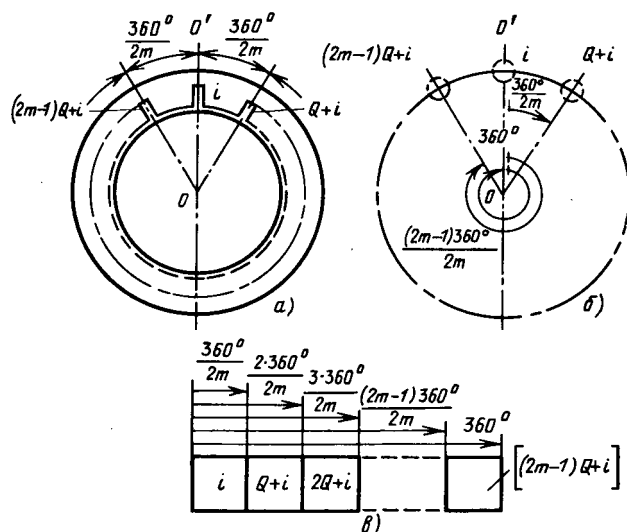


Рис. 2. Физическая (а), структурная (б) и матричная (в) модели инвариантного пространственного блока

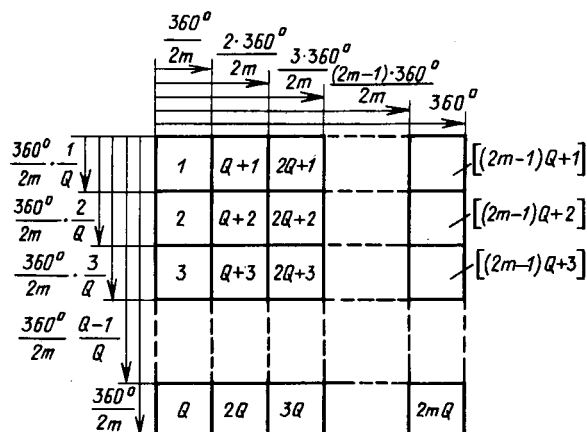
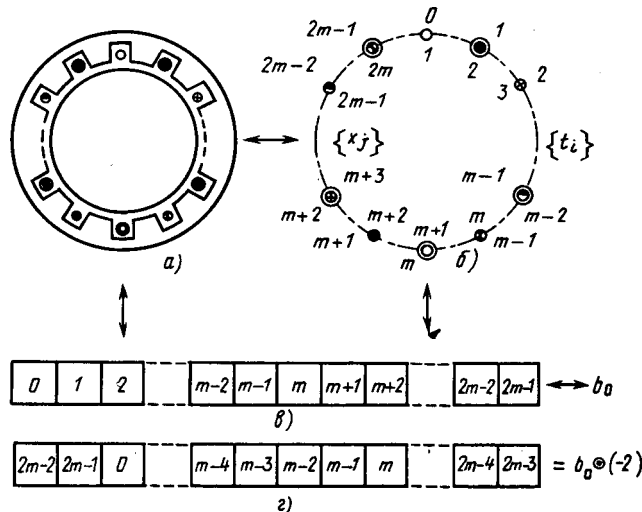


Рис. 3. Матрица пространственной структурной модели

Рис. 4. Физическая (а), структурная (б) и матричная (в) модели элементарной $2m$ -фазной электрической машины

В ячейках блока b_0 указаны значения только временных СП, так как пространственные однозначно определены ранее рис. 2, v и при $Q=1$ составляют: $\{x_j\}=\{1, 2, 3, \dots 2m\}$.

В одной и той же геометрии элементарной $2m$ -фазной электрической машины могут быть реализованы различные варианты размещения АКС. В блоке b этому соответствует вариация временных СП ($\{t_i\}=\text{var}$) при неизменных пространственных ($\{x_j\}=\text{const}$). Вариация может быть реализована или непосредственным изменением значений t_i или их перестановкой в инвариантном пространственном блоке b_{xu} . С учетом возможных вариаций полная матрица M_Q произвольной $2m$ -фазной ОМО, повторяющаяся часть которой состоит из z_0 АКС, содержит Q строк, каждая из которых представляет собой одну из разновидностей блока b .

Для обеспечения полноты структурной модели нельзя исключать случаи, когда в отдельных блоках число временных СП оказывается меньше числа пространственных. Назовем такие блоки неполными или дополнениями и условимся обозначать их сочетанием символов $\setminus b$. Число отсутствующих временных СП в дополнении может быть произвольным. В предельном случае блок может характеризоваться полным отсутствием временных СП, т. е. вырождаться в пространственный блок b_x . Любая матрица, содержащая хотя бы один неполный блок, также называется неполной или матрицей-дополнением и обозначается $\setminus M_Q$.

На основании изложенного составим алгоритмы формирования множеств S_m обобщенных СМ. Блок-схема алгоритмов приведена на рис. 5. Из схемы следует, что методика формирования результирующих множеств базируется на последовательном повышении степени интеграции подмножеств структурных составляющих, обозначенных на рис. 5 фигурными скобками. По мере возрастания уровня интеграции они располагаются в следующем порядке:

подмножества пространственных X и временных T СП;

подмножество E структурных элементов;

подмножество $B \setminus B$ дополнений ($\setminus B$) и блоков (B);

ограниченные множества матриц-дополнений $\setminus M$ и полных матриц M , составляющие в совокупности исследуемое множество S_m .

Блок-схема подчеркивает ключевую роль инвариантного пространственного блока b_{xu} тем, что формирование составляющих со степенью интеграции от дополнения ($\setminus b$) и выше возможна только с его использованием. Основной алгоритм формирования S_m отображен связями, выполненными сплошными, а вариант с предварительным синтезом СЭ — штрих-пунктирными линиями. Допускается возможность формирования ограниченных

множеств (например M и $\setminus M$) обобщенных СМ путем выделения (пунктирные линии) в подмножестве $B \setminus B$ семейств с необходимыми структурными признаками. (На схеме в качестве примера выделены семейства полных B и неполных $\setminus B$ блоков). Это позволяет отображать не только множество R_m всех реальных ОМО, но и любое включенное [12] в него подмножество с заранее заданными структурными свойствами.

Любые переходы, как от одного объекта к другому в пределах каждого подмножества, так и от одного из этих подмножеств к другому, сопровождаются изменением либо СП, либо степени интеграции. Для символического отображения этих изменений целесообразно ввести систему операционных преобразований и разработать правила их применения.

Рассмотрим параметрические операции, т. е. операции преобразования СП. Любой СЭ является функцией двух переменных, поэтому можно допустить три вида воздействия на СП: только на x_j , только на t_i и комбинированное — на x_j и t_i одновременно.

Операцию изменения только пространственного СП x_j на целое число Δx назовем умножением по x , Δx и обозначим символом \oplus :

$$e(x, t) \oplus \Delta x = e(x + \Delta x, t). \quad (4)$$

Умножение по x , Δx какого-либо СЭ равнозначно перемещению соответствующей ему АКС на Δx зубцовых делений или, что то же самое, на угол $\alpha_x = \alpha_{\delta x} \Delta x$ в прямом ($\Delta x > 0$) или обратном ($\Delta x < 0$) направлениях отсчета углов. Выделим два частных случая умножения по x .

В соответствии с нумерацией ячеек матрицы на рис. 3 умножение по x $\Delta x = mQ$ какого-либо СЭ отображает перенос соответствующей ему на физической модели АКС в положение, диаметрально противоположное исходному. Назовем такое умножение пространственной инверсией и условимся обозначать его горизонтальной чертой над символом:

$$\bar{e}(x, t) = e(x, t) \oplus mQ = e(x + mQ, t). \quad (5)$$

Умножение по x можно локализовать в пределах произвольно выбранного блока b_j матрицы M_Q введением следующих условий (см. рис. 2, v):

$$\begin{aligned} \Delta x &= Qk; \\ x + Qk, \text{ если } j < (x + Qk) < \\ &< (2m - 1)Q + j; \\ \overline{x + Qk} &= \{x + Q(k - 2m), \text{ если } (x + Qk) > \\ &> (2m - 1)Q + j; \\ &x + Q(k + 2m), \text{ если } b < 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь j — порядковый номер строки, занимаемой блоком b_j .

Умножение по такому правилу всех СЭ блока приводит к циклической перестановке их временных СП. Назовем эту разновидность умножения по x циклическим умножением и обозначим сочетанием символов « $\odot C^k$ ».

Операцию изменения только временного СП t_i на целое число Δt назовем умножением по t , Δt и обозначим символом « \odot »:

$$e(x, t) \odot \Delta t = e(x, t + \Delta t). \quad (7)$$

Умножение по t , Δt какого-либо СЭ равнозначно изменению фазы тока в соответствующей ему АКС на угол $\alpha_t = \alpha_{\delta t} \Delta t$ при неизменном положении в пространстве. Частный случай умножения по t при $\Delta t = m$ назовем временной инверсией и условимся обозначать волнистой чертой над символом:

$$\tilde{e}(x, t) = e(x, t) \odot m = e(x, t + m). \quad (8)$$

Операцию одновременного умножения обоих видов СП на величины Δx и Δt назовем полным умножением и обозначим символом « $*$ »:

$$e(x, t) * (\Delta x, \Delta t) = e(x + \Delta x, t + \Delta t). \quad (9)$$

Полное умножение при $\Delta x = mQ$ и $\Delta t = m$ назовем полной инверсией и обозначим сочетанием горизонтальной и волнистой черточек над символом:

$$\tilde{\tilde{e}}(x, t) = e(x, t) * (mQ, m) = e(x + mQ, t + m). \quad (10)$$

Особое значение имеет разновидность полного умножения, не перемещающая структурные элементы за пределы рассматриваемого блока и представляющая собой сочетание циклического и временного умножения. Обозначим операцию одновременного умножения на « C^k » и по t , ($\Delta t = l$) через « $e^{k,l}$ » и назовем блочным умножением. Сущность этой комбинации операции раскрывается соотношением:

$$e(x, t) e^{k,l} = e(x, t + l) \cdot C^k = e(\overline{x + kQ}, t + l), \quad (11)$$

где $\overline{x + kQ}$ определяется по (6).

К важнейшим свойствам операции $e^{k,l}$ относятся следующие.

Блочное умножение при $k = 2mn_1$ и $l = 2mn_2$ (n_1, n_2 — любые целые числа) не изменяет параметров структурных элементов, называется единичной блочной операцией и обозначается символом «1»

$$e^{2mn_1, 2mn_2} = 1. \quad (12)$$

Последовательное применение любого числа исходных блочных операций, обозначаемое про-

становкой между соответствующими $e^{k,l}$ знака \otimes , эквивалентно выполнению одной блочной операции, показатели которой являются алгебраической суммой показателей исходных e по типам k и l :

$$e^{k_1, l_1} \otimes e^{k_2, l_2} = e^{k_1 + k_2, l_1 + l_2}. \quad (13)$$

Легко убедиться, что блочное умножение коммутативно относительно последовательного выполнения, т. е.:

$$e^{k_1, l_1} \otimes e^{k_2, l_2} = e^{k_2, l_2} \otimes e^{k_1, l_1}. \quad (14)$$

Любой вид умножения применим как к отдельным СЭ, так и к произвольной их совокупности (неполные или полные блоки, матрицы). При умножении по x или по t совокупностей СЭ преобразованию подвергаются пространственные или временные, а при полном умножении те и другие СП одновременно всех СЭ данной совокупности. Например, умножение по t , $\Delta t = -2$ блока b_0 элементарной многофазной обмотки на рис. 4, в приводит его к виду, представленному на рис. 4, г.

Рассмотрим далее групповые операции преобразования, условно подразделенные на интегральные (ИО) и дифференциальные (ДО). Интегральные операции служат для получения составных систем СЭ, а ДО — для подразделения таких систем на составляющие.

Интегральную операцию совмещения неполных блоков (матриц), базирующихся на идентичных

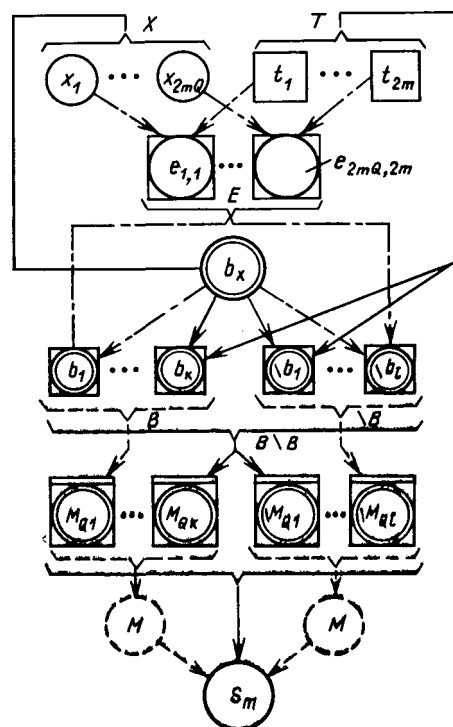


Рис. 6. Блок-схема алгоритмов синтеза множества S_m

пространственных блоках (матрицах) назовем суперпозицией и обозначим символом «0». Суперпозиция дополнений приводит к получению полных блоков или матриц:

$$\bigcup_{j=1}^n b_j = \backslash b_1 0 \backslash b_2 0 \dots 0 \backslash b_n = b. \quad (15)$$

Интегральную операцию последовательного присоединения Q блоков назовем сборкой и обозначим символом « \cup » в результате сборки Q блоков образуется матрица M_Q :

$$\bigcup_{j=1}^Q b_j = b_1 \cup b_2 \cup \dots \cup b_Q = M_Q. \quad (16)$$

Сборку идентичных блоков назовем трансляцией и обозначим символом « \cup ».

Дифференциальную операцию подразделения полных блоков (матриц) на дополнения назовем декомпозицией и обозначим символом « \oslash »:

$$\oslash b = \{\backslash b_1, \backslash b_2, \dots, \backslash b_n\}. \quad (17)$$

Дифференциальную операцию подразделения матрицы M_Q на составляющие ее блоки назовем разборкой и обозначим символом « \oslash »:

$$M_Q = \{b_1, b_2, \dots, b_Q\}. \quad (18)$$

Система операций в совокупности с обобщенной СМ составляют основу методик синтеза ОМО и анализа их электромагнитных свойств. Методика синтеза СМ базируется на преимущественном применении интегральных операций, но не исключает и других видов преобразований в качестве вспомогательных. Следует отметить, что сложность синтеза полного множества S_m определяется мощностью подмножества $B \setminus B$, т. е. числом составляющих его объектов N . Без введения определенных ограничений N может достигать весьма больших значений. Так, в случае моделирования множества

R трехфазных шестизонных обмоток на базе полного подмножества $B \setminus B$ имеем по [12]:

$$N_R = \sum_{i=0}^{2mQ} (2m)^i = \sum_{i=0}^{6Q} 6^i, \quad (19)$$

а число вариантов СМ, например уже при $Q=6$, составляет астрономическую цифру: примерно $1,23 \cdot 10^{28}$.

Но для решения практических задач в рассмотрении всех вариантов нет необходимости. Наибольший интерес представляет задача получения подмножеств СМ симметричных или слабонесимметричных ОМО, включенных в множество R . Свойства обобщенной СМ обеспечивают получение подмножеств с заданными свойствами уже на стадии формирования семейства блоков.

Проиллюстрируем одну из таких возможностей на примере методики выделения семейства B_s симметричных блоков.

Рассмотрим основной блок b_0 . Выполним его декомпозицию на два взаимноинверсных дополнения $\backslash b_{01}$ и $\backslash b_{02} = \backslash \tilde{b}_{01}$:

$$\oslash b_0 = \{\backslash b_{01}, \backslash \tilde{b}_{01}\}. \quad (20)$$

Дополнения (рис. 6, а, б) представляют собой простейшие симметричные комбинации прямых или инверсных структурных элементов с одинаковым порядком чередования временных СП. Обе комбинации являются изоморфными отображениями элементарных симметричных m -фазных обмоток, структурные модели которых приведены на рис. 6, а, б и характеризуются одной и той же совокупностью элементов симметрии [13]. Такими элементами, приводящими каждое из дополнений $\backslash b_{01}$ и $\backslash b_{02}$ к самосоответствию, является множество 0 операций блочного умножения:

$$0 = \{e^{0,0}, e^{2,2}, \dots, e^{2m-2, 2m-2}\}.$$

Операторы множества 0 образуют цветную циклическую группу $C(+m)$ [13] с единичным элементом $e^{0,0} = 1$, определяющей операцией последовательного выполнения (\otimes) блочного умножения и образующей $e^{2,2}$. Обратные элементы группы $C(+m)$:

$$e^{0,0} \otimes e^{2m, 2m} = 1; \quad e^{2k, 2k} \otimes e^{2m-2k, 2m-2k} = 1.$$

Регламентированный характер подразделения пространства в пределах блоков и матриц позволяет утверждать, что применение преобразований синтеза (суперпозиции и сборки) при использовании дополнений с симметрией $C(+m)$ приводит к формированию гомогенных систем, симметрия

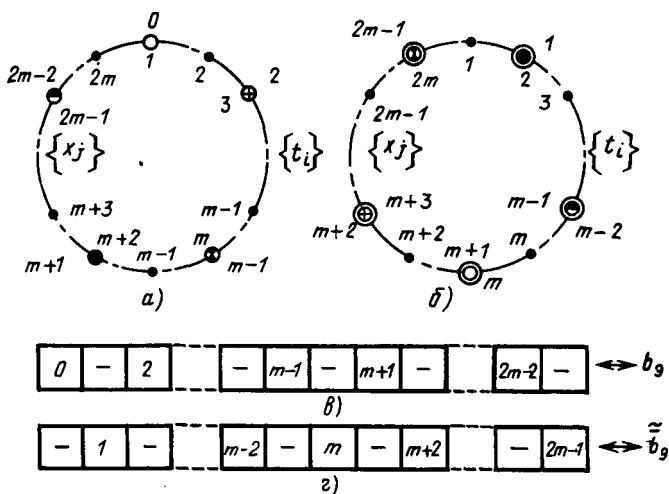


Рис. 6. Декомпозиция основного блока на два взаимноинверсных дополнения $\backslash b_{01}$ и $\backslash b_{02}$

которых не ниже указанной. Очевидно также, что циклическая перестановка является операцией, не изменяющей симметрию блока.

Поэтому семейство симметричных блоков B_S следует формировать комбинированным применением циклических перестановок и суперпозиций к исходным дополнениям $\backslash b_{01}$ и $\backslash b_{02}$, а подмножество S_{mS} матриц, отображающих симметричные m -фазные обмотки, — посредством сборки блоков семейства B_S .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рихтер Р. Обмотки якорей машин переменного и постоянного токов. — М.: ОНТИ, 1933.
2. Харитонов А. М. Многоскоростные электродвигатели в промышленных электроприводах. — М.: Энергия, 1971.
3. Войтех А. А., Киричек Г. М., Лир Э. В. Асинхронные двигатели с регулированием скорости. — Киев: Техника, 1973.
4. Мишин В. И. Статические нелинейные цепи с вращающимся магнитным полем. — Кишинев: Штиинца, 1973.
5. Попов В. И. Принципы формирования схем совмещен-

ных обмоток электрических машин. — Электричество, № 5, 1986.

6. Захаров М. К., Дегтев В. Г., Радимов И. Н. Построение многоскоростных обмоток методом фазной модуляции при сдвиге модуляционной волны. — Электричество, № 9, 1976, с. 72—76.

7. Войтех А. А. Построение и анализ полюсопереключаемых обмоток асинхронных двигателей табличным методом. — Техническая электродинамика, 1984, № 1.

8. Антоненко А. И. Составление схем двухскоростных обмоток с отношением чисел полюсов 6:4 на основе расчета конструктивных параметров. — Проблемы технической электродинамики, 1975, № 52.

9. Veinott G. G. Special harmonic magnetomotive forces in irregular windings and special connections of poly-phase windings. — IEEE Trans. on PAS, 1964, vol. 83, p. 1246—1255.

10. Иванов-Смоленский А. В. Электрические машины. — М.: Энергия, 1980.

11. Петров А. Е. Тензорная методология в теории систем. — М.: Радио и связь, 1985.

12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1984.

13. Шубников А. В., Копчик В. А. Симметрия в науке и искусстве. — М.: Наука, 1972.

[15.07.88]

УДК 621.372.001.24:681.3

Интегро-аппроксимационный алгоритм анализа переходных процессов в нелинейных электрических цепях

ВЕРЛАНЬ А. Ф., БИЛЕНКО В. И., ПЕРЕДЕРИЙ П. Т.

Институт проблем моделирования в энергетике АН УССР

Анализ переходных процессов в нелинейных электрических цепях в достаточно общем случае сводится [1—6] к решению задачи Коши для систем нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$A(x)\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где x — вектор переменных состояния, компонентами которого являются величины токов и напряжений соответственно индуктивных и емкостных элементов схемы; $A(x)$ — диагональная матрица нелинейных емкостей или индуктивностей; $f(t, x)$ — вектор воздействующих источников э. д. с. и тока.

Системы (1) в теоретической электротехнике решают чаще всего разностными или основанными на них методами [5, 7, 8]. Однако такие методы, наряду с простотой и универсальностью их численной реализации на ЭВМ, обладают, как известно, тем большим недостатком, что являются насыщаемыми [9].

В данной статье на основе синтеза интегрального метода расчета электрических цепей [10—13] и аппроксимационного метода (α-ме-

тода) решения дифференциальных и интегральных уравнений [14—16] рассмотрен вопрос построения ненасыщаемого алгоритма анализа переходных процессов в нелинейных электрических цепях, описываемых системами дифференциальных уравнений вида (1). При этом предполагается, что элементы матрицы $A(x)$ и вектора f являются алгебраическими многочленами соответствующего числа переменных. Для таких систем, по-видимому, впервые в [6] были построены весьма эффективные, но теоретически не обоснованные алгоритмы расчета электрических цепей на основе использования рядов по смещенным полиномам Чебышева первого рода. С этими алгоритмами, в частности, сравнивается предлагаемый интегро-аппроксимационный алгоритм.

Алгоритм. Во избежание громоздкости выкладок, не огирая общности рассуждений, сущность интегро-аппроксимационного алгоритма изложим на примере нелинейной цепи, описываемой одним уравнением вида (1), в котором

$$A(x) = \sum_{k=0}^r a_k x^k(t), \quad f(t, x) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^M b_{ij} t^i x^j(t), \quad (2)$$

где a_k и b_{ij} — постоянные коэффициенты, $r, m, M \in N$.

Отметим, что обобщение алгоритма с одного уравнения на систему уравнений на основе результатов 17, 18 представляет в основном не принципиальные, а технические трудности. В соответствии с интегральным методом расчета электрических цепей 11, 12 с учетом (2) перейдем от задачи (1) путем интегрирования (1) на промежутке $[0, t]$ к эквивалентному интегро-функциональному уравнению типа Вольтерра:

$$g[x(t)] = g(x_0) + \int_0^t f[s, x(s)] ds, \quad (3)$$

где

$$g[x(t)] = \sum_{k=0}^r \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}(t). \quad (4)$$

Согласно α -методу [14, 15] поставим уравнению (3) в соответствие приближенно интегро-функциональное уравнение

$$g[x_n(t)] = g(x_0) + \int_0^t f[s, x_n(s)] ds - \varepsilon_n(t). \quad (5)$$

Здесь $x_n(t)$ — решение этого уравнения, представляющее собой алгебраический многочлен степени не выше n одного из следующих видов:

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k \text{ или } x_n(t) = \sum_{k=0}^n \beta_k T\left(\frac{2t}{H} - 1\right), \quad (6)$$

с неизвестными коэффициентами α_k (или β_k), $\varepsilon_n(t)$ — невязка-многочлен

$$\varepsilon_n(t) = \sum_{k=n+1}^N \tau_k T_k\left(\frac{2t}{H} - 1\right), \quad (7)$$

где

$$N = \max(nr, m + Mn + 1); \quad (8)$$

$T_k(z)$ — многочлен Чебышева первого рода;

$$T_k(z) = \cos k \arccos z = \sum_{j=0}^k c_{jk} z^j, \quad z \in [-1, 1]; \quad (9)$$

τ_k — неизвестные вспомогательные параметры.

Формулы для определения чисел c_{jk} хорошо известны в численном анализе [9, 14]. Для нахождения коэффициентов α_k (или β_k) и τ_k рассмотрим, следуя [18, 19], итерационную схему

$$a_0 x_{nv}(t) = g(x_0) - \sum_{k=1}^r \frac{a_k}{k+1} x_{nv}^{k+1}(t) +$$

$$+ \int_0^t g[s, x_{nv-1}(s)] ds - \varepsilon_{Nv}^v(t), \quad (10)$$

где $v=1, 2, \dots$ — номер шага итерационного процесса; $x_{nv}(t)$ и $\varepsilon_{Nv}^v(t)$ — многочлены соответствующего вида (6) и (7) с коэффициентами α_{kv} (или β_{kv}) и τ_{kv} на v -м шаге итераций.

Приравнявая в (10) при каждом $v=1, 2, \dots$ согласно (2), (4) и (6)—(9) коэффициенты при одинаковых степенях t , получаем для α_{kv} и τ_{kv} некоторую систему из $(N+1)$ -го линейного алгебраического уравнения. В простейшем случае, когда $r=0$ и $a_0=1$ такая система принимает вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 & d_{0,n+1} \dots d_{0N} \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 & d_{1,n+1} \dots d_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & d_{n,n+1} \dots d_{nN} \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & d_{n+1,n+1} \dots d_{n+1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots d_{N,N} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{0,v} \\ \alpha_{1,v} \\ \vdots \\ \alpha_{n,v} \\ \tau_{n+1,v} \\ \vdots \\ \tau_{N,v} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_0 \\ G_1\left(\frac{v-1}{\alpha}\right) \\ \vdots \\ G_n\left(\frac{v-1}{\alpha}\right) \\ \vdots \\ G_N\left(\frac{v-1}{\alpha}\right) \end{vmatrix}, \quad (11)$$

где $\{d_{ik}\}_{i,k=0}^N$ — коэффициенты при t^i , полученные в результате разложения многочлена $t_k\left(\frac{2t}{H} - 1\right)$ по степеням t согласно (10) и очевидным образом выражающиеся через коэффициенты c_{jk} ; $\alpha := (\alpha_{0,v-1}, \dots, \alpha_{n,v-1})$, $G_i\left(\frac{v-1}{\alpha}\right)$ — коэффициенты разложения по степенным t^i многочлена

$$\int_0^t g[s, x_{n,v-1}(s)] ds.$$

Численные эксперименты на ЭВМ. С целью проверки эффективности (в смысле точности и числа операций) изложенного алгоритма и сравнения его с другими алгоритмами рассмотрим нелинейную электрическую цепь, состоящую из трех ветвей, содержащих соответственно источник тока, емкостный элемент с емкостью C и резистивный элемент с квадратичной вольт-амперной характеристикой $i = \rho u^2$, где u — напряжение на ветвях цепи. Переходный процесс описывается дифференциальным уравнением

Таблица 1

Методы	δ_{05}	δ_{15}	δ_{25}	Δ
ИА-алгоритм	-0,004266	1,091652	-0,323099	0,004266
T-метод	0	1	0	0,238406
ТС-метод	0	1	-0,229228	0,0195716
ТГ-метод	0	1	-0,250782	0,0273309

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ 1 - \alpha_{0,v-1}^2 \\ -\alpha_{0,v-1}\alpha_{1,v-1} \\ -\alpha_{1,v-1}^2/3 - 2\alpha_{0,v-1}\alpha_{2,v-1} \\ -\alpha_{1,v-1}\alpha_{2,v-1}/2 \\ -\alpha_{2,v-1}^2/5 \end{vmatrix}.$$

В табл. 1 даны значения коэффициентов α_{kv} многочлена $x_{2v}(t)$ и величины

$$\Delta = \max_{i=0,5} \Delta(t_i) := \max_{i=0,5} |x(t_i) - x_{2v}(t_i)|$$

$$C \frac{du}{dt} + \rho u^2 = J \quad (12)$$

с начальным условием $u(0)=0$. Пусть $J=0,1$; $C = \frac{5}{30}$, $\rho = \frac{5}{18}$, тогда уравнение (12) принимает вид

$$\dot{x}(t) = 1 - x^2(t), \quad x(0) = 0, \quad (13)$$

где $x(t) = \frac{5}{3} u(t)$, $t \in [0, H]$ и точное решение $x(t) = \tanh t$.

В соответствии со схемой (10—(11) многочлены $x_{nv}(t)$ ищем из интегрального уравнения вида

$$x_{nv}(t) = t - \int_0^t x_{nv}^2(s) ds - \sum_{i=n+1}^{2n+1} \tau_{iv} T_i \left(\frac{2t}{H} - 1 \right). \quad (14)$$

При $n=2$ и $H=1$ для нахождения коэффициентов α_{kv} многочлена $x_{2v}(t) = \alpha_{0v} + \alpha_{1v}t + \alpha_{2v}t^2$ необходимо использовать в (14) следующие смещенные многочлены Чебышева [14]:

$$\begin{aligned} T_3(2t-1) &= 32t^3 - 48t^2 + 18t - 1; \\ T_4(2t-1) &= 128t^4 - 256t^3 + 160t^2 + 32t + 1; \\ T_5(2t-1) &= 512t^5 - 1280t^4 + 1120t^3 - 400t^2 + 50t - 1. \end{aligned}$$

Система (11) в этом случае примет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & -32 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 160 & -400 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & -256 & 1120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 128 & 1280 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 512 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{0v} \\ \alpha_{1v} \\ \alpha_{2v} \\ \tau_{3v} \\ \tau_{4v} \\ \tau_{5v} \end{vmatrix} =$$

при $t_i = 0, 2i$, $i = 0, 5$, полученные при решении уравнения (13) методами, рассмотренными в работе [20, табл. 2], а также по схеме данной работы (ИА-алгоритм) при $v=5$ и начальном приближении $x_{20}(t) = t^2$.

В табл. 2 приведены значения точного решения $x(t) = \tanh t$ уравнения (13) и приближенного $x_{5,6}(t)$ в точках $t=0; 0,25; 0,5i$, $i=1,5$; причем значение $x_{5,6}(t)$ определялось как

$$x_{5,6}(t) = \sum_{k=0}^5 \beta_{k6} T_k \left(\frac{2t}{H} - 1 \right), \quad H=2,5,$$

где $\{\beta_{k6}\}_{k=0}^5 = \{0,666248; 0,466395; -0,178571; 0,031248; 0,004546; -0,004612\}$, а также следующие приближенных решений уравнения (13), построенных в [8]:

$$x_T(t) = t - t^3/3 + 2t^5/3;$$

$$x_D(t) = 1 - e^{-1,57t} + 0,6e^{-3,14t} - 0,1e^{-5,71t}.$$

$$x_H(t) = 1 - \frac{3-2t}{3+t+t^2};$$

$$x_C(t) = 1 - e^{-2t}(1+t-t^3/3).$$

Из табл. 1 и 2 видно, что методы, рассмотренные в [20] и [8], аппроксимируют решение $x(t)$ уравнения (13) более точно, чем ИА-алгоритм в некоторой достаточно малой окрестности точки $t=0$, а функции $x_D(t)$, $x_H(t)$ и $x_C(t)$ — при $t=\infty$. Однако равномерная погрешность на интервале $[0; 2, 5]$ меньше для ИА-алгоритма. Этот вывод хорошо согласуется с теоретическими результатами работ [14, 15, 18].

О скорости сходимости рассматриваемого интегро-аппроксимационного алгоритма можно су-

Таблица 2

t	$\tanh t$	$x_{56}(t)$	$x_T(t)$	$x_D(t)$	$x_H(t)$	$x_C(t)$
0	0,00000	0,00081	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,25	0,24492	0,24569	0,24544	0,23663	0,24812	0,24815
0,5	0,46212	0,46148	0,47917	0,43316	0,46667	0,46351
1,0	0,76159	0,76205	1,33373	0,71390	0,80000	0,77444
1,5	0,90515	0,90532	4,96875	0,85820	0,77778	0,93154
2,0	0,96403	0,96335	20,66667	0,93507	1,11111	0,99389
2,5	0,98861	0,98525	60,89583	0,97039	1,17021	1,03453
∞	1,00000	—	∞	1,00000	1,00000	1,00000

дить из следующего вывода:

n	2	3	4	5	
$\Delta_{nv}(H)$	0,21	0,01	0,005	0,003	
n	6	7	8	9	10
$\Delta_{nv}(H)$	2. E-4	1. E-4	4. E-5	3. E-6	4. E-7

Здесь

$$\Delta_{nv}(H) = \max_{i=0,10} |x(t_i) - x_{nv}(t_i)|, \quad t_i = iH/10, \quad H=2,5;$$

а число итераций для различных n колеблется от трех до семи.

В табл. 3 аналогично [6] приведены относительные погрешности $\delta(t_i) = |x(t_i) - x_{35}(t_i)| / x(t_i)$

$$\begin{aligned} \text{многочлена } x_{35}(t) = & 0,70112 + 0,45226 \left(\frac{2}{3}t - 1\right) - \\ & - 0,20629T_2 \left(\frac{2t}{3} - 1\right) + 0,05143T_3 \left(\frac{2t}{3} - 1\right), \text{ по-} \\ & \text{строенного по ИА-алгоритму, и такие же погреш-} \\ & \text{ности, приведенные в [6, табл. 1] для двух ва-} \\ & \text{риантов предложенного там метода и, в частности,} \\ & \text{для многочлена (первый вариант) } x_3(t) = \\ & = 0,75035 + 0,37996 \left(\frac{2t}{3} - 1\right) - 0,18435 T_2 \left(\frac{2t}{3} - \right. \\ & \left. - 1\right) + 0,04668 T_3 \left(\frac{2t}{3} - 1\right). \end{aligned}$$

Как видно из табл. 3, изложенный интегро-аппроксимационный алгоритм при той же степени многочлена на всем интервале дает более высокую точность, чем оба варианта метода из [6], уступая, однако, им в количестве арифметических операций. Таким образом, эти подходы хорошо дополняют друг друга в зависимости от предъявляемых априорных требований к основным вычислительным характеристикам алгоритмов — точности получаемых решений, быстродействию и объему памяти.

Отметим в заключение, что результаты данной работы были частично анонсированы в [16, 18, 19], а также в [14, 15], где, в частности, указаны такие важные достоинства и преимущества интегро-аппроксимационного алгоритма, как теоретическая обоснованность, ненасыщаемость и максимально возможная по порядку

(или асимптотически) точность получаемых полиномиальных решений.

Выводы. 1. Интегро-аппроксимационный алгоритм позволяет с максимально возможной по порядку точностью рассчитывать как линейные, так и полиномиально-нелинейные цепи.

2. Алгоритм теоретически обоснован и апробирован при решении на ЭВМ тестовых примеров.

3. Алгоритм является ненасыщаемым, что особенно важно при решении жестких систем дифференциальных уравнений.

4. Анализ и сопоставление полученных результатов с известными ранее показывают высокую эффективность интегро-аппроксимационного алгоритма в смысле точности, числа операций и объема памяти.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессонов Л. А. Переходные процессы в нелинейных электрических цепях со сталью.— М.: Госэнергоиздат, 1951.
2. Хьюз В. Нелинейные электрические цепи.— М.: Энергия, 1967.
3. Веников В. А., Головицын Б. И., Суханов О. А. Кибернетическое моделирование сложных электроэнергетических систем.— Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1970, № 4.
4. Пухов Г. Е. Дифференциальный анализ электрических цепей.— Киев: Наукова думка, 1982.
5. Проблемы численного моделирования процессов в электрических цепях / К. С. Демирчян, Ю. В. Ракитский, П. А. Бутырин и др.— Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1982, № 2.
6. Гаврилов Л. П. Расчет электрических цепей на основе разложения решения в ряды по смещенным полиномам Чебышева первого рода.— Электричество, 1988, № 1.
7. Демирчян К. С., Волков В. Н., Карташов Е. Н. Сравнительный анализ методов численного интегрирования при расчете переходных процессов в электрических цепях.— Электричество, 1976, № 9.
8. Пухов Г. Е. Перспективные методы математического моделирования энергетических объектов.— Вест. АН УССР, 1988, № 1.
9. Бабенко К. И. Основы численного анализа.— М.: Наука, 1986.
10. Гинзбург М. М. Получение интегральных уравнений для нелинейных цепей с применением операторного метода.— Электричество, 1960, № 5.
11. Пухов Г. Е. Интегральные методы расчета электрических цепей.— Теоретическая электротехника, 1966, вып. 2.
12. Верлань А. Ф. Метод интегральных уравнений в задаче описания и расчета электрических цепей.— Электронное моделирование, 1983, вып. 5, № 5.
13. Мустафа Г. М. Метод интегральных уравнений для отыскания периодических режимов цепей с ключами.— Электричество, 1983, № 1.
14. Дзядык В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.— Киев: Наукова думка, 1988.
15. Биленко В. И. О погрешности α -метода решения интегральных уравнений с полиномиальными нелинейностями.— Украинский математический журнал, 1989, вып. 41, № 4.
16. Биленко В. И. Интегро-аппроксимационные алгоритмы моделирования энергетических объектов. Опыт эксплуатации и перспективы развития АСУ энергообъектами Узбекистана / Тез. докладов научно-технич. конференции.— Ташкент: Ин-т энергетики и автоматики АН УзССР.
17. Литвиненко В. Д. Применение аппроксимационного метода к решению систем линейных дифференциальных урав-

Таблица 3

t	Относительная погрешность $\delta(t)$		
	Вариант 1 [6]	Вариант 2 [6]	ИА-алгоритм
0,3	4,11438 E-1	6,14026 E-4	2,86463 E-2
0,6	1,50110 E-1	3,32482 E-2	2,57965 E-3
0,9	7,18697 E-2	3,41230 E-2	1,01307 E-2
1,2	4,41609 E-2	2,02140 E-2	4,78687 E-3
1,5	3,26504 E-2	3,79291 E-2	2,49561 E-3
1,8	2,39040 E-2	7,89007 E-3	5,63786 E-3
2,1	1,35894 E-2	1,20685 E-2	3,39779 E-3
2,4	2,64037 E-2	9,54456 E-2	1,60459 E-3
2,7	4,75498 E-3	3,67886 E-3	3,98183 E-3
3,0	2,39591 E-3	4,43206 E-4	3,47964 E-3

нений.— Препринт АН УССР. Ин-т математики АН УССР, Киев, 1978, № 35.

18. **Биленко В. И.** Вычислительные схемы α -метода решения интегральных уравнений с полиномиальными нелинейностями. Методы алгебры и анализа / Тез. докладов Всесоюзной конференции.— Тарту: Гос. ун-т, 1988.

19. **Басов А. М., Биленко В. И., Кашпировский А. И.** Численная реализация α -метода решения одного класса диф-

ференциальных уравнений Риккати / Некоторые вопросы теории приближения функций и ее приложения.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988.

20. **Пухов Г. Е.** Аппроксимационные Т-методы моделирования дифференциальных уравнений.— Электронное моделирование.— 1984, вып. № 4.

[23.10.89]

УДК 621.3.01:51

Фильтрация колебательных составляющих свободного процесса при численном интегрировании дифференциальных уравнений линейных электрических цепей

БОРОДУЛИН М. Ю., канд. техн. наук

Ленинград

При численном моделировании сложных линейных электрических цепей возникает ряд проблем, связанных с воспроизведением свободного процесса. Известно [1], что численное интегрирование дифференциальных уравнений электрических цепей приводит к искажениям колебательных составляющих свободного процесса, которые в численном решении могут затухать (или расходиться) значительно быстрее или медленнее, чем в точном решении. Ниже будет показано, что основной практический интерес представляют случаи, когда скорость затухания колебательных составляющих увеличивается, так что каждый метод можно рассматривать как своеобразный фильтр и говорить о явлении фильтрации колебательных составляющих при численном интегрировании.

Фильтрующие свойства методов представляются одним из факторов, которые следует учитывать при выборе шага интегрирования наряду с известными [2] требованиями вычислительной устойчивости и точности. Особенно важно ясное понимание особенностей различных методов при моделировании сложных цепей, свободный процесс в которых содержит большое число существенно различающихся по параметрам колебательных составляющих. Задачей данной статьи являются анализ и представление в достаточно наглядной форме (при использовании аналогий с электрическими частотными фильтрами) фильтрующих свойств одношаговых методов — как общеизвестных, включая некоторые их модификации, так и некоторых специальных, которые обладают специфическими фильтрующими свойствами и ориентированы на решение задач определенного класса. К числу известных методов такого типа можно отнести и предложенный в [3], где прямо говорится о фильтрации группы составляющих, по своим параметрам существенно отличающихся от остальных.

Предполагается обычная для практики электротехнических расчетов ситуация, когда в задаче известны (из физических соображений, аналитических оценок и т. п.) диапазоны затуханий и частот как для основных составляющих, которые представляют интерес и должны воспроизводиться достаточно точно, так и для остальных составляющих, не представляющих интереса и обычно имеющих более высокую частоту. Характерен, в частности, случай, когда в спектре свободного процесса присутствует группа близких по параметрам составляющих, частоты которых существенно (в десятки раз и более) превосходят частоты основных составляющих. При наличии подобной исходной информации судить о воспроизведении отдельных составляющих и, следовательно, о проявлении тех или иных фильтрационных эффектов при численном интегрировании целесообразно исходя из предложенного в [1] подхода к оценке точности методов.

Свободный процесс линейной электрической цепи описывается нормальной системой n линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, характеризуемой матрицей A . Численное интегрирование этой системы каким-либо одношаговым методом с шагом $h = \text{const}$ описывается системой n линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, характеризуемой матрицей $A_p(h)$. Матрицы обеих систем A и $A_p(h)$ связаны функцией, вид которой задается численным методом:

$$A_p(h) = f_p(Ah).$$

Собственные значения матриц A и $A_p(h)$ $\lambda = \alpha + j\omega$ и $\lambda_p(h)$, определяющие отдельные составляющие свободного процесса в точном и численном решениях исходной системы дифференциальных уравнений, также связаны функцией f_p :

$$\lambda_p(h) = f_p(\lambda h).$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда обе матрицы A и $A_p(h)$ не имеют кратных собственных значений. Будем далее для краткости говорить составляющая λ (составляющая $\lambda_p(h)$), имея в виду составляющую свободного процесса в точном (численном) решении исходной системы, отвечающую этому собственному значению.

Фильтрующие свойства метода в отношении составляющей λ целесообразно оценивать по тому, как искажается ее затухание в численном решении. При этом под затуханием η колебательной составляющей понимается отношение значения ее огибающей в момент времени $t=0$ к значению при $t=h$. Для количественной характеристики фильтрующих свойств будем использовать величину искажения затухания составляющей λ , определенную в [1] как

$$\delta_\eta = \frac{\exp(\operatorname{Re} \lambda h)}{|f_p(\lambda h)|} - 1. \quad (1)$$

Положительное (отрицательное) значение искажения δ_η означает, что составляющая $\lambda_p(h)$ затухает быстрее (медленнее), чем составляющая λ .

Характеристики искажений δ_η при воспроизведении различных составляющих для большого числа одношаговых методов приведены в [4—6]. Величина δ_η по сути близка к известным характеристикам относительной устойчивости метода с функцией f_p при воспроизведении составляющей λ , однако представляется более удобной для практического применения, поскольку вытекает из выражения для относительной погрешности воспроизведения затухания.

Каждый нуль z_n или полюс z_p функции метода f_p соответствует точке комплексной плоскости λh , для которой $f_p(z_n)=0$ или $f_p(z_p)=\infty$, и с учетом (1) $\delta_\eta=\infty$ или $\delta_\eta=-1$. Полюсы функций всех применяемых методов расположены в правой полуплоскости плоскости λh и поэтому не представляют интереса с точки зрения фильтрации составляющих для электрических цепей, являющихся устойчивыми. Нули же функций методов, как правило, расположены в левой полуплоскости и поэтому играют определяющую роль в формировании фильтрующих свойств.

Характеризуя методы, будем для наглядности указывать аналогии с обычными электрическими частотными фильтрами: нижних или верхних частот, полосовым или заграждающим, резонансным. Однако идеальный электрический фильтр пропускает те сигналы, которые соответствуют области его прозрачности, с одинаковым и примерно равным единице коэффициентом передачи, в то время как численный метод может заметно и по-разному деформировать составляющие, которые должен «пропускать». Сразу же отметим, что для составляющей $\lambda=z_n/h$ метод ведет себя как резонансный «антифильтр», очень быстро подавляя ее в численном решении.

Колебательные составляющие λ характеризуются различными соотношениями затухания и частоты. Воспроизведение низкочастотных составляющих, для которых $|\alpha| \gg \omega$, по своим свойствам очень близко к воспроизведению чисто апериодических составляющих $\lambda=\alpha$ и поэтому в работе не рассматривается. Для задач электротехники наиболее типично присутствие в свободном процессе слабозатухающих составляющих широкого частотного диапазона, обусловленных высокой точностью: большинства ветвей, содержащих реактивные элементы. Таким составляющим соответствуют точки плоскости λh вдоль мнимой оси $j\omega h$ и на самой оси. Об их воспроизведении при моделировании удобно судить по искажениям незатухающих составляющих $\lambda=j\omega$, характеризуемым для каждого метода зависимостью $\delta_\eta(\omega h)$.

На рис. 1 показаны такие зависимости для группы одношаговых методов, нашедших широкое применение при моделировании электрических цепей (см., например, [7], где приведены все реализующие методы рекуррентные формулы, определяющие вид функции f_p). Видно, что явные методы

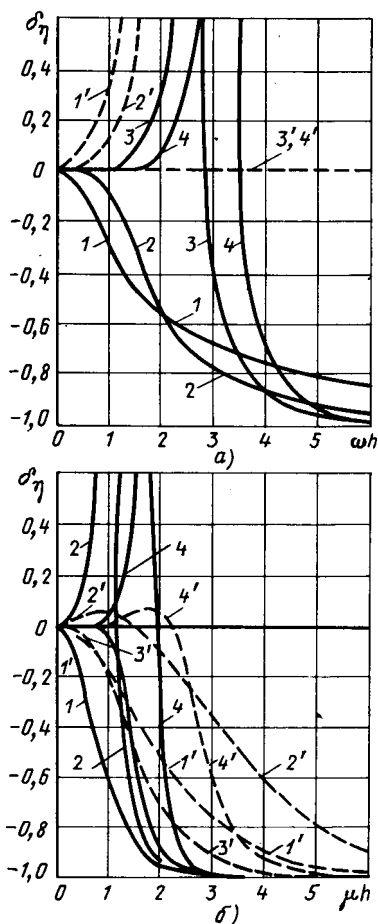


Рис. 1. Характеристики искажений затухания для составляющих $j\omega$ (а). Явные методы (сплошные линии): 1 — Эйлера; 2 — Эйлера — Коши; 3 — Рунге — Кутты четвертого порядка; 4 — Кутта — Мерсона. Неявные методы (штриховые линии): 1' — Эйлера; 2' — Эйлера — Коши; 3' — Паде первого порядка (трапеций); 4' — Паде второго порядка

Рунге—Кутта четвертого порядка и Кутта—Мерсона характеризуются полосами на оси $j\omega h$ с очень большими значениями искажений δ_η , т. е. обладают свойствами заграждающих фильтров. Причиной является то, что один из нулей функции f_p для каждого из этих методов находится достаточно близко от оси $j\omega h$ и формирует около себя область с большими значениями искажений δ_η . Неявные методы Эйлера и Эйлера—Коши подавляют составляющие $\lambda = j\omega$ тем сильнее, чем больше значение ωh , т. е. ведут себя как фильтры нижних частот. Методы Паде первого (Паде-1) и второго (Паде-2) порядков обеспечивают идеальное воспроизведение затухания всех незатухающих колебательных составляющих $\lambda = j\omega$ ($\delta_\eta = 0$ для всей оси $j\omega h$) — это общее свойство всех методов Паде [5].

Для составляющих $\lambda = j\omega$ неявные методы в любом случае не уменьшают их естественное затухание $\eta = 1$, а явные методы в пределах области вычислительной устойчивости способны его только увеличивать. Поясним, что для явных методов Рунге—Кутта четвертого порядка и Кутта—Мерсона отрезок оси $j\omega h$, лежащий внутри области устойчивости, ограничен точками, где $\delta_\eta = 0$; для явных методов Эйлера и Эйлера—Коши $\delta_\eta < 0$ вдоль всей оси $j\omega h$, что отражает известный факт их принципиальной вычислительной неустойчивости при моделировании консервативных систем. Таким образом, при воспроизведении незатухающих (и слабозатухающих) составляющих рассматриваемые методы в основном усиливают естественное их затухание, в связи с чем явление фильтрации при численном интегрировании представляет практический интерес.

Для того чтобы судить о воспроизведении колебательных составляющих с относительно большими затуханиями, целесообразно использовать кривые распределения искажений δ_η вдоль луча плоскости λh , точки которого задаются соотношением $\alpha h = \omega h = \mu h$; эти зависимости показаны на рис. 2. Различие фильтрующих свойств методов в отношении составляющих $\lambda = (-1 + j)\mu$ и $\lambda = j\mu$ обусловлено тем, что для всех явных методов и неявных методов Паде порядка выше, чем первый, один (или единственный нуль) в верхней полуплоскости λh , создающий область больших искажений δ_η , расположен достаточно близко от луча $\alpha h = \omega h$. В частности, именно этим обстоятельством обусловлен характер кривых $\delta_\eta(\mu h)$ для явных методов Эйлера—Коши и Кутта—Мерсона, которые по отношению к составляющим $\lambda = (-1 + j)\mu$ ведут себя как заграждающие фильтры.

Значение искажения δ_η показывает, как соотносятся затухания составляющих λ и $\lambda_p(h)$, однако в общем случае оно не характеризует скорость, с которой составляющая $\lambda_p(h)$ «исчезает» в численном решении. Судить об этой скорости позволяет величина $\rho_p = |f_p(\lambda h)|$, поскольку затухающая составляющая $\lambda_p(h)$ «исчезает» в численном решении, когда $\rho_p \rightarrow 0$. В [9] показано, что

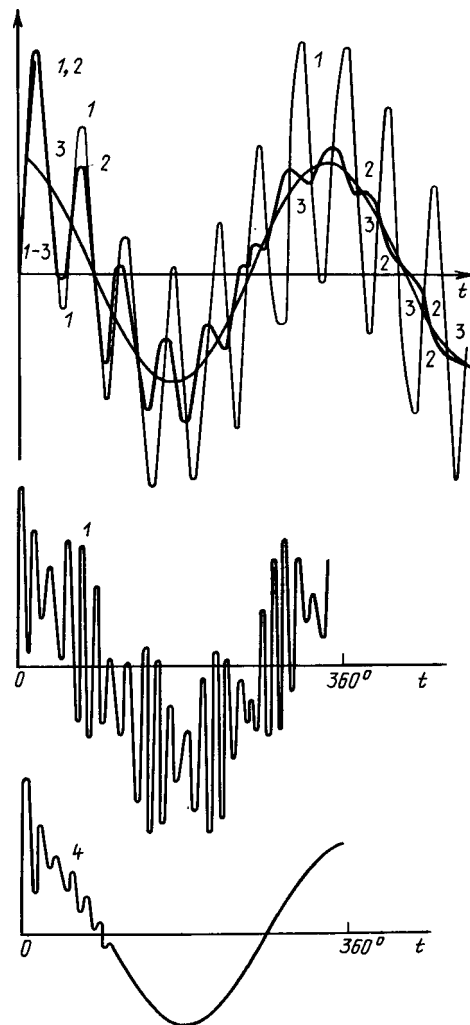


Рис. 2. Свободный процесс схемы при $N=3$ (а) и $N=2$ (б): 1 — метод Паде первого порядка; 2 — явный метод Кутта—Мерсона; 3 — неявный метод Эйлера; 4 — модификация (3)

для составляющей $\lambda_p(h)$ задается функцией времени $\rho_p^{t/h}$. Для незатухающих составляющих $\lambda = j\omega$ $\rho_p = \delta_\eta^{-1}$ и, следовательно, зависимости $\delta_\eta(\omega h)$ дают полное представление о скорости их исчезновения в численном решении. Для составляющих $\lambda = (-1 + j)\mu$ зависимости $\delta_\eta(\mu h)$ желательно рассматривать совместно с зависимостями $\rho_p(\mu h)$, приведенными в [6].

Помимо обычных методов Рунге—Кутта, функции f_p для которых следуют из разложения точного решения исходной системы в ряд Тейлора, известны так называемые тригонометрические методы Рунге—Кутта (явные и неявные), определяемые из разложения в тригонометрический ряд (см., например, [8, 9]). Эти методы предназначены для численного интегрирования систем, о которых заранее известно, что в их точном решении преобладает составляющая определенной частоты ω . В [9] показано, что задание в соответствии

с частотой ω^* параметров, определяющих коэффициенты функции такого метода, является его настройкой на идеальное воспроизведение затухания (и частоты) незатухающей составляющей $\lambda = j\omega^*$ и очень хорошее воспроизведение близких к ней составляющих, в том числе слабозатухающих. Анализ зависимостей $\delta_n(\omega h)$ в этом случае показывает, что тригонометрические методы обладают свойствами резонансных или полосовых фильтров и с точки зрения фильтрующих свойств могут рассматриваться как специальные.

Проиллюстрируем явление фильтрации колебательных составляющих на примере моделирования цепной схемы из N ячеек с собственными частотами ω_j^* ($j=1, 2, \dots, N$). Пусть $N=3$, $\omega_1^* = \omega_0$, $\omega_2^* = 165 \omega_0$, $\omega_3^* = 426 \omega_0$, где ω_0 — промышленная частота ($\omega_0 = 100 \pi$). При шаге $h \approx 28 \cdot 10^{-6}$ с (т. е. $0,5^\circ$ имеем $\omega_1^* h \approx 0,01$, $\omega_2^* h \approx 1,44$, $\omega_3^* h \approx 3,72$). Из графиков рис. 1 видно, что метод Паде-1 идеально воспроизводит затухание всех трех составляющих, метод Кутты—Мерсона подавляет третью, а неявный метод Эйлера подавляет третью и вторую составляющие. Осциллограмма свободного процесса в схеме, полученная при использовании названных методов, показана на рис. 3; о масштабе по оси времени можно судить по кривой 3, содержащей практически только составляющую промышленной частоты.

Для повышения эффективности моделирования электрических цепей используются модификации, которые создаются путем определенного изменения коэффициентов, входящих в формулу метода, по сравнению с их нормальными значениями, следующими из разложений точного решения в ряды Тейлора, Паде и т. п. Используются также специальные методы численного интегрирования, ориентированные на решение задач определенного типа и характеризующиеся новыми функциями f_p . Такие способы численного решения направлены на то, чтобы уменьшить вычислительные затраты, необходимые для достижения необходимой точности моделирования. Рассмотрим некоторые способы, интересные с точки зрения характера фильтрующих свойств и возможности целенаправленного управления ими.

Несмотря на отсутствие ограничений по условиям вычислительной устойчивости, значительное увеличение шага для методов Паде часто недопустимо по условиям воспроизведения слабозатухающих высокочастотных составляющих, частота которых подвергается сильному искажению, в то время как затухание отображается очень точно. В [1] и [11] предложены модификации методов Паде-2 и Паде-1:

$$f_p(\lambda h) = \frac{1 + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\lambda h + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2}\varepsilon\right)(\lambda h)^2}{1 - \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\lambda h + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{2}\varepsilon\right)(\lambda h)^2}; \quad (2)$$

$$f_p(\lambda h) = \frac{1 + (1/2 - \varepsilon)\lambda h}{1 - (1/2 + \varepsilon)\lambda h}, \quad (3)$$

обеспечивающие подавление искаженных высокочастотных составляющих в численном решении путем создания для них искусственных больших затуханий, которыми не обладают исходные методы. Здесь $\varepsilon > 0$ — малое число; функция (3) соответствует также известному [12] методу «затухающих трапеций». Обе модификации сохраняют присущие методам Паде-А устойчивость и высокую точность (последнее при воспроизведении составляющих при $\omega h < \pi$).

В обоих случаях функция $\delta_n(\omega h)$ является монотонно возрастающей; максимально достижимые значения искажений

$$\delta_{n \max} = \lim_{\omega h \rightarrow \infty} \delta_n(\omega h)$$

соответственно равны

$$\delta_{n \max} = 12\varepsilon/(1 - 6\varepsilon) \quad \text{и} \quad \delta_{n \max} = 4\varepsilon/(1 - 2\varepsilon), \quad (4)$$

так что эффективность модификации (2) не менее, чем в 3 раза выше, чем для модификации (3).

Проиллюстрируем это обстоятельство на примере моделирования цепной схемы с двумя ячейками ($N=2$), имеющими собственные частоты $\omega_1^* = \omega_0$ и $\omega_2^* = 100 \omega_0$, которая уже рассматривалась в [1]. При интегрировании методом Паде-1 и шаге $h = 4 \cdot 10^{-4}$ с частота второй составляющей значительно снижается (рис. 4, кривая 1), хотя и в меньшей степени, чем для метода Паде-2 (это объясняется соотношением искажений частоты для обоих методов при $\omega_2^* \approx 12,6$ — см. характеристики, приведенные в [4–6]). Применение модификации (3) при $\varepsilon = 0,05$ обеспечивает подавление искаженной высокочастотной составляющей (рис. 4, кривая 2), хотя и не столь быстрое, как для модификации (2) (см. результаты аналогичного расчета, приведенные в [1]).

Относительно меньшая эффективность модифицирования метода Паде-1 обусловлена тем, что чувствительность величин δ_n к изменению коэффициентов функции метода f_p при λh значительно ниже, чем к изменениям коэффициентов при $(\lambda h)^2$. Однако модификация (3), в отличие от (2), может быть использована при моделировании цепей методом дискретных резистивных схем, для чего необходима лишь коррекция коэффициентов в формулах параметров двухполюсников, соответствующих реактивным элементам. Обе модификации (2) и (3) обладают свойствами фильтра нижних частот, регулируемые путем выбора значений ε ; их применение целесообразно в достаточно общем случае, когда желательно подавлять все не представляющие интереса составляющие с частотами, выше заданной.

В качестве примера специальных методов рассмотрим явные методы с управляемой устойчивостью, предложенные в [1] для случая, когда мат-

рица A имеет одно или несколько собственных значений, значительно превосходящих по модулю остальные и соответствующих таким составляющим, которые заведомо не представляют интереса при моделировании. Эти составляющие при соответствующей настройке метода и работе при $h = \text{const}$ подавляются в численном решении и не вызывают вычислительной неустойчивости при значениях шага h , выбираемых по условиям воспроизведения основных составляющих. Каждый явный метод с управляемой устойчивостью создается на основе некоторого базового, под которым понимается обычный явный метод низкого порядка (например, Эйлера или Эйлера—Коши) с функцией $f_{\text{рб}}(\lambda h)$; функция метода конструируется путем умножения $f_{\text{рб}}(\lambda h)$ на многочлен, нули которого соответствуют нежелательным составляющим. Множество нулей функции метода с управляемой устойчивостью объединяет нули функции базового метода и дополнительные нули $z_{\text{нд}}$, соответствующие при шаге h подавляемым составляющим.

Каждый такой метод может быть реализован на основе экономного в вычислительном плане алгоритма, сводящегося к вычислению правых частей дифференциальных уравнений типа обычно используемых явными методами Рунге—Кутты. По своей идее такие методы близки к способу численного интегрирования, ранее предложенному в [3] однако обладают меньшей степенью общности, поскольку для их использования необходимо иметь оценки (например, с точностью до нескольких процентов) параметров тех составляющих, которые желательно подавлять. Следует, однако, отметить, что при проведении электротехнических расчетов такие оценки вполне возможны. Кроме того, методы с управляемой устойчивостью характеризуются другими функциями $f_{\text{р}}$, так что несколько иными оказываются и искажения, которым подвергаются основные составляющие процесса. Пусть, например,

$$f_{\text{р}}(\lambda h) = f_{\text{рб}}(\lambda h) [(1 - \lambda h/z_{\text{нд}})(1 - \lambda h/\bar{z}_{\text{нд}})]^R \quad (5)$$

где $z_{\text{нд}}$ — комплексное число, сопряженное с $\bar{z}_{\text{нд}}$; R — кратность дополнительного нуля ($R = 1, 2, \dots$).

Метод с функцией (5) должен быть эквивалентен базовому в пределах области устойчивости последнего [«базовая подобласть полной области устойчивости метода (5)»] и создавать достаточно большие искажения δ_{η} для составляющих вблизи точки $z_{\text{нд}}$. Такой метод ведет себя как резонансный «антифильтр», свойства которого зависят от значения кратности R .

Увеличение R расширяет полосу эффективного подавления для составляющих в окрестности точки $z_{\text{нд}}$, превращая метод (5) в заграждающий фильтр. Подобное расширение полосы целесообразно, когда координату одной подавляемой составляющей можно оценить весьма приблизительно (например, из физических соображений) выде-

ления наиболее высокочастотные контура цепи) или когда должен быть подавлен целый набор близких составляющих. Однако увеличение R допустимо до тех пор, пока не изменяет существенно характеристики точности метода в базовой подобласти. В случае если разброс собственных значений матрицы A не слишком велик (например, максимальный и минимальный модули различаются на порядок и меньше), введение близко расположенного к началу координат дополнительного нуля даже при $R=1$ нежелательно изменяет свойства метода (5) в базовой подобласти.

Ослабление этого эффекта может быть достигнуто при задании кратности в формуле (5) в виде $R=1/\kappa$, где $\kappa=2, 3, \dots$. Используя известное разложение функции $(1+x)^{1/\kappa}$ в степенные ряды, можно построить вычислительные алгоритмы, которые приближенно реализуют метод (5) при $R=1/\kappa$ на основе обычных операций с правыми частями исходной системы дифференциальных уравнений. Однако анализ зависимостей $\delta_{\eta}(\omega h)$ в окрестности точки $z_{\text{нд}}$ показывает, что при $\kappa > 1$ сформировать достаточно широкую полосу эффективного подавления на оси $j\omega h$ не удастся. Поэтому методы типа (5) в качестве заграждающих фильтров могут применяться только при условии достаточной удаленности точек $z_{\text{нд}}$ от начала координат.

Оценивая фильтрующие свойства каждого метода (модификации), следует иметь в виду, что сами по себе они не являются достоинством или недостатком. В зависимости от постановки задачи составляющие, отвечающие различным диапазонам значений ωh , необходимо воспроизводить достаточно точно или, напротив, целесообразно подавлять, поскольку даже при точном воспроизведении они неадекватно отображают физическую реальность. Так, во многих случаях наиболее высокочастотные составляющие, присутствие которых осложняет численное решение, обусловлены элементами моделируемой электрической схемы, параметры которых задаются с наименьшей точностью, и поэтому такие составляющие целесообразно подавлять. Таким образом, явление фильтрации может быть использовано для улучшения качества моделирования. При необходимости обеспечить достаточно точное воспроизведение колебательных составляющих в широком диапазоне частот особенно важен тщательный учет фильтрующих свойств методов. При этом простое уменьшение шага расчета не является гарантией повышения точности для всех составляющих; напротив, в отдельных случаях увеличение шага может улучшить качество решения.

Учет последствий фильтрации важен также при моделировании электромагнитных процессов сложных преобразовательных схем, единственным источником нелинейности которых являются вентили, причем особенно в тех случаях, когда выполняется гармонический анализ кривых ре-

жимных параметров. Для цепей с неизменной топологией свободный процесс за рассматриваемые при моделировании интервалы времени обычно в значительной степени затухает, и анализируемый полный переходный процесс в основном формируется своей вынужденной компонентой. Для преобразовательных схем с переменной топологией при каждом ее изменении происходит новый «запуск» свободного процесса, который к тому же по спектру может заметно отличаться от предшествовавшего процесса. Фильтрующие свойства метода в этой ситуации ощутимо влияют на результаты гармонического анализа.

Выводы. 1. При численном интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих линейные электрические цепи, происходит фильтрация колебательных составляющих свободного процесса. Одношаговые методы численного интегрирования могут вести себя как фильтры верхних или нижних частот, полосовые или заграждающие, резонансные фильтры.

2. Приведенные для основных одношаговых методов характеристики искажений затухания колебательных составляющих позволяют судить об их фильтрующих свойствах и предназначены для непосредственного использования при моделировании.

3. Знание характера искусственно формируемых фильтрующих свойств модификаций методов Паде первого и второго порядков позволяет повысить эффективность моделирования электрических цепей, свободный процесс которых содержит не представляющие интереса слабозатухающие высокочастотные составляющие. Если их частоты и затухания поддаются предварительной оценке, а число таких составляющих невелико, то для их подавления в численном решении более целесообразны явные методы с управляемой устойчивостью; в этом случае эффективность фильтрации зависит от соотношения частот основных и подавляемых составляющих.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бородулин М. Ю., Дижур Д. П., Кадомский Д. Е. Точность численного интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих переходные процессы в электрических цепях.— *Электричество*, 1988, № 6, с. 46—51.
2. Чуа Л. О., Лин Пен-Мин. Машинный анализ электронных схем.— М.: Энергия, 1980.— 640 с.
3. Демирчян К. С., Ракитский Ю. В. О фильтрации составляющих с большими производными в дифференциальных системах.— Доклады АН СССР. 1984, т. 279, № 3, с. 525—528.
4. Бородулин М. Ю., Дижур Д. П. Характеристики точности одношаговых методов численного интегрирования — Л.: НИИПТ, 1985. Деп. в Информэнерго 15.07.85, 1985, № 1912 эн — Д85.
5. Бородулин М. Ю. Характеристики точности и некоторые свойства методов численного интегрирования, основанных на разложении Паде — Л.: НИИПТ. 1986. Деп. в Информэнерго 22.12.86, 1987. № 2381 эн.
6. Бородулин М. Ю. Сравнительные характеристики точности и устойчивости одношаговых методов численного интегрирования — Л.: НИИПТ, 1988. Деп. в Информэнерго 27.02.89, 1989, № 3009—ЭН89.
7. Конев Ф. Б., Ярлыкова Н. Е. Методы численного решения систем дифференциальных уравнений, применяемых в цифровых моделях вентильных преобразователей. Обзорная информация.— М.: Информэлектро, 1978.— 49 с.
8. Gautschi W. Numerical integration of ordinary differential equations based on trigonometric polynomials.— *Numer. Math.*, 1961, N 25, p. 381—397.
9. Ковалев Ю. З. Методы Рунге—Кутта тригонометрического порядка относительно периода.— В кн.: Численные методы и задачи оптимизации.— Томск: Изд-во ТГУ, 1982, с. 64—71.
10. Бородулин М. Ю. О точности и вычислительной устойчивости тригонометрических методов Рунге—Кутта.— Л.: НИИПТ, Деп. в Информэнерго 26.08.87, 1988. № 2641 — эн.
11. Бородулин М. Ю. Модификация метода трапеций для повышения эффективности моделирования переходных процессов электрических цепей методом дискретных резистивных схем.— Л.: НИИПТ. 1987. Деп. в Информэнерго 08.01.88, 1988, № 2704 эн — 88.
12. Alvarado F. L., Lasseter R. H., Sanchez J. J. Testing of trapezoidal integration with damping for the solution of power transient problems.— *IEEE Trans. on PAS*, 1983, vol. PAS-102, N 12, p. 3783—3790.

[17.07.90]

Оценка потерь мощности в электросети по результатам вычислительного эксперимента

АРУТЮНЯН А. А., канд. техн. наук

Армэnergосетьпроект

Снижение технологического расхода энергии (ТРЭ) на ее транспорт и распределение в электрических сетях является одним из основных путей экономии энергоресурсов. Задача расчета и анализа ТРЭ в электрических сетях энергосистем традиционно решается различными методами: схемотехническими и вероятностно-статистическими [1, 2]. При схемотехнических методах расчета ТРЭ, используя режимные показатели узлов электрической сети, выполняют расчет установившегося режима и определяют расход мощности в сети и в ее элементах. Затем на основе тех или иных детерминистских методов осуществляется переход от расхода мощности к расходу энергии.

Вероятностно-статистические методы основаны на использовании отчетных данных о технико-экономических показателях функционирования электрических систем в качестве результатов натурного эксперимента. Это расход энергии по месяцам, кварталам или по годам. По этим ретроспективным данным осуществляется прогноз на определенный период упреждения или строится регрессионная модель зависимости расхода энергии от других, определяющих, показателей (потребление электроэнергии в сети, передача в смежные энергосистемы и др.).

Эти методы не лишены недостатков, приводящих к недостоверным результатам расчетов. Так, при схемотехнических методах выбор так называемых «характерных режимов и соединений сети» и переход от расхода мощности к расходу энергии вносят в результаты большие погрешности [2, 3]. При вероятностно-статистических методах погрешности вносят, кроме используемого метода, отчетные данные, что обусловлено погрешностями электросчетчиков, неодновременностью снятия их показаний и рядом других субъективных причин. Кроме того, замеры, проводимые в энергосистемах, охватывают в настоящее время, в основном, сети напряжением 110 кВ и выше. Результаты, получаемые с большими трудозатратами, малодостоверны, и их нельзя считать эффективными при современном уровне автоматизации обработки информации [4].

Целью настоящей статьи является изложение способа организации вычислительного эксперимента и использования полученной информации для оценки расхода мощности в электрических сетях. Оценка расхода в сети осуществляется по параметрам режима отдельных основных узлов (центров питания), контролируемым диспетчером энергосистемы, или по интегральным параметрам сети.

При организации вычислительного эксперимента, в процессе которого на модели сети необходимо «разыгрывать» всевозможные физически реализуемые режимы, используются программные генераторы случайных чисел. Последние характеризуют значения нагрузок

узлов электрической сети, которые используются машинной программой для расчета установившегося режима.

Методы генерирования случайных чисел с тем или иным распределением основаны на первоначальном получении случайных действительных чисел, равномерно распределенных в интервале $[0,1]$. Большинство датчиков случайных чисел, использующих рекуррентные соотношения, генерируют в определенной степени коррелированные числа. Поэтому необходимо выбрать метод, у которого этот недостаток выражен гораздо слабее.

Наилучшими характеристиками равномерности среди всех известных в настоящее время равномерно распределенных последовательностей обладает так называемая ЛП_т-последовательность [5].

Для вычисления, например, активной мощности P_i i -го узла в заданном интервале $[P_m, P_M]$ используется следующее выражение:

$$P_i = P_{mi} + (P_M - P_{mi})q_i, \quad (1)$$

где q — равномерно распределенная случайная величина в интервале $[0,1]$; P_m, P_M — соответственно минимальное и максимальное значения активной мощности узла за время t (ч).

По программному генератору ЛП_т, получив значения q для всех нагрузочных и генераторных узлов (кроме балансирующего), из (1) определяют значения активных и реактивных мощностей тех же узлов. Задаваемой информацией о режиме при этом являются минимальные и максимальные значения мощностей узлов схемы. Пределы мощностей узлов, топология сети с ее параметрами должны соответствовать исследуемому временному интервалу.

Для учета реальной корреляции между мощностями узлов по ретроспективным данным строится ковариационная матрица. Ее можно получить, в частности, обработкой суточных диспетчерских ведомостей. Если известна ковариационная матрица узловых мощностей электрической сети, то по ней и по равномерно распределенным случайным числам для нагрузок узлов определяют нормально распределенные случайные числа.

На втором этапе вычислительного эксперимента по генерированным случайным значениям мощностей узлов выполняются расчеты установившихся режимов. При этом определяющими являются цель эксперимента и выбор исследуемых узлов. Если целью ставится исследовать влияние параметров режима контролируемых узлов на показатели режима электрической системы, то необходимо при каждом эксперименте расчет установившегося режима выполнить дважды: первый — с

нулевыми значениями мощностей контролируемых узлов, второй — с учетом генерированных случайных значений мощностей этих узлов.

По результатам расчета установившегося режима для каждого из двух случаев определяются суммарные расходы мощности в сети. Если контролируемые узлами являются узлы примыкания к ОЭС, то разность между ними составит суммарный расход мощности в сети, обусловленный транзитными и межсистемными перетоками:

$$\Delta \pi' = \pi'_2 - \pi'_1, \quad (2)$$

где π'_2 , π'_1 — соответственно расходы мощности при втором и первом расчете установившегося режима; l — номер эксперимента.

В общем случае в результате вычислительного эксперимента определяются:

мощности и напряжения всех узлов сети;
суммарные значения мощностей генераторных и нагрузочных узлов сети;
суммарные расходы активных и реактивных мощностей в сети;

расход мощности, обусловленный перетоком в ОЭС. Полученные результаты хранятся в памяти ЭВМ для инженерного и статистического анализа.

С этой целью составлена программа организации вычислительного эксперимента и статистического анализа результатов эксперимента. Инженерный анализ целесообразнее производить при проектировании, а также при разработке организационных и технических мероприятий по снижению расхода энергии в элементах сети. Для этого при альтернативных условиях повторяется эксперимент при максимуме нагрузки системы, и выбирается наилучший вариант по минимуму суммарного расхода мощности в сети. Для статистического анализа определяются:

корреляции между исследуемыми и определяющими, а также между самими определяющими факторами; средние значения и стандартные отклонения переменных, коэффициенты регрессии, стандартные ошибки коэффициентов регрессии, сумма квадратов оценок, множественный коэффициент корреляции и другие статистические показатели;

главные компоненты для выбора состава регрессионных моделей.

Для оценки расхода мощности на ЭВМ автоматически строятся регрессионные модели любого состава и порядка. Затем определяется наилучшая модель, наиболее точно описывающая исследуемый фактор заданными определяющими факторами.

Теоретически, чем выше степень уравнения, тем меньше остаточная дисперсия. Практически из-за погрешностей округления при решении уравнений на ЭВМ существует оптимальная степень полинома, при превышении которой остаточная дисперсия начинает возрастать. В таких случаях может проявляться так называемая «несостоятельность» оценок регрессии [6].

Строгий регрессионный подход требует, чтобы определяющие факторы были некоррелированы. Поэтому возникает необходимость замены исходных взаимосвязанных показателей некоторой совокупностью некоррелированных величин при сохранении закономерности измерения исследуемого показателя или процесса.

Сущность определения главных компонентов заключается в вычислении характеристических (сингулярных) чисел корреляционной матрицы для определяющих

показателей и соответствующих собственных векторов. Характеристические числа — это дисперсии новых (преобразованных) переменных, и для каждого характеристического числа соответствующий вектор дает вес, с которым старые переменные входят в новые.

Переход от заданных факторов к векторам главных компонентов осуществляется посредством поворота координатных осей так, чтобы новая координатная система имела соответствующие характеристические свойства.

Пусть A — действительная матрица размера $m \times p$, причем a_{ij} представляет собой i -е наблюдение j -го многомерного ряда, так что $m \geq p$. Известно, что матрицу A можно представить в виде [7]

$$A = U \Sigma V^T, \quad (3)$$

где $U^T U = V^T V = V V^T = I_p$; $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$; I_p — единичная матрица размера $p \times p$; τ — знак транспонирования.

Матрица $U(m \times m)$ сформирована из \hat{p} ортонормированных собственных векторов, соответствующих \hat{p} наибольшим значениям характеристических чисел матрицы AA^T , а матрица $V(p \times m)$ — из ортонормированных собственных векторов матрицы $A^T A$.

Диагональные элементы матрицы $\Sigma(k \times k)$ — неотрицательные значения квадратных корней из характеристических чисел матрицы $A^T A$. Разложение вида (3) называется разложением по сингулярным числам.

Главные компоненты определяются по формуле $G = AV$.

Качественными характеристиками статистической модели являются число определяющих факторов и точность модели. Выбор состава определяющих факторов осуществляется также проверкой значимости. В качестве критериев для такого выбора используются: минимальное число коэффициентов и простейшая форма при разумной ошибке;

обоснованные физические допущения;
минимальная сумма квадратов отклонения между фактическими и расчетными по модели значениями исследуемого фактора.

Точность многомерной регрессионной модели в программе оценивается из условия минимума суммы квадратов остатков:

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i^2 = e^T e, \quad (4)$$

где e — вектор остатков (разница между фактическими и полученными по регрессионной модели данными).

Формула (4) используется для определения стандартной ошибки, которая характеризует точность подбора линии выборочной регрессии к выборочным значениям исследуемого фактора, так как по мере приближения линии регрессии к истинной величине $e^T e$ будет стремиться к нулю:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{e^T e / (n - k - 1)}, \quad (5)$$

где n — число экспериментов; k — число переменных, входящих в уравнение регрессии.

Использован также коэффициент детерминации, представляющий ту долю общей вариации зависимой переменной, которую объясняет регрессия:

$r_{0(1,2,\dots,k)}^2$ = объясненная вариация/общая вариация;

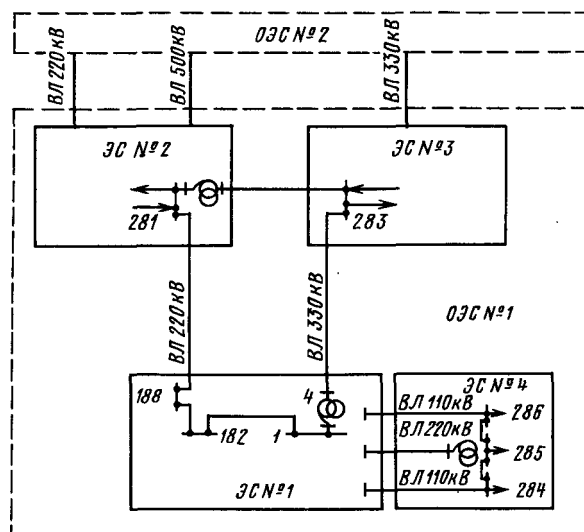
$$r_{0(1,2,\dots,k)}^2 = 1 - |R|/|R^*|, \quad (6)$$

где R — определитель полной матрицы парной корреляции; R^* — определитель подматрицы этой же матрицы без первой строки и столбца.

Эффективное число экспериментов определяется следующим способом. После двадцатого эксперимента программой автоматически строится регрессионная модель второго порядка с фиксацией суммы квадратов остатков. Затем после определенного числа N дополнительных экспериментов (число N вводится) вновь строится регрессионная модель второго порядка с тем же составом факторов. Если сумма квадратов оценок уменьшается более, чем на 10 %, то эксперимент продолжается. В обратном случае используются данные предыдущих экспериментов. Далее строится ряд моделей и из них выбирается наилучшая. При большом объеме сети число N берется меньше, чтобы уменьшить затраты машинного времени.

Пусть требуется оценить величину расхода мощности в электросети энергосистемы (ЭС) № 1, структурная схема соединений которой со смежными ЭС приведена на рисунке. Схема ЭС № 1 содержит 78 узлов и 106 ветвей. В качестве контролируемых приняты узлы примыкания к ОЭС (4, 188, 284, 285, 286). Это дает возможность оценить также величину расхода мощности, обусловленной перетоками в смежные ЭС. В общем случае можно выбрать в качестве контролируемых любые из числа генераторных и нагрузочных узлов.

Для организации эксперимента задаются физически реализуемые пределы мощностей всех узлов, в том числе пределы мощностей контролируемых узлов, приведенные ниже (знаками «минус» отмечены питае-



мые узлы):

Узлы	P_m , МВт	P_n , МВт	Q_m , Мвар	Q_n , Мвар
4	0	170	0	—30*
188	0	—20	0	—15
284	0	20	0	12
285	0	45	0	20
286	0	35	0	18

Генератором случайных чисел генерируются значения мощностей всех нагрузочных узлов. В табл. 1 приведены полученные режимные параметры контролируемых узлов для первых десяти экспериментов (из-за большого объема сети данные остальных нагрузочных узлов не приводятся). Затем расчетами серии установившихся режимов определяются интегральные показатели системы, а также расходы мощности в сети (табл. 2). В табл. 2: π — расход активной мощности

Таблица 1

№№ экспериментов	Значения параметров P и Q узлов									
	Узел 4		Узел 188		Узел 284		Узел 285		Узел 286	
	P	Q	P	Q	P	Q	P	Q	P	Q
1	85	—15	—10	—7,5	10	6	22,5	10	17,5	9
2	42,5	7,5	—15	—11,25	5	3	33,75	15	8,75	4,9
3	127,5	—22,5	—5	—3,75	15	9	11,25	5	26,25	13,5
4	21,25	—3,75	—12,5	—9,38	17,5	10,5	38,39	17,5	21,88	11,25
5	106,25	—18,75	—2,5	—1,88	7,5	4,5	16,88	7,5	4,38	2,25
6	63,75	—11,25	—7,5	—5,63	12,5	7,5	5,63	2,5	30,63	15,75
7	148,75	—26,25	—17,5	—13,13	2,5	1,5	28,13	12,5	13,13	6,75
8	10,63	—1,88	—3,75	—2,81	6,25	3,75	30,94	13,75	32,81	16,88
9	95,63	—16,88	—13,75	—10,31	16,25	9,75	8,44	3,75	15,31	7,88
10	53,13	—9,38	—18,75	—14,06	1,25	0,75	19,69	8,75	24,06	12,38

Таблица 2

Показатели	Значения показателей для номеров экспериментов									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
π	14,6	14,04	17,45	18,7	15,25	17,07	19,14	18,63	19,82	15,95
$\delta\pi$	1,45	1,03	2,05	2,75	0,82	1,6	1,01	3,11	0,19	1,75
$P_{г\sum}$	1395	1374	1412	1358	1384	1308	1492	1255	1440	1399
$Q_{г\sum}$	511	497	556	620	495	490	567	550	558	497

Таблица 3

Коэффициенты и показатели адекватности регрессионных моделей	Значения коэффициентов и показателей для номеров моделей					
	1	2	3	4	5	6
a_0	—	—	—	—12,73	2,77	—1,68
$a_1(P_{\Sigma})$	0,00275	—	0,011475	0,008603	—	0,034035
$a_2(Q_{\Sigma})$	0,02628	—	—0,019531	0,034678	—	—0,069824
$b_1(P_{\Sigma})^2$	—	0,000004	—0,000001	—	0,000003	—0,000009
$b_2(Q_{\Sigma})^2$	—	0,000035	0,000049	—	0,000031	0,000095
r^2	0,988	0,988	0,988	0,422	0,424	0,428
Стандартная ошибка оценки	2,06	1,97	1,98	1,95	1,95	1,97
Сумма квадратов оценок	410	377	375	371	370	367

Таблица 4

Коэффициенты и сумма квадратов остатков моделей	Значения коэффициентов для номеров моделей							
	1	2	3	4	5	6	7	8
a_0	—	1,47	1,19	2,37	—	—	—	1,88
$a_1(P_{286})$	0	—0,186	—	0,0726	—	—	—	—
$a_2(P_{285})$	—0,0625	0,0105	—	—0,0007	0,0335	0,0372	0,0009	—
$a_3(P_{284})$	0,082	—0,0768	—	—0,0053	0,0724	0,0816	0,0044	—
$a_4(P_{188})$	—0,0188	—0,0053	—	0,0429	—0,0065	—	0,0013	—
$a_5(P_4)$	0,0049	—0,0004	—	0,0052	0,0017	—	0,00001	—0,00001
$a_6(Q_{286})$	—0,0585	0,341	—	—0,1441	—	—	—	—
$a_7(Q_{285})$	0,0234	0,0215	—	0,0448	—	—	—	—
$a_8(Q_{284})$	0,0585	—0,081	—	—0,0362	—	—	—	—
$a_9(Q_{188})$	0,0439	0,03	—	0,0505	—	—	—	—
$a_{10}(Q_4)$	0,0251	0,0022	—	—0,018	—	—	—	—
$b_1(P_{286}^2)$	—	—	—0,00037	—0,0009	—	—	—	—
$b_2(P_{285}^2)$	—	—	0,00051	0,0002	—	—	—	—
$b_3(P_{284}^2)$	—	—	0,00013	—0,00003	—	—	—	—
$b_4(P_{188}^2)$	—	—	0,00016	0,0003	—	—	—	—
$b_5(P_4^2)$	—	—	—0,00001	—0,00002	—	—	—	—
$b_6(Q_{286}^2)$	—	—	0,0032	—0,0003	—	—	—	—
$b_7(Q_{285}^2)$	—	—	—0,00027	—0,0013	—	—	—	—
$b_8(Q_{284}^2)$	—	—	0,0049	—0,0009	—	—	—	—
$b_9(Q_{188}^2)$	—	—	—0,0014	0,0044	—	—	—	—
$b_{10}(Q_4^2)$	—	—	—0,0001	—0,0011	—	—	—	—
Сумма квадратов остатков	822	128	119	171	131	133	158	136

в сети; ΔP — расход активной мощности, обусловленный межсистемными перетоками в ОЭС; $P_{\Sigma} Q_{\Sigma}$ — суммарная активная и реактивная мощности генераторов.

Для рассматриваемого примера по результатам ста экспериментов были построены регрессионные модели для оценки суммарного расхода мощности в электросети (табл. 3). Получены также модели для оценки расхода мощности в сети, обусловленного перетоками в ОЭС (табл. 4). Там же приведены коэффициенты регрессии и состав факторов.

Регрессионные модели имеют форму:

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n;$$

$$\hat{y} = a_0 + b_1 x_1^2 + \dots + b_n x_n^2;$$

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b_1 x_1^2 + \dots + b_n x_n^2.$$

Построены также модели без свободного члена.

Как видно из табл. 3, величину суммарного расхода мощности в сети по суммарным активным (P_{Σ}) и реактивным (Q_{Σ}) мощностям системы с примерно одинаковой точностью можно оценить различными моделями.

Однако состав факторов в них существенно отличается, поэтому целесообразнее выбрать модель с меньшим составом факторов (№№ 2, 5). Сумма квадратов оценок модели № 2 составляет 377, а модели № 5 — 370, что незначительно отличается от суммы квадратов оценок наиболее точной модели № 6.

Для оценки расхода мощности в электросети, обусловленного межсистемными перетоками (табл. 4) наилучшей по точности является модель № 4. Сумма квадратов оценок этой модели составляет 171, однако в составе этой модели очень много факторов.

Для уменьшения числа факторов в модели в программе использованы метод главных компонентов и отсеиваются незначимые коэффициенты регрессии. Методом главных компонентов определены составы модели № 2 (табл. 3) и модели № 6 (табл. 4).

В случаях, когда стандартная ошибка больше коэффициента регрессии, производится отсев этих коэффициентов как незначимых. Модель № 7 (табл. 4) получена после отсева факторов модели № 3 с незначимыми коэффициентами.

Известно, что расход мощности в сети зависит от квадрата мощности нагрузки. Как видно из приведенных расчетов, достаточно точные результаты обеспечиваются также полиномами первой степени.

Вывод. Разработаны алгоритм и комплексная программа организации вычислительного эксперимента и построения регрессионных моделей для оценки расхода мощности в электрических сетях энергосистем, обусловленного собственной нагрузкой и перетоками в смежные энергосистемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щербина Ю. В., Бойко Н. Д., Бутенко А. Н. Снижение технологического расхода энергии в электрических сетях.— Киев: Техника, 1981.

2. Потери электроэнергии в электрических сетях энергосистем / В. Э. Воротницкий, Ю. С. Железко, В. Н. Казанцев и др.— М.: Энергоатомиздат, 1983.

3. Адонц Г. Т., Арутюнян А. А. Методы расчета и способы снижения технологического расхода энергии в электрических сетях энергосистем.— Ереван: Луйс, 1958.

4. Ершевич В. В., Кривушкин Л. Ф. Об автоматизации обработки и анализа результатов замеров фактических режимов электрических сетей.— Электрические станции, 1980, № 2.

5. Соболев И. М., Статников Р. Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями.— М.: Наука, 1981.

6. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Т. 2 / Пер. с англ. М.: Финансы и статистика, 1987.

7. Арутюнян А. А., Агамалян Л. А. Прогнозирование многомерных временных рядов в энергетике.— Изв. вузов. Энергетика, 1988, № 3.

[16.06.89]

УДК 538.323

Регулирование питающего напряжения индукционного ускорителя при минимизации его длины и времени разгона

КИМ К. К., канд. техн. наук

Ленинград

Характеристики индукционного ускорителя, наиболее важными из которых являются длина ускорителя и время разгона тела, существенно зависят от того, по какому закону регулируется питающее напряжение. Здесь рассматривается вопрос о регулировании напряжения, при котором обеспечивается постоянное ускорение тела на всей длине разгона, независимо от силы сопротивления, действующей на тело. Смысл рассмотрения этого вопроса заключается в том, что он связан с проблемой минимизации длины ускорителя и времени достижения необходимой скорости телом на выходе из ускорителя.

Будем рассматривать ускоритель как обычную линейную индукционную машину [1, 2], полагая, что изменение скорости магнитного поля индуктора происходит вследствие изменения частоты питающего напряжения при постоянной длине волны поля. Допустим, что эффекты, обусловленные ограниченностью размеров разгоняемого тела, учитываются соответствующими вычислениями его электромагнитных параметров — активного r_2 и индуктивного x_2 сопротивлений и индуктивного сопротивления x_m взаимной индукции между телом и индуктором. Кроме того, положим, что в процессе разгона скольжение s тела относительно поля индуктора изменяется медленно, так что переходными электромагнитными процессами, обусловленными ds/dt , можно пренебречь. Тогда пропульсивную силу F ускорителя можно определить известными в теории обычных индукционных машин [3] соотношениями

$$F = F_m \frac{2s_m S}{s_m^2 + s^2}, \quad (1)$$

где F_m — максимум пропульсивной силы; s_m — скольжение, соответствующее F_m ;

$$F_m = \frac{mU^2}{2c(x_1 + cx_2)u_0}; \quad s_m = \frac{cr^2}{x_1 + cx_2}. \quad (2)$$

Здесь m — число фаз; U — напряжение индуктора; x_1 и x_2 — индуктивные сопротивления рассеяния индуктора и тела; $c = 1 + x_1/x_2$; активное сопротивление индуктора не учитывается.

Далее будем иметь в виду случай, когда частота питающего напряжения, следовательно, и синхронная скорость (скорость поля индуктора) непрерывно меняются. В этом случае, выбрав некоторую частоту f_0 в качестве базисной¹, выражение (1) можно записать в виде

$$F = F_m \frac{2s_{m0}v_{s0}(v_s - v)}{(s_{m0}v_{s0})^2 + (v_s - v)^2}, \quad (3)$$

где s_{m0} и v_{s0} — значения s_m и v_s при базисной частоте; v_s и v — текущие значения синхронной скорости и скорости движения тела.

Переменными в (3) являются v_s , v и F_m , в то время как произведение $s_{m0}v_{s0}$ не зависит от частоты и представляет постоянную величину.

Представляет интерес разгон тела, при котором величина $v_s - v$ не зависит от частоты питающего напряжения и равна

$$v_s - v = s_{m0}v_{s0}. \quad (4)$$

При этом условии, как видно из (3), ускоритель развивает максимальное усилие F_m , вычисляемое по формуле (2). Однако сама величина F_m зависит от частоты, и с увеличением последней силы F_m уменьшается. Поэтому для оптимального разгона необходимо выполнение еще одного условия:

$$U = \frac{f}{f_0} U_0, \quad (5)$$

где f_0 и U_0 — базисные значения частоты и напряжения.

¹ За базисную частоту можно взять, например, номинальную частоту ускорителя.

В этом случае независимо от частоты

$$F_m = F_{m0} = \text{const},$$

где F_{m0} — максимум пропульсивной силы;

$$F_{m0} = \frac{mU_0^2}{2c(x_{10} + cx_{20})v_{s0}}, \quad (6)$$

здесь x_{10} и x_{20} — значения сопротивлений x_1 и x_2 при частоте f_0 .

Таким образом, при условиях (4) и (5) на тело действует максимум пропульсивной силы, численно равный F_{m0} . Разгон тела осуществляется при переменном скольжении s_m , которое при любой частоте питающего напряжения точно соответствует максимуму пропульсивной силы и согласно (4) удовлетворяет условию

$$s_m v_s = s_{m0} v_{s0} = \text{const}.$$

Реализация максимума пропульсивной силы на всем протяжении разгона является характерным признаком рассматриваемого случая. В результате одна и та же выходная скорость тела достигается при меньшей длине ускорителя, чем при других видах разгона. В связи с этим покажем, что весьма важное соотношение (4) может быть также получено из условия минимизации длины ускорителя. Имея в виду одномерное движение тела, например движение вдоль оси x , запишем уравнение

$$F = Mv \frac{dv}{dx} + F_c(v),$$

где F — пропульсивная сила (3); M — масса тела; $F_c(v)$ — сила сопротивления.

Отсюда для длины l ускорителя получим

$$l = \int_{v_{вх}}^{v_{вых}} \frac{Mv}{F - F_c(v)} dv,$$

где $v_{вх}$ и $v_{вых}$ — скорости тела на входе и выходе ускорителя.

Минимизация функционала l приводит к условию

$$\frac{\partial}{\partial v_s} 2F_m s_{m0} v_{s0} \frac{v_s - v}{(s_{m0} v_{s0})^2 + (v_s - v)^2} - F_c(v) = 0,$$

из которого при условии (5) следует (4).

В отсутствие силы сопротивления $F_c(v)$ ускорение тела и соответствующая ему длина ускорителя равны:

$$a_0 = \frac{F_{m0}}{M} = \text{const}; \quad l = \frac{M}{2F_{m0}} (v_{вых}^2 - v_{вх}^2). \quad (7)$$

В реальных условиях ускорение тела по мере разгона уменьшается, что связано с нарастанием силы сопротивления $F_c(v)$ по мере увеличения скорости тела (обтекание тела турбулентным потоком воздуха):

$$a = [F_{m0} - F_c(v)] / M.$$

С точки зрения проблемы минимизации длины ускорителя необходимо обеспечить постоянное ускорение на всей длине ускорителя. В связи с этим важно выяснить, при каких условиях достижимо ускорение F_{m0}/M , которое в присутствии силы сопротивления можно рассматривать как предельно возможное.

В общем случае управление индукционным ускорителем сводится к регулированию частоты и амплитуды питающего напряжения. В отсутствие силы сопротивления, как показано выше, регулирование угла α и частоты f позволяет обеспечить ускорение F_{m0}/M по

величин в соответствии с (4) и (5) обеспечивает разгон тела с ускорением F_{m0}/M на всей длине ускорителя. Если тело находится под действием электромагнитных и аэродинамических сил, то для достижения того же ускорения F_{m0}/M необходимо регулирование напряжения по иному закону. При этом соотношение (4), отражающее закон регулирования частоты, сохраняет силу, поскольку оно представляет лишь условие, обеспечивающее максимум при заданном напряжении пропульсивной силы и, следовательно, не зависит от силы сопротивления. Таким образом, необходимо найти соотношение, определяющее закон изменения амплитуды напряжения, который в условиях наличия силы сопротивления должен играть ту же роль, что и условие (5).

Для подавления силы сопротивления $F_c(v)$, которую будем считать произвольной функцией скорости тела, необходимо, чтобы сила (3), развиваемая ускорителем, была равна

$$F = F_{m0} + F_c(v), \quad (8)$$

где F_{m0} определяется формулой (6).

При этом условии, очевидно, будут сохранены идеальные свойства ускорителя, обеспечивающие разгон тела с постоянным ускорением, равны F_{m0}/M . Таким образом, задача состоит в определении закона управления амплитудой напряжения, при котором выполняется условие (8).

При регулировании частоты питающего напряжения согласно (4) ускоритель развивает максимальное усилие, т. е. при любом заданном напряжении $F = F_m$, где F_m определяется по формуле (2). Однако в данном случае этот максимум, который мы обозначим $F_m(v)$, в силу требования (8) будет зависеть и от скорости v тела. Отсюда ясно, что в качестве параметров управления в искомый закон войдут частота питающего напряжения и скорость движения тела. В связи с этим желаемый с точки зрения (8) закон управления амплитудой напряжения можно представить в виде

$$U = \frac{f}{f_0} U_0 [1 + k_v F_c(v)]^{1/2}, \quad (9)$$

где k_v — коэффициент управления по параметру v .

Чтобы найти k_v , подставим (9) в (2). Тогда с учетом (3) и (4) можно записать

$$F = F_m(v) = F_{m0} [1 + k_v F_c(v)]. \quad (10)$$

Отсюда, сравнивая (8) и (10), находим $k_v = 1/F_{m0}$.

Таким образом, при изменении частоты и амплитуды питающего напряжения по законам (4) и (9) индукционный ускоритель приобретает идеальные свойства, характеризующие соотношениями (7). При этом зависимость силы сопротивления $F_c(v)$ от скорости движения v тела может быть произвольной.

До сих пор мы имели в виду индукционный ускоритель с непрерывным изменением синхронной скорости. Такой ускоритель можно рассматривать как предельный случай ускорителя с индуктором, состоящим из некоторого числа участков (сегментов), каждому из которых соответствует своя постоянная синхронная скорость.

В случае ускорителей с дискретным изменением синхронной скорости невозможна реализация идеального разгона, если под ним понимать, как и ранее, движение тела с постоянным ускорением F_{m0}/M по

всей длине ускорителя. Однако постановка проблемы о преодолении силы сопротивления посредством соответствующего регулирования амплитуды питающего напряжения все же возможна. В самом деле, если в законе регулирования (9) коэффициент k_v рассматривать как переменную величину, зависящую от синхронной скорости и скорости тела, то можно добиться желаемой цели. Нетрудно показать, что при

$$k_v = F_{m0} \frac{2s_{m0}v_{s0}(v_{si} - v)^{-1}}{(s_{m0}v_{s0})^2 + (v_{si} - v)^2}, \quad (11)$$

где индекс i означает номер сегмента, а F_{m0} для всех сегментов имеет одно и то же значение, определяемое формулой (6), сила сопротивления подавляется полностью. При этом пропульсивная сила, развиваемая ускорителем на i -м сегменте,

$$F_i = F_{m0} \frac{2s_{m0}v_{s0}(v_{si} - v)}{(s_{m0}v_{s0})^2 + (v_{si} - v)^2} + F_c(v). \quad (12)$$

Рассмотрим теперь задачу об определении синхронной скорости и скорости движения тела на отдельных сегментах ускорителя, при которых достигается минимальная длина ускорителя. Эта задача играет ту же роль, что и соотношение (4) в случае ускорителя с непрерывным изменением синхронной скорости. Проблема минимизации длины индукционного ускорителя в отсутствие силы сопротивления рассматривалась в [4].

Полагая, что тело совершает одномерное движение, для длины i -го сегмента получим

$$l_i = \int_{v_{i-1}}^{v_i} \frac{M(v)}{F_i - F_c(v)} dv,$$

где v_{i-1} и v_i — скорости тела в начале и в конце i -го сегмента.

При изменении напряжения на каждом сегменте ускорителя согласно (9) и (11) величина $F_i - F_c(v)$ определяется из (12) и выражение для l_i принимает вид

$$l_i = \frac{M}{2F_{m0}s_{m0}v_{s0}} \int_{v_{i-1}}^{v_i} \frac{(s_{m0}v_{s0})^2 + (v_{si} - v)^2}{v_{si} - v} v dv.$$

Отсюда для всей длины $l = \sum_1^n l_i$ ускорителя получим

$$l_i = \frac{M}{2F_{m0}s_{m0}v_{s0}} \left\{ -\frac{1}{3} (v_{\text{вых}}^3 - v_{\text{вх}}^3) - (s_{m0}v_{s0})^2 (v_{\text{вых}} - v_{\text{вх}}) + \right. \\ \left. + \sum_1^n \left[\frac{v_{si}}{2} (v_i^2 - v_{i-1}^2) - (s_{m0}v_{s0})^2 v_{si} \ln \frac{v_{si} - v_i}{v_{si} - v_{i-1}} \right] \right\}, \quad (13)$$

где $v_{\text{вх}}$ и $v_{\text{вых}}$ — скорости тела на входе и выходе из ускорителя.

Таким образом, длина ускорителя является функцией синхронных скоростей v_{si} на сегментах и скоростей v_i тела на границах сегментов. Для определения этих скоростей привлечем условия минимума длины ускорителя

$$\frac{\partial l_i}{\partial v_{si}} = 0, \quad \frac{\partial l_i}{\partial v_i} = 0,$$

которые в рассматриваемом случае принимают вид

$$(v_{si} - v_i)(v_{s(i+1)} - v_i) = (s_{m0}v_{s0})^2, \quad i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$\frac{1}{2} (v_i^2 - v_{i-1}^2) = (s_{m0}v_{s0})^2 \left[\ln \frac{v_{si} - v_i}{v_{si} - v_{i-1}} + \frac{v_{si}}{v_{si} - v_i} - \frac{v_{si}}{v_{si} - v_{i-1}} \right], \quad (15)$$

Из этих $2n-1$ уравнений определяются n синхронных скоростей v_{si} и $n-1$ скоростей v_i тела при заданных $v_{\text{вх}} = v_0$ и $v_{\text{вых}} = v_n$. Подстановка найденных таким образом скоростей в (13) дает оптимальную (минимальную) длину ускорителя с дискретным изменением синхронной скорости.

Имея в виду $v_{si} = f_i \lambda_i$, где f_i и λ_i — частота и длина волны поля индуктора на i -м сегменте, уравнения (14) и (15) можно рассматривать как закон регулирования (в данном случае дискретного) частоты питающего напряжения. В проблеме управления сегментированным индукционным ускорителем эти уравнения имеют такое же значение, что и соотношение (4). В связи с этим можно показать, что при $n \rightarrow \infty$ вследствие того, что $v_{si} = v_{s(i+1)} = v_s$ и $v_i = v_{i-1} = v$, уравнения (14) превращаются в соотношение, совпадающее с (4), а уравнения (15) переходят в тождество $0=0$.

В заключение приведем некоторые результаты расчета, относящиеся к сегментированному индукционному ускорителю с $n=11$. Уравнения (14) и (15) решались методом Ньютона. Были получены значения синхронных скоростей v_s на всех сегментах и $n-1$ скоростей v тела на границах сегментов при скоростях $v_{\text{вх}} = 100 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ и $v_{\text{вых}} = 1000 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. В расчетах предполагалось, что $s_{m0}v_{s0} = 11,1; 25; 43; 67; 100$.

На рис. 1 даны графики синхронной скорости (горизонтальные отрезки 1) и скорости тела (кривая 2) для случая $s_{m0}v_{s0} = 11,1$. Расчеты показали, что независимо от значения $s_{m0}v_{s0}$ скорость тела в конце каждого сегмента вплотную приближается к синхронной скорости на этом сегменте. На рис. 2 указаны значения параметра l_i^0 , который, будучи помножен на M/F_{m0} , определяет длину сегмента. Кривые 1, 2, 3, 4 и 5 представляют соответственно случаи $s_{m0}v_{s0} = 11,1; 25; 43; 67; 100$. Как видно, по мере приближения к концу ускорителя длина сегментов становится более значительной, особенно это заметно при больших значениях параметра $s_{m0}v_{s0}$. Так, при $s_{m0}v_{s0} > 50$ длина последнего может превышать длину первого сегмента более чем в 2 раза.

Представление о полной длине ($l = l^0 \cdot M/F_{m0}$)

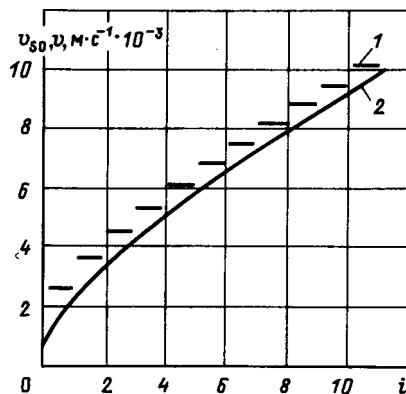


Рис. 1. Графики синхронной скорости (1) и скорости тела (2) на отдельных сегментах ускорителя

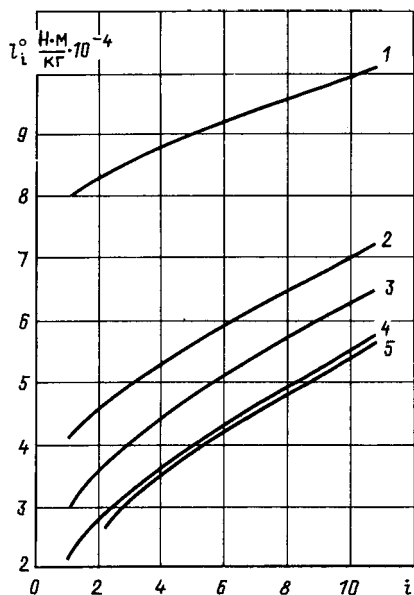


Рис. 2. Зависимости длины ($l_i = l_i^0 \cdot M/F_{m0}$) сегментов от их номера (i) при различных значениях параметра $s_{m0}v_{s0}$

сегментированного ускорителя дает рис. 3, где принята та же нумерация кривых, что и на рис. 2. Из рис. 3 следует, что с увеличением конечной скорости $v_{\text{вых}}$ тела все более заметным становится влияние параметра $s_{m0}v_{s0}$ на длину ускорителя. Например, при $v_{\text{вых}} = 1000 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ длина ускорителя с $s_{m0}v_{s0} = 11,1$ вдвое превышает длину ускорителя с $s_{m0}v_{s0} = 100$. Это указывает на важную роль параметра $s_{m0}v_{s0}$, который существенным образом зависит от геометрии тела и магнитных полей рассеяния ускорителя.

Выводы. 1. Для достижения минимальной длины индукционного ускорителя с непрерывным изменением синхронной скорости, а следовательно, и минимального времени разгона тела необходимо управление частотой и амплитудой питающего напряжения по законам (4) и (9).

2. В случае сегментированного индукционного ускорителя с дискретным изменением синхронной ско-

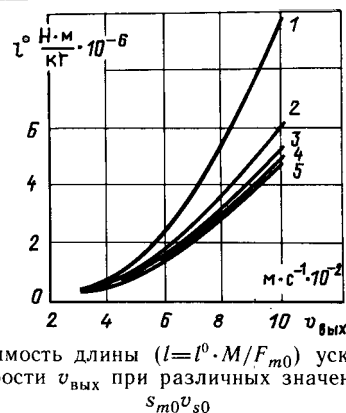


Рис. 3. Зависимость длины ($l = l^0 \cdot M/F_{m0}$) ускорителя от его выходной скорости $v_{\text{вых}}$ при различных значениях параметра $s_{m0}v_{s0}$

рости условие минимизации длины ускорителя определяется уравнениями (14) и (15), которые в неявном виде содержат закон управления частотой напряжения, а условие полного подавления силы сопротивления, благодаря чему уравнения (14) и (15) приобретают реальный смысл, сводится к управлению амплитудой напряжения согласно (9), но с переменным коэффициентом управления (11). В пределе, когда число сегментов ускорителя стремится к бесконечности, уравнения (14), (15) переходят в соотношение (4).

3. На минимальную длину сегментированного ускорителя заметное влияние оказывает параметр $s_{m0}v_{s0}$. Это влияние тем значительнее, чем больше выходная скорость ускорителя. С точки зрения минимизации длины ускорителя желательно, чтобы параметр $s_{m0}v_{s0}$ был возможно больше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольдек А. И. Индукционные магнитогидродинамические машины с жидкометаллическим рабочим телом.— Л.: Энергия, 1970.
2. Насар С., Болдеа И. Линейные тяговые электрические машины.— М.: Транспорт, 1981.
3. Вольдек А. И. Электрические машины.— Л.: Энергия, 1974.
4. Onuki T., Laithwaite E. R. Problem of minimizing induction launchers length.— Proc. of the Institute of Electrical Engineers, 1971, vol. 118, N 2.

[15.05.90]

УДК 62-784.64.001.24

Оптимизация комбинированного электромагнитного экрана по массе

ПЕТЛЕНКО Б. И., ДЕРГАЧЕВ А. Е.

Последние годы характеризуются все более интенсивным применением микроэлектронных систем управления и контроля на различных автономных объектах, в том числе на транспортных средствах, с развитым электрооборудованием. К ним относятся, например, автосамосвалы БелАЗ особо большой грузоподъемности с дизель-электрической трансмиссией. Работа силового электрооборудования сопровождается

заметным электромагнитным излучением. Поэтому надежная работа микроэлектронных и микропроцессорных систем на борту автономных объектов часто зависит от правильного решения вопросов электромагнитной совместимости силового и микроэлектронного оборудования. В ряде случаев хороший эффект дает экранирование электронных блоков или источников излучения. Все чаще в последнее время применяют

экранирование силовых блоков в связи с ужесточающимися требованиями на электромагнитное «загрязнение» окружающей среды.

Эффективное подавление электромагнитного поля обычно обеспечивается применением двухслойных экранов, состоящих из ферромагнитной основы (подложки) и немагнитного покрытия со стороны источника электромагнитного излучения. Конструктивно экран часто выполняется в виде комбинации плоских и криволинейных поверхностей, толщина которых много меньше радиуса кривизны. Это позволяет ограничиться при анализе эффективности экранирования рассмотрением взаимодействия электромагнитной волны с плоской поверхностью экрана.

Полное подавление электромагнитного поля в защищаемой области пространства может осуществляться при различных параметрах экрана. Для автономных объектов важно при этом иметь минимальную массу экрана при условии полного затухания электромагнитного поля за экраном. При известных материалах покрытия и основы это обеспечивается при оптимальных толщинах покрытия и подложки из условия минимальной массы экрана.

Вопросы экранирования рассмотрены достаточно подробно в высокочастотной технике радиосвязи [1]. Однако при экранировании двуслойными экранами электроустановок большой мощности существенную роль начинают играть такие специфические для железа явления, как насыщение и изменение магнитной проницаемости ферромагнитной части экрана по глубине проникающей в нее электромагнитной волны из-за резко выраженного поверхностного эффекта [2—4].

Целью настоящей работы является отыскание оптимальных толщин покрытия и ферромагнитной части экрана, обеспечивающих полное затухание электромагнитной волны при минимуме массы экрана, с учетом поверхностного эффекта и насыщения в подложке.

В соответствии с изложенным выше расчетная модель комбинированного электромагнитного экрана имеет вид, показанный на рис. 1, где приняты следующие обозначения: σ , μ , σ_1 , μ_0 — электропроводности и магнитные проницаемости ферромагнитной подложки и токопроводящего покрытия соответственно; \dot{H}_{0e1} , \dot{H}_{0e} — комплексные амплитуды касательной составляющей напряженности магнитного поля на поверхности, обращенной к источнику электромагнитного поля и на границе раздела «железо — покрытие» соответственно.

Как видно из рис. 1, для представленной модели характерна плоскопараллельность электромагнитного поля в экране. Т. е. в нем присутствует одна компонента \dot{E}_{0y} напряженности электрического поля и две компоненты \dot{H}_{0x} , \dot{H}_{0z} напряженности магнитного поля. Кроме того, для общности анализа принята пространственная периодичность (синусоидальность) напряженности магнитного поля на поверхности экрана, что характерно для экранирования ряда электрических машин. При необходимости полученные результаты очевидным образом могут быть распространены на случай экранирования электромагнитной волны с напряженностью магнитного поля, не зависящей от координаты x (рис. 1).

Расчет и оптимизация плоского двухслойного экрана, содержащего ферромагнитный массив, связаны с

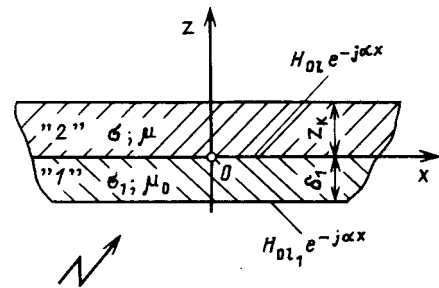


Рис. 1. Расчетная модель комбинированного электромагнитного экрана

отысканием компонент электромагнитного поля в его различных частях по заданной напряженности магнитного поля на поверхности экрана. Такая задача была решена для линейных асинхронных двигателей с комбинированной вторичной цепью. Поэтому для дальнейшего анализа воспользуемся выражениями, полученными нами для тормозных режимов линейных асинхронных двигателей [5, 6] и проверенными экспериментально.

Запишем решения уравнений электромагнитного поля, вытекающие из [5, 6], для различных областей экрана.

Для области немагнитного токопроводящего покрытия имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{0x} &= -\frac{j\beta}{\omega\mu_0} (C_1 e^{\beta z} - C_2 e^{-\beta z}); \\ \dot{H}_{0z} &= \frac{\alpha}{\omega\mu_0} (C_1 e^{\beta z} + C_2 e^{-\beta z}). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Для ферромагнитной подложки:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{0x} &= \frac{j}{\omega\mu_e z_k} C_0 k_1 \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{\frac{11}{4} + j\sqrt{2}}; \\ \dot{H}_{0z} &= \frac{\alpha}{\omega\mu_e} C_0 \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{\frac{15}{4} + j\sqrt{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где \dot{H}_{0x} , \dot{H}_{0z} — комплексные амплитуды компонент магнитного поля; $\beta = \frac{1+j}{\Delta_1}$; Δ_1 — глубина скин-слоя в токопроводящем покрытии; $k_1 = 7/4 + j\sqrt{2}$; z_k — глубина скин-слоя в железе.

Постоянные интегрирования C_0 , C_1 , C_2 определяются из граничного условия на наружной поверхности токопроводящего покрытия и из условия непрерывности касательной составляющей напряженности магнитного поля, а также нормальной составляющей индукции магнитного поля на поверхности раздела «железо — покрытие»:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{j\beta}{\omega\mu_0} (C_1 e^{-\beta\delta_1} - C_2 e^{\beta\delta_1}) &= \dot{H}_{0e1}; \\ \frac{j}{\omega\mu_e z_k} C_0 k_1 &= -\frac{j\beta}{\omega\mu_0} (C_1 - C_2); \\ C_0 &= C_1 + C_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Из последних двух уравнений системы (3) следует:

$$C_2 = \frac{\beta \mu_e z_k + 1}{\frac{\beta \mu_0 z_k}{k_1 \mu_0} - 1} C_1. \quad (4)$$

Имеем очевидную оценку:

$$\left| \frac{\beta \mu_e z_k}{\omega \mu_0} \right| = \frac{\mu_e}{\mu_0} \frac{z_k}{\Delta_1} \frac{\sqrt{2}}{2,25} \approx 0,92 \sqrt{\frac{\mu_e \sigma_1}{\mu_0 \sigma}} \gg 1, \quad (5)$$

где согласно [2] принято

$$z_k \approx \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu_e \omega}}.$$

С использованием оценок (5) и (4) получим

$$C_2 \approx C_1. \quad (6)$$

С учетом (6) из системы (3) имеем

$$C_0 = \frac{j2\omega\mu_0}{\beta} \frac{1}{e^{-\beta\delta_1} - e^{\beta\delta_1}} \dot{H}_{0e1}. \quad (7)$$

Допустив приближение, принятое в [1]

$$\frac{2\delta_1}{\Delta_1} \ll 1, \quad (8)$$

и разложив в степенной ряд знаменатель (7), получим:

$$|C_0| = \omega \mu_0 \Delta_1 H_{0e} \frac{1}{\xi}, \quad (9)$$

где $\xi = 2 \frac{\delta_1}{\Delta_1}$ — безразмерный параметр.

Для продольной компоненты магнитного поля на поверхности раздела «железо—покрытие» из (1) следует:

$$H_{0e} = |\dot{H}_{0x}|_{z=0} = \frac{|C_0| |k_1|}{\omega \mu_e z_k},$$

что после соответствующих упрощений дает:

$$H_{0e} = 2,25 H_{0e1} \frac{\mu_0 \Delta_1}{\mu_e z_k} \frac{1}{\xi}. \quad (10)$$

Связь между магнитной проницаемостью на поверхности железа и глубиной скин-слоя в нем может быть представлена в виде [5]:

$$\mu_e = \frac{2}{\sigma \omega z_k^2}. \quad (11)$$

Из (10) с учетом (11) получим

$$H_{0e} = 0,53 H_{0e1} \frac{\sigma}{\sigma_1} \frac{z_k}{\delta_1}. \quad (12)$$

Согласно [2] для сильных полей между магнитной проницаемостью на поверхности ферромагнитной среды μ_e и напряженностью магнитного поля на ней имеет место соотношение:

$$\mu_e = \mu_0 \cdot 10^{5,75 - 0,9 \lg H_{0e}}, \quad (13)$$

где H_{0e} — модуль напряженности магнитного поля в системе «СИ».

Из (12) с учетом (13) имеем

$$\frac{10^{6,39}}{4,24^{1,11}} \sigma^{1,11} (\mu_0 \omega)^{1,11} z_k^{2,22} = 0,53 H_{0e1} \frac{\sigma}{\sigma_1} \frac{z_k}{\delta_1},$$

поэтому для глубины проникновения электромагнитного поля в железо справедливо:

$$z_k = 0,67 \cdot 10^5 H_{0e1}^{0,82} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma} \right)^{0,09} \Delta_1^{1,82} \delta_1^{-0,82}. \quad (14)$$

Для массы электромагнитного комбинированного экрана

$$M = \rho_1 S_0 \delta_1 + \rho S_0 z_k, \quad (15)$$

где S_0 — площадь поверхности электромагнитного экрана; ρ_1, ρ — плотности немагнитного покрытия и ферромагнитной подложки соответственно.

Дифференцируя (15) по δ_1 и приравнявая первую производную нулю, для $\delta_{1\text{опт}}$, дающей минимум функции (15), получаем

$$\delta_{1\text{опт}} = 1,29 \cdot 10^{-3} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma} \right)^{0,05} \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^{0,55} H_{0e1}^{0,45} \Delta_1. \quad (16)$$

Толщина ферромагнитной основы оптимального электромагнитного экрана находится из (14) с использованием (16)

$$z_{k\text{опт}} = 1,54 \cdot 10^{-3} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma} \right)^{0,05} \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^{0,45} H_{0e1} \Delta_1. \quad (17)$$

Для массы оптимального экрана имеем из (15) с учетом (16) и (17):

$$M_{\text{опт}} = 2,83 \cdot 10^{-3} S_0 \rho_1^{0,45} \rho^{0,55} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma} \right)^{0,05} H_{0e1}^{0,45} \Delta_1. \quad (18)$$

Проведем сравнение масс экранов различного исполнения, воспользовавшись соотношением (18):

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_{\text{опт Al}}}{M_{\text{Al}}} &= 5,4 \cdot 10^{-3} H_{0e1}^{0,45}, & \frac{M_{\text{опт Al}}}{M_{\text{Fe}}} &= 0,51; \\ \frac{M_{\text{опт Cu}}}{M_{\text{Cu}}} &= 2,87 \cdot 10^{-3} H_{0e1}^{0,45}, & \frac{M_{\text{опт Cu}}}{M_{\text{опт Al}}} &= 1,88, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где $M_{\text{опт Al}}$ и $M_{\text{опт Cu}}$ — массы оптимальных экранов

с алюминиевым и медным покрытием соответственно; M_{Al} , M_{Cu} , M_{Fe} — массы алюминиевого, медного и железного экранов.

Как видно из (19), наиболее рациональным является экран, состоящий из железной подложки с нанесенным на нее алюминиевым покрытием оптимальной толщины, определяемой соотношением (16), и массой, вычисляемой по (18).

Подставив в (16) соответствующие значения плотностей и проводимостей для оптимальной толщины алюминиевого покрытия, получим следующее:

$$\delta_{\text{опт}} = 2,46 \cdot 10^{-3} H_{0e1}^{0,45} \Delta_{IAI},$$

где Δ_{IAI} — толщина скин-слоя в алюминии.

На рис. 2 приведены графические зависимости оптимальной толщины алюминиевого покрытия ферромагнитной основы от напряженности магнитного поля на поверхности электромагнитного экрана для различных толщин скин-слоя в алюминии. В круглых скобках на рисунке указаны соответствующие этим толщинам частоты электромагнитного поля. Как видно из рис. 2, толщина оптимального покрытия возрастает с увеличением толщин скин-слоя в материале немагнитного покрытия и возрастанием амплитуды напряженности магнитного поля на поверхности экрана.

Представленные результаты получены при пренебрежимой малости отраженной от экрана электромагнитной волны, что обычно выполняется на практике. В рассмотренном экране волна полностью затухает, т. е. поле за экраном полностью отсутствует, поэтому использовать часто применяемый при расчете экранов коэффициент экранирования не имеет смысла.

Выводы. Установлено, что существует оптимальная толщина немагнитного электропроводящего покрытия комбинированного электромагнитного экрана, обеспечивающего полное затухание электромагнитной волны,

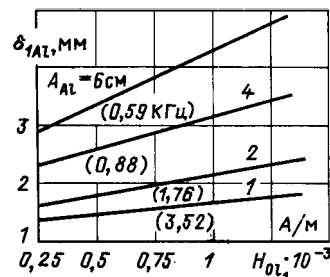


Рис. 2. Зависимость оптимальной толщины алюминиевого покрытия от напряженности магнитного поля на поверхности экрана

при которой масса экрана минимальна. Эта толщина может быть рассчитана по предложенным аналитическим соотношениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каден Г. Электромагнитные экраны в высокочастотной технике электросвязи / Пер. с нем. — М.: Госэнергоиздат, 1957.
2. Туровский Я. Техническая электродинамика / Пер. с польского. — М.: Энергия, 1974.
3. Маергойз Н. Д. Расчет поверхностного эффекта в ферромагнитных телах, покрытых проводящим слоем. — Электричество, 1970, № 2.
4. Нейман Л. Р. Поверхностный эффект в ферромагнитных телах. — Л.: Госэнергоиздат, 1949.
5. Петленко Б. И., Дергачев А. Е. Расчет сил динамического торможения односторонних линейных асинхронных двигателей с комбинированной вторичной цепью. — Электричество, 1980, № 4.
6. Петленко Б. И., Дергачев А. Е. Торможение противовключением одностороннего линейного асинхронного двигателя с комбинированной вторичной цепью. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1979, № 6.

[22.05.90]

УДК 621.372.6.017.001.24

К вопросу определения мощности потерь в активном многополюснике, обусловленной токами нагрузочных ветвей

ВЛАСОВ С. П., канд. техн. наук

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Ранее¹ был изложен способ определения дополнительных потерь мощности внутри активного многополюсника при подключении к нему произвольного количества нагрузочных ветвей. При этом в качестве

источников энергии, находящихся внутри активного двухполюсника, рассматривались лишь источники э. д. с. Источники тока внутри активного двухполюсника не предполагались; они могли быть лишь в нагрузочных ветвях.

Рассмотрим способ определения дополнительных потерь мощности внутри активного двухполюсника с источниками тока (но без источников э. д. с.), обуслов-

¹ Власов С. П. Потери мощности в активном многополюснике, обусловленные токами ветвей его нагрузок. — Электричество, 1989, № 4.

ленных изменением сопротивления в ветви нагрузки от нуля до какого-либо определенного значения r_n .

Необходимо пояснить, что определяется разность мощностей потерь внутри активного двухполюсника в двух стационарных, установившихся режимах — нагрузочном режиме при сопротивлении ветви нагрузки r_n и режиме короткого замыкания (к. з.) этой ветви. Переходный процесс от одного режима к другому не рассматривается. В дальнейшем, при распространении полученных для двухполюсника результатов на многополюсники также сравниваются мощности потерь для этих же стационарных режимов — режима нормальной нагрузки всех нагрузочных ветвей и режима к. з. этих же всех ветвей.

Следует отметить, что конечной целью подобных расчетов может быть определение изменения потерь энергии внутри активного многополюсника вследствие изменения его нагрузок. В практических условиях эти расчеты целесообразно производить для таких нагрузочных режимов, которые являются характерными, существуют длительно и существенно влияют на потери энергии внутри активного многополюсника (в электрической системе). С теоретической точки зрения предлагаемая методика исключает необходимость определения токов внутри активного многополюсника, который может быть сколь угодно сложным. Достаточно лишь определить режимы нагрузочных ветвей: напряжение и ток каждой нагрузочной ветви в нормальном нагрузочном режиме и токи к. з. этих ветвей (или напряжение холостого хода — х. х.).

Рассмотрим исходную электрическую цепь (см. рисунок, а) с выделенной ветвью нагрузки с сопротивлением r_n . Алгебраическая сумма мощностей источников энергии (источников тока) в этой цепи при наличии токов нагрузки I_n равна

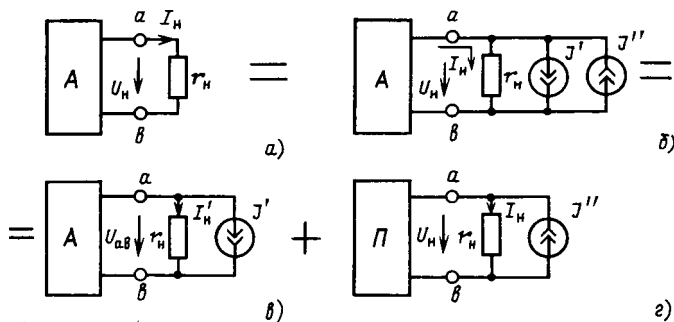
$$\sum P_{\text{ист. н}} = \sum_{t=1}^s U_t J_t, \quad (1)$$

где J_t — ток источника тока в t -й ветви активного двухполюсника; U_t — напряжение на источнике тока в ветви t ; s — количество ветвей с источниками тока внутри активного двухполюсника.

Согласно уравнению баланса мощностей

$$\sum P_{\text{ист. н}} = \Delta P_{\text{а. н}} + P_n, \quad (2)$$

где P_n — мощность ветви нагрузки; $\Delta P_{\text{а. н}}$ — мощность потерь внутри активного двухполюсника при наличии тока I_n в ветви нагрузки.



Активный двухполюсник

Параллельно ветви нагрузки включим два источника тока с одинаковыми по величине и противоположно направленными токами $J' = J'' = I_{\text{к.з}}$ (см. рисунок, б), где $I_{\text{к.з}}$ — ток в нагрузочной ветви при $r_n = 0$. При этом токораспределение в цепи не изменится; режимы работы активного двухполюсника и нагрузочной ветви не изменятся.

Применим далее метод наложения (см. рисунок, в и г). Определим алгебраическую сумму мощностей источников энергии в электрической цепи, изображенной на рисунке, в. Мощность источника тока $J' = I_{\text{к.з}}$ равна нулю, так как $J'_n = 0$ и $U_{ab} = r_n J'_n = 0$. Мощность остальных источников энергии в этой цепи (все они находятся внутри активного двухполюсника) изменилась и стала равна

$$\sum P'_{\text{ист}} = \sum_{t=1}^s U'_t J_t, \quad (3)$$

где U'_t — напряжение на зажимах t -го источника тока, изменившееся вследствие появления в цепи дополнительного источника энергии — источника тока J' ; напряжение стало

$$U'_t = U_t - R_{tn} J', \quad (4)$$

где R_{tn} — передаточное сопротивление, связывающее ток в ветви нагрузки и напряжение на источнике тока в t -й ветви.

С учетом (4) выражение (3) примет вид

$$\sum P'_{\text{ист}} = \sum_{t=1}^s (U_t - R_{tn} J') J_t = \sum_{t=1}^s U_t J_t - J' \sum_{t=1}^s R_{tn} J_t. \quad (5)$$

Так как

$$\sum_{t=1}^s R_{tn} J_t = \sum_{t=1}^s R_{nt} J_t = U_n, \quad (6)$$

то

$$\sum P'_{\text{ист}} = \sum_{t=1}^s U_t J_t - U_n J' = \sum_{t=1}^s U_t J_t - U_n I_{\text{к.з}}. \quad (7)$$

Так как в цепи, изображенной на рисунке, в отсутствует ток в нагрузочном резисторе и вследствие этого напряжение на этой ветви равно нулю, то по отношению к активному двухполюснику этот режим может рассматриваться как режим к. з. Следовательно, с учетом баланса мощностей для рисунка, в следует

$$\sum P'_{\text{ист}} = \Delta P_{\text{а. к.з}} = \sum_{t=1}^s U_t J_t - U_n I_{\text{к.з}}, \quad (8)$$

где $\Delta P_{\text{а. к.з}}$ — мощность потерь внутри активного двухполюсника при к. з. нагрузочной ветви.

В цепи, изображенной на рисунке, г, напряжение на нагрузочной ветви в соответствии с методом наложения равно U_n . Мощность источника тока J'' при этом можно представить как

$$\begin{aligned} P'' &= U_n J'' = U_n I_{\text{к.з}} = U_n (I_n + I_{\text{к.з}} - I_n) = \\ &= U_n I_n + U_n (I_{\text{к.з}} - I_n) = U_n I_n + (I_{\text{к.з}} - I_n)^2 r_{\text{вх}} = \\ &= P_{\text{вх}} + I_{\text{вх}}^2 r_{\text{вх}} = P_n + \Delta P_{\text{п. н}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Delta P_{\text{п. н}}$ — мощность потерь внутри пассивного двухполюсника от тока $I_{\text{вх}} = I_{\text{к.з}} - I_n$.

Сопоставляя (1), (2), (8) и (9), видим, что

$$\begin{aligned} \Delta P_{\text{а. н}} - \Delta P_{\text{а. к.з}} &= U_n I_{\text{к.з}} - P_n = P_n (I_{\text{к.з}} / I_n - 1) = \\ &= U_n (I_{\text{к.з}} - I_n) = (I_{\text{к.з}} - I_n)^2 r_{\text{вх}} = I_{\text{вх}}^2 r_{\text{вх}} = \Delta P_{\text{п. н}} = \Delta(\Delta P). \end{aligned} \quad (10)$$

Смысл полученного выражения (10) заключается в том, что при изменении сопротивления в ветви нагрузки от нуля до r_n и изменении тока в этой ветви соответственно от $I_{к.з}$ до I_n мощность потерь внутри активного двухполюсника, содержащего источники тока (но не содержащего источника э.д.с.), изменяется на величину, равную мощности потерь внутри пассивного двухполюсника, полученного из рассматриваемого активного, от тока, равного разности тока короткого замыкания нагрузочной ветви и тока нагрузки, т. е.

$$\Delta(\Delta P) = (I_{к.з} - I_n)^2 r_{вх} = U_n (I_{к.з} - I_n) = P_n (I_{к.з}/I_n - 1). \quad (11)$$

Если применить этот прием дважды — при $r_n = r_{n1}$ и $r_n = r_{n2}$, то можно будет определить изменение мощности потерь внутри активного двухполюсника при изменении сопротивления в ветви нагрузки от одного фиксированного значения r_{n1} до другого фиксированного значения r_{n2} . Совершенно очевидно, что это положение относится и к сопоставлению нагрузочных режимов с режимом х.х. ветви нагрузки (см. сноску). Особо следует обратить внимание на то обстоятельство, что применительно к цепям синусоидального тока формулы предполагают синхронную работу всех источников электрической энергии внутри активного многополюсника: начальные фазы э. д. с. у всех источников э. д. с. или начальные фазы тока у всех источников тока должны быть нулевыми. Строго говоря, такому условию удовлетворяют лишь автономные электрические цепи с одним источником. Вполне правомерно отнести сюда и однофазные системы большой мощности, в которых начальные фазы источников энергии различаются весьма незначительно (не более чем на $1-2^\circ$).

Однако предлагаемая методика расчета изменения мощности потерь внутри активного многополюсника

может быть применена и к наиболее распространенным системам — к трехфазным цепям. Условием применимости является синхронная работа трехфазных источников энергии и симметрия распределительной трехфазной цепи и всех ЛЭП. Нагрузки этой трехфазной цепи могут быть несимметричными. Применение известного метода симметричных составляющих позволяет заменить расчет $\Delta(\Delta S)$ в активном многополюснике при несимметричных нагрузках определением $1/3\Delta(\Delta S)$ для каждой из симметричных составляющих в одной из фаз трехфазной цепи, где начальная фаза источника энергии принята равной нулю, с последующим суммированием по симметричным составляющим и утроением полученной величины. Расчетные формулы очевидны, поэтому они не приводятся. Выполненные автором примеры расчета $\Delta(\Delta S)$ в трехфазных цепях с несимметричными нагрузками подтверждают вышеприведенные положения.

Одним из практических примеров применения предлагаемого метода, изложенного ранее (см. сноску) и в настоящей статье, является расчет изменения мощности потерь в электрической системе, рассматриваемой как активный многополюсник, при подключении или изменении нагрузки отдельной тяговой подстанции переменного тока.

Выводы. Изложенный в настоящей статье и ранее (см. сноску) метод и полученные формулы могут быть полезными для определения тех дополнительных потерь электрической энергии в сложных разветвленных электрических цепях и системах, которые обусловлены подключением нагрузочных ветвей или изменением их нагрузки. Это достигается путем расчета или экспериментального измерения режима лишь нагрузочных ветвей без непосредственных расчетов или измерений потерь энергии в самой системе. С использованием метода симметричных составляющих изложенный метод применим для трехфазных цепей.

УДК 621.311.23.012.6

Управление внешней характеристикой источника электропитания

ИСХАКОВ А. С. ОБУХОВ С. Г., УШАКОВ А. В.

Существует ряд потребителей электроэнергии и технологических процессов, источники питания (ИП) которых должны обладать набором внешних характеристик, описываемых неоднозначными нелинейными зависимостями. Например [1], падающие характеристики ИП требуются при зарядке аккумуляторных батарей и для питания устройств дуговой сварки, вакуумных дуговых печей и плазмотронов, возрастающие характеристики используются для стабилизации частоты вра-

щения электродвигателей постоянного тока с последовательным возбуждением и стабилизации плотности тока в гальванической ванне [2], для систем электродвижения внешняя характеристика ИП должна содержать гиперболический участок [3]. При проведении экспериментов в различных областях техники возникает необходимость в применении ИП, обладающих возможностью формирования внешних характеристик по заданным законам в процессе экспериментов и

оперативного перехода с одной характеристики на другую вручную, автоматически или программно.

Традиционный способ управления источником напряжения с целью получения набора внешних характеристик заключается в регулировании коэффициента передачи цепи обратной связи по току. Он используется в различных промышленных источниках и экспериментальных установках [4, 5]. Данный подход ограничивает возможность получения характеристик сложной формы и их количество, и затрудняет реализацию требуемых динамических показателей системы регулирования на каждой характеристике.

В статье рассматриваются различные способы управления ИП с целью изменения его внешних характеристик, позволяющие снять ограничения по их количеству и форме.

В качестве ИП рассматривается преобразователь переменного напряжения в постоянное на основе управляемого выпрямителя. Полагаем, что регулирование выпрямителя осуществляется системой импульсно-фазового управления (СИФУ), обеспечивающей пропорциональную зависимость между сигналом управления и выходной координатой, в качестве которой служат координаты внешней характеристики — выпрямленные значения напряжения и тока. Этому требованию удовлетворяют синхронные СИФУ с синусоидальной разверткой (не во всех режимах) или с интегральным регулятором, различные варианты асинхронных СИФУ [6], а также синхронные СИФУ с дискретным усредняющим фильтром [7].

Рассматриваемые способы базируются на основе принципа подчиненного регулирования, конкретная реализация которого может быть выполнена различным образом. Одним из них является традиционный путь, связанный с управлением ИП на основе информации о непосредственных координатах внешней характеристики — токе и напряжении. Этот подход в зависимости от типа ИП (напряжения или тока) может быть реализован в прямой или обратной форме. Под прямой формой будем подразумевать управление источником напряжения (тока) сигналом обратной связи по току (напряжению).

Для пояснения сути реализации управления в прямой форме на рис. 1, а приведена структурная схема источника напряжения, внутренний контур системы регулирования которого обеспечивает пропорциональную зависимость между сигналом управления U_y и выпрямленным напряжением U_d . Если сигнал U_y формировать с помощью специального преобразователя с заданной функцией преобразования тока I в напряжение U , то внешняя характеристика источника $U_d(I_d)$ будет повторять форму характеристики функционального преобразователя $U(I)$. Таким образом, предусматривая возможность задания с помощью преобразователя необходимого набора характеристик с желаемыми законами $U_j(I)$, где $j \in [1, k]$, можно осуществить воспроизведение любой из k внешних характеристик

$$U_d(I_d) = U_j(I),$$

показанных на рис. 1, б, выбирая конкретную из них с помощью отдельной системы выбора характеристик (СВХ).

Управление этим же источником напряжения в обратной форме организуется преобразованием его в источник тока за счет использования внутреннего токового контура. Тогда характеристики (1) в виде обратных функций

$$I_d(U_d) = I_j(U)$$

могут быть получены при формировании тока управления I_y с помощью преобразователя $I(U)$ с заданными функциями преобразования U в I в соответствии со схемой, изображенной на рис. 1, в. Т. е. вторая схема получается из первой при замене внутреннего контура на внешний и преобразователя $U(I)$ на $I(U)$.

Для формирования множества характеристик произвольной формы процедуру нелинейного преобразования одной координаты в другую целесообразно строить на базе средств цифровой вычислительной техники. Ее конкретное воплощение зависит от типа СИФУ, исполнения датчиков среднего значения (ДСЗ) координат, технического решения функционального преобразователя координат, способа задания и выбора характеристики и от других особенностей, оказывающих существенное влияние на статические и динамические показатели всей системы в целом.

Наиболее эффективным с точки зрения универсальности и быстродействия исполнением преобразователя координат в цифровой системе является табличный метод [8], применение которого предполагает аппроксимацию желаемой характеристики ступенчатой функцией и запись последней в запоминающее устройство (ЗУ).

Показанный на рис. 2, а пример формирования некоторой j -й характеристики иллюстрирует использование этого метода. Заданная характеристика строится в координатных осях $U_d^* = 2^N U_d / U_{d\max}$ и $I_d^* = 2^N I_d / I_{d\max}$, где N — разрядность ЗУ (полагаем равными число линий адреса и данных), $U_{d\max}$ и $I_{d\max}$ — максимальные значения выпрямленных напряжений и тока ИП. Затем характеристика аппроксимируется отрезками прямых линий, параллельных координатным осям и в виде таблицы заносится в ЗУ. При работе системы периодически измеряется и преобразуется в цифровую форму одна из координат внешней характеристики ИП. Полученный код определяет адрес ячейки ЗУ, содержимое

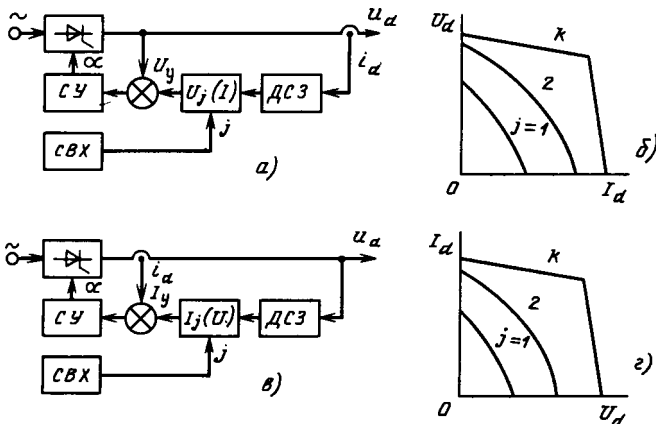


Рис. 1. Структурные схемы и внешние характеристики источников электропитания: а и б — при прямом управлении; в и г — при обратном управлении (СУ — система импульсно-фазового управления).

которой задает сигнал управления внутреннего контура системы регулирования.

Особенностью метода является влияние наклона заданной характеристики на точность ее воспроизведения. Поясним это на примере формирования источником напряжения (рис. 1, а) характеристики, приведенной на рис. 2, а, состоящей из двух отрезков (а, б) и (б, с) с углами наклона $\beta = \arctg(\Delta U_d / \Delta I_d)$, равными β_1 и β_2 соответственно. Нетрудно видеть, что при $\beta \leq 45^\circ$ абсолютная погрешность δ , представляющая собой разность между координатой произвольной точки желаемой характеристики и аппроксимирующим ее отрезком, не превышает половины единицы младшего разряда (е.м.р.) преобразователя координат, а при $\beta > 45^\circ$ возрастает. Аналогичные рассуждения в отношении источника тока (рис. 1, в) показывают, что первая схема с заданной степенью точности формирует пологие ($\beta \in [0^\circ, 45^\circ]$), а вторая — крутопадающие ($\beta \in [45^\circ, 90^\circ]$) внешние характеристики.

Устранить указанный недостаток позволяет комбинированный источник, показанный на рис. 2, б, в котором посредством переключений в цепи обратной связи внутренний и внешний контуры меняются местами в зависимости от текущего положения рабочей точки на внешней характеристике. В схеме используется два преобразователя координат $U(I)$ и $I(U)$, аппроксимирующих каждую из k характеристик. Выбор функции преобразования (1) или (2) осуществляется ключом (К), управляемым схемой выбора канала обратной связи

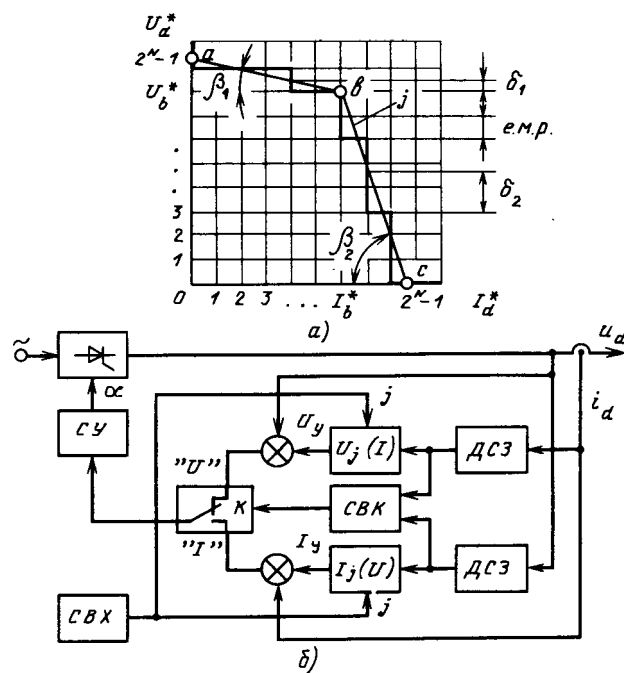


Рис. 2. Внешняя характеристика и структурная схема комбинированного источника

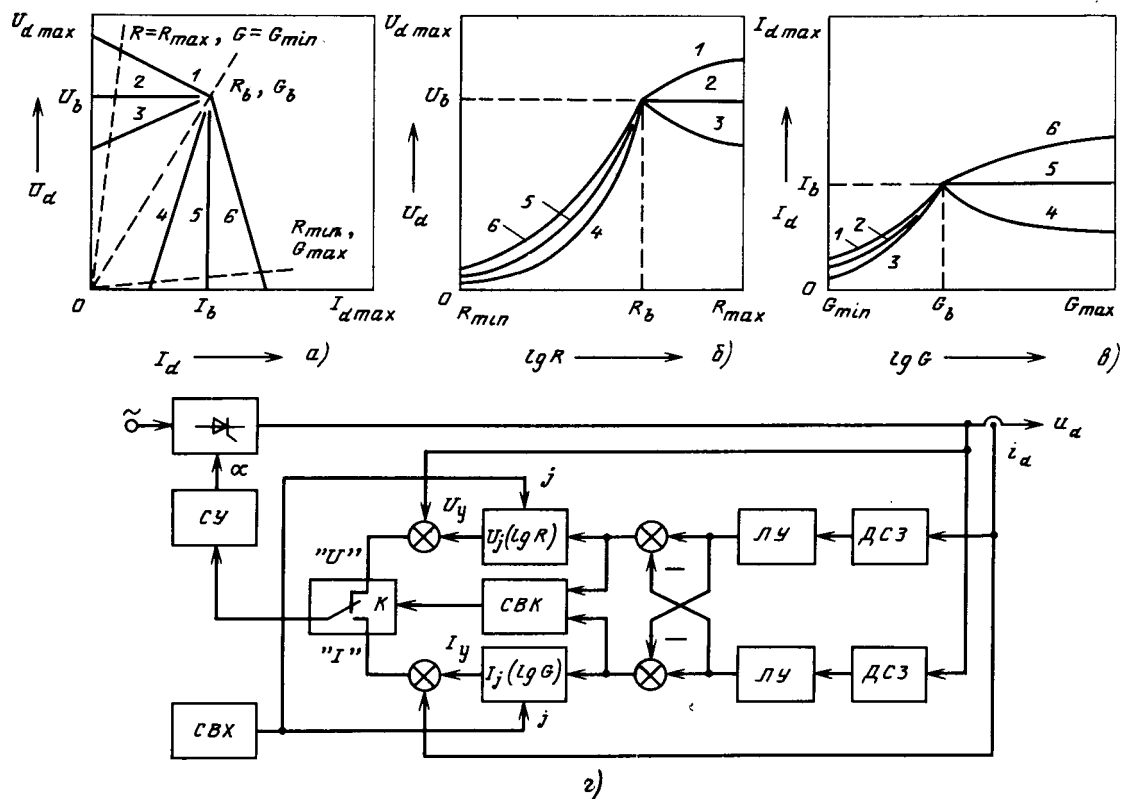


Рис. 3. Характеристики и структурная схема источника с параметрической обратной связью (ЛУ — логарифмирующий усилитель)

(СВК). Для пояснения работы предположим, что рабочая точка лежит на отрезке (a, b) внешней характеристики ИП (см. рис. 2, a), при этом ключ K находится в верхнем по схеме положении « U » и характеристика формируется на основании зависимости (1). При увеличении тока больше I_b СВК переводит ключ K в положение « I » и формирование участка (b, c) осуществляется в соответствии с зависимостью (2). Схема выбора канала обратной связи при этом начинает реагировать на величину выпрямленного напряжения и обратное переключение ключа K может произойти только при превышении напряжением уровня U_b .

Недостатком рассмотренного способа управления ИП на основе информации о непосредственных координатах внешней характеристики является сложность обеспечения устойчивой работы на характеристике с неоднозначными участками, например 3 и 4 на рис. 3, a . Устранить его позволяет способ управления источником на основе данных о параметрах нагрузки. При RL -нагрузке в статическом режиме таким параметром является активное сопротивление R (или проводимость G). Поэтому реализация способа в схемах источников, представленных на рис. 1, a и b , сводится к введению измерителя параметра и замене функционального преобразователя $U(I)$ и $I(U)$ на $U(R)$ и $I(G)$ соответственно. Под заменой функционального преобразователя подразумевается построение и аппроксимация заданной характеристики в новых координатах. Пример подобной замены показан на рис. 3, $a-v$.

Структурная схема ИП, управляемого на основе информации о параметрах нагрузки, приведена на рис. 3, z . В схеме используется косвенное измерение усредненных параметров нагрузки посредством вычисления отношений выпрямленных напряжения и тока. Отношение двух величин определяется через разность их логарифмов [9] — в связи с целесообразностью представления измеряемого параметра в логарифмическом масштабе для расширения динамического диапазона. Переключатель в цепи обратной связи используется аналогично рассмотренному выше с целью исключения влияния наклона кривой функциональной зави-

симости на точность воспроизведения отдельных участков внешней характеристики.

Выводы. 1. Изложены способы управления ИП, позволяющие формировать на его выходе набор внешних характеристик произвольной формы.

2. Дан анализ возможностей работы ИП в статическом режиме.

3. Вопросы обеспечения заданных динамических показателей, предполагающие анализ структуры ИП с конкретной системой импульсно-фазового управления выпрямителем, требуют отдельного рассмотрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Силовая электроника: Справочное пособие / Под ред. В. А. Лабунцова. — М.: Энергоатомиздат, 1987.
2. Бондаренко Н. Н., Братолюбов В. Б. Низковольтные преобразователи для гальванотехники и электрохимических станков. — М.: Энергоатомиздат, 1987.
3. Хайкин А. Б., Васильев В. Н., Полонский В. И. Автоматизированные гребные электрические установки. — М.: Транспорт, 1986.
4. Гладков Э. А. Формирование статической вольт-амперной характеристики источника питания дуги с помощью обратных связей по току и напряжению. — Сварочное производство, 1974, № 10.
5. Гладков Э. А., Фетисов Г. П., Синельников Н. Г. Совершенствование управления процессами дуговой сварки на базе высокочастотных преобразователей энергии (обзор). — Сварочное производство, 1984, № 3.
6. Писарев А. Л., Деткин Л. П. Управление тиристорными преобразователями (системы импульсно-фазового управления). — М.: Энергия, 1975.
7. Исхаков А. С., Ушаков А. В., Шевченко А. В. Выпрямители с программируемыми статическими и динамическими характеристиками. — Тезисы докладов IV ВНТК «Проблемы преобразовательной техники». Ч. 3. — Киев: ИЭД АН УССР, 1987.
8. Лукьянов Д. А. ПЗУ — универсальный элемент цифровой техники. — Микропроцессорные средства и системы. 1986, № 1.
9. Тимонтеев В. Н., Величко Л. М., Ткаченко В. А. Аналоговые перемножители сигналов в радиоэлектронной аппаратуре. — М.: Радио и связь, 1981.

[14.08.89]

Методика измерения дифференциальных амплитудных спектров импульсов частичных разрядов

НАБОКА Б. Г., канд. техн. наук,
БЕСПРОЗВАННЫХ А. В., канд. техн. наук,
ГЛАДЧЕНКО В. Я., канд. техн. наук

Введение. Характеристики импульсов частичных разрядов (ЧР) подвержены весьма большому разбросу. Поэтому трудно установить связь между ЧР и показателями качества высоковольтной изоляции.

Появление многоканальных анализаторов импульсов, способных накапливать информацию и оперативно обрабатывать ее, коренным образом изменило подходы к проблеме диагностики высоковольтной изоляции по характеристикам импульсов ЧР. Стало возможным получать статистически достоверные результаты путем усреднения большого числа (сотен и тысяч) наблюдений.

В настоящей статье описана методика использования многоканальных анализаторов импульсов (предназначенных, как правило, для ядерной спектроскопии) применительно к регистрации дифференциальных амплитудных спектров (ДАС) импульсов ЧР при испытаниях объектов переменным напряжением частотой 50 Гц.

Рассмотрены вопросы согласования характеристик схем селекции ЧР и анализатора, режимы ограничения амплитуды анализируемых импульсов, режимы нормировки длительности измерения; представлены результаты калибровки.

Согласование характеристик схем селекции ЧР и анализатора. Любой анализатор сигналов имеет ряд ограничений на параметры входных импульсов: по форме, амплитуде, полярности, частоте следования. Например, для АИ-1024-95 длительность фронта τ_f должна быть не менее 0,5 мкс; а длительность импульса τ_n — не более 5 мкс; амплитуда U_m — от -2 до $+15$ В (т. е. импульсы должны быть почти униполярными); максимальная частота следования — не выше 50 кГц.

Для обеспечения указанных требований по форме импульсов ЧР нами использована схема с включением измерительного элемента Z в ветвь заземления соединительного конденсатора C_0 . В качестве измерительного элемента использовалось безындуктивное сопротивление $Z=R=34$ Ом, емкость соединительного конденсатора — 0,01 мкФ. Переходная характеристика широкополосного усилителя УШ-10 наиболее оптимальна при установке переключателя «длительность» в положение 1,5 мкс, а «нарастание» — 1,3 мкс. При меньших значениях параметров переходных цепочек УШ-10 возрастает уровень собственных шумов, при больших — падает чувствительность. Тогда кажущемуся заряду $q_{\text{ЧР}}=1000$ пКл на емкости $C_x \approx 1$ мкФ соответствует униполярный импульс на выходе УШ-10 амплитудой 500 мВ при коэффициенте усиления $K_{\text{ус}}=100 \times 10$ и 5 В при $K_{\text{ус}}=100 \times 100$. Ограничение амплитуды сигнала U_m на входе анализатора достигается заглублением $K_{\text{ус}}$ либо установкой пороговых элементов.

Для обеспечения униполярности импульсов на входе анализатора можно использовать фазовую селекцию и работу анализатора в так называемом режиме совпадения, либо диодный фиксатор и работу в режиме антисовпадений.

Для фазовой селекции импульсов положительной полярности на вход линейного ключа анализатора подается стробирующий сигнал частотой 50 Гц, синфазный с испытательным напряжением. Стробирующий сигнал формируется с помощью калибратора осциллографа С8-12. Вход анализатора запирается в моменты подачи сигнала амплитудой 4,5—5 В.

Результаты сравнения двух режимов выделения униполярных импульсов для конденсаторной секции емкостью 0,5 мкФ с толщиной диэлектрика 60 мкм представлены в таблице. Оба режима дают близкие результаты. Различия начальных участков ДАС связаны с погрешностями работы диодного фиксатора: при подавлении отрицательных импульсов на выходе фиксатора могут появляться небольшие положительные выбросы амплитудой до 0,1 В.

Для ограничения частоты анализируемых импульсов ЧР приходится снижать уровень испытательных напряжений, а частоту следования контролировать с помощью более быстродействующего прибора, чем анализатор, например, по частотомеру (Ф 5080, ЧЗ-34 и др.).

Режимы ограничения амплитуды анализируемых импульсов. Каждый анализатор характеризуется так называемым «мертвым» временем (τ_m), т. е. временем, в течение которого вход анализатора закрыт после приема очередного импульса. Для АИ-1024-95 $\tau_m = \tau_f + m/20 + 3$ мкс, где m — номер уровня квантования. Так, при $m=1$ (для первого канала) $\tau_m = 3,25$ мкс, а при $m=128$ (для последнего канала первой зоны) $\tau_m = 9,6$ мкс. При ширине канала анализатора $\Delta U = 10$ мВ первому уровню квантования соответствуют импульсы ЧР амплитудой 10 мВ, а 128-му — 1280 мВ. Среднее время регистрации импульсов с амплитудой от 0,01 до 1,28 В (соответствующих первой зоне анализатора) равно 6,4 мкс. Если в составе анализируемых импульсов имеются такие, амплитуда которых достигает 10 В, то «мертвое» время анализатора увеличивается до 54,35 мкс. Поэтому для снижения потерь информации целесообразно ограничивать амплитуду анализируемых импульсов как сверху, так и снизу. Ограничение снизу необходимо для отстройки от шумовых импульсов, которые ввиду их многочисленности могут приводить к увеличению «мертвого» времени анализатора. Сравнение строк 2 и 4, 3 и 5 в таблице показывает, что ограничение снизу весьма результативно: число импульсов существенно возрастает уже при подавлении первых 10 каналов (порог «3,8 %»).

Режимы нормировки длительности измерения. Увеличение длительности измерения τ — один из путей повышения достоверности измерений параметров случайных процессов. Дисперсия наблюдений должна уменьшаться пропорционально $1/\sqrt{\tau}$. Однако для реальных объектов такая закономерность может нарушаться, например, из-за явления дрейфа измеряемых характеристик. Поэтому длительность измерений τ приходится ограничивать. Как видно из рис. 1, для исследованного объекта нецелесообразно увеличивать τ выше 10 с.

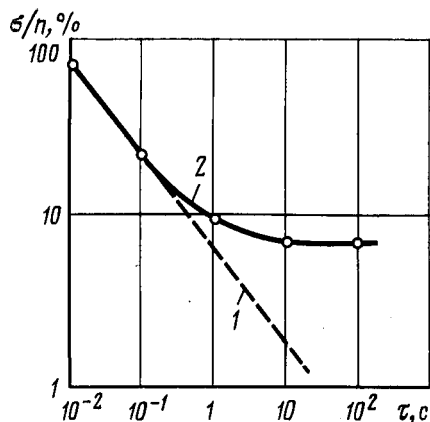


Рис. 1. Зависимость коэффициента вариации от длительности измерений частоты ЧР ($U=550$ В, секция 17): 1 — теоретическая зависимость вида $\sigma/\bar{n} \sim 1/\sqrt{\tau}$; 2 — реальная зависимость

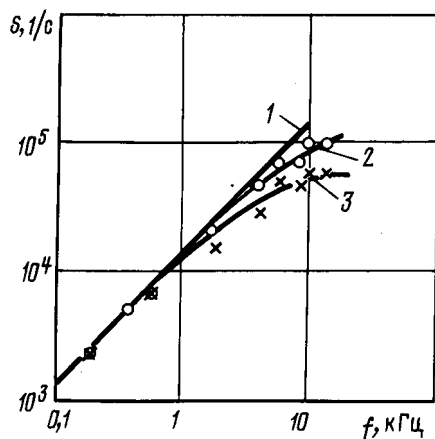


Рис. 2. Оценка предельной разрешающей способности установки ($S = \sum_{i=1}^{128} \Delta n_i$; $\tau = 12,8$ с): 1 — идеальная зависимость при 0 % потери информации, $S = f\tau$; 2 — реальная зависимость при нормировке по «живому» времени; 3 — реальная зависимость при нормировке τ по текущему времени

Анализаторы, как правило, могут эксплуатироваться в режимах нормировки по «живому» и текущему времени. Режим нормировки τ по «живому» времени позволяет скомпенсировать потери информации, когда вход анализатора закрыт, ее обработкой в дополнительные интервалы времени. Переход от одного режима к другому может приводить к заметным изменениям накопленной информации по каналам (см. таблицу, строки 5 и 7).

Оценка доли теряемой информации выполняется путем сопоставления показаний частотомера и анализатора (суммы показаний анализатора по всем задействованным каналам). Как видно из рис. 2, потеря информации при частоте импульсов ЧР 10 кГц составляет

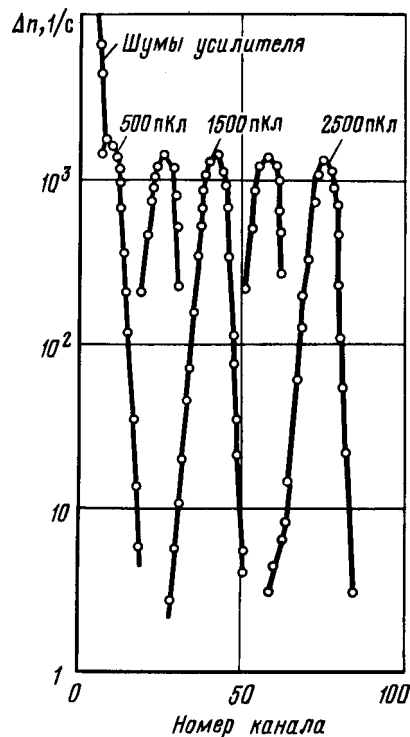


Рис. 3. Результаты калибровки установки при $K_{yc} = 100 \times 10$ ($\tau = 12,8$ с; $f = 1$ кГц)

при нормировке по текущему времени — 60 %, а по «живому» — только 30 %. При испытании объектов контроль доли теряемой информации осуществляется по стрелочному индикатору «мертвого» времени, показания которого не должны превышать 30 %.

Результаты калибровки экспериментальной установки. Калибровка проводится в соответствии с ГОСТ 2074-83 путем подачи прямоугольных импульсов на объект C_x через разделительную емкость C_r .

Как видно из рис. 3, калибровочные импульсы падают в ряд соседних каналов анализатора, причем с ростом напряжения разброс амплитуды остается прежним — ± 13 каналов, т. е. ± 130 МВ. Подобная аддитивная нормально распределенная помеха уменьшает разрешающую способность установки, но одновременно приводит к сглаживанию дифференциальных амплитудных спектров, облегчая их анализ.

Выводы. 1. Воспроизводимость результатов измерений дифференциальных амплитудных спектров импульсов частичных разрядов достигается при максимальном использовании технических возможностей современных многоканальных анализаторов. Для этого необходимо:

обеспечить длительность импульсов ЧР на выходе схемы селекции не менее 0,5 мкс путем соответствующего выбора параметров измерительных элементов (R и C_0) и формирования переходной характеристики широкополосного усилителя;

осуществить режим фазовой селекции импульсов

Влияние режимов работы анализатора на результаты измерений ДАС

Испытательное напряжение, В	Нижний порог дискриминации, %	Режимы селекции импульсов положительной полярности	Режимы нормировки длительности измерений	Число импульсов ЧР, попадающих в первые каналы анализатора за время наблюдения $\tau = 12,8$ с при $K_{yc} = 100 \times 10$ для следующих номеров каналов											
				1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	
500	0	АС СС	Т	3652 1847	2639 1740	1804 1268	1207 1076	1015 819	907 755	775 671	674 570	525 462	441 390	357 362	
	38	АС СС	Т	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1272 1010	913 814	856 697	612 621	512 541	472 441	
700	3,8	АС	Т	0	0	0	0	0	4837	3705	2904	2359	1913	1721	
			ТР	0	0	0	0	0	6326	4653	3771	3037	2551	2033	
		СС	Т	0	0	0	0	0	3430	2919	2311	2044	1763	1472	

Примечания. 1. АС — с помощью диодного фиксатора; СС — фазовая селекция. 2. Т — по текущему времени; ТР — по «живому» времени.

с помощью регулятора нижнего уровня дискриминации отсеять попадание шумовых импульсов на вход анализатора;

выбрать оптимальную длительность измерения τ по кривым, аналогичным показанным на рис. 1;

использовать режим нормировки длительности измерений по так называемому «живому» времени.

2. Наличие аддитивной помехи можно контролировать по разбросу калибровочных импульсов при нескольких значениях их амплитуды.

[15.02.89]

О различных подходах к расчету объемной плотности электромагнитных сил в нелинейной магнитной системе

АБРАМКИН Ю. В., канд. техн. наук

Московский энергетический институт

В № 5 за текущий год «Электричество», в рамках дискуссии по электромагнитным силам (ЭМС) опубликована статья проф. А. Николаиде (Румыния), где утверждается адекватность формулы Дж. К. Максвелла для объемной плотности (ОП) ЭМС в стационарном магнитном поле [1]:

$$\vec{f} = [\vec{J} \times \vec{B}] - (1/2)H^2 \text{grad } \mu \quad (1)$$

и формулы

$$\vec{f}_* = \mu_0 [\vec{J} \times \vec{H}] + \mu_0 (\vec{M} \nabla) \vec{H}, \quad (2)$$

рекомендованной в свое время А. Эйнштейном и И. Лаубом [2] и совпадающей после несложных преобразований с формулой для ОП ЭМС

$$\vec{f}_* = [\vec{J} \times \vec{B}] + \mu_0 \text{grad} (\vec{M} \vec{H}) |_{\vec{M} = \text{const}}, \quad (3)$$

впервые предложенной Дж. К. Максвеллом [3].

Приведенный ниже анализ показывает обоснованность утверждения об идентичности формул (1) и (2). Действительно, если указанные формулы являются адекватными, то это означает, что любая из этих формул может быть тождественно преобразована в другую.

Однако в действительности такого преобразования не существует. Убедимся в справедливости такого вывода, выбрав в качестве объекта последующих преобразований, например, формулу (2). Предполагаемое ее преобразование осуществить несложно, если учесть следующие очевидные в условиях рассматриваемой задачи соотношения, связывающие между собой физические величины рассматриваемого стационарного магнитного поля \vec{B} , \vec{H} , \vec{M} и магнитную проницаемость μ :

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu \vec{H}; \quad \vec{M} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \vec{H} = (\mu_r - 1) \vec{H}; \quad (4)$$

$$\text{div } \vec{B} = \text{div } \vec{H} + \text{div } \vec{M} = \mu \text{div } \vec{H} + \vec{H} \text{grad } \mu = 0; \quad (5)$$

$$\text{rot } \vec{M} = \text{rot} \{ (\mu_r - 1) \vec{H} \} = (\mu_r - 1) \text{rot } \vec{H} + \text{grad} (\mu_r - 1) \times \vec{H}; \quad (6)$$

$$\text{grad} (\vec{M} \vec{H}) = (\vec{M} \nabla) \vec{H} + (\vec{H} \nabla) \vec{M} + \vec{M} \text{rot } \vec{H} + \vec{H} \text{rot } \vec{M}; \quad (7)$$

$$\text{rot} [\vec{M} \times \vec{H}] = (\vec{H} \nabla) \vec{M} - (\vec{M} \nabla) \vec{H} + \vec{M} \text{div } \vec{H} - \vec{H} \text{div } \vec{M} = 0, \quad (8)$$

где учтено, что в изотропной среде векторы намагниченности \vec{M} и напряженности \vec{H} коллинеарны и в магнитном поле отсутствуют истоки вектора магнитной индукции \vec{B} .

Уравнению (5) можно придать иной более удобный для последующих преобразований вид

$$\text{div } \vec{M} = -\text{div } \vec{H} = \frac{\vec{H} \text{grad } \mu}{\mu}. \quad (9)$$

Решим уравнение (8) относительно векторного выражения $(\vec{H} \nabla) \vec{M}$ с учетом (9):

$$(\vec{H} \nabla) \vec{M} = (\vec{M} \nabla) \vec{H} - (\text{div } \vec{H}) (\vec{H} + \vec{M}) = (\vec{M} \nabla) \vec{H} - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \text{div } \vec{H}. \quad (10)$$

Обратимся теперь к уравнению (7) и заменим в нем векторные выражения $(\vec{H} \nabla) \vec{M}$ и $\text{rot } \vec{M}$ их выражениями в соответствии с (9) и (6), а двойное векторное произведение

$$[\vec{H} \times [\text{grad } \mu_r \times \vec{H}]] \quad (11)$$

$$(\bar{H}\bar{H})\text{grad } \mu - \bar{H}(\bar{H} \text{ grad } \mu). \quad (12)$$

Получим в итоге

$$\text{grad } (\bar{M}\bar{H}) = 2(\bar{M} \nabla) \bar{H} + 2[\bar{M} \times \bar{J}] + H^2 \text{ grad } \mu, \quad (13)$$

откуда

$$\begin{aligned} \mu_0(\bar{M} \nabla) \bar{H} &= \frac{\mu_0}{2} \text{grad } (\bar{M}\bar{H}) + [\bar{J} \times \bar{M}] \mu_0 - \\ &- (1/2)H^2 \text{ grad } \mu. \end{aligned} \quad (14)$$

После замены в (2) векторного выражения $\mu_0(\bar{M} \nabla) \bar{H}$ равным ему выражением в соответствии с (14) получим, учитывая (1), следующее соотношение:

$$\bar{f} = \bar{f} - \frac{\mu_0}{2} \text{grad } (\bar{M}\bar{H}), \quad (15)$$

которое в явной форме свидетельствует об ошибочности отождествления формул (1) и (2) для ОП ЭМС в стационарном магнитном поле.

Нетрудно, однако, убедиться, что и «интегральный» способ преобразования, которого придерживается проф. А. Николаиде при корректной форме его проведения также приводит в конечном итоге к соотношению (15).

Действительно, электромагнитная сила \bar{F} , действующая на любой объем V , выделенный в пределах рассматриваемой системы, определится путем суммирования элементарных ЭМС из уравнения $\bar{F} = \int_V \bar{f} dV = \int_V d\bar{F}$.

Проф. А. Николаиде утверждает (не приводя, к сожалению, доказательства), что ЭМС, вычисленные по нижеприведенным формулам

$$\bar{F} = \int_V \bar{f} dV = \int_V \left([\bar{J} \times \bar{B}] - \frac{1}{2} H^2 \text{ grad } \mu \right) dV; \quad (16)$$

$$\bar{F} = \int_V \bar{f} dV = \int_V \left([\mu_0 \bar{J} \times \bar{H}] + \mu_0 (\bar{M} \nabla) \bar{H} \right) dV \quad (17)$$

адекватны. Убедимся в отсутствии оснований для такого утверждения. Заменяя в подинтегральном выражении (16) векторную функцию магнитной индукции равным ему выражением $\mu_0(\bar{H} + \bar{M})$, приведем это уравнение (16) к виду

$$\bar{F} = \int_V \bar{f} dV = \int_V \left\{ [\mu_0 \bar{J} \times \bar{H}] + \mu_0 \bar{J} \times \bar{M} - (1/2) H^2 \text{ grad } \mu \right\} dV. \quad (18)$$

Из сопоставления уравнений (17) и (18) следует, что в случае предполагаемой адекватности ЭМС F по (16), (18) и \bar{F} по (17) должно выполняться соотношение

$$\int_V \mu_0 (\bar{M} \nabla) \bar{H} dV = \int_V \left\{ [\mu_0 \bar{J} \times \bar{M}] - (1/2) H^2 \text{ grad } \mu \right\} dV. \quad (19)$$

В действительности же последнее уравнение не выполняется. Нижеприведенный анализ подтверждает такое заключение.

Используя очевидные соотношения [см. (4) и (7)]

$$\bar{M} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \bar{H}; \quad (20)$$

$$(\bar{H} \nabla) \bar{H} = (1/2) \nabla (\bar{H}\bar{H}) - \bar{H} \times \text{rot } \bar{H}, \quad (21)$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_V \mu_0 (\bar{M} \nabla) \bar{H} dV &= \int_V (\mu - \mu_0) (\bar{H} \nabla) \bar{H} dV = \int_V (\mu - \mu_0) (1/2) \nabla \\ &\nabla (\bar{H}\bar{H}) dV - \int_V (\mu - \mu_0) [\bar{H} \times \text{rot } \bar{H}] dV. \end{aligned} \quad (23)$$

Подинтегральное выражение в первом из интервалов в правой части последнего уравнения удастся подвергнуть дальнейшим преобразованиям, применив следующее очевидное (проверяемое непосредственным вычислением) соотношение:

$$\begin{aligned} (\mu - \mu_0) (1/2) \text{grad } (\bar{H}\bar{H}) &= \\ &= \text{grad } \{ (1/2) (\mu - \mu_0) (\bar{H}\bar{H}) \} - (1/2) H^2 \text{ grad } \mu. \end{aligned} \quad (24)$$

Из совместного рассмотрения уравнений (24) и (23) следует искомое соотношение:

$$\begin{aligned} \int_V \mu_0 (\bar{M} \nabla) \bar{H} dV &= \int_V \{ [\bar{J} \times \mu_0 \bar{M}] - (1/2) H^2 \text{ grad } \mu + \\ &+ (1/2) \text{grad } (\bar{M}\bar{H}) \} dV, \end{aligned} \quad (25)$$

которое отличается от (19) присутствием третьего члена $(1/2) \text{grad } (\bar{M}\bar{H})$ в подинтегральном выражении.

Принимая во внимание уравнения (17), (25), приходим к заключению об адекватности следующих двух интегральных выражений:

$$\begin{aligned} \int_V \bar{f} dV &= \int_V \{ [\bar{J} \times \mu_0 (\bar{M} + \bar{H})] - (1/2) H^2 \text{ grad } \mu + \\ &+ (1/2) \text{grad } (\bar{M}\bar{H}) \} dV, \end{aligned} \quad (26)$$

откуда путем приравнивания подинтегральных выражений вновь приходим к установленному ранее несколько иным путем соотношению, связывающему расчетные выражения для ОП ЭМС \bar{f} (1) и \bar{f}^* (2), исключающему их адекватность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Максвелл Дж. К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля.— М.: Гостехиздат, 1954.
2. Эйнштейн А., Лауб И. О пондеромоторных силах, действующих в электромагнитном поле на покоящиеся тела.— М.: 1980 (ВЗ с. 126—134).
3. Maxwell J. C. A treatise on electricity and magnetism.— Oxford Clarendon Press, 1873, vol. 1 and 2.

[30.05.90]

Ответ автора

Начало дискуссии положила статья автора [1], в которой предлагались концепции определения электромагнитных сил в магнетиках, основанные на представлениях Ампера об эквивалентности намагниченной среды системе молекулярных токов. В статье [4] А. В. Иванов-Смоленский оспаривал модель магнетика Ампера и основанные на ней работы, усматривая в ней неэквивалентность в отношении напряженности поля и магнитной энергии. Там же и в последующих публикациях А. В. Иванова-Смоленского и его многочисленных сторонников предлагались «единственно правильные» формулы для расчета электромагнитных сил, которые, по мнению авторов, вытекали из работы Максвелла [23]. Попутно отвергались выражения объемных сил и тензоров поля, выведенные в Трактеате Максвелла [19] и в работе Эйнштейна и Лауба [20]. Результаты измерений на экспериментальной установке [3], осуществленных автором совместно с М. А. Молодцовой с целью проверки концепций [1], построенных на модели Ампера, оспаривались критиками. Проводились результаты собственных экспериментов, опровергавших, по мнению их авторов, концепции, построенные на модели Ампера.

В процессе дискуссии обсуждались формулы для плотности объемных сил, действующих на магнетик с протекающими через него токами проводимости:

$${}^M\vec{f}_v = \vec{j}_n \times \vec{B} + \mu_0 [(\vec{M} \nabla) \vec{H} - \text{rot } \vec{H} \times \vec{M}] = \vec{j}_n \times \vec{B} + \mu_0 [\text{grad } (\vec{M} \vec{H})]_{M=\text{const}}; \quad (1)$$

$${}^{\mathcal{A}}\vec{f}_v = \mu_0 [\vec{j}_n \times \vec{H} + (\vec{M} \nabla) \vec{H}]; \quad (2)$$

$${}^C\text{-}\mathcal{L}\vec{f}_v = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} \times \vec{B}; \quad (3)$$

$${}^{\mathcal{L}}\vec{f}_v = \mu_0 \left[\vec{j}_n \times \vec{H} + (\vec{M} \nabla) \left(\vec{H} + \frac{1}{2} \vec{M} \right) \right]; \quad (4)$$

$${}^H\vec{f}_v = \vec{j}_n \times \vec{B} - \frac{1}{2} H^2 \text{grad } \mu, \quad (5)$$

соответствующие этим формулам тензоры поля

$${}^M T_{pq} = {}^{\mathcal{A}} T_{pq} = H_p B_q - \frac{\mu_0}{2} H^2 \delta_{pq}; \quad (6)$$

$${}^C\text{-}\mathcal{L} T_{pq} = \frac{1}{\mu_0} \left(B_p B_q - \frac{1}{2} B^2 \delta_{pq} \right); \quad (7)$$

$${}^{\mathcal{L}} T_{pq} = H_p B_q - \frac{\mu_0}{2} (H^2 \delta_{pq} - M_p M_q); \quad (8)$$

$${}^H T_{pq} = \mu \left(H_p H_q - \frac{1}{2} H^2 \delta_{pq} \right) \quad (9)$$

и деформации, вызываемые электромагнитными силами в ферромагнитных телах.

Формула (1) выведена в Трактеате Максвелла [19], а формула [2] — в работе Эйнштейна и Лауба [20]. Этим формулам соответствует один и тот же тензор (6). Формула (3) в случае неполяризованной среды ($M=0$) совпадает с (1) и использовалась Д. Стреттоном [21] для определения тензора поля [7] при отсутствии магнетиков. Эти формулы были распространены автором и на поляризованную среды, где магнетик замещался макроскопической моделью [1]. Формулы (5) и (6) применительно к диа- и парамагнитным средам доказаны в монографии И. Е. Тамма [22] и приводятся в работах других авторов. А. В. Иванов-Смоленский оспаривал универсальность формулы (1) при удалении диполя, состоящего из

Смоленский применил их и к ферромагнитным средам. Он и все его единомышленники [4]—[18] считают эти формулы «единственно правильными», а все остальные — «ошибочными». В дискуссионных статьях излагались доводы, приведшие их авторов к такому суждению.

Прежде чем разбирать доводы критиков, рассмотрим физические законы, на которых базируются формулы (1)—(4) и (6)—(8) и условия задач, для которых эти формулы выведены.

Вывод формул (1) и (5) дан Максвеллом в § 639 Трактата [19]. Плотность силы \vec{f}_n , действующей на ток проводимости, распределенный в элементе объема dV с плотностью \vec{j}_n , определялась по формуле Ампера, обобщенной Максвеллом на случай поляризованной среды

$$\vec{f}_n = \vec{j}_n \times \vec{B}, \quad (10)$$

где \vec{B} — результирующая индукция в элементе объема.

Плотность силы взаимодействия заключенного в элементе объема магнетика с внешним полем $\mu_0 \vec{H}$ определялась как взятый с обратным знаком градиент потенциальной функции U :

$$U = -\mu_0 (\vec{M} \vec{H}); \quad (11)$$

$$\vec{f}_m = -\text{grad } U, \quad (12)$$

где \vec{M} и \vec{H} — намагниченность и напряженность поля в магнетике.

Потенциальная функция определялась как работа, которую необходимо совершить при удалении элемента с намагниченностью M в бесконечность, где напряженность полагалась равной нулю. При этом оговаривалось, что в процессе перемещения намагниченность элемента должна сохраняться на постоянном уровне.

Согласно (11) и (12)

$$\vec{f}_m = \mu_0 [\text{grad } (\vec{M} \vec{H})]_{M=\text{const}} = \mu_0 M \text{grad } (\vec{H} \vec{e}_m), \quad (13)$$

где \vec{e}_m — орт \vec{M} .

Плотность \vec{f}_n соответствует первому члену (1), а плотность \vec{f}_m — второму.

Потенциальная функция U существует только в безвихревом поле, где совершаемая при перемещении магнетика работа не зависит от траектории, соединяющей начальную и конечную точки. В безвихревом поле

$$\text{rot } \vec{H} = 0; \quad \vec{H} = -\text{grad } \psi, \quad (14)$$

где ψ — скалярный потенциал.

Выражение потенциальной функции (11) можно получить непосредственным вычислением работы при удалении элемента магнетика в бесконечность.

Сила, действующая на монополю m , находящийся во внешнем поле $\mu_0 \vec{H}$

$$\vec{F} = \mu_0 m \vec{H}. \quad (15)$$

Согласно (14) и (15) работа, совершаемая при удалении монополя в бесконечность при условии $m = \text{const}$,

$$U_m = \int_0^\infty \vec{F} d\vec{r} = -\mu_0 m \int_0^\infty \text{grad } \psi d\vec{r} = \mu_0 m \psi.$$

двух сдвинутых на \vec{l} монополей противоположного знака,

$$U_d = \mu_0 m (\psi_1 - \psi_2),$$

где ψ_1 и ψ_2 — скалярные потенциалы в точках расположения монополей.

При малом \vec{l}

$$\psi_1 - \psi_2 = l \frac{\partial \psi}{\partial \vec{l}} = l \vec{e}_l \text{grad } \psi = -(\vec{l} \vec{H}),$$

где \vec{e}_l — орт \vec{l} .

Учитывая, что $m \vec{l} = \vec{p}_m$ — магнитный момент диполя, находим

$$U_d = -\mu_0 \vec{p}_m \vec{H}. \quad (16)$$

Плотность магнитного момента есть намагниченность \vec{M} и работа, отнесенная к единице объема магнетика, будет выражаться формулой (11). Элемент магнетика должен выделяться из трубки поля \vec{M} с тем, чтобы охватывающая его поверхность не пересекала диполей. Внешним полем для элемента магнетика будет индукция в полости тела, из которой удален магнетик. Максвелл отмечал [19, § 605], что если полость имеет форму узкой щели, вырезанной параллельно линиям поля \vec{M} , то индукция в полости будет $\mu_0 \vec{H}$. Если же щель перпендикулярна линиям поля \vec{M} , то индукция в полости будет такой же, как и в теле. Так как в потенциальную функцию (11) входит внешнее поле $\mu_0 \vec{H}$, то тем самым предполагается, что элемент помещен в полость, вырезанную из трубки поля \vec{M} . На это обстоятельство обратил внимание Дж. Дж. Томсон, редактировавший третье английское издание Трактата Максвелла.

В работе [2] указывалось, что при таком подходе в формуле (1) не учитывается сила взаимодействия элемента с полем устраненных элементов той же трубки. Далее отмечалось, что указанное обстоятельство несущественно при определении результирующей силы, действующей на намагниченное тело, так как неучтенные силы взаимодействия взаимно компенсируются по длине каждой трубки.

При определении силы, действующей на магнетик, по формуле (12) достаточно, чтобы потенциальная функция (11) существовала внутри элемента и в малой окрестности от его поверхности. Вихревая составляющая напряженности внутри элемента от заключенных в нем токов проводимости с конечной плотностью \vec{j}_n будет малой величиной по сравнению с напряженностью от всех остальных источников поля [22, § 44], и ее можно опустить. Тогда поле внутри упомянутой обмотки станет потенциальным.

Потенциальная функция (11) отличается от взятой с обратным знаком плотности магнитной энергии

$$W = \int_0^B H dB. \quad (17)$$

Механическую работу dA , совершаемую ферромагнитным телом при перемещении в магнитном поле на отрезок $d\vec{r}$, можно связать с изменением магнитной энергии при перемещении, исходя из уравнения энергетического баланса

$$dA = dW_n + W_1 - W_2, \quad (18)$$

где W_1 и W_2 — магнитная энергия системы до и после

перемещения; dW_n — электрическая энергия источников, поступившая в систему при перемещении:

$$dW_n = \int_{\psi_1}^{\psi_2} I d\psi \quad (19)$$

(индексы 1 и 2 относятся к начальному и конечному положениям тела).

Уравнение (18) не связано с требованиями потенциальности поля, консервативности системы и постоянства M при перемещении. В нем фигурируют действительные физические величины.

Рассмотрим в качестве примера применение уравнения энергетического баланса для электромагнита при $\mu_r = \text{const}$. Расположенная на ярме катушка питается от источника напряжения. Магнитная энергия электромагнита при фиксированном положении якоря

$$W = \frac{1}{2} \Psi I, \quad (20)$$

где I и Ψ — ток и потокосцепление катушки.

Пусть якорь совершает малое перемещение в сторону уменьшения зазора. Рассмотрим случай, когда при перемещении якоря $I = \text{const}$ и изменяется только потокосцепление. От источника при перемещении якоря согласно (19) поступает энергия

$$dW_n = (\Psi_2 - \Psi_1) I. \quad (21)$$

Согласно (18), (20) и (21)

$$dA = \frac{1}{2} (\Psi_2 - \Psi_1). \quad (22)$$

В случае, когда меняется только ток, а потокосцепление остается постоянным, $dW_n = 0$ и согласно (18) и (20)

$$dA = \frac{1}{2} \Psi (I_1 - I_2) = W_1 - W_2. \quad (23)$$

Выражения (22) и (23) отличаются знаком. Это объясняется тем, что в случае (23) система консервативна и $W_2 < W_1$, а в случае (22) за счет энергии, поступившей от источника, $W_2 > W_1$. В случае нелинейной зависимости Ψ от I задача расчета dA из энергетического баланса усложняется.

Силу взаимодействия магнетика с внешним полем $\mu_0 \vec{H}$ Эйнштейн и Лауб находили, пользуясь представлениями магнетостатики [20]. Вырезанный из трубки поля \vec{M} элемент магнетика заменялся диполем с магнитными зарядами $\pm m$, сдвинутыми на длину элемента. Сила, действующая на диполь определялась как векторная сумма сил, действующих на монополи противоположного знака, сдвинутые на элементарный отрезок \vec{l} . Согласно (15)

$$\vec{F} = \mu_0 m (\vec{H}_1 - \vec{H}_2), \quad (24)$$

где \vec{H}_1 и \vec{H}_2 — напряженности в точках расположения диполей.

При малом \vec{l}

$$\begin{aligned} \vec{H}_1 - \vec{H}_2 &= l \frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{l}} = l (\vec{e}_l \nabla) \vec{H} = (\vec{l} \nabla) \vec{H}; \\ \vec{F}_m &= \mu_0 m (\vec{l} \nabla) \vec{H}. \end{aligned} \quad (25)$$

Отнесенный к единице объема магнитный момент

$m\bar{l}$ равен намагнитченности \bar{M} , и тогда (25) принимает вид

$$\partial \bar{f}_m = \mu_0 (\bar{M} \nabla) \bar{H}, \quad (26)$$

соответствующий второму члену (2).

Первый член (2) выражает взаимодействие тока проводимости с полем $\mu_0 \bar{H}$. В формуле (2) отсутствуют взаимно компенсирующиеся плотности сил взаимодействия тока проводимости с полем $\mu_0 \bar{M}$ \bar{f}_{jm} и магнетика с полем тока проводимости \bar{f}_{mj}

$$\bar{f}_{jm} = -\bar{f}_{mj} = \mu_0 \bar{j}_n \times \bar{M}. \quad (27)$$

После подстановки в (2) равной нулю суммы $\bar{f}_{jm} + \bar{f}_{mj}$, перегруппировки членов и замены \bar{j}_n на $\text{rot } \bar{H}$ формула (2) приводится к формуле Максвелла (1):

$$\begin{aligned} \partial \bar{f} &= \mu_0 [\bar{j}_n \times \bar{H} + \bar{j}_n \times \bar{M} - \bar{j}_n \times \bar{M} + (\bar{M} \nabla) \bar{H}] = \\ &= \bar{j}_n \times \bar{B} + \mu_0 [(\bar{M} \nabla) \bar{H} - \text{rot } \bar{H} \times \bar{M}]. \end{aligned}$$

Непосредственное определение силы, действующей на магнитный диполь, было произведено еще до появления работы [20] (1908 г.) Дж. Дж. Томсоном в редакторских примечаниях к третьему английскому изданию Трактата Максвелла (1891 г.) (эти примечания приведены и в русском переводе [19]). Там же содержалось выполненное в скалярной форме преобразование формулы (2) в формулу (1). Видимо, примечания Дж. Дж. Томсона остались незамеченными Эйнштейном и Лаубом, и они пришли к формуле (2) независимо. Справедливости ради следовало бы выражение объемных сил (2) называть формулой Дж. Дж. Томсона — Эйнштейна — Лауба.

Формулы (3) и (4) основаны на представлениях Ампера относительно эквивалентности магнитно-поляризованной среды совокупности замкнутых молекулярных токов. По Амперу элемент магнетика, имеющий магнитный момент MdV замещается молекулярным током, протекающим по поверхности элемента и имеющим тот же магнитный момент. Максвелл усматривал в концепции Ампера идеально последовательную систему [19, § 637].

Истолкование векторов поля в модели магнетика Ампера дано в § 62 монографии И. Е. Тамма [22]. Ввиду того, что участники дискуссии высказывали различные мнения относительно смысла векторов поля в модели Ампера, приведем полностью обоснования И. Е. Тамма, сохранив гауссову систему единиц оригинала и несколько видоизменив обозначения.

«В этом параграфе мы поставим задачу путем усреднения уравнений истинного микроскопического поля вывести уравнения для средних макроскопических значений, характеризующих поле величин \bar{H} и \bar{j} . При этом мы будем исходить из предположения, что для истинного микроскопического поля строго справедливы уравнения магнитного поля постоянных токов

$$\text{div } \bar{H}_{\text{микро}} = 0 \text{ и } \text{rot } \bar{H}_{\text{микро}} = \frac{4\pi}{c} \bar{j}_{\text{микро}},$$

если под $\bar{j}_{\text{микро}}$ понимать точное «микроскопическое» значение плотности тока в данной точке поля. Задача же наша будет состоять в установлении уравнений, определяющих среднее макроскопическое значение вектора $\bar{H}_{\text{микро}}$ в физически бесконечно малом объеме, которое мы обозначим через $\bar{H}_{\text{микро}}$. Так как согласно

уравнению 22 (25.2) среднее значение производных по координатам равно производным от среднего значения дифференцируемой величины, то из микроскопических уравнений поля следует:

$$\text{div } \bar{H}_{\text{микро}} = 0; \quad 22(62.1)$$

$$\text{rot } \bar{H}_{\text{микро}} = \frac{4\pi}{c} \bar{j}_{\text{микро}}. \quad 22(62.2)$$

Плотность токов в произвольной среде складывается согласно [22 (60.1)] из токов проводимости и токов молекулярных. Среднее значение $\bar{j}_{\text{пр}}$ представляет собой согласно [22(61.3)] обычную плотность \bar{j} макроскопического тока в проводниках, тогда как среднее значение $\bar{j}_{\text{мол}}$ выражается согласно [22(61.9)] через ротор намагнитчивания. Таким образом,

$$\hat{j}_{\text{микро}} = \bar{j}_{\text{пр}} + \hat{j}_{\text{мол}} = \bar{j} + c \text{rot } \bar{M}. \quad 22(62.3)$$

Внося это в [22(62.2)], получаем

$$\text{rot } \bar{H}_{\text{микро}} = \frac{4\pi}{c} \bar{j} + 4\pi \text{rot } \bar{M}. \quad 22(62.4)$$

Уравнения 22(62.1), (62.4) являются основными дифференциальными уравнениями магнитного поля в произвольной магнитной среде.

Напряженность макроскопического электрического поля по определению равна средней напряженности $\bar{E}_{\text{микро}}$ микроскопического поля. Было бы совершенно естественно аналогичным образом определить напряженность макроскопического магнитного поля. Однако исторически укоренилось иное определение, являвшееся совершенно естественным с точки зрения представления о существовании магнитных зарядов в молекулах, а именно, напряженность макроскопического поля в магнетиках, которую мы в дальнейшем будем просто обозначать буквой \bar{H} , определяется следующим соотношением:

$$\bar{H} = \bar{H}_{\text{микро}} - 4\pi \bar{M}. \quad 22(62.5)$$

Среднее же значение напряженности микроскопического поля носит название вектора магнитной индукции и обозначается буквой \bar{B} :

$$\bar{B} = \bar{H}_{\text{микро}}. \quad 22(62.6)$$

Уравнение 22(62.4) может быть записано следующим образом:

$$\text{rot } (\bar{H}_{\text{микро}} - 4\pi \bar{M}) = \frac{4\pi}{c} \bar{j},$$

так что в новых обозначениях оно принимает вид

$$\text{rot } \bar{H} = \frac{4\pi}{c} \bar{j}, \quad 22(62.7)$$

а уравнение 22(62.1), (62.5) и (62.9) принимают вид

$$\text{div } \bar{B} = 0; \quad \bar{B} = \bar{H} + 4\pi \bar{M}.$$

Аналогичная трактовка векторов содержится и у Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [24, § 29]:

«Вектор \bar{H} связан с магнитной индукцией \bar{B} соотношением

$$\bar{B} = \bar{H} + 4\pi \bar{M},$$

аналогичным соотношению между электрической индукцией \bar{D} и напряженностью \bar{E} . Хотя вектор \bar{H} аналогии с \bar{E} называют обычно напряженностью

магнитного поля, следует помнить, что в действительности истинное среднее значение напряженности есть \bar{B} , а не \bar{H} .

Четкое определение векторов поля и рассмотрение альтернативных возможностей приведено в книге К. М. Поливанова [25]:

«При рассмотрении поля в поляризуемых вещественных средах в уравнения Максвелла вводятся новые векторы

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \text{ и } \bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \bar{B} - \bar{M}. \quad 25(3.1)$$

При этом векторы \bar{D} и \bar{H} часто определяются так невнятно, как, пожалуй, ни одна другая физическая величина... Вместе с тем ... попарно аналогичными следует считать векторы поля \bar{B} и \bar{E} , векторы \bar{M} и \bar{P} , характеризующие поляризованность вещества, и векторы \bar{D} и \bar{H} . Такая аналогия совершенно очевидна с точки зрения современной электродинамики. Поэтому... Я. И. Френкель предлагал поменять наименование и обозначения для индукции и напряженности магнитного поля. Я. И. Френкель писал $\bar{B} = \bar{H} - 4\pi \bar{M}$ вместо обычного выражения в системе Гаусса $\bar{H} = \bar{B} - 4\pi \bar{M}$, которое отличается от второго из уравнений 25(3.1) только коэффициентами. Однако такое переименование не привилось, а в некоторых случаях увеличило существующую невнятицу... Векторы \bar{E} и \bar{B} — это собственно векторы поля, векторы \bar{P} и \bar{M} — это векторы, характеризующие состояние поляризованного вещества, векторы \bar{D} и \bar{H} представляют собой лишь линейную комбинацию соответствующих пар векторов поля и поляризации. ...Сказанное нуждается в оговорке: в макроскопической теории при рассмотрении поля в поляризованной среде векторы \bar{B} и \bar{E} — это усредненные значения векторов поля. Сами уравнения 25(3.1) следует считать определениями векторов \bar{D} и \bar{H} .

Заметим, что в случае переименования векторов \bar{B} и \bar{H} первое уравнение Максвелла изменится:

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{j}_n + \bar{j}_m.$$

В общепринятой транскрипции уравнения плотность молекулярных токов \bar{j}_m отсутствует, и, следовательно, полагается, что $\bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \bar{B} - \bar{M}$ и векторы поля имеют одно и то же значение как в магнетике, так и в модели Ампера.

В [1] и [2] рассматривались две модели магнетика с молекулярными токами. Плотности объемных и поверхностных молекулярных токов выражались известными соотношениями:

$$\bar{j}_v = \text{rot } \bar{M}; \quad \bar{j}_s = \bar{M} \times \bar{n}. \quad (28)$$

Плотности объемных и поверхностных сил, действующих на магнетик, определялись по формуле Ампера — Максвелла:

$$\bar{f}_v = \bar{j}_v \times \bar{B}; \quad (29)$$

$$\bar{f}_s = \bar{j}_s \times \widehat{\bar{B}}; \quad \widehat{\bar{B}} = \frac{1}{2} (\bar{B}_n + \bar{B}). \quad (30)$$

В (30) учтено, что в общем случае индукция в слое поверхностного тока претерпевает разрыв.

В «макроскопической» модели принималось, что направленные встречно поверхностные токи соприкасающихся элементов частично компенсируются и основная

роль принадлежит токам, протекающим по поверхности тела. В «микроскопической» модели каждый элементарный объем поляризованной среды замещался замкнутым поверхностным током и нескомпенсированным объемным током. Обе модели приводят к одним и тем же значениям в отношении действующей на тело результирующей силы. «Микроскопическая» модель позволяет судить об истинном распределении объемных и поверхностных сил, что важно знать при расчете деформаций в теле, вызываемых электромагнитными силами.

Формула (5) объявлена А. В. Ивановым-Смоленским и его единомышленниками «единственно правильной» и упорно приписывается ими Максвеллу. Но у Максвелла в [23] этой формулы нет, а есть формула

$$\bar{f}_{\text{вн}} = \mu (\text{rot } \bar{H} \times \bar{H} + \frac{1}{2} \text{grad } H^2) - \text{grad } p_1, \quad (31)$$

записанная по аналогии с уравнением гидродинамики при эвристическом толковании соответствия между гидродинамическими и электромагнитными параметрами и величинами. Далее делалась ссылка на комментарий Больцмана к [23], который будто бы приводит (31) к форме (5) в общем случае.

Прочитируем примечание Больцмана № 14 [23, стр. 205] к работе Максвелла «О физических силовых линиях» [23] для того, чтобы уяснить, какая задача решалась в рассмотренном там примере. Сохраним в цитате гауссову систему единиц оригинала, но заменим обозначения на современные и скалярную форму записи на векторную.

«Пусть однородная магнитная или диамагнитная жидкость находится в неоднородном магнитном поле и пусть она со всех сторон окружена неподвижными стенками. Повсюду в жидкости

$$\text{div } \bar{B} = 0; \quad \text{rot } \bar{H} = 0.$$

Пусть, следовательно, внутри жидкости нет ни истинного магнетизма (т. е. монополей. — Е. Л.), ни электрических токов. Тогда

$$\text{grad } p_1 = \frac{\mu}{8\pi} \text{grad } H^2 - \bar{f}_{\text{вн}}.$$

Если, кроме того, внутри жидкости не действуют никакие внешние силы, т. е. если, например, отвлечься от силы тяготения, тогда $\bar{f}_{\text{вн}} = 0$, откуда

$$p_1 = \frac{\mu}{8\pi} H^2 + C. \quad (32)$$

Отметим, что Больцман рассматривал силу, действующую на реальную магнитную жидкость, а не на воображаемый всепроникающий эфир, иначе зачем же для эфира стенки? Отождествление левой части (31) с внешними силами неэлектромагнитного происхождения, как видно из приведенной цитаты, является не «заблуждением Львова», как утверждает А. В. Иванов-Смоленский [6], а его собственным непониманием смысла формулы (31) и разобранного Больцманом примера. Обобщение (32) на случай твердого ферромагнитного тела нельзя отнести ни к Максвеллу, ни к Больцману.

Формула (5) выводилась различными методами в монографии И. Е. Тамма с оговорками относительно ее справедливости только для диа- или парамагнитной среды. Ограничение в § 66 [22] возникло из-за замены в формуле для силы, действующей на токи, истинной напряженности магнитного поля \bar{H} на среднюю

напряженность микроскопического поля $\hat{H}_{\text{микро}} = \bar{B}$ (в гауссовой системе единиц), что допустимо только при пренебрежимо малой намагниченности \bar{M} . При выводе формулы в § 83 из энергетических соображений, как отмечалось в [2], не накладывалось условие $\bar{M} = \text{const}$ при виртуальном перемещении, что вполне уместно при малом \bar{M} .

Каждое из выражений объемных сил (1) — (5) можно представить в виде дивергенции тензора второго ранга \bar{T} :

$$\bar{f}_v = \text{Div } \bar{T}, \quad (33)$$

компоненты которого представлены формулами (6) — (9). Тензорная модификация теоремы Гаусса — Остроградского позволяет заменить при нахождении результирующей силы объемное интегрирование поверхностным интегрированием нормальной составляющей тензора $(\bar{T}\bar{n})$:

$$\bar{F}_v = \int_V \bar{f}_v dV = \int_V \text{Div } \bar{T} dV = \int_S (\bar{T}\bar{n}) dS, \quad (34)$$

где S — поверхность, охватывающая объем V ; \bar{n} — внешняя нормаль к поверхности.

Поверхностные интегралы (34), соответствующие различным выражениям тензоров, приведены в [2] (формулы 27—30). Если поверхность, охватывающая тело, целиком проходит в неполяризованной среде, то все формулы для результирующей силы приводят к одному результату:

$$\bar{F} = \frac{1}{\mu_0} \int_S [(\bar{B}_n \bar{n}) \bar{B}_n - \frac{1}{2} B_n^2 \bar{n}] dS, \quad (35)$$

где \bar{B}_n — индукция с внешней стороны поверхности.

Разность интегралов по внешней поверхности тела (35) и примыкающей к границе тела внутренней поверхности [2, (27—30)] определяет отнесенную к поверхностному слою составляющую результирующей силы. Выражения сил, отнесенных к поверхностному слою для различных моделей магнетика приведены в [3] (формулы 28—31). Замена объемного интегрирования поверхностным является формальной математической операцией и составляющие поверхностного интеграла (34) не имеют физического смысла. Интеграл по всей поверхности имеет смысл результирующей силы. Сказанное иллюстрируется простым примером.

Рассмотрим призму из материала с $\mu_r = 1$, помещенную в равномерное магнитное поле, направленное по оси призмы. Согласно (35) поверхностный интеграл на торцах призмы будет иметь растягивающие составляющие с плотностью $\frac{1}{2\mu_0} B^2 \bar{n}$, а на боковых поверхностях — сжимающие составляющие с плотностью $-\frac{1}{2\mu_0} B^2 \bar{n}$. Очевидно, что составляющие противоположных поверхностей взаимно компенсируются и результирующая сила равна нулю. Этого и следовало ожидать, так как объемные силы отсутствуют. Если бы составляющие поверхностного интеграла имели физический смысл, то призма была бы подвержена растяжению в направлении оси и сжатию в перпендикулярных направлениях, что привело бы к деформациям, которых на самом деле не наблюдается. Максвелл, придерживаясь идеи близкого действия, придавал \bar{T} смысл

тензора натяжений в воображаемом эфире. Очевидно, что следует различать тензор поля \bar{T} и тензор упругих натяжений в физической среде.

Формулы Максвелла (1) и Эйнштейна — Лауба (2) определяют взаимодействие элемента магнетика с полем $\mu_0 \bar{H}$ внешних по отношению к трубке источников поля, но не учитывают взаимодействия с полем магнетика трубки. Это обстоятельство комментировалось в работе автора [2]. Там же отмечалось, что неучтенные составляющие взаимодействия компенсируются по длине каждой трубки и, следовательно, не влияют на результирующую силу. В этом можно убедиться, рассмотрев добавочные составляющие тензора (8) и поверхностного интеграла [2, (30)], учитывающие взаимодействие между элементами магнетика, принадлежащими одной и той же трубке:

$$\Delta T_{pq} = \frac{\mu_0}{2} M_p M_q; \quad (36)$$

$$\Delta \bar{F} = \frac{\mu_0}{2} \int_S (\bar{M}\bar{n}) \bar{M} dS. \quad (37)$$

Охватим поверхность S трубку поля M , упирающуюся торцами в ограничивающие тело поверхности. Тензор (36) на торцах трубки претерпевает разрыв. Для того чтобы были учтены силы поверхностных торцевых слоев, поверхность интегрирования S у торцов следует проводить с внешней стороны поверхности тела, где $\bar{M} = 0$. Результирующая сила взаимодействия элементов трубки определяется интегралом (37). Так как на боковых поверхностях $(\bar{M}\bar{n}) = 0$, а на торцевых участках $\bar{M} = 0$, добавочная сила взаимодействия $\Delta \bar{F} = 0$.

Формулы Максвелла и Эйнштейна — Лауба дают правильный результат в отношении результирующей силы при условии, что учитываются также силы, отнесенные к поверхностному слою. Необходимость знать истинное распределение объемных и поверхностных сил возникает при решении задач теории упругости по определению натяжений и деформаций, а также при определении вращающих моментов. В этих случаях требуемую информацию дает «микроскопическая» модель [1].

Рассмотрим теперь возражения А. В. Иванова-Смоленского и его единомышленников против концепций Максвелла, Эйнштейна — Лауба и Ампера. А. В. Иванов-Смоленский [6] считает, что «при выводе формулы для объемной плотности сил в Трактате Максвеллом были допущены некоторые неточности при использовании уравнения электромеханического преобразования энергии для выражения силы через изменение энергии при малом перемещении. Максвелл... определяет плотность электромагнитной силы, действующей на элементы магнетика, в виде производной некоей плотности потенциальной энергии намагниченного тела $W_n = -(\bar{M}\bar{H})$, которая не равна плотности его полной

магнитной энергии $W = \frac{1}{2} (\bar{B}\bar{H})$. Кроме того, перемещение элемента магнетика производится при постоянстве намагниченности $\bar{M} = \text{const}$, а не при постоянстве токов контуров $i = \text{const}$ ».

Но Максвелл при выводе (1) исходил не из закона электромеханического преобразования энергии (энергетического баланса), а из положений аналитической механики. Поэтому применительно к (1) уместно обсуждать не энергетический баланс, а данное Максвеллом

определение потенциальной функции. Сопоставим данное Максвеллом определение потенциальной функции (11) с потенциальной функцией хорошо изученного в механике гравитационного взаимодействия двух масс m_1 и m_2 .

Будем рассматривать массу m_1 как источник гравитационного поля, внешнего по отношению к m_2 . Потенциальная функция определяется как работа, которую нужно совершить при удалении m_2 из исходного положения в бесконечность при фиксированном распределении в пространстве гравитационного поля, что будет иметь место только при $m_1 = \text{const}$ в процессе перемещения m_2 . Требование $m_2 = \text{const}$ в том же процессе вытекает из условия независимости совершаемой работы от вида траектории. Представим массу m_2 в виде сосуда с отверстием, заполненного сыпучим материалом. Тогда в процессе движения сосуда наполнитель будет высыпаться через отверстие, масса m_2 будет переменной и совершаемая работа уже не будет инвариантна к траектории и времени движения.

Максвелл определял потенциальную функцию магнитного поля аналогичным образом. В рассмотренной им задаче в роли внешнего поля выступало $\mu_0 H$, а в роли воспринимающего силу элемента — магнитный момент M . Требования в отношении фиксированного распределения внешнего поля и $M = \text{const}$ в процессе движения аналогичны условиям $m_1 = \text{const}$ и $m_2 = \text{const}$ в гравитационной задаче. Из сказанного следует, что упрекать Максвелла в «некоторых неточностях» и отвергать формулу (1) нет оснований.

Формула Эйнштейна — Лауба (2) отвергается А. В. Ивановым-Смоленским [6], Ю. В. Абрамкиным [12] и другими критиками только на том основании, что она преобразуется в формулу Максвелла (1). Положения магнетостатики, на которых основана формула (2), в статьях не комментировались. Возражения А. В. Иванова-Смоленского [6] и ряда других участников дискуссии [12], [13], [15], [17] против модели магнетика Ампера основаны на неправильном истолковании напряженности в поляризованной среде и полностью снимаются цитируемыми выше разъяснениями И. Е. Тамма, Л. Д. Ландау — Е. М. Лившица и К. М. Поливанова.

В дискуссионной заметке [10] С. И. Фролов выдвинул требование взаимной независимости тока и индукции в качестве условия применимости формулы Ампера. Это требование совершенно произвольно и не имеет ни теоретического, ни экспериментального обоснования. Его некорректность можно показать на простом примере. Пусть проводник с током находится в поле катушки. В цепях катушки и проводника имеются реостаты с механически связанными движками. При перемещении движков будут изменяться как ток проводника, так и индукция катушки в месте расположения проводника и постулированное С. И. Фроловым условие не будет соблюдаться. Если же механическая связь между движками отсутствует, условие соблюдается и «препятствие» к применению формулы Ампера устраняется. Совершенно очевидно, что при фиксированных положениях движков сила будет одной и той же, независимо от того, связаны движки друг с другом или нет, и формула Ампера будет давать один и тот же результат в обоих случаях.

В качестве примера, который, по мнению авторов, опровергает модель Ампера, в статьях Б. Л. Алиевского [13] и Д. Г. Ашмарина и Н. А. Серихина [8] рассматривается

валась униполярная машина. Предметом обсуждения был момент скручивания магнитопровода индуктора. В приложении 1 показано, что амперовы токи элемента, вырезанного из трубки поля индуктора со сплошным магнитопроводом, не создают вращающего момента.

Авторы [8] и [13] приписывают модели Ампера момент, якобы создаваемый молекулярными токами на внутренних цилиндрических поверхностях левого и правого дисков. В этом они ошибаются, ибо трубку поля \vec{B}_i в статоре индуктора, упирающуюся торцами в цилиндрические поверхности дисков, можно разбить на малые по длине элементы, для каждого из которых вращающий момент равен нулю. А сумма сколь угодно большого, но конечного числа нулей, есть нуль. Замена объемных сил поверхностными эквивалентна лишь в отношении результирующей силы, которая в данном случае равна нулю. При такой замене теряется информация о месте приложения сил, которой необходимо располагать для вычисления момента.

Непонимание этих обстоятельств привело В. Л. Алиевского к ошибочным суждениям, проявившимся как в названии статьи [13] «О недопустимости применения модели магнетика по Амперу для электромагнитных сил», так и ее тексте: «Удачным объектом для экспериментального подтверждения формул ... в общем случае может служить униполярный генератор постоянного тока». Не менее категоричны и Д. Г. Ашмарин с Н. А. Серихиным [8]: «Результаты эксперимента подтверждают ... недопустимости применения формул Льева..., выведенных с помощью модели Ампера, для расчета электромагнитных сил, действующих на магнетики в экспериментальной установке».

По данным [8] в экспериментальной установке наблюдался некоторый скручивающий момент. Его появление можно объяснить тем, что в экспериментальной установке диски статора соединялись не трубой, а стержнями, разведенными воздушными зазорами. Благодаря зазорам индукция в стержнях, порождаемая токовым слоем, получила аксиальную составляющую, за счет которой и возник скручивающий момент.

Другой пример, якобы опровергающий макроскопическую модель магнетика [1, 2], основанную на представлениях Ампера, приведен в статье А. В. Иванова-Смоленского, В. И. Цуканова и А. В. Давыдова [7]. Авторы поместили замкнутый зубчатый магнитопровод внутри тороидальной катушки [7, рис. 2] и измеряли микрометром деформацию его внешнего диаметра под действием магнитного поля. Там же произведен расчет деформации под действием сил, определяемых различными выражениями тензоров. Выполненные авторами расчеты вызывают возражения. Зубчатый магнитопровод представляет собой тонкую оболочку с цилиндрической симметрией, и для расчета деформаций необходимо было располагать распределением сил по ее периметру и правильно определять реакцию опор секции.

Вместо того чтобы искать распределение сил по длине магнитопровода, авторы [7] определяли компоненты тензора на поверхности, охватывающей квадрант магнитопровода (см. [7], рис. 6). Но по этим компонентам можно найти лишь результирующую силу, действующую на квадрант. Сила, действующая на элементарный участок магнитопровода, может быть найдена по компонентам тензора на поверхности, охватывающей участок. Такой расчет по тензору макроскопической модели магнетика (7) для участка, выделенного на рис. 6, проведен в приложении 2. Результаты

рующая сила элемента плоской впадины (П-21) направлена по нормали к плоскости, так как компоненты тензора \bar{f}_2 и \bar{f}_4 (П-20) на торцах элемента взаимно компенсируются. Авторы же [7] рассматривали \bar{f}_2 на граничном торце секции магнитопровода как плотность реально действующих сил. Способ заделки концов секции магнитопровода ([7], рис. 7), принятый авторами при расчете деформации, не согласуется с граничными условиями. Благодаря симметрии магнитопровода в реакции соседней секции не может присутствовать вращающий момент. Правильная заделка концов указана на рис. ПЗ.

Неизбежная по технологическим причинам асимметрия секций магнитопровода может проявляться в различии внутреннего и наружного радиусов, кривизны поверхностей вершин и впадин зубцов, отклонении ножек зубцов от радиального направления и нарушении центровки магнитопровода внутри катушки. Эти факторы будут влиять на результаты измерения в экспериментальном макете. Различие радиусов секций приведет к отклонению средней линии сечения от окружности. Кривизна поверхностей впадин и вершин зубцов приведет согласно (П-20) к дополнительной радиальной составляющей силы на участках этих поверхностей, так как удельные силы \bar{f}_2 и \bar{f}_4 , отнесенные к торцам элементарных участков, не будут коллинеарными. Знак этих сил определяется знаком кривизны поверхностей. Все участки магнитопровода подвержены продольному изгибу за счет сил, действующих в осевом направлении. На деформации продольного изгиба будет влиять кривизна поверхностей впадин и вершин зубцов и начальное отклонение ножек зубцов от радиального направления. Смещение центра магнитопровода относительно центра катушки приведет к несимметрии поля в направлении смещения и неравномерности деформаций.

Итак, для того чтобы измеренная на макете деформация могла служить подтверждением или опровержением той или иной концепции электромагнитных сил, необходимо располагать детальным распределением поля по длине и сечению магнитопровода, не противоречащим условиям $\text{div } \vec{H} = 0$ и $\text{rot } \vec{H} = 0$, найти распределение электромагнитных сил по длине магнитопровода и корректно решить задачу определения деформаций. Следует также оценить влияние перечисленных выше факторов на результаты измерений, что возможно выполнить, только если отклонения магнитопровода от принятой в расчете конфигурации известны. Приведенные в [7] данные далеки от этих требований, а в отношении силы, действующей на граничный торец секции, явно ошибочны. Опытный макет, обладая достоинством в простоте измерения деформации, весьма сложен в отношении расчета поля и деформаций. Кроме того, макет подвержен влиянию трудно контролируемых факторов и потому вряд ли может быть признан удачным объектом для экспериментальной проверки той или иной теории.

В дискуссионной заметке [9] В. С. Могильников и А. М. Олейников оспаривают справедливость модели Ампера при расчете сил в магнитной системе в виде рамы с находящимся в ее просвете сердечником ([9], рис. 1). Поле в магнитной системе возбуждалось расположенными на раме и сердечнике обмотками. Силу, действующую на раму, авторы определяли по формуле Ампера как результат взаимодействия молекулярного тока, возбуждаемого обмоткой рамы под полюсом сердечника, с индукцией в воздушном зазоре. Рас-

четное значение сил оказалось существенно большим, чем в эксперименте.

Проведенный авторами расчет выражает не результирующую силу в направлении оси рамы, а лишь одну из ее составляющих. На той же примыкающей к полюсу поверхности будут индуцироваться направленные перпендикулярно к плоскости чертежа молекулярные токи за счет нормальной составляющей индукции, которые дадут другие составляющие осевых силы. Осевые составляющие силы будут иметь место также на внутренних и наружных поверхностях поперечных стержней рамы. Результирующая сила определится суммированием всех осевых составляющих с учетом их знака. Для проведения такого расчета необходимо располагать картиной поля, удовлетворяющей закону полного тока и условию непрерывности тока.

Рассматриваемый пример вообще не может быть использован для оценки адекватности различных концепций электромагнитных сил, так как в отношении результирующей силы, действующей на окруженное немагнитной средой тело, они все эквивалентны и приводят к одной и той же формуле (35).

В статье [16] В. А. Кузнецов предпринял попытку отвергнуть все иные, кроме (5) и (9), выражения объемных сил и тензоров поля из-за их якобы несоответствия теории подобия. Он ввел для геометрически подобных магнитных систем масштабные коэффициенты по плотности тока m_I , напряженности m_H , индукции m_B , проницаемости m_μ , линейным размерам m_l и плотности сил m_f и установил три соотношения подобия:

$$\frac{m_I}{m_\mu m_I m_H} = 1; \quad \frac{m_I m_I}{m_H} = 1; \quad \frac{m_B}{m_\mu m_H} = 1. \quad (38)$$

Любые три из перечисленных шести масштабных коэффициентов считались независимыми. Рассматривая масштабные коэффициенты составляющих объемных сил, автор установил, что все они идентичны m_f только в формуле (5). Аналогичный анализ был проведен и для тензоров поля.

Автор [16] совершил ошибку, априорно приняв число независимых масштабных коэффициентов, вместо того чтобы определять его из структур уравнений. Число критериальных соотношений между масштабными коэффициентами как раз и выбирается из условия идентичности масштабов всех слагаемых. В рассматриваемом случае применительно ко всем отвергаемым автором [16] формулам к соотношениям (38) добавится условие $m_\mu = 1$ и число независимых масштабных коэффициентов сокращается до двух.

Условие $m_\mu = 1$ непосредственно из (7) не вытекает. Но возможность произвольного выбора m_μ является кажущейся, так как магнитное поле сосредоточено не только в магнетике, но и в воздухе, проницаемость которого постоянна. Масштабный коэффициент m_μ должен быть одним и тем же во всем пространстве, занимаемом полем, и по необходимости приходится принимать $m_\mu = 1$ даже применительно к (7).

Таким образом, сама по себе теория подобия не позволяет отдать предпочтение тем или иным выражениям для объемных сил и тензоров поля, ибо ни одно из них не противоречит теории подобия.

В работе [3] автором совместно с М. А. Молодцовой было осуществлено сравнение расчетных и экспериментальных деформаций стального тороидального сердечника под действием магнитного поля. Расчет объемных сил проводился по формуле (4), учитывающей

взаимодействие элемента магнетика с другими элементами той же самой трубки. Расчетные деформации достаточно хорошо согласовались с данными эксперимента. Расчетные деформации по объемным и поверхностным силам, в которых это взаимодействие не учитывалось, были на несколько порядков меньше. Эксперимент подтвердил, что опускать силы взаимодействия элементов, принадлежащих одной и той же трубке, нельзя, если требуется знать истинное распределение объемных и поверхностных сил, что необходимо, например, для расчета деформаций.

Измеренная относительная аксиальная деформация сердечника составляла $\epsilon = 1,56 \cdot 10^{-7}$. Авторы [7], [11] и [18] отмечали, что при столь малых деформациях на результаты измерений будут влиять побочные явления: разность температур тензодатчика и компенсирующего резистора, температурная деформация сердечника и магниторезистивный эффект.

При проведении эксперимента наблюдался дрейф выходного напряжения измерительного моста, вызванный температурными факторами. Поэтому показания микровольтметра фиксировались через короткий интервал ($t = 3$ с) после включения катушки, достаточный для успокоения стрелки прибора. Дрейф за время измерения оценивался величиной 0,1 мкВ и составлял примерно 3 % измеряемой величины.

Для оценки разности температур между тензодатчиком и компенсирующим резистором, которая приводит к тому же небалансу на выходе измерительного моста, что и предполагаемая деформация ϵ , авторы [7], [11] и [8] использовали соотношение

$$\Delta t = \epsilon \beta / \alpha,$$

где $\beta = 80$ — коэффициент тензочувствительности датчика; α — его температурный коэффициент.

Авторы [7] приняли $\epsilon = 1,4 \cdot 10^{-8}$ (отличное от деформации на экспериментальной установке), $\alpha = 0,0045$, $\beta = 80$ и получили $\Delta t = 2,5 \cdot 10^{-4}$ К. Оценки [11] при $\epsilon = 1,56 \cdot 10^{-7}$, $\beta = 80$, $\alpha = 0,0025$ и [18] при тех же ϵ и β и $\alpha = 0,0045$ составляли соответственно $5,0 \cdot 10^{-3}$ К и $2,8 \cdot 10^{-3}$ К.

В приложении 3 произведен расчет процесса нагрева сердечника и определено, что за $t = 3$ с его температура изменится на $7,7 \cdot 10^{-5}$ К, что составляет 1,5 % критической разности температур, определенной в [11] при значении α , соответствующем типу тензодатчика. Такая погрешность будет иметь место в случае, если компенсирующий резистор будет оставаться холодным, а нагреваться будет только тензодатчик. Из-за малости погрешности нет необходимости учитывать различие в условиях нагрева тензодатчика и компенсирующего резистора. Компенсирующий резистор помещался рядом с тензодатчиком не столько для того, чтобы реагировать на изменение температуры за время измерения, а для облегчения балансировки моста после длительного протекания тока через катушку.

Тепловой расчет, проведенный в [18], вызывает возражения. Тензодатчик приклеивался к сердечнику под давлением и тепловое сопротивление между прилегающими поверхностями датчика и сердечника можно считать пренебрежимо малым. Температура тензодатчика практически не отличалась от температуры сердечника, которую автор [18] считал равной нулю. Кроме того, принятое в расчете допущение об адиабатическом нагреве обмотки противоречит передаче тепла от обмотки к сердечнику в том же процессе.

Относительная температурная деформация сердечника за время измерения $\epsilon_t = \alpha_t \tau_c = 7,7 \cdot 10^{-10}$ (где $\alpha_t = 10^{-5}$ — температурный коэффициент расширения стали), что составляет 0,5 % измеряемой деформации.

Магниторезистивный эффект проявляется в изменении сопротивления датчика под действием магнитного поля. Согласно [27] в поперечном по отношению к оси датчика магнитном поле B

$$\Delta R/R = (U_n B)^2 \left[1 + \frac{4 - \pi}{\pi} \left(\frac{3\pi}{8} \right)^2 \right],$$

где $U_n = 0,12$ м²/В·с [28] — подвижность электронов в кремнии.

Индукция поля в месте нахождения датчика

$$B = \mu_0 \frac{I_w}{2\pi R_2} = 1,21 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

Относительное изменение сопротивления датчика

$$\Delta R/R = 2,91 \cdot 10^{-10} = 0,17 \% \text{ от } \epsilon.$$

Приведенные оценки показывают, что температурные эффекты за время измерения приводят к погрешностям не более нескольких процентов, а магниторезистивный эффект пренебрежимо мал. Поэтому нет оснований сомневаться в достоверности проведенного в [3] эксперимента.

Выводы. 1. Возражения против фундаментальных понятий классической электродинамики в отношении концепции Ампера об эквивалентности поляризованной среды системе молекулярных токов и введенного Максвеллом выражения объемных сил через градиент потенциальной функции, выдвинутые в ходе дискуссии, оказались несостоятельными.

2. Максвелл в Трактате и Эйнштейн и Лауб рассматривали взаимодействие элемента магнетика с полем $\mu_0 H$, которое имеет место в полости трубки поля M после удаления из нее магнетика. Опушенные при таком рассмотрении силы взаимодействия элемента магнетика с другими элементами той же самой трубки не оказывают влияния на результирующую силу, так как они взаимно компенсируются по длине каждой трубки, упирающейся торцами в поверхность, ограничивающую тело.

3. При нахождении результирующей силы, действующей на намагниченное тело, окруженное немагнитной средой, необходимо учитывать не только объемные, но и поверхностные силы, отнесенные к участкам поверхности тела, на которых тензор поля претерпевает разрыв.

4. Замена интегрирования распределенных по объему сил интегрированием нормальной составляющей тензора поля по наружной поверхности тела является формальной математической операцией, справедливой лишь в отношении результирующей силы и не несущей информации об истинном распределении сил.

5. Выражения компонент тензоров поля, объемных и поверхностных сил, построенные на базе микроскопической модели замещения магнетика молекулярными токами, учитывают взаимодействие элемента магнетика не только с полем $\mu_0 H$, но и с полем остальных принадлежащих той же трубке элементов. Учет этих дополнительных составляющих дает представление об истинном распределении объемных и поверхностных сил, которое необходимо знать при расчете деформаций и моментов.

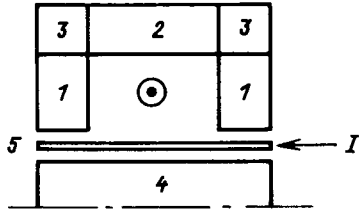


Рис. П1. Магнитная система униполярной машины

На результирующую силу, действующую на окруженное немагнитной средой тело, дополнительные составные влияния не оказывают.

6. Экспериментальные значения деформаций, вызываемых магнитным полем в тороидальном стальном сердечнике, согласуются с расчетными данными, базирующимися на микроскопической модели магнетика. В ходе дискуссии отмечалось, что на результаты измерений оказывают влияние температурные и магниторезистивный эффекты. Приведенные в настоящей статье оценки показывают, что в условиях эксперимента указанные эффекты приводят лишь к погрешностям порядка нескольких процентов от измеряемой деформации, что согласуется с наблюдавшимся при проведении эксперимента дрейфом.

7. Приведенные в дискуссионных статьях контрпримеры, опровергающие по мнению авторов модель Ампера, сопровождались некорректными расчетами и не могут служить подтверждением высказанного авторами мнения.

8. Рекламируемые А. В. Ивановым-Смоленским и другими участниками дискуссии «единственно правильные формулы» для электромагнитных сил и тензора поля не дают представления об истинном распределении сил по объему, выделенному внутри тела магнетика, и приводят к правильному результату лишь в отношении результирующей силы.

Приложение 1. Крутящий момент на статоре униполярной машины. Магнитная система униполярной машины представлена на рис. П1, где приняты обозначения: 1, 2, 3 — статор индуктора, 4 — ротор, 5 — токовый слой, 6 — обмотка индуктора. На рисунке не указаны щетки, соединяющие неподвижную и подвижную части токового слоя, так как предполагается, что последние заторможены.

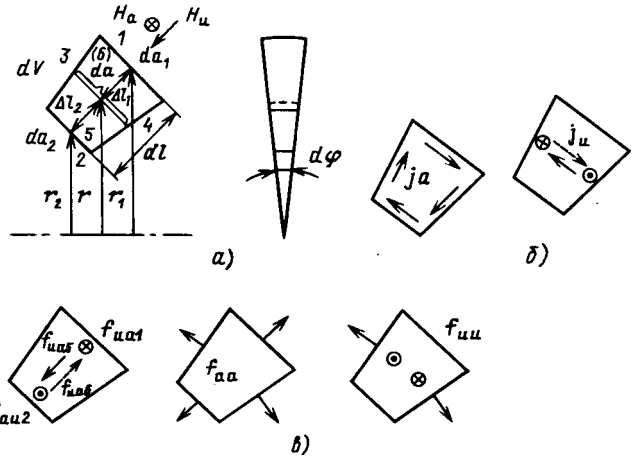
В статоре индуктора, представляющем собой единое тело, можно выделить диски 1, трубу 2 и кольца 3 с различной конфигурацией поля. Вырежем из трубки поля \vec{B}_n индуктора элементарный объем dV (рис. П2, а) и заменим содержащийся в нем магнетик молекулярными токами, распределенными по поверхности элемента с плотностями j_a и j_n (рис. П2, б):

$$j_a = (\mu_r - 1)H_a; \quad j_n = (\mu_r - 1)H_n, \quad (\text{П-1})$$

где H_a и H_n — напряженности полей токового слоя и индуктора.

Молекулярный ток с плотностью j_a замыкается через поверхности 1, 4, 2, 3, а ток с плотностью j_n — через поверхности 5, 3, 6, 4. Полагая $\mu_r = \text{const}$, убедимся в том, что поверхностные токи будут замкнутыми.

Замкнутость тока Δi_n очевидна из симметрии j_n на противоположных поверхностях элемента. Проверим равны ли токи на поверхностях 1 и 2. По закону пол-

Рис. П2. Элемент магнитопровода индуктора
ного тока

$$H_{ai} r_i = \frac{I w_a}{2\pi}, \quad i = 1, 2, \quad (\text{П-2})$$

где $I w_a$ — намагничивающая сила токового слоя;

$$di_{ai} = j_{ai} r_i d\varphi = (\mu_r - 1) \frac{I w_a}{2\pi} d\varphi. \quad (\text{П-3})$$

Следовательно, $di_{a1} = di_{a2}$ и поверхностный ток замкнут. В случае, когда $\mu_r \neq \text{const}$, токи di_{a1} и di_{a2} будут различны и замыкание токов будет осуществляться не только по поверхности, но и по объему. В дальнейших рассуждениях мы будем оставаться в рамках допущения относительно $\mu_r = \text{const}$.

В соответствии с (30) на поверхностные молекулярные токи действуют силы, распределенные с плотностями f_{an} , f_{na} , f_{aa} и f_{nn} (рис. П2, в). Первый индекс отмечает ток, на который действует сила, а второй — поле, с которым взаимодействует ток. Силы с плотностями f_{aa} и f_{nn} создают в элементе деформации растяжения и крутящего момента не создают. Крутящий момент Δm_{an} относительно оси машины способны создавать лишь силы с плотностью f_{an} на поверхностях 1 и 2. Эти же силы создают крутящий момент относительно центра элемента Δm_{an}^* , которому противодействует пара сил с плотностью f_{na} на поверхностях 5 и 6:

$$\left. \begin{aligned} f_{an} &= j_a \vec{B}_{ni}, \quad i = 1, 2; \\ f_{na} &= j_n \vec{B}_{ai}, \quad i = 5, 6, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П-4})$$

где \vec{B}_{ni} и \vec{B}_{ai} — средние индукции в слоях поверхностных молекулярных токов.

Так как \vec{B}_{ni} и \vec{B}_{ai} направлены нормально к поверхностям 1, 2 и 5, 6 соответственно и, следовательно, не претерпевают разрыва, то

$$\vec{B}_{ai} = B_{ai}; \quad \vec{B}_{ni} = B_{ni}. \quad (\text{П-5})$$

Согласно (П-1), (П-4) и (П-5)

$$\left. \begin{aligned} f_{an} &= (\mu_r - 1) H_{ai} B_{ni}, \quad i = 1, 2; \\ f_{na} &= (\mu_r - 1) H_{ni} B_{ai}, \quad i = 5, 6. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П-6})$$

Силы, действующие на поверхности элемента:

$$dF_{an} = f_{an} r_i d\varphi da_i = (\mu_r - 1) H_{ai} r_i B_{ni} d\varphi da_i; \quad (\text{П-7})$$

$$dF_{nai} = f_{nai} \Delta l da = (\mu_r - 1) H_n B_a \Delta l da, \quad (\text{П-8})$$

причем H_n , B_a и da в (П-8) относятся к среднему радиусу:

$$r = \frac{1}{2} (r_1 + r_2). \quad (\text{П-9})$$

Поток элементарной трубки поля индуктора

$$d\Phi_n = B_n r_i d\varphi da_i = \mu H_n r d\varphi da. \quad (\text{П-10})$$

Индукция токового слоя

$$B_a = \mu H_a. \quad (\text{П-11})$$

Согласно (П-7), (П-8), (П-10) и (П-11)

$$dF_{ani} = (\mu_r - 1) H_{ai} d\Phi_n; \quad (\text{П-12})$$

$$dF_{nai} = (\mu_r - 1) H_{ai} d\Phi_i \frac{\Delta l}{r d\varphi}. \quad (\text{П-13})$$

Момент относительно оси машины с учетом (П-2)

$$dm_{ani} = r_i dF_{ani} = (\mu_r - 1) \frac{I w_a}{2\pi} d\Phi_n. \quad (\text{П-14})$$

Моменты относительно оси машины, создаваемые силами площадок 1 и 2, равны по величине и противоположно направлены. Результирующий момент $dm_{an} = dm_{an1} - dm_{an2}$ равен нулю. Скручивающий момент относительно центра элемента за счет пары сил dF_{an1} и dF_{an2} :

$$dm_{an}^* = \Delta l_1 dF_{an1} + \Delta l_2 dF_{an2}, \quad (\text{П-15})$$

где Δl_1 и Δl_2 — расстояния между центром элемента и поверхностями (рис. П2, а), определяемые условием

$$\Delta F_{an1} \Delta l_1 = dF_{an2} \Delta l_2. \quad (\text{П-16})$$

Так как $\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l$, то согласно (П-12), (П-15) и (П-16)

$$dm_{an}^* = \frac{(\mu_r - 1) \Delta l}{2\pi r} I w_a d\Phi_n, \quad (\text{П-17})$$

где r выражается формулой (П-9).

Скручивающий момент за счет пары сил dF_{an5} и dF_{an6} с учетом (П-13) и (П-2)

$$dm_{na}^* = r d\varphi dF_{na} = \frac{(\mu_r - 1) \Delta l}{2\pi r} I w_a d\Phi_n. \quad (\text{П-18})$$

Моменты dm_{an}^* и dm_{na}^* взаимно компенсируются, и результирующий скручивающий момент элемента равен нулю.

Приложение 2. Силы, действующие на элемент впадины зубчатого сердечника. Зубчатый ферромагнитный сердечник расположен внутри тороидальной обмотки [7]. Секция сердечника представлена на рис. П3. Будем полагать, что поверхности впадины и вершины зубца являются плоскими. Выделим элемент на впадине зубца и по тензору макроскопической модели магнетика (7) определим результирующую силу, действующую на элемент.

Введем орты \bar{n}_i и \bar{t}_i по нормали и касательной к плоскостям элементов ($i=1 \div 4$ — номер плоскости). Укажем также орты \bar{e}_r и \bar{e}_φ общие для всех плоскостей (рис. П4). Согласно (7) вектор плотности силы для каждой из площадок элемента принимает вид

$$\bar{\Phi}_i = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{2} (B_{ni}^2 - B_{ti}^2) \bar{n}_i + B_{ni} B_{ti} \bar{t}_i \right], \quad (\text{П-19})$$

где B_{ni} и B_{ti} — нормальная и тангенциальная составляющие индукции в центре i -й площадки.

На площадках 1 и 3 элемента впадины тангенциальные составляющие индукции претерпевают разрыв. Для того чтобы был учтен и тензор поверхностного слоя, необходимо подставлять в (П-19) B_{t1} и B_{t3} с внешней стороны поверхностей.

Будем полагать, что в элементе впадины существует индукция только в направлении орта \bar{e}_φ (рис. П3). Для площадок 1—4 элемента впадины

$$\begin{aligned} \bar{n}_1 &= -\bar{e}_r; & \bar{t}_1 &= \bar{e}_\varphi; & B_{n1} &= 0; & B_{t1} &= \mu_0 H_{\varphi 1}; \\ \bar{n}_3 &= \bar{e}_r; & \bar{t}_3 &= -\bar{e}_\varphi; & B_{n3} &= 0; & B_{t3} &= -\mu_0 H_{\varphi 3}; \\ \bar{n}_2 &= \bar{e}_\varphi; & \bar{t}_2 &= \bar{e}_r; & B_{n2} &= B_\varphi; & B_{t2} &= 0; \\ \bar{n}_4 &= -\bar{e}_\varphi; & \bar{t}_4 &= -\bar{e}_r; & B_{n4} &= B_\varphi; & B_{t4} &= 0. \end{aligned}$$

Согласно (П-19)

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_1 &= \bar{e}_r \frac{\mu_0}{2} H_{\varphi 1}^2; & \bar{f}_3 &= -\bar{e}_r \frac{\mu_0}{2} H_{\varphi 3}^2; \\ \bar{f}_2 &= \bar{e}_\varphi \frac{1}{2\mu_0} B_\varphi^2; & \bar{f}_4 &= -\bar{e}_\varphi \frac{1}{2\mu_0} B_\varphi^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П-20})$$

Результирующая сила элемента

$$d\bar{F} = b [(\bar{f}_1 + \bar{f}_3) \Delta x + (\bar{f}_2 + \bar{f}_4) a] = \bar{e}_r \frac{\mu_0}{2} (H_{\varphi 1}^2 - H_{\varphi 3}^2) b \Delta x, \quad (\text{П-21})$$

где b — размер сердечника в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка.

Аналогичной формулой определяется и результирующая сила, действующая на элемент, выделенный на вершине зубца. Для элементов ножки зубца и для граничных элементов, в которых ось магнитопровода претерпевает излом, можно совершить аналогичные выкладки и найти распределение сил по перименту секции магнитопровода. Для доведения расчета до численного результата необходимо располагать картиной поля, определяющей B_n и B_t на поверхностях элементов.

Приложение 3. Процесс нагрева тороидального сердечника. К внешней цилиндрической поверхности сердечника 1 (рис. П5) в направлении ее образующей приклеен тензодатчик 2. Рядом располагается свободно прилегающий к поверхности сердечника компенсационный резистор 3, положение которого фиксировано наложенным сверху тонким слоем незасыхающей замазки. Резисторы защищены от обмотки 4 картонной прокладкой 5, покоящейся на распорках 6.

Геометрические и электрические параметры макета:

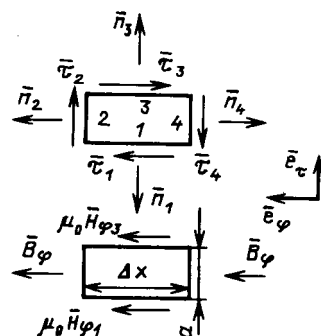
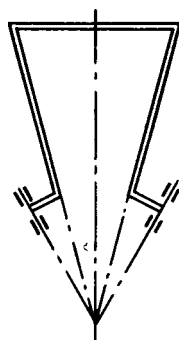


Рис. П3. Секция зубчатого сердечника

Рис. П4. Элемент впадины зубца

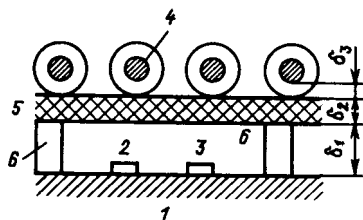


Рис. П5. Развертка внешней поверхности сердечника

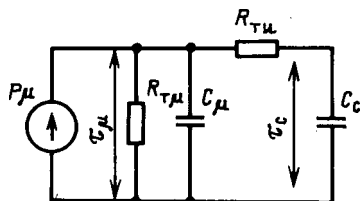


Рис. П6. Тепловая схема замещения

внутренний, наружный радиусы и высота стального сердечника $R_1 = 1,36 \times 10^{-2}$ м, $R_2 = 2,4 \cdot 10^{-2}$ м, $h = 2,41 \times 10^{-2}$ м; изоляционные зазоры (см. рис. П5) $\delta_1 = 10^{-3}$ м (воздух), $\delta_2 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м (картон), $\delta_3 = 0,2 \cdot 10^{-3}$ м (полиэтиленовая изоляция); сечение провода, его длина, сопротивление и ток обмотки $q_m = 0,12 \cdot 10^{-6}$ м², $l_m = 8,7$ м, $R = 1,35$ Ом, $I = 0,12$ А; коэффициенты теплопроводности воздуха, картона и изоляции $\lambda_{\text{возд}} = 2,57 \cdot 10^{-2}$ Вт/м·К, $\lambda_{\text{карт}} = 0,2$ Вт/м·К, $\lambda_{\text{из}} = 0,3$ Вт/м·К. Удельные массовые теплоемкости меди и стали $c_{pm} = 0,39 \cdot 10^3$ Дж/кг·К, $c_{ps} = 0,46 \cdot 10^3$ Дж/кг·К. По геометрическим параметрам вычисляются объемы стали и меди и поверхность тороида $V_c = 28,5 \times 10^{-6}$ м³, $V_m = 1,04 \cdot 10^{-6}$ м³, $S = 6,92 \cdot 10^{-3}$ м².

На тепловой схеме замещения (рис. П6) обозначены: P_m — мощность, выделяемая в обмотке; R_{Tn} — тепловое сопротивление теплоотдачи в окружающее пространство; R_{Tm} — тепловое сопротивление теплоотдачи от обмотки к сердечнику; C_m и C_n — теплоемкости обмотки и сердечника; τ_m и τ_c — превышения температуры меди обмотки и сердечника.

При составлении схемы приняты упрощающие допущения: равномерное распределение температуры по объемам меди и стали и представление катушки в виде сплошного токового слоя. Кроме того, в схеме не учитывалась малая по величине теплоемкость изоляционного промежутка между обмоткой и сердечником.

Численные значения параметров схемы:

$$P_m = I^2 R = 1,94 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}; \quad R_{Tn} = \frac{1}{S} (\delta_3 / \lambda_{\text{из}} + 1 / k_{\tau}) =$$

$$= 13 \text{ К/Вт}; \quad R_{Tm} = \frac{1}{S} (\delta_1 / \lambda_{\text{возд}} + \delta_2 / \lambda_{\text{карт}} + \delta_3 / \lambda_{\text{из}}) =$$

$$= 6,08 \text{ К/Вт},$$

где $k_{\tau} = 11,2$ Вт/(м²·К) — коэффициент теплоотдачи с наружной поверхности обмотки в окружающее пространство (см. [26]);

$$C_m = c_{pm} V_m \gamma_m = 3,64 \text{ Дж/К}; \quad C_n = c_{ps} V_n \gamma_n = 103 \text{ Дж/К};$$

где $\gamma_m = 8,93 \cdot 10^3$ кг/м³ и $\gamma_n = 7,88 \cdot 10^3$ кг/м³ — плотности меди и стали.

Схеме замещения соответствует дифференциальное уравнение

$$[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + T_3 p] \tau_c = R_{Tn} P_m, \quad (\text{П-22})$$

где $p = d/dt$ — оператор дифференцирования; $T_1 = C_m R_{Tn} = 47,3$ с, $T_2 = C_n R_{Tn} = 626$ с, $T_3 = C_n R_{Tm} = 1,34 \cdot 10^3$ с.

Решение (П-22) при скачкообразном изменении P_m и нулевых начальных условиях

$$\tau_c = \frac{P_m}{p_1 p_2 C_m R_{Tn}} \left(1 + \frac{p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}}{p_1 - p_2} \right), \quad (\text{П-23})$$

где $p_1 = -6,75 \cdot 10^{-2}$ 1/с и $p_2 = -5,0 \cdot 10^{-4}$ 1/с — корни характеристического уравнения

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + T_3 p = 0. \quad (\text{П-24})$$

В конце интервала измерения $t = 3$ с показатели экспонент (П-23) $|p_1 t| = 0,202$ и $|p_2 t| = 1,5 \cdot 10^{-3}$ по абсолютному значению существенно меньше единицы, что позволяет применить разложение экспонент в ряды, где удерживаются члены не выше квадратичных. Тогда (П-23) примет вид

$$\tau_c = \frac{P_m}{C_m C_n R_{Tn}} t^2$$

и превышение температуры сердечника вместе с расположенными на нем резисторами будет составлять в момент $t = 3$ с $\tau_c = 7,66 \cdot 10^{-5}$ К.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Львов Е. Л. Интегральные выражения для пондеромоторных сил в магнитном поле. — Электричество, 1984, № 6.
2. Львов Е. Л. Объемные силы и тензоры поля в магнетиках. — Электричество, 1987, № 10.
3. Львов Е. Л., Молодцова М. А. Упругие деформации в ферромагнитном тороиде, вызываемые магнитным полем. — Электричество, 1988, № 9.
4. Иванов-Смоленский А. В. Определение электромагнитных сил в нелинейной магнитной системе по натяжениям. — Электричество, 1985, № 7.
5. Иванов-Смоленский А. В. Определение электромагнитных сил в нелинейной магнитной системе по их объемной плотности. — Электричество, 1985, № 9.
6. Иванов-Смоленский А. В. О статье Е. Л. Львова «Объемные силы и тензоры поля в магнетиках». — Электричество, 1987, № 10.
7. Иванов-Смоленский А. В., Цуканов В. И., Давыдов А. В. Экспериментальное исследование упругих деформаций в ферромагнитных телах под действием магнитного поля. — Электричество, 1988, № 9.
8. Ашмарин Д. Г., Серихин Н. А. Экспериментальное определение электромагнитных сил в униполярной машине постоянного тока. — Электричество, 1988, № 9.
9. Могильников В. С., Олейников А. М. Выступление в дискуссии. — Электричество, 1988, № 9.
10. Фролов С. И. Выступление в дискуссии. — Электричество, 1988, № 9.
11. Бибер Л. А. Об измерении деформации в ферромагнитных телах под действием магнитного поля. — Электричество, 1988, № 9.
12. Абрамкин Ю. В. Об определении электромагнитных сил в нелинейной магнитной системе по их объемной плотности. — Электричество, 1988, № 10.
13. Алиевский Б. Л. О недопустимости применения модели магнетика по Амперу для определения электромагнитных сил. — Электричество, 1988, № 10.
14. Аванесов М. А. Вывод сил из объемной плотности энергии. — Электричество, 1988, № 10.

15. Фрнджибашян Э. С. О воспроизведении электромагнитных сил в моделях магнетика по Амперу.— Электричество, 1988, № 11.

16. Кузнецов В. А. Анализ формул для определения электромагнитных сил с позиций теории подобия.— Электричество, 1988, № 11.

17. Савин Н. В. Расчет сил в неоднородных средах с помощью вторичных источников.— Электричество, 1988, № 11.

18. Гаспарян В. Р. Об измерении деформаций в ферромагнитных телах под действием магнитного поля.— Электричество.

19. Максвелл Дж. К. Трактат об электричестве и магнетизме.— В кн.: Избранные сочинения по теории электромагнитного поля.— М.: Гостехиздат, 1954.

20. Эйнштейн А., Лауб И. О поперечных силах, действующих в магнитном поле на покоящиеся тела.— В кн.: А. Эйнштейн. Собрание научных трудов.— М.: Наука, 1965, т. 1.

21. Стреттон Дж. Теория электромагнетизма.— М.: ГИТТЛ, 1948.

22. Тамм И. Е. Основы теории электричества. Изд. 3-е.— М.— Л.: ГИТТЛ, 1946.

23. Максвелл Дж. К. О физических силовых линиях.— В кн.: Избранные сочинения по теории электромагнитного поля.— М.: Гостехиздат, 1954.

24. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Изд. 2-е.— М.: Наука, 1982.

25. Поливанов К. М. Теоретические основы электротехники. Ч. 3. Теория электромагнитного поля.— М.: Энергия, 1969.

26. Основы теории электрических аппаратов / Под ред. Г. В. Буткевича.— М.: Высшая школа, 1970.

27. Марченко А. Н. Управляемые полупроводниковые резисторы.— М.: Энергия, 1978.

28. Электротехнический справочник / Под ред. М. Г. Чиликина. Изд. 5-е, т. 1.— М.: Энергия, 1974.

[29.03.89]

ЛЬВОВ Е. Л.

УДК 621.318.1.013.001.24.001.8

Сопоставление формул Максвелла с другими формулами для расчета электромагнитных сил в магнитном поле

ИВАНОВ-СМОЛЕНСКИЙ А. В., доктор техн. наук

Применяемые в настоящее время способы расчета электромагнитных сил (ЭМС) в магнитном поле предложены в 1861 г. великим английским ученым Дж. К. Максвеллом в его малоизвестной работе «О физических силовых линиях» [1, 2].

Опираясь на представления Лагранжа, Максвелл установил два вытекающих из закона сохранения энергии способа расчета ЭМС, действующих на выделенный объем V магнитного поля (рис. 1).

Способ 1. Определение ЭМС \bar{F} по объемной \bar{f} и поверхностной, \bar{f}_s плотностям ЭМС в магнитном поле:

$$\bar{F} = \int_V \bar{f} dV + \int_{S_p} \bar{f}_s dS, \quad (1)$$

где S_p — поверхности разрыва магнитной проницаемости внутри выделенного объема.

Способ 2. Определение ЭМС \bar{F} по натяжению \bar{T}_n в магнитном поле:

$$\bar{F} = \int_S \bar{T}_n dS, \quad (2)$$

где S — поверхность, охватывающая объем V и все поверхности разрыва магнитной проницаемости S_p , имеющиеся в этом объеме.

Первые формулы Максвелла для удельных электромагнитных сил в магнитном поле \bar{f}^{M1} , \bar{f}_s^{M1} , \bar{T}_n^{M1} , предложенные в [2]. В упомянутой работе «О физических силовых линиях» [1, 2] Максвеллом были не только установлены два возможных способа расчета ЭМС,

но и предложены формулы для объемной плотности ЭМС —

$$\bar{f}^{M1} = \bar{J} \times \bar{B} - 0,5 H^2 \text{ grad } \mu, \quad (3)$$

для поверхностной плотности ЭМС на границе, отделяющей среду a с магнитной проницаемостью μ_a от среды b с магнитной проницаемостью μ_b —

$$\bar{f}_s^{M1} = 0,5 \bar{n}_b [H_a^2 (\mu_a - \mu_b) + B_a^2 (1/\mu_b - 1/\mu_a)], \quad (4)$$

где \bar{n}_b — нормаль к границе, направленная в сторону

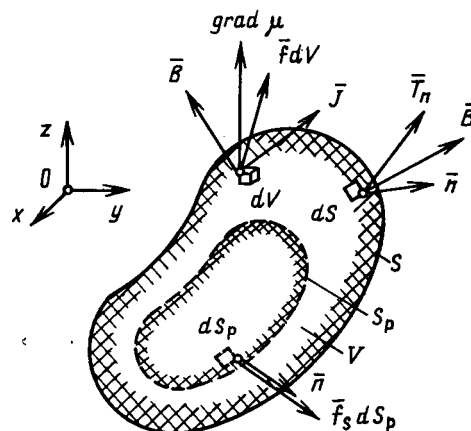


Рис. 1. Определение электромагнитной силы, действующей на выделенный объем V , через объемную \bar{f} и поверхностную \bar{f}_s плотности ЭМС или через натяжения \bar{T}_n в магнитном поле

среды b ; B_n и H_τ — нормальная составляющая индукции и тангенциальная составляющая напряженности на границе, и для натяжения, действующего в магнитном поле на элемент поверхности с нормалью \bar{n} ,

$$\bar{T}_n^M = \mu_0 \mu_r (\bar{H} H_n - 0,5 \bar{n} H^2) = \bar{T}_{nn}^M + \bar{T}_{n\tau}^M, \quad (5)$$

где $\bar{T}_{nn}^M = \bar{n} T_{nn}^M = 0,5 \mu_0 \mu_r (H_n^2 - H^2) \bar{n}$ — нормальная составляющая натяжения, $\bar{T}_{n\tau}^M = \bar{\tau} T_{n\tau}^M = \mu_0 \mu_r H_n H_\tau \bar{\tau}$ — тангенциальная составляющая натяжения.

Формулы (3) — (5) пригодны для магнитного поля в нелинейной изотропной среде, описываемого уравнениями $\text{rot } \bar{H} = \bar{J}$, $\text{div } \bar{B} = 0$, $\bar{B} = \mu \bar{H}$, к которым добавлены соответствующие граничные условия. После решения этих уравнений при заданных распределениях плотности токов $\bar{J} = \bar{J}(x, y, z)$ и магнитных проницаемостей $\mu = \mu(B, x, y, z)$ и нахождения распределений $\bar{B} = \bar{B}(x, y, z)$, $\bar{H} = \bar{H}(x, y, z)$ и статических магнитных проницаемостей $\mu = B/H = \mu(x, y, z)$ могут быть однозначным образом определены по (3) — (5) распределения $\bar{f} = \bar{f}(x, y, z)$ по выделенному объему V , распределения $\bar{f}_s = \bar{f}_s(x, y, z)$ по поверхностям разрыва магнитной проницаемости (границам между средами) S_p и распределения $\bar{T}_n = \bar{T}_n(x, y, z)$ по поверхности S , охватывающей объем V .

Физический смысл отдельных членов первых формул Максвелла (3) — (5) предельно ясен. Как видно из рис. 2, а, объемная плотность ЭМС \bar{f}^M по (3), действующая на элемент объема dV , складывается из объемной плотности ЭМС $\bar{f}_{\mu=\text{const}}^M = \bar{J} \times \bar{B}$, которая действует на ток в этом элементе с плотностью \bar{J} , и из

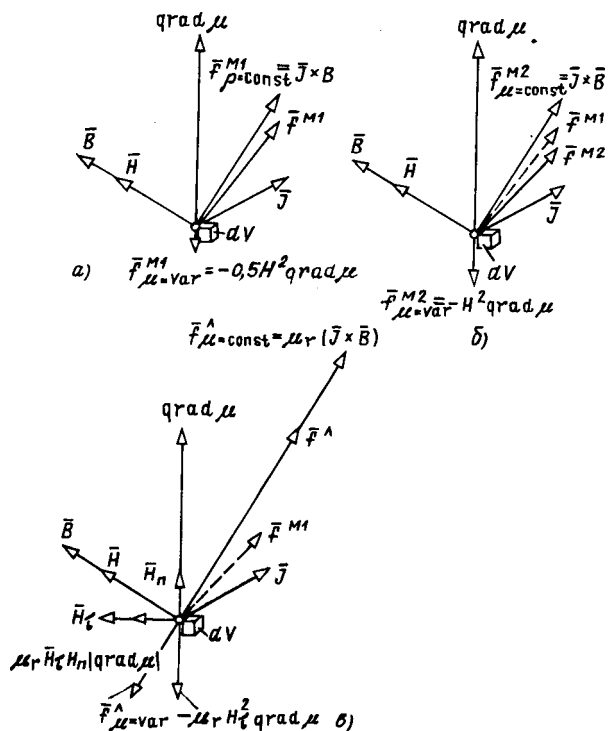


Рис. 2. Сопоставление объемных плотностей ЭМС, определенных по первой формуле Максвелла (а), второй формуле Максвелла (б) и формуле Льюва (в) при $H=1$, $\mu=2$, $J=0,75$, $\text{grad } \mu=0,5$

объемной плотности ЭМС $\bar{f}_{\mu=\text{var}}^M = -0,5 H^2 \text{grad } \mu$, которая действует на магнетик в этом элементе, если его магнитная проницаемость изменяется ($\text{grad } \mu \neq 0$). Из формулы (3) следует, что плотность ЭМС $\bar{f}_{\mu=\text{var}}^M$ всегда направлена в сторону уменьшения магнитной проницаемости (т. е. в противоположную сторону по сравнению с вектором $\text{grad } \mu$).

Как видно из рис. 3, а, поверхностная плотность ЭМС \bar{f}_s^M [по (4)], действующая на элемент границы между средой a с магнитной проницаемостью μ_a и средой b с магнитной проницаемостью μ_b , складывается из двух поверхностных плотностей: поверхностной плотности $\bar{f}_{SH}^M = 0,5 \bar{n}_b H_\tau^2 (\mu_a - \mu_b)$, которая зависит от тангенциальной составляющей поля на границе, и поверхностной плотности $\bar{f}_{SB}^M = 0,5 \bar{n}_b B_n^2 (1/\mu_b - 1/\mu_a)$, которая зависит от нормальной составляющей индукции на границе. Поскольку формула (4) может быть получена путем предельного перехода из второго члена формулы (3), и поверхностная плотность \bar{f}_{SH}^M и поверхностная плотность \bar{f}_{SB}^M всегда направлены в сторону среды с меньшей магнитной проницаемостью, подобно тому как вектор $\bar{f}_{\mu=\text{var}}^M = -0,5 H^2 \text{grad } \mu$ направлен в сторону наиболее интенсивного уменьшения магнитной проницаемости. Причем оба вектора (\bar{f}_{SH}^M и \bar{f}_{SB}^M) всегда нормальны к границе (независимо от направления вектора $\bar{B} = \mu_0 \mu_r \bar{H}$).

Как видно из рис. 4, а, вектор натяжения \bar{T}_n^M на элементе поверхности с нормалью \bar{n} по (5) складывается из нормальной $\bar{T}_{nn}^M = \bar{n} T_{nn}^M$ и тангенциальной $\bar{T}_{n\tau}^M = \bar{\tau} T_{n\tau}^M$ составляющих, пропорциональных магнитной проницаемости.

Как показано в [8, 14], замечательная особенность вектора \bar{T}_n^M , определенного по первой формуле Максвелла, состоит в том, что модуль этого вектора $|\bar{T}_n^M| = B^2 / (2\mu_0 \mu_r)$. Причем вектор \bar{T}_n^M лежит в плоскости векторов \bar{n} и \bar{B} . Угол между векторами \bar{T}_n^M и \bar{n} в 2 раза превосходит угол между векторами \bar{B} и \bar{n} .

Самим Максвеллом [1, 2], а также многими другими учеными (Гельмгольцем [4], Больцманом [5], Коном [6], Абрагамом [7] и др.) эти формулы были выведены с помощью математической модели магнитного поля Максвелла для изотропных линейных в магнитном отношении сред, в которых $\mu = \mu(x, y, z)$.

В последние годы в связи с необходимостью совершенствования методов численного расчета ЭМС в нелинейных магнитных системах и организации дискуссии по этой проблеме появился ряд работ (Иванов-Смоленский [8, 9], Аванесов [10], Абрамкин [11]), в которых даны новые доказательства формул Максвелла (3) — (5) для \bar{f}^M , \bar{f}_s^M , \bar{T}_n^M . С помощью понятия линейной модели нелинейной среды эти формулы удалось распространить на нелинейные в магнитном отношении среды, в которых $\mu = \mu(B, x, y, z)$. Знаменательно, что в таком виде формулы для \bar{f}^M и \bar{T}_n^M выведены исходя из математической модели магнитного поля Максвелла как неэнергетическими методами (путем анализа сил, возникающих в магнитном поле), так и энергетическими методами (по изменению энергии магнитного поля при малом перемещении выделенного объема в магнитном поле). Неэнергетический метод использован Гельмгольцем [4], а также в наши дни Аванесовым [10], применившим к выводу формул

понятие магнитно-токовой оболочки. Энергетические методы использованы Коном [6], Абрагамом [7] и впоследствии для нелинейных сред автором [8, 9] и Абрамкиным [11].

В результате проведенной дискуссии выяснилось, что формулы Максвелла (3) — (5) являются единственными формулами, с помощью которых может быть правильно определена ЭМС, которая действует на часть магнитно-нелинейного тела, а также механические напряжения и деформации в таком теле.

Формулы Максвелла (3) — (5) получили многочисленные экспериментальные подтверждения [12, 13, 14]. Критические замечания в адрес этих формул имеются только в статьях Е. Л. Львова. Однако они не представляются убедительными, касаются только вывода формул Максвелла, сделанного Больцманом [5], и не затрагивают другие многочисленные доказательства этих формул.

Экспериментальные исследования Львова и Молодцовой («Электричество», 1988, № 9), в которых «опровергаются» формулы Максвелла, выполнены некорректно. Как показано в дискуссии Л. А. Бибера («Электричество», 1988, № 9) и В. Р. Гаспаряном («Электричество», 1990, № 3), авторы этих экспериментальных исследований, измеряя весьма малые относительные деформации ферромагнитного тороида под действием магнитного поля (порядка 10^{-11} , по-видимому, приняли погрешность измерения (порядка 10^{-7}) за саму измеряемую величину.

Вторые формулы Максвелла для удельных электромагнитных сил в магнитном поле \vec{f}^{M2} , \vec{f}_n^{M2} , предложенные в [3]. В основном труде Максвелла «Трактате об электричестве и магнетизме» [1, 3], вышедшем в свет в 1873 г., предложены другие формулы для объемной плотности ЭМС* —

$$\vec{f}^{M2} = \vec{J} \times \vec{B} + \mu_0 \text{grad}(\vec{M}\vec{H})|_{M=\text{const}}, \quad (6)$$

для поверхностной плотности ЭМС на границе между средами a и b с магнитными проницаемостями $\mu_a = \mu_0 \mu_{ra}$ и $\mu_b = \mu_0 \mu_{rb}$ —

$$\vec{f}_s^{M2} = \frac{\vec{n}_s B_n^2}{2\mu_0} \left[\frac{(2\mu_{rb} - 1)}{\mu_{rb}^2} - \frac{(2\mu_{ra} - 1)}{\mu_{ra}^2} \right], \quad (7)$$

и для натяжения, действующего в магнитном поле на элемент поверхности с нормалью \vec{n} ,

$$\vec{T}_n^{M2} = \mu_0 \mu_r \vec{H} H_n - 0,5 \mu_0 \vec{n} H^2 = \vec{T}_{nn}^{M2} + \vec{T}_{nt}^{M2}, \quad (8)$$

где $\vec{T}_{nn}^{M2} = \vec{n} T_{nn}^{M2} = [\mu_0(\mu_r - 0,5) H_n^2 - 0,5 \mu_0 H_n^2] \vec{n}$ — нормальная составляющая натяжения; $\vec{T}_{nt}^{M2} = \vec{t} T_{nt}^{M2} = \mu_0 \mu_r H_n \times \vec{H}_t$ — тангенциальная составляющая натяжения.

Вторые формулы Максвелла (6) — (8) существенно отличаются от его первых формул (3) — (5) и совпадают с последними только в применении к немагнитным средам, когда $\mu_r = 1$, $\vec{M} = 0$, $\text{grad} \mu = 0$. В течение более 100 лет и первые и вторые формулы Максвелла применялись главным образом для определения ЭМС в немагнитных средах ($\mu_r = 1$) для таких задач, где поле можно определить аналитически. Результаты расчетов по первым и вторым формулам при $\mu_r = 1$

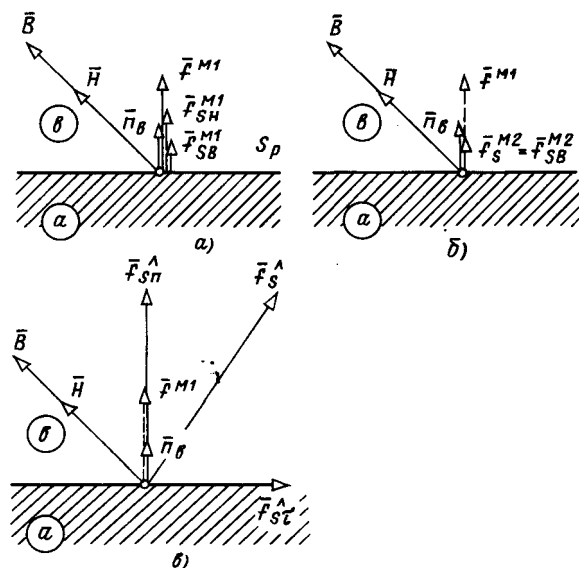


Рис. 3. Сопоставление поверхностных плотностей ЭМС, определенных по первой формуле Максвелла (а), второй формуле Максвелла (б) и формуле Львова (в) при $H_n = 1$, $\mu_{ra} = 1$, $\mu_{rb} = 2$

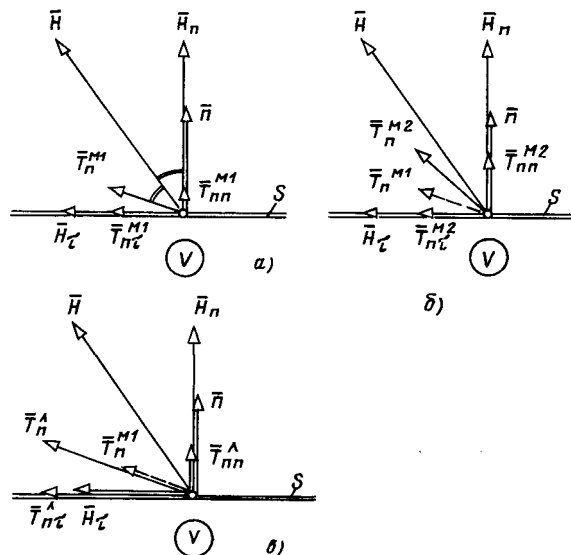


Рис. 4. Сопоставление натяжений в магнитном поле, определенных по первой формуле Максвелла (а), второй формуле Максвелла (б) и формуле Львова (в) при $H_n = \sqrt{2}$, $H_t = 1$, $\mu_r = 2$

получались одинаковыми, и можно было не задумываться о том, какие из формул Максвелла правильны в общем случае применительно к магнитным средам, когда $\mu_r \neq 1$.

Только в 70—80 годы нашего века, когда появилась реальная возможность численно рассчитывать с помощью ЭВМ электромагнитные поля и силы в сложных нелинейных магнитных системах (например, в электрических машинах), потребовалось дать ответ на вопрос, какими из формул Максвелла нужно пользоваться при определении электромагнитных сил в таких магнитно-нелинейных средах при $\mu_r = \mu_r(\vec{B}, x, y, z) \neq 1$.

* Поскольку вторая формула Максвелла (6) для объемной плотности ЭМС \vec{f}^{M2} совпадает с формулой Эйнштейна и Лауба для этой величины $\vec{f} = \mu_0 \vec{J} \times \vec{H} + \mu_0 (\vec{M} \text{grad}) \vec{H} = \vec{f}^{M2}$, далее анализируется только вторая формула Максвелла \vec{f}^{M2} и вытекающие из нее формулы для \vec{f}_s^{M2} и \vec{T}_n^{M2} .

Ответ на этот вопрос был получен в [8, 9] и в ходе дискуссии в статьях Абрамкина [11], Бута [15], Данилевича [16] и др.

Оказалось, что в общем случае (при $\mu_r \neq 1$) ЭМС в магнитном поле могут быть правильно определены только с помощью первых формул Максвелла (3) — (5). Как показано Бутом в [15], второй член

$$\bar{f}_{\mu=\text{var}}^{M2} = \mu_0 \text{grad}(\bar{M}\bar{H})|_{\bar{M}=\text{const}}$$

в формуле Максвелла (6) для объемной плотности ЭМС оказался ошибочным.

В [15, 17] удалось выявить неточность, допущенную Максвеллом при выводе формулы для второго члена (6). Она состоит в том, что вместо действительной объемной плотности энергии магнитного поля ($\omega = \bar{B}\bar{H}/2$) он использует понятие некой «плотности потенциальной энергии магнитного поля» ($\omega_n = \mu_0 \bar{M}\bar{H}$). В связи с этим второй член в формуле (6), представляющий собой объемную плотность ЭМС в элементе среды с изменяющейся магнитной проницаемостью,

$$\bar{f}_{\mu=\text{var}}^{M2} = \text{grad} \omega_n|_{\bar{M}=\text{const}} = \mu_0 \text{grad}(\bar{M}\bar{H})|_{\bar{M}=\text{const}} =$$

$$= -\mu_0 H^2 \text{grad} \mu_r = 2\bar{f}_{\mu=\text{var}}^{M1},$$

где $\bar{H} = \bar{M}/(\mu_r - 1)$, в 2 раза превосходит второй член в правильной формуле Максвелла для \bar{f}^{M1} (3).

Из графических построений на рис. 2, б видно к какой ошибке в определении полной объемной плотности $\bar{f}^{M2} \neq \bar{f}^{M1}$ это может привести. Вследствие указанной неточности появляются неточности в записи вторых формул Максвелла для натяжения \bar{T}_{n2}^{M2} (8) и поверхностной плотности ЭМС \bar{f}_s^{M2} (7). Как видно из сопоставления формул (5) для \bar{T}_{n1}^{M1} и (8) для \bar{T}_{n2}^{M2} , а также рис. 4, а и 4, б, тангенциальная составляющая натяжения определяется по формулам (8) правильно, т. е. $\bar{T}_{nt}^{M2} = \bar{T}_{nt}^{M1}$. Ошибочной оказывается лишь нормальная составляющая натяжения, определенная по формуле (8), поскольку $\bar{T}_{nn}^{M2} \neq \bar{T}_{nn}^{M1}$. Поскольку поверхностная плотность ЭМС \bar{f}_s^{M2} на границе между средами а и б может быть выражена через натяжения \bar{T}_{na}^{M2} и \bar{T}_{nb}^{M2} в этих средах, определенные ошибочным образом по (8), формула (7) для \bar{f}_s^{M2} не совпадает с формулой (4) для \bar{f}_s^{M1} [14]. Сравнивая (7) с (4), замечаем, что в (7) вообще не отражено влияние H_t^2 .

Вектор плотности \bar{f}_s^{M2} по (7), как и второй член вектора \bar{f}_s^{M1} по (4), направлен по \bar{n}_b . Однако по величине они различны. При $\mu_{ar} \gg 1$ и $\mu_{br} \gg 1$ плотность \bar{f}_s^{M2} превышает второй член в (4) в 2 раза. К какой ошибке в определении \bar{f}_s^{M2} по сравнению с \bar{f}_s^{M1} этот приводит, видно из рис. 3, б.

Другие формулы для удельных электромагнитных сил в магнитном поле. В 70—80 годы в связи с появлением реальной возможности численно рассчитывать с помощью ЭВМ электромагнитные поля и силы в сложных нелинейных магнитных системах был опубликован ряд работ, посвященных определению ЭМС в магнитном поле. В статье Е. М. Синельникова и Д. Е. Синельникова («Изв. вузов, Электромеханика», 1982, № 5), В. И. Астахова («Изв. вузов, Электромеханика», 1984, № 10), Е. Л. Львова и М. А. Молод-

цовой («Электричество», 1984, № 6; 1987, № 10; 1988, № 9) взамен формул Максвелла предложены новые формулы для удельных электромагнитных сил в магнитном поле.

Поскольку ошибочность формул Синельниковых и Астахова была выявлена в [8, 9, 14, 17], а в состоявшейся дискуссии обсуждались формулы Львова, проанализируем здесь только эти формулы.

Для вывода своих формул Е. Л. Львов воспользовался математической моделью магнитного поля, предложенной И. Е. Таммом. Модель магнитного поля Тамма, так же как модель магнитного поля Максвелла, построена на основе гипотезы Ампера¹.

В отличие от математической модели магнитного поля Максвелла математическую модель магнитного поля Тамма называют неполной моделью, поскольку в ней правильно воспроизводится только индукция магнитного поля \bar{B} , а напряженность \bar{H} не воспроизводится. Объясняется это тем, что в модели Тамма реальная магнитная среда с магнитной проницаемостью $\mu = \mu_0 \mu_r$ (рис. 5, а) заменена немагнитной средой с магнитной проницаемостью μ_0 (рис. 5, б). А намагничивающее действие молекулярных токов, имевшее место в магнетике, воспроизведено с помощью дополнительных токов проводимости, распределительных с плотностью $\bar{J}_M = \text{rot} \bar{M}$, где $\bar{M} = (\mu_r - 1)\bar{H}$ — намагниченность, существовавшая в магнетике в соответствии с гипотезой Ампера.

Полная плотность токов проводимости \bar{J}_* в модели Тамма складывается из токов проводимости \bar{J} , которые были в магнетике, и дополнительных токов проводимости \bar{J}_M :

$$\begin{aligned} \bar{J}_* &= \bar{J} + \bar{J}_M = \text{rot} \bar{H} + \text{rot} \bar{M} = \text{rot}(\bar{H} + \bar{M}) = \\ &= \text{rot}(\mu_r \bar{H}) = \bar{J}_{*\mu=\text{const}} + \bar{J}_{*\mu=\text{var}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\bar{J}_{*\mu=\text{const}} = \mu_r \text{rot} \bar{H} = \mu_r \bar{J}$ — составляющая тока проводимости, создающая в модели при уменьшенной в μ_r раз магнитной проницаемости такую же индукцию \bar{B} , как в магнетике (рис. 5, б); $\bar{J}_{*\mu=\text{var}} = (\text{grad} \mu_r) \times \bar{H}$ — составляющая тока проводимости, воспроизводящая в модели влияние изменения магнитной проницаемости μ_r на индукцию магнитного поля (рис. 5, б).

В отличие от молекулярных токов в магнетике, которые в соответствии с гипотезой Ампера не оказывают влияния на напряженность магнитного поля, дополнительные токи проводимости $\bar{J}_M = \text{rot} \bar{M}$ в равной мере с токами проводимости \bar{J} , которые были в магнетике, принимают участие в образовании напряженности \bar{H}_* и индукции поля \bar{B}_* в модели. Под действием токов \bar{J} и \bar{J}_M в модели образуется напряженность поля $\bar{H}_* = \mu_r \bar{H}$, увеличенная в μ_r раз по сравнению с оригиналом. При такой напряженности \bar{H}_* в немагнитной среде модели с магнитной проницаемостью μ_0 воспроизводится такая же индукция, как в магнетике: $\bar{B}_* = \mu_0 \bar{H}_* = \mu_0 \mu_r \bar{H} = \bar{B}$.

В силу отмеченной неполноты модели Тамма в отношении воспроизведения напряженности поля с ее помощью Е. Л. Львовым получены формулы для

¹ Сам Е. Л. Львов, а вслед за ним и его оппоненты, иногда называют математическую модель магнитного поля Тамма, построенную на основе гипотезы Ампера, «моделью Ампера». Такое название нельзя считать удачным, поскольку на основе той же гипотезы построена и математическая модель магнитного поля Максвелла.

удельных ЭМС, существенно отличающиеся от формул Максвелла.

Объемная плотность ЭМС $\bar{f}^{\text{л}}$ определяется Е. Л. Львовым как объемная плотность ЭМС, действующая на полную плотность тока проводимости в модели $\bar{J}_* = \bar{J} + \bar{J}_M$,

$$\bar{f}^{\text{л}} = \bar{J}_* \times \bar{B} = \text{rot}(\bar{H} + \bar{M}) \times \bar{B}. \quad (10)$$

С целью облегчения сравнения с формулой Максвелла формулу для $\bar{f}^{\text{л}}$ с помощью (9) можно представить в следующем виде (рис. 2, в):

$$\begin{aligned} \bar{f}^{\text{л}} &= \bar{J}_* \times \bar{B} = \bar{J}_{*\mu=\text{const}} \times \bar{B} + \bar{J}_{*\mu=\text{var}} \times \bar{B} = \\ &= \bar{f}_{\mu=\text{const}}^{\text{л}} + \bar{f}_{\mu=\text{var}}^{\text{л}}, \end{aligned} \quad (10a)$$

где $\bar{f}_{\mu=\text{const}}^{\text{л}} = \bar{J}_{*\mu=\text{const}} \times \bar{B} = \mu_r \bar{J} \times \bar{B}$ — объемная плотность ЭМС, действующая на плотность тока проводимости;

$\bar{f}_{\mu=\text{var}}^{\text{л}} = \bar{J}_{*\mu=\text{var}} \times \bar{B} = \mu_0 \mu_r (\bar{\tau} H_n H_\tau | \text{grad } \mu_r | - H_\tau^2 \text{grad } \mu_r)$ — объемная плотность ЭМС, действующая на элемент объема с изменяющейся магнитной проницаемостью (здесь $\bar{n} \parallel | \text{grad } \mu_r$; $\bar{\tau} \perp \text{grad } \mu$).

Поверхностная плотность ЭМС $\bar{f}_s^{\text{л}}$ на границе между средами a и b с магнитными проницаемостями $\mu_a = \mu_0 \mu_{ar}$ и $\mu_b = \mu_0 \mu_{br}$ определяется Е. Л. Львовым по формуле

$$\bar{f}_s^{\text{л}} = \bar{n}_b H_\tau^2 \mu_0 \mu_r (\mu_{ar} - \mu_{br}) + \bar{\tau} B_{bn} H_\tau (\mu_{br} - \mu_{ar}), \quad (11)$$

где $\mu_r = (\mu_{ar} + \mu_{br})/2$.

Натяжения в магнитном поле $\bar{T}_n^{\text{л}}$ Е. Л. Львов предлагает определять по формуле, вытекающей из (10):

$$\begin{aligned} \bar{T}_n^{\text{л}} &= (1/\mu_0)(\bar{B} B_n - 0,5 \bar{n} B^2) = \mu_0 \mu_r^2 (\bar{H} H_n - 0,5 \bar{n} H^2) = \\ &= \bar{T}_{nn}^{\text{л}} + \bar{T}_{n\tau}^{\text{л}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\bar{T}_{nn}^{\text{л}} = \bar{n} T_{nn} = 0,5 \mu_0 \mu_r^2 (H_n^2 - H^2) \bar{n}$; $\bar{T}_{n\tau}^{\text{л}} = \bar{\tau} T_{n\tau} = \mu_0 \mu_r^2 H_n H_\tau \bar{\tau}$.

Сравнивая формулу Львова (10a) для объемной плотности ЭМС с первой формулой Максвелла (3), видим, что первый член формулы (10a) $\bar{f}_{\mu=\text{const}}^{\text{л}}$ в μ_r раз превосходит первый член формулы (3) — $\bar{f}_{\mu=\text{const}}^{\text{м1}} = \bar{J} \times \bar{B}$.

Второй член формулы (10a) $\bar{f}_{\mu=\text{var}}^{\text{л}}$ представляющий собой объемную плотность ЭМС, действующую на элемент объема с изменяющейся магнитной проницаемостью, и качественно, и количественно отличается от соответствующего члена в (3) —

$$\bar{f}_{\mu=\text{var}}^{\text{м1}} = -0,5 \mu_0 H^2 \text{grad } \mu_r.$$

Во-первых, составляющая плотности ЭМС $\bar{f}_{\mu=\text{var}}^{\text{л}}$, направленная по $\text{grad } \mu_r$, превосходит в $2\mu_r H^2/H_\tau^2$ раз плотность $\bar{f}_{\mu=\text{var}}^{\text{м1}}$ (при $H_\tau = H$ в $2\mu_r$ раз). Во-вторых, $\bar{f}_{\mu=\text{var}}^{\text{л}}$ содержит составляющую $\mu_0 \mu_r \tau \times H_n H_\tau | \text{grad } \mu_r |$, направленную нормально к $\text{grad } \mu_r$ (по единичному вектору $\bar{\tau}$), которая вообще отсутствует в первой формуле Максвелла (3).

При $H_\tau = 0$ и $H = H_n$ второй член формулы (10a) $\bar{f}_{\mu=\text{var}}^{\text{л}}$ вообще исчезает, в то время как второй член (3) в этом случае равен $\bar{f}_{\mu=\text{var}}^{\text{м1}} = -0,5 H^2 \mu_0 \text{grad } \mu_r$.

В конечном счете, как видно из сопоставления рис. 2, в и а, объемная плотность ЭМС $\bar{f}^{\text{л}}$ по (10), (10a) существенно отличается и по величине и по направлению от объемной плотности ЭМС $\bar{f}^{\text{м1}}$ по формуле Максвелла (3).

Сравнивая формулу Львова (11) для поверхностной плотности ЭМС $\bar{f}_s^{\text{л}}$ с формулой Максвелла (4) для

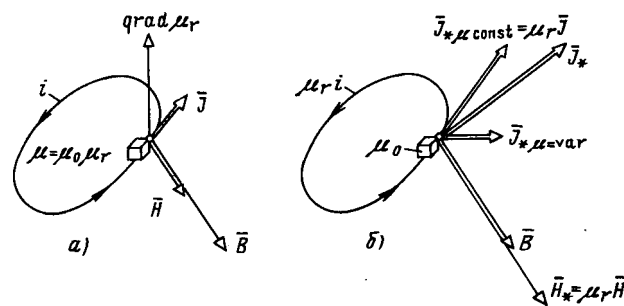


Рис. 5. Сопоставление плотностей тока, индукции и напряженности магнитного поля в элементе объема магнетика (а) и в его модели по Тамму (б)

$\bar{f}_s^{\text{м1}}$, замечаем, что первый член в (11), пропорциональный H_τ^2 и определяющий нормальную составляющую $\bar{f}_s^{\text{л}}$, превышает в μ_r раз первый член в (4). Второй член в (11), определяющий тангенциальную составляющую силы, в (4) вообще не содержится. И наоборот, второй член в (4), связанный с B_n^2 и определяющий еще одну нормальную составляющую поверхностной плотности ЭМС, вообще не содержится в (11). В конечном счете, как видно из сопоставления рис. 3, в и а, поверхностная плотность ЭМС $\bar{f}_s^{\text{л}}$ по (11) существенно отличается и по величине и по направлению от поверхностной плотности ЭМС по формуле Максвелла (4).

Сравнивая формулу Львова (12) для натяжения в магнитном поле $\bar{T}_n^{\text{л}}$ с формулой Максвелла (5) для $\bar{T}_n^{\text{м1}}$, замечаем, что натяжение $\bar{T}_n^{\text{л}}$ по (12) в μ_r раз превосходит натяжение $\bar{T}_n^{\text{м1}}$ по (5), т. е.

$$\bar{T}_n^{\text{л}} = \mu_r \bar{T}_n^{\text{м1}}.$$

Как видно из сопоставления рис. 4, в и а векторы $\bar{T}_n^{\text{л}}$ и $\bar{T}_n^{\text{м1}}$ отличаются только по модулю, а по направлению совпадают.

Сравнение электромагнитных сил, рассчитанных с помощью формул Максвелла и Львова. Действующая на выделенный объем V в магнитном поле ЭМС \bar{F} определяется по (1) через \bar{f} и \bar{f}_s или по (2) через \bar{T}_n на поверхности S , выделяющей этот объем. В одном важном частном случае, когда определяется результирующая сила \bar{F} , действующая на магнитное тело, расположенное в немагнитной среде с магнитной проницаемостью μ_0 , эта сила может быть правильно определена как с помощью первых формул Максвелла, так и с помощью ошибочных формул для определения удельных ЭМС (вторых формул Максвелла и формул Львова).

Объясняется это тем, что поверхность S , охватывающая объем данного тела V и его границу S_p , располагается целиком в немагнитной среде, в которой и первая формула Максвелла (5), и вторая формула Максвелла (8), и формула Львова (12) полностью совпадают:

$$\bar{T}_n = \bar{T}_n^{\text{м1}} = \bar{T}_n^{\text{м2}} = \bar{T}_n^{\text{л}} = \mu_0 (\bar{H} H_n - 0,5 H^2 \bar{n}).$$

Поэтому, выражая силу \bar{F} через натяжения по (2), получаем один и тот же результат:

$$\bar{F} = \int_S \bar{T}_n^{\text{м1}} dS = \int_S \bar{T}_n^{\text{м2}} dS = \int_S \bar{T}_n^{\text{л}} dS.$$

Поскольку формулы для \bar{f}_s^{M1} , \bar{f}_s^{M1} и \bar{f}_n^{M1} (а также для \bar{f}_s^{M2} , \bar{f}_s^{M2} и \bar{f}_n^{M2} и для \bar{f}_s^{L1} , \bar{f}_s^{L1} и \bar{f}_n^{L1}) согласованы между собой в том смысле, что результаты расчетов по (1) и (2) будут одинаковыми, то же значение для силы \bar{F} получим, выражая ее через объемные и поверхностные плотности ЭМС:

$$\bar{F} = \int_S \bar{f}_n^{M1} dS = \int_V \bar{f}_s^{M1} dV + \int_{S_p} \bar{f}_s^{M1} dS = \int_V \bar{f}_s^{M2} dV + \int_{S_p} \bar{f}_s^{M2} dS = \int_V \bar{f}_s^{L1} dV + \int_{S_p} \bar{f}_s^{L1} dS.$$

В общем случае, когда определяется сила \bar{F} , действующая на часть магнитного тела, или требуется найти механические напряжения и деформации, возникающие в магнитном теле под действием объемных \bar{f} и поверхностных \bar{f}_s плотностей ЭМС, необходимо обращаться к первым формулам Максвелла — (3) — (5). При использовании вторых формул Максвелла — (6) — (8), формул Львова (10) — (12) или любых других формул, не совпадающих с первыми формулами Максвелла, сила \bar{F} , напряжения и деформации будут определены неправильно.

Проиллюстрируем этот вывод на двух примерах из области электромеханики.

В первом примере (рис. 6, а) определим силу радиального тяжения \bar{F} на зубец сердечника электрической машины, возникающую под действием радиально-направленного поля с индукцией \bar{B} . Примем магнитную проницаемость в зубце равной $\mu = \mu_0 \mu_r$, сечение зубца S . Выделим поверхностью S_{1234} объем зубца V , на который действует сила F . Найдём эту силу.

1. По первой формуле Максвелла (4), имея в виду, что $B = B_n$,

$$F^{M1} = \left| \int_{S_{14}} \bar{f}_s^{M1} dS \right| = \frac{B^2}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \right) S.$$

2. По второй формуле Максвелла (7)

$$F^{M2} = \left| \int_{S_{14}} \bar{f}_s^{M2} dS \right| = \frac{B^2}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \right)^2 S.$$

3. По формуле Львова (11)

$$F^{L1} = \left| \int_{S_{14}} \bar{f}_s^{L1} dS \right| = 0$$

(при $B = B_n$, $B_t = H_t = 0$ плотность $\bar{f}_s^{L1} = 0$).

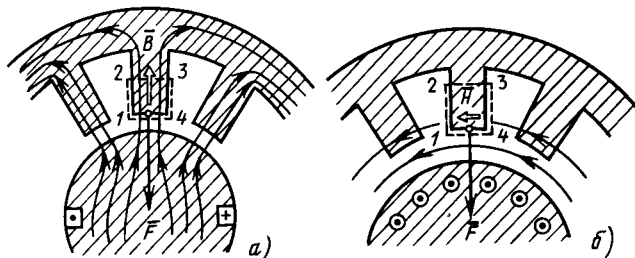


Рис. 6. К определению силу радиального магнитного тяжения F , действующей на зубец сердечника электрической машины: для радиально-направленного магнитного поля (а) и для тангенциально-направленного магнитного поля (б)

Зависимости сил F , рассчитанных по различным формулам, от относительной магнитной проницаемости показаны на рис. 7, а. С экспериментальными данными совпадают только расчетная сила F , определенная по первой формуле Максвелла [14, гл. 7].

Во втором примере (рис. 6, б) определим силу радиального тяжения F на зубец сердечника электрической машины, возникающую под действием тангенциально-направленного поля с напряженностью \bar{H} на поверхности S_{14} . Найдём силу \bar{F} , действующую на объем V , охваченный поверхностью S_{1234} .

1. По первой формуле Максвелла (4), имея в виду, что $H = H_t$, $H_n = 0$,

$$F^{M1} = \left| \int_{S_{14}} \bar{f}_s^{M1} dS \right| = \frac{\mu_0 H^2}{2} (\mu_r - 1).$$

2. По второй формуле Максвелла (7)

$$F^{M2} = \left| \int_{S_{14}} \bar{f}_s^{M2} dS \right| = 0$$

(при $H = H_t$, $H_n = 0$ и $B_n = 0$ плотность $\bar{f}_s^{M2} = 0$).

3. По формуле Львова (11)

$$F^{L1} = \left| \int_{S_{14}} \bar{f}_s^{L1} dS \right| = \frac{\mu_0 H^2}{2} (\mu_r - 1)^2.$$

Зависимости сил F , рассчитанных по различным формулам, от относительной магнитной проницаемости показаны на рис. 7, б. С экспериментальными данными совпадает только сила, рассчитанная по первой формуле Максвелла.

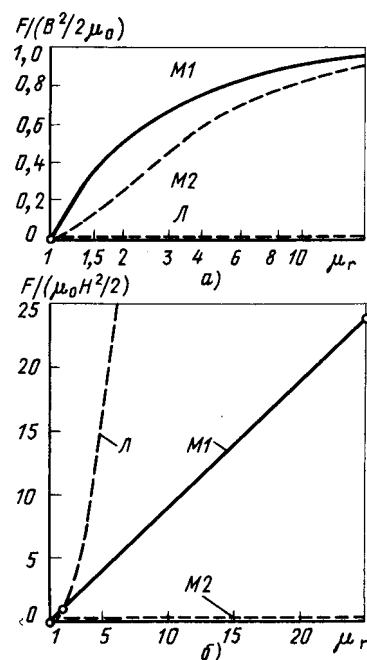


Рис. 7. Влияние относительной магнитной проницаемости сердечника на силу радиального магнитного тяжения F , рассчитанную по первым формулам Максвелла (M1), по его вторым формулам (M2) и по формулам Львова (Л): а — для радиально-направленного поля по рис. 6, а; б — для тангенциально-направленного поля по рис. 6, б

УДК 621.3.061

Recski A. Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics.— Budapest: Akademiai Kiado; Berlin, Heidelberg, New York...: Springer-Verlag, 1989

(А. Речки. Теория матроидов и ее приложения в теории электрических цепей и в статике — на англ. языке)

Теория матроидов, позволяющая синтезировать как геометрические, так и функциональные особенности электрических цепей и обобщающая тем самым многие положения теорий графов и линейных систем, привлекает в последние годы пристальное внимание специалистов по теории электрических цепей. Вопросам применения теории матроидов в теории электрических цепей посвящены многочисленные статьи, международные симпозиумы, диссертации, монографии.

К сожалению, на русском языке издано мало литературы по этой тематике, а имеющиеся работы (например, перевод вышеупомянутой книги М. Айгнера) зачастую малодоступны широкому кругу читателей из-за чрезмерно абстрактного языка изложения.

Рецензируемая книга, написанная известным специалистом по теории матроидов, является по сути первой монографией, дающей элементарное введение в эту теорию и отражающей большинство известных направлений её использования в теории электрических цепей, и поэтому может представить большой интерес для специалистов отечественной школы теоретической электротехники.

Книга публикуется издательством Springer-Verlag как шестой том в серии «Алгоритмы и комбинаторика» и основана на курсах по теории матроидов и их приложениям, читаемых автором в университетах Канады, США, ФРГ.

Книга состоит из двух частей (18 глав) и четырех

Выводы. 1. Первые формулы Максвелла [(3) — (5)] для \vec{f} , \vec{f}_s и \vec{T}_n являются единственными из известных формул для удельных ЭДС, вывод которых осуществлен многими различными способами самым строгим образом исходя из математической модели магнитного поля Максвелла.

3. Это единственные из формул для удельных ЭМС, в обоснованиях которых не обнаружены те или иные ошибки.

3. Это единственные из формул для удельных ЭМС, которые распространяются на магнитно-нелинейные тела и дают возможность определить электромагнитные силы, механические напряжения и деформации в этих телах, совпадающие с экспериментальными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Максвелл Дж. К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля.— М.: Гостехиздат, 1954.
2. Maxwell J. C. On physical lines of force.— Philosophic magazine, 1861, N 21.
3. Maxwell J. C. A treatise on electricity and magnetism.— Oxford Clarendon Press, 1873, vol. 1 and 2.
4. Helmholtz H. Über die auf das innere Magnetisch oder dielectrisch Polarisirter Körper wirkende Kräfte.— Annalender Physik, 1881, N 13.
5. Boltzman L. Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes.— Leipzig: Barth, 1891 (T. 1), 1893 (T. 2).
6. Cohn E. Das electromagnetische Feld.— Leipzig: Hirzel, 1890.

7. Абрагам М. Теория электричества. Т. 1. Введение в теорию электричества Максвелла.— Л.— М.: ГОНТИ, 1939.

8. Иванов-Смоленский А. В. Определение электромагнитных сил в нелинейной магнитной системе по натяжениям.— Электричество, 1985, № 7.

9. Иванов-Смоленский А. В. Определение электромагнитных сил в нелинейной магнитной системе по их объемной плотности.— Электричество, 1985, № 9.

10. Аванесов М. А. Вывод формулы для натяжений в магнитном поле на основе понятия пробной оболочки.— Электричество, 1988, № 10.

11. Абрамкин Ю. В. Об определении электромагнитных сил в нелинейной магнитной системе по их объемной плотности.— Электричество, 1988, № 10.

12. Иванов-Смоленский А. В., Цуканов В. И., Давыдов А. В. Экспериментальное исследование упругих деформаций под действием электромагнитных сил.— Электричество, 1988, № 9.

13. Ашмарин Д. Г., Серихин Н. А. Экспериментальное определение электромагнитных сил в униполярной машине постоянного тока.— Электричество, 1988, № 9.

14. Иванов-Смоленский А. В. Электромагнитные силы и преобразование энергии в электрических машинах.— М.: Высшая школа, 1989.

15. Бут Д. А. Определение электромагнитных сил в нелинейной магнитной системе по натяжениям.— Электричество, 1990, № 3.

16. Данилевич Я. Б. Объемные силы и тензоры поля в магнетиках.— Электричество, 1990, № 5.

17. Иванов-Смоленский А. В. О статье Е. Л. Львова «Объемные силы и тензоры в магнетиках».— Электричество, 1987, № 10.

приложений. Часть первая (главы 1—6) посвящена графам, часть вторая (главы 7—18) — матроидам. Глава содержит от 2 до 6 параграфов. В главах с нечетными номерами представлены математические результаты, в главах с четными номерами — приложения соответствующего математического аппарата в теории цепей и статике. Каждый параграф включает основное описание и следующие за ним упражнения и проблемы. В основном описании новые определения и теоремы вводятся как примеры, включающие в себя по возможности немногочисленные технические детали. Более глубокие результаты, длинные вычисления, доказательства и т. п. вынесены в упражнения и проблемы. Книга содержит около 800 упражнений и проблем, решению которых посвящено приложение 4 (с. 321—510, или около 40 % представленного материала). Около 800 рисунков и свыше 30 таблиц, представленных в книге, существенно помогают в усвоении материала.

Глава 1 знакомит с основными концепциями теории графов (пути, циклы, связность, деревья, леса, разделяющие множества, ориентированные графы, матричные и списочные представления графов, алгоритм проверки связности графов, жадный алгоритм построения леса минимального веса).

Приложения (глава 2) охватывают уравнения Кирхгофа, единственность решения резистивной цепи, уравнения состояния, топологические формулы Кирхгофа и Максвелла, жесткое скрепление квадратной сетки посредством диагональных элементов.

Глава 3 посвящена планарным графам и двойственности (2-изоморфизм, двухсвязность, техника, поиска в глубину и ширину, алгоритм выделения фундаментальной системы циклов и построения дерева кратчайших путей).

Приложения (глава 4) касаются классических результатов двойственности в теории электрических цепей и диаграмм Максвелла — Кремона.

В главе 5 изучаются теоремы Кёнига и Менгера (двудольные графы, потоки в сетях, алгоритм построения максимального потока, ранг и алгебраическая зависимость, элементы теории NP -сложности).

В качестве приложения (глава 6) рассматриваются единственность решения цепей, содержащих отрицательные сопротивления, идеальные трансформаторы и гираторы; определение жесткости в графовой модели.

В первой части монографии рассматривается в основном достаточно традиционный материал (см., например, Свами Н. Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. — М.: Мир, 1984), но изложение его отличается большим методическим совершенством.

Глава 7 знакомит с основными концепциями теории матроидов (независимость, база, ранг, циклы, двойственность, минор, прямая сумма, связность, жадный

алгоритм построения базы матроида максимального веса).

В приложении (глава 8) проводится описание многополюсников и жесткости скрепления системы в терминах теории матроидов.

В главе 9 излагаются алгебраические и геометрические представления матроидов (представление над различными полями, геометрические представления, замкнутые множества).

В приложениях (глава 10) концепция двойственности обобщается на многополюсники и рассматривается скрепление одноэтажных зданий.

В главах 11, 13 изучается сумма матроидов (алгебраическая и геометрическая интерпретации, приложения в теории графов, пересечение и разбиение матроидов, алгоритм взвешенного пересечения матроидов, минимаксные теоремы, субмодулярные функции).

Приложения (главы 12, 14) посвящены существованию гибридного описания многополюсника, единственности решения линейных активных цепей, связи многополюсников, теореме Лемана.

В главе 15 рассматриваются матроиды, порожденные графами (трансверсальные матроиды, матроиды, индуцированные двудольными и направленными графами).

Приложения (глава 16) посвящены структурам данных и реализуемости многополюсников.

В главе 17 изложены некоторые новые результаты теории матроидов (оракулы, характеристизация регулярных матроидов, ориентированные матроиды).

Приложения (глава 18) касаются вопросов единственности решения линейных активных цепей и исследованию жесткости скреплений.

Представленный материал в нечетных главах книги, за небольшим исключением, аналогичен материалу книг: Айгнер М. Комбинаторная теория. — М.: 1982, Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. — М.: Мир, 1985, однако изложен более просто. Материал четных глав второй части оригинален и весьма интересен.

Библиография к монографии насчитывает свыше 400 источников.

Рецензент считает своим долгом привлечь внимание к этой монографии научных работников, инженеров, преподавателей, студентов, интересующихся современными проблемами теории электрических цепей.

Монография А. Речки весьма совершенна в методическом отношении и содержит большое число чисто справочных сведений (из значимых научных результатов в рассматриваемой области в книге отсутствуют лишь сведения о результатах Бруно и Вайнберга по матроидному обобщению теории электрических цепей и результатах группы Ири по «главным разбиениям» матроидов). Был бы весьма целесообразным перевод книги на русский язык.

БУТЫРИН П. А.

Памяти Степана Ивановича Тельного (1890—1962)

(К 100-летию со дня рождения)

В этом году научная общественность страны отметила знаменательную дату — 100-летие со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, доктора технических наук, профессора Степана Ивановича Тельного, выдающегося советского ученого в области электрометаллургии и электротермии.

С. И. Тельный, несомненно, внес неоценимый вклад в разработку научных основ электрометаллургии стали и ферросплавов и печной электротехники. Являясь одним из первых исследователей дуговых установок, он создал научные основы анализа электрических режимов дуговых сталеплавильных и ферросплавных электропечей. С. И. Тельным в 20—30 годы выполнены фундаментальные исследования по теории дуги в электрических промышленных печах. Выдвинутая им гипотеза о прямоугольном характере изменения напряжения дуги, блестяще подтвердившаяся на практике, позволила создать методы расчета электрических цепей трехфазных дуговых установок с непроводящей подиной, ставшие научной основой для анализа электрических режимов печей и их синтеза с оптимизацией условий устойчивости горения дуги. Осо-

бенно продуктивными были работы С. И. Тельного по теории шунтированной дуги, которые создали надежную научную и практическую базу для развития ферросплавных печей.

Созданная теоретическая база позволила С. И. Тельному в дальнейшем разработать универсальные круговые диаграммы электрометаллургических печей, ставшие основным инструментом для анализа электрических характеристик установок. Неоценим вклад С. И. Тельного и в разработку основ автоматического управления дуговыми печами.

Выдающийся ученый, С. И. Тельный свою исследовательскую работу сочетал с практической деятельностью по развитию электрометаллургии страны. Он принимал непосредственное участие в обосновании необходимости строительства и проектировании ферросплавных заводов в Запорожье и Зестафони, завода «Запорожсталь», являлся одним из авторов технологии переработки марганцевых руд Никопольского месторождения и т. д.

Особенно большую роль сыграл С. И. Тельный в подготовке кадров инженеров-электрометаллургов и электротермистов. Он заведовал кафедрами электрометаллургии в Екатеринославском горном

институте (1928—1930), Днепропетровском металлургическом институте (1930—1941), Магнитогорском горнометаллургическом институте (1941—1943), Уральском политехническом институте (1943—1947), кафедрой общей и теоретической электротехники Куйбышевского индустриального института. За эти годы под его руководством подготовлены сотни высококвалифицированных специалистов. Велики заслуги С. И. Тельного и как организатора высшей школы. Многие годы он сочетал научную и преподавательскую деятельность с работой декана факультета, зам. директора по учебной и научной работе, ректора Куйбышевского индустриального института.

Одним из главных итогов деятельности проф. Тельного С. И. является создание научной школы электрометаллургов и электротермистов. Научные идеи Тельного С. И. творчески развили и приумножили его многочисленные ученики и последователи.

Высокий научный уровень работ С. И. Тельного, неоспоримый авторитет, прекрасные человеческие качества остаются примером для новых поколений научных работников и преподавателей.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Андерс В. И., Белкин Г. С., Бортник И. М., Борцов Ю. А., Будзко И. А., Бутырин П. А., Гельфанд Я. С., Данилевич Я. Б., Евсеев Б. Н. (зам. главного редактора), Ершевич В. В., Иванов-Смоленский А. В., Ильинский Н. Ф., Иосель Ю. Я., Комельков В. С., Костенко М. В., Лабунцов В. А. (главный редактор), Ларионов В. П., Лизунов С. Д., Мамиконянц Л. Г., Митюшкин К. Г., Михайлов О. П., Морозкин В. П., Нетушил А. В., Розанов Ю. К., Пищиков В. И., Семенов В. А., Слежановский О. В., Совалов С. А., Строев В. А., Тареев Б. М., Толстов Ю. Г., Чечурин В. Л., Шакарян Ю. Г., Шаталов А. С., Шилин Н. В.

Адреса редакции: 103012 Москва, К-12, Б. Черкасский пер., 2/10.

Телефон 924-24-80

101000 Москва, Главный почтамт, абонентный ящик № 648

Адрес для телеграмм: МОСКВА, 12, ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Научные редакторы: Б. Д. Макашкин, А. Л. Прилуцкий

Художественный редактор Т. А. Дворецкова Технический редактор Г. В. Преображенская Корректор Е. В. Кудряшова

Сдано в набор 17.09.90. Подписано в печать 30.10.90. Формат 84×108¹/₁₆. Бумага кн.-журн. офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,08. Усл. кр.-отт. 10,5. Уч.-изд. л. 11,72. Тираж 4921 экз. Заказ 1907. Цена 1 р.

Энергоатомиздат, 113114 Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский полиграфический комбинат Государственного комитета СССР по печати

142300 г. Чехов Московской области

Баринов В. А., Гуров А. А., Корчак В. Ю., Маневич А. С., Митин Ю. В. Питание потребителей энергии с резкопеременной нагрузкой от электроэнергетических систем	1
Бушуев В. В., Калужный А. Х., Кречмер Л. В., Шушуев А. А. Применение фазоповоротных устройств для упрощения потокораспределением в энергосистемах	6
Бошняга В. А. Расчет несимметричных режимов работы фазорегулирующего трансформатора с соединением обмоток в зигзаг	11
Караваяев В. Т. Бесконтактный совмещенный синхронный генератор	17
Лупкин В. М. Вопросы теории и расчет высокомоментных электромагнитных тормозов	25
Тозони О. В. Аналитическая модель электромагнитных процессов в линейном асинхронном двигателе	31
Дегтев В. Г. Обобщенная структурная модель многофазных обмоток электрических машин	40
Верлань А. Ф., Биленко В. И., Передерий П. Т. Интегро-аппроксимационный алгоритм анализа переходных процессов в нелинейных электрических цепях	45
Бородулин М. Ю. Фильтрация колебательных составляющих свободного процесса при численном интегрировании дифференциальных уравнений линейных электрических цепей	49

СООБЩЕНИЯ

Арутюнян А. А. Оценка потерь мощности в электросети по результатам вычислительного эксперимента	55
Ким К. К. Регулирование питающего напряжения индукционного ускорителя при минимизации его длины и времени разгона	59
Петленко Б. И., Дергачев А. Е. Оптимизация комбинированного электромагнитного экрана по массе	62
Власов С. П. К вопросу определения мощности потерь в активном многополюснике, обусловленной токами нагрузочных ветвей	65
Исхаков А. С., Обухов С. Г., Ушаков А. В. Управление внешней характеристикой источника электропитания	67
Набока Б. Г., Беспрозванных А. В., Гладченко В. Я. Методика измерения дифференциальных амплитудных спектров импульсов частичных разрядов	71

ДИСКУССИИ

БИБЛИОГРАФИЯ

ХРОНИКА

Barinov V. A., Gurov A. A., Korchak V. U., Manevitch A. S., Mitin U. V.— Supply of Consumers Having a Sharply Varying Load From Power Systems	1
Bushuyev V. V., Kaliuzhny A. H., Krechmer L. V., Shushuyev A. A.— Application of Phase-Rotating Apparatus for Simplifying Power Flow Distribution in Systems	6
Boshnyaga V. A.— Calculation of Unbalanced Operating Conditions for a Phase-Regulating Transformer Having Zig-Zag Connected Windings	11
Karavayev V. T.— A Composite Contactless Synchronous Generator	17
Lupkin V. M.— The Theory and Design of High-Torque Electromagnetic Brakes	25
Tozoni O. V.— An Analytical Model for Electromagnetic Phenomena in a Linear Asynchronous Motor	31
Degtev V. G.— A Generalized Structure Model for Polyphase Windings of Electrical Machines	40
Verlan A. F., Bilenko V. I., Peredery P. T.— An Integral/Approximational Algorithm for Analyzing Transients in Non-Linear Electric Circuits	45
Borodulin M. U.— Filtration of Natural Frequency Components With Numerical Integration of the Differential Equations for Linear Electric Circuits	49

REPORTS

Arutiunian A. A.— Evaluation of Network Power Losses on the Basis of Computational Experiment Results	55
Kim K. K.— Regulation of the Supply Voltage for an Induction Accelerator With Minimization of Its Length and Speed-Up Time	59
Petlenko B. I., Dergachev A. E.— Optimization of a Combined Electromagnetic Screen As To Its Mass	62
Vlasov S. P.— On Finding Power Losses in an Active Multi-Pole Due to Load Branch Currents	65
Iskhakov A. S., Obukhov S. G., Ushakov A. V.— Control of the External Characteristic of a Supply Source	67
Naboka B. G., Besprozvannikh A. V., Gladchenko V. J.— A Method for Measuring the Differential Amplitude Spectra of Partial Discharge Pulses	71

DISCUSSION

BIBLIOGRAPHY

CHRONICLE