

УДК 621.311.072.8.083.7:519.3.001.24

## Анализ флуктуаций нестационарных параметров режима энергосистем с помощью структурных функций

ФИШМАН М. М., канд. техн. наук  
ВНИИЭ

Оперативное управление энергосистемами и энергообъединениями осуществляется с использованием телеизмерений флуктуирующих параметров режима [1]. Специальная цифровая обработка дискретных по времени и уровню телеизмеряемых (ТИ) процессов, проводимая в пунктах передачи и приема (фильтрация, выявление смещения среднего уровня параметров режима и оценка скорости этого смещения), позволяет извлечь из них наиболее ценную для управления информацию. В частности, может быть обнаружена разладка режима, характеризующаяся изменением среднего уровня или скорости смещения, при котором режим из нормального перешел в утяжеленный, характеризующийся пониженной надежностью [2]. Для создания оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов указанной обработки (например, [2—5]), а также для оценки точности и эффективности дискретного представления ТИ процессов [1, 5, 6] необходимо знание основных характеристик флуктуаций этих процессов: дисперсии, времени корреляции и др.

Большая часть результатов, относящихся к анализу коррелированных флуктуаций, получена в предположении, что исследуемый процесс является стационарным [7—10]. Однако в электроэнергетических задачах это допущение не всегда выполняется. Действительно, при оценивании дисперсии  $\sigma^2$  гауссовского случайного процесса  $y(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , имеющего нулевое математическое ожидание, время корреляции  $\tau^*$  и корреляционную функцию (КФ)

$$R(\tau) = \sigma^2 \exp[-|\tau|/\tau^*], \quad (1)$$

дисперсия  $D[\langle \sigma^2 \rangle_T] = M\{[\langle \sigma^2 \rangle_T - \sigma^2]^2\}$  статистической оценки

$$\langle \sigma^2 \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt \quad (2)$$

определяется соотношением [8]:

$$D[\langle \sigma^2 \rangle_T] = \frac{\sigma^4 (\tau^*)^2}{T^2} \left( \frac{2T}{\tau^*} - 1 + e^{-2T/\tau^*} \right).$$

При  $T \gg \tau^*$  имеем

$$\sqrt{D[\langle \sigma^2 \rangle_T]} / \sigma^2 \approx \sqrt{2\tau^*/T}. \quad (3)$$

Отсюда видно, что для оценивания дисперсии с 25 % - ной точностью необходимо, чтобы длительность  $T$  реализации примерно в 32 раза превышала время корреляции. Даже для довольно быстрых параметров режима, имеющих время корреляции 200 с, требуемая длительность  $T \approx 2$  ч. В пределах столь значительных временных интервалов средний уровень ТИ процесса может претерпеть существенные изменения (резкие ступенчатые, гладкие полиномиальные), и применение стандартных методов оценивания [7, 8], ориентированных на стационарные процессы, приводит к большим ошибкам. Ограничена область применения и известного метода статистического анализа нестационарных процессов «по остаткам от тренда» [11]. Он приспособлен лишь для таких смещений среднего уровня, которые на всем интервале наблюдения  $[0, T]$  описываются полиномиальной зависимостью от  $t$ , причем с ростом  $T$  степень полинома должна оставаться неизменной. В реальных условиях одновременно с ростом  $T$  приходится увеличивать степень полинома. В результате даже за счет увеличения  $T$  точность статистического анализа повысить не удастся. Использование указанного метода в ситуациях, когда возможны ступенчатые смещения, также затруднительно, поскольку достаточно точная полиномиальная аппроксимация таких смещений требует высокой степени полинома — тем большей, чем больше  $T$ . В этих условиях достичь высокой точности оце-

нивания дисперсии, времени корреляции и других вероятностных характеристик не удастся.

Ниже излагается метод оценивания характеристик флуктуаций ТИ процесса, для которого указанные ограничения не являются обязательными. Он основан на использовании структурных функций, которые применялись прежде для решения задач фильтрации и прогнозирования случайных процессов со стационарными приращениями [8].

*Модели и вероятностные характеристики флуктуаций ТИ процессов.* Положим, что на интервале  $[0, T]$  задан ТИ процесс  $y(t)$ :

$$y(t) = s_\lambda(t) + \eta(t); \quad t \in [0; T],$$

где  $\eta(t)$  — коррелированный стационарный процесс;  $M[\eta(t)] = 0$ ;  $M[\eta(t)\eta(t+\tau)] = R_\eta(\tau)$ ; КФ  $R_\eta(\tau)$  не известна;  $s_\lambda(t)$  — функция, зависимость которой от  $t$  при фиксированном векторном параметре  $\lambda$  известна, но значение вектора и его размерность не известны.

Функции  $\eta(t)$ ,  $s_\lambda(t)$  описывают флуктуации и средний уровень ТИ процесса соответственно. В частности,  $s_\lambda(t)$  может определять полиномиальный тренд (ПТ) процесса

$$y(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \dots + \lambda_l t^l + \eta(t), \quad (4)$$

либо резкое ступенчатое смещение:

$$y(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \chi(t - \lambda_2) + \eta(t),$$

где  $t \in [0, T]$ ;  $l < \infty$ ;  $\chi(u)$  — функция, равная 1 при  $u \geq 0$  и нулю при  $u < 0$ .

В реальных условиях возможны комбинации ПТ и ступенчатых смещений, например,  $y(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t \chi(t - \lambda_2) + \eta(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , когда вплоть до момента  $\lambda_2$  процесс имеет постоянный средний уровень, а начиная с момента  $\lambda_2$ , средний уровень меняется по линейному закону.

Важнейшими характеристиками флуктуаций является дисперсия и время корреляции

$$\sigma_\eta^2 = R_\eta(0); \quad \tau_\eta^{\text{кор}} = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \int_0^\infty |R_\eta(\tau)| d\tau, \quad (5)$$

а также величины

$$R_\eta^{(1)} = - \left. \frac{dR_\eta(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=+0}; \quad R_\eta^{(2)} = - \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 R_\eta(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=+0}. \quad (6)$$

Коэффициент  $R_\eta^{(1)} \geq 0$  характеризует скорость спада КФ; при  $R_\eta^{(1)} = 0$  коэффициент  $R_\eta^{(2)} \geq 0$  характеризует кривизну спада КФ в точке  $\tau = 0$ . Например, если  $R_\eta(\tau)$  имеет вид (1), то  $\tau_\eta^{\text{кор}} = \tau^*$ ,  $R_\eta^{(1)} = \sigma_\eta^2 / \tau^* > 0$ . В случае, когда  $R_\eta(\tau) = \sigma_\eta^2 \exp[-\tau^2 / (\tau^*)^2]$ , имеем  $\tau_\eta^{\text{кор}} \approx 0,9\tau^*$ ,  $R_\eta^{(1)} = 0$ ,  $R_\eta^{(2)} = \sigma_\eta^2 / (\tau^*)^2 > 0$ .

Величины  $R_\eta^{(j)}$ ,  $j = 1, 2$ , используются, в частности, при определении погрешности представления ТИ процессов в случае дискретизации их по времени с шагом  $T_d \ll \tau_\eta^{\text{кор}}$ . Так, если  $y(t)$  — стационарный процесс, то средний квадрат ошибки ступенчатой аппроксимации [6] определяется соотношением  $\varepsilon^2 \approx R_\eta^{(1)} T_d$  при  $R_\eta^{(1)} \neq 0$  и соотношением  $\varepsilon^2 \approx (2/3) R_\eta^{(2)} T_d^2$ , если  $R_\eta^{(1)} = 0$ ,  $R_\eta^{(2)} \neq 0$ .

При обработке ТИ процесса в дискретном времени  $t = t_i = (i-1)\Delta t$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $T = (N-1)\Delta t$  с шагом  $\Delta t$  возможным в ряде случаев оказывается представление

$\eta(t)$  в виде суммы  $\eta(t) = x(t) + \xi(t)$  взаимно некоррелированных процессов, таких, что разделенные интервалом  $\Delta t$  значения  $x(t_i)$ ,  $x(t_{i+1})$  являются сильно коррелированными, а значения  $\xi(t_i)$ ,  $\xi(t_{i+1})$  — некоррелированными. В этом случае

$$y(t) = s_\lambda(t) + x(t) + \xi(t), \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

где времена корреляции  $\tau_x^{\text{кор}} \gg \Delta t$ ,  $\tau_\xi^{\text{кор}} \ll \Delta t$ .

Будем называть  $x(t)$  медленными флуктуациями ТИ процесса, а  $\xi(t)$  — быстрыми флуктуациями. Основной характеристикой для  $\xi(t_i)$  является дисперсия  $\sigma_\xi^2 = M[\xi^2(t_i)]$ , а для  $x(t_i)$  — дисперсия  $\sigma_x^2 = R_x(0)$ , время корреляции  $\tau_x^{\text{кор}}$ , скорость спада  $R_x^{(1)}$  и кривизна спада  $R_x^{(2)}$  КФ, определяемые аналогично (5), (6).

*Нормированные структурные функции и их свойства.* Пусть  $y(t)$ ,  $t \in [0, T]$  — ТИ процесс;

$$\Delta_{y,t}^{(1)}(\tau) = y(t+\tau) - y(t), \quad t \in [0, T-\tau] \quad (8)$$

— его приращение 1-го порядка. При  $p \geq 2$  приращения  $p$ -го порядка определяются рекуррентной формулой

$$\Delta_{y,t}^{(p)}(\tau) = \Delta_{y,t+\tau}^{(p-1)}(\tau) - \Delta_{y,t}^{(p-1)}(\tau), \quad p \geq 2, \quad t \in [0, T-p\tau]. \quad (9)$$

Математическое ожидание квадрата приращения

$$C_{y,t}^{(p)}(\tau) = M[(\Delta_{y,t}^{(p)}(\tau))^2], \quad p \geq 1, \quad \tau \geq 0, \quad (10)$$

рассматриваемое как функция временного сдвига  $\tau$ , представляет собой структурную функцию [8]  $p$ -го порядка. Для целей статистического анализа вместо структурных функций удобно рассматривать нормированные структурные функции (НСФ)  $c_{y,t}^{(p)}(\tau)$ , связанные с функциями (10) соотношением<sup>1</sup>

$$c_{y,t}^{(p)}(\tau) = C_{y,t}^{(p)}(\tau) / b_p, \quad p \geq 1, \quad \tau \geq 0,$$

в котором

$$b_p = (p+1)(p+2)\dots 2p/p! \quad (11)$$

Положим, что  $y(t)$  — процесс вида (4). Тогда при  $p > l$  приращения  $\Delta_{y,t}^{(p)}(\tau) = \Delta_{\eta,t}^{(p)}(\tau)$ , рассматриваемые как функции  $t \in [0, T-p\tau]$ , представляют собой стационарные случайные процессы с нулевым математическим ожиданием. Отсюда, используя [7], получаем формулы

$$c_y^{(p)}(\tau) = \sigma_\eta^2 - \frac{2p}{p+1} R_\eta(\tau) + \frac{12p(p-1)}{(p+1)(p+2)} R_\eta(2\tau) - \dots, \quad p > l, \quad (12)$$

связывающие НСФ с дисперсией и КФ процесса  $\eta(t)$ .

Поскольку  $R_\eta(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau/\tau_\eta^{\text{кор}} \rightarrow \infty$ , то с ростом  $\tau$  устанавливается стационарный уровень НСФ, равный дисперсии:

$$c_y^{(p)}(\tau) \approx \sigma_\eta^2 \quad \text{при } p > l, \quad \tau \gg \tau_\eta^{\text{кор}}. \quad (13)$$

Поведение НСФ при малых  $\tau$  рассмотрим в предположении, что наблюдаемый с шагом  $\Delta t$  процесс имеет вид (7), а  $s_\lambda(t) = \sum_{n=0}^l \lambda_n t^n$  — полином степени  $l$ . В этом случае в области  $\tau \geq \Delta t$  справедливо асимптотическое равенство

$$\Delta_{y,t_i}^{(1)}(\tau) = \Delta_{x,t_i}^{(1)}(\tau) + \Delta_{\xi,t_i}^{(1)}(\tau) + \lambda_1 \tau + O(\tau^2), \quad \tau \rightarrow \Delta t.$$

<sup>1</sup> Если НСФ от  $t$  не зависит, то индекс  $t$  не записывается.

Возводя обе его части в квадрат и беря математическое ожидание, приходим к выражению для НСФ:

$$c_y^{(1)}(t_i(\tau)) = \sigma_\xi^2 + \sigma_x^2 - R_x(\tau) + \frac{1}{2} \lambda_1^2 \tau^2 + O(\tau^3), \quad \tau \rightarrow \Delta t. \quad (14)$$

При малых  $\tau > 0$  КФ  $R_x(\tau) = \sigma_x^2 - R_x^{(1)} \tau + O(\tau^2)$  и согласно (14)

$$c_y^{(1)}(\tau) \approx \sigma_\xi^2 + R_x^{(1)} \tau, \quad \tau_x^{\text{кор}} \gg \tau \geq \Delta t. \quad (15)$$

В частности, если  $R_x(\tau)$  определяется выражением (1), то

$$c_y^{(1)}(\tau) \approx \sigma_\xi^2 + (\sigma_x^2 / \tau_x^{\text{кор}}) \tau, \quad \tau_x^{\text{кор}} \gg \tau \geq \Delta t. \quad (16)$$

Как следует из (15), (16) при  $R_x^{(1)} > 0$  НСФ линейно зависит от  $\tau$ , но не зависит от  $\lambda$  и степени  $l$  ПТ.

В случае  $R_x^{(1)} = 0$ ,  $R_x^{(2)} > 0$  с помощью (14) получаем

$$c_y^{(1)}(\tau) \approx \sigma_\xi^2 + (R_x^{(2)} + (1/2) \lambda_1^2) \tau^2, \quad \tau_x^{\text{кор}} \gg \tau \geq \Delta t.$$

В отличие от (15) зависимость от  $\tau$  здесь квадратичная, причем НСФ определяется не только вероятностными характеристиками флуктуаций, но и коэффициентом  $\lambda_1$  ПТ.

Статистики для оценивания вероятностных характеристик. Рассмотрим статистику  $\langle c_y^{(p)}(\tau) \rangle_T$  — выборочную НСФ  $p$ -го порядка, сформированную по результатам наблюдений процесса (9):

$$\langle c_y^{(p)}(\tau) \rangle_T = \frac{\Delta t}{(T - p\tau) b_p} \sum_{i=1}^{N-pL} [\Delta y_i^{(p)}(t_i(\tau))]^2, \quad p \geq 1, \quad (17)$$

где  $t_i = (i-1)\Delta t$ ,  $N = (T/\Delta t) + 1$ ,  $L = \tau/\Delta t$ .

Для процесса вида (4) статистики (17) при  $p > l \geq 0$  компенсируют влияние ПТ

$$\langle c_y^{(p)}(\tau) \rangle_T = \langle c_\eta^{(p)}(\tau) \rangle_T, \quad p > l \geq 0$$

и являются несмещенными оценками НСФ процесса  $\eta(t) = x(t) + \xi(t)$ , т. е.

$$M[\langle c_y^{(p)}(\tau) \rangle_T] = c_\eta^{(p)}(\tau), \quad p > l. \quad (18)$$

Здесь  $c_\eta^{(p)}(\tau) = c_y^{(p)}(\tau)$  определяется из (12). Особенно ценно то, что указанная компенсация имеет место даже в случае, когда представление ТИ процесса в виде (4) справедливо не на всем интервале  $[0, T]$ , а лишь в пределах любого интервала длительности  $\tau^{(p)} = p\tau$ ,  $p > l$ , целиком расположенного внутри интервала наблюдения  $[0, T]$ .

Рассмотрим теперь ситуацию, когда нестационарность процесса проявляется в наличии не только ПТ, но и ступенчатого смещения:

$$y(t) = \sum_{k=0}^l \lambda_k t^k + \gamma_1 \chi(t - \gamma_2) + \eta(t), \quad t \in [0, T].$$

Величина  $\gamma_1$  и момент появления  $\gamma_2 \in [0, T]$  этого смещения неизвестны. В данном случае статистики (17) при всех  $p > l$  являются асимптотически несмещенными для оценивания НСФ флуктуационной составляющей:

$$\lim_{T/(\tau + \Delta t) \rightarrow \infty} M[\langle c_y^{(p)}(\tau) \rangle_T] = c_\eta^{(p)}(\tau), \quad p > l. \quad (19)$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что если  $l = 0$ ,  $p = 1$ , то

$$\langle c_y^{(1)}(\tau) \rangle_T = \langle c_\eta^{(1)}(\tau) \rangle_T + \frac{1}{2} \gamma_1^2 \frac{\tau}{T - \tau} + \frac{\gamma_1 \Delta t}{T - \tau} \times$$

\* Под статистикой, как обычно, понимается функция от результатов наблюдений.

$$\times |\eta(\gamma_2 + \tau) - \eta(\gamma_2)|, \quad (20)$$

и потому соотношение (19) выполнено. В общем случае, когда  $p > l \geq 0$ , имеем

$$\langle c_y^{(p)}(\tau) \rangle_T = \langle c_\eta^{(p)}(\tau) \rangle_T + \varphi, \quad (21)$$

где  $\varphi$  — случайная величина, математическое ожидание которой  $M[\varphi] \rightarrow 0$  при  $T/(\tau + \Delta t) \rightarrow \infty$ .

Беря математическое ожидание от обеих частей равенства (21) и переходя к пределу  $T/(\tau + \Delta t) \rightarrow \infty$ , получаем (19).

Отметим также, что согласно (20), (21)

$$\langle c_y^{(p)}(\tau) \rangle_T \approx \langle c_\eta^{(p)}(\tau) \rangle_T$$

при  $p > l \geq 0$ ,  $T \gg \tau + \Delta t$ , т. е. при больших  $T/(\tau + \Delta t)$  статистика (17) компенсирует ступенчатые смещения среднего уровня. При этом их влияние на точность алгоритмов оценивания, основанных на статистиках (17), можно не учитывать.

Оценивание дисперсии быстрых флуктуаций. Из соотношения (15) следует, что в качестве оценки дисперсии  $\sigma_\xi^2$  может быть взята величина

$$\langle \sigma_\xi^2 \rangle_T = a_0, \quad (22)$$

где  $a_0$  — коэффициент в разложении  $\langle c_y^{(1)}(\tau) \rangle_T = a_0 + a_1 \tau + O(\tau^2)$  выборочной НСФ 1-го порядка при малых  $\tau \geq \Delta t$ . Если  $\xi(t_i)$ ,  $i \geq 1$  — гауссовские случайные величины, то дисперсия статистики (22)

$$D[\langle \sigma_\xi^2 \rangle_T] \approx \frac{(\Delta t)^2}{4(T - \Delta t)^2} \sum_{i=1}^{N-1} D\{\xi(t_i + \Delta t) - \xi(t_i)\}^2 = 3[\Delta t/(T - \Delta t)] \sigma^4.$$

Отсюда

$$\sqrt{D[\langle \sigma_\xi^2 \rangle_T]} / \sigma_\xi^2 \approx \sqrt{3\Delta t/(T - \Delta t)}.$$

Таким образом, при фиксированном  $T$  точность оценивания дисперсии может быть повышена за счет сокращения шага дискретности  $\Delta t$ . Следует, однако, иметь в виду, что представление ТИ процесса в виде (9) остается в силе лишь при  $\Delta t \gg \tau_x^{\text{кор}}$ .

Оценивание скорости спада КФ. Рассмотрим вначале ситуацию, когда быстро флуктуирующая составляющая в процессе (7) отсутствует:  $\sigma_\xi^2 = 0$ . Тогда, как следует из (15) и (17),

$$M[\langle c_y^{(1)}(\tau) \rangle_T] \approx R_x^{(1)} \tau, \quad \tau_x^{\text{кор}} \gg \tau \geq \Delta t,$$

и в качестве оценки скорости спада можно брать статистику вида

$$\langle R_x^{(1)} \rangle_T = \langle c_y^{(1)}(\tau) \rangle_T / \tau, \quad \tau_x^{\text{кор}} \gg \tau \geq \Delta t.$$

Точность этого алгоритма определим в предположении, что  $x(t)$  — гауссовский процесс,  $R_x^{(1)} > 0$ ,  $\Delta t \ll T \ll \tau_x^{\text{кор}}$ , а запаздывание  $\tau = \Delta t$ . В этом случае дисперсия

$$D[\langle c_y^{(1)}(\Delta t) \rangle_T] \approx \frac{(\Delta t)^2}{4(T - \tau)^2} \sum_{i=1}^{N-1} D\{x(t_i + \Delta t) - x(t_i)\}^2 = 3[\Delta t/(T - \Delta t)] (R_x^{(1)} \Delta t)^2.$$

Отсюда находим

$$\sqrt{D[\langle R_x^{(1)} \rangle_T]} / R_x^{(1)} \approx \sqrt{3\Delta t/(T - \Delta t)}.$$

Таким образом, если  $\Delta t \ll T$ , то скорость спада КФ может быть оценена с высокой точностью даже по результатам наблюдений на интервале длительности  $T \ll \tau_x^{\text{кор}}$ .

В случае, когда дисперсия  $\sigma_\xi^2$  неизвестна, для оценивания скорости спада целесообразно использовать выражение

$$\langle R_x^{(1)} \rangle_T = [\langle c_y^{(1)}(\tau) \rangle_T - \langle \sigma_\xi^2 \rangle_T] / \tau, \quad \tau_x^{\text{кор}} \gg \tau > \Delta t, \quad (23)$$

в котором статистика  $\langle \sigma_\xi^2 \rangle_T$  определяется соотношением (22).

Оценивание дисперсии медленных флуктуаций. Полагаем, что в представлении (7)  $s_x(t)$  — ПТ степени  $l < \infty$ . Исходя из (13), (18) и (22), определяем, что для оценивания дисперсии можно использовать статистику

$$\langle \sigma_x^2 \rangle_T = \langle c_y^{(p)}(\tau) \rangle_T - \langle \sigma_\xi^2 \rangle_T, \quad \tau \gg \tau_x^{\text{кор}}, \quad p > l. \quad (24)$$

Если же заранее известно, что  $\sigma_\xi^2 = 0$ , то вместо (24) целесообразно использовать статистику

$$\langle \sigma_x^2 \rangle_T = \langle c_y^{(p)}(\tau) \rangle_T, \quad \tau \gg \tau_x^{\text{кор}}, \quad p > l. \quad (25)$$

Достаточно точное оценивание дисперсии  $\sigma_x^2$  возможно лишь при длительности наблюдений  $T \gg \tau_x^{\text{кор}}$ , однако вывод формул, определяющих характеристики алгоритмов (24) и (25), выходит за рамки данной работы. Отметим лишь, что при  $\sigma_\xi^2 = 0$  и  $l = 0$  точность алгоритма (25) определяется соотношением

$$\sqrt{D[\langle \sigma_x^2 \rangle_T]} / \sigma_x^2 \approx \sqrt{3\tau_x^{\text{кор}}/T} \quad \text{при } T \gg \tau_x^{\text{кор}}, \quad p = 1, \quad (26)$$

а с ростом  $p$  точность снижается.

Сравнение выражений (3) и (26) показывает, что при  $l = 0, p = 1, \lambda_0 = 0$  алгоритм (25) имеет несколько меньшую точность, чем алгоритм (2). Однако в отличие от (2) алгоритмы (24) и (25) обеспечивают (при соответствующем выборе  $p$ ) несмещенность оценки дисперсии  $\sigma_x^2$  даже в том случае, когда степень полинома  $l \geq 1$  и средний уровень ТИ процесса, возможно, претерпевает ступенчатые изменения.

**Методика практического использования и результаты экспериментов.** Практическое использование соотношений (22) — (24) состоит в следующем.

По результатам наблюдения ТИ процесса  $y(t_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$  вычисляются статистические оценки НСФ  $\langle c_y^{(p)}(\tau) \rangle_T$ , определяемые соотношениями (8), (9), (11), (17), и строится их зависимость от запаздывания  $\tau \geq \Delta t$  (при  $\tau = 0$  оценки НСФ для всех  $p \geq 1$  обращаются в нуль). Затем начальный участок зависимости  $\langle c_y^{(1)}(\tau) \rangle_T$  аппроксимируется линейной функцией

$$\langle c_y^{(1)}(\tau) \rangle_T = a_0 + a_1 \tau, \quad \tau \geq \Delta t. \quad (27)$$

Дисперсия быстрых флуктуаций  $\sigma_\xi^2$  и скорость спада  $R_x^{(1)}$  КФ медленных флуктуаций принимаются равными

$$\sigma_\xi^2 = a_0, \quad R_x^{(1)} = a_1, \quad (28)$$

причем при  $a_0 \ll a_1 \Delta t$  влиянием быстрых флуктуаций можно пренебречь и принять  $\sigma_\xi^2 = 0$ .

Для нахождения дисперсии  $\sigma_x^2$  исследуется поведение статистик (17) в области больших  $\tau$  для значений  $p = 1, 2, \dots$ . Определяются натуральное число  $p_*$  и вре-

менной интервал запаздываний  $[\tau_*, \tau_{**}]$  такие, что значения статистик (17) при  $p \geq p_*, \tau \in [\tau_*, \tau_{**}]$  примерно равны одной и той же константе  $A_*$ , не зависящей от  $p$  и  $\tau$ :

$$\langle c_y^{(p)}(\tau) \rangle_T \approx \langle c_y^{(p_*)}(\tau) \rangle_T \approx A_* \quad \text{при } p \geq p_*, \tau \in [\tau_*, \tau_{**}]. \quad (29)$$

Соотношения (29) свидетельствуют о том, что в пределах временных интервалов длительности  $p_* \tau_{**}$  составляющая ТИ процесса, обусловленная ПТ, допускает представление в виде полинома степени  $l = p_* - 1$ . В качестве дисперсии медленных флуктуаций принимается величина

$$\sigma_x^2 = A_* - a_0, \quad (30)$$

где  $a_0$  определяется исходя из представления (27).

При аппроксимации КФ  $R_x(\tau)$  функцией вида (1) время корреляции

$$\tau_x^{\text{кор}} = (A_* - a_0)/a_1. \quad (31)$$

Обычно величина  $\tau_*$  в 1,5—3 раза превосходит  $\tau_x^{\text{кор}}$ , а для нахождения константы  $A_*$  достаточно взять  $\tau_{**} \approx 2\tau_*$ . Тем самым в представлении (4) степень ПТ  $l = p_* - 1$  должна быть «согласована» не с длительностью  $T$  интервала наблюдения, а с длительностью интервала корреляции  $\tau_x^{\text{кор}} \ll T$ .

Эмпирическая проверка соотношений (28) — (31) проводилась на псевдослучайном гауссовском процессе  $y(t_i) = x(t_i)$ , имеющем КФ вида (1), нулевое математическое ожидание, дисперсию  $\sigma_x^2 = 1$  и время корреляции  $\tau_x^{\text{кор}} = 50\Delta t$ ; длительность реализации  $T = 144\tau_x^{\text{кор}}$ . Такой процесс образуется с помощью рекуррентных преобразований [4, 7]:  $x(t_{i+1}) = \rho x(t_i) + \sqrt{1 - \rho^2} \zeta(t_{i+1})$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ , в которых  $N = 7200$ ,  $\rho = \exp[-\Delta t/\tau_x^{\text{кор}}]$ ,  $x(t_i)$ ,  $\zeta(t_2)$ ,  $\zeta(t_3)$  — независимые гауссовские случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией, формируемые в результате обращения к стандартному программному датчику случайных чисел. Статистики  $\langle c_y^{(p)}(\tau) \rangle_T$ ,  $p = \overline{1, 6}$ , вычисленные<sup>3</sup> по формуле (17) на ЭВМ ЕС-1033, показаны графически на рис. 1. Из них можно заключить, что  $\sigma_\xi^2 \approx 0$ ,  $R_x^{(1)} \approx 1/(50\Delta t)$ ,  $A_* \approx 1$ ,  $\sigma_x^2 \approx 1$ ,  $\tau_x^{\text{кор}} \approx 50\Delta t$ , причем  $p_* = 1$ , а степень ПТ  $l = 0$ , что совпадает с истинными параметрами принятой модели.

Рассмотрим теперь пример применения изложенной методики к реальным ТИ процессам — перетокам мощности в энергосистемах. В качестве исходных данных для статистического анализа были взяты перетоки по высоковольтным линиям ВЛ 1 (шкала значений перетока от —1600 до +1600 МВт) и ВЛ 2 (шкала значений перетока от —264 до +264 МВт), записанные на перфоленту с дискретностью по времени  $\Delta t = 0,5$  с и шагом квантования по уровню 0,1 МВт; длительность каждой реализации  $T = 1$  ч.

Результаты расчета статистик (17) для перетоков по ВЛ 1 и ВЛ 2, выполненного на ЭВМ ЕС-1033, показаны на рис. 2 и 3. Из графика рис. 2 видно, что  $\langle c_y^{(1)}(\tau) \rangle_T$  на начальном участке  $\tau \geq \Delta t$  допускает представления в виде (27), причем  $a_0 \approx 30 \text{ МВт}^2$ ,  $a_1 \approx 1,84 \text{ МВт}^2/\text{с}$ . Следовательно, согласно (28)  $\sigma_\xi^2 \approx 30 \text{ МВт}^2$ ,  $R_x^{(1)} \approx 1,84 \text{ МВт}^2/\text{с}$ . С увеличением  $\tau$  кривые  $\langle c_y^{(p)}(\tau) \rangle_T$ ,  $p = 1, 2, 3$  резко растут, что свидетельствует

<sup>3</sup> Программирование и расчеты на ЭВМ выполнены с участием В. Б. Бродского и С. В. Манушкина.

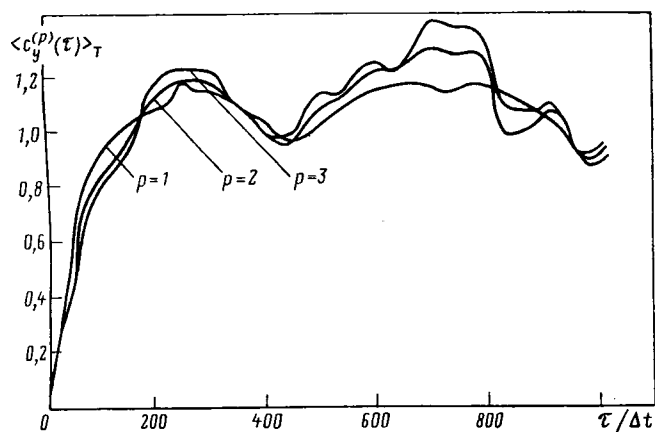


Рис. 1. Выборочные нормированные структурные функции для псевдослучайного процесса

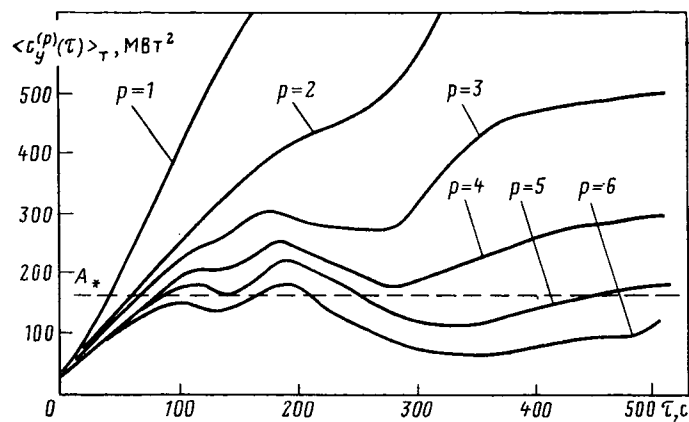


Рис. 2. Выборочные нормированные структурные функции для перетоков по ВЛ 1

об изменяемости среднего уровня процесса. У кривых  $\langle c_y^{(p)}(\tau) \rangle_T$ ,  $p=4, 5, 6$ , на участке со значениями  $\tau = 100-500$  с рост практически отсутствует и приближенно можно считать выполненными соотношения (29), в которых  $p_*=4$ ,  $A_* \approx 160 \text{ МВт}^2$ ,  $\tau_* \approx 100$  с,  $\tau_{**} \approx 500$  с. Отсюда с помощью (30), (31) получаем дисперсию и время корреляции медленных флуктуаций перетока по ВЛ 1:

$$\sigma_x^2 \approx 135 \text{ МВт}^2, \tau_x^{\text{кор}} \approx 70 \text{ с.} \quad (32)$$

В пределах временных интервалов 400—2000 с степень ПТ процесса может быть принята равной  $l=3$ .

Аналогичным образом по графикам рис. 3 получаем  $a_0 \approx 2,4 \text{ МВт}^2$ ,  $a_1 \approx 0,023 \text{ МВт}^2/\text{с}$ ,  $p_*=2$ ,  $A_* \approx 7,9 \text{ МВт}^2$ ,  $\tau_* \approx 100$  с,  $\tau_{**} \approx 500$  с. Отсюда с помощью (28), (30), (31) находим вероятностные характеристики перетока по ВЛ 2  $\sigma_x^2 \approx 2,4 \text{ МВт}^2$ ,  $R_x^{(1)} \approx 0,023 \text{ МВт}^2/\text{с}$ ,

$$\sigma_x^2 \approx 5,5 \text{ МВт}^2, \tau_x^{\text{кор}} \approx 240 \text{ с,} \quad (33)$$

причем в пределах интервалов времени 800—1000 с степень ПТ может быть принята равной  $l=1$ . Заметим, что при больших  $\tau$  статистики (17) для перетока по ВЛ 2 достигают примерно одного и того же «стационарного» уровня  $A_*$  уже начиная с  $p=p_*=2$ . Поэтому изменяемость среднего уровня здесь существенно меньше, чем у перетока по ВЛ 1.

На рис. 4 показаны оценки КФ этих перетоков, вычисленные по известным формулам:

$$\langle R_y(\tau) \rangle_T = \frac{\Delta t}{T - \tau} \sum_{i=1}^{N-L} [y(t_i) - \mu_T][y(t_i + \tau) - \mu_T],$$

$$\mu_T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y(t_i),$$

ориентированным на стационарные процессы. Получаемые из рис. 4 оценки дисперсии и времени корреляции для перетока по ВЛ 1 ( $\sigma_x^2 \approx 2000 \text{ МВт}^2$ ,  $\tau_x^{\text{кор}} \approx 500$  с) и перетока по ВЛ 2 ( $\sigma_x^2 \approx 65 \text{ МВт}^2$ ,  $\tau_x^{\text{кор}} \approx 1450$  с) существенно отличаются от величин (32), (33), так как в действительности исследуемые ТИ процессы не являются стационарными.

Применение результатов статистического анализа для оценки точности дискретного представления ТИ процессов. Из данных статистического анализа следует, что перетоки мощности по ВЛ 1 и ВЛ 2 допускают

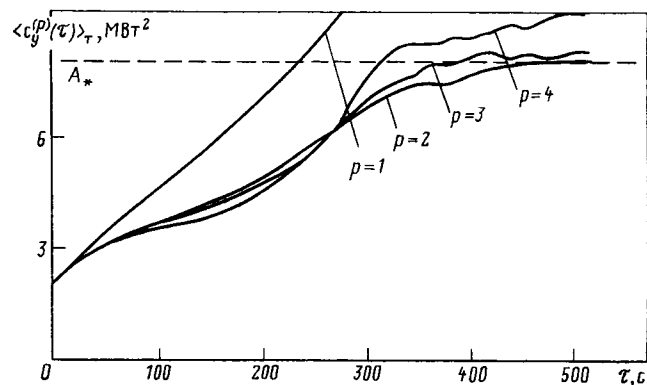


Рис. 3. Выборочные нормированные структурные функции для перетоков по ВЛ 2

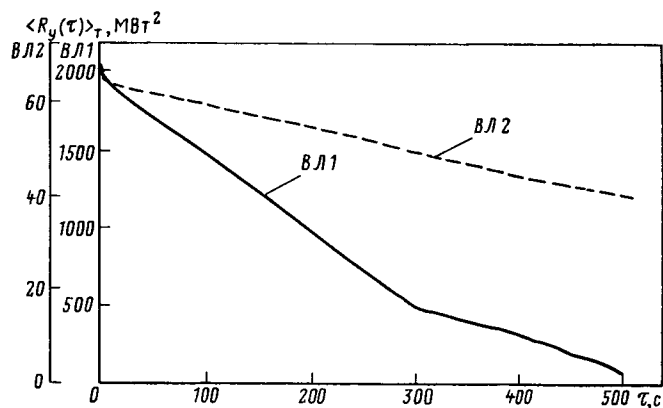


Рис. 4. Выборочные корреляционные функции перетоков по ВЛ 1 и ВЛ 2, не учитывающие изменение среднего уровня

представление в форме (7), причем  $x(t)$  имеет корреляционную функцию вида (1),  $\xi(t)$  характеризуется временем корреляции  $\tau_x^{\text{кор}} \ll \Delta t = 0,5$  с, процессы  $x(t)$  и  $\xi(t)$  не коррелированы между собой. Положим теперь, что ТИ процесс вида (7) подвергается дискретизации по времени с периодом  $T_d \geq \Delta t$  и квантованию по уровню с шагом  $h$ ; через  $v(t)$  обозначим ступенчатую аппроксимирующую функцию, сформированную по результатам квантованных отсчетов. Исходя из [6], нетрудно вывести, что при  $\tau_x^{\text{кор}} \gg T_d \gg \tau_x^{\text{кор}}$ ,  $h \ll \sigma$  средний квадрат ошибки (СКО) ступенчатой аппроксимации

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{T_{\pi}} \int_{kT_{\pi}}^{(k+1)T_{\pi}} M \{ [y(t) - v(t)]^2 \} dt, \quad k = 0, 1, \dots$$

на участках, где отсутствуют ступенчатые смещения, определяется соотношением

$$\varepsilon^2 \approx \varepsilon_{\text{кв}}^2 + \varepsilon_x^2 + \varepsilon_{\xi}^2, \quad (34)$$

в котором

$$\varepsilon_{\text{кв}}^2 = \frac{1}{12} h^2, \quad \varepsilon_x^2 = \sigma^2 \frac{T_{\pi}}{\tau_x^{\text{кор}}}, \quad \varepsilon_{\xi}^2 = 2\sigma_{\xi}^2. \quad (35)$$

Первое слагаемое в (34) обусловлено квантованием по уровню, два других — дискретизацией по времени, причем  $\varepsilon_x^2$  вызвано наличием медленно флуктуирующей, а  $\varepsilon_{\xi}^2$  — быстро флуктуирующей составляющей процесса. Величины  $\varepsilon_{\text{кв}}^2$  и  $\varepsilon_x^2 + \varepsilon_{\xi}^2$  представляют собой средние квадраты статической и динамической ошибок. При этом, если  $L$  — размер всей шкалы ТИ процесса, то  $\delta^0 = (\varepsilon/L) 100$  — приведенная среднеквадратичная ошибка аппроксимации, а  $\delta_{\text{кв}}^0 = (\varepsilon_{\text{кв}}/L) 100$  и  $\delta_{\text{д}}^0 = (\varepsilon_{\text{д}}/L) 100$  — приведенные среднеквадратичные статическая и динамическая ошибки.

С помощью (34) и (35) были рассчитаны СКО и приведенные среднеквадратичные ошибки ступенчатой аппроксимации перетоков по ВЛ 1 и ВЛ 2 (табл. 1); при этом принято, что период дискретизации  $T_{\pi} = 5$  с, а шкала ТИ процесса содержит 256 уровней квантования.

Таблица 1

Номер ВЛ	$\varepsilon_{\text{кв}}^2$ , МВТ <sup>2</sup>	$\varepsilon_x^2$ , МВТ <sup>2</sup>	$\varepsilon_{\xi}^2$ , МВТ <sup>2</sup>	$\varepsilon^2$ , МВТ <sup>2</sup>	$\delta_{\text{кв}}^0$ , %	$\delta_{\text{д}}^0$ , %	$\delta^0$ , %
1	13,1	9,2	60	82,3	0,11	0,26	0,28
2	0,36	0,12	4,8	5,28	0,11	0,42	0,44

Из приведенных в табл. 1 данных следует, что для ВЛ 1 среднеквадратичная динамическая ошибка в 2,4 раза превышает среднеквадратичную статическую ошибку, а для ВЛ 2 — примерно в 4 раза. При этом основной вклад в средний квадрат динамической ошибки (87 % — для ВЛ 1 и 98 % — для ВЛ 2) вносит быстро флуктуирующая составляющая. Поэтому даже десятикратное (до  $T_{\pi} = 0,5$  с) сокращение периода дискретизации не обеспечивает повышение точности ступенчатого восстановления процесса  $y(t)$ .

Следует отметить, что быстро флуктуирующая составляющая не используется при управлении в силу инерционности управляющих устройств. Ее влияние может быть снижено за счет применения алгоритмов фильтрации процесса  $x(t)$  — медленно флуктуирующей составляющей.

*Применение результатов статистического анализа для оценки потенциальной точности фильтрации.* Примем допущение, что в дискретные моменты  $t_i = (i-1)\Delta t$ ,  $i = 1, 2, \dots$  наблюдается процесс (7), причем при оценке потенциальной точности будем считать, что функция  $s_{\lambda}(t)$  известна. Фильтр Калмана [3, 12], формирующий оптимальную оценку  $\hat{x}_0(t_i)$  значения  $x(t_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , описывается в установившемся режиме ( $t_i \gg \tau_x^{\text{кор}}$ ) соотношением

ношением

$$\hat{x}_0(t_i) = \rho \hat{x}_0(t_{i-1}) + K(y(t_i) - \rho \hat{x}_0(t_{i-1}) - s_{\lambda}(t_i)).$$

Параметры фильтра определяются найденными ранее характеристиками флуктуаций:

$$\rho = \exp \left[ -\frac{\Delta t}{\tau_x^{\text{кор}}} \right]; \quad K = \frac{\rho^2 C_0 + \sigma_x^2 (1 - \rho^2)}{\rho^2 C_0 + \sigma_x^2 (1 - \rho^2) + \sigma_{\xi}^2}.$$

Здесь  $C_0$  — установившееся значение СКО оптимальной фильтрации  $M[(x(t_i) - \hat{x}_0(t_i))^2]$ , связанное с вероятностными характеристиками формулой

$$C_0 = \left\{ \frac{(1 - \rho^2)^2 (\sigma_{\xi}^2 + \sigma_x^2)^2}{4\rho^4} + \frac{\sigma_{\xi}^2 \sigma_x^2 (1 - \rho^2)}{\rho^2} \right\}^{1/2} - \frac{(1 - \rho^2) (\sigma_{\xi}^2 + \sigma_x^2)}{2\rho^2};$$

причем  $C_0 \approx \sigma_{\xi} \sigma_x \sqrt{2\Delta t / \tau_x^{\text{кор}}}$  при  $\tau_{\xi} \ll \Delta t \ll \tau_x^{\text{кор}}$ . Можно

также показать, что при использовании отсчетов  $\hat{x}_0(t_i)$  для восстановления с периодом  $T_{\pi} \gg \Delta t$  процесса  $x(t)$  СКО ступенчатой аппроксимации без учета квантования по уровню

$$E_0^2 = \frac{1}{T_{\pi}} \int_{kT_{\pi}}^{(k+1)T_{\pi}} M \{ [x(t) - \hat{x}_0(kT_{\pi})]^2 \} dt$$

определяется соотношением

$$E_0^2 \approx \varepsilon_x^2 + E_{0\xi}^2, \quad \Delta t \leq T_{\pi} \ll \tau_x^{\text{кор}}, \quad (36)$$

в котором

$$\varepsilon_x^2 = \sigma_x^2 T_{\pi} / \tau_x^{\text{кор}}, \quad E_{0\xi}^2 = \sigma_x \sigma_{\xi} \sqrt{2\Delta t / \tau_x^{\text{кор}}} \approx C_0.$$

Если же фильтрация отсутствует и в качестве оценки  $\hat{x}(t_i)$  принимается величина  $y(t_i) - S_{\lambda}(t_i)$ , то СКО такого оценивания  $C = M[(x(t_i) - \hat{x}(t_i))^2]$  совпадает с дисперсией быстро флуктуирующей составляющей,  $C = \sigma_{\xi}^2$ , а СКО ступенчатого восстановления

$$E^2 \approx \varepsilon_x^2 + E_{\xi}^2; \quad T_{\pi} \ll \tau_x^{\text{кор}}, \quad (37)$$

где  $E_{\xi}^2 = C$ .

Вторые слагаемые в (36) и (37) обусловлены наличием быстро флуктуирующей составляющей. При использовании фильтра Калмана влияние этой составляющей снижается в  $E_{\xi}^2 / E_{0\xi}^2 = (\sigma_{\xi} / \sigma_x) \sqrt{\tau_x^{\text{кор}} / (2\Delta t)}$  раз. Результаты расчета по приведенным формулам, относящиеся к случаю  $\Delta t = 0,5$  с,  $T_{\pi} = 5$  с, показаны в табл. 2.

Таблица 2

Номер ВЛ	$\varepsilon_x^2$ , МВТ <sup>2</sup>	$E_{0\xi}^2$ , МВТ <sup>2</sup>	$E_{\xi}^2$ , МВТ <sup>2</sup>	$E_0^2$ , МВТ <sup>2</sup>	$E^2$ , МВТ <sup>2</sup>	$\frac{E_{\xi}^2}{E_{0\xi}^2}$	$\frac{E^2}{E_0^2}$	$\frac{C}{C_0}$
1	9,2	7,7	30	16,9	39,2	3,9	2,3	3,9
2	0,12	0,22	2,4	0,34	2,52	10,7	7,5	10,7

Из них, в частности, следует, что за счет оптимальной фильтрации влияние быстрых флуктуаций на СКО оценивания и ступенчатой аппроксимации может быть снижено в 3,9 раза для ВЛ 1 и в 10,7 раза — для

ВЛ 2. При этом СКО ступенчатого восстановления уменьшается в 2,3 раза для ВЛ 1 и в 7,5 раза — для ВЛ 2. Использование фильтров Калмана целесообразно лишь в том случае, если такое снижение СКО является существенным для целей управления. Следует учесть, что если параметр  $\lambda$  среднего уровня процесса (7) не известен, то фильтр Калмана должен быть дополнен специальными блоками обработки телеизмерений, которые обеспечивают оценивание коэффициентов ПТ (например, методом наименьших квадратов) и обнаружение ступенчатых смещений ТИ процесса. Рассмотрение таких алгоритмов и определение их точности выходит за рамки данной работы.

**Выводы.** 1. Для эффективного оценивания характеристик флуктуаций нестационарных телеизмеряемых параметров режима энергосистем могут быть использованы выборочные нормированные структурные функции, формируемые суммированием квадратов приращений наблюдаемого процесса. При этом определяются дисперсия быстрых флуктуаций процесса, а также дисперсия, скорость спада корреляционной функции и время корреляции для медленно флуктуирующей составляющей.

2. Оценки характеристик флуктуаций, получаемые с помощью выборочных нормированных структурных функций, учитывают возможность не только гладкого (полиномиального), но и ступенчатого смещения среднего уровня параметра режима. При этом степень аппроксимирующего полинома должна выбираться исходя из интервала корреляции, а не всей длительности статистического анализа.

3. Найденные в результате статистического анализа характеристики флуктуаций определяют точность дис-

кретного представления телеизмеряемых процессов, структуру и параметры динамических фильтров Калмана, а также потенциальные возможности фильтрации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Митюшкин К. Г. Телемеханика в энергосистемах. — М.: Энергия, 1976.
2. Фишман М. М. Статистические методы обнаружения критического режима по результатам телеизмерений. — В кн.: Телеинформационные системы реального времени для диспетчерского управления энергосистемами. М.: Энергоатомиздат, 1985.
3. Оценивание состояния в электроэнергетике / А. З. Гамм, Л. Н. Герасимов, И. И. Голуб и др. — М.: Наука, 1983.
4. Никифоров И. В. Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов. — М.: Наука, 1983.
5. Сосулин Ю. Г., Фишман М. М. Теория последовательных решений и ее применения. — М.: Радио и связь, 1985.
6. Митюшкин К. Г., Фишман М. М. Среднеквадратичная ошибка аппроксимации случайных процессов цифровыми ступенчатыми функциями. — Автоматика и телемеханика, 1977, № 1.
7. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды: Пер. с англ. / Под ред. А. Н. Колмогорова и Ю. В. Прохорова. — М.: Наука, 1976.
8. Виленкин С. Я. Статистическая обработка результатов исследования случайных функций. — М.: Энергия, 1979.
9. Митюшкин К. Г., Сиукаев А. В. Статистический анализ телеизмеряемых процессов в энергосистемах. — В кн.: Телеинформационная техника / Тр. ВНИИЭ, вып. 50. М.: Энергия, 1976.
10. Герасимов Л. Н. Статистические свойства перетоков активной мощности и их прогнозируемость адаптивным фильтром Калмана. — в кн.: Алгоритмы обработки данных в электроэнергетике. Иркутск: Изд. СЭИ СО АН СССР, 1982.
11. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов: Пер. с англ. / Под ред. Ю. К. Беляева. — М.: Мир, 1976.
12. Венгеров А. А., Щаренский В. А. Прикладные вопросы оптимальной линейной фильтрации. — М.: Энергоатомиздат, 1982.

[21.01.86]

УДК 621.316.57.064.25.001.57

## Исследование комбинированной модели газового буфера масляных выключателей

ШИЛИН Н. В., доктор техн. наук, ЛЕВЧЕНКО И. С., канд. физ-мат. наук

В масляных выключателях высокого напряжения для улучшения условий гашения дуги в дугогасящих устройствах (ДУ) широко применяются газовые буферы (рис. 1), т. е. специальные резервуары, заполненные газом (воздухом, смешанным с газообразными продуктами разложения электрической дугой трансформаторного масла).

В [1] приведены результаты начальных экспериментальных исследований газового буфера масляного выключателя и их обобщение в рамках поршневой модели газового буфера, когда не учитывается перемешивание воздуха и трансформаторного масла в нем. Дальнейшие исследования влияния газового буфера на гашение дуги в масляных выключателях описаны в [2, 3].

На рис. 2 приведены расчетные и экспериментальные кривые давления в газопаровом пузыре и газовом буфере ДУ. Расчетная кривая давления в газовом буфере получена по поршневой модели согласно методике расчета газогидродинамических процессов [1, 4], а расчетная кривая давления по комбинированной модели — на основании уравнений, описывающих комбинированную модель газового буфера [3], (см. также приложение).

Видно, что в расчетных и экспериментальных кривых хорошо совпадают значения времени наступления первого пика давления и удовлетворительно — его максимальные значения; в этом интервале поршневая модель в достаточной мере отражает физику процессов при отключении малых, средних и больших токов. Однако в дальнейшем расчетные кривые давления имеют резко пикообразную форму в отличие от сглаженной формы экспериментальных кривых, а значения максимальных давлений в расчетных кривых выше, чем в экспериментальных. Это определяется тем, что поршневая модель не учитывает перемешивания газа и трансформаторного масла в объеме газового буфера с последующим изменением характера его демпфирующего действия, потерь энергии на перемешивание масла, газа и др.

Поэтому в развитие поршневой модели разработана комбинированная модель, в которой до наступления первого максимального сжатия газа в газовом буфере (первого пика давления) — момента  $t_1$  на рис. 2 — используется обычная поршневая модель, а после этого — модернизированная поршневая модель, согласно которой в объеме, где ранее был газ, частично находится

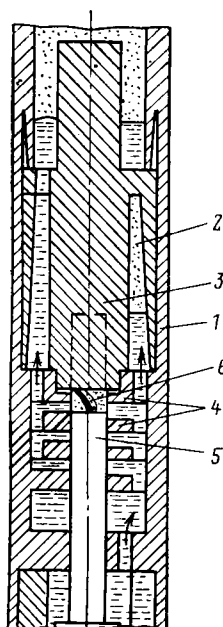


Рис. 1. Схематическое изображение дугогасящего устройства с газовым буфером:  
1 — корпус; 2 — газовый буфер; 3 — неподвижный контакт; 4 — дугогасительная решетка; 5 — подвижный контакт; 6 — газопаровой пузырь дугового промежутка

смесь газа и трансформаторного масла (рис. 3).

При разработке поршневой модели газового буфера параметры газа в газовом буфере были усреднены, так как скорость звука в газе при нормальной температуре (около 340 м/с) существенно выше максимальной скорости движения масляного поршня (10 — 60 м/с). Согласно комбинированной модели в объеме, в котором произошло перемешивание воздуха и трансформаторного масла, скорость звука

в зависимости от процентного содержания газа в масле может уменьшиться до 25 м/с [5]. Поскольку в этом случае скорость движения масляного поршня (10 — 60 м/с) может быть соизмерима со скоростью звука в двухфазной среде и даже выше ее, то при описании газогидродинамических процессов использовались уравнения в дифференциальной форме, как для сжимаемой жидкости.

В качестве основного допущения в разрабатываемой модели примем, что перемешивание газа и трансформаторного масла происходит сразу на глубину  $x_1 + \Delta x$  (и в этом объеме образуется двухфазная смесь), но оно не затрагивает остальную часть масла в объеме газового буфера (рис. 3). Количественно это перемешивание будем характеризовать глубиной  $x_1 + \Delta x$ .

Эксперименты показывают, что поверхность движущегося масляного поршня имеет у боковой стенки бугор, который ударяется о верхнюю крышку газового буфера и приводит к перемешиванию масла и газа задолго до того, как поверхности крышки достигнет основная масса масла. Как показывает анализ экспериментальных данных [1, 3, 6], перемешивание газа и трансформаторного масла может начинаться, когда

$$\Delta x \leq 0,2H. \quad (1)$$

Масса масляного поршня  $m_2$  после перемешивания (рис. 3, в) будет равна

$$m_2 = m_1 - \rho_m S_{г.б} (l_1 - x_1). \quad (2)$$

Обозначения приведены в приложении и на рис. 3.

Плотность возникшей при перемешивании двухфазной среды практически совпадает с плотностью масла, поэтому в качестве дополнительного допущения примем, что давление в объеме двухфазной среды в начальный момент распределено по линейному закону, и градиент давления при переходе из двухфазной среды в масло не меняется (рис. 3, в).

Как известно из гидродинамики, система уравнений, описывающая течение сжимаемой жидкости (в нашем случае — двухфазной среды), имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} + W \frac{\partial W}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (3)$$

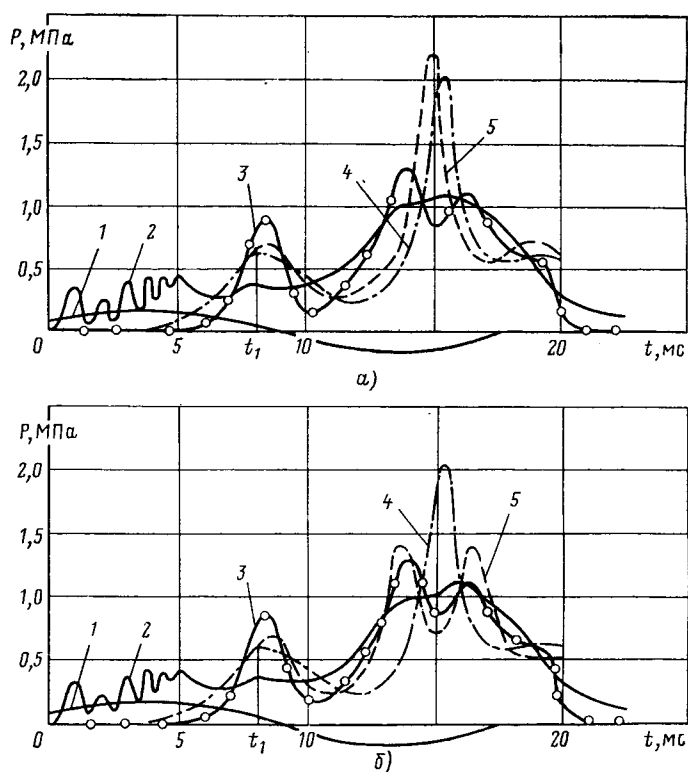


Рис. 2. Давление в газопаровом пузыре и газовом буфере выключателя ВМП-10-20 при токе 6 кА (а — глубина перемешивания 2,0 см; б — 9,7 см): 1 — ток; 2 — экспериментальная кривая давления в газопаровом пузыре; 3 — экспериментальная кривая давления в газовом буфере; 4 — расчетная кривая давления в газовом буфере по поршневой модели; 5 — расчетная кривая давления в газовом буфере по комбинированной модели (при  $t > t_1$ ).

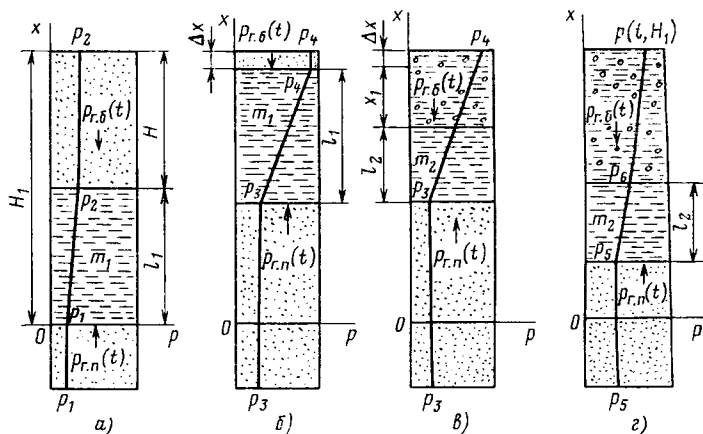


Рис. 3. Комбинированная модель газового буфера:  
а — начало движения; б — максимальное сжатие; в — перемешивание масла и газа; г — обратное движение

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + W \frac{\partial \rho_m}{\partial x} + \rho_m \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

где  $W$  — скорость движения среды.

К этой системе уравнений необходимо добавить уравнение, определяющее плотность двухфазной среды в произвольный момент времени  $\rho = f(p)$ .

Используя подход к определению плотности двухфазной среды, изложенный в [3, 5], пренебрегая при определении массы двухфазной среды массой газа и считая жидкость в двухфазной среде несжимаемой, получим:

$$\rho = \frac{\rho_m}{1 + \frac{V_{г.б}}{V_{м0}} \left( \frac{p_0}{p} \right)^{1/n}} = \frac{\rho_m}{1 + \frac{H}{l_1} \left( \frac{p_0}{p} \right)^{1/n}}, \quad (5)$$

где  $V_{г.б}$ ,  $V_{м0}$  и  $p_0$  — соответственно объемы газа и масла и давление в газовом буфере в начальный момент времени.

Таким образом, в комбинированной модели газового буфера (до момента  $t_1$ ) для количественной оценки процессов используется поршневая модель, описываемая уравнением (П-1) при начальных условиях (П-2), а потом модифицированная поршневая модель, описываемая уравнениями (3) — (5) с начальными и граничными условиями (П-3) — (П-9).

Подставленная задача описывается системой нелинейных уравнений в частных производных. Для ее решения был применен численный метод конечных разностей, который эффективен для задач газогидродинамики [7]. Он заключается в замене непрерывной среды моделью некоторой дискретной среды. Физическое пространство аппроксимируется разностной сеткой, а дифференциальные уравнения, описывающие исходную задачу, — разностной схемой, которая представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений. Алгоритм расчета приведен в приложении. Расчеты выполнялись на ЭВМ БЭСМ-6.

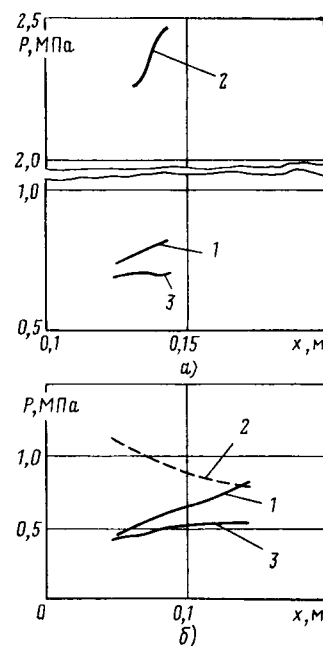
Для оценки точности расчетов по комбинированной модели использовалась экспериментальная зависимость давления в газопаровом пузыре от времени  $p_{г.п}(t)$ . В объеме газового буфера, заполненном двухфазной средой, давление меняется как во времени, так и в пространстве (рис. 3). Поэтому для сопоставления с экспериментальными данными расчетные кривые давления (рис. 2) приводятся для верхней стенки газового буфера, где были установлены датчики давления. Поскольку результаты расчета зависят от параметра  $x_1 + \Delta x$ , который не представляется возможным определить из эксперимента или расчета, то вычисления производились практически для двух его предельных значений: при очень малом и практически полном по объему перемешиванию газа и масла.

В первом случае, как и следовало ожидать, различие расчетных кривых по поршневой и комбинированной моделям незначительно, но они существенно отличаются от экспериментальной кривой давления (рис. 2, а). Во втором случае (рис. 2, б) расчетная кривая по комбинированной модели как качественно, так и количественно близка к экспериментальной кривой. При этом необходимо обратить внимание на появление третьего расчетного пика давления и на хорошее совпадение времени наступления всех трех пиков и значений давления в области нулей тока, когда происходит гашение дуги в масляном выключателе, в расчетной и экспериментальной кривых.

Хорошее совпадение экспериментальных кривых и для других случаев отклонения токов, полученное при большой глубине перемешивания, и визуальные наблюдения, проведенные при экспериментальных исследованиях [1, 3, 6], указывают на глубокое перемешивание газа и трансформаторного масла в объеме газового буфера. Следовательно, этот случай надо считать расчетным для комбинированной модели газового буфера применительно к масляным выключателям.

Расчеты показывают, что распределение давления в каждый момент времени вдоль объема, в котором находится смесь трансформаторного масла и газов, может

Рис. 4. Распределение давления вдоль объема, занятого смесью трансформаторного масла и газов ( $a$  — глубина перемешивания 2,0 см;  $b$  — 9,7 см): 1 — для момента времени 8,5 мс; 2 — 15,0 мс; 3 — 20,0 мс



быть существенно неравномерным (рис. 4). Это свидетельствует об изменении демпфирующего действия газового буфера в данном случае по сравнению с поршневой моделью.

При дальнейшем совершенствовании комбинированной модели были учтены потери в двухфазной среде. Они главным образом состоят из потерь на турбулентное перемешивание трансформаторного масла и газа и потерь на трение при движении двухфазной среды. Учет первых с приемлемой точностью затруднен из-за сложности и нерегулярности этого процесса. Поэтому в расчетной модели учитываются только потери на трение. Из гидродинамики известно, что в зависимости от характера процесса они могут быть учтены введением в уравнение (3) члена, линейно или квадратично зависящего от скорости движения двухфазной среды:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + W \frac{\partial W}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial x} - \xi_{тр} W^a, \quad (6)$$

где  $\xi_{тр}$  — коэффициент сопротивления трения;  $a = 1, 2$ .

Однако полученные в данном случае расчетные кривые давления в газовом буфере незначительно отличались от тех, которые были получены без учета трения, что указывает на нецелесообразность учета этих потерь.

В заключение необходимо отметить, что проведенные экспериментальные и теоретические исследования газогидродинамических процессов в газовом буфере масляных выключателей могут использоваться для изучения различных демпфирующих устройств, например, выключателей с жидким элегазом, турбогенераторов с жидкостным охлаждением обмотки статора, жидкостно-газовых амортизаторов самолетов и др.

**Выводы.** 1. Комбинированная модель газового буфера дает хорошее совпадение расчетных и экспериментальных значений давления на всем протяжении процесса горения дуги.

2. Применение этой модели обязательно, когда исследуются закономерности процессов в газовом буфере масляного выключателя.

3. Данная модель может использоваться также для более углубленного изучения процессов в различных жидкостно-газовых амортизаторах.

**Приложение.** На основе уравнений действующих сил, уравнения состояния, изменения удельного объема и выражения для силы трения в [1, 3] получено следующее уравнение движения поршня для поршневой

модели:

$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} = \left[ p_{г.п}(t) - p_{г.б}(0) \left( \frac{H}{H_1 - x} \right)^n \right] S_{г.б} - \xi_{сум} \rho_m \operatorname{sign} \left( \frac{dx}{dt} \right) \left( \frac{dx}{dt} \right)^2, \quad (\text{П-1})$$

где  $t$  — время движения масляного поршня;  $x$  — расстояние, пройденное масляным поршнем;  $H$  — высота газового буфера;  $p_{г.п}$  — воздействующее давление (давление газового пузыря ДУ);  $p_{г.б}(0)$  — начальное давление в газовом буфере;  $\xi_{сум}$  — суммарный коэффициент сопротивления колена газового буфера, равный сумме коэффициентов входа, местного сопротивления и трения;  $\rho_m$  — плотность трансформаторного масла;  $n$  — показатель политропы.

Начальные условия для поршневой модели

$$t = 0, \quad x = l_1, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (\text{П-2})$$

Движение масляного поршня, описываемое уравнением (П-1), происходит до момента  $t_1$  первого максимального сжатия газа в газовом буфере.

В соответствии с допущением о постоянстве градиента давления в момент  $t_1$  уравнение, описывающее распределение давления, в этот момент имеет вид

$$\frac{p(t_1, H_1) - p(t_1, x)}{p(t_1, H_1) - p_3} = \frac{H_1 - x}{l_1 + \Delta x}, \quad (\text{П-3})$$

где

$$l_1 = m_1 / \rho_m S_{г.б}; \quad p_3 = p_{г.п}(t_1).$$

Считаем, что давление на торцевой стенке газового буфера до и после удара в верхнюю крышку масла будет неизменным, т. е.

$$p_4(-t_1) = p_4(+t_1). \quad (\text{П-4})$$

Для полной постановки задачи сформулируем начальные и граничные условия.

Начальные условия имеют вид ( $t = t_1$ ,  $x_* \leq x \leq H_1$ ,  $x_*$  — координата границы раздела масла и двухфазной среды):

$$1. \quad p(t_1, x) = p(t_1, H_1) - [p(t_1, H_1) - p_3] \frac{H_1 - \Delta x}{l_1 + \Delta x}. \quad (\text{П-5})$$

$$2. \quad p(t_1, x) = \frac{\rho_m}{1 + \frac{H}{l_1} \left[ \frac{p_0}{p(t_1, x)} \right]^{1/n}}. \quad (\text{П-6})$$

$$3. \quad W(t_1, x) = 0. \quad (\text{П-7})$$

Граничные условия:

$$1. \quad t \geq t_1, \quad x = H_1, \quad W(t, H_1) = 0. \quad (\text{П-8})$$

2. На границе раздела сред масляный поршень — двухфазная среда:

$$m_2 \frac{dW}{dt} = [p_{г.п} - p_{г.б}(t, x)] S_{г.б} - [\operatorname{sign} W] F_{пр}, \quad (\text{П-9})$$

где  $F_{пр}$  — противодействующая сила.

Таким образом, для расчета движения масляного поршня и давления в газовом демпфере на первом этапе  $0 < t \leq t_1$  используется уравнение (П-1) с начальными условиями (П-2), а для расчета на втором этапе  $t > t_1$  — система уравнений (3) — (5) с начальными (П-5) — (П-7) и граничными (П-8), (П-9) условиями.

Исходными данными для расчета являются величины  $m_1$ ,  $p_0$ ,  $S_{г.б}$ ,  $H_1$ ,  $l_1$ ,  $\rho_m$ ,  $\xi_{сум}$ ,  $n$ , а также функция  $p_{г.п}(t)$ .

Решая задачу на первом этапе ( $0 < t \leq t_1$ ), определяем зависимость  $p_{г.б}(t)$ , момент времени  $t = t_1$  (при этом  $dx/dt = 0$ ),  $\Delta x$ , а также давление  $p(t_1, H_1)$ .

Решая задачу на втором этапе ( $t > t_1$ ), определяем в двухфазной среде профили давления и скорость масляного поршня в каждый момент времени.

Решение уравнения (П-1), не представляющее каких-либо трудностей, проводилось методом Эйлера в НИЦ ВВА и Рунге — Кутта [8] в СКБ математических машин и систем института кибернетики АН УССР.

Технические трудности и интерес представляет решение задачи на втором этапе, которое приводится ниже. Для общности рассмотрим случай, когда учитываются силы трения, линейно зависящие от скорости  $W$  ( $a = 1$ ).

Сделаем замену переменных:  $\alpha = H_1 - x$ ,  $v = -W$ .

Тогда уравнения (4) и (6) запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \alpha} &= -\xi_{тр} v; \\ \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \rho \frac{\partial v}{\partial \alpha} &= 0; \\ \alpha_* > \alpha > 0; \quad t > t_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П-10})$$

Уравнение состояния (5) останется без изменения; начальные условия (П-5) — (П-7) будут иметь вид:

$$1. \quad p(t_1, \alpha) = p(t_1, H_1) - [p(t_1, H_1) - p_3] \frac{\alpha}{l_1 + \Delta x}; \quad (\text{П-11})$$

$$2. \quad p(t_1, \alpha) = \frac{\rho_m}{1 + \frac{H}{l_1} \left[ \frac{p_0}{p(t_1, \alpha)} \right]^{1/n}}, \quad (t = t_1, \alpha_* \geq \alpha \geq 0); \quad (\text{П-12})$$

$$3. \quad v(t_1, \alpha) = 0; \quad (\text{П-13})$$

граничные условия (П-8) — (П-9) примут вид

$$1. \quad v(t, \alpha) = 0, \quad (t > t_1, \alpha = 0); \quad (\text{П-14})$$

$$2. \quad m_2 \frac{\partial v}{\partial t} = [p_{г.б}(t, \alpha) - p_{г.п}(t)] S_{г.б} - [\operatorname{sign} v] F_{пр}, \quad (t > t_1, \alpha = \alpha_*). \quad (\text{П-15})$$

Здесь  $\alpha_* = H_1 - x_*$ . В момент времени  $t_1$  имеем  $x_* = H_1 - x_1 - \Delta x$ ;  $x_1 + \Delta x$  — глубина перемешивания;  $\alpha_* = x_1 + \Delta x$ .

Так как общая масса смеси не меняется, удобнее решать задачу (П-10) — (П-15) в массовых лагранжевых координатах [7], тем более, что в эйлеровых координатах граница  $\alpha = \alpha_*$  — подвижная. Итак, введем новую независимую переменную

$$S = \int_0^\alpha \rho(t, \zeta) d\zeta.$$

Тогда система уравнений (П-10) — (П-15) примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} - \frac{\partial v}{\partial S} &= 0; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial S} &= -\xi_{тр} v; \quad (S_* > S > 0, t > t_1); \\ \frac{d\alpha}{dt} &= v; \quad \eta = \frac{1}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П-16})$$

Начальные условия:

$$1. \rho(t_1, S) = \rho(t_1, H_1) - [\rho(t_1, H_1) - \rho_3] \frac{\alpha(S)}{l_1 + \Delta x}; \quad (\text{П-17})$$

$$2. \rho(t_1, S) = \frac{\rho_m}{1 + \frac{H}{l_1} \left[ \frac{\rho_0}{\rho(t_1, S)} \right]^{1/n}}; \quad (\text{П-18})$$

$$3. v(t_1, S) = 0, \quad (t = t_1, S_* \geq S \geq 0); \quad (\text{П-19})$$

граничные условия:

$$1. v(t, S) = 0, \quad (t > t_1, S = 0); \quad (\text{П-20})$$

$$2. m_2 \frac{dv}{dt} [p_{г.б}(t, S) - p_{г.н}(t)] S_{г.б} - \\ - [\text{sign } v] F_{пр}, \quad (t > t_1, S = S_*). \quad (\text{П-21})$$

Здесь для нахождения эйлеровых координат  $\alpha = \alpha(S)$  в начальный момент времени  $t_1$  необходимо решить уравнение

$$S = \int_0^\alpha \rho(t_1, \zeta) d\zeta, \quad (\text{П-22})$$

где  $\rho(t_1, \zeta)$  определено в (П-18) (в последующие моменты времени  $\alpha(S)$  определяется с помощью уравнения  $d\alpha/dt = v$ ).

Задача (П-16) — (П-21) представляет собой систему нелинейных уравнений в частных производных. Решение таких задач аналитическими методами невозможно. Из численных методов решения задач газовой динамики одним из самых эффективных является метод конечных разностей.

В области изменения  $0 \leq S \leq S_*$  введем равномерную сетку  $\bar{\omega}_h = \{S_j = jh; j=0, 1, 2, \dots, N; h=S_*/N\}$ . На временной оси введем сетку  $\bar{\omega}_\tau = \{t_k = t_1 + k\tau; k=0, 1, \dots; \tau > 0\}$ . Для аппроксимации первых двух уравнений системы (П-16) применим схему Мак-Кормака [9—11]. Для этого запишем эти уравнения в виде

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial S} = \vec{b}, \quad (\text{П-23})$$

где  $\vec{V} = (v, \eta)$ ;  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{V}) = (-v, p(\eta))$ ;

$$\vec{b} = (0, -\xi_{тр} v).$$

Схема Мак-Кормака для (П-23) имеет вид

$$\vec{V}_j^{k+1/2} = \frac{\vec{V}_j^k + \vec{V}_{j-1}^k}{2} - \frac{\tau}{2} \frac{\vec{F}_j^k - \vec{F}_{j-1}^k}{h} + \frac{\tau}{2} \vec{b}_j^k, \quad (\text{П-24})$$

$$\vec{V}_j^{k+1} = \vec{V}_j^{k+1/2} - \tau \frac{\vec{F}_{j+1}^{k+1/2} - \vec{F}_j^{k+1/2}}{h} + \tau \vec{b}_j^{k+1/2}. \quad (\text{П-25})$$

Здесь  $\vec{V}_j^k$  — приближенное значение вектора  $\vec{V}$  в точке

$$(S_j, t_k); \quad \vec{F}_j^k = \vec{F}(\vec{V}_j^k).$$

Уравнения (П-24), (П-25) позволяют определить приближенное решение в точках  $S_j$  ( $j=1, N-1$ ). Для нахождения решения в граничных точках поступим следующим образом. Во-первых,  $v_0=0$  из граничного условия (П-20). На другом конце аппроксимируем второе условие (П-21):

$$m_2 \frac{v_N^{k+1} - v_N^k}{\tau} = [p_{г.бN} - \\ - p_{г.нN}] S_{г.б} - [\text{sign } v_N^k] F_{пр}. \quad (\text{П-26})$$

Недостающие краевые значения  $\eta_0$  и  $\eta_N$  найдем, аппроксимируя разностной схемой характеристическую форму уравнений (П-23) [7]:

$$a \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} - a \left( a \frac{\partial \eta}{\partial S} + \frac{\partial v}{\partial S} \right) = -\xi_{тр} v; \quad (\text{П-27})$$

$$a \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t} + a \left( a \frac{\partial \eta}{\partial S} - \frac{\partial v}{\partial S} \right) = \xi_{тр} v, \quad (\text{П-28})$$

где

$$a = \sqrt{-\frac{dp}{d\eta}} = \sqrt{\frac{np_0 \rho_m l_1}{H} \left[ \frac{l_1}{H} (\rho_m \eta - 1) \right]^{-n-1}}$$

— массовая скорость звука.

Первое из этих уравнений аппроксимируем в точке  $S=0$  разностной схемой, заменяя производные по  $S$  разностными отношениями «вперед»:

$$a_0^k \frac{\eta_0^{k+1} - \eta_0^k}{\tau} + \frac{v_0^{k+1} - v_0^k}{\tau} - (a_0^k)^2 \frac{\eta_1^k - \eta_0^k}{h} - \\ - a_0^k \frac{v_1^k - v_0^k}{h} = -\xi_{тр} v_0^k.$$

Отсюда вычисляется  $\eta_0^{k+1}$ :

$$\eta_0^{k+1} = \eta_0^k - \frac{v_0^{k+1} - v_0^k}{a_0^k} + \frac{a_0^k \tau}{h} (\eta_1^k - \eta_0^k) + \\ + \frac{\tau}{h} (v_1^k - v_0^k) - \frac{\tau}{a_0^k} \xi_{тр} v_0^k, \quad (\text{П-29})$$

так как в правой части все величины известны.

Для нахождения  $\eta_N^{k+1}$  ( $S=S_*$ ) аппроксимируем уравнение (П-28) разностной схемой с заменой производной по  $S$  разностными производными «назад». Получаем

$$\eta_N^{k+1} = \eta_N^k + \frac{\tau}{a_N^k} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\tau}{h} (p_N^k - p_{N-1}^k) + \\ + \frac{\tau}{a_N^k} \xi_{тр} v_N^k + \frac{\tau}{h} (v_N^k - v_{N-1}^k), \quad (\text{П-30})$$

при этом  $\partial v / \partial t$  заменяется выражением (П-21), т. е. учитывается граничное условие.

Таким образом, в каждой точке  $S_j$  ( $j=0, 1, 2, \dots, N$ ) определены разностные уравнения и, следовательно, будут найдены  $v_j^k, \eta_j^k$ . Используя уравнение состояния (5) и значения  $\eta_j^k$ , определяем давление  $p_j^k$ .

Опишем теперь способ определения эйлеровых координат  $\alpha_j$ , соответствующих лагранжевым  $S_j$  в момент времени  $t_1$ .

Из (П-22) имеем

$$S_{j+1} - S_j = \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \rho(t_1, \zeta) d\zeta,$$

где  $\rho(t_1, \zeta)$  определяется по формуле (П-18).

Применив формулу трапеции для вычисления интеграла, найдем

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j + \frac{2h}{\rho(t_1, \alpha_{j+1}) + \rho(t_1, \alpha_j)}, \quad (\text{П-31})$$

где  $h = S_{j+1} - S_j$ . Расчет по формуле (П-31) начинается при  $j=0$ , причем  $\alpha_0=0$ . Соотношение (П-31) представляет собой нелинейное уравнение относительно  $\alpha_{j+1}$ ,

решаемое методом простой итерации

$$\alpha_{j+1}^{(m+1)} = \alpha_j + \frac{2h}{\rho(t_1, \alpha_{j+1}^{(m)} + \rho(t_1, \alpha_j))}; \quad (\text{П-32})$$

где  $m=0, 1, 2, \dots$ ;  $\alpha_{j+1}^{(0)} = \alpha_j$ .

Окончание итераций происходит при выполнении условия  $|\alpha_{j+1}^{(m+1)} - \alpha_{j+1}^{(m)}| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — заданное малое число. Как показали расчеты, достаточно 2—3 итераций для достижения точности  $\varepsilon=0,001$ .

В остальные моменты времени  $\alpha_j^k$  рассчитывались из аппроксимации уравнения  $\frac{d\alpha}{dt} = v$  схемой

$$\frac{\alpha_j^{k+1} - \alpha_j^k}{\tau} = \frac{v_j^{k+1} + v_j^k}{2}, \quad j=1, 2, \dots, N (\alpha_0^k = 0). \quad (\text{П-33})$$

Таким образом, схема расчета комбинированной модели газового буфера состоит в следующем:

1) решается задача Коши для уравнения (П-1) методом Рунге — Кутты; при этом определяется момент времени  $t_1$ ,  $\Delta x$  и давление  $p(t_1, H_1)$ ;

2) вычисляется значение  $S_* = \int_0^{x_1 + \Delta x} \rho(t_1, \xi) d\xi$ ;

3) вычисляется  $h = S_*/N$ , где  $N$  — задаваемое целое число разбиений вдоль оси  $S$ ;

4) вычисляются  $\alpha_j^0$  (в момент времени  $t_1$ ) с помощью итерационного процесса (П-32);  $j=0, 1, 2, \dots, N (\alpha_0=0)$ ;

5) в массивы вводятся начальные условия

$$v_j^0, \eta_j^0, p_j^0 \quad (j=0, 1, 2, \dots, N);$$

6) вычисляются значения  $\eta_j$  и  $v_j$  в моменты времени  $t_{k+1/2} = t_1 + (k+1/2)\tau$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  по формулам

$$\eta_j^{k+1/2} = 0,5 \left[ \eta_j^k + \eta_{j-1}^k + \frac{\tau}{h} (v_j^k - v_{j-1}^k) \right];$$

$$v_j^{k+1/2} = 0,5 \left[ v_j^k + v_{j-1}^k - \frac{\tau}{h} (p_j^k - p_{j-1}^k) - \tau \xi_{\text{тр}} v_j^k \right];$$

$$j=1, 2, \dots, N;$$

7) вычисляются эти же значения в моменты времени  $t_{k+1} = t_1 + (k+1)\tau$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  по формулам

$$\eta_j^{k+1} = \eta_j^k + \frac{\tau}{h} (v_{j+1}^{k+1/2} - v_j^{k+1/2});$$

$$v_j^{k+1} = v_j^k - \frac{\tau}{h} (p_{j+1}^{k+1/2} - p_j^{k+1/2}) - \tau \xi_{\text{тр}} v_j^{k+1/2};$$

$$j=1, 2, \dots, N-1;$$

8) производятся вычисления  $v_N^{k+1}$  по формуле (П-26),  $v_0^{k+1} = 0$  по условию задачи;

9) вычисляются  $\eta_0^{k+1}$  и  $\eta_N^{k+1}$  по формулам (П-29) и (П-30) соответственно;

10) определяются эйлеровы координаты  $\alpha_j^{k+1}$  из формулы (П-33);

11) проверяется условие  $t_{k+1} \leq T$ , где  $T$  — интервал времени, на котором задано входное давление  $p_{\text{г.п}}(t)$ ; если это условие выполнено, то счет заканчивается, в противном случае счет повторяется с пункта 6.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шилин Н. В. Исследование процессов в воздушной подушке масляных выключателей. — Электрические станции, 1978, № 12.
2. Spilin N. V. Investigation on arc extinguishing in oil circuitbreakers. — International symposium on switching equipment. Sydney, 1979.
3. Шилин Н. В. Научно-технические основы повышения отключающей способности масляных выключателей: Автореф. дис. докт. техн. наук М.: 1985.
4. Шилин Н. В. Методика расчета газогидродинамических процессов. — Изв. вузов. Электромеханика, 1980, № 3.
5. Шилин Н. В. Измерение давления в аппаратах высокого напряжения с жидкостным заполнением при дуговых коротких замыканиях. — Электрические станции, 1977, № 12.
6. Шилин Н. В. Экспериментальное исследование процессов, происходящих при гашении дуги в масляных выключателях. — Электричество, 1978, № 9.
7. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. — М.: Наука, 1975.
8. Бахвалов Н. С. Численные методы, т. 1 — М.: Наука, 1973.
9. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980.
10. MacCormack R. W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. — AIAA Paper, 1969, N 69—354.
11. MacCormack R. W. Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer. — In: Proceedings of the 2-nd Int. Conf. on numerical methods in fluid dynamics. — Lecture Notes in Physics, vol. 8, New York, Springer, 1971. [10.09.86]

УДК [621.313.12+621.314.632].001.24

## Анализ и расчет вентильных генераторов

БУТ Д. А.

Москва

В автономных энергоустановках для получения постоянного тока широкое использование получают вентильные генераторы (ВГ). Благодаря развитию полупроводниковой техники они все более успешно конкурируют с коллекторными генераторами, которые имеют пониженную надежность и ухудшенные массо-габаритные показатели из-за невысоких окружных скоростей ротора.

В ряде случаев при нестандартных окружающих условиях применение коллекторных генераторов затруднено или вообще исключается, тогда как для ВГ

ограничения, связанные с условиями работы, являются существенно менее жесткими. Особое значение в этом плане приобретают бесконтактные ВГ на базе высококоэрцитивных постоянных магнитов (ПМ) из редкоземельных материалов, а также ВГ с бесщеточным возбуждением. Первый тип ВГ, как правило, требует управляемого полупроводникового выпрямителя (ПВ), обладающего усложненной конструкцией, но высоким быстродействием. Во втором типе ВГ используется электромагнитный индуктор, обеспечивающий регулирование напряжения ВГ, и простой неуправляемый ПВ.

Недостатки этого варианта связаны с усложненным исполнением базового генератора и пониженным быстродействием регулирования.

Несмотря на актуальность ВГ, сложные вопросы их теории рассмотрены с различной полнотой в относительно немногочисленных публикациях (например, [1–5]). Методы расчета ВГ обычно основываются на введении коэффициентов  $k_u$  и  $k_i$  [1, 4], связывающих напряжения и токи базового синхронного генератора с их выходными значениями и позволяющих в некоторых случаях (в основном при неуправляемых ПВ) рассчитывать ВГ с непосредственным использованием стандартных характеристик синхронного генератора. Несмотря на внешнюю наглядность такой подход характеризуется трудностями: если задавать или рассчитывать  $k_u$  и  $k_i$  приближенно, то переупрощается расчетная модель ВГ и точность результатов анализа становится невысокой (особенно для управляемых ПВ); если же рассчитывать  $k_u$  и  $k_i$  с учетом всех основных процессов в ВГ, то их самостоятельная значимость утрачивается и сохраняются лишь второстепенные методические достоинства такого подхода.

Полный анализ основных уравнений (в том числе нелинейных), которые описывают процессы в ВГ, — достаточно трудная задача. Актуальным для настоящего времени этапом ее решения, по-видимому, можно считать разработку относительно простых приближенных методик, позволяющих, во-первых, выявить основные закономерности, связывающие показатели и параметры ВГ, во-вторых, осуществить построение характеристик ВГ и, в-третьих, провести ориентировочные расчеты массо-габаритных и энергетических показателей генераторов.

Этим вопросам и посвящена статья.

**Анализ процессов в ВГ.** На рис. 1 приведены типичные кривые зависимостей от относительного времени  $\Phi = \omega t$  мгновенных значений фазных напряжений  $u(\Phi)$  и токов  $i(\Phi)$  для трех смежных фаз ВГ ( $u_{j-1}$ ,  $u_j$ ,  $u_{j+1}$ ). Предполагается, что полный выпрямленный ток  $I_d$  — постоянный благодаря индуктивности фильтра. Начало работы каждой фазы имеет задержку на угол управления  $\alpha$ , осуществляемую с помощью управляемых вентилей, а спадание и нарастание тока каждой фазы происходит в пределах угла коммутации  $\gamma$ , где напряжение  $u_{cp}(\Phi)$  равно полусумме напряжений смежных фаз, из-за чего снижается среднее выпрямленное

напряжение  $U_d$ . Эти эффекты учитываются коммутационным сопротивлением  $X_k$  фазы.

Под фазными первичными напряжениями, подаваемыми на ПВ, в ряде случаев понимают так называемую неискаженную э. д. с. [4, 5], равную для неявнополусного базового генератора в комплексных обозначениях  $\dot{E} = \dot{E}_0 - j(X_d - X_k)I$ , где  $\dot{E}_0$  — э. д. с. холостого хода;  $X_d$  — продольное индуктивное сопротивление,  $I$  — ток фазы. Таким образом, считается, что первичный идеализированный генератор как бы непосредственно не ощущает влияния сопротивления  $X_k$ , а его влияние проявляется в снижении  $U_d$ . Такой подход рационален, когда анализ ВГ строится с использованием общей теории выпрямителей [4], основанной на предположении синусоидальности первичного напряжения на ПВ и концентрирующей внимание на гармоническом составе кривых напряжений и токов ВГ.

С другой стороны, при анализе ВГ и ПВ как единой системы приходится учитывать, что для развитых демпферных обмоток в ВГ значение  $X_k$  близко к сопротивлению рассеяния якорной обмотки  $X_s$  [2, 4], а исключение эффектов рассеяния (т. е. переход от  $X_d$  к  $X_d - X_k \approx X_{ad}$ ) при рассмотрении базового генератора не всегда допустим, поскольку, например, первая гармоника выходного напряжения генератора  $u_j(\Phi)$  даже в отсутствие ПВ зависит от  $X_s$ . Поэтому можно учитывать действие  $X_k \approx X_s$  дважды: во-первых, при расчете синусоидального напряжения перед ПВ (т. е. роль  $X_s$  в базовом генераторе) и во-вторых, при непосредственном учете коммутационных эффектов, приводящих к снижению  $U_d$ .

Получим вначале выражение для выходной мощности ВГ, генерируемой одной фазой  $m$ -фазного базового генератора с звездобразной обмоткой. Кривые  $i_\gamma(\Phi)$  в пределах угла  $\gamma$  вначале считаем произвольными, связанными лишь условием  $(i_{j-1} + i_j)_\gamma = I_d = \text{const}$ . Если начало координат на рис. 1 поместить в точку  $O_1$ , то для первых гармоник фазных напряжений базового генератора имеем:

$$u_j = U_m \cos \left[ \Phi - \left( \frac{\pi}{m} - \alpha \right) \right]; \quad (1)$$

$$u_{j-1} = U_m \cos \left[ \Phi - \left( \frac{\pi}{m} - \alpha \right) + \frac{2\pi}{m} \right]. \quad (2)$$

Соответственно

$$u_{cp} = 0,5 (u_j + u_{j-1}) = U_m \cos \frac{\pi}{m} \cos (\Phi + \alpha), \quad (3)$$

где  $U_m$  — амплитуда выходного фазного напряжения.

Энергия, отдаваемая фазой в период  $\gamma$  при нарастании и спадании тока соответственно будет равна (с точностью до постоянного множителя  $\omega$ )

$$W_{\gamma+} = \int_0^\gamma u_{cp} i_\gamma(\Phi) d\Phi; \quad W_{\gamma-} = \int_0^\gamma u_{cp} [I_d - i_\gamma(\Phi)] d\Phi.$$

Энергия, отдаваемая фазой в периоды коммутации с учетом (3), равна

$$\begin{aligned} W_\gamma &= W_{\gamma+} + W_{\gamma-} = I_d \int_0^\gamma u_{cp} d\Phi = \\ &= 2U_m I_d \cos \frac{\pi}{m} \cos \left( \alpha + \frac{\gamma}{2} \right) \sin \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Важно отметить, что  $W_\gamma$  не зависит от формы кривой  $i_\gamma(\Phi)$  при условии  $I_d = \text{const}$ .

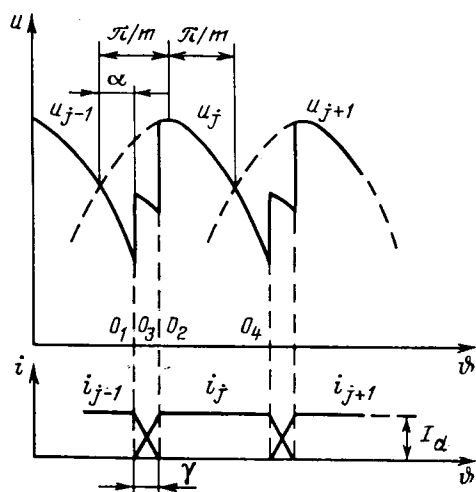


Рис. 1

Энергия, отдаваемая фазой при установившемся токе  $i_j = I_d$

$$W = \int_{-\frac{\pi}{m} + \alpha + \gamma}^{\frac{\pi}{m} + \alpha} U_m I_d \cos \vartheta d\vartheta = 2U_m I_d \cos \left( \alpha + \frac{\gamma}{2} \right) \sin \left( \frac{\pi}{m} - \frac{\gamma}{2} \right) \quad (5)$$

(начало координат в точке  $O_2$  на рис. 1).

Осредненная мощность  $P_{d\phi}$ , отдаваемая фазой, определяется как  $(W + W_\gamma)/2\pi$  для схем с выводом нулевой точки, где в течение периода  $(2\pi)$  используется только положительная полуволна  $u_j(\vartheta)$ , или как  $(W + W_\gamma)/\pi$  для мостовых схем, где используются обе полуволны  $u_j(\vartheta)$ . После подстановки

$$P_{d\phi} = \frac{n_\pi}{\pi} \sin \frac{\pi}{m} U_m I_d \cos \frac{\gamma}{2} \cos \left( \alpha + \frac{\gamma}{2} \right), \quad (6)$$

где  $n_\pi$  — число используемых полупериодов  $u(t)$  ( $n_\pi = 1$  для схем с нулевой точкой и  $n_\pi = 2$  для мостовых схем [3]).

Для того чтобы связать ток  $I_d$  и действующий ток фазы  $I$ , необходимо конкретизировать вид  $i_\gamma(v)$ . Будем считать коммутацию линейной, как это часто принимается для регулируемых ПВ [6], т. е.

$$i_{\gamma+}(\vartheta) = I_d \frac{\vartheta}{\gamma}; \quad i_{\gamma-}(\vartheta) = I_d \left( 1 - \frac{\vartheta}{\gamma} \right). \quad (7)$$

Тогда очевидно

$$I = \sqrt{\frac{n_\pi}{2\pi} \left[ \int_0^\gamma \left( I_d \frac{\vartheta}{\gamma} \right)^2 d\vartheta + \int_0^{\frac{2\pi}{m} - \gamma} I_d^2 d\vartheta + \int_0^\gamma I_d^2 \left( 1 - \frac{\vartheta}{\gamma} \right)^2 d\vartheta \right]}$$

(начало координат  $O_1$  — для первого интеграла,  $O_3$  — для второго и  $O_4$  — для третьего на рис. 1).

В окончательном виде

$$\frac{I}{I_d} = k_i = \sqrt{n_\pi \left( \frac{1}{m} - \frac{\gamma}{6\pi} \right)}. \quad (8)$$

Теперь можно определить коэффициент использования ВГ как отношение реальной мощности к расчетной:

$$k_{nc} = P_{d\phi}/(UI),$$

где  $U = U_m/\sqrt{2}$ .

С учетом (6) и (8)

$$k_{nc} = \frac{\sqrt{2n_\pi} \sin \frac{\pi}{m} \cos \frac{\gamma}{2} \cos \left( \alpha + \frac{\gamma}{2} \right)}{\pi \sqrt{\frac{1}{m} - \frac{\gamma}{6\pi}}}. \quad (9)$$

При незначительной роли активного сопротивления фаз угол  $\gamma$  находится из очевидного уравнения для короткозамкнутого коммутационного контура, образованного смежными фазами:

$$2X_\kappa \frac{di}{d\vartheta} = u_j - u_{j-1} = 2U_m \sin \frac{\pi}{m} \sin(\vartheta + \alpha). \quad (10)$$

Используя граничное условие  $i|_{\vartheta=\gamma} = I_d$ , получаем

$$\gamma = \arccos \left[ \cos \alpha - X_\kappa I_d / \left( \sin \frac{\pi}{m} U_m \right) \right] - \alpha. \quad (11)$$

Выходное напряжение ВГ определяется из очевидного равенства

$$P_d = U_d I_d = m P_{d\phi}. \quad (12)$$

После подстановки (6) в (12) имеем

$$U_d = \frac{mn_\pi}{\pi} U_m \sin \frac{\pi}{m} \cos \frac{\gamma}{2} \cos \left( \alpha + \frac{\gamma}{2} \right). \quad (13)$$

Если учесть, что  $\cos \frac{\gamma}{2} \cos \left( \alpha + \frac{\gamma}{2} \right) = 0,5 [\cos \alpha + \cos(\alpha + \gamma)]$ , то с учетом (11)

$$U_d = \frac{nm}{\pi} \left[ \sin \frac{\pi}{m} U_m \cos \alpha - 0,5 X_\kappa I_d \right],$$

откуда видна непосредственная роль  $X_\kappa$  в снижении  $U_d$ .

При определении выходного напряжения базового генератора воспользуемся моделью неявнополюсной ненапряженной машины с пренебрежимо малым активным сопротивлением якорной обмотки. Из векторной диаграммы генератора следует

$$U = \sqrt{E_0^2 - X_d^2 I^2 \cos^2 \varphi} - X_d I \sin \varphi, \quad (14)$$

где  $\varphi \approx (\alpha + \gamma/2)$  — сдвиг фаз между  $I$  и  $\dot{U}$  [1—5].

Принимаемая модель хорошо соответствует генераторам с ПМ, имеющим  $X_d \approx X_q$  и слабонасыщенную сталь якоря. Для генераторов с электромагнитным индуктором насыщенное значение  $X_d$  зависит от  $I$  и формула (14) становится весьма приближенной [7], если даже учитывать снижение  $X_d$  в  $k_\mu$  раз, где  $k_\mu$  — коэффициент насыщения стали. В дальнейшем формулу (14) будем использовать для приближенных оценок показателей ВГ с электромагнитным индуктором лишь в тех случаях, когда насыщение стальных сердечников незначительно.

При существенном различии  $X_d$  и  $X_q$  вместо (14) можно воспользоваться более общей формулой [7, 14]:

$$E_0 \sqrt{(X_q I + U \sin \varphi)^2 + (U \cos \varphi)^2} = (U \cos \varphi)^2 + (X_d I + U \sin \varphi)(X_q I + U \sin \varphi).$$

Если перейти к относительным показателям, используя в качестве базовых значений  $E_0$  и  $I_\kappa = E_0/X_d$ , то из (8), (9), (11), (13), (14) получим следующую систему:

$$\dot{U} = \sqrt{1 - \dot{I}^2 \cos^2 \varphi} - \dot{I} \sin \varphi; \quad (15)$$

$$\varphi = \alpha + 0,5\gamma; \quad (16)$$

$$\gamma = \arccos \left[ \cos \alpha - \dot{X}_\kappa \dot{I} / \left( \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{m} k_i \dot{U} \right) \right] - \alpha; \quad (17)$$

$$k_i = I/I_d = \sqrt{n_\pi \left( \frac{1}{m} - \frac{\gamma}{6\pi} \right)}; \quad (18)$$

$$\dot{U}_d = \frac{\sqrt{2} mn_\pi}{\pi} \sin \frac{\pi}{m} \dot{U} \cos \varphi \cos \frac{\gamma}{2}; \quad (19)$$

$$k_{nc} = \frac{\sqrt{2n_\pi}}{\pi} \sin \frac{\pi}{m} \cos \frac{\gamma}{2} \cos \varphi / \sqrt{\frac{1}{m} - \frac{\gamma}{6\pi}}, \quad (20)$$

где  $\dot{U} = U/E_0$ ;  $\dot{I} = I/I_\kappa = IX_d/E_0$ ;  $\dot{U}_d = U_d/E_0$ ;  $\dot{X}_\kappa = X_\kappa/X_d$ .

Первые четыре независимых уравнения легко решаются на ЦВМ. Уравнения соответствуют любой схеме ВГ при надлежащем выборе  $n_\pi$  и  $m$ . Применительно к трехфазному ВГ с мостовым ПВ ( $n_\pi = 2$ ,  $m = 3$ ) система (15) — (20) верна при  $\gamma < \pi/3$ , когда одновременно ра-

ботаю два или три (в период коммутации) вентиля. Как показывают дальнейшие оценки, последнее условие обычно выполняется в рабочих режимах ВГ.

Из (19) можно определить

$$k_u = U/U_d = \pi / \left( \sqrt{2} m n_p \sin \frac{\pi}{m} \cos \varphi \cos \frac{\gamma}{2} \right). \quad (21)$$

**Характеристики ВГ. Особенности рабочих режимов.** Как видно из записанных уравнений, важнейшим параметром ВГ является относительное коммутационное сопротивление  $\dot{X}_K = X_K/X_d$ . Значение  $X_K$ , как известно, близко к  $X_s$  ( $X_K/X_s \approx 1 \div 2$ ) [1]. При мощных демпферных контурах, свойственных ВГ, можно для приближенных оценок принять  $X_K \approx X_s$  [2, 4] и  $\dot{X}_K = X_{s*}/X_{d*}$ , где  $X_{s*}$  и  $X_{d*}$  — относительные значения индуктивных сопротивлений в стандартных относительных единицах ( $X_{s*} = X_s I_n / U_n$ ;  $X_{d*} = X_d I_n / U_n$ ;  $U_n$  и  $I_n$  — номинальные значения напряжения и тока базового генератора). Обычно  $X_{s*} \approx 0,1$ ;  $X_{d*} \approx 1 \div 2$  для генераторов с электромагнитным индуктором (ненасыщенные значения) и  $X_{d*} \approx 0,2 \div 0,5$  для генераторов с ПМ. Поэтому примерно  $\dot{X}_K \leq 0,1$  для генераторов пер-

вого типа и  $\dot{X}_K \approx 0,2 \div 0,5$  у генераторов второго типа.

Для этого диапазона  $\dot{X}_K$  на рис. 2—8 построены основные характеристики ВГ как результат решения системы (15) — (20). На рис. 2—5 приведены зависимости показателей трехфазного ВГ с мостовым ПВ ( $m=3$ ,  $n_p=2$ ) от тока при различных  $\dot{X}_K$ . На рис. 6 — его регулировочные характеристики (по углу  $\alpha$ ). На рис. 7 представлены характеристики ВГ с нулевой точкой ( $n_p=1$ ): трехфазного ( $m=3$ ) и шестифазного ( $m=6$ ). На рис. 8 показаны зависимости коэффициентов  $k_i$  и  $k_{ис}$  от угла  $\gamma$  для различных типов ВГ.

Рассмотрение приведенных кривых позволяет выявить характерные особенности ВГ.

1. Как видно из рис. 2—5, 7, внешние характеристики  $\dot{U}_d(I_d)$  (где  $\dot{I}_d = I_d/I_n = I X_d / k_i E_0$ ) при увеличении  $\alpha$  смещаются вниз и их крутизна тем больше, чем больше  $\dot{X}_K$ . Относительно пологий вид кривых  $\dot{U}_d(I_d)$  для  $m=6$  на рис. 7 объясняется увеличенным базовым значением  $X_d$  (поскольку  $X_{ad} \sim m$ ) и его влиянием на относительный ток  $\dot{I}_d$ .

По мере роста  $\alpha$  нелинейность внешних характеристик для всех ВГ проявляется все слабее. Это связано с тем, что увеличение угла  $\varphi = \alpha + 0,5\gamma$  соответствует

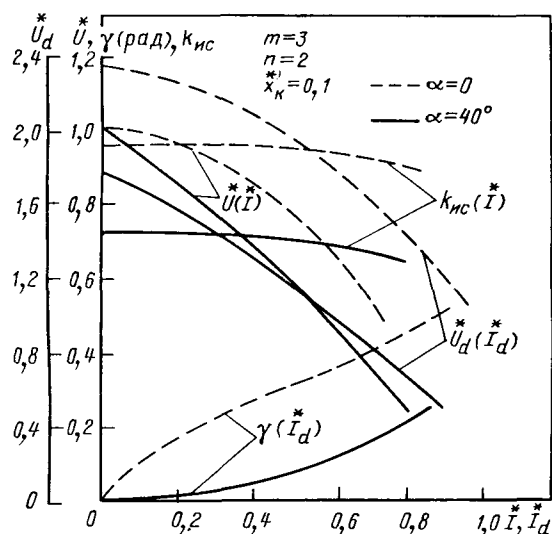


Рис. 2

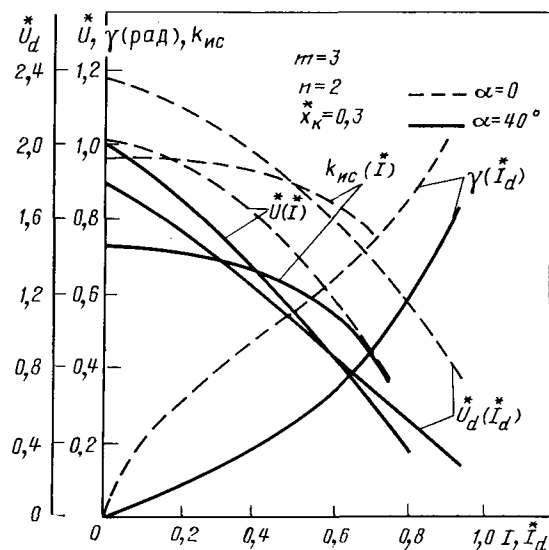


Рис. 4

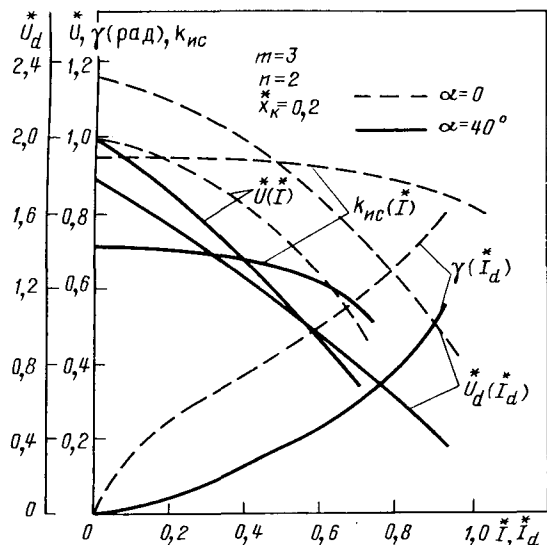


Рис. 3

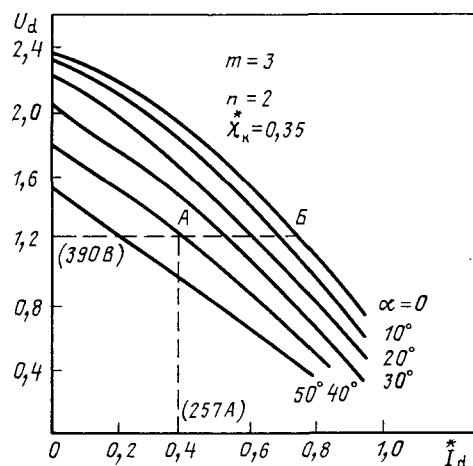


Рис. 5

усилению индуктивного характера нагрузки базового генератора, а как известно, по мере изменения  $\cos \varphi$  от 1 до 0 внешние характеристики идеализированного синхронного генератора из дуг окружностей переходят в прямые линии.

2. Аналогичным образом объясняется характер кривых  $\dot{U}$  ( $\dot{I}$ ) на рис. 2—4, форма которых с ростом  $\alpha$  приближается к прямым. Заметим, что кривые  $\dot{U}$  ( $\dot{I}$ ) при  $\alpha = \text{const}$  не являются внешними характеристиками базового генератора в классическом смысле (как это иногда подразумевается при расчетах ВГ на основе коэффициентов  $k_u$  и  $k_i$ ), поскольку с ростом  $\dot{I}$  увеличивается  $\gamma$  и  $\varphi = \alpha + 0,5\gamma \neq \text{const}$ . С ростом  $\dot{X}_k$  значения  $\dot{U}$  несколько снижаются (при  $E_0 = \text{idem}$ ,  $I = \text{idem}$ ).

3. Как видно из рис. 2—4, угол  $\gamma$  тем меньше, чем больше  $\alpha$  и нарастает при увеличении тока, однако в рабочем диапазоне ( $\dot{I}, \dot{I}_d \leq 0,8$ )  $\gamma \leq \pi/3$ , что соответствует области применения системы (15) — (20) для  $m=3$  и  $n_\pi=2$ .

4. Регулировочные характеристики на рис. 6 для  $m=3$  и  $n_\pi=2$ , показывающие как с ростом тока должен меняться угол  $\alpha$  для поддержания  $U_d = \text{const}$  (по пред-

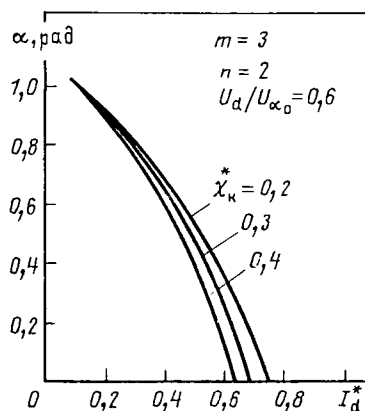


Рис. 6

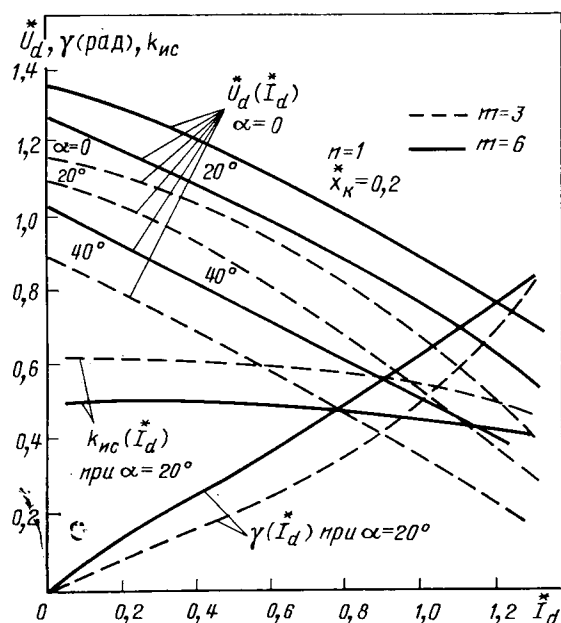


Рис. 7

положению  $U_d/U_{d0}=0,6$ ), падают тем круче, чем больше  $\dot{X}_k$ .

5. Коэффициент использования  $k_{ис}$  снижается с ростом  $\alpha$  и падает с ростом тока тем круче, чем больше  $\dot{X}_k$ , причем крутизна его спада увеличивается с ростом  $\alpha$  и  $\gamma$  (рис. 2—4, 7, 8). При характерных значениях  $\alpha \approx 40^\circ$  и  $\gamma \approx 0,5$  рад имеем  $k_{ис} \approx 0,5 \div 0,6$  для трехфазного ВГ с мостовым ПВ,  $k_{ис} \approx 0,4$  для трехфазного ВГ с нулевой точкой и  $k_{ис} \approx 0,30 \div 0,35$  для шестифазного ВГ с нулевой точкой. Поэтому в автономных высокоиспользованных установках предпочтительной является первая схема.

6. Коэффициент тока  $k_i$  меняется относительно слабо и тем меньше, чем меньше  $m$  (рис. 8). Это следует и из (18). Для трехфазного ВГ с мостовым ПВ его типичные значения  $k_i \approx 0,77 \div 0,8$ . При проведении приближенных расчетов можно считать  $k_i \approx \text{const}$  и определять его значение по (18), например, для характерных значений  $\gamma \approx 0,5$  рад.

7. Если принять  $k_i = \text{const}$ , то решение системы (15) — (20) существенно упрощается и сводится к совместному решению (15) и уравнения

$$\varphi = 0,5 \left\{ \alpha + \arccos \left[ \cos \alpha - \dot{X}_k \dot{I} / \left( \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{m} k_i \dot{U} \right) \right] \right\}, \quad (22)$$

вытекающего из (16), (17).

В частности, задаваясь значениями  $\dot{X}_k$  и  $\dot{I}$  для номинального режима, из (15) и (22) легко найти  $\dot{U}$  и  $\varphi$  по точке пересечения кривой  $\dot{U} = f_1(\varphi)$  согласно (15) и кривой  $\varphi = f_2(\dot{U})$  согласно (22), причем зависимости  $\dot{U}(\varphi)$  и  $\varphi(\dot{U})$  слабые. В координатах  $\varphi$  и  $\dot{U}$  первая кривая весьма пологая, а вторая — крутопадающая, поэтому достаточно рассчитать 2—3 точки каждой зависимости и простым построением найти точку пересечения с достаточной точностью. Подобные расчеты легко проводятся с помощью простейшего микрокалькулятора.

**Приближенные методики расчета ВГ.** При расчете базового генератора воспользуемся подходом, развитым в [8] применительно к генераторам с предельными механическими нагрузками и быстрым запуском. Генератор с редкоземельными ПМ и регулируемым ПВ может рассчитываться в следующем порядке.

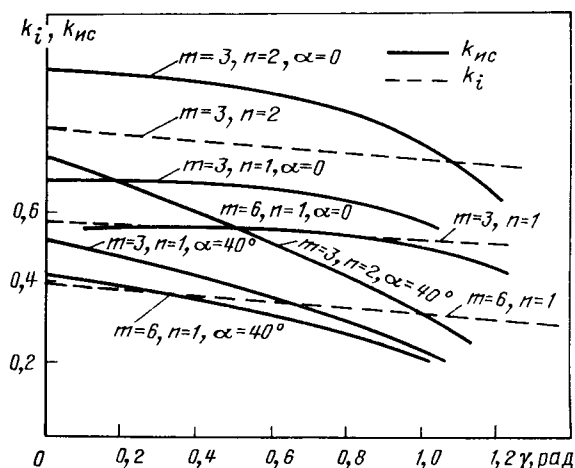


Рис. 8

Для требуемых значений мощности  $P_d$  и напряжения  $U_d$  с характерными пределами регулирования ( $U_d \pm \Delta U_d$ ) согласно известным рекомендациям задаются числом полюсов ( $2p$ ), схемой ПВ ( $m$  и  $n_p$ ), числом пазов на полюс и фазу ( $q$ ), коэффициентом рассеяния полюсов при х. х.  $k_\sigma$ , конструктивным коэффициентом полюсной дуги  $\alpha_p$ , обмоточным коэффициентом  $k_\phi$ , коэффициентом продольной реакции якоря  $k_d$ , предельно допустимой окружной скоростью ротора  $v_m$ , механической постоянной  $T_J$  (характеризующей время запуска генератора), относительным значением приведенного зазора  $\delta' = \delta'/D$  ( $D$  — диаметр активной зоны,  $\delta' = k_\mu k_\delta \delta$ ). Если используются тангенциально намагниченные призматические ПМ, то задаются технологическим фактором  $\dot{\Delta} = (d - d')/D$ , где  $d'$  — диаметр, на котором пересекаются продолжения боковых граней ПМ,  $d$  — диаметр втулки, к которой примыкают внутренние грани ПМ [8]. Обычно  $0,1 \leq \dot{\Delta} \leq 0,2$ .

Затем определяют относительные магнитные проводимости зазора, рассеяния полюсов и якоря [8]:

$$\tilde{\Lambda}_\delta = \alpha_\delta \pi^2 (1 - \alpha_p) / [8 (\alpha_p - \dot{\Delta}) \mu_r \dot{\delta}' p^2]; \quad (23)$$

$$\tilde{\Lambda}_\sigma = (k_\sigma - 1) \tilde{\Lambda}_\delta; \quad (24)$$

$$\tilde{\Lambda}_s = \pi^2 (1 - \alpha_p) \Sigma \lambda_s [2p (\alpha_p - \dot{\Delta}) \mu_r m q k_d k_0^2], \quad (25)$$

где  $\mu_r = B_r / (\mu_0 H_c)$ ;  $B_r$  и  $H_c$  — остаточная индукция и коэрцитивная сила материала магнитов;  $\Sigma \lambda_s$  — удельная проводимость рассеяния ( $\Sigma \lambda_s \approx 2 \div 4$ ). Здесь и в дальнейшем обозначения относительных величин тильдой ( $\sim$ ) соответствуют использованию традиционных базисных значений при построении диаграммы магнита в относительных координатах  $b$  и  $h$ .

Затем определяют относительные значения э. д. с. холостого хода и тока к. з. [5, 8]:

$$\tilde{E}_0 = \tilde{\Lambda}_\delta / (1 + \tilde{\Lambda}_\sigma + \tilde{\Lambda}_\delta); \quad (26)$$

$$\tilde{I}_K = \left[ \tilde{\Lambda}_s + (1 + \tilde{\Lambda}_\sigma) \left( 1 + \frac{\tilde{\Lambda}_s}{\tilde{\Lambda}_\delta} \right) \right]^{-1}. \quad (27)$$

Далее находят  $\tilde{X}_d = \tilde{E}_0 / \tilde{I}_K$  и относительное коммутационное сопротивление  $\tilde{X}_K \approx \tilde{X}_s / \tilde{X}_d = \tilde{\Lambda}_s / \tilde{X}_d$ . Оценивают номинальное значение угла  $\alpha$  исходя из заданных пределов  $\Delta U_d$  или допустимой перегрузки по току (при поддержании  $U_d = \text{const}$ ). Затем выбирают номинальное значение относительного тока  $\dot{I} = I / I_K$ , учитывая возможную перегрузку, и решают систему (15) — (20). В приближенных расчетах можно полагать  $k_i = \text{const}$  (за исключением многофазных ВГ) и решать отдельно (15) и (22), как это описывалось ранее. По (19) находят  $\dot{U}_d$ , по (20) значение  $k_{nc}$ . Затем определяют относительный ток в масштабе  $bh$  — диаграммы магнита  $\tilde{I} = \tilde{I}_K \dot{I}$  и линейную нагрузку  $A = \pi \sqrt{2} (1 - \alpha_p) \times H_c \tilde{I} / (4 k_d k_0)$  [8]. Значение  $A$  не должно превышать допустимого [1], в противном случае нужно снизить  $\dot{I}$ . Затем находят коэффициент нагрузки

$$k_U = \left[ \sqrt{1 - (\dot{U} \cos \varphi)^2} - \dot{U} \sin \varphi \right] \dot{U}; \quad (28)$$

коэффициент заполнения ротора магнитами

$$k_{\Sigma, M} = 2 (1 - \alpha_p) (\alpha_p - \dot{\Delta}). \quad (29)$$

Диаметр активной зоны и геометрический фактор [5, 8]:

$$D = \frac{\pi k_{\Sigma, M} k_U p B_r H_c \tilde{E}_0 \tilde{I}_K T_J}{k_Y \gamma_{\text{ст}} k_d v_m}; \quad (30)$$

$$\lambda = \frac{l}{D} = \frac{k_Y^2 \gamma_{\text{ст}}^2 v_m (P_d / k_{nc})}{\pi T_J^2} \left[ \frac{2 k_d}{\pi k_{\Sigma, M} k_U p B_r H_c \tilde{E}_0 \tilde{I}_K} \right]^3, \quad (31)$$

где  $\gamma_{\text{ст}}$  — плотность стали, а  $k_Y$  — коэффициент плотности, учитывающий заполнение ротора различными материалами, наличие в нем полостей, каналов и т. п.

Частота вращения  $n = 60 v_m / (\pi D)$ , частота тока  $f = \pi n / 60$ . Число зубцов якоря и зубцовое деление  $Z = 2 p m q$ ,  $t_z = \pi D / Z$ , высота паза  $h_\pi = A / (j k_\pi \dot{b}_\pi)$ , где  $j$  — плотность тока якоря,  $k_\pi$  — коэффициент использования паза,  $\dot{b}_\pi = b_\pi / t_z$  — относительная ширина паза ( $\dot{b}_\pi \approx 0,4 - 0,6$ ). Значения зазора  $\delta' = \delta'/D$ ,  $\delta' = \delta'/k_\mu$ ,  $\delta = \delta'/k_\delta$ , где коэффициент зазора  $k_\delta$  рассчитывается по известным формулам. Затем можно оценить  $\Sigma \lambda_s$  по приближенной формуле с использованием соотношений из [7]

$$\Sigma \lambda_s \approx \frac{h_\pi}{3 b_\pi} + \frac{q}{2 p \lambda} + \frac{t_z}{12 \delta'}. \quad (32)$$

Формула относится к открытому пазу, обычно применяемому в ВГ для уменьшения  $X_s \approx X_K$ . Если полученное значение сильно отличается от предварительно выбранного (при расчете  $\tilde{\Lambda}_s$ ), необходимо провести расчетную итерацию. Затем рассчитывается индукция в зазоре при х. х. Для этого определяется относительная м. д. с. зазора при х. х.  $\tilde{F}_{\delta_0} = \tilde{E}_0 / \tilde{\Lambda}_\delta$ , индукция магнита  $\tilde{B}_{m0} = 1 - \tilde{F}_{\delta_0}$  (с учетом  $\tilde{F}_{\delta_0} = \tilde{F}_{m0} = \tilde{H}_{m0}$  и линейной характеристики размагничивания для редкоземельных ПМ), полезная индукция магнита  $\tilde{B}_{n0} = \tilde{B}_{m0} - \Lambda_\sigma \tilde{F}_{m0}$  и затем индукция в зазоре  $\tilde{B}_{\delta_0} = 2 p \tilde{B}_{n0} (\alpha_p - \dot{\Delta}) / (\pi \alpha_\delta)$ ,  $B_{\delta_0} = \tilde{B}_{\delta_0} B_r$  [8].

Расчетный коэффициент полюсной дуги  $\alpha_\delta$  зависит от  $\alpha_p$  и отношения  $\delta$  к полюсному делению  $\tau = \pi D / 2 p$ . Для рассматриваемой модели  $\alpha_\delta \approx 1,1 \alpha_p$ . При номинальном режиме  $B_\delta = B_{\delta_0} \dot{U} k_E$ , где коэффициент  $k_E = \sqrt{\cos^2 \varphi + (\sin \varphi + X_{s*})^2}$  учитывает рассеяние якоря, причем  $X_{s*} = \tilde{\Lambda}_s \dot{I} / \dot{U} \tilde{E}_0$  [8]. Относительные размеры ПМ согласно [5, 8]: ширина по радиусу  $\tilde{b}_m = (b_m / 0,5 D) = \alpha_p - \dot{\Delta}$ , длина по хорде  $\dot{L} = (2 l_m / b_m) = \pi (1 - \alpha_p) / [p \times (\alpha_p - \dot{\Delta})]$ , откуда для найденного значения  $D$  определяют абсолютные ширину  $b_m$  и длину  $l_m$  на один полюс.

Далее рассчитывается  $E_0 = U_d / \dot{U}_d$  и число витков  $w = E_0 / [\pi \sqrt{2} k_0 f B_{\delta_0} \alpha_\delta \tau l]$ . Число проводников в пазах  $u_\pi = w / (p q)$ . Значения  $w$  обычно округляются так, чтобы число  $u_\pi$  было четным. Из-за округлений напряжения  $U_d$  может отклоняться от заданного значения, однако это не играет принципиальной роли, так как используется регулируемый ПВ.

При недопустимых отклонениях  $U_d$  приходится пересчитывать ВГ для других значений  $p$ ,  $q$ ,  $v_m$  и т. п. В процессе расчета уточняется значение  $A = k_i I_d u_\pi / t_z$  ( $I_d = P_d / U_d$ ). Для проверки результатов целесообразно найти масштабы напряжения и тока для безразмерной  $bh$  — диаграммы магнита [5, 8]:  $m_e = 2 \pi \sqrt{2} k_0 w f B_r b_m l$  (коэффициент 2 соответствует суммированию в зазоре потоков двух смежных магнитов при их тангенциаль-

ном намагничивании),  $m_i = \pi r H_c l_m / (m \sqrt{2} k_d k_0 \omega)$ , а затем сравнить  $E_0 = \bar{E}_0 m_e$  и  $I = \bar{I} m_i$  с полученными ранее значениями. Находятся также  $X_d = \bar{X}_d (m_e/m_i)$ ,  $X_s = \bar{X}_s (m_e/m_i)$ ,  $Z_n = U/I$ ,  $X_{s*} = X_s/Z_n$ ,  $X_{d*} = X_d/Z_n$ .

Значение  $X_{s*}$  должно согласовываться с найденным ранее, а  $X_{d*}$  — соответствовать формуле  $X_{d*} = \sqrt{\dot{U}^2 - \cos^2 \varphi - \sin \varphi}$ , вытекающей из векторной диаграммы генератора. Значения  $X_{s*}$  и  $X_{d*}$  должны также находиться в рациональном диапазоне этих параметров.

Высота спинки ярма якоря  $h_n = 0,5 \alpha_\delta k_E \frac{B_\delta}{k_c B_n}$ , где  $k_c$  — коэффициент заполнения пакета сталью,  $B_n$  — индукция в ярме. Наружный диаметр пакета якоря  $D_n = D + 2(h_n + h_n)$ . Объем проводников обмотки якоря и потери в ней [8]:

$$Q_a \approx \pi h_n \dot{b}_n k_n (D + h_n) (l + \sqrt{2} \tau), \Delta p_a = \rho_t j^2 Q_a,$$

где  $\rho_t$  — удельное сопротивление обмотки при заданной температуре.

Масса зубцов и потери в них:

$$M_z \approx \pi h_n l (1 - \dot{b}_n) (D + h_n) \gamma_{ст} k_c;$$

$$\Delta p_z = \rho_0 k_{tz} [B_\delta / (1 - \dot{b}_n)]^2 (f/400)^{1.5} M_z,$$

где  $\rho_0$  — удельные потери,  $k_{tz}$  — технологический коэффициент ( $k_{tz} \approx 2[1]$ ).

Масса спинки якоря и потери в ней:

$$M_n = \pi l h_n (D + h_n + 2h_n) \gamma_{ст} k_c;$$

$$\Delta p_n = \rho_0 k_{т.я} (B_n)^2 (f/400)^{1.5} M_n; k_{т.я} = 1,4.$$

Поверхностные потери в наружном цилиндре ротора [8]:

$$\Delta p_{пов} \approx \pi D \alpha_p l K_0 n^{1.5} (\pi D B_0)^2 / \sqrt{Z}; K_0 \approx 23,3;$$

$$B_0 \approx B_\delta (1 - k_\delta).$$

Механические потери в вентиляторе [9]  $\Delta P_{мех} \approx (2 \div 2,5) D_b^2 b_n^3 \cdot 10^{-4}$ , где  $D_b$  — диаметр вентилятора,  $b_n$  — ширина его лопатки. Потери в подшипниках и аэродинамические в высокооборотных машинах существенно меньше потерь в вентиляторе. Добавочные потери  $\Delta p_{доб} \approx 0,01 (P_d/k_{ис})$ .

Масса активных частей базового генератора  $M_a$  рассчитывается по известным размерам активной зоны ( $D$ ,  $l$ ,  $D_n$  и т. п.). Для приближенных оценок можно воспользоваться формулой  $M_a \approx k_\gamma \gamma_{ст} \pi D_n^2 l / 4$ , где  $k_\gamma$  — коэффициент плотности всего генератора, значение которого, в частности, может учитывать помимо каналов и полостей массу лобовых частей за пределами длины  $l$ . Полная масса базового генератора  $M_g \approx k_n M_a$ , где  $k_n$  — конструктивный коэффициент ( $k \approx 1,4 \div 1,7$  для генераторов с ПМ).

При оценке показателей ПВ помимо выбора типа и числа вентиля по обычным правилам [6] необходимо рассчитать сглаживающий дроссель. Для этого находится коэффициент пульсаций напряжения на входе в дроссель  $q_{вх} = 2 \sqrt{1 + v^2 \lg^2 \alpha / (v^2 - 1)}$ , где  $v$  — порядок главной гармоники пульсаций по отношению к основному периоду  $\vartheta = 2\pi$  (для  $m=3$  и  $n_n=2$  имеем  $v=6$ ) и по заданному значению выходного коэффициента  $q_{вых}$  определяется коэффициент сглаживания  $s = q_{вх}/q_{вых}$ , после чего рассчитывается требуемая индуктивность

дросселя  $L_d = s U_d / (2\pi f \nu I_d)$  [10]. Считается, что сердечник дросселя — однофазный броневой [6].

Центральный стержень, несущий катушку, имеет поперечное сечение  $a$  (ширина)  $\times b$  (толщина). Размеры окна с катушкой:  $c$  (ширина)  $\times h$  (высота). Горизонтальные ярма имеют сечение  $0,5a \times b$ , боковые вертикальные ярма —  $0,5a \times b/k_\sigma$ , где  $k_\sigma$  — коэффициент рассеяния катушки. Очевидно также, что  $L_d = \omega_k B_d ab / I_d$ , где  $\omega_k$  — число витков катушки,  $B_d$  — индукция в стержне, значение которой благодаря зазору несколько ниже индукции насыщения. Так как  $\omega_k = ch k_{ж} j_k / I_d$ , где  $k_{ж}$  — коэффициент заполнения окна активным сечением проводников,  $j_k$  — плотность тока в катушке, имеем  $L_d = abch k_{ж} B_d / I_d^2$ , откуда

$$a = \sqrt[4]{L_d I_d^2 / (\dot{b} \dot{c} \dot{h} k_{ж} B_d)},$$

где  $\dot{b} = b/a$ ,  $\dot{c} = c/a$ ;  $\dot{h} = h/a$ .

После определения  $a$  для выбранной конфигурации дросселя и рекомендуемых значений  $j_k$  и  $B_d$  с учетом простых геометрических соотношений находится масса стали дросселя

$$M_{ст.д} = 2 \gamma_{ст} a^3 \dot{b} [0,5 (1 + \dot{h}) (1 + k_\sigma^{-1}) + \dot{c}];$$

масса проводников катушки (с плотностью  $\gamma_k$ )

$$M_k = 2 \gamma_k a^3 k_{ж} \dot{c} \dot{h} (1 + \dot{b} + 2\dot{c})$$

и масса дросселя

$$M_d = M_{ст.д} + M_k.$$

Активная масса ПВ складывается из массы вентиля с радиаторами охлаждения ( $M_B$ ), массы системы управления ( $M_{СУ}$ ) и массы дросселя ( $M_d$ ). Полная масса ПВ  $M_{ПВ} = k_k (M_B + M_{СУ} + M_d)$ , где  $k_k$  — конструктивный коэффициент ПВ.

Потери в дросселе  $\Delta p_d = \rho_t j_k^2 M_k / \gamma_k$ . Потери в вентилях  $\Delta p_v = \Delta U I_U N$ , где  $I_U$  — средний ток через вентиль;  $\Delta U$  — прямое падение напряжения на вентиле;  $N$  — число вентиля. Динамические потери в ПВ не учитываются, так как используются высокочастотные вентили [11].

После расчета всех потерь  $\Delta p$  в ВГ находится его к. п. д.  $\eta = P_d / (P_d + \Delta p)$ .

При использовании неявнополюсного генератора с электромагнитным индуктором расчет ВГ с неуправляемым ПВ ( $\alpha=0$ ) и слабо насыщенными сердечниками ведется следующим образом. Для исходных значений  $P_d$ ,  $U_d$  и выбранного числа полюсов  $2p$  задаются  $X_{s*}$  и  $X_{d*}$  (ненасыщенное значение), находят  $\dot{X}_k = X_{s*}/X_{d*}$  и, решая систему (15) — (20), определяют зависимость  $\dot{U}(\dot{I})$ . Поскольку для номинальных значений  $X_{d*} = X_d I / U = E_0 I / (U I_n) = \dot{I} / \dot{U}$ , можно по  $X_{d*}$  найти  $\dot{U}$  и  $\dot{I}$  и соответственно  $\gamma$ ,  $\cos \varphi$ ,  $k_i$ ,  $\dot{U}_d$ ,  $k_{ис}$  в номинальном режиме, используя уравнения (15) — (20) или решая вначале (15) и (22). Далее по известным формулам с учетом  $X_{ad*} = X_{d*} - X_{s*}$  рассчитывают линейную нагрузку

$$A = \sqrt{2} \dot{\delta} k_\delta k_\mu X_{ad*} p B_\delta / (\mu_0 k_0 k_d), \quad (33)$$

задаваясь относительным конструктивным зазором  $\dot{\delta} = \delta/D$  ( $\dot{\delta} \approx 0,008 - 0,015$ ). Если  $A > A_{доп}$ , необходимо

скорректировать расчет, меняя, например,  $\delta$ ,  $X_{ad*}$ ,  $p$ ,  $B_\delta$ .

Задаваясь механической постоянной  $T_J$  и значением  $\alpha_\delta$ , находят размеры активной зоны [5, 8]:

$$D = 8\alpha_\delta AB_\delta T_J / (k_E \gamma_{\text{ст}} v_m); \quad (34)$$

$$\lambda = \frac{k_\gamma^2 \gamma_{\text{ст}}^2 v_m (P_d / k_{\text{нс}})}{64 \pi T_J^2} \left( \frac{k_E}{\alpha_\delta AB_\delta} \right)^3. \quad (35)$$

Соответственно  $n = 60 v_m / (\pi D)$ ,  $f = pn / 60$ . Индукция в зазоре при х. х.  $B_{\delta_0} = B_\delta / (k_E \dot{U})$ , э. д. с. холостого хода  $E_0 = U_d / \dot{U}_d$ , число витков  $w = E_0 / (\pi \sqrt{2} k_0 f B_{\delta_0} \alpha_\delta \tau l)$ . Далее выбирают  $q$  и находят  $u_\pi = w / pq$ , округляя  $w$  и  $u_\pi$  (желательно до четного значения) и корректируя  $E_0$  и  $U_d$ . Ток генератора  $I = k_i I_d = k_i (P_d / U_d)$ . Уточненное значение  $A = 2m I w / (\pi D)$  должно согласовываться с (33).

По номинальному значению  $Z_H = U / I$  оценивают параметр

$$\Sigma \lambda_s = X_{s*} p q Z_H / (4 \pi \mu_0 f w^2 l), \quad (36)$$

который должен находиться в пределах примерно от 2 до 3. Размеры паза и высоту спинки якоря рассчитывают так же, как в предыдущем варианте, после чего сравнивают значения  $\Sigma \lambda_s$  по (32) и (36) и корректируют расчет при необходимости. Затем находят м. д. с. возбуждения при х. х., создающую номинальную индукцию в зазоре

$$F_{v0} = k_\mu B_\delta k_\delta \delta / \mu_0$$

и м. д. с. реакции якоря  $F_a = k_0 A D / (\sqrt{2} p)$ , причем должно выполняться  $X_{ad*} = k_d F_a / F_{v0}$  [12]. Далее, используя диаграмму Потье, определяют м. д. с. возбуждения при нагрузке, обеспечивающую сохранение заданного значения  $B_\delta$ . С учетом подхода, развитого в [12], имеем

$$F_v = F_{v0} \sqrt{(k_E k_\mu)^2 + X_{ad*}^2 + 2 k_E k_\mu X_{ad*} \sin(\varphi + \alpha')},$$

$$\alpha' = \arcsin(X_{s*} \cos \varphi / k_E).$$

Сечение проводов обмотки возбуждения (на полюсе)  $S_v = F_v / j_v$ , где  $j_v$  — плотность тока возбуждения. Задаваясь  $\gamma_v$  — отношением обмотанной части ротора к  $\pi D$ ,  $k_\pi$  — коэффициентом использования паза ротора и относительной шириной паза  $b'_\pi = b_\pi / t_z$ , находят высоту паза ротора  $h'_\pi = S_v / [(\pi D / 2 p) \gamma_v b'_\pi k_\pi]$  и уточняют  $k_d = k_i^{-1} = \pi^2 \gamma_v / [8 \sin(\pi \gamma_v / 2)]$  [1]. Потери в обмотке возбуждения [8]:

$$\Delta p_{o.v} = 4 \rho_i j_v (l + \alpha \tau) p F_v.$$

Остальные потери рассчитывают как и в предыдущем варианте. Из-за больших  $v_m$  предполагается, что ротор снаружи охвачен стальным сварным цилиндром, который, в частности, выполняет роль демпферной клетки. Потери в цилиндре определяются по формуле для  $\Delta p_{\text{пов}}$ . При оценке массы базового генератора коэффициент  $k_\kappa$  выбирают больше, чем для генераторов с ПМ из-за наличия узлов подвода тока (в том числе бесконтактных) к обмотке возбуждения:  $k_\kappa \approx 1,5$ — $2,5$ .

Характерное время регулировочных процессов можно оценить по постоянной времени обмотки возбуждения [8]:

$$\tau_v = L_v / R_v \approx \mu_0 S_v \alpha_\delta \tau l k_\sigma / [2 \rho_i k_\mu \delta' (l + \alpha \tau)].$$

**Расчеты и обсуждение результатов.** В качестве примеров были рассчитаны два генератора с ПМ и уп-

равляемым ПВ мощностью 100 кВт (первый вариант) и 1000 кВт (второй вариант), а также генератор с обмоткой возбуждения и неуправляемым ПВ мощностью 100 кВт (третий вариант). Генераторы трехфазные с мостовыми ПВ. Пульсации выходного напряжения по условию не должны превышать 5—6 % от  $U_d$ . Для первого и второго вариантов  $B_r = 0,82$  Тл,  $H_c = 0,56 \cdot 10^6$  А/м, что соответствует минимально допустимым показателям ПМ на основе материала КС 37А [13],  $\alpha = 40^\circ$ ,  $\dot{\Lambda} = 0,15$ . Для всех вариантов  $k_0 = 0,9$ ;  $k_\pi = 0,4$ ;  $k_\mu = 1,1$ ;  $u_\pi = 2$ ; материал сердечников — шихтованная сталь марки 49КФ2 ВИ с толщиной листа 0,2 мм. Для третьего варианта принималось  $\gamma_v = 0,65$ .

Показатели и параметры для трех вариантов приведены далее:

Мощность $P_d$ , кВт	100	1000	100
Напряжение $U_d$ , В	390	3300	408
Фазная э. д. с. х. х. $E_0$ , В	315	2540	337
Время работы $\Delta t$ , с	длительное	200	длительное
Максимальная температура $t$ , °С	200	250	200
Механическая постоянная $T_J$ , с	0,7	1,5	0,7
Диаметр активной зоны $D$ , м	0,128	0,29	0,11
Геометрический фактор $\lambda$	1,25	1,4	1,57
Наружный диаметр ярма $D_a$ , м	0,181	0,372	0,169
Окружная скорость ротора $v_m$ , м/с	120	150	120
Число полюсов $2p$	8	12	4
Частота вращения $n$ , об/мин	17 900	9880	20 800
Частота тока $f$ , Гц	1194	988	694
Относительный эквивалентный воздушный зазор $\delta''$	0,008	0,005	0,012
Конструктивный зазор $\delta$ , мм	0,66	1	1,3
Линейная нагрузка $A$ , А/см	379	389	340
Индукция в зазоре $B_\delta$ (при нагрузке/при х. х.), Тл	0,86/1,04	1/06/1,32	0,65/1,13
Плотность тока $j$ (в якоре/в индукторе), А/мм <sup>2</sup>	10/—	12/—	10/8
Число зубцов якоря $Z$	36	72	30
Число пазов на полюс и фазу $q$	1,5	2	2,5
Размеры паза якоря $h_\pi \times b_\pi$ , мм × мм	16 × 5,5	20 × 5	17 × 5,8
Число витков фазы $w$	12	24	10
Коэффициент:			
полюсной дуги $\alpha_p / \alpha_\delta$	0,6/0,66	0,6/0,66	0,63/0,7
зазора $k_\delta$	1,4	1,3	1,3
рассеяния полюсов $k_\sigma$	1,15	1,3	1,2
продольной реакции якоря $k_d$	0,85	0,85	0,93
Удельная проводимость рассеяния (выбранная/расчетная) $\Sigma \lambda_s$	2,25/2,29	2,3/2,24	2/1,99
Относительные магнитные проводимости:			
зазора $\tilde{\Lambda}_\delta$	4,41	3,14	—
рассеяния полюсов $\tilde{\Lambda}_\sigma$	0,66	0,942	—
якорного рассеяния $\tilde{\Lambda}_s$	0,684	0,349	—
Относительные показатели:			
коммутационное сопротивление $\chi_\kappa$	0,36	0,226	0,1
ток $I$	0,3	0,3	0,7
напряжение генератора $\dot{U}$	0,76	0,77	0,56
выпрямленное напряжение $\dot{U}_d$	1,23	1,3	1,21
продольное индуктивное сопротивление $X_{d*}$	0,4	0,39	1,25
индуктивное сопротивление рассеяния $X_{s*}$	0,143	0,087	0,125
Угол коммутации $\gamma$	11,5°	7,6°	29,8°
Коэффициент мощности $\cos \varphi$	0,7	0,722	0,97

## Продолжение

Коэффициент использования $k_{ис}$	0,672	0,7	0,93
Магнитодвижущая сила возбуждения $F_m, F_B, A$	1330	2200	1830
Тип и число вентиля в ПВ	ТЧ-100 6 шт.	ТЧ-125 24 шт.	ВЧ-100 6 шт.
Индуктивность дросселя $L_d, Гн$	$2 \cdot 10^{-4}$	$1,73 \cdot 10^{-3}$	—
Потери, кВт:			
в обмотке возбуждения $\Delta p_{ов}$	—	—	0,82
в обмотке якоря $\Delta p_a$	1	6,5	0,8
в стали зубцов $\Delta p_z$	2,43	19,3	0,51
в стали ярма $\Delta p_{я}$	1,9	14,7	1
поверхностные $\Delta p_{пов}$	8	43	3,3
механические $\Delta p_{мех}$	7,8	15	6,6
добавочные $\Delta p_{доб}$	1,5	15	2
в выпрямителе и дросселе $\Delta p_{ПВ}$	1	6	0,8
Коэффициент полезного действия $\eta, \%$	81	89,8	86
Конструктивные коэффициенты $k_k/k_k'$	1,5/1,5	1,5/2	2/1,5
Коэффициенты плотности $k_{\gamma}/k_{\gamma}'$	0,9/0,9	0,9/0,9	0,9/0,8
Масса базового генератора $M_{Г}, кг$	45	480	56
Масса выпрямителя $M_{ПВ}, кг$	25	120	10
Полная удельная масса $\dot{m}, кг/кВт$	0,7	0,6	0,66
Характерное время регулирования, с	$10^{-3}—10^{-2}$	$10^{-3}—10^{-2}$	$\tau_B = 0,14$

Кривые на рис. 5 соответствуют внешним характеристикам первого ВГ при масштабах  $E_0=315 В$ ,  $I_K=690 А$ . Номинальный режим генератора (точка А на рис. 5) выбирался с учетом допустимой двукратной перегрузки по току с сохранением  $U_d=\text{const}$  за счет уменьшения  $\alpha$  (точка В).

В аналогичных условиях работает генератор 2. У генератора 3 поддержание  $U_d=\text{const}$  при перегрузках обеспечивалось форсировкой возбуждения, а номинальный режим ( $\dot{U}=0,56$ ;  $\dot{I}=0,7$ ) выбирался с учетом рациональных значений  $X_{d*}$  ( $X_{d*}=1,25$ ). Генераторы 1 и 3 рассчитаны на длительное включение при самовентиляции, эффективность которой будет высокой из-за больших частот вращения. В генераторе 2 самовентиляция не может обеспечить отвод потерь (около 100 кВт) при непрерывном включении, поэтому длительность цикла включения (около 200 с) оценивалась по адиабатному нагреву обмоток и цилиндра ротора от начальной температуры 20 до 250 °С [8], после чего по предположению генератор охлаждается в режиме х. х. Увеличенная скорость ротора  $v_m$  во втором варианте выбиралась с учетом циклического режима работы генератора.

В добавочные потери генератора 3 включены потери, связанные с токоподводом к обмотке возбуждения. По этой же причине коэффициент  $k_k$  в генераторе 3 увеличен до 2 (предполагается бесконтактное возбуждение от встроенного возбудителя и блока вращающихся выпрямителей). Пониженный к. п. д. генератора 1 по сравнению с генератором 3 (несмотря на отсутствие  $\Delta p_{ов}$ ) объясняется большими потерями в стали из-за повышенной частоты и поверхностными потерями из-за относительно большой индукции  $B_\delta$ .

При расчете сглаживающего дросселя для первого и второго вариантов принималось  $\dot{h}=3$ ;  $\dot{b}=1$ ;  $\dot{c}=0,5$ ;

$k_3=0,6$ ;  $B_\delta=1,2 Тл$ . Плотность тока  $j_K=5 А/мм^2$  для варианта 1 (с учетом обдува катушки) и  $j_K=8 А/мм^2$  для варианта 2 (циклический режим). Масса дросселя 7,5 кг для первого варианта и 33 кг для варианта второго. Увеличенное значение  $k_k'$  для ПВ в варианте 2 связано с повышенными напряжениями и наличием элементов для выравнивания напряжений вентилях с групповым включением. Относительно низкие значения индуктивностей и масс дросселей объясняются повышенными частотами базовых генераторов.

Удельная масса базового генератора ( $M_{Г}k_{ис}/P_d$ ) примерно одинаковая для первого и второго вариантов несмотря на десятикратное различие в мощности. Это связано с пониженной частотой вращения генератора 2 из-за большего диаметра при вводимых ограничениях на максимальную окружную скорость ротора, которая определяет механические напряжения в нем [5]. Кроме того, генератор 2 имеет повышенные значения  $k_\sigma$ , что также способствует росту  $\dot{m}$ . Если бы генераторы 1 и 2 были геометрически подобными, т. е. имели бы одинаковые значения  $\lambda$ ,  $B_\delta$ ,  $n$  [7], их удельные массы различались бы сильнее.

Удельная масса базового генератора 1 ( $45 \cdot 0,672/100 = 0,3 кг/кВ \cdot А$ ) заметно меньше, чем у генератора 3 ( $0,52 кг/кВ \cdot А$ ) благодаря в основном увеличенным значениям  $p$  и  $f$ , обеспечиваемым применением высококоэрцитивных ПМ. Однако полные удельные массы у первого и третьего вариантов отличаются мало из-за увеличенной массы управляемого ПВ в первом варианте.

Удельные массы ВГ существенно меньше, чем у коллекторных генераторов. Так, согласно оценкам, для коллекторного генератора, близкого по параметрам к третьему варианту (те же значения  $P_d$ ,  $AB_\delta$ ,  $T_J$ ,  $j$  и др.) при  $v_m=70 м/с$  и  $k_r \approx 2—2,5$  (с учетом коллекторного узла) получим  $D=0,19 м$ ,  $\lambda=0,92$ ,  $\dot{m} \approx 2—2,5 кг/кВт$ . Такие значения  $\dot{m}$  характерны, в частности, для авиационных генераторов постоянного тока [14].

Развиваемый выше подход к анализу и расчету ВГ носит приближенный характер, однако он позволяет относительно быстро проводить расчет основных показателей и параметров ВГ и намечать варианты для последующих уточненных расчетов с более полным рассмотрением гармонического состава токов и напряжений, тепловых режимов, механических нагрузок и т. п.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балагуров В. А. Проектирование специальных электрических машин переменного тока. — М.: Высшая школа, 1982.
2. Специальные электрические машины / А. И. Бертинов, Д. А. Бут, С. Р. Мизюрин и др. — М.: Энергоатомиздат, 1982.
3. Брускин Д. Э., Зорохович А. Е., Хвостов В. С. Электрические машины. — М.: Высшая школа, 1979.
4. Электрические машины в тяговом автономном электроприводе / Ю. М. Адриев, К. Г. Исаакян, А. Д. Машихин и др. — М.: Энергия, 1979.
5. Бут Д. А. Бесконтактные электрические машины. — М.: Высшая школа, 1985.
6. Справочник по преобразовательной технике / И. М. Чиженко, П. Д. Андриенко, А. А. Баран и др. — Киев: Техника, 1978.
7. Иванов-Смоленский А. В. Электрические машины. — М.: Энергия, 1980.
8. Бут Д. А. Особенности расчета высокоиспользованных синхронных генераторов для автономных энергоустановок. — Электричество, 1985, № 3.
9. Бертинов А. И., Радько М. С. Авиационные явнополюсные синхронные генераторы. — М.: Изд. МАИ, 1968.

10. Электротехнический справочник. Т. 2/Под ред. В. Г. Герасимова, П. Г. Грудинского, Л. А. Жукова и др. — М.: Энергоиздат, 1981.

11. Чебовецкий О. Г., Моисеев Л. Г., Недошивин Р. П. Силовые полупроводниковые приборы. Справочник. — М.: Энергоатомиздат, 1985.

12. Сергеев П. С., Виноградов Н. В., Горяинов Ф. А.

Проектирование электрических машин. — М.: Энергия, 1969.

13. Постоянные магниты. Справочник/А. Б. Альтман, Э. Е. Верниковский, А. Н. Герберг и др. — М.: Энергия, 1980.

14. Электроснабжение летательных аппаратов/В. А. Балгуров, И. М. Беседин, Ф. Ф. Галтеев и др. — М.: Машиностроение, 1975.

[24.12.86]

УДК 621.313.013.001.24

## К расчету магнитного поля в воздушном зазоре электрической машины

МАКАРОВ Ф. К., канд. техн. наук

Владимир

В связи с необходимостью экономии материальных ресурсов в новых сериях электрических машин постоянно растет использование активных материалов: электротехнической стали и обмоточной меди. Получают распространение машины с магнитными клиньями [1—11]. Для оптимального проектирования требуются все более удобные и точные методы расчета магнитных полей и в первую очередь — магнитного поля в воздушном зазоре между ротором и статором.

В настоящее время широко применяются численные методы расчета полей — метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ). Они весьма удобны для расчета дорогостоящих крупных и уникальных электрических машин, но обладают органическим недостатком — необходимостью повторения расчета для каждой новой совокупности параметров задачи и затруднительностью получения на их основе закономерностей, пригодных для общего анализа процессов в машине.

Как известно, структура магнитного поля в воздушном зазоре в основном определяется характеристиками ферромагнетиков в шлицевых зонах статора и ротора, а также геометрическими размерами воздушного зазора и непосредственно прилегающих к нему областей магнитопровода.

В связи с этим для расчета поля в воздушном зазоре активную зону электрической машины можно представить в виде кусочно-однородной области  $F$ , геометрические размеры которой в районе воздушного зазора и шлицевой зоны полностью с ними совпадают и с достаточной для наших целей точностью описывают геометрию остальных частей магнитопровода.

Каждая из однородных областей имеет свою характеристику среды. Токи в пазах считаются сосредоточенными в бесконечно тонких слоях на дне пазов. Для такой кусочно-однородной области возможен аналитический метод расчета магнитного поля [10—16], сводящийся к отысканию функции скалярного магнитного потенциала  $\Phi(x, y)$ , удовлетворяющего уравнению Лапласа и заданным на границах области краевым условиям. По своей сущности метод не пригоден для расчета поля в областях, занятых токами. Однако при допущениях, принятых в [10—15], для расчета поля в шлицевых зонах статора и ротора и в воздушном зазоре он дает вполне удовлетворительные результаты. Решение получается в виде медленно сходящихся рядов, и практическое использование метода для сложных кусочно-одно-

родных областей стало возможным только в самое последнее время в связи с появлением мощной вычислительной техники.

Известные решения [10—15] выполнены для некоторых частных случаев. Ниже приводится общий алгоритм аналитического расчета магнитного поля в кусочно-однородной области.

Рассмотрим область  $F$  (рис. 1). Полагаем ее прямоугольной [1—17] с наружными размерами  $s$  и  $t$ , определяемыми условиями периодичности магнитного поля в машине. Прямыми, параллельными оси  $y$ , область  $F$  рассекается на слои, каждый из которых соответствует типичной зоне машины (ядро статора и ротора, воздушный зазор, зубцовые и шлицевые зоны статора и ротора). Слои, имеющие внутреннюю структуру (зубцовые и шлицевые зоны статора и ротора), рассекаются прямыми, параллельными осям  $x$  и  $y$ , на необходимое число подобластей.

По способу разбиения границы между слоями и подобластями являются «гладкими», без впадин и выступов. Невыполнение этого условия крайне усложняет задачу и делает ее трудноразрешимой. Введенное ограничение на способ разбиения области  $F$  является слабым. В дальнейшем считаем его выполняющимся. Внутри области  $F$  вводится обобщенная система координат — номер слоя  $i$  и номер подобласти  $j$ -м слое. Таким обра-

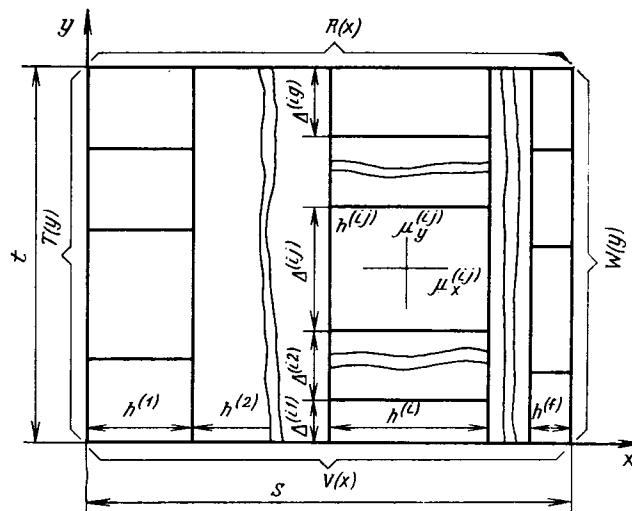


Рис. 1. Расчетная схема кусочно-однородной области  $F$

зом, положение подобласти  $F^{(ij)}$  в области  $F$  полностью определено двумя числами.

Примеры использования обозначений.

Некоторая величина  $P$  определена в подобласти  $F^{(ij)}$  с обобщенными координатами  $(ij)$  и суммируется по индексу  $\alpha$

$$P_{\alpha}^{(ij)}, \quad (1)$$

где  $i$  — номер слоя;  $j$  — номер подобласти в слое  $i$ .

Некоторая величина  $P$  определена на границе между подобластями  $F^{(ij)}$  и  $F^{(i,j-1)}$  и суммируется по индексу  $\beta$ :

$$P_{\beta}^{[ij]} [i; i-1]. \quad (2)$$

Каждой однородной подобласти  $F^{[ij]}$  придается местная система координат  $x^{(i)}$  и  $y^{(j)}$  (рис. 2). Формулы перехода от местной к общей системе координат:

$$x^{(i)} = x - \sum_{f=1}^{i-1} h^{(f)}; \quad (3)$$

$$y^{(j)} = y - \sum_{g=1}^{j-1} \Delta^{(g)}. \quad (4)$$

Однородные подобласти, занятые ферромагнетиками, полагаются анизотропными и имеющими по координатным осям  $x$  и  $y$  хотя и различное, но постоянное значение относительной магнитной проницаемости

$$\mu_x^{(ij)}; \mu_y^{(ij)}. \quad (5)$$

Этот подход позволяет для расчета поля в воздушном зазоре вполне удовлетворительно учесть нелинейность магнитных характеристик магнитопровода [18—19]. (Кривые намагничивания ферромагнетиков полагаются известными.)

Для подобластей, не занятых ферромагнетиками

$$\mu_x^{(ij)} = \mu_y^{(ij)} = 1. \quad (6)$$

В изотропных подобластях

$$\mu_x^{(ij)} = \mu_y^{(ij)} = \mu^{(ij)}. \quad (7)$$

В подобластях с пренебрежимо малым падением потенциала

$$\mu^{(ij)} = \infty. \quad (8)$$

Применительно к электрическим машинам при выбранном способе задания  $s$  и  $t$  на внешних границах

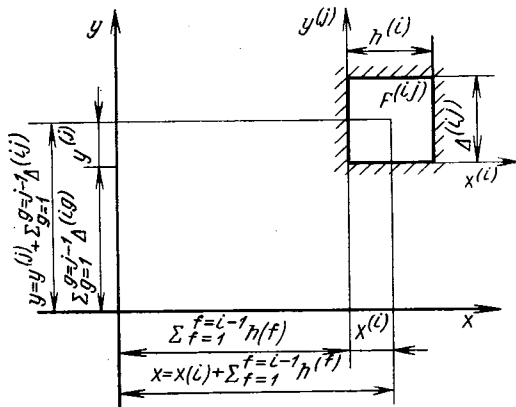


Рис. 2. К выводу формул перехода от местной к общей системе координат

кусочно-однородной области  $F$  всегда могут быть определены потенциальные функции  $V(x)$ ;  $R(x)$ ;  $T(y)$ ;  $W(y)$ , заданные кусочно с достаточной для практических целей точностью функциями вида

$$\varphi = 0; \quad (9)$$

$$\varphi = \text{const}; \quad (10)$$

$$\varphi(x_i) = \varphi(0) + \frac{\varphi(h^{(i)}) - \varphi(0)}{h^{(i)}} x_i; \quad (11)$$

$$\varphi(y_j) = \varphi(0) + \frac{\varphi(\Delta^{(j)}) - \varphi(0)}{\Delta^{(j)}} y_j. \quad (12)$$

Таким образом, имеем задачу Дирихле, рассмотрением которой в дальнейшем и ограничимся.

Рассмотрим элементарную однородную подобласть  $F^{(ij)}$  (рис. 3) с местной системой координат  $x^{(i)}$ ,  $y^{(j)}$ . В дальнейших выкладках индексы  $(ij)$  опустим. На границах подобласти  $F$  расположены потенциалы  $T(y)$ ;  $W(y)$ ;  $V(x)$ ;  $R(x)$ . Уравнение Лапласа для анизотропной среды

$$\frac{1}{\mu_y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu_x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (13)$$

Ввиду линейности уравнения Лапласа решение уравнения (13) для подобласти  $F$ , имеющей неоднородные краевые условия на всех четырех границах, можно представить как сумму решений четырех задач, каждая из которых имеет потенциал, расположенный на одной границе, и однородные краевые условия на остальных трех границах. Собственными функциями каждой из этих задач являются синусы [16], что весьма удобно для дальнейшего использования. Особенные точки поля в углах однородных подобластей «вырезаются», и в то же время при использовании современной вычислительной

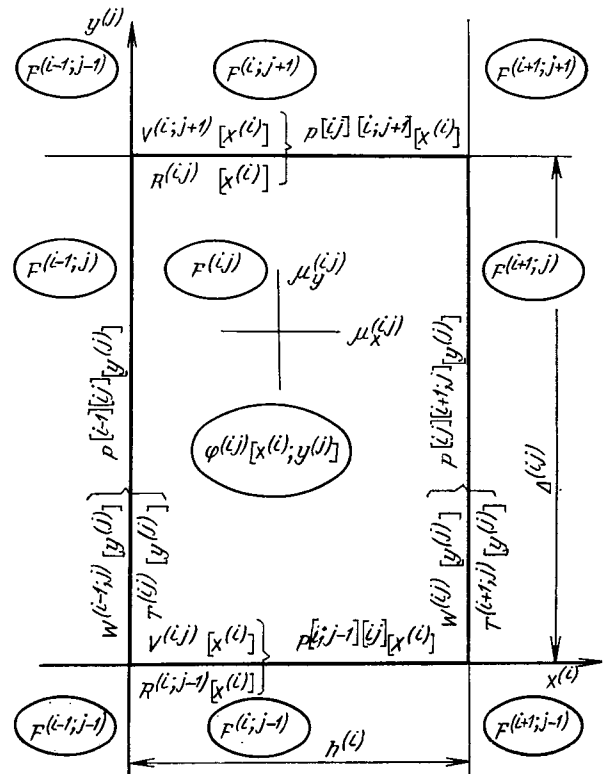


Рис. 3. Расчетная схема однородной области  $F^{(ij)}$  (смежные области на границах с  $F^{(ij)}$  имеют одинаковые с ней размеры)

техники всегда можно вычислить число гармоник, необходимое для хорошего приближения функций в сколь угодно малой окрестности угловых точек.

Исходя из изложенного, решением уравнения (13) для подобласти  $F$  является потенциальная функция [15]:

$$\begin{aligned} \varphi(xy) = & \sum_{l=1}^{\infty} C_l \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{l\pi}{h} y \right) \sin \left( \frac{l\pi}{h} x \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{k\pi}{h} (\Delta - y) \right] \sin \left( \frac{k\pi}{h} x \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{n\pi}{\Delta} x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{\Delta} y \right) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{n\pi}{\Delta} (h - x) \right] \sin \left( \frac{m\pi}{\Delta} y \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Постоянные интегрирования в (14) определим из краевых условий. Разложим потенциальные функции  $T(y)$ ,  $W(y)$ ,  $V(x)$  и  $R(x)$  в ряды Фурье по собственным функциям решения (17), т. е. нечетным образом:

$$T(y) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m \sin \left( \frac{m\pi}{\Delta} y \right); \quad (15)$$

$$W(y) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin \left( \frac{n\pi}{\Delta} y \right); \quad (16)$$

$$V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \sin \left( \frac{k\pi}{h} x \right); \quad (17)$$

$$R(x) = \sum_{l=1}^{\infty} R_l \sin \left( \frac{l\pi}{h} x \right). \quad (18)$$

Амплитуды гармоник потенциалов:

$$T_m = \frac{2}{\Delta} \int_0^{\Delta} T(y) \sin \left( \frac{m\pi}{\Delta} y \right) dy; \quad (19)$$

$$W_n = \frac{2}{\Delta} \int_0^{\Delta} W(y) \sin \left( \frac{n\pi}{\Delta} y \right) dy; \quad (20)$$

$$V_k = \frac{2}{h} \int_0^h V(x) \sin \left( \frac{k\pi}{h} x \right) dx; \quad (21)$$

$$R_l = \frac{2}{h} \int_0^h R(x) \sin \left( \frac{l\pi}{h} x \right) dx. \quad (22)$$

Сравнивая (13) и (15)–(18), получим для постоянных интегрирования  $C$ :

$$C_l = \frac{R_l}{\operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{l\pi\Delta}{h} \right)}; \quad (23)$$

$$C_k = \frac{V_k}{\operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{k\pi\Delta}{h} \right)}; \quad (24)$$

$$C_n = \frac{W_n}{\operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{n\pi h}{\Delta} \right)}; \quad (25)$$

$$C_m = \frac{T_m}{\operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{m\pi h}{\Delta} \right)}. \quad (26)$$

Дифференцируя (14), получим функции для магнитной индукции в подобласти  $F$ . Составляющая по координате  $y$ :

$$\begin{aligned} B_y(xy) = & -\mu_y \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} = -\mu_y \sum_{l=1}^{\infty} C_l \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{l\pi}{h} \times \\ & \times \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{l\pi}{h} y \right) \sin \left( \frac{l\pi}{h} x \right) + \mu_y \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{k\pi}{h} \times \\ & \times \operatorname{ch} \left[ \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{k\pi}{h} (\Delta - y) \right] \sin \left( \frac{k\pi}{h} x \right) - \mu_y \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{n\pi}{\Delta} \times \\ & \times \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{n\pi}{\Delta} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{\Delta} y \right) - \mu_y \sum_{m=1}^{\infty} C_m \frac{m\pi}{\Delta} \times \\ & \times \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{m\pi}{\Delta} (h - x) \right] \cos \left( \frac{m\pi}{\Delta} y \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Составляющая по координате  $x$ :

$$\begin{aligned} B_x(xy) = & -\mu_x \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial x} = -\mu_x \sum_{l=1}^{\infty} C_l \frac{l\pi}{h} \times \\ & \times \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{l\pi}{h} y \right) \cos \left( \frac{l\pi}{h} x \right) - \mu_x \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{k\pi}{h} \times \\ & \times \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{k\pi}{h} (\Delta - y) \right] \cos \left( \frac{k\pi}{h} x \right) - \\ & - \mu_x \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{n\pi}{\Delta} \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{n\pi}{\Delta} x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{\Delta} y \right) + \\ & + \mu_x \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{m\pi}{\Delta} \operatorname{ch} \left[ \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{m\pi}{\Delta} (h - x) \right] \times \\ & \times \sin \left( \frac{m\pi}{\Delta} y \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя в (27) и (28) значения координат на границах подобласти  $F$ , получим следующее.

Граница  $y=0$ :

нормальная составляющая

$$\begin{aligned} B_y(x; 0) = & -\mu_y \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l\pi}{h} \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{R_l}{\operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{l\pi\Delta}{h} \right)} \times \\ & \times \sin \left( \frac{l\pi}{h} x \right) + \mu_y \frac{k\pi}{h} \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} V_k \operatorname{cth} \left( \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{k\pi\Delta}{h} \right) \times \\ & \times \sin \left( \frac{k\pi}{h} x \right) - \mu_y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\Delta} \frac{W_n}{\operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{n\pi h}{\Delta} \right)} \times \\ & \times \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{n\pi}{\Delta} x \right) - \mu_y \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{\Delta} \frac{T_m}{\operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{m\pi h}{\Delta} \right)} \times \\ & \times \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{m\pi}{\Delta} (h - x) \right]; \end{aligned} \quad (29)$$

тангенциальная составляющая

$$B_x(x; 0) = -\mu_x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{h} V_k \cos \left( \frac{k\pi}{h} x \right). \quad (30)$$

Граница  $y=\Delta$ : нормальная составляющая

$$B_y(x; \Delta) = -\mu_y \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l\pi}{h} \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} R_l \operatorname{cth} \left( \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{l\pi\Delta}{h} \right) \times \\ \times \sin \left( \frac{l\pi}{h} x \right) + \mu_y \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{h} \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{V_k}{\operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{k\pi\Delta}{h} \right)} \times \\ \times \sin \left( \frac{k\pi}{h} x \right) - \mu_y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi (-1)^n}{\Delta} \frac{W_n}{\operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{n\pi h}{\Delta} \right)} \times \\ \times \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{n\pi}{\Delta} x \right) - \mu_y \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi (-1)^m}{\Delta} \times \\ \times \frac{T_m}{\operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{m\pi h}{\Delta} \right)} \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{m\pi}{\Delta} (h-x) \right] \quad (31)$$

тангенциальная составляющая

$$B_x(x; \Delta) = -\mu_x \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l\pi}{h} R_l \cos \left( \frac{l\pi}{h} x \right). \quad (32)$$

Граница  $x=0$ : нормальная составляющая

$$B_x(0; y) = -\mu_x \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l\pi}{h} \frac{R_l}{\operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{l\pi\Delta}{h} \right)} \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \times \right. \\ \times \left. \frac{l\pi}{h} y \right) - \mu_x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{h} \frac{V_k}{\operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{k\pi\Delta}{h} \right)} \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \times \right. \\ \times \left. \frac{k\pi}{h} (\Delta-y) \right] - \mu_x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m\pi}{\Delta} \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{W_n}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{m\pi h}{\Delta}} \times \\ \times \sin \left( \frac{n\pi}{\Delta} y \right) + \mu_x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{\Delta} \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} T_m \times \\ \times \operatorname{cth} \left( \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{m\pi h}{\Delta} \right) \sin \left( \frac{m\pi}{\Delta} y \right); \quad (33)$$

тангенциальная составляющая

$$B_y(0; y) = -\mu_y \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{\Delta} T_m \cos \left( \frac{m\pi}{\Delta} y \right). \quad (34) \quad \text{где}$$

Граница  $x=h$ : нормальная составляющая

$$B_x(h; y) = -\mu_x \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l\pi (-1)^l}{h} \frac{R_l}{\operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{l\pi\Delta}{h} \right)} \times \\ \times \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{l\pi}{h} y \right) - \mu_x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi (-1)^k}{h} \frac{V_k}{\operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{k\pi\Delta}{h} \right)} \times \\ \times \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{k\pi}{h} (\Delta-y) \right] - \mu_x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\Delta} \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \times \\ \times W_n \operatorname{cth} \left( \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{n\pi h}{\Delta} \right) \sin \left( \frac{n\pi}{\Delta} y \right) + \\ + \mu_x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{\Delta} \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{T_m}{\operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{m\pi h}{\Delta} \right)} \sin \left( \frac{m\pi}{\Delta} y \right); \quad (35)$$

тангенциальная составляющая

$$B_y(h; y) = -\mu_y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\Delta} W_n \cos \left( \frac{n\pi}{\Delta} y \right). \quad (36)$$

Функции для тангенциальных составляющих магнитной индукции на границах подобласти представлены в виде разложения в тригонометрические ряды по косинусам (30), (32), (34) и (36).

Функции для нормальных составляющих магнитной индукции на границах подобласти представлены рядами (29), (31), (33) и (35), содержащими периодические и аperiodические члены. Разложим эти функциональные зависимости по собственным функциям задачи, т. е. нечетным образом.

Граница  $y=0$ .

Разлагается в ряд функция (29):

$$B_y(x; 0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \left( \frac{k\pi}{h} x \right); \quad (37)$$

$$b_k = \frac{2}{h} \int_0^h (x; 0) \sin \left( \frac{k\pi}{h} x \right) dx; \quad (38)$$

$$b_k = b_k^{(R)} + b_k^{(V)} + b_k^{(W)} + b_k^{(T)}. \quad (39)$$

В (39)  $b_k^{(R)}$ ,  $b_k^{(V)}$ ,  $b_k^{(W)}$ ,  $b_k^{(T)}$  — составляющие  $k$ -й гармоники нормальной составляющей магнитной индукции от потенциалов  $R$ ,  $V$ ,  $W$  и  $T$ . Подставляя в (38) соответствующие слагаемые из (39), получим

От потенциала  $R$ :

$$b_k^{(R)} = \frac{2}{h} \int_0^h - \sum_{l=1}^{\infty} \mu_y \frac{l\pi}{h} \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \times \\ \times \frac{R_l}{\operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{l\pi\Delta}{h} \right)} \sin \left( \frac{l\pi}{h} x \right) dx \quad (40)$$

$$\frac{2}{h} \int_0^h \sin \left( \frac{l\pi}{h} x \right) \sin \left( \frac{k\pi}{h} x \right) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } l \neq k \\ 1 & \text{при } l = k \end{cases} \quad (41)$$

Из (40) с учетом (41) получим:

$$b_k^{(R)} = (-1) Q_k R_k, \quad (42)$$

$$Q_k = \mu_y \frac{k\pi}{h} \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{1}{\operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{k\pi\Delta}{h} \right)}. \quad (43)$$

От потенциала  $V$

$$b_k^{(V)} = L_k V_k; \quad (44)$$

$$L_k = \mu_y \frac{k\pi}{h} \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \operatorname{cth} \left( \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{k\pi\Delta}{h} \right). \quad (45)$$

От потенциала  $W$

$$b_k^{(W)} = \sum_{n=1}^{\infty} M_{kn} W_n; \quad (46)$$

$$M_{kn} = \mu_y \frac{2nk\pi^2}{\Delta h^2} \frac{(-1)^k}{\frac{\mu_x}{\mu_y} \left( \frac{n\pi}{\Delta} \right)^2 + \left( \frac{k\pi}{h} \right)^2}. \quad (47)$$

От потенциала  $T$

$$b_k^{(T)} = \sum_{m=1}^{\infty} N_{km} T_m; \quad (48)$$

$$N_{km} = \mu_y \frac{2mk\pi^2}{\Delta h^2} \frac{-1}{\frac{\mu_x}{\mu_y} \left(\frac{m\pi}{\Delta}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2}. \quad (49)$$

С учетом (42), (44), (46) и (48) (39) примет вид:

$$b_k = (-1) Q_k R_k + L_k V_k + \sum_{n=1}^{\infty} M_{kn} W_n + \sum_{m=1}^{\infty} N_{km} T_m. \quad (50)$$

Подставляя (50) в (37), получим ряд Фурье для нормальной составляющей магнитной индукции при  $y=0$ :

$$B_y(x; 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (-1) Q_k R_k + L_k V_k + \sum_{n=1}^{\infty} M_{kn} W_n + \sum_{m=1}^{\infty} N_{km} T_m \right] \sin\left(\frac{k\pi}{h} x\right). \quad (51)$$

На других границах аналогично получим.

Граница  $y = \Delta$

$$b_l = (-1) L_l R_l + Q_l V_l + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n M_{ln} W_n + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m N_{lm} T_m; \quad (52)$$

$$L_l = \mu_y \frac{l\pi}{h} \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{l\pi\Delta}{h}\right); \quad (53)$$

$$Q_l = \mu_y \frac{l\pi}{h} \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{l\pi\Delta}{h}\right)}; \quad (54)$$

$$M_{ln} = \mu_y \frac{2ln\pi^2}{\Delta h^2} \frac{(-1)^l}{\frac{\mu_x}{\mu_y} \left(\frac{n\pi}{\Delta}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{h}\right)^2}; \quad (55)$$

$$N_{lm} = \mu_y \frac{2lm\pi^2}{\Delta h^2} \frac{1}{\frac{\mu_x}{\mu_y} \left(\frac{m\pi}{\Delta}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{h}\right)^2}; \quad (56)$$

$$B_y(x; \Delta) = \sum_{l=1}^{\infty} \left[ (-1) L_l R_l + Q_l V_l + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n M_{ln} W_n + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m N_{lm} T_m \right] \sin\left(\frac{l\pi}{h} x\right). \quad (57)$$

Граница  $x=0$

$$b_m = \sum_{l=1}^{\infty} A_{ml} R_l + \sum_{k=1}^{\infty} E_{mk} V_k + (-1) I_m W_m + Y_m T_m; \quad (58)$$

$$A_{ml} = \mu_x \frac{2ml\pi^2}{h\Delta^2} \frac{(-1)^m}{\frac{\mu_y}{\mu_x} \left(\frac{l\pi}{h}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{\Delta}\right)^2}; \quad (59)$$

$$E_{mk} = \mu_x \frac{2mk\pi^2}{h\Delta^2} \frac{-1}{\frac{\mu_y}{\mu_x} \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{\Delta}\right)^2}; \quad (60)$$

$$I_m = \mu_x \frac{m\pi}{\Delta} \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{m\pi h}{\Delta}\right)}; \quad (61)$$

$$Y_m = \mu_x \frac{m\pi}{\Delta} \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{m\pi h}{\Delta}\right); \quad (62)$$

$$B_x(0; y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} A_{ml} R_l + \sum_{k=1}^{\infty} E_{mk} V_k + (-1) I_m W_m + Y_m T_m \right] \sin\left(\frac{m\pi}{\Delta} y\right). \quad (63)$$

Граница  $x=h$

$$b_n = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l A_{nl} R_l + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k E_{nk} V_k + (-1) Y_n W_n + I_n T_n; \quad (64)$$

$$A_{nl} = \mu_x \frac{2nl\pi^2}{h\Delta^2} \frac{(-1)^n}{\frac{\mu_y}{\mu_x} \left(\frac{l\pi}{h}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\Delta}\right)^2}; \quad (65)$$

$$E_{nk} = \mu_x \frac{2nk\pi^2}{h\Delta^2} \frac{-1}{\frac{\mu_y}{\mu_x} \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\Delta}\right)^2}; \quad (66)$$

$$Y_n = \mu_x \frac{n\pi}{\Delta} \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{n\pi h}{\Delta}\right); \quad (67)$$

$$I_n = \mu_x \frac{n\pi}{\Delta} \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \frac{n\pi h}{\Delta}\right)}; \quad (68)$$

$$B_x(h; y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l A_{nl} R_l + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k E_{nk} V_k + (-1) Y_n W_n + I_n T_n \right] \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta} y\right). \quad (69)$$

Из (50), (52), (58) и (64) следует, что амплитуды гармоник потенциалов и нормальных составляющих магнитной индукции на границах однородной подобласти связаны между собой линейно. Имея решение полевой задачи (13)–(69) для элементарной однородной подобласти  $F^{(ij)}$ , распределение потенциала и магнитной индукции в кусочно-однородной области  $F$  можно получить, полагая на границах смежных однородных областей равными потенциалы и нормальные составляющие магнитной индукции. В статье использованы изображения функций на границах в виде разложений в ряды Фурье нечетным образом — (15)–(18), (51), (57), (63) и (69). В этом случае некоторые функции  $T(y)$  и  $W(y)$  имеют изображения:

$$T(y) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m \sin\left(\frac{m\pi}{\Delta^{(1)}} y\right); \quad (70)$$

$$W(y) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta^{(2)}} y\right). \quad (71)$$

Для идентичности (70) и (71) необходимо и достаточно иметь

$$\Delta^{(1)} = \Delta^{(2)}; \quad (72)$$

$$T_m = W_n, \quad (73)$$

$$m \equiv n. \quad (74)$$

Тогда

$$T(y) = W(y). \quad (75)$$

Для однородных подобластей, имеющих на смежных границах одинаковые размеры (рис. 3), условие (72)

имеет вид:

$$h^{(i; i-1)} = h^{(ij)} = h^{(i; i+1)} = h; \quad (76)$$

$$\Delta^{(i-1; i)} = \Delta^{(ij)} = \Delta^{(i+1; i)} = \Delta. \quad (77)$$

Для элементарной однородной подобласти  $F^{(ij)}$  (рис. 3) с учетом (72)–(74).

Граница  $[i; j-1] [ij]$ .

Условие тождества индексов суммирования

$$k \equiv l \equiv \alpha. \quad (78)$$

Условие равенства потенциалов

$$R_l^{(i; i-1)} = V_k^{(ij)} = P_\alpha^{[i; i-1] [ij]}. \quad (79)$$

Условие равенства нормальных составляющих магнитной индукции

$$b_l^{(i; i-1)} = b_k^{(ij)} = b_\alpha^{[i; i-1] [ij]}. \quad (80)$$

Граница  $[ij] [i; j+1]$

$$k \equiv l \equiv \alpha; \quad (81)$$

$$R_l^{(ij)} = V_k^{(i; i+1)} = P_\alpha^{[ij] [i; i+1]}; \quad (82)$$

$$b_l^{(ij)} = b_k^{(i; i+1)} = b_\alpha^{[ij] [i; i+1]}. \quad (83)$$

Граница  $[i-1; j] [ij]$ :

$$n \equiv m \equiv \beta; \quad (84)$$

$$W_n^{(i-1; i)} = T_m^{(ij)} = P_\beta^{[i-1; i] [ij]}; \quad (85)$$

$$b_n^{(i-1; i)} = b_m^{(ij)} = b_\beta^{[i-1; i] [ij]}. \quad (86)$$

Граница  $[ij] [i+1; j]$ :

$$n \equiv m \equiv \beta; \quad (87)$$

$$W_n^{(ij)} = T_m^{(i+1; i)} = P_\beta^{[ij] [i+1; i]}; \quad (88)$$

$$b_n^{(ij)} = b_m^{(i+1; i)} = b_\beta^{[ij] [i+1; i]}. \quad (89)$$

Для однородных подобластей, имеющих на смежных границах разные, но удовлетворяющие условиям разби-

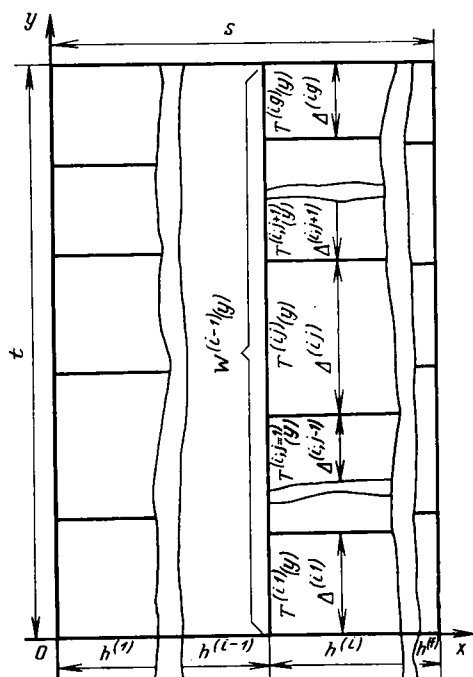


Рис. 4. Расчетная схема границы между слоями  $h^{(i-1)}$  и  $h^{(i)}$  (смежные области имеют на границе различные размеры)

ния области  $F$  размеры (рис. 1), необходимо сопрягаемые функции (15) — (18); (51), (57), (63) и (69) привести к одному пространственному периоду, что сводится к разложению на некотором отрезке  $t$  в ряд Фурье нечетным образом функции, заданной кусочно на некоторых отрезках  $\Delta^{(j)}$ , причем

$$t = \sum_{j=1}^g \Delta^{(j)}, \quad (90)$$

или разложению на некотором отрезке  $\Delta^{(j)}$  в ряд Фурье нечетным образом функции, заданной на некотором отрезке  $t$ , причем  $\Delta^{(j)}$  лежит внутри  $t$ .

Рассмотрим границу между слоями  $h^{(i-1)}$  и  $h^{(i)}$  (рис. 4). Разложим нечетно на отрезке  $t$  в ряд Фурье функцию, заданную кусочно, следующим образом:

$$T(y) = T_1(y) + \dots + T^{(j)}(y) + \dots + T^{(g)}(y) \quad (91)$$

$j$ -й член (91)

$$T^{(j)}(y) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m^{(j)} \sin \left[ \frac{m\pi}{\Delta^{(j)}} \left( y - \sum_{i=1}^{j-1} \Delta^{(i)} \right) \right]. \quad (92)$$

Разложение в ряд Фурье функции (91) имеет вид:

$$T(y) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \sin \left( \frac{n\pi}{t} y \right); \quad (93)$$

$$T_n = \frac{2}{t} \times$$

$$\times \int_0^t \left[ T^{(1)}(y) + \dots + T^{(j)}(y) + \dots + T^{(g)}(y) \right] \times \sin \left( \frac{n\pi}{t} y \right) dy. \quad (94)$$

Из (92) и (94)  $j$ -й член  $T_n$

$$T_n^{(j)} = \sum_{m=1}^{\infty} T_m^{(j)} \int_{\sum_{i=1}^{j-1} \Delta^{(i)}}^{\sum_{i=1}^j \Delta^{(i)}} \frac{2}{t} \sin \left[ \frac{m\pi}{\Delta^{(j)}} \left( y - \sum_{i=1}^{j-1} \Delta^{(i)} \right) \right] \times \sin \left( \frac{n\pi}{t} y \right) dy. \quad (95)$$

Интеграл (95)

$$D_{nm1}^{(j)} = \frac{2mn}{t\Delta^{(j)}} \times \frac{(-1)^{m+1} \sin \left[ \frac{n\pi}{t} \sum_{i=1}^j \Delta^{(i)} \right] + \sin \left[ \frac{n\pi}{t} \sum_{i=1}^{j-1} \Delta^{(i)} \right]}{\left( \frac{m\pi}{\Delta^{(j)}} \right)^2 - \left( \frac{n\pi}{t} \right)^2} \quad (96)$$

при  $\frac{n\pi}{t} \neq \frac{m\pi}{\Delta^{(j)}}$ ;

$$D_{nm2}^{(j)} = -\frac{\Delta^{(j)}}{t} \cos \left[ \frac{m\pi}{\Delta^{(j)}} \sum_1^{j-1} \Delta^{(i)} \right] \quad (97)$$

при  $\frac{n\pi}{t} = \frac{m\pi}{\Delta^{(j)}}$ .

С учетом (96) и (97) из (95) получим:

$$T_n^{(j)} = \sum_{m=1}^{\infty} T_m^{(j)} D_{nm}^{(j)}. \quad (98)$$

Из (94) с учетом (98) получим:

$$T_n = \sum_{m=1}^{\infty} T_m^{(1)} D_{nm}^{(1)} + \dots + \sum_{m=1}^{\infty} T_m^{(j)} D_{nm}^{(j)} + \dots + \sum_{m=1}^{\infty} T_m^{(g)} D_{nm}^{(g)} \quad (99)$$

или

$$T_n = \sum_{j=1}^g \sum_{m=1}^{\infty} T_m^{(j)} D_{nm}^{(j)}. \quad (100)$$

С учетом (100) искомым ряд Фурье (93) имеет вид:

$$T(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{j=1}^g \sum_{m=1}^{\infty} T_m^{(j)} D_{nm}^{(j)} \right] \sin \left( \frac{n\pi}{t} y \right). \quad (101)$$

Разложим нечетным образом на отрезке  $\Delta^{(j)}$  в ряд Фурье функцию, заданную на отрезке  $t$ :

$$W(y) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin \left( \frac{n\pi}{t} y \right). \quad (102)$$

Искомый ряд имеет вид:

$$W^{(j)}(y) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m^{(j)} \left[ \frac{m\pi}{\Delta^{(j)}} \left( y - \sum_1^{j-1} \Delta^{(i)} \right) \right]; \quad (103)$$

$$W_m^{(j)} = \frac{2}{\Delta^{(j)}} \int_{\sum_1^{j-1} \Delta^{(i)}}^{\sum_1^j \Delta^{(i)}} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin \left( \frac{n\pi}{t} y \right) \right] \times \sin \left[ \frac{m\pi}{\Delta^{(j)}} y - \sum_1^{j-1} \Delta^{(i)} \right] dy. \quad (104)$$

Интеграл (104)

$$\left. \begin{aligned} G_{mn1}^{(j)} &= \frac{2m\pi}{(\Delta^{(j)})^2} \frac{(-1)^{m+1} \sin \left[ \frac{n\pi}{t} \sum_1^j \Delta^{(i)} \right] + \left[ \frac{n\pi}{t} \sum_1^{j-1} \Delta^{(i)} \right]}{\left( \frac{m\pi}{\Delta^{(j)}} \right)^2 - \left( \frac{n\pi}{t} \right)^2}; \\ \frac{n\pi}{t} &\neq \frac{m\pi}{\Delta^{(j)}}; \\ G_{mn2}^{(j)} &= \cos \left[ \frac{m\pi}{\Delta^{(j)}} \sum_1^{j-1} \Delta^{(i)} \right] \text{ при } \frac{n\pi}{t} = \frac{m\pi}{\Delta^{(j)}}; \\ W_m^{(j)} &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n G_{mn}^{(j)}. \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

Ряд (103) у учетом (105) и (106) имеет вид:

$$W^{(j)}(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} W_n G_{mn}^{(j)} \right] \sin \left[ \frac{m\pi}{\Delta^{(j)}} \left( y - \sum_1^{j-1} \Delta^{(i)} \right) \right]. \quad (107)$$

Соотношения (90)–(107) носят общий характер и при необходимости могут быть использованы (при соответствующих изображениях функций и геометрических размерах смежных областей) для сопряжения потенциалов и нормальных составляющих магнитной индукции на любой внешней или внутренней границе области  $F$ .

Функция  $W^{(i-1)}(y)$  может быть образована разложением в ряд Фурье нечетным образом на отрезке  $t$  функций, заданных кусочно на границах подобластей  $F^{(i-1)}(j)$ , лежащих на границе слоев  $h^{(i-1)}$  и  $h^{(i)}$ .

Из рассмотрения (50), (52), (58), (64), (93) и (100) следует, что каждая гармоника потенциала, расположенного вдоль расточки статора на ее границе с воздушным зазором, возбуждает одну и только одну гармонику магнитной индукции на поверхности ротора. В создании каждой гармоники этого потенциала принимает участие весь спектр потенциалов, расположенных на торцах зубцов и гранях магнитных клиньев, обращенных к воздушному зазору.

Ряды (51), (57), (63) и (69) сходятся медленно, а на границах, где потенциалы заданы линейными функциями, имеют расходящиеся члены, содержащие гиперболический котангенс. Ряды для тангенциальных составляющих магнитной индукции (30), (32), (34) и (36) расходятся. Частные суммы этих рядов могут быть плохим приближением функций. Вполне удовлетворительным приближением для рядов (51), (57), (63), (69), (30), (32), (34), (39) при известных гармониках потенциалов  $V_k$ ,  $R_k$ ,  $T_m$  и  $W_n$  являются средние арифметические их частных сумм [20. В этом случае ряд

$$\Gamma = B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_r + \dots \quad (108)$$

приближается некоторой суммой

$$\sigma_r = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_r}{r}, \quad (109)$$

где

$$\Gamma_r = B_1 + B_2 + \dots + B_r, \quad (110)$$

$\Gamma_r$  — частная сумма  $r$  [членов ряда (108);  $\sigma_n$  — среднее арифметическое частных сумм.

Ряды для нормальных составляющих магнитной индукции, например (37), приближаются суммой:

$$B_y(x; 0) = \sum_{k=1}^{k=r} \frac{r - (k-1)}{r} b_k \sin \left( \frac{k\pi}{h} x \right). \quad (111)$$

Ряды для тангенциальных составляющих магнитной индукции, например (30), приближаются суммой

$$B_x(x; 0) = \sum_{k=1}^{k=r} \frac{r - (k-1)}{r} b_{\tau k} \cos \left( \frac{k\pi}{h} x \right); \quad (112)$$

$b_{\tau k}$  —  $k$ -я гармоника тангенциальной составляющей магнитной индукции.

На внешних границах кусочно-однородной области  $F$ , содержащих постоянные потенциалы ( $V = \text{const}$ ;  $R = \text{const}$ ;  $T = \text{const}$  или  $W = \text{const}$ ), для определения нормальной составляющей магнитной индукции может

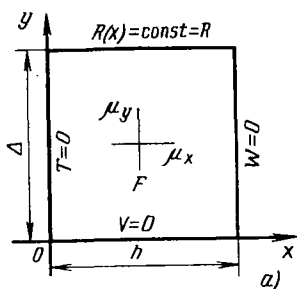
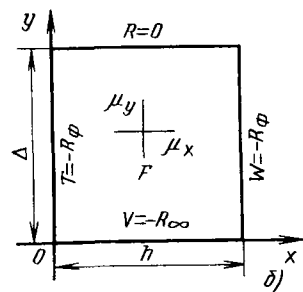


Рис. 5. Расчетная схема полевой задачи при однородных краевых условиях:  $T=0$ ;  $V=0$ ;  $W=0$



быть применен искусственный прием. Рассмотрим однородную задачу (рис. 5, а):

$$R(x) = \sum_{l=1}^{\infty} R_l \sin\left(\frac{l\pi}{h}x\right); \quad (18)$$

$$R_l = \frac{2R}{l\pi} [1 - (-1)^l]. \quad (113)$$

Ряд для нормальной составляющей магнитной ин-

дукции на границе  $y = \Delta$

$$B_y(x; \Delta) = \sum_{l=1}^{\infty} \mu_y \frac{2R}{h} [(-1)^l - 1] \sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{\mu_y}{\mu_x}} \frac{l\pi\Delta}{h}\right) \times \sin\left(\frac{l\pi}{h}x\right). \quad (114)$$

Ряд (114) — расходящийся.

Приложим к границам области  $F$  потенциалы

$$-R_\Phi = \text{const}. \quad (115)$$

Получим задачу по рис. 5, б, где на границе  $y = \Delta$

$$R = 0. \quad (116)$$

Очевидно, поле внутри области  $F$  при этом не изменится (поскольку разность потенциалов между любыми ее точками сохраняется), и задачи по рис. 4, а и б физически эквивалентны.

Используя (52), получим при  $R_l = 0$  для  $l$ -й гармоники нормальной составляющей магнитной индукции на границе  $y = \Delta$  (рис. 4, б):

$$b_l = Q_l V_{\Phi l} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n M_{ln} W_{\Phi n} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m N_{lm} T_{\Phi m}; \quad (117)$$

$$V_{\Phi l} = \frac{2R_\Phi}{2\pi} [(-1)^l - 1]; \quad (118)$$

$$W_{\Phi n} = \frac{2R_\Phi}{n\pi} [(-1)^n - 1]; \quad (119)$$

$$T_{\Phi m} = \frac{2R_\Phi}{m\pi} [(-1)^m - 1]. \quad (120)$$

Из выражений (54) для  $Q_l$ , (55) для  $M_{ln}$  и (56) для  $N_{lm}$  следует, что ряд (57) с использованием (117) является сходящимся, и определение из него нормальной составляющей магнитной индукции на границе  $y = \Delta$  вполне возможно. При наличии потенциалов (15) — (17) на границах  $y=0$ ;  $x=0$ ;  $x=h$  и потенциала  $R=\text{const}$  на границе  $y=\Delta$  применение этого приема дает:

$$b_l = Q_l (V_l + V_{\Phi l}) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n M_{ln} (W_n + W_{\Phi n}) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m N_{lm} (T_m + T_{\Phi m}). \quad (121)$$

Однако и в этом случае к ряду (57), где используется выражение (121), применение метода средних арифметических частных сумм (111) оказывается полезным, поскольку ряды Фурье сходятся медленно.

При наличии постоянного потенциала на других границах выражения для гармоник нормальных составляющих магнитной индукции (50), (58) и (69) применением аналогичного приема могут быть приведены к виду (121). Проиллюстрируем методы использования полученных соотношений несложным примером расчета магнитного поля на зубцовом делении воздушного зазора между ротором и статором для электрической машины с  $\mu=\text{const}$  (рис. 6). Ротор гладкий, потенциал его равен нулю (случай идеального холостого хода). Потенциалы зубцов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  произвольны, но постоянны. Падение потенциала внутри зубцов не учитывается ( $\mu=\infty$ ), и области  $F^{(21)}$ ;  $F^{(31)}$ ;  $F^{(23)}$ ;  $F^{(33)}$  не рассматриваются.

Границы [22] [32].

Используя соотношения (84) — (86). Из (86) с учетом (58) и (64) получим:

$$\sum_{l=1}^{\infty} A_{nl}^{(22)} R_l^{(22)} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k E_{nk}^{(22)} V_k^{(22)} + (-1)^n Y_n^{(22)} W_n^{(22)} + I_n^{(22)} T_n^{(22)} = \sum_{l=1}^{\infty} A_{ml}^{(32)} R_l^{(32)} + \sum_{k=1}^{\infty} E_{mk}^{(32)} V_k^{(32)} + (-1)^m I_m^{(32)} W_m^{(32)} + Y_m^{(32)} T_m^{(32)}. \quad (122)$$

Из (122) с учетом (84) и (85) получим:

$$P_p^{[22][32]} = \frac{\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l A_{\beta l}^{(22)} R_l^{(22)} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k E_{\beta k}^{(22)} V_k^{(22)} + I_{\beta}^{(22)} T_{\beta}^{(22)}}{Y_{\beta}^{(22)} + Y_{\beta}^{(32)}} +$$

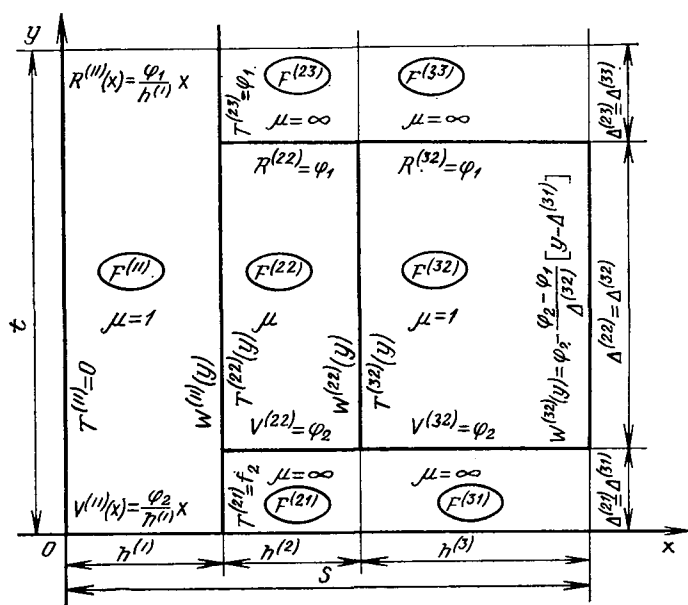


Рис. 6. Расчетная схема для расчета магнитного поля на зубцовом делении воздушного зазора между ротором и статором для электрической машины с открытыми пазами статора и магнитными клиньями

$$\frac{\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l A_{\beta l}^{(32)} R_l^{(32)} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k E_{\beta k}^{(32)} V_k^{(32)} + I_{\beta}^{(32)} W_{\beta}^{(32)}}{Y_{\beta}^{(22)} + Y_{\beta}^{(32)}} \quad (123)$$

Граница [11] [21; 22; 23]. Используются соотношения (91) — (107) применительно к потенциалам и нормальным составляющим магнитной индукции и (84) — (86). Для нормальной составляющей магнитной индукции в области  $F^{(11)}$  на участке  $\Delta^{(22)}$  рассматриваемой границы из (102) — (107) получим:

$$b_{\beta}^{(11)(22)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(11)} G_{\beta n}^{(22)}. \quad (124)$$

С учетом (64) из (124) получим:

$$b_{\beta}^{(11)(22)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l A_{nl}^{(11)} R_l^{(11)} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k E_{nk}^{(11)} V_k^{(11)} + (-1)^n Y_n^{(11)} W_n^{(11)} \right] G_{\beta n}^{(22)}. \quad (125)$$

Из (58) имеем:

$$b_{\beta}^{(22)} = \sum_{l=1}^{\infty} A_{\beta l}^{(22)} R_l^{(22)} + \sum_{k=1}^{\infty} E_{\beta k}^{(22)} V_k^{(22)} + (-1)^l I_{\beta}^{(22)} P_{\beta}^{[22][32]} + Y_{\beta}^{(22)} T_{\beta}^{(22)}. \quad (126)$$

Из (125) и (126) получим:

$$T_{\beta}^{(22)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l A_{nl}^{(11)} R_l^{(11)} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k E_{nk}^{(11)} V_k^{(11)} + (-1)^n Y_n^{(11)} W_n^{(11)} \right] G_{\beta n}^{(22)}}{Y_{\beta}^{(22)}} + \frac{\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l A_{\beta l}^{(22)} R_l^{(22)} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k E_{\beta k}^{(22)} V_k^{(22)} + I_{\beta}^{(22)} P_{\beta}^{[22][32]}}{Y_{\beta}^{(22)}}. \quad (127)$$

Из (101) с учетом (85)

$$W_n^{(11)} = \sum_{\beta=1}^{\infty} T_{\beta}^{(21)} D_{n\beta}^{(21)} + \sum_{\beta=1}^{\infty} T_{\beta}^{(22)} D_{n\beta}^{(22)} + \sum_{\beta=1}^{\infty} T_{\beta}^{(23)} D_{n\beta}^{(23)}. \quad (128)$$

Гармоники неизвестных потенциалов  $W_n^{(11)}$ ,  $P_{\beta}^{[22][32]}$  и  $T_{\beta}^{[22]}$  определяются из бесконечной системы линейных уравнений (123), (127) и (128). Точность приближения искомых функций (число определяемых гармоник) зависит от мощности имеющейся в наличии вычислительной техники. Гармоники известных потенциалов на внешних границах определяются без затруднений. Имея в виду, что

$$W_n^{(22)} = T_m^{(32)} = P_{\beta}^{[22][32]}, \quad (129)$$

по найденным из (123), (127) и (128) гармоникам потенциалов с помощью уравнений (14), (27) и (28) могут быть найдены в любой точке кусочно-однородной области  $F$  потенциал, нормальная и тангенциальная составляющие магнитной индукции. На границах следует применить уравнения (29) — (36), (51), (57), (63) и (69) с использованием метода средних арифметических сумм

(111), (112). При вычислении нормальной составляющей магнитной индукции на границах [21; 22]; [22; 23]; [31; 32] и [32; 33], содержащих  $\varphi = \text{const}$ , необходимо применять искусственный прием (121).

На поверхности ротора нормальная составляющая магнитной индукции описывается уравнением

$$B_x(0; y) = \sum_{l=1}^{\infty} \mu_0 \frac{2\varphi_1}{h^{(1)}} \frac{(-1)^l}{\text{sh}\left(\frac{l\pi t}{h^{(1)}}\right)} \text{sh}\left(\frac{l\pi}{h^{(1)}} y\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 \frac{2\varphi_2}{h^{(1)}} \frac{(-1)^k}{\text{sh}\left(\frac{k\pi t}{h^{(1)}}\right)} \text{sh}\left[\frac{k\pi}{h^{(1)}} (t-y)\right] - \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0 \frac{n\pi}{t} \times \frac{W_n^{(1)}}{\text{sh}\left(\frac{n\pi h^{(1)}}{t}\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{t} y\right) \quad (130)$$

или разложением (130) в ряд Фурье

$$B_x(0; y) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_0 b_m^{(11)} \sin\left(\frac{m\pi}{t} y\right); \quad (131)$$

$$b_m^{(11)} = \sum_{l=1}^{\infty} A_{ml}^{(11)} R_l^{(11)} + \sum_{k=1}^{\infty} E_{mk}^{(11)} V_k^{(11)} + (-1)^m I_m^{(11)} W_m^{(11)}. \quad (132)$$

При вычислении частных сумм, приближающих функции (130) и (131), следует воспользоваться методом средних арифметических (111).

На рис. 7 и 8 приведены результаты расчета поля по уравнению (130). Увеличение магнитной проницаемости клина ведет к уменьшению провала кривой маг-

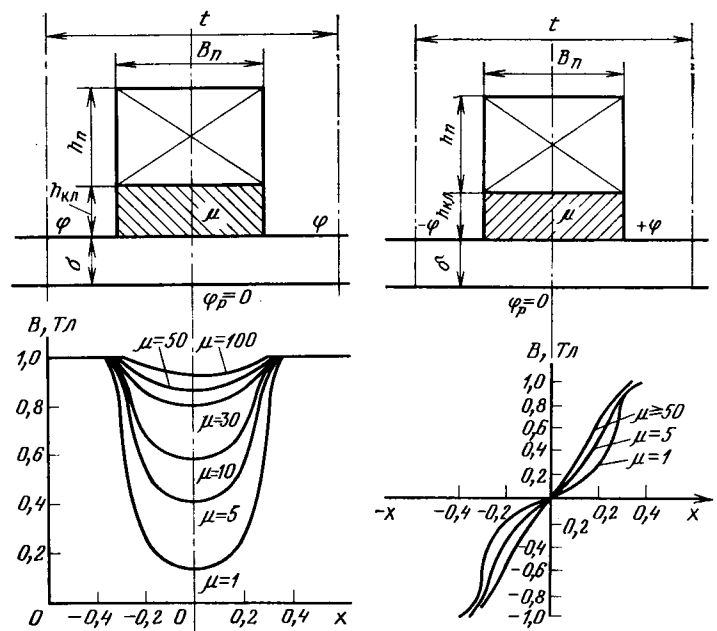


Рис. 7. Распределение магнитной индукции на гладкой поверхности ротора под открытым пазом без тока (изотропный магнитный клин,  $\mu_x = \mu_y = \mu$ ;  $\varphi = 796$  А;  $\delta = 0,1$  см;  $h_n = 3$  см;  $h_{кл} = 0,2$  см;  $b_n = 0,6$  см; идеальный холостой ход  $\varphi_p = 0$ )

Рис. 8. Распределение магнитной индукции на гладкой поверхности ротора под открытым пазом с током (изотропный магнитный клин,  $\mu_x = \mu_y = \mu$ ;  $\varphi = 796$  А;  $\delta = 0,1$  см;  $h_n = 3$  см;  $t = 2$  см;  $h_{кл} = 0,2$  см;  $b_n = 0,6$  см; идеальный холостой ход  $\varphi_p = 0$ )

нитной индукции под пазом без тока (рис. 7) и спрямлению ее под пазом с током (рис. 8). Для паза без тока наиболее эффективно влияние клина при  $1 < \mu < 15$ . Дальнейшее увеличение  $\mu$  сказывается меньше. На форму кривой магнитной индукции под пазом, занятым током, величина  $\mu$  влияет мало.

Имея распределение потенциалов по зубцам статора, которое для заданной схемы обмотки всегда известно, и, решая последовательно задачу для каждого зубцового деления, можно построить поле в воздушном зазоре вдоль всей расточки статора.

При использовании современной вычислительной техники приведенный выше алгоритм позволяет решать полевую задачу для воздушного зазора между ротором и статором практически для любой разумной степени детализации структуры активной зоны (двусторонняя зубчатость, открытые и полузакрытые пазы с магнитными клиньями, учет нелинейных эффектов в ферромагнетиках и т. д.).

Следует подчеркнуть, что уравнения, «стыкующие» кусочно-однородные зоны, получаются путем стандартных операций (78) — (89) и (90) — (107) и имеют вид (123), (127) и (128). Процесс их составления можно автоматизировать.

Поскольку решение является аналитическим, на основе его можно получить формулы для расчета параметров зубцовой зоны (коэффициента воздушного зазора, пазового и дифференциального рассеяния), сил, действующих на магнитные клинья, а также гармонического состава магнитного поля.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Макаров Ф. К. Электрические машины переменного тока с магнитными клиньями. — М.: Энергоиздат, 1981.
2. Diamant P. The high efficiency induction machine of the 1980's. — IEEE Trans. on PAS, PAS-100, N 12, December 1981.
3. Hausike K. Efficiency improvement studies of low voltage three phase squirrel-cage induction motors for general purpose. — IEEE Trans. on PAS, vol. PAS-102, N 12, Desember 1983.
4. Kato K. et al. Analytical and experimental study for reducing high frequency pulsation losses caused by the existance of armature open slots, using magnetic slot wedges. — The Trans. of the Inst. of Electr. Engineers of Japan, vol. 102—13. N 10, October 1982.

5. А. с. 550724 (СССР). Магнитный клин / Ф. К. Макаров, В. Д. Герасимов, А. С. Петров и др. — Оpubл. в Б. И., 1977, № 10.
6. А. с. 997108 (СССР). Магнитодиэлектрическая масса / И. В. Белякова, Ф. К. Макаров, И. Я. Каплунов и др. — Оpubл. в БИ, 1983, № 6.
7. Коломейцев Л. В., Ротыч В. В., Секретов Д. И. Определение коэффициента воздушного зазора при магнитном клине. — Изв. вузов. Электромеханика, 1966, № 2.
8. Kubricht J. Carter's coefficient with a magnetic wedge. — Acta Technica CSAV, 1971, N 6.
9. Данилевич Л. В. К расчету электрических машин с магнитными клиньями в пазах статора. — Изв. АН СССР. Энергетика и автоматика, 1961, № 6.
10. Штанько В. И., Ракицкий Л. Б. Определение проводимости воздушного зазора при магнитокапсулированных пазах. — Проблемы технической электродинамики. Киев, Наукова думка, 1974, № 46.
11. Макаров Ф. К., Бычков В. С., Недорезова М. С. Магнитное поле в зубцовой зоне электрической машины с полузакрытыми пазами и магнитными клиньями при односторонней зубчатости. — Электротехника, 1978, № 7.
12. Кокле Ю. А. Магнитное поле в зазоре индукторной машины с классической зубцовой зоной. — В кн.: Бесконтактные электрические машины. Рига, Зинанте, 1967.
13. Иванов-Смоленский А. В., Мнакацян М. С. Аналитический метод расчета магнитного поля в воздушном зазоре электрических машин с односторонней зубчатостью. — Электричество, 1972, № 3.
14. Коломейцев Л. Ф., Ротыч Ю. В., Долгошеев А. Т. Расчет поля воздушного зазора асинхронной машины с учетом двусторонней зубчатости. — Изв. вузов. Электромеханика, 1974, № 1.
15. Карасев А. В. Аналитический метод расчета магнитного поля в кусочно-однородных средах. — Электричество, 1984, № 12.
16. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. — М.: Изд. АН СССР, 1948.
17. Сорокер Т. Г. Поле в зазоре асинхронного двигателя и связанные с ним реактивные сопротивления. — Труды ВНИИЭМ, 1976, т. 45.
18. Аспит В. В., Лапшин В. К. Магнитное поле в ферромагнитной области, намагниченной в преимущественном направлении. — В кн.: Бесконтактные электрические машины, 13. Рига: Зинанте, 1974.
19. Лапшин В. К. Сравнительный анализ результатов расчетов магнитного поля в зубце постоянной ширины различными методами. — В кн.: бесконтактные электрические машины, 13. Рига: Зинанте, 1974.
20. Толстов Г. П. Ряды Фурье. — М.: Наука, 1980.

[24.12.86]

## Вниманию руководителей организаций и предприятий!

В Энергоатомиздате в мае 1987 г. выходят бланки-заказы на плакаты по электробезопасности (включая предупреждающие, запрещающие, предписывающие, указательные); плакаты по экономии электрической и тепловой энергии.

Плакаты по электробезопасности иллюстрируют основные положения правил по технике безопасности, напоминают о мерах и приемах безопасной работы на электрических станциях и подстанциях, в энергетических системах, электроустановках промышленных предприятий и промышленной теплоэнергетике, на предприятиях электрической промышленности, при пользовании электроэнергией в сельском хозяйстве и быту.

Плакаты по экономии электрической и тепловой энергии призывают экономить электроэнергию, топливо, показывают пути и средства их рационального расходования.

Бланк-заказ высылается издательством бесплатно по запросам организаций. В нем приведен полный перечень плакатов, а также указаны условия их получения и порядок оформления заказов.

За получением бланка-заказа следует обращаться по адресу: 113114 Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10. Энергоатомиздат. Отдел распространения. Телефон для справок: 235-39-27.

Своевременно оформляйте заказы!

## Оценка энергетических процессов по мгновенной мощности

КРОГЕРИС А. Ф., РАШЕВИЦ К. К., ТРЕЙМАНИС Э. П., ШИНКА Я. К.

Физико-энергетический институт АН Латв. ССР

Согласно теории электромагнитного поля мгновенная электрическая мощность — это мощность потока энергии. Она определяется как интеграл вектора Умова — Пойнтинга  $\vec{P}$  по всей поверхности  $S$ , пересекающей пространство занимаемой электромагнитным полем в заданном месте системы

$$p = \oint_S \vec{P} d\vec{S} = \oint_S [\vec{E} \vec{H}] d\vec{S},$$

и характеризует как направление, так и количество передаваемой в единицу времени энергии. В случае однофазной системы мгновенная мощность потока энергии электромагнитного поля согласно общей теории цепей тождественно отражается произведением мгновенных значений тока и напряжения —  $p = ui$  и все энергетические показатели, определенные непосредственно на ее основе, при любых формах тока и напряжения характеризуют реальные физические процессы, происходящие в электромагнитном поле. Если электрическая цепь содержит индуктивные и емкостные накопители, в результате обмена энергии мгновенная мощность может принять также отрицательные значения. На это впервые в 1981 г. указал Ц. Пулье в докладе «О самоиндукции и ее действии». Позже, в 1933 г. В. Пратт предложил использовать усредненные значения положительных  $P_{(+)}$  и отрицательных  $P_{(-)}$  полуоволн мгновенной мощности для оценки энергетических процессов в синусоидальных линейных цепях с реактивными элементами. Более глубокий анализ энергетических процессов, характеризующихся мгновенной мощностью, провели Р. Трегер в 1953 г., а потом Г. Обердорфер, Г. Кулиговский, Л. Бычков, К. Демирчян, Ф. Жарков, С. Койков и др.

В данной статье предложен подход к оценке энергетических процессов в несинусоидальных и нелинейных системах, если известны функции изменения мгновенных мощностей потоков энергии, обменивающихся между системой и потребителем, между активными и реактивными элементами потребителя, а также на основе оценки колебаний энергии и ее составляющих в рассматриваемом месте системы.

Для анализа процессов передачи энергии от системы к потребителю рассмотрим периодическую функцию мгновенной мощности любой формы. В общем случае функция мгновенной мощности на входе однофазного потребителя может принимать как положительные, так и отрицательные и нулевые значения (рис. 1):

1) энергия положительного направления  $W_{(+)}$  — энергия подступающая из системы к потребителю в течение каждого полупериода ( $T/2$ ), т. е.

$$W_{(+)} = \sum_n W_{(+n)} = \sum_n \int_{t_{(+n)}}^{t_{(+n)} + \Delta t_{(+n)}} |p| dt;$$

2) энергия отрицательного направления  $W_{(-)}$  — энергия, которую потребитель в течение каждого полупе-

риода отдает обратно в систему, т. е.

$$W_{(-)} = \sum W_{(-n)} = \sum \int_{t_{(-n)}}^{t_{(-n)} + \Delta t_{(-n)}} p dt.$$

Разница этих двух энергий представляет собой ту энергию, которая в потребителе превращается в другие виды энергии —

$$W = W_{(+)} - |W_{(-)}| = \int_0^{T/2} p dt,$$

а их сумма — в энергию, которая нагружает систему —

$$W_c = W_{(+)} + |W_{(-)}| = \int_0^{T/2} |p| dt.$$

Если из этой суммарной энергии системы  $W_c$  вычесть использованную потребителем энергию  $W$ , то получим энергию  $W_\infty$ , которая циркулирует между системой и потребителем, не совершая работы:

$$W_\infty = W_c - W = 2 W_{(-)} = \int_0^{T/2} (|p| - p) dt.$$

Вся энергия  $W_{(+)}$ , поступающая из системы к потребителю, в общем случае может быть разделена на два потока: поток, который временно накапливается в поле  $W_n$ , и поток, который используется непосредственно  $W_{(+)} - W_n$ . Энергия, накопленная в поле  $W_n$ , в свою очередь, может разделяться также на два потока: поток, который возвращается обратно в систему ( $W_{(-)}$ ), и поток, использованный потребителем и превращенный в работу ( $W_n - W_{(-)}$ ).

Соответствующая этому упрощенная картина потоков энергии в потребителе с накопителем приведена на рис. 2. С использованием этих составляющих энергии, рассчитанных по кривой мгновенной мощности, предложены коэффициенты для оценки эффективности использования энергии (табл. 1):

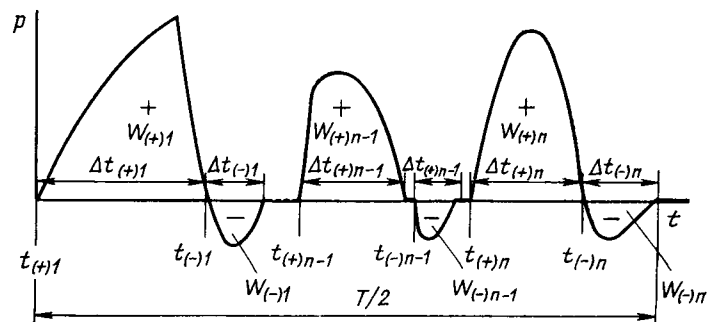


Рис. 1. Кривая мгновенной мощности на входе потребителя

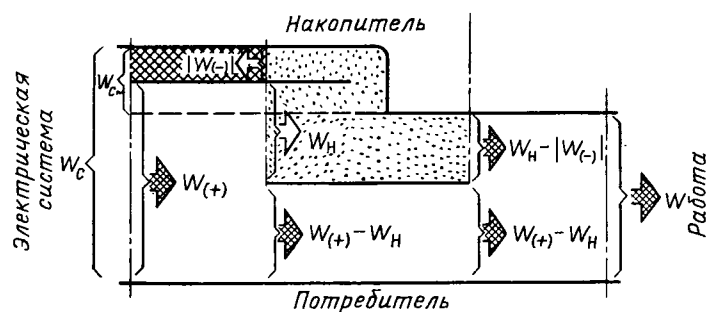


Рис. 2. Диаграмма передачи электрической энергии к потребителю с накопителем

- 1) коэффициент эффективности использования энергии системы  $\psi_c$ ;
- 2) коэффициент использования энергии в потребителе  $\psi_H$ ;
- 3) коэффициент использования энергии, накопленной в поле потребителя  $\psi_H$ .

Выражения для определения этих коэффициентов в общем случае даны в табл. 1. Там же для сравнения приведены выражения для определения этих коэффициентов в однофазном синусоидальном режиме.

Кривая мгновенной мощности непосредственно несет информацию о размерах и характере колебания потока энергии в заданном месте системы. Чем меньше колебания потока энергии в системе, тем меньше потери при передаче энергии и тем более эффективно с энергетической точки зрения работает система. Поэтому в качестве одного из критериев оценки энергетической эффективности системы может быть принята также величина относительного колебания потока энергии. Величина энергии, которая колеблется около уровня ее среднего значения

$$W_{K.C} = \int_0^{T/2} |p - P| dt.$$

Для потребителей, которые кроме активных содержат также и реактивные элементы, полезной может оказаться информация не о колебаниях всей энергии  $W_{K.C}$ , а о колебании только активной составляющей  $W_{K.A}$ , определяемой по составляющей мгновенной мощ-

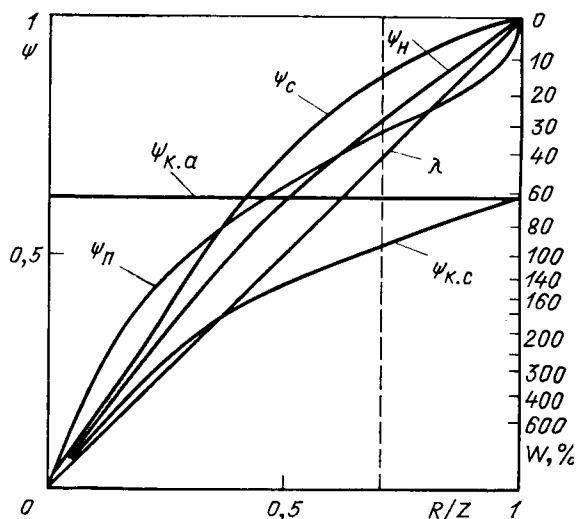


Рис. 3. Изменение энергетических коэффициентов для линейного потребителя в однофазной синусоидальной системе

ности  $p_a$  на активном элементе

$$W_{K.A} = \int_0^{T/2} |p_a - P| dt.$$

По аналогии с приведенными выше коэффициентами с учетом этих составляющих энергии предложены выражения для коэффициента, степени колебания энергии в системе  $\psi_{K.C}$  и коэффициента колебания активной энергии в потребителе  $\psi_{K.A}$ , приведенные также в табл. 1. Подробный анализ назначения каждого коэффициента дан в [1—3].

Для того чтобы показать, какую информацию для оценки энергетических процессов представляют предложенные коэффициенты, рассмотрим их изменения в синусоидальных системах в зависимости от характера нагрузки потребителя. Последний определим как соотношение активного сопротивления  $R$  к полному сопротивлению нагрузки  $Z$ . Изменение предложенных коэффициентов для такого линейного потребителя отражают кривые, приведенные на рис. 3. При оценке энергетических процессов по этим коэффициентам необходимо

Таблица 1

Энергетические коэффициенты однофазной системы

Коэффициент	Выражение для определения коэффициента	
	в общем виде	в синусоидальном режиме
Эффективность использования энергии системы	$\psi_c = \frac{W}{W_c} = \frac{1}{1 + \frac{W_c}{W}}$	$\psi_c = \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{ev} \varphi}$
Эффективность использования энергии в потребителе	$\psi_H = \frac{W}{W + W_H} = \frac{1}{1 + W_H/W}$	$\psi_H = \frac{1}{1 + \frac{1}{\pi} \operatorname{tg}  \varphi }$
Эффективность использования энергии, накопленной в поле	$\psi_H = \frac{W_H - W_{(-)}}{W_H}$	$\psi_H = \varphi \operatorname{ctg}  \varphi $
Степень колебаний энергии в системе	$\psi_{K.C} = \frac{W}{W + W_{K.C}} = \frac{1}{1 + W_{K.C}/W}$	$\psi_{K.C} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\cos \varphi}}$
Степень колебаний активной энергии в потребителе	$\psi_{K.A} = \frac{W}{W + W_{K.A}} = \frac{1}{1 + W_{K.A}/W}$	$\psi_{K.A} = \frac{1}{1 + 2/\pi} \approx 0,611$

иметь в виду, что они (кроме  $\psi_n$ ) могут нести также информацию о соотношениях отдельных потоков энергии, непосредственно выраженную в процентах. Следует учесть, что каждый из них характеризует различные аспекты энергетических процессов, и в ряде случаев для полноты оценки необходимо привлекать и уже известные показатели (такие как степени искажения формы кривой, гармонический состав и др.).

Необходимые для расчета предложенных коэффициентов величины могут быть определены, если заданы выражения мгновенных мощностей или они могут быть непосредственно измерены с помощью специальных измерительных средств.

Приведем некоторые наиболее характерные примеры, показывающие возможность использования предложенных показателей для оценки эффективности передачи и использования энергии в нелинейных цепях переменного тока с активно-индуктивным потребителем, а также возможности использования этих показателей при определении рациональных величин установленной мощности компенсаторов.

В качестве такого примера рассмотрим нелинейную цепь, представляющую собой однофазный симисторный регулятор переменного напряжения с  $RL$ -потребителем (рис. 4), регулирование в которой осуществляется симметричным изменением момента времени отпирания симистора  $T$ .

Расчет и подробный анализ зависимости предложенных коэффициентов от характера нагрузки и угла регулирования  $\alpha$  в рассматриваемой схеме проведен в [3]. В качестве примера на рис. 4 приведены только кривые изменения коэффициентов от характера нагрузки при  $\alpha=0,7$ . Поскольку  $\psi_n$  и  $\psi_{n.a}$ , также как  $\psi_c$ , определяются параметром нагрузки  $R/Z$ , то эти зависимости имеют примерно одинаковый характер. С увеличением реактивности нагрузки ( $R/Z < 0,5$ ) и при глубоком регулировании ( $\alpha > 0,5$ ) коэффициенты резко снижаются. Наиболее близкими как по характеру, так и по абсолютной величине в данном случае являются коэффициенты  $\psi_c$  и  $\psi_n$ . Коэффициент  $\psi_{n.c}$  при регулировании  $\alpha$  всегда меньше, чем в случае синусоидального тока, причем тем меньше, чем больше реактивность нагрузки. Коэффициент пульсации активной мощности  $\psi_{n.a}$ , который в случае си-

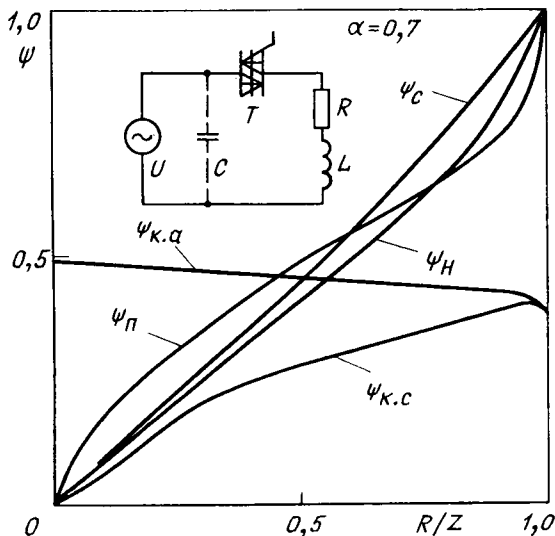


Рис. 4. Изменение энергетических коэффициентов для потребителя с симисторным регулятором

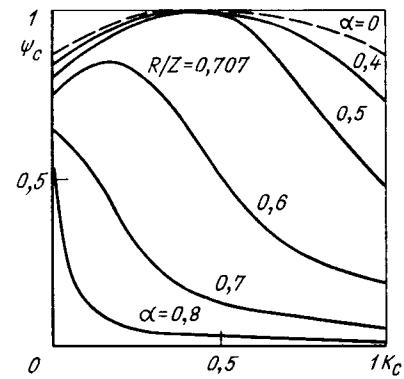


Рис. 5. Зависимость коэффициента использования энергии системы  $\psi_c$  от коэффициента  $K_c$

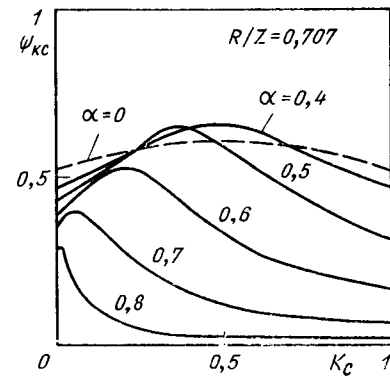


Рис. 6. Зависимость коэффициента колебаний энергии в системе  $\psi_{n.c}$  от коэффициента  $K_c$

нусоидального тока имеет постоянное значение  $\psi_{n.a} = 0,611$  при всех соотношениях  $R/Z$ , при регулировании  $\alpha$  уменьшается и меняется в зависимости от  $R/Z$ . При этом характерно, что с увеличением реактивности нагрузки пульсации активной мощности снижаются, т. е.  $\psi_{n.a}$  больше, чем при активной нагрузке.

Предложенные коэффициенты можно использовать не только для оценки энергетических процессов, но также и для расчета компенсаторов. Для улучшения энергетических показателей таких симисторных регуляторов переменного напряжения часто применяются емкостные компенсаторы. Емкость конденсатора, включенного на входных зажимах, может быть выбрана из условия обеспечения минимума действующего значения тока или минимума обратной мощности. Такой компенсатор, рассмотренный как составная часть потребителя, обеспечивает во втором случае также максимально возможное значение коэффициента использования энергии питающей системы  $\psi_c$ .

На рис. 5 приведены в качестве примера кривые изменения коэффициента использования системы  $\psi_c$  в зависимости от емкости конденсатора  $C$ , обобщенное значение которого выражено коэффициентом

$$K_c = \omega RC.$$

При углах регулирования  $\alpha < 0,5$ , когда обратная мощность может быть полностью скомпенсирована, можно получить  $\psi_c = 1$ . Если значение угла  $\alpha > 0,5$ , то возможна только частичная компенсация обратной мощности и, следовательно, добиться только некоторого

улучшения  $\psi_c$ . Если угол

$$\alpha > \frac{1}{\pi} \arctg e^{\frac{1}{2\pi}} + \varphi,$$

то подключенная емкость в любом случае уже не в состоянии компенсировать обратную мощность нагрузки. Она создает дополнительный поток обратной энергии в системе, который еще в большей степени снижает значение  $\psi_c$ .

Как видно из сравнения кривых на рис. 6, зависимость коэффициента колебания мощности  $\psi_{к.с}$  от величины  $K_c$  имеет примерно такой же характер, что и зависимость  $\psi_c$ ; это указывает на функциональную связь обратной мощности и колебаний поступающего потока энергии. Интересно только отметить, что при  $\alpha < 0,5$  значение  $\psi_{к.с}$  скомпенсированного источника даже выше, чем в случае синусоидального напряжения (прерывистая кривая на рис. 6). Это является результатом некоторого сглаживания кривой мгновенной мощности.

Расчеты показывают, что величина компенсатора  $K_c$ , обеспечивающая максимальное значение  $\psi_c$  или  $\psi_{к.с}$  в общих случаях не совпадает с величинами  $K_c$ , обеспечивающими максимальное значение коэффициента мощности  $\lambda$ . В качестве примера на рис. 7 показана зависимость  $K_c$ , выбранных по указанным трем критериям, от  $\alpha$  при  $R/Z=0,891$ . Критерии выбора мощности компенсатора  $\psi_{к.с} \rightarrow \max$  и  $\psi_c \rightarrow \max$  в принципе одинаковы, но в разной степени определяют одну и ту же характеристику — степень волнистости мгновенной мощности.

Выбранный по критерию  $\psi_c \rightarrow \max$  компенсатор снижает волнистость мгновенной мощности до исчезновения обратной мощности, а выбранный по критерию  $\psi_{к.с} \rightarrow \max$  — обеспечивает наименьшее значение абсолютной волнистости кривой мгновенной мощности. Применяемый обычно критерий  $\lambda \rightarrow \max$  имеет принципиальное отличие: он совершенно не учитывает форму кривой мгновенной мощности, а определяет минимальное действующее значение тока в системе после компенсации. При этом может оказаться, что при минимальном действующем значении тока компенсатор вызывает увеличение степени искажения кривой тока.

Таким образом, целенаправленный выбор компенсатора должен быть обоснован всесторонним анализом различных показателей, характеризующих функцию изменения мгновенной мощности.

Предложенные коэффициенты могут использоваться также в многофазных системах как для оценки энерге-

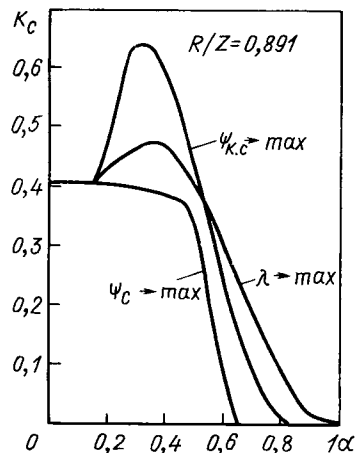


Рис. 7. Зависимость коэффициента  $K_c$ , выбранного по разным критериям, от угла регулирования  $\alpha$

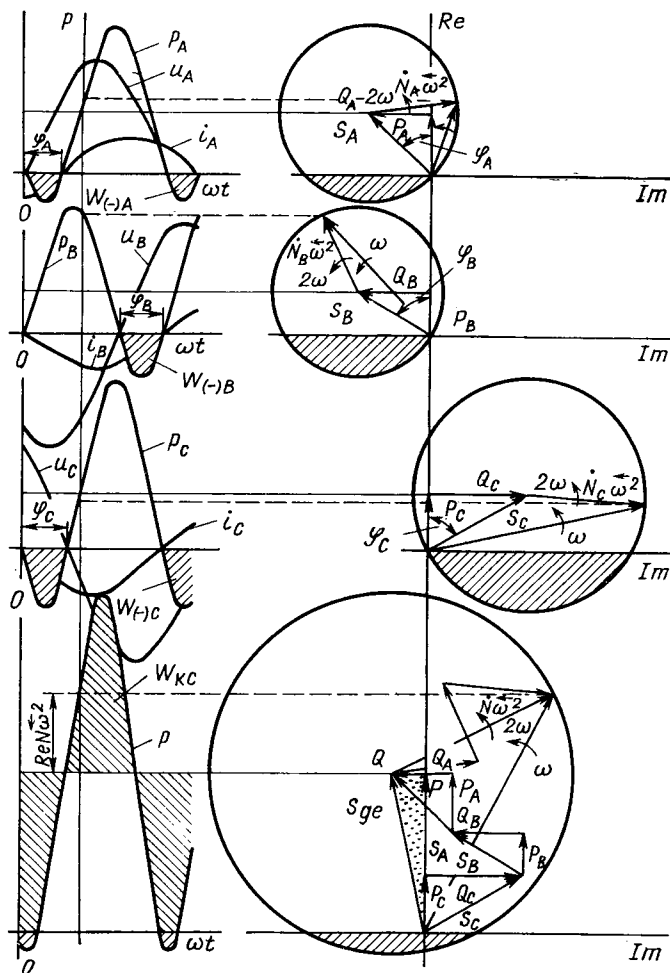


Рис. 8. Кривые мгновенных значений мощности и составляющие мощности в комплексной плоскости для трехфазной несимметричной системы

тических процессов в каждой фазе, так и для системы в целом. Применительно к каждой фазе с помощью коэффициентов можно оценивать энергетические процессы, связанные с этой фазой, ее участие в процессе передачи энергии и качество этого процесса. Во всей системе коэффициенты по форме кривой мгновенной мощности системы характеризуют симметричность и уравновешенность энергетических процессов.

Наиболее характерными для многофазных систем являются коэффициенты  $\psi_c$  и  $\psi_{к.с}$ . Чем больше волнистость кривой суммарной мгновенной мощности, тем меньше значения этих коэффициентов и ниже эффективность процесса передачи энергии в системе. Появление обратной суммарной мощности определяет существенную несимметрию энергетического процесса по фазам. Отклонение формы колебания суммарной мгновенной мощности от синусоидальной указывает на искажение формы кривых напряжения и тока фаз системы. Это ясно видно из простого примера линейной трехфазной системы с  $RL$ - и  $RC$ -нагрузкой (в первом случае фазы  $A$  и  $B$ , во втором фазы  $C$ ), кривые и диаграммы мощностей для которого изображены на рис. 8. При этом для сравнения выбраны два варианта трехфазной системы:  $I$  — симметричные фазные напряжения и несимметричная нагрузка;  $II$  — несимметричные фазные напряжения и несимметричная нагрузка.

Кривые мгновенной мощности фаз ( $p_A, p_B, p_C$ ) и суммарной мгновенной мощности  $p$  системы для обоих

Таблица 2

## Энергетические показатели и составляющие мощностей в трехфазной несимметричной системе

Вариант	Фаза	Исходные данные			Показатели, определенные по ортогональной расчетной системе								Показатели, определенные на основе мгновенной мощности					
		$U$	$I$	$\varphi$	$P$	$Q$	$S_{ge}$	$\lambda_{ge}$	$S_{ar}$	$\lambda_{ar}$	$S$	$\lambda$	$P$	$P(-)$	$P_c$	$N$	$\psi_c$	$\psi_{к.с}$
I	A	$\frac{5}{2}$	$\frac{1,5}{2}$	$45^\circ$	2,651	2,651	3,75	0,707	—	—	—	—	2,651	0,362	3,375	3,713	0,785	0,526
	B	$\frac{5}{2}$	$\frac{1,5}{2}$	$60^\circ$	1,875	3,247	3,75	0,500	—	—	—	—	1,875	0,817	3,509	3,749	0,534	0,439
	C	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{2}$	$-60^\circ$	2,500	-4,33	5,00	0,500	—	—	—	—	2,500	1,089	4,678	5,000	0,534	0,439
	ABC	—	—	—	7,026	1,566	7,198	0,976	12,50	0,562	12,63	0,556	7,026	—	—	7,953	—	0,605
II	A	$\frac{5}{2}$	$\frac{1,5}{2}$	$45^\circ$	2,651	2,651	3,75	0,707	—	—	—	—	2,651	0,362	3,375	3,713	0,785	0,526
	B	$\frac{5}{2}$	$\frac{1,5}{2}$	$60^\circ$	1,875	3,247	3,75	0,500	—	—	—	—	1,875	0,817	3,509	3,749	0,534	0,439
	C	$\frac{2}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-60^\circ$	2,500	-4,33	5,00	0,500	—	—	—	—	2,500	1,089	4,678	5,000	0,534	0,439
	ABC	—	—	—	7,026	1,566	7,198	0,976	12,50	0,562	19,96	0,352	7,026	—	—	7,953	—	0,605

вариантов одни и те же — приведенные на рис. 8. На том же рис. 8 для сравнения даны диаграммы изменения мгновенной мощности в комплексной плоскости в соответствии с известной зависимостью для фаз

$$p_\phi = P_\phi + \operatorname{Re} \{ \dot{N}_\phi a^\phi \bar{\omega}^2 \},$$

где  $p_\phi$  — активная мощность соответствующей фазы;  $\dot{N}_\phi = \dot{U}_\phi \dot{I}_\phi$  — комплекс пульсирующей мощности фазы;  $a^\phi$  — оператор фазы;  $\bar{\omega}$  — оператор ротации, и для систем в целом

$$p = P + \operatorname{Re} \{ \dot{N} \bar{\omega}^2 \},$$

где  $P$  — активная мощность системы;  $\dot{N}$  — результирующая пульсирующая мощность системы.

Для определения коэффициента  $\psi_{к.с}$  возможно в данном случае использовать несколько преобразованное выражение из табл. 1:

$$\psi_{к.с} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi} \frac{N}{p}},$$

где  $N = p_m - P$ ;  $p_m$  — максимальная мгновенная мощность системы.

Для сравнения обоих вариантов в табл. 2 приведены в относительных единицах исходные величины и рассчитанные по приведенным выше зависимостям составляющие мощности и энергетические показатели (в том числе коэффициент мощности  $\lambda$ ), которые часто используются. Следует отметить, что до сих пор в литературе не существует единого мнения по определению кажущейся мощности  $S$  в такой многофазной системе. Существуют величины геометрической (комплексная)

$S_{ge}$ , арифметической  $S_{ar}$  и полной  $S$  кажущейся мощности, и каждая из них определяет свою величину коэффициента мощности  $\lambda_{ge}$ ,  $\lambda_{ar}$  и  $\lambda$ , которые отличаются друг от друга.

Интересно отметить, что коэффициент  $\lambda$  в такой трехфазной системе не может однозначно характеризовать энергетические процессы. Так, если рассмотреть расчетные  $\lambda$  для обоих вариантов примера, то видно, что они различны (табл. 2), хотя кривые мгновенной мощности фаз и системы, приведенные на рис. 8, одинаковы, следовательно одинаковы и энергетический процесс.

Сказанное подтверждает, что коэффициент мощности  $\lambda$  (особенно для многофазных систем), не может использоваться как показатель, однозначно отражающий эффективность реальных энергетических процессов, так как он основан на расчетной ортогональной системе.

Коэффициенты, выведенные на базе кривых мгновенной мощности, однозначно отражают реальные физические процессы передачи электрической энергии системы и они могут быть приняты за основу для разработки методики определения и измерения качественных показателей энергетических процессов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оценка энергетических процессов по мгновенной электрической мощности / А. Ф. Крогерис, К. К. Рашевец, Э. П. Трейманис, Я. К. Шинка. — Изв. АН Латв. ССР. Сер. физ. и техн. наук, 1985, № 6, с. 53—64.
2. Крогерис А. Ф., Рашевец К. К., Трейманис Э. П. Оценка энергетических процессов в линейных цепях с несинусоидальными токами и напряжениями по мгновенным мощностям. — Изв. АН Латв. ССР. Сер. физ. и техн. наук, 1985, № 6, с. 65—76.
3. Крогерис А. Ф., Рашевец К. К., Трейманис Э. П. Оценка энергетических показателей в нелинейных цепях по мгновенным мощностям. — Изв. АН Латв. ССР. Сер. физ. и техн. наук, 1966, № 4, с. 88—96.

[02.04.87]

# Применение понятия энергии для анализа энергетических процессов в системах с вентильными преобразователями

ТОНКАЛЬ В. Е., ЖУЙКОВ В. Я., ДЕНИСЮК С. П.

Для устранения противоречий, возникающих при определении реактивной мощности и баланса электромагнитной энергии в электротехнических цепях, содержащих нелинейные и реактивные элементы [1—4], в [5 и 6] предложен способ определения реактивной мощности, основанный на понятии «обменная энергия». В соответствии с этим способом обменная энергия  $W_{об}$  в системах «генератор — нагрузка» при несинусоидальных сигналах определяется на основе интенсивности физических процессов обмена электрической энергии между отдельными частями электрической цепи:

$$W_{об} = (P^+ t^- - P^- t^+),$$

где  $P^t$  — среднее за период значение положительной мгновенной мощности  $p(t) = p^+(t) > 0$  — среднее за период значение отрицательной мгновенной мощности  $p(t) = p^-(t) < 0$ ;  $t^+$  — сумма интервалов времени, на которых мгновенная мощность положительна;  $t^-$  — сумма интервалов, на которых мгновенная мощность отрицательна;  $T$  — период кривой мгновенной мощности.

Ряд нелинейных цепей электротехники сводится к системе «генератор — преобразователь — нагрузка». Например, широко распространены вентильные преобразователи, характеризующиеся наличием режимов работы, содержащих интервалы времени  $t^0$ , для которых генератор и (или) преобразователь отключен от нагрузки. Особенностью таких цепей является различная интенсивность преобразования электромагнитной энергии в другие виды энергии на каждом из интервалов  $t^+$ ,  $t^0$ ,  $t^-$ .

Рассмотрим систему «генератор — нагрузка». Для такой системы справедливо соотношение

$$p(t) = p_0(t) + p_n(t), \quad (1)$$

где  $p(t)$  — мгновенная мощность в сечении «генератор — нагрузка»;  $p_0(t)$ ,  $p_n(t)$  — соответственно мгновенные мощности преобразования энергии в другие виды и ее накопления в реактивных элементах нагрузки.

Проинтегрировав выражение (2) на периоде  $T$  и разделив обе его части на  $T$ , получим соотношение

$$\frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T p_0(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T p_n(t) dt, \quad (2)$$

левая часть которого для установившегося режима преобразуется к виду

$$\frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T p_0(t) dt = P, \quad (3)$$

откуда

$$\frac{1}{T} \int_0^T p_n(t) dt = 0.$$

Следовательно, при переходе от баланса мгновенных мощностей (1) к интегральному балансу (2)—(3) в установившемся режиме теряется информация о накоплении энергии в нагрузке, являющаяся важной характеристикой энергетических процессов в системе.

Для устранения этого представим интеграл  $\int_0^T p_n(t) dt$

в виде суммы

$$\int_0^T p_n(t) dt = W_n^+ + W_n^-,$$

где  $W_n^+ = \int_0^{t_n^+} p_n(t) dt = -W_n^- = -\int_0^{t_n^-} p_n^-(t) dt$ ;  $t_n^+$  — ин-

тервал времени, в течение которого мгновенная мощность  $p_n(t) = p_n^+(t) > 0$ ;  $t_n^-$  — интервал времени, в течение которого мгновенная мощность  $p_n(t) = p_n^-(t) < 0$  (рис. 1).

Тогда выражение (2) можно представить в виде

$$\frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T p_0(t) dt + Q_n - Q_n = P + Q_n - Q_n, \quad (4)$$

где

$$Q_n = W_n^+/T = -W_n^-/T.$$

В уравнении баланса (4) величина  $P$  характеризует процесс преобразования электромагнитной энергии в другие виды, а величина  $Q_n$  — процессы накопления и обмена энергией между различными частями системы. Не трудно показать, что для синусоидальных токов и напряжений мощность накопления  $Q_n$  связывается реактивной мощностью  $Q$  с помощью коэффициента  $\pi$  [5, 6] и равна обменной мощности:

$$Q_n = Q/\pi = Q_{об} = W_{об}/T.$$

Для цепей с несинусоидальными токами и напряжениями, моделируемых системой «генератор — преобразователь — нагрузка», при явном выделении интервала времени  $t^0$  также применимо понятие энергии накопления. Однако в этом случае целесообразно характеризовать работу системы с различных сторон — как со стороны нагрузки, так и со стороны генератора. Наличие интервала  $t^0$  приводит к двум возможным определениям обменной энергии. В одном случае обменная энергия — это энергия, запасенная в реактивных элементах преобразователя и нагрузки за интервал времени  $t^+$  и равная

$$W_{об1} = W^+ - W^{(+)}, \quad (5)$$

где  $W^+ = \int_0^{t^+} p_n^+(t) dt$  — энергия, переданная генератором в нагрузку;  $W^{(+)}$  — энергия, преобразованная в другие виды за интервал времени  $t^+$ .

Энергия  $W_{об1}$  характеризует качество передачи электроэнергии генератором.

В другом случае обменная энергия — это энергия, запасенная в преобразователе и нагрузке за интервал времени  $(t^+ + t^0)$  и равная

$$W_{об2} = W^+ - W^{(+)} - W^{(0)}, \quad (6)$$

где  $W^{(0)}$  — энергия, преобразованная в другие формы за интервал времени  $t^0$ .

Величина  $W_{062}$  характеризует качество потребления электроэнергии преобразователем и нагрузкой. Например, равенство нулю  $W_{062}$  говорит о полном использовании энергии в нагрузке и отсутствии возврата энергии в генератор.

На рис. 2, а, б представлена графическая интерпретация обменных энергий  $W_{061}$  и  $W_{062}$  для произвольного вида функции мгновенной мощности  $p(t)$  и  $p_0(t)$  (заштрихованные одинаковой штриховкой площади равны).

Уравнения баланса с учетом  $W_{061}$  и  $W_{062}$  (5)–(6) представляются в виде

$$\frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = P + Q_{061} + \frac{1}{T} \int_0^{t^+} p_H(t) dt;$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = P + Q_{062} + \frac{1}{T} \int_0^{t^-} p_H(t) dt,$$

где  $Q_{061} = W_{061}/T$ ;  $Q_{062} = W_{062}/T$ .

Вычисление значений  $Q_H$ ,  $Q_{061}$  и  $Q_{062}$  связано с решением задачи определения вида функции  $p_0(t)$  и требует применения методов идентификации параметров нелинейных нестационарных систем. Задача идентификации может быть сформулирована следующим образом:

для известных функций  $u(t)$ ,  $i(t) \in L^2[0, T]$  определить преобразование  $F_i: i(t) \rightarrow u^*(t)$  при

$$F_i = R(t) \dots + \frac{d}{dt} [L(t) \dots] + \int \left[ \frac{1}{C(t)} \dots \right] dt$$

и норме

$$\rho(u(t), u^*(t)) \leq \varepsilon_1,$$

где первый элемент  $R(t)$  оператора  $F_i$  отражает активное сопротивление и преобразование электромагнитной энергии в другие виды —  $p_0(t) = R(t) i^2(t)$ , а элементы  $\frac{d}{dt} [L(t) \dots]$  и  $\int \left[ \frac{1}{C(t)} \dots \right] dt$  — индуктивный и емкостной характер цепи;

$\varepsilon_1 > 0$  — заданное вещественное число.

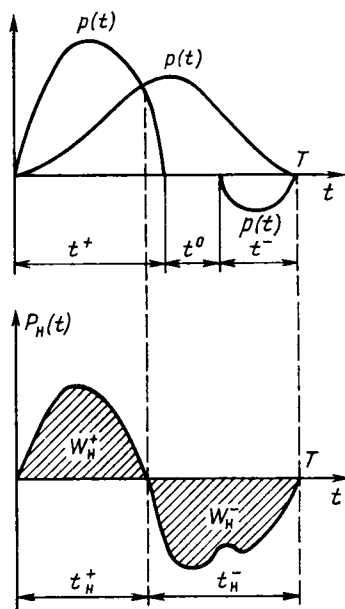


Рис. 1

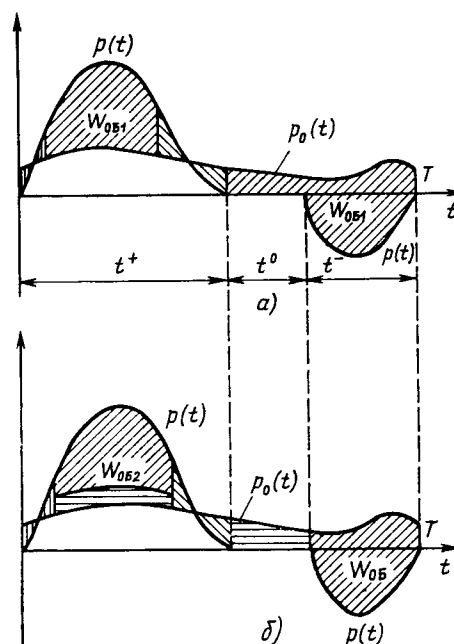


Рис. 2

При идентификации нагрузки на период  $T$  последовательной  $RL$ -цепью функция  $p_0(t)$  пропорциональна  $i^2(t)$  с коэффициентом пропорциональности, равным усредненному активному сопротивлению нагрузки

$$R_a = \frac{\int_0^T p(t) dt}{\int_0^T i^2(t) dt}.$$

При идентификации нагрузки на период  $T$  параллельной  $RL$ -цепью функция  $p_0(t)$  пропорциональна  $u^2(t)$  с коэффициентом пропорциональности, равным усредненной активной проводимости

$$G_a = \frac{\int_0^T p(t) dt}{\int_0^T u^2(t) dt}.$$

Формулы для определения величины  $Q_{061}$ ,  $Q_{062}$ ,  $Q_H$  при различных видах интенсивности преобразования энергии сведены в таблицу.

Построение баланса энергии в нелинейных цепях на основе выражений (4)–(6) позволяет устранить существующие противоречия при составлении баланса энергетических процессов.

Из выражений (4)–(6) следует, что баланс энергии в цепях с вентильными преобразователями требуется проводить на каждом интервале периода работы, соответствующем энергетически неизменным состояниям системы и определяемом неизменностью потоков энергии в системе и интервалами постоянства структуры цепи. Следовательно на каждом энергетическом неизменном состоянии системы величина энергии, генерируемая генераторами и нагрузками, равна потребляемой энергии другими генераторами и нагрузками, т. е. сумме энергий, преобразуемой в другие виды и накапливаемой в реактивных элементах.

Применение понятия энергии накопления и обменной энергии при анализе энергетических процессов в цепях с вентильными преобразователями позволит осуществить построение критериев оптимального энергопотребления (минимизации обменной энергии и энергии накопления, перетоков энергии). Разработка таких кри-

Вид функции $p_0(t)$	Обменная мощность $Q_{об1}$ (со стороны генератора)	Обменная мощность $Q_{об2}$ (со стороны нагрузки)	Мощность накопления $Q_H$
Функция $p_0(t)$ произвольной формы	$\frac{1}{T} \int_0^{t^+} p_H(t) dt$	$\frac{1}{T} \int_0^{t^+ + t^0} p_H(t) dt$	$\frac{1}{T} \int_0^{t_H^+} p_H(t) dt$
$p_0(t)$ пропорциональна $i^2(t)$ ; $i^0 \neq 0$	$\frac{1}{T} \int_0^{t^+} p(t) dt - \frac{R_{\Sigma}}{T} \int_0^{t^+} i^2(t) dt$	$\frac{1}{T} \int_0^{t^+} p(t) dt - \frac{R_{\Sigma}}{T} \int_0^{t^+ + t^0} i^2(t) dt$	$\frac{1}{T} \int_0^{t_H^+} p(t) dt - \frac{R_{\Sigma}}{T} \int_0^{t_H^+} i^2(t) dt$
$p_0(t)$ пропорциональна $u^2(t)$ ; $u^0 \neq 0$	$\frac{1}{T} \int_0^{t^+} p(t) dt - \frac{G_{\Sigma}}{T} \int_0^{t^+} u^2(t) dt$	$\frac{1}{T} \int_0^{t^+} p(t) dt - \frac{G_{\Sigma}}{T} \int_0^{t^+ + t^0} u^2(t) dt$	$\frac{1}{T} \int_0^{t_H^+} p(t) dt - \frac{G_{\Sigma}}{T} \int_0^{t_H^+} u^2(t) dt$
$p_0(t)$ постоянна; $p_0(t) = P$ ; $i^0 \neq 0$	$\frac{1}{T} \int_0^{t^+} p(t) dt - \frac{t^+}{T} P$	$\frac{1}{T} \int_0^{t^+} p(t) dt - \frac{t^+ + t^0}{T} P$	$\frac{1}{T} \int_0^{t_H^+} p(t) dt - \frac{t_H^+}{T} P$
$p_0(t), u(t), i(t)$ синусоидальны; $t_0 = 0$	$\frac{Q}{2\pi} \sin \varphi$	$Q_{об1}$	$Q/\pi = Q_{об1}$

териев позволит также создать алгоритмы компенсации обменной энергии и энергии накопления по форме реальных сигналов в отличие от осуществляемой в настоящее время компенсации по первой гармонике. Например, для выполнения условия  $W_{об1} \rightarrow 0$  сечения «генератор — преобразователь» переключение вентилей преобразователя следует производить таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\int_0^{t^+} (p(t) - p_0(t)) dt \Big|_{p(t) > p_0(t)} = \int_0^{t^+} |p(t) - p_0(t)| dt \Big|_{p(t) < p_0(t)}.$$

При анализе эффективности преобразования энергии на основе обменных процессов может найти применение система показателей, связывающая составляющие энергии и длительность интервалов энергетически неизменных состояний системы и содержащая две группы. К первой группе отнесем показатели, выявляющие соотношение между обменной и активной мощностью (энергией):

$$K_1^{(2)} = Q_{об1(2)}/P; K_2^{(2)} = Q_{об1(2)}/P^+; K_3^{(2)} = Q_{об1(2)}/P^-;$$

для которых выполняется соотношение

$$\frac{1}{K_1^{(2)}} = \frac{1}{K_2^{(2)}} + \frac{1}{K_3^{(2)}}.$$

Во вторую группу входят показатели, характеризующие экстремальные и средние значения мощности:

$$Q_{об1}^* = \max \left\{ \frac{W_{об1}}{t^+}; \frac{W_{об1} - W_{об2}}{t^0}; \frac{W_{об2}}{t^-} \right\};$$

$$Q_{об2}^* = \max \left\{ \max_{t \in [0, t^+]} p_H(t); \max_{t \in [0, t^0]} p_H(t); \max_{t \in [0, t^-]} p_H(t) \right\};$$

$$P_1^* = \max \left\{ \frac{W^{(+)}}{t^+}; \frac{W^{(0)}}{t^0}; \frac{W^{(-)}}{t^-} \right\};$$

$$P_2^* = \max \left\{ \max_{t \in [0, t^+]} p_0^+(t); \max_{t \in [0, t^0]} p_0^0(t); \max_{t \in [0, t^-]} p_0^-(t) \right\};$$

$$S_1^* = Q_{об1}^* + P_1^*; S_2^* = Q_{об2}^* + P_2^*.$$

Показатели первой группы позволяют оценить эффективность передачи и преобразования энергии. Желаемые значения показателей этой группы должны определяться для каждого типа цепей в отдельности. В соответствии с определением показателей второй группы можно сформулировать требования к различным типам элементов, например, трансформаторам, дросселям, конденсаторам и произвести их выбор.

Таким образом, в отличие от реактивной мощности, приведенные интегральные составляющие мощности — обменные мощности со стороны генератора  $Q_{об1}$  и нагрузки  $Q_{об2}$ , а также мощность накопления  $Q_H$  — обеспечивают адекватное отражение физических процессов при определении баланса энергии в нелинейных цепях с несинусоидальными токами и напряжениями.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крогерис А. Ф., Трейманис Э. П. Ортогональные составляющие кажущейся мощности в несимметричных многофазных цепях / Изв. АН Латв. ССР. Сер. физ. и техн. наук, 1983, № 3, с. 62—71.
2. Крогерис А. Ф., Трейманис Э. П. Ортогональные составляющие кажущейся мощности в несимметричных несинусоидальных системах / Изв. АН Латв. ССР. Сер. физ. и техн. наук, 1983, № 3, с. 72—82.
3. Савиновский Ю. А., Стратонов А. В. Некоторые противоречия теории мощности / Изв. вузов. Энергетика, 1984, № 10.
4. Составляющие энергии в цепях несинусоидального тока / В. Е. Тонкаль, В. Я. Жуйков, С. П. Денисюк, Ю. А. Яценко. Киев. политехн. ин-т. Киев, 1987. Деп. в УкрНИИТИ 04.01.87, № 67-Ук87.
5. Демирчян К. С. Реактивная или обменная мощность? — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1984, № 2, с. 66—72.
6. Жарков Ф. П. Об одном способе определения реактивной мощности / Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1984, № 2, с. 73—81.

[02.04.87]

# Активная и реактивная мощности — характеристики средних значений работы и энергии периодического электромагнитного поля в элементах нелинейных цепей

КАДОМСКИЙ Д. Е.

НИИПТ

**Введение.** Определение активной мощности для несинусоидальных токов и напряжений как среднего значения мгновенной мощности (работа, совершаемая в единицу времени) известно и не требует специальных пояснений (ГОСТ 19880—74).

Определения реактивной мощности для несинусоидальных токов и напряжений, предлагаемые различными авторами, как правило, основываются на различных вариантах обобщения частного определения, которое нормируется (ГОСТ 19880—74) только для синусоидальных токов и напряжений.

Как показала дискуссия по теме «Методические и технические аспекты понятия активной и реактивной мощности» (Научный совет ОФТПЭН АН СССР, Рига, 3 октября 1984 г.), до настоящего времени ни одно из предлагавшихся определений явления — нагрузка источника электроэнергии реактивной мощностью — не имело достаточно законченного подтверждения в общей теории электромагнитного поля.

С другой стороны, проведенная дискуссия выявила, что в связи с массовым применением в электроэнергетике вентильного импульсно-фазового регулирования мощных резистивных нагрузок требуется введение достаточно полного электрофизического обоснования определения понятия потребляемая реактивная мощность. Для резистивной нелинейной нагрузки известная концепция объяснения потребления реактивной мощности как существование «обменной» электроэнергии оказалась практически непригодной.

В статье сделана попытка восполнить имеющиеся пробелы, выработав единую концепцию подхода к определению активной и реактивной мощности, исходя из общих уравнений электромагнитного поля в непрерывной среде [1], записанных для осредненных параметров в пространстве, ограниченном физическим объемом источника электроэнергии в электрической цепи (в общем случае нелинейной)<sup>1</sup>.

**Характеристики периодического электромагнитного поля.** Известен ряд эвристических определений для реактивной мощности:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= E_1 I_1 \sin \varphi_1; \\ Q_2 &= \Omega \frac{1}{T} \int_0^T i \left( \int_0^t e dt \right) dt; \\ Q_3 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^T i \left( \frac{de}{dt} \right) dt \text{ и др.} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Неоднозначность в определениях реактивной мощности заставляет искать определение  $Q$  исходя из общей теории электромагнитного поля, т. е. искать соотношение, аналогичное определению активной мощности:

$$P = \int_V \operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}] dV = \frac{1}{T} \int_0^T e i dt, \quad (2)$$

где  $V$  — объем источника электроэнергии, содержащий электромагнитное поле;  $e$  — э. д. с. источника, действующая во внешней цепи;  $i$  — ток во внешней цепи.

Для решения поставленной задачи рассматривается осредненное по объему  $V$  периодическое электромагнитное поле с удельной энергией

$$w_e = \frac{1}{2} (\vec{D} \vec{E} + \vec{B} \vec{H}) \quad (3)$$

и введенная в [1] характеристика

$$\overline{w_e} = \frac{1}{T} \int_0^T w_e dt \quad (4)$$

(среднее значение электромагнитной части энергии непрерывной среды).

Периодическое электромагнитное поле в непрерывной среде без потерь, заполняющей объем  $V$ , описывается следующими соотношениями:

$$\varepsilon = \varepsilon(t) = \frac{\vec{D}}{\vec{E}}; \quad \mu = \mu(t) = \frac{\vec{B}}{\vec{H}}; \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad (6)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (7)$$

Для э. д. с. и тока во внешней (по отношению к объему  $V$ ) цепи известны соотношения:

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = E l_E; \quad (8)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = H l_H, \quad (9)$$

где  $\psi = S_B B = -\int_0^t e dt$  — магнитный поток через осред-

ненное сечение  $S_B$ ;  $q = S_D D = \int_0^t i dt$  — заряд, смещающийся через осредненное сечение  $S_D$ ;  $l_E$ ,  $l_H$  — осредненные длины силовых линий потоков векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ .

Тогда в (4) можно подставить (3), выразив величины  $E$ ,  $D$ ,  $H$ ,  $B$  в виде

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{e}{l_E}; \quad D = \frac{1}{S_D} \int_0^t i dt; \\ H &= \frac{i}{l_H}; \quad B = -\frac{1}{S_B} \int_0^t e dt. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

В результате среднее значение электромагнитной части энергии  $\overline{W_e}$  в объеме  $V \approx l_E S_D \approx l_H S_B$  определяется как

$$\overline{W_e} = V \overline{w_e} = \frac{1}{T} \int_0^T e \left( \int_0^t i dt \right) dt = -\frac{1}{T} \int_0^T i \left( \int_0^t e dt \right) dt. \quad (11)$$

<sup>1</sup> Периодическое электромагнитное поле при низких частотах в среде без потерь рассматривается как поле постоянных зарядов и токов [1] (квазистационарное, потенциальное поле).

Из сравнения (1) и (11) следует, что в качестве интегрального критерия состояния электромагнитного поля внутри объема  $V$  может быть принято определение реактивной мощности в виде

$$Q = Q_2 = -\Omega \overline{W}_e = -\Omega V \overline{w}_e. \quad (12)$$

Следует заметить, что по Л. Д. Ландау и Е. М. Лившицу [1] величина  $\overline{w}_e = \frac{1}{T} \int_0^T w_e dt$  есть средняя по времени величина электромагнитной части внутренней энергии непрерывной среды, которая по (12) с точностью до постоянного множителя ( $-\Omega V$ ) совпадает с определением реактивной мощности по Н. Н. Щедрину [2]. Следует заметить, что по данным А. Ф. Крогериса это определение было предложено впервые еще в 1918 г. М. Илиовицы.

Получаемый формальным путем знак  $\overline{W}_e$  определяет знак  $Q$  в полном соответствии с принятой системой знаков для  $Q_1$ , а с позиций механического проявления электромагнитного поля трактуется по [3] следующим образом. Потенциальная энергия тел, отталкиваемых взаимным силовым полем (поле в сжатом состоянии) считается положительной ( $Q > 0$ ), а потенциальная энергия тел, притягиваемых взаимным силовым полем (поле в растянутом состоянии) считается отрицательной ( $Q < 0$ ). Например, для конденсатора с принципиально притягивающимися периодическим полем обкладками ( $\overline{w}_{ec} = +C U^2$ )

$$Q_C = -\Omega \overline{W}_{ec} = -\Omega C U^2 = 2 \Omega \left( -\frac{CU^2}{2} \right) < 0, \quad (13)$$

а для витка с током, принципиально расpiraемого электромагнитными усилиями периодического поля ( $\overline{W}_{eL} = -L I^2$ )

$$Q_L = -\Omega \overline{W}_{eL} = \Omega L I^2 = 2 \Omega \left( +\frac{LI^2}{2} \right) > 0. \quad (14)$$

Различие знаков в (13) и (14) говорит также о том, что в емкости  $C$  силовое поле стремится занять бесконечно малый объем, в индуктивности  $L$  — бесконечно большой. В едином электромагнитном поле может существовать полная силовая разгрузка при взаимной компенсации растягивающихся и сжимающих усилий, что характеризуется условием  $Q=0$ , вытекающим из  $\overline{W}_e=0$ .

**Характеристики электромеханического источника электроэнергии.** Рассматривается гипотетический источник энергии переменного тока, занимающий объем  $V$ , заполненный непрерывной средой без внутренних потерь с параметрами  $\epsilon$  и  $\mu$ . Если электромеханическое преобразование энергии осуществляется воздействием на объем  $V$ , полностью заполненный периодическим электромагнитным полем, внешней механической силы  $F_m(t)$ , приводящей к образованию во внешней электрической цепи периодической (с периодом  $T=2\pi/\Omega$ ) э. д. с.  $e=e(t)$  и тока  $i=i(t)$ , то уравнение энергий имеет вид:

$$dA_m + dA_e = dW_m + dW_e. \quad (15)$$

В (15) при  $dt \rightarrow 0$  для геометрической координаты  $g$  ( $dg = g dt$ ):  $dA_m = F_m dg$  — элементарная работа внешней механической силы;  $dA_e = -e i dt$  — элементарная работа во внешней электрической цепи;  $dW_e = \frac{\partial W_e}{\partial g} dg = -F_e dg$  — изменение энергии электромагнитного поля

в источнике, где  $F_e = -\frac{\partial W_e}{\partial g}$ ;  $dW_m = (mg + k_\Delta g) dg$  — изменение механической энергии в источнике ( $m$  — масса перемещающейся части среды;  $k_\Delta$  — коэффициент упругости среды);  $W_e = W_e(t)$  — энергия электромагнитного поля в источнике в момент  $t$ .

Уравнение (15) может быть представлено в виде уравнения равновесия внутренних сил в форме Даламбера:

$$F_m - \frac{ei}{g} = (mg + k_\Delta g) - F_e. \quad (16)$$

Уравнение (16) для вращающихся машин (при  $k_\Delta = 0$ ) известно в виде [4]:

$$M_m - J\ddot{\gamma} + \frac{dT_e}{d\gamma} = 0, \quad (17)$$

где  $M_m = F_m \rho$ ;  $J = m \rho^2$ ;  $\ddot{\gamma} = \frac{\ddot{g}}{\rho}$ ;  $d\gamma = \frac{dg}{\rho}$ ;  $dT_e = dW_e - dA_e$ ;

$\rho$  — эквивалентный радиус точки приложения механических сил (согласно [4] для трехфазной машины  $T_e = \sum_{\kappa} \psi_{\kappa} i_{\kappa}$ , где  $\kappa = a, b, c, r$ ).

Уравнение (15) также может быть представлено в форме равновесия мгновенных мощностей (теорема Теллджена [5]) в виде

$$P_{Am} + P_{Ae} = P_{Wm} + P_{We}, \quad (18)$$

где

$$P_{Am} = \frac{dA_m}{dt}; \quad P_{Ae} = -\frac{dA_e}{dt}; \quad P_{Wm} = \frac{dW_m}{dt}; \quad P_{We} = \frac{dW_e}{dt}.$$

В установившемся периодическом режиме средние значения мощностей, связанные с работами  $A_m$  и  $A_e$ :

$$P_{Am} = \frac{1}{T} \int_0^T P_{Am} dt = \frac{1}{T} \int_0^T P_{Ae} dt = P_{Ae} = -P, \quad (19)$$

где  $P$  — активная мощность, определяющая среднюю работу, совершаемую механической системой и зарядом во внешней электрической цепи.

Из-за отсутствия накопления энергий  $W_e$ ,  $W_m$ :

$$P_{We} = \frac{1}{T} \int_0^T P_{We} dt = \Omega \left[ \frac{1}{2\pi} \int dW_e + \overline{W}_e \right]_0^T \equiv 0; \quad (20)$$

$$P_{Wm} = \frac{1}{T} \int_0^T P_{Wm} dt = \Omega \left[ \frac{1}{2\pi} \int dW_m + \overline{W}_m \right]_0^T \equiv 0. \quad (21)$$

Входящие в (20) и (21) величины  $Q_{We} = \Omega \overline{W}_e$  и  $Q_{Wm} = \Omega \overline{W}_m$  имеют размерности мощности и характеризуют средние постоянные значения внутренних энергий электромагнитного поля и поля механических сил. Известно, что для вращающейся электрической машины ( $k_\Delta = 0$ )

$$\overline{W}_m = \frac{1}{T} \int_0^T W_m dt = \frac{J\Omega^2}{2}; \quad Q_{Wm} = \frac{J\Omega^2}{2}. \quad (22)$$

Из сравнения (12) и (20) следует, что

$$Q_{We} = -Q = -\Omega V \frac{1}{T} \int_0^T w_e dt. \quad (23)$$

Используя (3), (8) и (9), получаем

$$\omega_e = \omega_e(e, i, l_E, S_D, l_H, S_B) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\vec{D}}{\vec{E}} \right) \vec{E}^2 + \left( \frac{\vec{B}}{\vec{H}} \right) \vec{H}^2 \right] V = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{q}{e} \frac{l_E}{S_D} \right) \left( \frac{e}{l_E} \right)^2 + \left( \frac{\psi}{i} \frac{l_H}{S_B} \right) \left( \frac{i}{l_H} \right)^2 \right], \quad (24)$$

где  $q = \int_0^t idt$ ;  $\psi = - \int_0^t edt$ ;  $\frac{q}{e} \frac{l_E}{S_D} = \varepsilon(t)$ ;  $\frac{\psi}{i} \frac{l_H}{S_B} = \mu(t)$ ;

$$\left( \frac{e}{l_E} \right)^2 = \vec{E}^2; \quad \left( \frac{i}{l_H} \right)^2 = \vec{H}^2.$$

Аналогичным образом для вектора Пойтинга —  $|\vec{\Pi}| = |\vec{E} \vec{H}| = \vec{\Pi}(e, i, l_E, l_H) = \frac{e}{l_E} \frac{i}{l_H} = - \frac{p_{Ae}}{l_E l_H}$ , (25) где произведение  $l_E l_H$  характеризует эквивалентное сечение потока вектора  $\vec{\Pi}$  в объеме  $V$ .

На основании рассмотрения (24) и (25) можно утверждать, что принцип электромеханического преобразования энергии заключается в изменении под действием сил  $F_m$  и  $F_e$  геометрических параметров  $l_E, l_H, S_D$  и  $S_B$  при сохранении постоянства объема  $V = l_E S_D \approx \approx l_H S_B$ . Если для конструкции обобщенного генератора  $q/e = C(t) \equiv \varepsilon(t) \geq 0$ , то генератор электромагнитный, а если  $\psi/i = L(t) \equiv \mu(t) \leq 0$  — генератор электростатический.

Следовательно, в качестве интегральных характеристик энергетического состояния электромеханического источника электроэнергии могут быть использованы известные величины  $P$  и  $Q$ , связанные с работой  $A_e$  и энергией  $W_e$ .

**Активная мощность**

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_a dt, \quad (26)$$

$$\text{где } p_a = -p_{Ae} = -\frac{dA_e}{dt} = ei.$$

**Реактивная мощность**

$$Q = -Q_{We} = -\frac{1}{T} \int_0^T p_r dt, \quad (27)$$

$$\text{где } p_r = -\Omega W_e = -\Omega V \omega_e = \Omega i \left( \int_0^t edt \right) = -\Omega e \left( \int_0^t idt \right).$$

**Характеристики распределения работ и энергий в элементах нелинейной цепи.** В основу подхода к анализу распределения активных и реактивных мощностей в сложных нелинейных цепях положены полученные выше интегральные определения (26) и (27) в виде

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u idt; \quad (28)$$

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T i \left( \int_0^t u dt \right) dt = -\frac{1}{T} \int_0^T u \left( \int_0^t idt \right) dt. \quad (29)$$

Для системы из  $n$  последовательных элементов

$$\left( u_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n u_k, i_{\Sigma} = i_k = i \right) \text{ из (28) и (29) имеем}$$

$$P_{\Sigma n} = \sum_{k=1}^n P_k \text{ и } Q_{\Sigma n} = \sum_{k=1}^n Q_k. \quad (30)$$

Для системы из  $m$  параллельных элементов ( $i_{\Sigma} = \sum_{k=1}^m i_k, u_{\Sigma} = u_k = u$  из (28) и (29) имеем

$$P_{\Sigma m} = \sum_{k=1}^m P_k \text{ и } Q_{\Sigma m} = \sum_{k=1}^m Q_k. \quad (31)$$

Поскольку в любой сложной нелинейной цепи, содержащей  $N$  активных, пассивных и смешанных двух-полюсников, для  $i$  и  $u$  действуют оба закона Кирхгофа, то, исходя из общих принципов закона сохранения энергии в целом для цепи [5], получаем общее условие распределения мощностей в виде

$$P_{\Sigma N} = \sum_{k=1}^N P_k = 0; \quad (32)$$

$$Q_{\Sigma N} = \sum_{k=1}^N Q_k = 0. \quad (33)$$

Полученные условия распределения активных и реактивных мощностей ничем не отличаются от известных условий распределения  $P$  и  $Q$  в линейных схемах с синусоидальными величинами  $u$  и  $i$ , т. е. являются обобщением ранее известных положений на нелинейные сложные цепи.

Отличие изложенного подхода от традиционного заключается в том, что для определения  $P$  и  $Q$  должны использоваться мгновенные значения  $u = u(t)$  и  $i = i(t)$  без разделения их на активные и реактивные составляющие, что, как известно, принципиально недопустимо для нелинейных цепей.

Сходство с традиционным представлением заключается в возможности образовать комплекс полной мощности

$$\dot{S} = P + jQ = V \sqrt{P^2 + Q^2} e^{j \arctg \frac{Q}{P}}, \quad (34)$$

где  $S = \sqrt{P^2 + Q^2} \leq UI$  и следовательно не должно определяться через эффективные значения  $u$  и  $i$ :

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}; \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

При рассматриваемом подходе  $P$  и  $Q$  для каждого элемента нелинейной цепи могут определяться по одной из модификаций формул:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u idt = \frac{1}{T} \int_{\hat{q}}^{\hat{q}} u dq = \sum_{v=1}^{\infty} U_v I_v \cos \varphi_v; \quad (35)$$

$$Q = -\frac{\Omega}{T} \int_0^T u \left( \int_0^t idt \right) dt = -\frac{\Omega}{T} \int_0^T u q dt = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{U_v I_v}{v} \sin \varphi_v, \quad (36)$$

где

$$q = \int_0^t idt; \quad \check{q} \leq q \leq \hat{q};$$

$$u_v = U_v \sin v\Omega t; \quad i_v = I_v \sin(v\Omega t - \varphi_v).$$

Представив (35) и (36) в форме

$$P = \Omega \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{q}}^{\hat{q}} u dq = \Omega \bar{A}_e; \quad (37)$$

$$Q = -\Omega \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u q d\theta = -\Omega \bar{W}_e, \quad (38)$$

можно заключить, что для каждого элемента активная мощность пропорциональна средней работе  $\bar{A}_e$  электромагнитных сил, а реактивная мощность — средней потенциальной энергии электромагнитного поля  $\bar{W}_e = V\bar{w}_e$ .

**Пример.** Для контроля применимости полученных результатов в качестве прикладной тестовой задачи целесообразно рассматривать дискуссионный вопрос о способах оценок реактивной мощности, возникающей в электрической цепи с резистором, включенным последовательно с встречно-параллельными управляемыми вентилями.

На рисунке показаны мгновенные значения  $e$ ,  $i = \dot{q}$ ,  $q$  и вольт-кулонные характеристики  $q = q(e)$  однофазного источника, нагруженного резистором  $R$  с регулированием нагрузки встречно-параллельными вентилями  $B1$  и  $B2$ , отпираемыми с углом  $\alpha$  (рисунок, *а*) или запираемыми с углом  $\beta = 180^\circ - \alpha$ . На рисунке видно, что наряду с регулированием активной мощности, определяемой площадью замкнутой кривой  $q = q(e)$ , существует несимметрия по квадрантам этой кривой, которая для схемы рисунка, *а* определяет индуктивный, а для схемы рисунка, *б* — емкостный характер нагрузки.

Этот вывод следует из сравнения полученных вольт-кулонных характеристик с эталонными, получаемыми для линейных элементов  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , при синусоидальной э. д. с.  $e = E_m \sin \Omega t$  в виде

для  $R$

$$\frac{q_R^2}{E_m^2 / \Omega^2 R^2} + \frac{e^2}{E_m^2} = 1; \quad (39)$$

для  $L$

$$q_L = -\frac{e}{\Omega^2 L}; \quad (40)$$

для  $C$

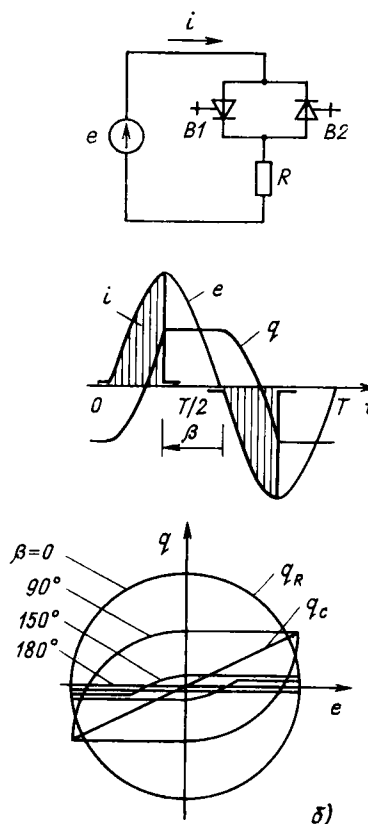
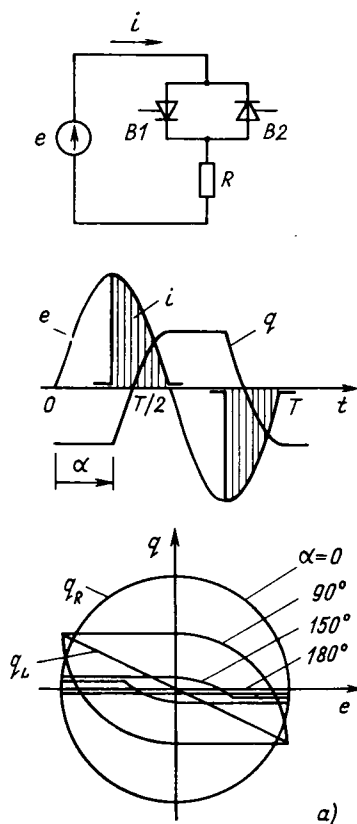
$$q_C = Ce. \quad (41)$$

На рисунке показаны эталонные характеристики  $q = q(e)$  для  $q_R$ ,  $q_L$  и  $q_C$ .

Из приведенного примера следует, что нагрузка источника реактивной мощностью  $Q$  не обязательно должна сопровождаться циркуляцией «обменной» энергии между нагрузкой и источником. Необходимым и достаточным условием существования реактивной мощности в системе «источник — нагрузка» является только образование электрического режима внешней цепи, сопровождающегося наличием постоянной составляющей внутренней электромагнитной энергии в источнике, которая линейно связана с реактивной мощностью внешней цепи соотношением (36).

Полученный вывод можно интерпретировать для нелинейной нагрузки как необходимость совершения первоначальной работы  $\bar{A}_{e0}$  электромагнитных сил для образования запаса потенциальной энергии в источнике  $\bar{W}_e = \bar{A}_{e0}$ , который сохраняется вне вентильного устройства под воздействием нелинейности  $B1-B2$  (реакция источника на нагрузку).

**Выводы.** 1. Интегральные определения активной мощности характеризуют среднюю за период работу электромагнитных сил, а интегральное определение реактивной



мощности — среднюю потенциальную энергию электромагнитного поля (внутри или вне рассматриваемого элемента).

2. Интегральное понятие реактивной мощности может быть получено из уравнений электромагнитного поля, записанных согласно [1] для периодического процесса в непоглощающей энергии среде, заключенной внутри конечного объема, занимаемого источником электроэнергии переменного тока, или из уравнения сохранения энергии, записанного для рассматриваемого электромеханического источника. При этом используется правило определения знака потенциальной энергии силового поля по [3].

3. Интегральная формула реактивной мощности, выраженной через мгновенные значения действующей э. д. с. и тока, протекающего во внешней двухполюсной цепи, тождественна одному из ранее предлагавшихся определений [2], и с точностью до постоянного множителя ( $-\Omega V$ ) определяется введенным в [1] понятием среднего за период значения электромагнитной части внутренней энергии объема непоглощающей непрерывной среды, несущей электромагнитное поле.

4. Представление о реактивной мощности как о характеристике средней потенциальной энергии силового электромагнитного поля внутри источника по существу является частным (полученным для непоглощающей среды) решением поставленной в [1] задачи о среднем (во времени) тензоре напряжений, определяющем силы, действующие на вещество в переменном электромагнитном поле.

5. Анализ полученного интегрального определения реактивной мощности позволяет выявить следующие свойства формулы:

при синусоидальном токе и э. д. с. источника интегральное определение реактивной мощности тождественно традиционному определению (ГОСТ 19880—74);

при несинусоидальном токе или э. д. с. и сохранении синусоидальными соответственно э. д. с. и тока интегральное определение реактивной мощности тождественно широко применяемому (но не нормированному) определению реактивной мощности по первой гармонике;

при несинусоидальном токе и э. д. с. интегральное определение реактивной мощности при гармоническом

подходе дает выражение для реактивной мощности в виде суммы реактивных мощностей отдельных гармоник, причем величины реактивной мощности каждой гармоники (определенные как для основной) дополнительно делятся на номер гармоники;

для электрической схемы (сети), состоящей из двухполюсников (включая источники электроэнергии), алгебраическая сумма реактивных мощностей всех двухполюсников тождественно равна нулю независимо от способов их соединения;

реактивная мощность не может быть выражена в виде функции мгновенной мощности (дифференциальной характеристики);

интегральное определение реактивной мощности, рассматриваемое совместно с известным интегральным определением активной мощности, дает возможность получения активной, реактивной и полной мощности на базе построения вольт-кулонных характеристик нагрузочной цепи (в общем виде и ампер-веберных);

интегральное представление понятий реактивной и активной мощностей показывает возможность нагрузки источника реактивной мощностью при отсутствии циркуляции «обменной» энергии между источником и нагрузкой;

интегральное представление реактивной мощности, применяемое совместно с известным интегральным представлением активной мощности, не требует для соблюдения энергетического баланса введения понятия «мощность искажения».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: ГИФМЛ, 1959.
2. Кадомский Д. Е. Интегральное определение реактивной мощности в нелинейных цепях. — В сб.: Проблемы нелинейной электротехники. — Киев: Наукова думка, 1981, № 1.
3. Ландау Л. Д., Ахиезер А. И., Лифшиц Е. М. Механика и молекулярная физика. — М.: Наука, 1965.
4. Горев А. А. Основные уравнения неустойчивого режима синхронной машины. — В кн.: Избранные труды по вопросам устойчивости электрических систем. М. — Л.: Госэнергоиздат, 1960.
5. Пенфилд П., Спенс Р., Дюинкер С. Энергетическая теория электрических цепей. — М.: Энергия, 1974.

[02.04.87]

УДК 621.372.2

## Об одном подходе к определению составляющих мощности произвольной цепи

РЕЗНИК Л. Ф., ТОРБЕНКОВ Г. М., ЧЕЧУШКОВ В. Г.

Применение преобразовательной техники и других нелинейных и нестационарных нагрузок привело в последние годы к широкому распространению несинусоидальных режимов в электроустановках. Появилась необходимость осмысления таких режимов и разработки методов анализа, в частности, энергетических методов.

В печати описаны многочисленные теоретические разработки методов анализа и критериев оценки энергетической стороны явлений в цепях с несинусоидальными режимами. Существенные различия и разногласия в

выводах обусловлены разнообразием задач, решаемых авторами разработок. Диапазон требований к энергетическим подходам очень широк: отражение физики процессов энергообмена, задачи компенсации режимов, оценка качества электроэнергии, методы расчетов цепей и отдельных устройств и т. д.

При этом, зачастую, авторами работ в качестве определения составляющих мощности цепи предлагается интуитивно найденное математическое выражение. Затем на ряде конкретных задач проверяется насколько

верно найденная математическая конструкция отражает рассматриваемую сторону явления и проверяется совпадение результата для известного синусоидального процесса.

В данной статье предлагается иной подход к определению энергетических характеристик цепей. По мнению авторов, исследования целесообразно начинать с выявления и постулирования свойств искомых величин. Анализ уравнения баланса мгновенных мощностей произвольной электрической цепи показывает, что оно обладает двумя важнейшими свойствами. Во-первых, оно инвариантно во времени. Во-вторых, мощность любой ветви цепи является билинейной функцией по переменным напряжению и току этой ветви.

При исследовании периодических процессов удобнее оперировать не мгновенными значениями мощности или энергии, а некоторыми обобщенными величинами, т. е. на определенном интервале времени функциями целесообразно поставить в соответствие некоторые численные константы или функционалы мощности. Примером такой обобщенной величины является активная мощность. Значение активной мощности также билинейно относительно напряжения и тока и инвариантно во времени.

Припишем указанные свойства билинейности и инвариантности вещественному функционалу мощности  $M(u, i)$  для пары временных функций  $u(t)$ ,  $i(t)$ :

$$M(u_1 + u_2, i) = M(u_1, i) + M(u_2, i); \quad (1)$$

$$M(u, i_1 + i_2) = M(u, i_1) + M(u, i_2); \quad (2)$$

$$M(\gamma u, i) = M(u, \gamma i) = \gamma M(u, i), \quad (3)$$

$$M(u_\tau, i_\tau) = M(u, i), \quad (4)$$

где  $\gamma$ ,  $\tau$  — вещественные числа;  $u_\tau = u(t + \tau)$ ,  $i_\tau = i(t + \tau)$ .

Отметим, что свойства билинейности (1), (2) косвенно отражают возможность параллельного или последовательного соединения нескольких элементов цепи. При этом сумма функционалов мощности, определенных на каждом из элементов, равна функционалу мощности участка цепи, включающего эти элементы. Свойство линейности (3) означает изменение обобщенной мощности в  $\gamma$  раз при изменении в  $\gamma$  раз значений функций напряжения или тока.

На основании свойств (1)–(3) сформулирована и доказана нижеследующая теорема.

**Теорема 1.** Для любой замкнутой электрической цепи выполняется баланс билинейных функционалов мощности:

$$\sum_{\alpha=1}^p M[u_\alpha(t), i_\alpha(t)] = 0, \quad (5)$$

где  $p$  — количество ветвей в цепи.

**Примечание.** Если под  $M_i$  понимать некоторое функциональное преобразование, а под  $L_1$ ,  $L_2$  произвольные линейные операторы, то справедливо равенство

$$\sum_{\alpha=1}^p M_i(L_1 u_\alpha, L_2 i_\alpha) = 0. \quad (6)$$

**Следствие.** Если  $M_i$  суть произведение функций  $L_1 u(t) L_2 i(t)$ , то выражение (6) есть запись сильной формы теоремы Телледжена. Иными словами теорема

Телледжена справедлива в силу билинейности квазимощностей.

Для билинейных функционалов, подчиняющихся условию инвариантности во времени (4), справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть на произвольном участке электрической цепи напряжение и ток представлены абсолютно сходящимися рядами Фурье:

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} U_k \sin(k\omega t + \alpha_k); \\ i(t) &= I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_k \sin(k\omega t + \beta_k). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Тогда функционал мощности каждого участка цепи, отвечающий условиям (1)–(4) имеет единственное представление:

$$M(u, i) = \lambda_0 U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k (\lambda_k \cos \varphi_k + \mu_k \sin \varphi_k), \quad (8)$$

где  $\omega = 2\pi/T$ ;  $\varphi_k = \alpha_k - \beta_k$ ;  $T$  — общий период  $u(t)$  и  $i(t)$ ;  $\lambda_0$ ,  $\lambda_k$ ,  $\mu_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) — произвольные вещественные числа.

**Примечание 1.** Соотношение (8) представляет собой полное множество, т. е. не существует отличных от (8) функционалов мощности с указанными свойствами.

**Примечание 2.** В некоторых случаях ряд (8) может быть просуммирован, т. е. сведен к некоторому конечному выражению.

В условиях второй теоремы токи и напряжения электрической цепи представлены рядами Фурье, что не является необходимым для определения отдельных функционалов мощности. Например, функционал вида

$$M(u, i) = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) L u(t) dt \quad (9)$$

подчиняется условиям (1)–(3), если  $L$  — произвольный линейный оператор. При  $T$  — периодических функциях  $u$ ,  $i$  этот функционал удовлетворяет и условию (4). Поэтому вычисление по формуле (9) приводит к результату, совпадающему с суммой всех или части слагаемых ряда (8), однако здесь исключается необходимость разложения подынтегральных функций в ряд Фурье.

Рассмотрим ряд примеров. Пусть оператор  $L_\lambda$  осуществляет преобразования  $1 \rightarrow \lambda_0 1$ ,  $\cos k\omega t \rightarrow \lambda_k \cos k\omega t$ ,  $\sin k\omega t \rightarrow \lambda_k \sin k\omega t$ .

Тогда функционал мощности, определенный по выражению (9) при  $L = L_\lambda$ , совпадает с выражением

$$M(u, i) = \lambda_0 U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k U_k I_k \cos \varphi_k.$$

Если же использовать множество линейных операторов  $L_\mu$ , осуществляющих преобразование по законам  $1 \rightarrow 0$ ,  $\sin k\omega t \rightarrow \mu_k \cos k\omega t$ ,  $\cos k\omega t \rightarrow -\mu_k \sin k\omega t$ ,

то выражение (9) при  $L = L_\mu$  совпадает с суммой

$$M(u, i) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k U_k I_k \sin \varphi_k.$$

Выбор конкретного вида операторов  $L_\lambda$ ,  $L_\mu$  определяет численные значения коэффициентов  $\lambda_k$ ,  $\mu_k$ . Например, величины  $\lambda_k=1$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) можно получить, если под  $L_\lambda$  понимать оператор тождества функции самой себе. Оператор тождества является общепринятым для определения активной мощности по формуле (9). Другим примером оператора  $L_\lambda$  может служить любая линейная комбинация производных от  $u(t)$  и (или)  $i(t)$  четного порядка и повторных интегралов четного порядка.

Аналогичные комбинации производных и повторных интегралов нечетного порядка являются операторами  $L_\mu$ . Функционал (9) с оператором  $L_\mu$  такого вида в некоторых работах принимается за определение реактивной мощности в несинусоидальных режимах. Иногда для определения реактивной мощности в качестве  $L_\mu$  применяют оператор Гильберта:

$$L_\mu\{u\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{t-\tau} d\tau.$$

Результаты вычислений при таком подходе приводят к функционалу (8) с конкретными значениями  $\mu_k$ . Ис-

пользование оператора  $L_\lambda$  обращает в нуль все коэффициенты  $\mu_k$ , а оператора  $L_\mu$  — все коэффициенты  $\lambda_k$ , что приводит к существенному сужению множества (8). Можно построить операторы, для которых множество функционалов мощности будет содержать взаимосвязанные коэффициенты  $\lambda_k$  и  $\mu_k$ . Примером таких операторов являются операторы временного сдвига:

$$L_{\tau+}\{u\}: u(t) \rightarrow u(t+\tau);$$

$$L_{\tau-}\{u\}: u(t) \rightarrow u(t-\tau),$$

с помощью которых обобщенную мощность можно определить как взаимную корреляционную функцию напряжения и тока при фиксировании  $\tau$ :

$$M(u, i) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) L_{\tau+}\{i(t)\} dt = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) L_{\tau-}\{u(t)\} dt.$$

Результат вычисления соответствует (8), где

$$\lambda_k = \cos k\omega\tau; \mu_k = \sin k\omega\tau.$$

Возможны и другие выражения для определения мощностей без разложения в ряды Фурье.



УДК 621.315.2:538.31.001.24

## Электромагнитное поле кабеля со скрученными жилами

ФРАДКИН Б. М., ФЕДОРОВА Е. М., КОЛЛИ Я. Н., ПОПОВСКАЯ И. Ф.

Для различных целей, и в частности, для определения взаимного влияния электрических кабелей, необходимо знать характеристики электромагнитного поля, связанного с ними. Расчет поля кабеля осложняется наличием проводящей оболочки (экрана) и скруткой жил. Этому вопросу посвящен ряд работ [1—4]. В одной из первых работ [1] определяется напряженность поля силового кабеля со скрученными жилами на сравнительно большом расстоянии от кабеля и при отсутствии проводящей оболочки. В [4] подробно рассчитывается поле внутри кабеля с идеально проводящей оболочкой.

В настоящей статье рассчитывается электромагнитное поле внутри и вне кабеля, а также в оболочке. Жилы внутри кабеля имеют форму спиральных тонких лент, навитых на цилиндр радиуса  $a$  с шагом  $h$ . Спиральные жилы помещены в проводящий цилиндрический экран с внутренним радиусом  $b$  и внешним  $d$  (рис. 1).

Электромагнитное поле обусловлено токами в жилах (проводниках) и оболочке кабеля. Сначала будем считать эту систему изолированной, т. е. полагать

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0, \quad (1)$$

где  $I_1$  и  $I_2$  — токи в проводниках;  $I_3$  — ток в экране.

Рассматривается случай, когда длина электромагнитной волны много больше шага спирали. При этом можно считать, что на протяжении шага спирали токи не изменяют своего значения.

Для расчета поля целесообразно применить цилиндрическую систему координат  $(r, \alpha, z)$ . Периодический характер структуры системы обуславливает собой и пространственную периодичность искомого поля с периодом по координате  $z$ , равным  $h$ , и по координате  $\alpha$ , равным  $2\pi$ .

Общее поле, являющееся трехмерным, представим суммой поперечного магнитного поля, описываемого векторным магнитным потенциалом

$$A^M = e_z A^M, \quad (2)$$

и поперечного электрического поля, описываемого векторным электрическим потенциалом

$$A^E = e_z A^E. \quad (3)$$

При этом векторы поперечного магнитного поля

$$B^M = \text{rot } A^M; E^M = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \text{rot } B^M, \quad (4)$$

а векторы поперечного электрического поля

$$E^E = \text{rot } A^E; H^E = \frac{1}{-k\omega\mu_0} \text{rot } E^E, \quad (5)$$

где  $\sigma$  — комплексная проводимость среды, в которой определяется поле;

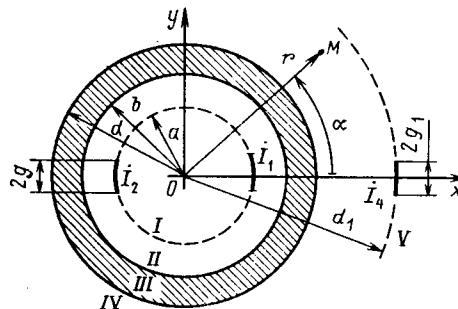


Рис. 1

$$\underline{\sigma} = \sigma + j\omega\epsilon_0\epsilon_r. \quad (6)$$

Векторный магнитный потенциал удовлетворяет комплексному уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 A^m - \gamma^2 A^m = 0, \quad (7)$$

где  $\gamma^2 = j\omega\sigma\mu_0$ .

Применяя метод разделения переменных и учитывая, что для правоходовой спирали картина поля не должна изменяться, если координаты связаны соотношением

$$\alpha - \frac{2\pi z}{h} = \beta = \text{const}, \quad (8)$$

представим решение в виде ряда собственных функций:

$$A^m = -\mu_0 \left\{ [C_{30}I_0(\gamma r) + C_{70}K_0(\gamma r)] + \sum_{n=1}^{\infty} [C_{3n}I_n(pr) + C_{7n}K_n(pr)] \cos n\beta \right\}, \quad (9)$$

где

$$p^2 = \gamma^2 + \left(\frac{2\pi n}{h}\right)^2. \quad (10)$$

$I_n(pr)$ ,  $K_n(pr)$  — модифицированные цилиндрические функции;  $C_{30}$ ,  $C_{70}$ ,  $C_{3n}$ ,  $C_{7n}$  — постоянные интегрирования.

Векторный электрический потенциал определяется решением уравнения

$$\nabla^2 A^e - \gamma^2 A^e = 0 \quad (11)$$

аналогично тому, как был определен векторный магнитный потенциал. Это решение можно представить в виде

$$A^e = \frac{1}{\sigma} [C_{50}I_0(\gamma r) + C_{80}K_0(\gamma r)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^2}{\sigma p^2} [C_{5n}I_n(pr) + C_{7n}K_n(pr)] \cos n\beta. \quad (12)$$

Истинные векторы поля определяются суммированием соответствующих составляющих полей по (4) и (5).

Разобьем пространство на несколько расчетных областей: I область ( $0 \leq r \leq a$ ), II — ( $a \leq r \leq b$ ), III — ( $b \leq r \leq d$ ), IV — ( $d \leq r$ ).

В области III (внутри оболочки) напряженности магнитного и электрического полей определяются по уравнениям:

$$H_r^{III} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n}{r} [C_{3n}I_n(pr) + C_{7n}K_n(pr)] - \frac{2\pi n}{ph} [C_{5n}I'_n(pr) + C_{8n}K'_n(pr)] \right\} \sin n\beta; \quad (13)$$

$$H_\alpha^{III} = \gamma [C_{30}I'_0(\gamma r) + C_{70}K'_0(\gamma r)] + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ p [C_{3n}I'_n(pr) + C_{7n}K'_n(pr)] - \frac{2\pi n^2}{p^2 h r} [C_{5n}I_n(pr) + C_{8n}K_n(pr)] \right\} \cos n\beta; \quad (14)$$

$$H_z^{III} = C_{50}I_0(\gamma r) + C_{80}K_0(\gamma r) + \sum_{n=1}^{\infty} [C_{5n}I_n(pr) + C_{8n}K_n(pr)] \cos n\beta; \quad (15)$$

$$E_r^{III} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma^2 n}{p^2 \sigma r} [C_{5n}I_n(pr) + C_{8n}K_n(pr)] + \frac{2\pi p n}{\sigma h} [C_{3n}I'_n(pr) + C_{7n}K'_n(pr)] \right\} \sin n\beta; \quad (16)$$

$$E_\alpha^{III} = -\frac{\gamma}{\sigma} [C_{50}I'_0(\gamma r) + C_{80}K'_0(\gamma r)] - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2\pi n^2}{\sigma h r} [C_{3n}I_n(pr) + C_{7n}K_n(pr)] + \frac{\gamma^2}{\sigma p} [C_{5n}I_n(pr) + C_{8n}K'_n(pr)] \right\} \cos n\beta; \quad (17)$$

$$E_z^{III} = \frac{\gamma^2}{\sigma} [C_{30}I_0(\gamma r) + C_{70}K_0(\gamma r)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2}{\sigma} [C_{3n}I_n(pr) + C_{7n}K_n(pr)] \cos n\beta. \quad (18)$$

В областях I, II, IV проводимость равна нулю, поэтому аргумент цилиндрических функций вещественный. Поперечные размеры кабеля ( $a$ ,  $b$ ,  $d$ ) много меньше длины волны, поэтому магнитное поле можно считать потенциальным, что упрощает запись составляющих напряженности электромагнитного поля:

$$H_r^I = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{h} A_{1n} I'_n\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) \sin n\beta; \quad (19)$$

$$H_\alpha^I = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r} A_{1n} I_n\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) \cos n\beta; \quad (20)$$

$$H_z^I = A_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{h} A_{1n} I_n\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) \cos n\beta; \quad (21)$$

$$H_r^{II} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{h} \left[ A_{3n} I'_n\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) + A_{4n} K'_n\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) \right] \sin n\beta; \quad (22)$$

$$H_\alpha^{II} = \frac{1}{r} A_{40} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r} \left[ A_{3n} I_n\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) + A_{4n} K_n\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) \right] \cos n\beta; \quad (23)$$

$$H_z^{II} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{h} \left[ A_{3n} I_n\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) + A_{4n} K_n\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) \right] \cos n\beta; \quad (24)$$

$$H_r^{IV} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{h} A_{6n} K'_n\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) \sin n\beta; \quad (25)$$

$$H_\alpha^{IV} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r} A_{6n} K_n\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) \cos n\beta; \quad (26)$$

$$H_z^{IV} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{h} A_{6n} K_n\left(\frac{2\pi n r}{h}\right) \cos n\beta, \quad (27)$$

где  $A_{10}$ ,  $A_{1n}$ ,  $A_{3n}$ ,  $A_{40}$ ,  $C_{30}$ ,  $C_{50}$ ,  $C_{70}$ ,  $C_{80}$ ,  $C_{3n}$ ,  $C_{5n}$ ,  $C_{7n}$ ,  $C_{8n}$ ,  $A_{4n}$  — постоянные интегрирования, подлежащие определению.

При равномерном распределении поверхностной плотности тока, совпадающей с направлением спирали,

$$J_{s1} = I_1/2g; \quad J_{s2} = I_2/2g. \quad (28)$$

Составляющие плотности тока определяются как

$$J_z = J_s \sin \psi; \quad J_\alpha = J_s \cos \psi, \quad (29)$$

где

$$\psi = \arctg(h/2\pi a). \quad (30)$$

Разложим плотность тока в ряд Фурье по пространственным координатам. Для любого  $z$  при правоходовой спирали

$$J_z(\alpha, z) = \frac{I_1 + I_2}{2\pi a} + \frac{1}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} [I_1 + (-1)^n I_2] \times \\ \times S_1(n) \cos n\beta; \quad (31)$$

$$J_\alpha(\alpha, z) = J_z(\alpha, z) \operatorname{ctg} \psi, \quad (32)$$

где

$$S_1(n) = \frac{a \sin \psi}{ng} \sin \left( \frac{ng}{a \sin \psi} \right). \quad (33)$$

Для определения постоянных интегрирования используем граничные условия при  $r=a$ ,  $r=b$ ,  $r=d$ . На всех трех границах приравниваем нормальные к границам составляющие вектора магнитной индукции. При  $r=b$  и  $r=d$ , кроме того, приравниваем тангенциальные составляющие напряженности магнитного поля. При  $r=a$  разность тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля приравниваем соответствующей составляющей поверхностной плотности тока. После указанных операций и алгебраических преобразований получаем выражения для постоянных<sup>1</sup>:

$$A_{10} = \frac{I_1 + I_2}{h}; \quad A_{40} = \frac{I_1 + I_2}{2\pi}; \quad C_{50} = 0; \quad C_{80} = 0;$$

$$C_{30} = \frac{I_1 + I_2}{2\pi\gamma b} \frac{K_1(\gamma d)}{I_1(\gamma b) K_1(\gamma d) - I_1(\gamma d) K_1(\gamma b)};$$

$$C_{70} = \frac{I_1 + I_2}{2\pi\gamma b} \frac{I_1(\gamma d)}{I_1(\gamma b) K_1(\gamma d) - I_1(\gamma d) K_1(\gamma b)};$$

$$A_{1n} = \frac{2\pi nb}{h} Q_n \left[ T_{17} I_n \left( \frac{2\pi nb_i}{h} \right) - T_{18} \right];$$

$$A_{3n} = -\frac{2\pi nb}{h} Q_n T_{18}; \quad A_{4n} = \frac{2\pi nb}{h} Q_n I_n \left( \frac{2\pi nb}{h} \right);$$

$$A_{6n} = \frac{h Q_n}{2\pi \Delta n K_n \left( \frac{2\pi nd}{h} \right)} \left[ T_9 + \frac{pd^2}{b} T_{10} T_{13} \right];$$

$$C_{3n} = \frac{\gamma^2 h Q_n}{2\pi \Delta b p^2} \left[ K'_n(pd) T_{15} + \frac{b}{pd^2} K'_n(pb) \right];$$

$$C_{5n} = [T_6 T_9 + T_{12}] \frac{Q_n p}{\Delta}; \quad C_{8n} = -[T_5 T_9 + T_{11}] \frac{Q_n p}{\Delta};$$

$$C_{7n} = -\frac{\gamma^2 h Q_n}{2\pi \Delta b p^2} \left[ T_{15} I'_n(pd) + \frac{b}{pd^2} I'_n(pb) + T_{16} \right].$$

Расчет электромагнитного поля на ЭВМ. Приведенная методика расчета реализована на ЭВМ ЕС-1033. Составлена программа на языке ФОРТРАН и рассчитаны составляющие электромагнитного поля во всех областях кабеля.

Исходными данными для расчета являются геометрические размеры кабеля ( $2g$  — ширина токопроводящей жилы,  $2a$  — расстояние между жилами,  $2b$  — внутренний диаметр экрана,  $2d$  — внешний диаметр

<sup>1</sup> Обозначения см. в приложении.

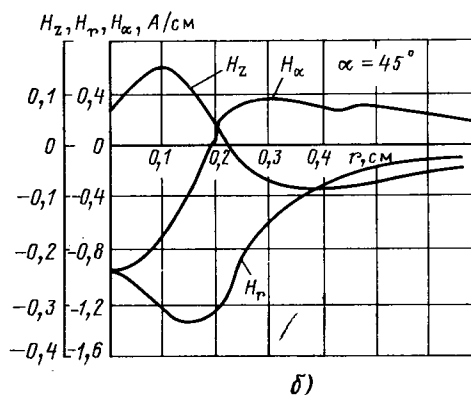
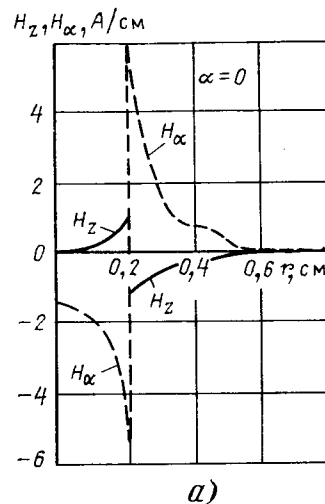


Рис. 2

экрана,  $h$  — шаг скрутки), а также проводимость экрана  $\sigma$ , частота тока  $f$  и токи в жилах  $I_1$ ,  $I_2$ .

При расчете составляющих магнитного и электрического полей необходимо многократное определение модифицированных функций Бесселя и их производных не только от действительного, но и от комплексного аргумента при изменении в широких пределах аргумента и порядка функции. Поэтому кроме основной программы составлены подпрограммы расчета модифицированных функций Бесселя и их производных от комплексного аргумента. По подпрограмме определяются надежные значения требуемых функций при изменении модуля их аргумента от 0 до 50 и порядка до 30.

На рис. 2 представлены некоторые графики расчетных зависимостей составляющих магнитного поля от координат  $r$ ,  $\alpha$ . Приведенные расчеты проводились при следующих исходных данных:  $2g=0,1$  см;  $b/a=2$ ;  $a=0,2$  см;  $d/a=2,5$ ;  $f=10^4$  Гц;  $I_1=1$  А;  $I_2=1 \angle 180^\circ$ .

На рис. 2, а представлены  $H_\alpha$  и  $H_z$  в зависимости от координаты  $r$  при  $\alpha=0$ .

Точность численного расчета при учете ограниченного числа членов ряда разложения определяется степенью удовлетворения граничных условий. На границе I и II расчетных областей ( $r=a$ ) в месте расположения полосок токопроводов существует разрыв касательных составляющих напряженности магнитного поля  $H_\alpha$  и  $H_r$ , значение которого равно соответствующей компоненте плотности тока в полоске.

Как видно из графиков (рис. 2, а) скачки значений  $H_\alpha$  и  $H_z$  соответствуют расчетным. На границах  $r=b$  и

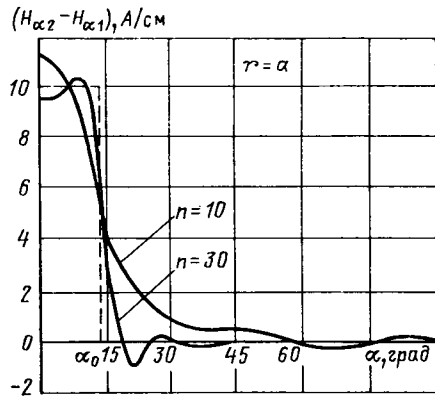


Рис. 3

$r=d$  значения  $H_\alpha$  и  $H_z$  в соответствующих областях совпадают.

На рис. 2, б представлено распределение составляющих магнитного поля в функции координаты  $r$  при  $\alpha=45^\circ$ . Скачки  $H_\alpha$  и  $H_z$  при  $r=a$  определяют погрешность расчета, которая вызвана ограничением числа членов ряда. Для оценки этой погрешности на рис. 3 представлены разности  $H_\alpha^I - H_\alpha^{II}$  при  $r=a$ , определяющие  $J_2$ , при различном числе членов ряда разложения  $J_8$ . При увеличении числа членов ряда распределение приближается к теоретическому (пунктир).

По мере удаления от границы областей I и II ( $r=a$ ) роль числа учитываемых членов ряда разложения резко ослабевает. Расчеты показали, что для определения поля в экране достаточно учесть пять членов ряда (при увеличении числа до 15 значения составляющих напряженности поля совпадают до пяти значащих цифр).

**Решение при наличии внешних токов.** Приведенные выше расчеты велись в предположении (1), что сумма токов в жилах и оболочке равна нулю. В реальных условиях передачи сигналов по кабелю это условие может не выполняться, так как вне кабеля могут находиться проводники с токами. Учет влияния внешних токов для случая одного внешнего проводника с током  $I_4$ , расположенного на расстоянии  $d_1$  от оси исходного кабеля. Вместо условия (1) для всех токов, создающих поле, будет справедливо соотношение

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0. \quad (34)$$

Внешний проводник, как и внутренние, представим тонкой полосой шириной  $2g_1$ . Область вне кабеля разделим на две области: IV —  $d \leq r \leq d_1$ ; V —  $d_1 \leq r$  (рис. 1). Остальные области выбраны такими же, как и при отсутствии внешнего тока. Влияние внешнего тока в областях I—III может быть учтено дополнительными слагаемыми в выражениях для составляющих электромагнитного поля. Эти слагаемые для областей I, II, III (запишем их с индексом «в» — от внешнего тока) представим в следующей форме:

$$H_r^{Iv} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a} D_{1n} \left( \frac{r}{a} \right)^{n-1} \sin n\alpha; \quad (35)$$

$$H_\alpha^{Iv} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r} D_{1n} \left( \frac{r}{a} \right)^n \cos n\alpha; \quad (36)$$

$$H_z^{Iv} = 0; \quad (37)$$

$$H_r^{IIv} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a} \left[ D_{3n} \left( \frac{r}{a} \right)^{n-1} + D_{4n} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} \right] \sin n\alpha; \quad (38)$$

$$H_\alpha^{IIv} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r} \left[ D_{3n} \left( \frac{r}{a} \right)^n + D_{4n} \left( \frac{a}{r} \right)^n \right] \cos n\alpha; \quad (39)$$

$$H_z^{IIv} = 0; \quad (40)$$

$$H_r^{IIIv} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r} [D_{8n} I_n(\gamma r) + D_{9n} K_n(\gamma r)] \sin n\alpha; \quad (41)$$

$$H_\alpha^{IIIv} = \gamma [D_{80} I'_0(\gamma r) + D_{90} K'_0(\gamma r)] + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma [D_{8n} I'_n(\gamma r) + D_{9n} K'_n(\gamma r)] \cos n\alpha; \quad (42)$$

$$H_z^{IIIv} = 0. \quad (43)$$

В областях IV и V полное поле естественно представить в виде

$$H_r^{IV} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{h} \left[ A_{5n} I'_n \left( \frac{2\pi n r}{h} \right) + A_{7n} K'_n \left( \frac{2\pi n r}{h} \right) \right] \times \\ \times \sin n\beta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{d_1} \left[ D_{5n} \left( \frac{r}{d_1} \right)^{n-1} + D_{7n} \left( \frac{d_1}{r} \right)^{n+1} \right] \sin n\alpha; \quad (44)$$

$$H_\alpha^{IV} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r} \left[ A_{5n} I_n \left( \frac{2\pi n r}{h} \right) + A_{7n} K_n \left( \frac{2\pi n r}{h} \right) \right] \times \\ \times \cos n\beta + A_{40} \frac{1}{r} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r} \left[ D_{5n} \left( \frac{r}{d_1} \right)^n + D_{7n} \left( \frac{d_1}{r} \right)^n \right] \cos n\alpha; \quad (45)$$

$$H_z^{IV} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{h} \left[ A_{5n} I_n \left( \frac{2\pi n r}{h} \right) + A_{7n} K_n \left( \frac{2\pi n r}{h} \right) \right] \cos n\beta; \quad (46)$$

$$H_r^V = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{h} A_{6n} K'_n \left( \frac{2\pi n r}{h} \right) \sin n\beta + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{d_1} D_{6n} \left( \frac{d_1}{r} \right)^{n+1} \sin n\alpha; \quad (47)$$

$$H_\alpha^V = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r} A_{6n} K_n \left( \frac{2\pi n r}{h} \right) \cos n\beta - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r} D_{6n} \left( \frac{d_1}{r} \right)^n \cos n\alpha; \quad (48)$$

$$H_z^V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{h} A_{6n} K_n \left( \frac{2\pi n r}{h} \right) \cos n\beta. \quad (49)$$

К граничным условиям, указанным ранее, добавляются условия при  $r=d_1$  (аналогичные условия при  $r=a$ ).

Применив все граничные условия, получим систему уравнений относительно неизвестных постоянных интегрирования. При этом уравнения, содержащие постоянные, которые определяют поле без учета внешнего тока, а значит, и сами эти постоянные, остаются такими же, как в рассмотренном ранее случае. Новые же постоянные интегрирования, обусловленные наличием

внешнего тока  $I_4$ , в результате решения полученной системы уравнений имеют следующие выражения:

$$A_{40} = -\frac{I_4}{2\pi}; \quad A_{50} = 0; \quad A_{6n} = A_{7n} = \frac{hQ_n}{2\pi\Delta ndK_n\left(\frac{2\pi nd}{h}\right)} \times$$

$$\times \left[ T_9 + \frac{pd^2}{b} T_{10} T_{13} \right];$$

$$D_{1n} = D_{3n} = \frac{a}{(\gamma b)^2} Q_{n3}; \quad D_{4n} = 0; \quad D_{5n} = \frac{I_4 d_1}{2\pi g_1 n^2} \sin \frac{ng_1}{d_1};$$

$$D_{6n} = \frac{I_4 d_1}{2\pi g_1 n^2} \sin \frac{ng_1}{d_1} \left[ \left( \frac{d}{d_1} \right)^{2n} \times \right.$$

$$\times \frac{I_{n+1}(\gamma b) K_{n+1}(\gamma d) - K_{n+1}(\gamma b) I_{n+1}(\gamma d)}{K_{n-1}(\gamma d) I_{n+1}(\gamma b) - I_{n-1}(\gamma d) K_{n+1}(\gamma b)} - 1 \Big];$$

$$D_{7n} = \left( \frac{d}{d_1} \right)^{2n} \frac{I_4 d_1}{2\pi g_1 n^2} \sin \frac{ng_1}{d_1} \times$$

$$\times \frac{I_{n+1}(\gamma b) K_{n+1}(\gamma d) - K_{n+1}(\gamma b) I_{n+1}(\gamma d)}{K_{n-1}(\gamma d) I_{n+1}(\gamma b) - I_{n-1}(\gamma d) K_{n+1}(\gamma b)};$$

$$D_{8n} = \left( \frac{d}{d_1} \right)^{n-1} \frac{I_4}{\pi g_1 n \gamma} \sin \frac{ng_1}{d_1} \times$$

$$\times \frac{K_{n+1}(\gamma b)}{I_{n+1}(\gamma b) K_{n-1}(\gamma d) - I_{n-1}(\gamma d) K_{n+1}(\gamma b)};$$

$$D_{9n} = D_{8n} \frac{I_{n+1}(\gamma b)}{K_{n+1}(\gamma b)};$$

$$D_{80} = \frac{1}{2\pi\gamma} \frac{(I_1 + I_2) K'_0(\gamma d) \frac{1}{b} + I_4 \frac{1}{d} K'_0(\gamma b)}{I'_0(\gamma b) K'_0(\gamma d) - I'_0(\gamma d) K'_0(\gamma b)};$$

$$D_{90} = -\frac{1}{2\pi\gamma} \frac{(I_1 + I_2) I'_0(\gamma d) \frac{1}{b} + I_4 I'_0(\gamma d) \frac{1}{d}}{I'_0(\gamma b) K'_0(\gamma d) - I'_0(\gamma d) K'_0(\gamma b)}.$$

Составляющие поля во всех областях определяются по (19)–(27), (35)–(49).

Учет дополнительного внешнего тока не усложняет численного расчета поля и не изменяет сходимости вычислительного процесса.

*Приложение.* В статье приняты следующие обозначения:

$$T_1 = \frac{I'_n\left(\frac{2\pi nb}{h}\right)}{I_n\left(\frac{2\pi nb}{h}\right)}; \quad T_2 = \frac{K'_n\left(\frac{2\pi nd}{h}\right)}{K_n\left(\frac{2\pi nd}{h}\right)}; \quad T_3 = \frac{ph}{2\pi n} T_2 -$$

$$- \left( \frac{\gamma h}{2\pi p d} \right)^2 \frac{K_n(pd)}{K'_n(pd)};$$

$$T_4 = \frac{ph}{2\pi n} T_1 - \left( \frac{\gamma h}{2\pi p b} \right)^2 \frac{K_n(pb)}{K'_n(pb)};$$

$$T_5 = I_n(pd) T_3 - I'_n(pd);$$

$$T_6 = K_n(pd) T_3 - K'_n(pd); \quad T_7 = I_n(pb) T_4 - I'_n(pb);$$

$$T_8 = K_n(pb) T_4 - K'_n(pb); \quad T_9 = I'_n(pb) K'_n(pd) -$$

$$- I'_n(pd) K'_n(pb);$$

$$T_{10} = \frac{(\gamma h)^2}{(2\pi)^2 (pd)^3}; \quad T_{11} = T_{10} \left[ \frac{d}{b} I_n(pb) - \frac{I_n(pd) K'_n(pb)}{K'_n(pd)} \right];$$

$$T_{12} = T_{10} \left[ \frac{d}{b} K_n(pb) - \frac{K_n(pd) K'_n(pb)}{K'_n(pd)} \right];$$

$$T_{13} = K_n(pb) I_n(pd) - I_n(pb) K_n(pd);$$

$$T_{14} = I_n(pb) K'_n(pd) - K_n(pb) I'_n(pd);$$

$$T_{15} = T_3 T_{13} + T_{14};$$

$$T_{16} = \frac{T_{10} T_{13}}{K'_n(pd)}; \quad T_{17} = \frac{K'_n\left(\frac{2\pi na}{h}\right)}{I'_n\left(\frac{2\pi na}{h}\right)};$$

$$Q_{n3} = -\frac{I_4}{\pi \Delta_1 n g_2} \left( \frac{d}{d_1} \right)^{n-1} \sin \frac{ng_1}{d_1};$$

$$T_{18} = K_n\left(\frac{2\pi nb}{h}\right) + \frac{ph^2}{(2\pi n)^2 b I_n\left(\frac{2\pi nb}{h}\right)} \frac{T_9 T_{15} - T_{16} K'_n(pb)}{\Delta};$$

$$\Delta_1 = K_{n-1}(\gamma d) I_{n+1}(\gamma b) - I_{n-1}(\gamma d) K_{n+1}(\gamma b);$$

$$\Delta = \left( \frac{d}{b} \right)^2 \frac{K'_n(pd)}{K'_n(pb)} [T_6 T_{11} - T_5 T_{12}] + T_7 [T_6 T_9 - T_{12}] -$$

$$- T_8 [T_5 T_9 + T_{11}].$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поливанов К. М., Негушил А. В., Жуховицкий Б. Я. Электромагнитное влияние многопроводной линии с учетом скручивания проводов. — Электричество, 1951, № 7.
2. Мирзабекян Ж. М., Рубанович С. Г. Расчет электромагнитного поля в симметричных кабелях связи. — Электричество, 1982, № 4.
3. Мирзабекян Ж. М., Рубанович С. Г. Определение электрических потерь в экране симметричных кабелей с многократно скрученными жилами. — Электричество, 1982, № 1.
4. Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961.
5. Gard V. K. Algorithm 103. Computing the Bessel functions  $Y_n(x+iy)$  and  $K_n(x+iy)$ . — The Computer Journal, 1978, N 3. [01.04.87]



# Синхронные, многочастотные и хаотические процессы в системах связанных генераторов

ГРАЧЕВА И. Ю., ГРИБКОВ Д. А., КУЗНЕЦОВ Ю. И., МИНАКОВА И. И.

В последнее время возрос интерес к изучению систем из многих взаимодействующих генераторов. В радиотехнике это связано с созданием генерирующих систем с большим числом активных элементов, в энергетике — с созданием энергетических систем, включающих большое число генераторов.

Например, проблема передачи энергии направленным СВЧ-излучением и проблема создания мощных систем ВЧ-нагрева при использовании современной полупроводниковой элементной базы, естественным образом приводят к задаче построения систем взаимодействующих генераторов, работающих на общую нагрузку.

Системы связанных генераторов представляют собой нелинейные системы с многими степенями свободы и характеризуются разнообразием возможных режимов. В них возможны как синхронные [1—4], так и многочастотные [5] и хаотические режимы [6].

Наиболее полно рассмотрены одночастотные режимы взаимной синхронизации для случая квазилинейных генераторов, что соответствует малым нелинейностям активных элементов [1—3]. В ряде работ рассмотрена взаимная синхронизация релаксационных генераторов (большие нелинейности) [4]. При нелинейности, соответствующей промежуточному между квазилинейным и релаксационным случаями, динамика систем связанных генераторов даже в синхронных режимах (не говоря уже о многочастотных и хаотических режимах) изучена недостаточно полно. В этом случае использование каких-либо аналитических методов исследования крайне затруднено и наиболее эффективным методом является математическое моделирование процессов с использованием ЭВМ.

Математическая модель достаточно широкого класса систем генераторов с кубической нелинейностью активного элемента, связанных между собой различными типами связей (в том числе и резонансными), может быть представлена в виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_i - \varepsilon_i (1 - x_i^2) \dot{x}_i + \nu_i^2 x_i &= \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} x_j + \sum_{j \neq i} \gamma_{ij} \dot{x}_j + \\ &+ \sum_{j \neq i} \beta_{ij} \ddot{x}_j; \\ \ddot{x}_k + 2\delta_k \dot{x}_k + \nu_k^2 x_k &= \sum_{m \neq k} \alpha_{km} x_m + \sum_{k \neq m} \gamma_{km} \dot{x}_m + \\ &+ \sum_{m \neq k} \beta_{km} \ddot{x}_m, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $i, j, k, m = 1, 2, \dots, N$ ;  $\varepsilon_i$  — характеризует инкремент и нелинейное затухание  $i$ -го генератора;  $\nu_i$  — парциальная частота контура  $i$ -го генератора;  $\alpha$ ,  $\gamma$  и  $\beta$  — коэффициенты емкостной, резистивной и индуктивной связей соответственно;  $\delta_k$  — затухание пассивного колебательного  $k$ -го контура,  $\nu_k$  — парциальная частота этого контура.

Для квазилинейных генераторов  $\varepsilon \ll 1$ , случай  $\varepsilon \gg 1$  соответствует релаксационным генераторам.

Исследование модели (1) проводилось методом численного интегрирования уравнений с последующим спектральным анализом стационарных решений. При

численном интегрировании использовался метод Рунге — Кутты 4-го порядка, при спектральном анализе использовался алгоритм быстрого Фурье-преобразования (БФП). Для повышения точности определения частот, амплитуд и фаз спектральных компонент применялись обработка временного массива окном Блэкмана — Хэрриса и добавление нулей [7]. Шаг интегрирования и объем обрабатываемого массива выбирались обеспечивающими точность определения частот  $\Delta\omega/\omega \approx 0,2\%$ , амплитуд  $\Delta A/A \approx 2\%$  и фаз  $\Delta\varphi/\varphi \approx 2\%$ .

Указанная методика исследования позволяет изучать механизмы переходов к синхронным режимам и эволюции многочастотных спектров при изменении параметров системы. С формальной точки зрения не существует принципиальных ограничений на количество взаимодействующих генераторов и резонансных связей в исследуемых системах. Увеличение  $N$  потребует лишь больших затрат машинного времени и ресурсов памяти. Однако физическая интерпретация процессов, происходящих в таких системах, требует в первую очередь анализа процессов в системах, состоящих из не очень большого числа генераторов и резонансных связей. В дальнейшем в качестве объектов исследования были выбраны системы из двух взаимодействующих генераторов при различных типах связи [9] (в том числе и через пассивный резонансный контур) и система из четырех взаимодействующих генераторов при связи каждого с каждым [10]. Исследование проводилось при нелинейности активных элементов генераторов  $0,1 \leq \varepsilon \leq 4$ , что соответствует промежуточному случаю между квазилинейным и релаксационным типами генераторов.

Несколько отличающимися от предложенного общего подхода к исследованию процессов в системах связанных генераторов являются исследования хаотических процессов. В этом случае исследована не модель (1), в которой при  $N=2$  возможны хаотические процессы, а более простые (с точки зрения минимального количества независимых переменных) модели с полутора колебательными степенями свободы при внешнем гармоническом воздействии. Задача исследования влияния внешнего периодического воздействия на процессы в системах с хаотическими процессами носит принципиальный характер и такое упрощение оправдано. Результаты общего характера, полученные на упрощенных моделях, могут быть распространены на процессы в системах взаимодействующих генераторов, описываемых моделью (1). Действительно, внешнее периодическое воздействие на систему с хаотическими процессами соответствует случаю взаимодействия генератора периодических колебаний через однонаправленную связь с системой генераторов, находящейся в режиме хаотических колебаний. Что касается методики исследования, то в этих случаях достаточно информативным является построение на основе результатов численного интегрирования уравнений точечных отображений Пуанкаре.

Для изучения особенностей поведения системы взаимодействующих генераторов в многочастотных режимах и механизмов переходов к синхронному режиму в зависимости от величины и типа связи были исследованы эволюции спектров системы двух связанных генераторов при резистивной связи ( $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = 0$ ,  $\gamma_{ij} \neq 0$ ,  $N=2$ ) и

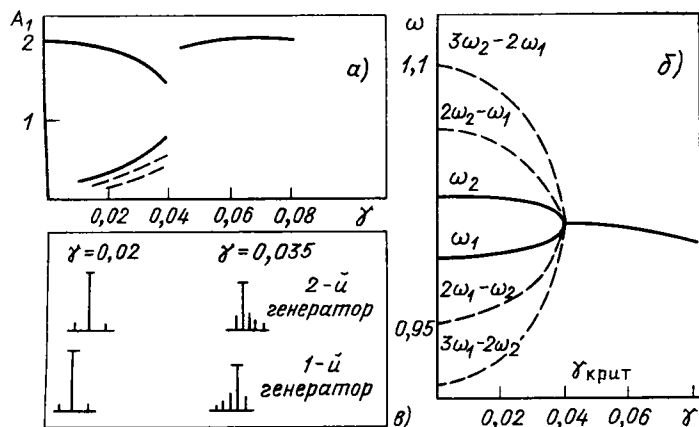


Рис. 1

реактивной связи ( $\alpha_{ij} \neq 0$ ,  $\beta_{ij} \neq 0$ ,  $\gamma_{ij} = 0$ ,  $N=2$ ) при  $\varepsilon = 0.1 \div 2.5$  [10].

Было установлено, что при резистивной связи между генераторами основным механизмом взаимной синхронизации является механизм взаимного подтягивания частот генерации друг к другу при небольшом уменьшении амплитуд основных спектральных составляющих. На рис. 1 приведены характерные зависимости амплитуд (рис. 1, а) и частот спектральных составляющих (рис. 1, б) от величины связи и спектры колебаний в обоих генераторах (рис. 1, в) при фиксированных связях. Здесь  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji} = \gamma$ , что соответствует взаимным связям, и  $\varepsilon = 0.6$ . Помимо основной и наведенной составляющих с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в каждом из генераторов в многочастотном режиме присутствуют близкие к  $\omega_1$  и  $\omega_2$  комбинационные составляющие с частотами  $(n\omega_1 - m\omega_2)$ , где  $n$  и  $m$  — целые числа.

Спектры колебаний в каждом из генераторов носят асимметричный характер, максимальное значение имеет

амплитуда основной составляющей. При увеличении параметра  $\varepsilon$  спектры обогащаются большим количеством комбинационных составляющих благодаря увеличению амплитуд гармоник. С ростом связи  $\gamma$  происходит увеличение амплитуд и плавное сближение частот комбинационных составляющих. В системе имеется единственный одночастотный синхронный режим, частота которого близка к  $(\omega_{10} + \omega_{20})/2$ . По мере увеличения  $\gamma$  в синхронном режиме амплитуды колебаний в генераторах несколько возрастают, а частота автоколебаний системы падает за счет поправки частоты Ван-дер-Поля [8], связанной с увеличением амплитуд гармоник.

При исследовании взаимной синхронизации генераторов при реактивной связи ( $\alpha_{ij} \neq 0$ ,  $\beta_{ij} \neq 0$ ,  $\gamma_{ij} = 0$ ) можно существенно упростить задачу введением эквивалентной реактивной связи. Для стационарного синхронного режима справедливо выражение

$$\alpha_{ij}x_j + \beta_{ij}\ddot{x}_j \approx \alpha_{ij}x_j - \omega^2\beta_{ij}x_j. \quad (2)$$

Для небольшого диапазона изменения  $\omega$  ( $\Delta\omega/\omega \approx 10^{-1}$ ) и многочастотных режимов можно ввести эквивалентный коэффициент реактивной связи:

$$(\alpha_{ij})_э \approx \alpha_{ij} - \omega^2\beta_{ij}. \quad (3)$$

Знак  $(\alpha_{ij})_э$  определяет емкостной ( $\alpha_{э} > 0$ ) или индуктивный ( $\alpha_{э} < 0$ ) характер связи. В дальнейшем приведем результаты исследований системы двух генераторов для случая взаимной емкостной связи  $(\alpha_{ij})_э = (\alpha_{ji})_э = \alpha$ . Численный эксперимент, проведенный для случая реактивной связи показал, что в этом случае механизм перехода к синхронному режиму является механизмом гашения собственных колебаний в каждом из генераторов и изменение скачком при  $\alpha = \alpha_{кр}$  частоты и амплитуды до значений, соответствующих синхронному режиму.

На рис. 2 приведены амплитудные (рис. 2, а) и

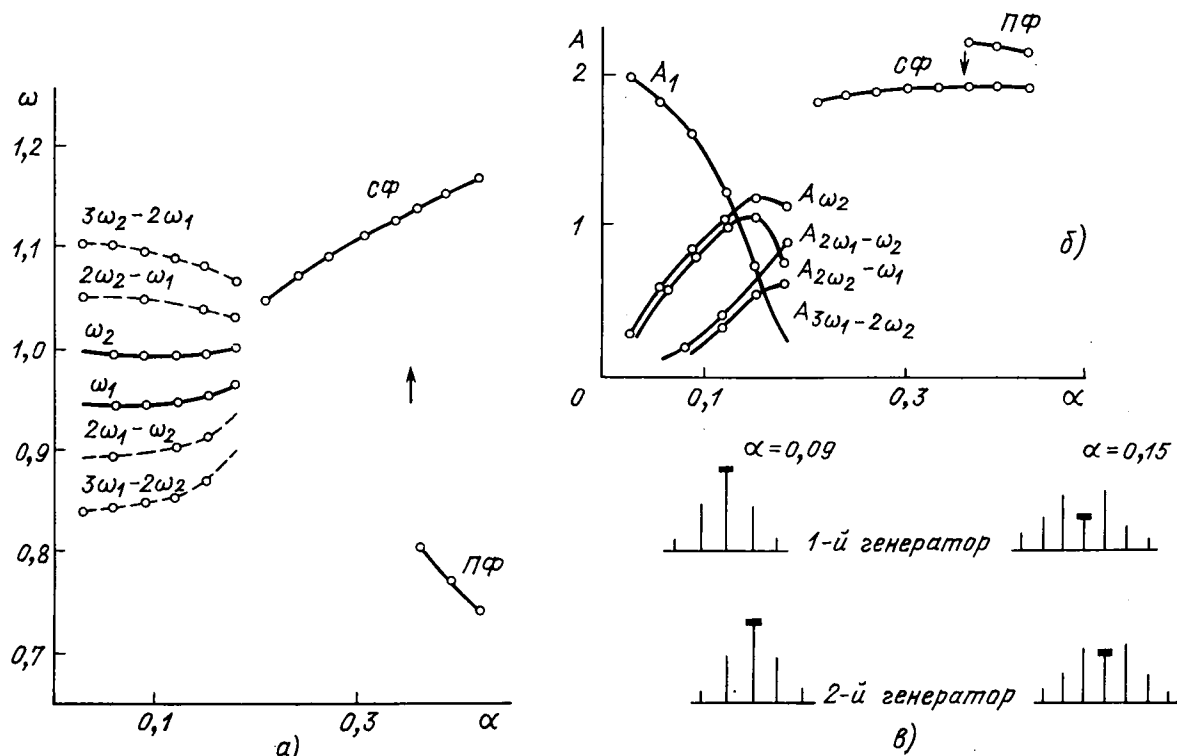


Рис. 2

частотные (рис. 2, б) зависимости и показан характер эволюции спектров (рис. 2, в) при изменении величины  $\alpha$  (параметр  $\varepsilon=0,6$ ). Отметим, что при реактивной связи в синхронном одночастотном режиме возможны два альтернативных состояния с синфазными (СФ) или противофазными (ПФ) колебаниями в обоих генераторах. Установление того или иного режима в области двузначности зависит от начальных условий. Спектр многочастотного режима в каждом из генераторов (рис. 2, в) отличается характерным симметричным видом. В области заметного гашения основной составляющей вблизи  $\alpha=\alpha_{кр}$  огибающая многочастотного спектра имеет два максимума. В этом случае в спектре могут возникать комбинационные составляющие, амплитуды которых превышают амплитуду основного колебания. Аналогичные результаты были получены для величин  $\varepsilon=0,2 \div 2,0$ .

Эволюция спектра многочастотных режимов в зависимости от типа (резистивная или реактивная) и величины связи может быть объяснена, если учесть эволюцию резонансных свойств линейной части колебательной системы связанных генераторов. Амплитудно-частотные характеристики двух связанных контуров с отличающимися парциальными частотами по-разному зависят от величины связи при резистивном и реактивном характерах связи: при  $\gamma \approx \gamma_{кр}$  два максимума сливаются в один, а при  $\alpha \approx \alpha_{кр}$  отдельные максимумы заметно расходятся (расхождение резонансных частот наблюдается даже при равенстве парциальных частот). Расчет резонансных характеристик линейных колебательных систем подтвердил, что полученные в математическом эксперименте формы огибающих спектров многочастотных колебаний связанных генераторов определяется именно видом резонансных характеристик линейной части системы.

Остановимся теперь на результатах численного эксперимента для системы двух генераторов, взаимодействующих через резонансный контур ( $N=3$ ). В этом случае имеется три колебательные степени свободы.

Рассмотрим вначале случай, когда каждый из генераторов связан с пассивным контуром посредством резистивной взаимной связи. На рис. 3 приведены типичные результаты зависимости частот основных составляющих от величины резистивной связи  $\gamma$  и вид многочастотных спектров вблизи точек перехода к одночастотным режимам при малых величинах расстроек парциальных частот генераторов и контура связи ( $\Delta\nu/\nu=2 \div 20\%$ ) и  $\varepsilon=1$ . Здесь одновременно нанесены два набора кривых для различных значений добротности контура связи  $Q_k$  ( $Q_k=10$ ,  $Q_k=50$ ) и представлены случаи различного соотношения между парциальными частотами генераторов  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  и контура  $\nu_k$ : на рис. 3, а —  $\nu_k < \nu_1, \nu_2$ , на рис. 3, б —  $\nu_2 < \nu_k < \nu_1$  и на рис. 3, в —  $\nu_k > \nu_1, \nu_2$  (парциальная частота контура обозначена пунктирной линией). Из этих данных достаточно отчетливо видно, что в одночастотном синхронном режиме при увеличении связи частота системы стремится к резонансной частоте контура связи, причем с увеличением добротности контура это прослеживается более четко. Отметим, что в синхронном режиме в контурах генераторов и в контуре связи колебания при  $\nu_2 < \nu_k < \nu_1$  синфазны.

Общий ход частотных кривых свидетельствует о том, что характер связи между генераторами определяется расстройкой парциальных частот генераторов относительно парциальной частоты контура и добротностью последнего. В случае  $\nu_k \approx (\nu_1 + \nu_2)/2$  связь между генераторами носит резистивный характер и механизмом перехода к синхронному режиму является механизм подтягивания. При отстройке парциальной частоты контура

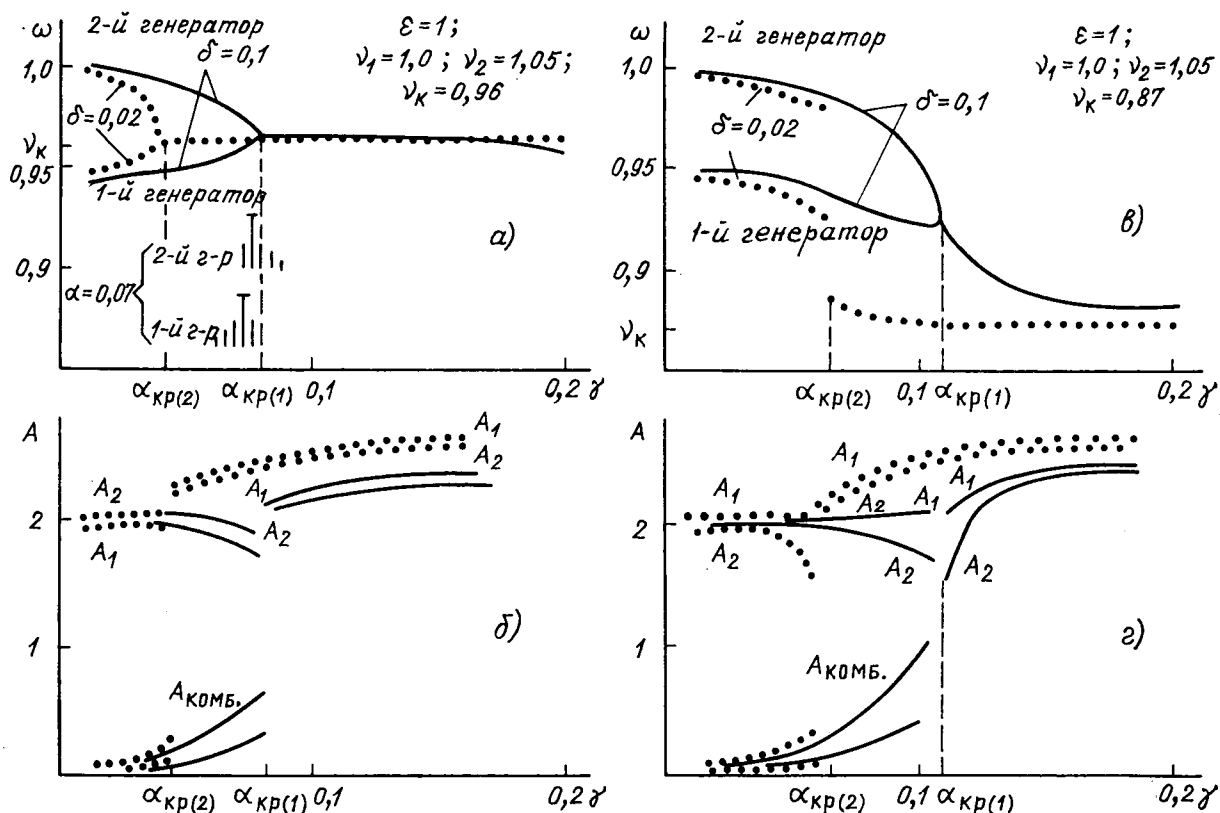


Рис. 3

относительно парциальных частот генераторов связь носит смешанный характер (резистивно-реактивный), что определяет соотношение механизмов подтягивания и гашения при установлении синхронного режима.

Проявление механизма гашения при отстройке парциальной частоты контура относительно парциальных частот генераторов выражено более сильно для больших добротностей контура. Величина критической связи  $\gamma_{кр}$ , при которой происходит переход к одночастотному режиму, зависит от добротности и расстройки контура связи относительно частот генераторов:  $\gamma_{кр}$  уменьшается при увеличении добротности контура и уменьшении расстройки. Виды многочастотных спектров колебаний системы вблизи перехода к одночастотному режиму ( $\gamma \approx \gamma_{кр}$ ) представлены на рис. 3, в. Отметим, что огибающая этих спектров имеет один максимум, что определяется видом резонансных характеристик линейной части системы вблизи перехода к одночастотному режиму. Как и следовало ожидать, многочастотные спектры богаче при меньших значениях добротности контура связи за счет большего числа значимых спектральных составляющих на комбинационных частотах.

В случае, когда каждый из генераторов связан с пассивным контуром реактивной взаимной связью ( $\gamma=0$ ,  $\alpha \neq 0$ ), установлено, что имеется три альтернативных стационарных одночастотных синхронных режима. На рис. 4, а приведены частотные кривые для основных частотных составляющих многочастотного режима и альтернативные одночастотные синхронные режимы при  $\alpha > \alpha_{кр}$ . Синхронный режим, имеющий частоту  $\omega_r \approx (\omega_{01} + \omega_{02})/2$ , является энергетически наиболее выгодным и слабо зависит от частоты контура  $\nu_k$  и величины связи  $\alpha$ .

Именно этот режим устанавливается в системе при увеличении величины связи  $\alpha$ . В этом режиме колебания в генераторах находятся в противофазе, амплитуда колебаний в контуре связи мала. Участки верхней и нижней ветвей частотных характеристик альтернативных одночастотных режимов изолированы. Получить стационарные состояния системы, соответствующих этим ветвям, можно заданием начальных условий — амплитуд и фаз колебаний. На верхней ветви колебания в обоих генераторах и контуре синфазны, на нижней ветви колебания в контуре связи противофазны синфазным колебаниям в генераторах. Условия возникновения альтернативных синхронных режимов и их устойчивость существенно зависят от величины  $\varepsilon$ . Например, по мере уменьшения  $\varepsilon$  улучшаются условия существования режимов, соответствующих верхней и нижней ветвям частотных характеристик альтернативных одночастотных режимов.

Существование трех альтернативных синхронных режимов определяется возможностью наличия трех резонансных частот у амплитудно-частотной характеристики линейной части системы при достаточно больших реактивных связях между контуром и каждым генератором. При увеличении связи расстройка между резонансными частотами линейной части системы растет. Огибающая спектра многочастотного режима вблизи перехода к одночастотным колебаниям также определяется резонансной характеристикой линейной части системы. На рис. 4, б представлен характерный вид спектра многочастотных колебаний при  $\alpha \approx \alpha_{кр}$ . Отметим, что переход системы от многочастотного к одночастотному режиму сопровождается скачком амплитуды колебаний (см. рис. 4, в).

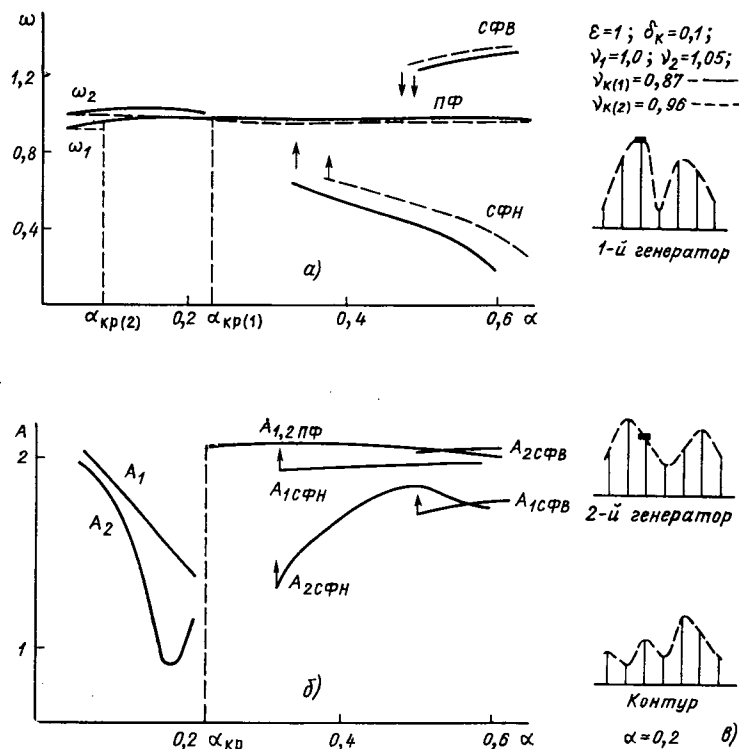


Рис. 4

Математическое моделирование процессов в системе из четырех генераторов, связанных взаимными резистивными или реактивными связями ( $N=4$ ), показало, что при увеличении числа генераторов механизмы перехода от многочастотных режимов к синхронным неизменны — подтягивание частоты при резистивных связях и гашение при реактивных связях. Однако при большом числе взаимодействующих генераторов возможно установление взаимной синхронизации в отдельных частях системы. В этом случае несколько взаимно синхронизированных генераторов образуют подсистему, которая может рассматриваться как некоторый эквивалентный генератор, взаимодействующий с остальной частью системы.

На рис. 5 представлены результаты моделирования процессов в системе из четырех генераторов, связанных взаимными реактивными связями при  $\varepsilon=1$ . На рис. 5, а приведены частотные кривые, на рис. 5, б — эволюция многочастотных спектров при изменении связи. Возможность образования подсистем генераторов может приводить к существованию среди альтернативных режимов не только одночастотных, но и многочастотных синхронных режимов. На рис. 5, а при  $\alpha > \alpha_{кр} = 0.2$ , сплошные линии соответствуют одночастотным режимам, пунктирные линии — двухчастотному режиму (рядом с частотными кривыми стрелками указаны соотношения фаз колебаний в отдельных генераторах). Реализация того или иного альтернативного режима зависит от начальных условий.

Результаты математических экспериментов отчетливо показали, что для многочастотных и альтернативных синхронных режимов фактором, определяющим распределение энергии по отдельным спектральным компонентам, является резонансная характеристика линейной части системы.

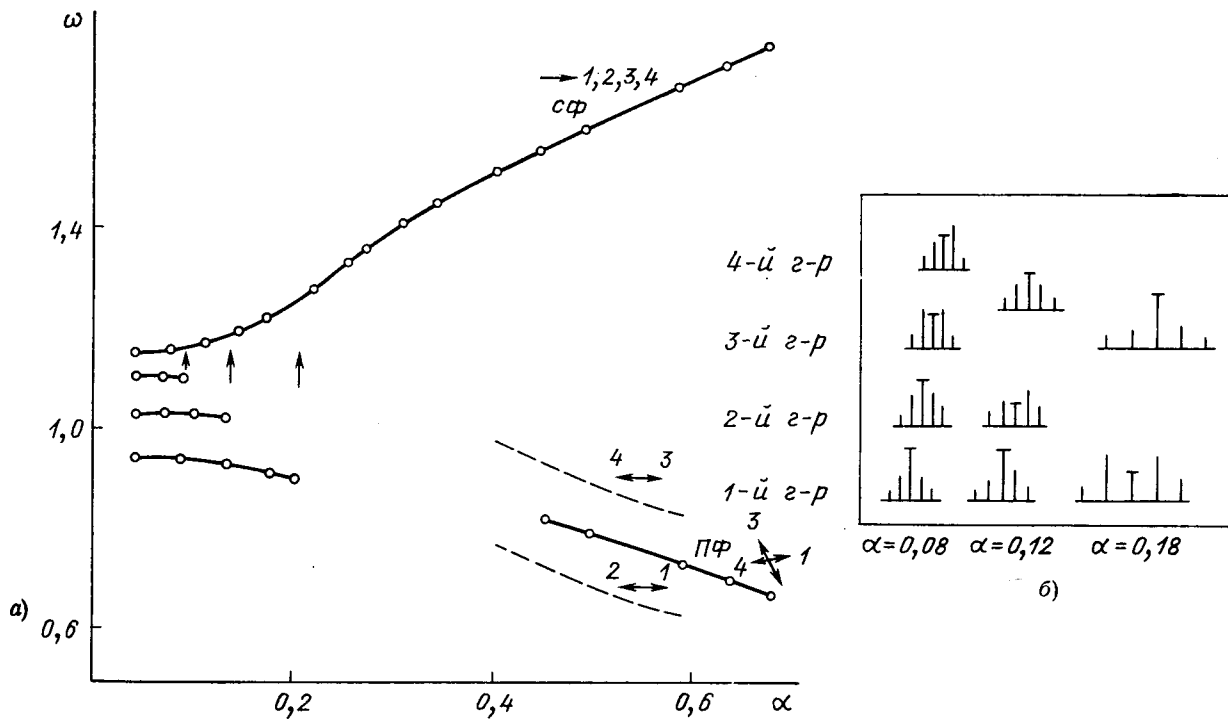


Рис. 5

Как уже было сказано ранее, в системах взаимодействующих генераторов возможны не только одночастотные и многочастотные, но и хаотические режимы. В хаотическом режиме система характеризуется сложным непредсказуемым поведением и генерирует хаотические колебания, имеющие сплошной спектр и быстро спадающую корреляционную функцию. В настоящее время известно большое число работ, в которых исследованы процессы перехода генерирующих систем от регулярных колебаний к хаотическим режимам (см., например, обзоры [11, 12]).

За исключением специальных применений (генераторы шума) хаотические режимы являются крайне нежелательными. Поэтому исследование возможности подавления хаотических режимов генерирующей системы является актуальной и практически значимой задачей. В последнее время выяснилось, что системы, генерирующие хаотические колебания, могут быть синхронизированы периодическим внешним воздействием, т. е. внешнее периодическое воздействие может переводить систему из режима хаотических в режим регулярных колебаний [13—16].

В качестве примера на рис. 6, а представлена часть областей синхронизации генератора хаотических колебаний с туннельным диодом ТД в цепи колебательного контура [13], схема которого показана на рис. 6, б. Внешнее периодическое воздействие подается в цепь туннельного диода. Математическая модель системы имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2h\dot{x} + x + gz &= 0; \\ \varepsilon \dot{z} &= x - f(z) + A_{\text{вн}} \cos pt, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $x$  — безразмерный ток в контуре;  $h$  — инкремент нарастания колебаний в контуре при отсутствии ТД,  $g$  — параметр, определяющий степень влияния ТД на процессы в контуре;  $\varepsilon$  — малый параметр, пропорциональный емкости ТД,  $f(z)$  — безразмерная характери-

стики ТД;  $A_{\text{вн}}$ ,  $p$  — амплитуда и частота внешнего воздействия.

В автономном режиме ( $A_{\text{вн}}=0$ ) в зависимости от величины  $h$  (при фиксированных остальных параметрах —  $\varepsilon=0,05$ ,  $g=0,1$ ) система генерирует либо периодические последовательности цугов нарастающих колебаний, либо хаотические колебания [13]. С увеличением  $h > h_{\text{кр}}$  система последовательно проходит через области генерации периодической последовательности цугов колебаний с  $M$ ,  $M-1$ , ..., 2, 1 колебанием основной частоты в каждом цуге. На рис. 6, в показан спектр колебаний, соответствующий устойчивым пятитактным циклам (цуги нарастающих колебаний с пятью колебаниями основной частоты в каждом цуге). Между областями периодических режимов расположены области хаотических режимов.

На рис. 6, г показан спектр хаотических колебаний в области хаоса, соседствующей с областью генерации пятитактного цикла. Именно этому хаотическому режиму автономной системы соответствуют результаты исследования синхронизации хаотических колебаний системы, представленные на рис. 6, а. В областях синхронизации устанавливаются периодические режимы с дискретным спектром колебаний, зависящим от области синхронизации [13]. Например, в области I (см. рис. 6, а) вид спектра синхронизированных колебаний близок к показанному на рис. 6, в.

Остановимся на характерных особенностях синхронизации хаотических колебаний периодическим внешним воздействием. Во-первых, синхронизация хаотических колебаний происходит вблизи характерных частот системы, обуславливающих окраску сплошного спектра этих колебаний автономной (без внешнего воздействия) системы [13—15]. Это указывает на то, что при переходе автономной системы из режима регулярных колебаний в режим хаотических устойчивая структура фазового портрета системы разрушается и возникает странный аттрактор (геометрический образ хаотических колебаний в фазовом пространстве системы [11]), который несет в себе отпечаток той устойчивой структуры, из которой

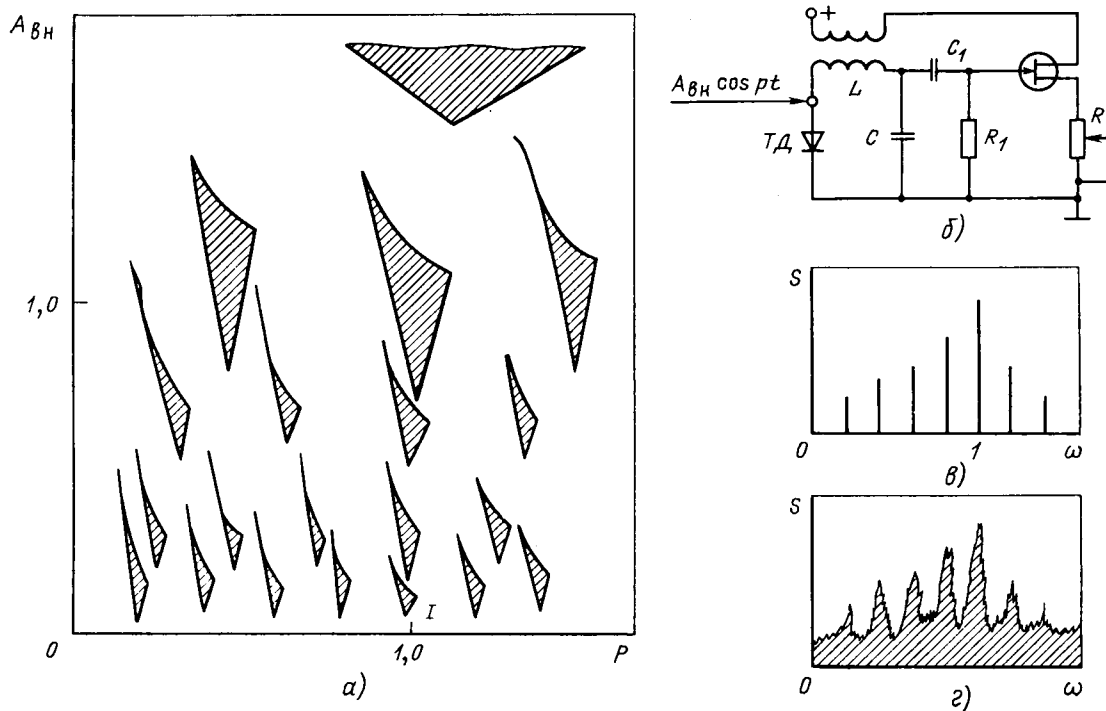


Рис. 6

он возник! Это и проявляется в окраске сплошного спектра хаотических колебаний теми характерными частотами, которые имела система до перехода в режим хаоса (см. спектры, представленные на рис. 6, в, г).

Во-вторых, принципиальной особенностью синхронизации хаотических колебаний является наличие амплитудного порога синхронизации [13–16]. Если внешняя синхронизация системы, генерирующей регулярные колебания, при совпадении частоты внешнего воздействия с собственной частотой автономной системы возможна при сколь угодно малой амплитуде внешнего воздействия [8], то синхронизация хаотических колебаний происходит при превышении амплитуды внешнего воздействия некоторого порогового значения. Более того, выяснилось [16], что значение амплитудного порога синхронизации  $A_{II}$  может служить мерой хаоса автономной системы, так как имеет место степенная зависимость амплитудного порога от такой общепринятой меры хаоса как энтропия Колмогорова  $K_m$ :

$$A_{II} = C (K_m)^{1/2}, \quad (5)$$

где  $C$  — коэффициент пропорциональности, постоянный для каждой системы.

Это обстоятельство позволяет использовать значение амплитудного порога синхронизации хаотических колебаний как меру хаоса автономной системы, что важно при экспериментальных исследованиях.

Синхронизация хаотических колебаний внешним периодическим воздействием может служить стабилизирующим фактором и переводить систему из режима хаотических в режим регулярных колебаний. Внешнее воздействие в этом случае необходимо подавать на одной из характерных частот и амплитуда должна превышать порог синхронизации. В тех случаях, когда система имеет несколько областей синхронизации, внешним периодическим воздействием можно не только синхронизировать хаотические колебания, но и управлять спектром синхронизированных регулярных движений (изменяя частоту и амплитуду внешнего воздействия [13]).

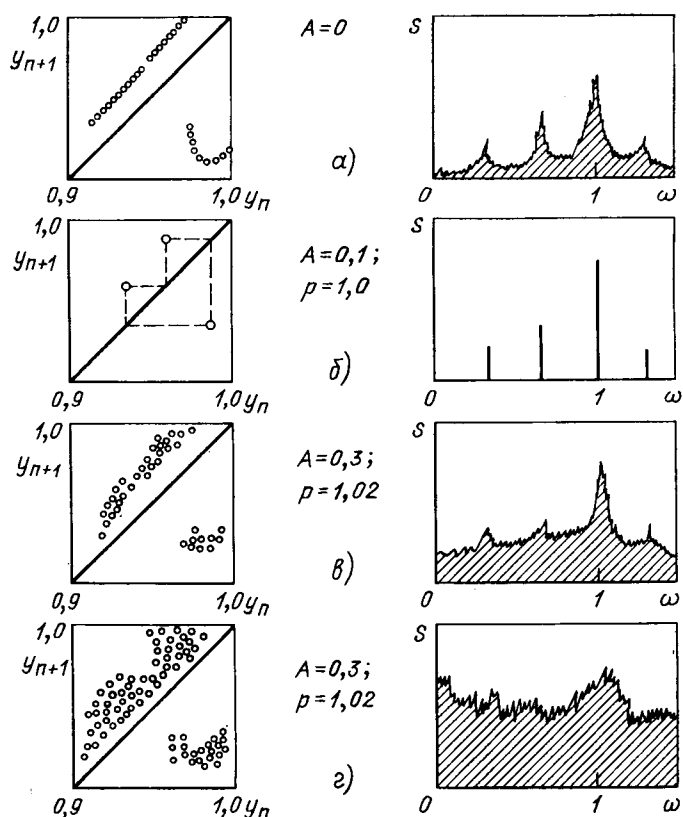


Рис. 7

Остается открытым вопрос — как ведет себя система при внешнем периодическом воздействии в том случае, когда параметры воздействия (амплитуда и частота) находятся вне области синхронизации? Для выяснения этого вопроса изучалось влияние внешнего периодического воздействия на поведение системы (4) вне областей синхронизации. С этой целью исследовались эволюции точечного отображения Пуанкаре и спектра движений

системы при изменении параметра внешнего воздействия вне областей синхронизации.

На рис. 7 слева представлены точечные отображения Пуанкаре  $y_{n+1}=f(y_n)$  полуплоскости  $x=0$ ,  $y=\dot{x} \geq 0$  фазового пространства системы  $(x, y=\dot{x}, z)$  и справа — вид соответствующих спектров. Рис. 7, а соответствует автономному режиму ( $A_{\text{вн}}=0$ ) генерации хаотических колебаний в области хаоса, примыкающей к области генерации трехтактного цикла ( $M=3$ ); рис. 7, б —  $A_{\text{вн}}=0,1$ ,  $p=1,0$ , что соответствует области синхронизации, в которой имеют место синхронизированные колебания с  $M=3$ ; рис. 7, в —  $A_{\text{вн}}=0,1$ ,  $p=1,02$ , рис. 7, г —  $A_{\text{вн}}=0,3$ ,  $p=1,02$ . Отметим, что отображение, соответствующее хаотическому режиму автономной системы (рис. 7, а), близко к одномерному и имеет единственный положительный ляпуновский показатель [17]:

$$\lambda^+ = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \frac{df}{dy}. \quad (6)$$

Для случая представленного на рис. 7, а  $\lambda^+ \approx 0,01 > 0$ , что свидетельствует о хаотичности процессов (для трехмерных систем энтропия Колмогорова  $K_m = \lambda^+$ ). Вне области синхронизации с увеличением амплитуды внешнего периодического воздействия увеличивается размерность странного аттрактора (отображение перестает быть одномерным) и спектр хаотических колебаний становится более равномерным. Все это свидетельствует об усилении хаотичности процессов с увеличением амплитуды внешнего воздействия.

Таким образом, внешнее периодическое воздействие на системы с хаосом в зависимости от параметров (амплитуды и частоты) может оказывать как стабилизирующее действие (режим синхронизации), так и усиливать хаотичность процессов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы теории колебаний / В. В. Мигулин, В. И. Медведев, Е. Р. Мустель, В. Н. Парыгин. — М.: Наука, 1978.

2. Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. — М.: Наука, 1980.

3. Дворников А. А., Уткин Г. М. Фазированные автогенераторы радиопередающих устройств. — М.: Энергия, 1980.

4. Романовский Ю. М. О взаимной синхронизации многих автоколебательных систем, связанных через общую среду. — Изв. вузов. Радиофизика, 1972, т. 15, № 5.

5. Дворников А. А., Уткин Г. М. О многочастотных режимах многоэлементных автогенераторов. — Радиотехника и электроника, 1977, т. 22, № 6.

6. Кальянов Э. В., Лебедев М. Н. Стохастические колебания в системе связанных генераторов при наличии инерционности. Радиотехника и электроника, 1985, т. 30, № 8.

7. Хэррис Ф. Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье. — ТИИЭР, 1978, т. 66, № 1.

8. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1952.

9. Дудник Е. Н., Кузнецов Ю. И., Минакова И. И. Механизмы взаимной синхронизации в системах автогенераторов с однонаправленными связями. — Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1984, т. 27, № 7.

10. Грачева И. Ю., Кузнецов Ю. И., Минакова И. И. Влияние связей на спектры взаимодействующих генераторов. — Вестник Моск. ун-та. Сер. Физ., астроном., 1985, т. 26, № 6.

11. Рабинович М. И. Стохастические автоколебания и турбулентность. — Успехи физ. наук, 1978, т. 125, вып. 1, № 5.

12. Гапонов-Грегов А. В., Рабинович М. И. Манделштам Л. И. и современная теория нелинейных колебаний и волн. — Успехи физ. наук, 1979, т. 128, вып. 4, № 8.

13. Кузнецов Ю. И., Минакова И. И., Сильнов Б. А. Поведение автогенератора хаотических колебаний при внешнем периодическом воздействии. — Вестник Моск. ун-та. Сер. Физ., астроном., 1986, т. 27, № 2.

14. Синхронизация в системах со странным аттрактором / Е. Н. Дудник, Ю. И. Кузнецов, И. И. Минакова, Ю. М. Романовский. — Вестник Моск. ун-та. Сер. Физ., астроном., 1983, т. 24, № 4.

15. Синхронизация хаотических автоколебаний / Ю. И. Кузнецов, В. В. Мигулин, И. И. Минакова, Б. А. Сильнов. — Доклады АН СССР, 1984, т. 275, № 6.

16. Амплитудный порог синхронизации как мера хаоса в стохастических автоколебательных системах / Ю. И. Кузнецов, П. С. Ланда, А. Ф. Ольховой, С. М. Перминов. — Доклады АН СССР, 1985, т. 281, № 2.

17. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984.

[29.01.87]

УДК 621.3:538.3:536.7

## Использование аппарата универсальной теории Фейгенбаума для колебательного контура с нелинейной емкостью

МУЧНИК Г. Ф., ДОМАНИН М. Г., АСТАХОВ А. Ю.

Москва

В последние годы большое развитие получают исследования, связанные с разработкой М. Фейгенбаумом теории универсальности. Были получены некоторые общие закономерности перехода динамических систем различной природы от устойчивого типа движения (аттракторы) к неустойчивому типу (странный аттрактор). Установлено, что переход от порядка к хаосу происходит по принципу удвоения периода и характеризуется несколькими универсальными константами [1, 2].

Существование универсальных констант для систем, испытывающих удвоение периода при переходе в хаотический режим, строго доказано лишь для небольшого класса итерационных процессов (процессы дискретные во времени), для систем же, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями (процессы непрерывные во времени), указанный факт гипотетичен, и его справедливость подтверждается лишь физическими и

численными экспериментами (модель Лоренца [3, 4], физический маятник [5]).

В настоящей статье приведены исследования перехода в режим стохастических колебаний  $RLC$ -контура с нелинейной емкостью, возбуждаемого гармонической э. д. с. Кулон-вольтовая характеристика емкости имеет вид  $u=Gq^3$ , соответствующий процессу заряда двойного слоя на границе раздела фаз [6]. Уравнение, описывающее указанный контур, может быть представлено в безразмерном виде [7]:

$$\ddot{x} + R\dot{x} + x^3 = B \cos \alpha t,$$

где  $x=q/q_0$  — нормированное значение текущего заряда конденсатора;  $q_0$  — некоторое фиксированное значение заряда, выбираемое из соображений удобства представления уравнения в безразмерном виде;  $R = \frac{r}{\omega_0 L}$  — пара-

метр, характеризующий диссипацию энергии;  $r$  — активное сопротивление контура;  $\omega_0 = \sqrt{Gq^2/L}$  — характерная частота колебаний;  $L$  — индуктивность контура;  $\tau = \omega_0 t$  — относительное время;  $B = E_m/Gq_0^3$  — параметр, характеризующий амплитуду вынуждающей силы;  $E_m$  — амплитуда гармонической э. д. с. частоты  $\omega$ ;

$$E = E_m \cos \omega t = E_m \cos \alpha t, \quad \alpha = \omega/\omega_0.$$

Все расчеты проводились при  $\alpha=1$ , величина  $q_0$  при этом отличается от максимального заряда конденсатора  $q_m$  и соответственно безразмерная амплитуда  $x$  превышает единицу.

Вследствие имеющей место при стохастических режимах чувствительности решения к заданию начальных условий важное значение имеет обоснование корректности используемых численных методов и программ расчета. С целью такого обоснования проведено сопоставление результатов расчета полученных методом Рунге — Кутты — Фельберга четвертого-пятого порядков (программа RK45 с плавающим шагом [8]) и методом Рунге — Кутты четвертого порядка (программа RK4 с фиксированным шагом). Отличие соответствующих координат траектории системы, рассчитанной по двум методам для идентичных значений параметров  $R$  и  $B$  не превышает одного процента, что явилось основанием для использования в дальнейших расчетах только программы RK45, обеспечивающей локальную ошибку не более  $10^{-6}$ .

На рис. 1 представлены фазовые портреты установившегося процесса системы для  $R=0,35$  при различ-

ных значениях параметра  $B$ . Расчеты проводились для начальных условий  $x(0)=0$  и  $\dot{x}(0)=0$ ; начальный участок решения, соответствующий переходному процессу (100 периодов возмущающей силы) отбрасывался. Из рисунка видно, что при значении параметра  $B=6,5$  в системе устанавливается устойчивый колебательный процесс с периодом, равным периоду вынуждающей силы. При монотонном увеличении параметра  $B$  фазовая траектория претерпевает последовательные удвоения периода (рис. 1, б и в), т. е. начинает повторяться через интервал времени, равный удвоенному периоду вынуждающей силы, и т. д. вплоть до перехода к непериодическим колебаниям (рис. 1, г).

Критерием, определяющим степень неустойчивости (стохастичности) процесса, является положительность показателя Ляпунова, определяемого как [9]:

$$K = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \ln \frac{D(\tau)}{D(0)},$$

где  $D(\tau)$  — расстояние в момент времени  $\tau$  между двумя фазовыми траекториями, которые в начальный момент разделены малым расстоянием  $D(0)$ .

На рис. 2, а (кривая 1) представлены результаты расчета показателя  $K$  для начального возмущения  $D(0)$ , равного  $10^{-3}$ . Расчет кривых проводился до тех пор, пока значение  $K$  практически не зависело от времени. Интервалы положительных значений  $K$ , соответствующие интервалам существования стохастических колебаний, чередуются с интервалами отрицательных значений  $K$  (устойчивые колебания).

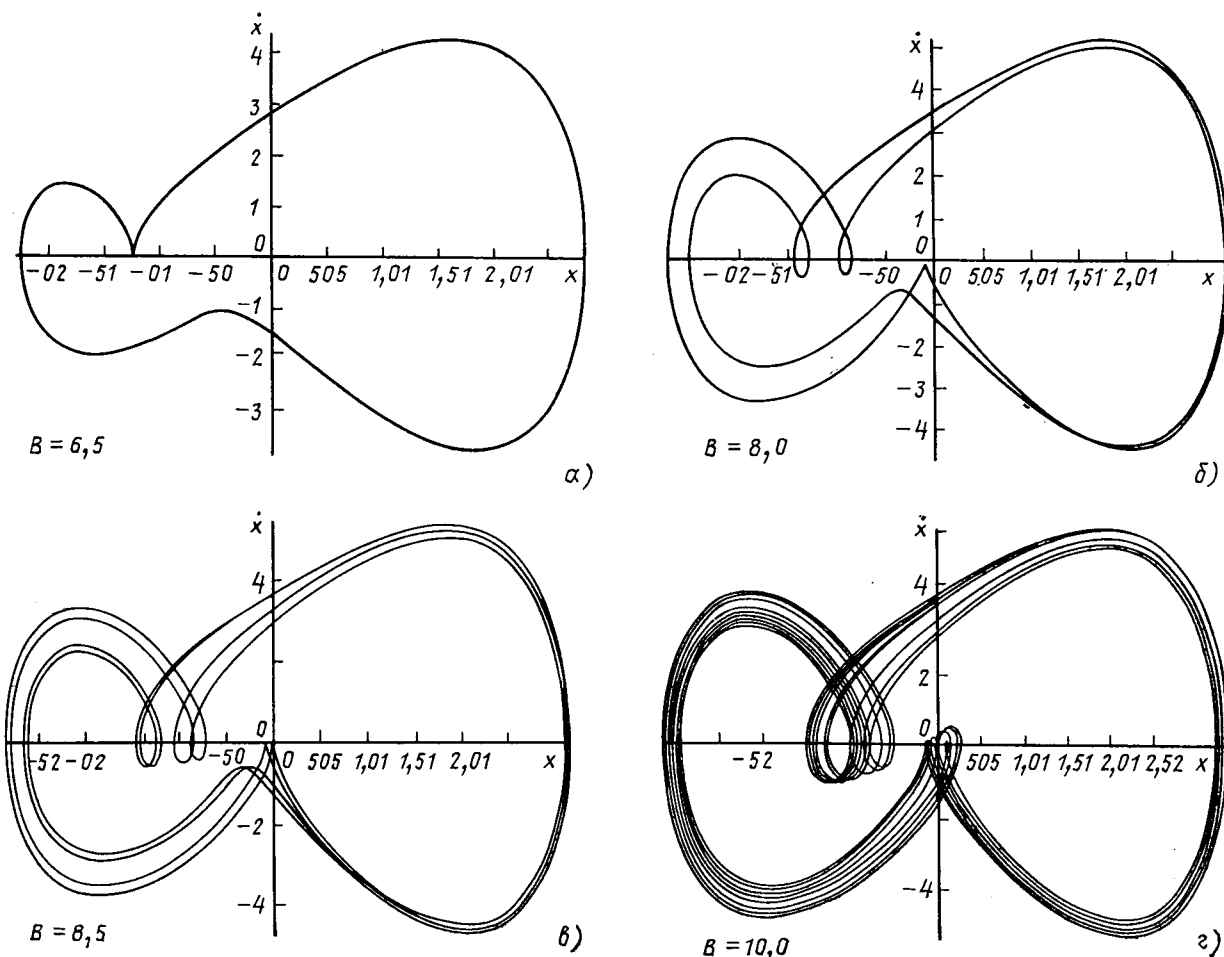


Рис. 1. Фазовые портреты системы при различных значениях параметра  $B$

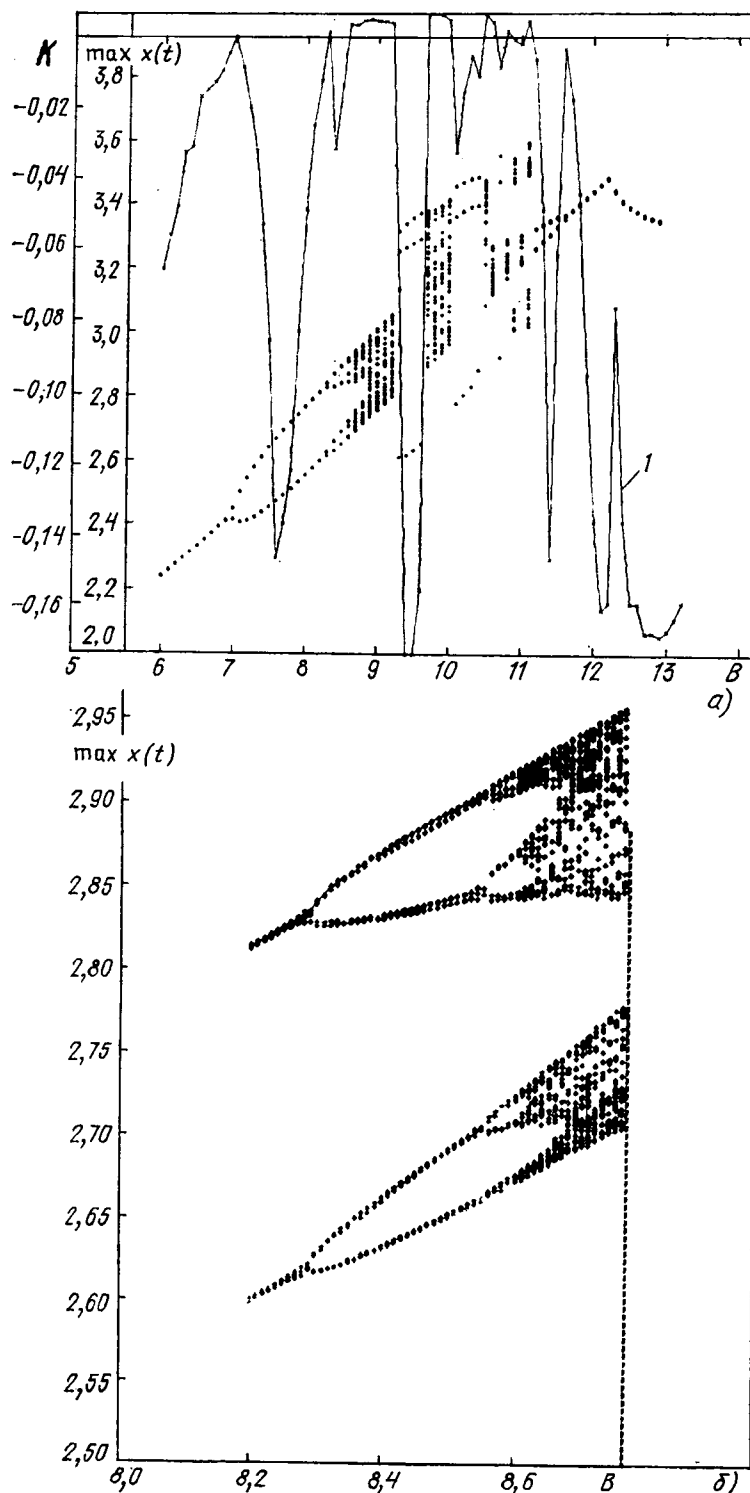


Рис. 2. Зависимость показателя Ляпунова (кривая 1) от параметра  $B$ , а также бифуркационная диаграмма исследуемого уравнения в интервале  $B$  [6—13] (2, а) и в интервале  $B$  [8,2—8,7] (2, б)

На рис. 2, а и б представлена бифуркационная диаграмма — зависимость амплитудного значения координат на интервале времени, равном периоду возмущающей силы, от параметра  $B$ . Бифуркационная диаграмма демонстрирует переход системы к хаотическим режимам посредством последовательного удвоения периода,  $T_i = 2^{i-1}T$ , что позволяет использовать для ее анализа аппарат теории универсальности.

Полученные из рис. 2 значения  $\lambda_n$  составляют последовательность:  $\lambda_1=6,25$ ,  $\lambda_2=8,27$ ,  $\lambda_3=8,55$ ,  $\lambda_4=8,61$ ; отсюда универсальная постоянная:

$$\delta_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} = \frac{8,27 - 6,25}{8,55 - 8,27} = 4,71;$$

$$\delta_2 = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_4 - \lambda_3} = \frac{8,55 - 8,27}{8,61 - 8,55} = 4,67,$$

т. е. дает величину, близкую к универсальной постоянной Фейгенбаума [1, 2].

Вычисление последующих членов ряда  $\lambda_5, \dots, \lambda_6, \dots$ , соответствующих периоду  $T_i=32$ ;  $T_i=64$  и т. д., требует дробления шага интегрирования или применения специальных методов расчета амплитудного значения координаты на фазовой траектории, что является предметом дальнейших исследований.

Важная отличительная черта бифуркационной диаграммы — существование интервала утроения периода (см. рис. 2, а вблизи значения  $B=9,5$ ) непосредственно перед переходом к хаотическим колебаниям, что совпадает с предсказаниями теории универсальности. Это явление наблюдается и для некоторого класса итерационных процессов, однако в отличие от последних в исследованной системе при возрастании параметра  $B$  непосредственно за интервалом хаотических колебаний наблюдалось появление области устойчивых движений утроенного периода (аттрактор), затем вновь интервал хаоса и т. д. до значения  $B \approx 11,5$ . При дальнейшем увеличении  $B$  происходят устойчивые колебания периода  $T=1$  вплоть до  $B \approx 35$ , далее вновь происходит переход к хаотическим колебаниям (расчет проводился до значения  $B=50$ ). Такое чередование интервалов порядка и хаоса наблюдалось в модели Лоренца.

**Выводы.** 1. Полученные результаты подтверждают возможность описания перехода электромагнитных колебаний в  $RLC$ -контуре в хаотический режим с помощью аппарата универсальности Фейгенбаума, при этом параметры бифуркационной диаграммы близки к универсальной константе  $\delta=4,669$ . Обнаружено чередование интервалов устойчивых и стохастических колебаний.

2. Предложенный подход позволяет определять характер (периодичность, существование стохастических режимов) колебаний в исследуемом контуре на основе анализа его электрических параметров  $R, L, C, E_m$  и  $\omega$ , не привлекая результаты решения конкретных уравнений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем. — УФН, 1983, т. 141, с. 343—374.
2. Демирчян К. С., Мучник Г. Ф. Самоорганизация и возможность ее применения в задачах электрофизики. — Электричество, 1987, № 5, с. 1—5.
3. Синергетика. Сб. статей / Под ред. Б. Б. Кадомцева. — М.: Мир, 1984. — 248 с.
4. Бул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм. УМН, 1984, т. 39, с. 3—37.
5. Chaotic states and routes to chaos in the forced pendulum. / D. D. Humieres, M. R. Beasley, B. A. Huberman, A. Libchaber. — Physical Review, 1982, vol. 26, N 6.
6. Скорчеллетти В. В. Теоретическая электрохимия. — Л.: Госхимиздат, 1963. — 608 с.
7. Филиппов Е. Нелинейная электротехника. — М.: Энергия, 1968. — 562 с.
8. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир. — 264 с.
9. Асташкина Е. В., Михайлов А. С. Стохастические автоколебания при параметрическом возбуждении спиновых волн. Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1980, т. 78, с. 1636—1646.

[09.04.87]

## Расчет электрической емкости между пластиной и двумя параллельными плоскостями

СТРУНСКИЙ М. Г., ГОРБОВ М. М.

Одним из существенных этапов проектирования приемопередающих систем, преобразователей различных типов, электромагнитных аппаратов и других устройств является точное аналитическое определение электрической емкости (или аналогичных ей параметров) системы «пластина конечной ширины — параллельные заземленные плоскости». При этом особый интерес (и сложность) представляет случай параллельного и несимметричного расположения пластины относительно плоскостей (рис. 1, а). Такой расчет позволил бы находить не только численные значения указанной емкости, но и анализировать их зависимость от геометрических параметров системы.

В известных работах, посвященных решению данной задачи, отсутствуют как достаточно точные количественные результаты, так и приближенные (с известной погрешностью) формулы. Так, в [1] определяется емкость между несимметрично расположенным прямоугольным проводником и двумя параллельными заземленными плоскостями. Задача решается по существу методом шивания, решение представляется весьма сложными выражениями, а выборочные численные значения даются лишь для симметричного случая. В [2] приводятся результаты решения задачи (которая может быть сведена к рассматриваемой), полученные методом конформного отображения; при проведении численных расчетов здесь необходимо решить систему трансцендентных уравнений, содержащих функции коби и  $\Phi$ -функции. Количественные результаты даны графически для сравнительно узкого диапазона изменения параметров, а погрешность приведенных приближенных формул, применение которых ограничено, не указана. В [3] путем использования метода Грина задача решена в весьма общей постановке, однако отдельные количественные данные приведены графически лишь для простых частных случаев.

Поэтому целью настоящей статьи явилось получение точного решения в наиболее простой форме и, как следствие, вывод эффективных приближенных формул с определением их погрешности, а также вычисление массива значений емкости в широком диапазоне изменения геометрических параметров системы. Указанная цель достигается в результате сочетания методов конформного отображения и непосредственного определения напряженности поля [4 и 5], а также с помощью использования современных методов и средств вычислительной техники.

Рассмотрим систему электродов, состоящую из бесконечно тонкой пластины, помещенной несимметрично относительно двух заземленных плоскостей (рис. 1, а). Введя плоскопараллельную расчетную модель (рис. 1, б) и приняв заштрихованную область за часть плоскости комплексного переменного  $z$ , конформно отобразим на нее верхнюю полуплоскость нового комплексного переменного  $\xi$  (рис. 1, в) таким образом, чтобы соблюдалось следующее соответствие точек указанных плоскостей:

точки в плоскости  $z \pm 0 \quad l_1 \infty - l_2 j b$ ;  
точки в плоскости  $\xi \pm a_1 \quad a_2 \infty - a_3 a_0$ .

Данное отображение осуществляется следующей функцией, полученной путем использования интеграла Кристоффеля — Шварца

$$z = A \int_0^{\xi} \frac{(\xi - a_0) d\xi}{(\xi^2 - a_1^2)(\xi - a_2)(\xi + a_3)} + B, \quad (1)$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные величины, определяемые на основании соответствия точек рассматриваемых плоскостей.

Установив с помощью (1) взаимосвязь плоскостей  $z$  и  $\xi$  (с учетом принципа симметрии), найдем;

$$\frac{b}{l_1} = \frac{\int_{a_0}^{a_1} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{(a_1^2 - \xi^2)(a_2 - \xi)(a_3 + \xi)}} - \int_{a_0}^{a_1} \frac{d\xi}{\sqrt{(a_1^2 - \xi^2)(a_2 - \xi)(a_3 + \xi)}}}{\int_{a_1}^{a_2} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - a_1^2)(a_2 - \xi)(a_3 + \xi)}} - \int_{a_1}^{a_2} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - a_1^2)(a_2 - \xi)(a_3 + \xi)}}}; \quad (2)$$

$$\frac{l_2}{l_1} = \pi \left[ \int_{a_1}^{a_2} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - a_1^2)(a_2 - \xi)(a_3 + \xi)}} - \int_{a_1}^{a_2} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - a_1^2)(a_2 - \xi)(a_3 + \xi)}} \right]^{-1} - 1; \quad (3)$$

где

$$a_0 = \frac{\int_0^{a_1} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{(a_1^2 - \xi^2)(a_2 - \xi)(a_3 + \xi)}} - \int_0^{a_1} \frac{d\xi}{\sqrt{(a_1^2 - \xi^2)(a_2 - \xi)(a_3 + \xi)}}}{\int_0^{a_1} \frac{d\xi}{\sqrt{(a_1^2 - \xi^2)(a_2 - \xi)(a_3 + \xi)}} + \int_0^{a_1} \frac{d\xi}{\sqrt{(a_1^2 - \xi^2)(a_2 + \xi)(a_3 - \xi)}}}. \quad (4)$$

Преобразовав содержащиеся в (2) — (4) интегралы к нормальной форме [6 и 7], получим следующие выражения:

$$\frac{b}{l_1} = \frac{\left(1 - \frac{a_0}{a_2}\right) F(\varphi, k) - \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) \Pi(\varphi, n, k)}{\left(1 + \frac{a_3}{a_2}\right) \Pi(n_2, k') - \left(\frac{a_0}{a_2} + \frac{a_3}{a_2}\right) K(k')}; \quad (5)$$

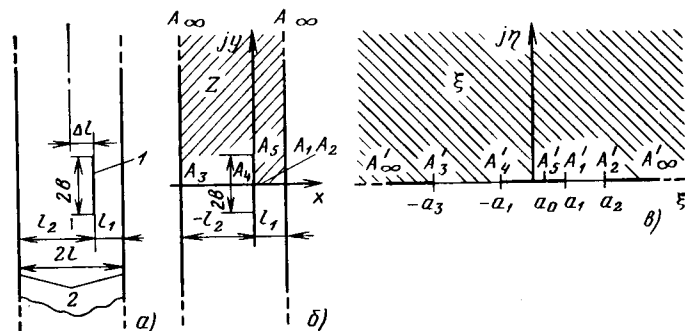


Рис. 1. Пластина между двумя заземленными плоскостями (плоскопараллельная система электродов): а — схема; б — расчетная модель; в — система электродов в отображенной плоскости; 1 — пластина; 2 — проводящие плоскости

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{\frac{\pi}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right) \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_3}{a_2}\right)}}{\left(1 + \frac{a_3}{a_2}\right) \Pi(n_2, k') - \left(\frac{a_0}{a_2} + \frac{a_3}{a_2}\right) K(k')} - 1; \quad (6)$$

$$\frac{a_0}{a_2} = \frac{1}{K(k)} \left\{ \frac{a_3}{a_2} [\Pi(\varphi_2, n_1, k) - F(\varphi_2, k)] - [\Pi(\varphi_1, n, k) - F(\varphi_1, k)] + \frac{a_1}{a_2} [\Pi(\varphi_1, n, k) - \Pi(\varphi_2, n_1, k)] \right\}, \quad (7)$$

где  $K(k)$ ,  $K(k')$ ,  $F(\varphi, k)$ ,  $F(\varphi_1, k)$ ,  $F(\varphi_2, k)$ ,  $\Pi(n_2, k')$ ,  $\Pi(\varphi, n, k)$ ,  $\Pi(\varphi_1, n, k)$ ,  $\Pi(\varphi_2, n_1, k)$  — полные и неполные эллиптические интегралы первого и третьего рода, модули, аргументы и параметры которых приведены в табл. 1.

Таблица 1

Модули	$k = \sqrt{\frac{2 \left(1 + \frac{a_2}{a_3}\right)}{\left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right) \left(1 + \frac{a_1}{a_3}\right)}}; k' = \sqrt{1 - k^2}$
Аргументы	$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right) \left(\frac{a_1}{a_2} - \frac{a_0}{a_2}\right)}{2 \left(1 - \frac{a_0}{a_2}\right)}};$ $\varphi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right)};$ $\varphi_2 = \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_1}{a_3}\right)}$
Параметры	$n = -\frac{2}{1 + \frac{a_2}{a_1}}; n_1 = -\frac{2}{\left(1 + \frac{a_3}{a_1}\right)};$ $n_2 = \frac{1 - \frac{a_1}{a_2}}{\frac{a_3}{a_2} + \frac{a_1}{a_2}}$

Таким образом, геометрическая часть задачи получает точное (хотя и в неявном виде) решение, причем с помощью лишь одного конформного отображения.

Учитывая, что при конформных отображениях емкости между соответствующими электродами сохраняются, достаточно найти емкость в системе электродов, приведенной на рис. 1, в. Эта емкость находится с помощью метода непосредственного определения напряженности поля, и выражение для нее имеет вид [5]:

$$C = 2\varepsilon \frac{K(k_1)}{K(k'_1)}, \quad (8)$$

где  $K(k_1)$ ,  $K(k'_1)$  — полные эллиптические интегралы первого рода с модулями

$$k_1 = \sqrt{\frac{2 \frac{a_1}{a_2} \left(1 + \frac{a_3}{a_2}\right)}{\left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right) \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_3}{a_2}\right)}}; k'_1 = \sqrt{1 - k_1^2}. \quad (9)$$

Определив по заданным конструктивным размерам из (5) — (7) параметры  $a_1/a_2$  и  $a_3/a_2$ , а затем из (9) — модуль  $k_1$ , в соответствии с (8) найдем искомую емкость (на единицу длины) рассматриваемой системы.

В частности, при центральном расположении пластины (например, симметричная полосковая линия)  $l_1 = l_2 = l$  ( $\Delta l = 0$ ) и, соответственно,  $a_3 = a_2$ ; тогда согласно (4)  $a_0 = 0$ , уравнение (3) переходит в тождество, а (2) принимает вид

$$\frac{b}{l} = \frac{\int_0^{a_1} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{(a_1^2 - \xi^2)(a_2^2 - \xi^2)}}}{\int_{a_1}^{a_2} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - a_1^2)(a_2^2 - \xi^2)}}} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arth} \frac{a_1}{a_2},$$

откуда

$$\frac{a_1}{a_2} = \operatorname{th} \left( \frac{\pi}{2} \frac{b}{l} \right) \equiv k_2. \quad (10)$$

Если учесть кроме того, что

$$k_1|_{\Delta l=0} = \frac{2 \sqrt{k_2}}{1 + k_2}$$

и воспользоваться преобразованием Ландена, то из (8) следует

$$C|_{\Delta l=0} = 4\varepsilon \frac{K(k_2)}{K(k'_2)}, \quad (11)$$

где  $k_2$  определяется (10).

Формула (11) совпадает с известной [5].

В другом предельном случае  $l_2 \rightarrow \infty$  (например, несимметричная полосковая линия с заземленной пластиной бесконечной ширины) после довольно громоздких преобразований формулы для определения емкости также приводятся к виду, полученному ранее [5] (с учетом того, что емкость получившейся системы в 2 раза больше емкости системы двух пластин одинаковой ширины, расположенных в параллельных плоскостях).

Для определения численных значений емкости в общем случае на ЭВМ ЕС-1022 были выполнены расчеты, которые проводились по формулам (5) — (9) с применением итерационного метода Ньютона [8] и специально разработанных программ для вычисления эллиптических интегралов. Точные значения емкости при  $\varepsilon = \varepsilon_0$  для ряда важных практических случаев приведены в табл. 2 и 3, а при более широком диапазоне изменения геометрических параметров представлены графически на рис. 2.

Сопоставление полученных здесь количественных результатов с приведенными в [2] показывает, что погрешность определения емкости рассматриваемой системы электродов по данным [2] может превышать 10 %.

Рассмотрим крайние случаи, когда ширина пластины намного больше или существенно меньше расстояния между за-

Таблица 2

$\Delta l/l$	Значение емкости, пФ/см, при $b/l$									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,00	0,17150	0,21767	0,25761	0,29518	0,33167	0,36762	0,40329	0,43882	0,47428	0,50969
0,01	0,17151	0,21768	0,25762	0,29520	0,33169	0,36764	0,40332	0,43886	0,47432	0,50973
0,02	0,17153	0,21771	0,25766	0,29525	0,33175	0,36772	0,40341	0,43895	0,47442	0,50985
0,03	0,17156	0,21777	0,25773	0,29534	0,33186	0,36785	0,40355	0,43912	0,47460	0,51005
0,04	0,17161	0,21784	0,25783	0,29546	0,33201	0,36802	0,40376	0,43934	0,47486	0,51033
0,05	0,17167	0,21793	0,25796	0,29562	0,33221	0,36825	0,40402	0,43964	0,47518	0,51069
0,06	0,17174	0,21804	0,25811	0,29582	0,33244	0,36853	0,40433	0,44000	0,47558	0,51112
0,07	0,17182	0,21818	0,25830	0,29605	0,33272	0,36886	0,40471	0,44042	0,47605	0,51164
0,08	0,17192	0,21833	0,25851	0,29632	0,33305	0,36924	0,40515	0,44091	0,47660	0,51224
0,09	0,17203	0,21851	0,25875	0,29663	0,33342	0,36967	0,40564	0,44147	0,47722	0,51293
0,10	0,17216	0,21871	0,25902	0,29697	0,33383	0,37015	0,40620	0,44210	0,47792	0,51369

земленными плоскостями, причем пластина располагается либо вблизи плоскости симметрии, либо на малом удалении от заземленной плоскости. В этих случаях  $k_1 \approx 1$  или  $k_1 \ll 1$ , и тогда могут быть найдены приближенные, но достаточно эффективные формулы. Для их получения разложим при различных соотношениях между геометрическими параметрами все функции, содержащиеся в (5)–(8), в ряды [7], сохраняя в каждом один или два члена. Полученные формулы (см. приложение) сведены в табл. 4, в которой указаны также их погрешности

( $\delta = \frac{C_{\text{точн}} - C_{\text{прибл}}}{C_{\text{точн}}} \cdot 100\%$ ), при некоторых характерных значениях геометрических параметров. Как видно, во всех случаях относительная погрешность меньше 1 %.

Все формулы просты и наглядны. Например, в формуле п. 2 первый сомножитель характеризует емкость плоского конденсатора, второй — поправку на краевой эффект, а третий — изменение емкости, связанное с несимметричным расположением пластины относительно плоскостей. При этом зависимость емкости системы от ширины пластины близка к линейной, что подтверждается и графиком на рис. 2, б.

Функция  $\lambda_1$  (а также  $\lambda_2$ ) имеет ясный физический смысл — определяет зависимость относительного изменения емкости от

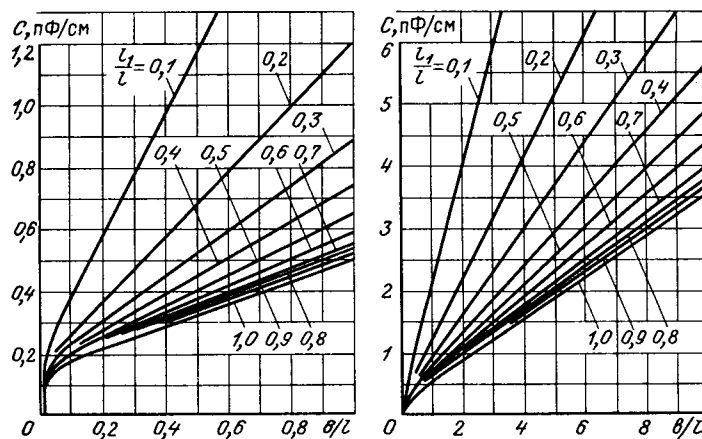


Рис. 2. Графики для зависимости емкости от отношения  $b/l$  при различных  $l_1/l$

Таблица 3

$l_1/l$	Значение емкости, пФ/см, при $b/l$									
	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
0,1	0,15072	0,18540	0,21391	0,23972	0,26400	0,28730	0,30992	0,33205	0,35378	0,37519
0,2	0,12725	0,15123	0,16991	0,18617	0,20101	0,21494	0,22821	0,24100	0,25343	0,26556
0,3	0,11695	0,13692	0,15209	0,16504	0,17669	0,18747	0,19764	0,20734	0,21668	0,22573
0,4	0,11092	0,12873	0,14206	0,15332	0,16335	0,17256	0,18117	0,18935	0,19718	0,20473
0,5	0,10697	0,12345	0,13566	0,14590	0,15496	0,16324	0,17095	0,17823	0,18517	0,19185
0,6	0,10427	0,11986	0,13135	0,14092	0,14937	0,15705	0,16418	0,17090	0,17729	0,18341
0,7	0,10242	0,11742	0,12842	0,13756	0,14560	0,15289	0,15964	0,16599	0,17202	0,17779
0,8	0,10120	0,11582	0,12651	0,13538	0,14315	0,15020	0,15672	0,16283	0,16864	0,17418
0,9	0,10051	0,11492	0,12543	0,13414	0,14177	0,14868	0,15507	0,16106	0,16673	0,17216
1,0	0,10028	0,11462	0,12508	0,13374	0,14133	0,14819	0,15454	0,16048	0,16612	0,17150

Таблица 4

№ пп	Соотношения между геометрическими параметрами						$C/\epsilon$	Значения $\delta$ , %
1	$\frac{a_0}{a_1} \ll 1$	$\frac{a_1}{a_2} \approx 1$	$\frac{a_2}{a_3} \ll 1$	$\frac{b}{l_1} \gg 1$	$\frac{b}{l} \ll 1$	где	$\frac{2b}{l_1} (1 + \lambda),$ $\lambda = \frac{l_1}{\pi b} \left\{ 1 + \ln \left[ 2 \left( 1 + \ln 2 + \frac{\pi b}{l_1} \right) \right] \right\}$	0,86 при $\frac{b}{l_1} \geq 2; \frac{b}{l} \leq 0,2$
2	$\frac{a_0}{a_1} \ll 1$	$\frac{a_1}{a_2} \approx 1$	$\frac{a_2}{a_3} \approx 1$	$\frac{\Delta l}{l} \ll 1$	$\frac{b}{l} \gg 1$	где	$4 \frac{b}{l} \left( 1 + \frac{ml}{\pi b} \right) (1 + \lambda_1),$ $\lambda_1 = \left( 1 - \frac{1}{\pi b/l + m} \right) \left( \frac{\Delta l}{l} \right)^2;$ $m = \frac{16 \sqrt{2} - 17}{3 \sqrt{2}} \approx 1,32639$	0,89 при $\frac{\Delta l}{l} \leq 0,2; \frac{b}{l} \geq 2$
3	$\frac{a_0}{a_1} \ll 1$	$\frac{a_1}{a_2} \ll 1$	$\frac{a_2}{a_3} \approx 1$	$\frac{\Delta l}{l} \ll 1$	$\frac{b}{l} \ll 1$	где	$\frac{2\pi}{\ln \frac{8l}{\pi b}} (1 + \lambda_2),$ $\lambda_2 = \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{\ln \frac{8l}{\pi b}} \left( \frac{\Delta l}{l} \right)^2$	0,33 при $\frac{\Delta l}{l} \leq 0,2; \frac{b}{l} \leq 0,2$
4	$\frac{a_0}{a_1} \ll 1$	$\frac{a_1}{a_2} \leq 1$	$\frac{a_2}{a_3} \ll 1$	$\frac{b}{l_1} \ll 1$	$\frac{l_1}{l} \ll 1$		$\frac{2\pi}{\ln \frac{4l_1}{b}}$	0,41 при $\frac{b}{l_1} \leq 0,2; \frac{l_1}{l} \leq 0,2$

отклонения пластины от плоскости симметрии. Эта зависимость является параболической; в частности, при  $b/l \gg 1$ ,  $\Delta l/l = 0,1$  значение  $\lambda_1 \approx 0,01$ , т. е. сравнительно невелико. Аналогично могут быть проанализированы и другие формулы.

Проиллюстрируем использование полученных результатов двумя практическими задачами из различных областей техники.

Пусть требуется измерить ширину плоских микропроводов (из узкой фольги). Эффективно эта задача измерительной техники решается с помощью применения емкостных преобразователей, обеспечивающих бесконтактное измерение малых поперечных размеров изделий [9]. Принцип действия указанных преобразователей основан на изменении их емкости, вызванном цилиндрическим проводником, поперечные размеры которого следует определить. Поэтому, приняв систему электродов на рис. 1, а в качестве одной из возможных расчетных моделей преобразователя (пластина 1 — плоская микропровода), при известных расстоянии  $2l$  и диэлектрической проницаемости окружающей среды  $\epsilon$  по значению измеренной емкости преобразователя  $C$  из выражения (8) можно найти искомую ширину микропровода. Поскольку зависимость ширины изделия от емкости преобразователя уравнением (8) задается в неявном виде, следует воспользоваться данными табл. 2 и 3, а также рис. 2, по которым измеритель емкости может быть отградуирован непосредственно в единицах измеряемой величины.

При этом должен быть решен один из центральных вопросов проектирования преобразователей — выбор номинальной статической характеристики преобразования. Из приведенных численных данных следует, что по мере удаления микропровода от плоскости симметрии преобразователя приращение емкости (а следовательно, и погрешности преобразователя) возрастает. Например, при  $b/l = 0,1$  и перемещении микропровода от  $l_1/l = 0,9$  до  $l_1/l = 1$  емкость преобразователя изменяется на 0,4 %, в то время как в диапазоне от  $l_1/l = 0,1$  до  $l_1/l = 0,2$  — на 35 %, т. е. почти на два порядка больше. Поэтому для получения наименьшей погрешности преобразования микропровода следует располагать в плоскости симметрии преобразователя, иначе говоря, номинальную статическую характеристику преобразования следует выбирать при  $l_1/l = 1$  или, что то же, при  $\Delta l/l = 0$ .

Данные табл. 2 и 3, а также табл. 4, п. 3 позволяют в этом случае определить погрешность, возникающую в результате неизбежных технологических отклонений микропровода от номинального положения (при необходимости поправка на толщину микропровода может быть внесена на основе методики, развитой в [9]).

Аналогичная задача возникает в другой области — при проектировании полосковых устройств СВЧ, в частности, симметричной полосковой линии с заданной емкостью (характеристическим сопротивлением). Система электродов, изображенная на рис. 1, а, при  $\Delta l = 0$  является расчетной моделью симметричного полоскового волновода с воздушным заполнением (пластина 1 — весьма тонкая токонесущая полоска). Ввиду практической невозможности разместить токонесущую полоску строго на одинаковом расстоянии от заземленных пластин требуется знать технологический допуск на отклонение указанного проводника от плоскости симметрии. Этот допуск при  $b/l < 0,2$  определяется по формуле табл. 4, п. 3; если  $0,2 \leq b/l \leq 1$  — по данным табл. 2; когда  $1 < b/l < 3$  — с помощью кривых, приведенных на рис. 2, а при  $b/l \geq 3$  — по формуле табл. 4, п. 2.

Так, если допустимое отличие емкости рассматриваемого полоскового волновода от заданной составляет 2 %, то технологический допуск на смещение токонесущей полоски, определенный по полученным данным, при любом отношении  $b/l$  не должен превышать  $\Delta l/l = 0,1$  и может быть уточнен в каждом конкретном случае.

В заключение следует отметить, что результаты численных расчетов, приведенные в табл. 2 и 3, позволяют найти не только предельные значения погрешностей формул табл. 4, но и фактические погрешности при любых требуемых соотношениях между геометрическими параметрами в рассмотренных диапазонах.

П р и л о ж е н и е. Вывод приближенных формул.

Если  $b/l_1 \gg 1$ , то  $a_1/a_2 \approx 1$ ; после разложения интегралов, содержащихся в (5)—(8), в ряды [7] при сохранении одного или двух членов и выполнения громоздких преобразований, получим

$$C \approx \frac{4\epsilon}{\pi} \ln \frac{4}{k_1}, \quad (\text{П-1})$$

$$\text{где } (k_1')^2 \approx \frac{1 - a_1/a_2}{2} \frac{a_3/a_2 - 1}{a_3/2 + 1} + \frac{(1 - a_1/a_2)^2}{4} \left[ 1 + \frac{2}{1 + a_3/a_2} - \frac{4}{(1 + a_3/a_2)^2} \right],$$

а параметры  $a_1/a_2$  и  $a_3/a_2$  находятся из системы уравнений:

$$\frac{b}{l_1} = \frac{2}{\pi (1 - a_0/a_2)} \left\{ (1 - a_0/a_2) \times \right. \\ \times \ln \left[ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - a_1/a_2} \sqrt{\frac{1 + a_0/a_2}{1 - a_0/a_2} + \sqrt{\frac{1 - a_2/a_3}{1 + a_2/a_3} + \frac{1 + a_0/a_2}{1 - a_0/a_2}}}} \right] - \\ - 2 \left( 1 - \sqrt{\frac{1 + a_0/a_2}{2}} \right) - \frac{1}{2} \frac{a_2}{a_3} \frac{1}{(1 + a_2/a_3)} \left[ \frac{8}{3} - \frac{2(5 - a_0/a_2)}{3 \sqrt{2}} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{1 + a_0/a_2} \right] \Bigg\}; \quad (\text{П-2})$$

$$1 - \sqrt{\frac{1}{2} (1 + a_3/a_2)} \frac{l_1}{l} = \frac{2}{\ln \left( \frac{32}{1 - a_1/a_2} \frac{1 + a_2/a_3}{1 - a_2/a_3} \right)} \times \\ \times \left\{ - \frac{\sqrt{2} (a_3/a_2 + 1)}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{a_2/a_3}}{1 - \sqrt{a_2/a_3}} + \right. \\ + \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{2} (1 + a_2/a_3)}}{\sqrt{\frac{1}{2} (1 - a_2/a_3)}} \times \right. \\ \times \frac{4 \sqrt{2}}{\sqrt{1 - a_1/a_2} \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{1 + a_2/a_3}} \right)} \Bigg] - \\ \left. - 2 + \sqrt{2} - \frac{4 - 5 \sqrt{2}}{3 (1 + a_3/a_2)} \right\}, \quad (\text{П-3})$$

$$\text{где } a_0/a_2 = 1 - \sqrt{\frac{1}{2} (1 + a_3/a_2)} \frac{l_1}{l}.$$

Определив из системы (П-2), (П-3) параметр  $a_1/a_2$  при  $a_2/a_3 \ll 1$  и подставив его в (8), после упрощений получим формулу табл. 4, п. 1, а при  $a_0/a_1 \ll 1$  и  $a_2/a_3 \approx 1$  — формулу табл. 4, п. 2. Аналогично выводятся остальные формулы табл. 4.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Бегович Н. А. Емкость и характеристическое сопротивление в полосковых передающих линиях с прямоугольным внутренним проводником. — В кн.: Печатные схемы сантиметровой диапозона. — М.: Изд-во иностр. лит., 1956, с. 278—293.
- Полосковые линии и устройства сверхвысоких частот / Под ред. В. М. Седых. — Харьков: Вища школа, 1974. — 275 с.
- Tippet J. C., Chang D. C. Characteristic impedance of a rectangular coaxial line with offset inner conductor. — IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech., 1978, vol. 26, N 11.
- Сочнев А. Я. Расчет напряженности поля прямым методом. — Л.: Энергоатомиздат, 1984. — 112 с.
- Иосель Ю. Я., Кочанов Э. С., Струнский М. Г. Расчет электрической емкости. — Л.: Энергия, 1981. — 228 с.
- Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. — 1100 с.
- Byrd P. F., Friedman M. D. Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer Verlag, 1954.
- Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980. — 280 с.
- Струнский М. Г., Горбов М. М. Бесконтактные емкостные микромеры. — Л.: Энергоатомиздат, 1986. — 136 с.

# Расчет линейных электромагнитных цепей методом объединенных матриц

ЮДИН В. В., канд. техн. наук

Андроповский авиационный технологический институт

Под электромагнитной цепью (ЭМЦ) понимают совокупность электрической (ЭЦ) и магнитной (МЦ) цепей, связанных в единую систему посредством обмоток, размещенных на стержнях МЦ и включенных в ветви ЭЦ. Необходимость в расчете таких цепей возникает при исследовании различных устройств электромагнитного типа, например, регуляторов и стабилизаторов напряжения на основе трансформаторно-ключевых регулирующих органов [1 и 2].

Анализ процессов в ЭМЦ, требующий совместного решения уравнений, составленных на основании закона электромагнитной индукции, закона полного тока и законов Кирхгофа для ЭЦ и МЦ, представляет собой сложную задачу. Формализация ее решения может быть осуществлена на основе использования матричных методов, применение которых для ЭЦ и МЦ в отдельности известно. В [3 и 4] рассмотрено решение вопроса о преобразовании ЭМЦ к эквивалентной схеме ЭЦ или МЦ, позволяющее при выполнении аналитических исследований существенно упростить алгоритм вычислений и уменьшить количество необходимых расчетных соотношений. Ниже предложен метод расчета, основанный на замене исходной ЭМЦ одной ЭЦ с дополнительными сопротивлениями контурной связи, зависящими от параметров исходных ЭЦ и МЦ, их топологических характеристик и характеристик связи.

Рассмотрим ЭМЦ, в состав которой входит ЭЦ, содержащая  $n_B$  ветвей и  $n_K$  контуров, и МЦ, содержащая  $m_B$  ветвей (в дальнейшем их будем называть также стержнями) и  $m_K$  контуров. Потоками рассеяния в МЦ пренебрежем, для токов, магнитных потоков, напряжений, э. д. с. и м. д. с. воспользуемся их изображениями по Лапласу, а все сопротивления будем считать операторными. Для ветвей и контуров цепей приняты положительные направления обхода. На стержнях МЦ размещены обмотки, включенные в ветви ЭЦ. Поскольку исполнение обмоток не является однозначным, целесообразно определить понятие направления намотки. За положительное примем такое направление, при котором положительное направление ветви ЭЦ, в которую включена, и положительное направление стержня МЦ, на котором она расположена, связаны в обмотке правом правилом винта. За отрицательное примем такое направление, при котором указанная связь описывается правилом левого винта.

Топологические свойства ЭЦ и МЦ опишем контурно-ветвевыми матрицами  $\Gamma_{\text{ЭЭ}}$  и  $\Gamma_{\text{ММ}}$  размерности  $(n_K \times n_B)$  и  $(m_K \times m_B)$ , строкам которых соответствуют элементы множества контуров, а столбцам — элементы множества ветвей соответствующих цепей. При составлении матрицы  $\Gamma_{\text{ЭЭ}}$  пользуются следующим правилом. Если  $j$ -й контур включает в себя  $k$ -ю ветвь и направление его обхода совпадает с принятым положительным направлением ветви, то при пересечении  $j$ -й строки и  $k$ -го столбца матрицы записывают  $+1$ . Если  $j$ -й контур включает в себя  $k$ -ю ветвь, но направление его обхода противоположно положительному направлению ветви, то на пересечении  $j$ -й строки и  $k$ -го столбца записывают  $-1$ . Если же  $j$ -й контур вообще не включает в себя  $k$ -ю ветвь, на пересечении указанных строки и столбца записывают 0. Матрица  $\Gamma_{\text{ММ}}$  составляется аналогичным образом.

Для установления связи между ЭЦ и МЦ введем матрицы электромагнитной  $W_{\text{ЭМ}}$  и магнитоэлектрической  $W_{\text{МЭ}}$  ветвевой связи размерности  $(n_B \times m_B)$  и  $(m_B \times n_B)$  соответственно. На пересечении  $k$ -й строки и  $s$ -го столбца матрицы  $W_{\text{ЭМ}}$  записывают число витков  $w_{ks}$  обмотки, включенной в  $k$ -ю ветвь ЭЦ и размещенной на  $s$ -м стержне МЦ, взятое со знаком, соответствующим направлению ее намотки. Если  $k$ -я строка ЭЦ не связана с  $s$ -м стержнем МЦ, на пересечении указанных строки и столбца записывают нуль. Матрицу  $W_{\text{МЭ}}$  составляют аналогичным образом. При этом между матрицами  $W_{\text{МЭ}}$  и  $W_{\text{ЭМ}}$  существует соотношение

$$W_{\text{МЭ}} = W_{\text{ЭМ}}^T, \quad (1)$$

где  $W_{\text{ЭМ}}^T$  — транспонированная матрица  $W_{\text{ЭМ}}$ .

Электрические и магнитные свойства ЭМЦ зададим матрицей сопротивлений ветвей ЭЦ  $Z_B^{\text{Э}} = \text{diag}(Z_{B1}^{\text{Э}}, Z_{B2}^{\text{Э}}, \dots, Z_{Bn_B}^{\text{Э}})$  и матрицей сопротивлений ветвей МЦ  $Z_B^{\text{М}} = \text{diag}(Z_{B1}^{\text{М}}, Z_{B2}^{\text{М}}, \dots, Z_{Bm_B}^{\text{М}})$ , где  $Z_{Bk}^{\text{Э}}$  ( $k = 1, 2, \dots, n_B$ ) — сопротивление  $k$ -й ветви ЭЦ;  $Z_{Bs}^{\text{М}}$  ( $s = 1, 2, \dots, m_B$ ) — сопротивление  $s$ -й ветви МЦ. Воздействие

на ЭЦ зададим матрицей э. д. с. ветвей

$$E_B = \begin{bmatrix} E_{B1} \\ E_{B2} \\ \vdots \\ E_{Bn_B} \end{bmatrix},$$

где  $E_{Bk}$  — э. д. с., действующая в  $k$ -й ветви ЭЦ.

Реакция ЭМЦ на воздействие  $E_B$  определяется матрицами токов ветвей ЭЦ и магнитных потоков ветвей МЦ:

$$I_B = \begin{bmatrix} I_{B1} \\ I_{B2} \\ \vdots \\ I_{Bn_B} \end{bmatrix}; \quad \Phi_B = \begin{bmatrix} \Phi_{B1} \\ \Phi_{B2} \\ \vdots \\ \Phi_{Bm_B} \end{bmatrix},$$

где  $I_{Bk}$  — ток в  $k$ -й ветви ЭЦ;  $\Phi_{Bs}$  — магнитный поток в  $s$ -й ветви МЦ.

Для произвольной ветви ЭЦ (рис. 1) при нулевых начальных условиях в операторной форме имеем

$$U_{Bk} = -E_{Bk} + I_{Bk} Z_{Bk}^{\text{Э}} + p \sum_{s=1}^{m_B} w_{ks} \Phi_{Bs}, \quad (2)$$

где  $U_{Bk}$  — напряжение на  $k$ -й ветви ЭЦ;  $p$  — оператор дифференцирования.

Система (2) в матричной форме имеет вид

$$U_B = -E_B + Z_B^{\text{Э}} I_B + p W_{\text{ЭМ}} \Phi_B, \quad (3)$$

где  $U_B$  — матрица напряжений на ветвях ЭЦ;

$$U_B = \begin{bmatrix} U_{B1} \\ U_{B2} \\ \vdots \\ U_{Bn_B} \end{bmatrix}.$$

Домножим (3) слева на  $\Gamma_{\text{ЭЭ}}$

$$\Gamma_{\text{ЭЭ}} U_B = -\Gamma_{\text{ЭЭ}} E_B + \Gamma_{\text{ЭЭ}} Z_B^{\text{Э}} I_B + p \Gamma_{\text{ЭЭ}} W_{\text{ЭМ}} \Phi_B. \quad (4)$$

Так как элементами  $\Gamma_{\text{ЭЭ}} U_B$  являются суммы напряжений вдоль контуров ЭЦ, в соответствии со вторым законом Кирхгофа

$$\Gamma_{\text{ЭЭ}} U_B = 0. \quad (5)$$

С учетом (5) преобразуем (4) к виду

$$E_K = \Gamma_{\text{ЭЭ}} Z_B^{\text{Э}} I_B + p \Gamma_{\text{ЭЭ}} W_{\text{ЭМ}} \Phi_B, \quad (6)$$

где  $E_K$  — матрица контурных э. д. с. ЭЦ;

$$E_K = \begin{bmatrix} E_{K1} \\ E_{K2} \\ \vdots \\ E_{Kn_K} \end{bmatrix} = \Gamma_{\text{ЭЭ}} E_B. \quad (7)$$

Воспользуемся известным соотношением [5] между матрицей

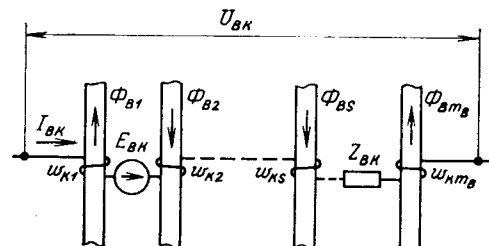
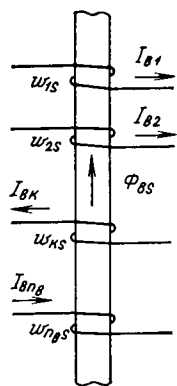


Рис. 1. Схема ветви электрической цепи



← Рис. 2. Схема ветви МЦ

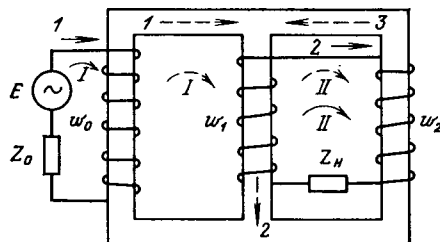


Рис. 3. Пример схемы ЭМЦ

токов ветвей  $I_B$ , матрицей контурных токов

$$I_K = \begin{bmatrix} I_{K1} \\ I_{K2} \\ \vdots \\ I_{K n_K} \end{bmatrix}$$

и контурно-ветвевой матрицей  $\Gamma_{\partial\partial}$  ЭЦ

$$I_B = \Gamma_{\partial\partial}^T I_K, \quad (8)$$

а также аналогичным соотношением для матриц магнитных потоков ветвей  $\Phi_B$ , матрицей контурных магнитных потоков

$$\Phi_K = \begin{bmatrix} \Phi_{K1} \\ \Phi_{K2} \\ \vdots \\ \Phi_{K n_K} \end{bmatrix}$$

Таблица 1

Размерность матриц		Столбцы			
		ЭЦ		МЦ	
		$n_B$	$n_K$	$m_B$	$m_K$
Строки	ЭЦ	$n_B$	$E_{\partial\partial}$	$\Gamma_{\partial\partial}^T$	$W_{\partial\partial}$
		$n_K$	$\Gamma_{\partial\partial}$	$E_{\partial K}$	$Q_{\partial\partial}$
	МЦ	$m_B$	$W_{\partial\partial}$	$\Gamma_{\partial\partial}^T$	$E_{\partial B}$
		$m_K$	$\Gamma_{\partial\partial}$	$\theta_{\partial\partial}$	$E_{\partial K}$

и контурно-ветвевой матрицей  $\Gamma_{\text{мм}}$  МЦ

$$\Phi_B = \Gamma_{\text{мм}}^T \Phi_K. \quad (9)$$

Подставив (8) и (9) в (6), получим

$$E_K = Z_K^{\partial} I_K + p \Gamma_{\partial\partial} W_{\partial\partial} \Gamma_{\text{мм}}^T \Phi_K, \quad (10)$$

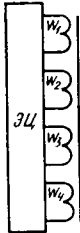
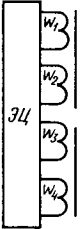
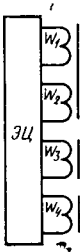
где  $Z_K^{\partial}$  — матрица контурных сопротивлений ЭЦ;

$$Z_K^{\partial} = \begin{bmatrix} Z_{K11}^{\partial} & Z_{K12}^{\partial} & \dots & Z_{K1n_K}^{\partial} \\ Z_{K21}^{\partial} & Z_{K22}^{\partial} & \dots & Z_{K2n_K}^{\partial} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{Kn_K1}^{\partial} & Z_{Kn_K2}^{\partial} & \dots & Z_{Kn_Kn_K}^{\partial} \end{bmatrix} = \Gamma_{\partial\partial} Z_B^{\partial} \Gamma_{\partial\partial}^T. \quad (11)$$

Воспользуемся выражением для м. д. с.  $M_{Bs}$  произвольной  $s$ -й ветви МЦ (рис. 2):

$$M_{Bs} = \sum_{k=1}^{n_B} I_{Bk} w_{ks}. \quad (12)$$

Таблица 1а

Основные сведения	Варианты ЭМЦ						
Схема							
$l$	1		2		3		
$\delta$	1		1	2	1	2	3
$y_{\delta}^M$	$y$		$y_1$	$y_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$\theta_{\delta}$	$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$		$w_1$	0	$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_4 \end{bmatrix}$
$\Delta Z_K^3$	$py \begin{bmatrix} w_1^2 & w_1 w_2 & w_1 w_3 & w_1 w_4 \\ w_2 w_1 & w_2^2 & w_2 w_3 & w_2 w_4 \\ w_3 w_1 & w_3 w_2 & w_3^2 & w_3 w_4 \\ w_4 w_1 & w_4 w_2 & w_4 w_3 & w_4^2 \end{bmatrix}$		$p \begin{bmatrix} y_1 w_1^2 & y_1 w_1 w_2 & 0 & 0 \\ y_1 w_2 w_1 & y_1 w_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 w_3^2 & y_2 w_3 w_4 \\ 0 & 0 & y_2 w_4 w_3 & y_2 w_4^2 \end{bmatrix}$		$p \begin{bmatrix} y_1 w_1^2 & y_1 w_1 w_2 & 0 & 0 \\ y_1 w_2 w_1 & y_1 w_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 w_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 w_4^2 \end{bmatrix}$		

Представим (12) в матричной форме

$$M_B = W_{M3} I_B, \quad (13)$$

где

$$M_B = \begin{bmatrix} M_{B1} \\ M_{B2} \\ \vdots \\ M_{Bm_B} \end{bmatrix}.$$

Домножим (13) слева на  $\Gamma_{MM}$ :

$$\Gamma_{MM} M_B = \Gamma_{MM} W_{M3} I_B. \quad (14)$$

Подставим (8) в (14). При этом с учетом аналогичного (7) соотношения для матрицы контурных м. д. с.

$$M_K = \begin{bmatrix} M_{K1} \\ M_{K2} \\ \vdots \\ M_{Km_K} \end{bmatrix} = \Gamma_{MM} M_B$$

получим

$$M_K = \Gamma_{MM} W_{M3} \Gamma_{33}^T I_K. \quad (15)$$

Для МЦ справедливо соотношение

$$M_K = Z_K^M \Phi_K, \quad (16)$$

где  $Z_K^M$  — матрица контурных сопротивлений МЦ;

$$Z_K^M = \begin{bmatrix} Z_{K11}^M & Z_{K12}^M & \dots & Z_{K1m_K}^M \\ Z_{K21}^M & Z_{K22}^M & \dots & Z_{K2m_K}^M \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{Km_K1}^M & Z_{Km_K2}^M & \dots & Z_{Km_Km_K}^M \end{bmatrix} = \Gamma_{MM} Z_B^M \Gamma_{MM}^T. \quad (17)$$

Из (15) и (16) следует:

$$\Gamma_{MM} W_{M3} \Gamma_{33}^T I_K = Z_K^M \Phi_K. \quad (18)$$

Полученные матричные уравнения (6) и (18) представим в виде

$$\left. \begin{aligned} E_K &= Z_K^3 I_K + Z_K^{3M} \Phi_K; \\ 0 &= Z_K^{M3} I_K + Z_K^M \Phi_K, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где  $Z_K^{3M}$  — матрица контурных сопротивлений электромагнитной связи;  $Z_K^{M3}$  — матрица контурных сопротивлений магнитоэлектрической связи;

$$Z_K^{3M} = p \Gamma_{33} W_{3M} \Gamma_{MM}^T; \quad Z_K^{M3} = -\Gamma_{MM} W_{M3} \Gamma_{33}^T \quad (20); (21)$$

Система (19) и устанавливает искомую связь. Она позволяет решать различные задачи анализа ЭМЦ, в частности, задачу расчета токов ЭЦ. Действительно, из второго уравнения (19) имеем

$$\Phi_K = -(Z_K^M)^{-1} Z_K^{M3} I_K. \quad (22)$$

Подставим (22) в первое уравнение (19). При этом получим

$$E_K = (Z_K^3 + \Delta Z_K^3) I_K, \quad (23)$$

где  $\Delta Z_K^3$  — матрица дополнительных сопротивлений контурной связи ЭЦ;

$$\Delta Z_K^3 = -Z_K^{3M} (Z_K^M)^{-1} Z_K^{M3}.$$

Для этой матрицы в соответствии с (20) и (21) имеем

$$\Delta Z_K^3 = p \Gamma_{33} W_{3M} \Gamma_{MM}^T (Z_K^M)^{-1} \Gamma_{MM} W_{M3} \Gamma_{33}^T. \quad (24)$$

Из (23) следует

$$I_K = (Z_K^3 + \Delta Z_K^3)^{-1} E_K. \quad (25)$$

На основании вышеизложенного предлагается следующий алгоритм расчета ЭМЦ.

1. В соответствии с ранее сформулированными правилами для исследуемой ЭМЦ составляют матрицы  $\Gamma_{33}$ ,  $\Gamma_{M3}$ ,  $W_{3M}$ , устанавливающие топологические свойства ЭМЦ, а также матрицы  $Z_B^3$  и  $Z_B^M$ , характеризующие ее электрические и магнитные свойства, и матрицу  $E_B$ , характеризующую воздействие.

2. С помощью соотношений (7), (11) и (17) определяют матрицу контурных э. д. с. ЭЦ  $E_K$ , матрицу контурных сопротивлений ЭЦ  $Z_K^3$  и матрицу контурных сопротивлений МЦ  $Z_K^M$ .

3. На основании зависимости (24) и (1) определяют матрицу дополнительных сопротивлений контурной связи ЭЦ  $\Delta Z_K^3$ .

4. Используя выражение (25), находят матрицу контурных токов  $I_K$ .

5. С помощью соотношения

$$\Phi_K = (Z_K^M)^{-1} \Gamma_{MM} W_{3M} \Gamma_{33}^T I_K, \quad (26)$$

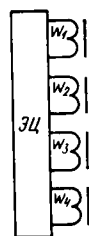
следующего из (21) и (22), находят матрицу контурных магнитных потоков.

С помощью приведенного алгоритма, следуя чисто формальным правилам составления и преобразования матриц, можно рассчитать различные ЭМЦ. Ввиду сложности (24) и (26) для реализации алгоритма целесообразно использовать ЭВМ. Топологические особенности ЭМЦ большинства устройств позволяют заметно упростить расчетные соотношения, сводя их к несложным аналитическим выражениям. Так из конструктивно-технологических соображений МЦ реальных устройств выполняют на базе магнитопроводов простой конфигурации (кольцевых, стержневых, броневых). Характерной особенностью МЦ таких устройств является их несвязность, что практически выливается в возможность представления отдельных матриц в блочном виде.

Представим (24) в виде системы матричных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \Delta Z_K^3 &= p \theta_{3M} (Z_K^M)^{-1} \theta_{M3}; \\ \theta_{3M} &= \Gamma_{3M} \Gamma_{MM}^T; \quad \Gamma_{3M} = \Gamma_{33} W_{3M}; \\ \theta_{M3} &= \Gamma_{M3} \Gamma_{33}^T; \quad \Gamma_{M3} = \Gamma_{MM} W_{M3}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Варианты опыта



4

1	2	3	4
$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
$\begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ w_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_4 \end{bmatrix}$
$p \begin{bmatrix} y_1 w_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 w_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 w_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 w_4^2 \end{bmatrix}$			

где  $\theta_{\Delta\mathbf{M}}, \theta_{\mathbf{M}\Delta}, \Gamma_{\Delta\mathbf{M}}, \Gamma_{\mathbf{M}\Delta}$  — матрицы, которые как и матрицы  $\Gamma_{\Delta\Delta}, \Gamma_{\mathbf{M}\mathbf{M}}, W_{\Delta\mathbf{M}}, W_{\mathbf{M}\Delta}$ , описывают топологические свойства ЭМЦ, в частности,  $\theta_{\Delta\mathbf{M}}$  и  $\theta_{\mathbf{M}\Delta}$  являются матрицами контурной электромагнитной и магнитоэлектрической связи, а  $\Gamma_{\Delta\mathbf{M}}$  и  $\Gamma_{\mathbf{M}\Delta}$  — матрицами контурно-ветвевой электромагнитной и магнитоэлектрической связи.

Основные сведения об этих матрицах, а также ранее определенных матрицах  $\Gamma_{\Delta\Delta}, \Gamma_{\mathbf{M}\mathbf{M}}, W_{\Delta\mathbf{M}}, W_{\mathbf{M}\Delta}$  приведены в табл. 1.

Матрицы  $E_{\Delta\mathbf{B}}, E_{\Delta\mathbf{K}}, E_{\mathbf{M}\mathbf{B}}$  являются единичными. Они введены в табл. 1 для ее логического завершения.

Для ЭМЦ, МЦ которых выполнены в виде отдельных магнитопроводов, матрица дополнительных сопротивлений контурной связи ЭЦ может быть определена по формуле

$$\Delta Z_{\mathbf{K}}^{\Delta} = \sum_{\delta=1}^l \Delta Z_{\mathbf{K}\delta}^{\Delta}, \quad (28)$$

где  $\Delta Z_{\mathbf{K}\delta}^{\Delta}$  — матрица дополнительных контурных сопротивлений, вносимых в ЭЦ  $\delta$ -м магнитопроводом ( $\delta = 1, 2, \dots, l$ );

$$\Delta Z_{\mathbf{K}\delta}^{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta Z_{\mathbf{K}\delta 11} & \Delta Z_{\mathbf{K}\delta 12} & \dots & \Delta Z_{\mathbf{K}\delta 1n_{\mathbf{K}}} \\ \Delta Z_{\mathbf{K}\delta 21} & \Delta Z_{\mathbf{K}\delta 22} & \dots & \Delta Z_{\mathbf{K}\delta 2n_{\mathbf{K}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta Z_{\mathbf{K}\delta n_{\mathbf{K}}1} & \Delta Z_{\mathbf{K}\delta n_{\mathbf{K}}2} & \dots & \Delta Z_{\mathbf{K}\delta n_{\mathbf{K}}n_{\mathbf{K}}} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Ее элементами являются дополнительные сопротивления связи  $j$ -го и  $\gamma$ -го контуров ЭЦ, обусловленные наличием  $\delta$ -го магнитопровода в МЦ. Вычисление элементов (29) производят по формуле

$$\Delta Z_{\mathbf{K}\delta j\gamma} = \rho \theta_{\Delta\mathbf{M}j\delta} (Z_{\mathbf{K}\delta\delta}^{\mathbf{M}})^{-1} \theta_{\mathbf{M}\Delta\delta\gamma}, \quad (30)$$

где  $Z_{\mathbf{K}\delta\delta}^{\mathbf{M}}$  — матрица контурных магнитных сопротивлений  $\delta$ -го магнитопровода;  $\theta_{\Delta\mathbf{M}j\delta}$  — матрица связи  $j$ -го контура ЭЦ с  $\delta$ -м контуром МЦ;  $\theta_{\mathbf{M}\Delta\delta\gamma}$  — матрица связи  $\delta$ -го контура МЦ с  $\gamma$ -м контуром ЭЦ.

Если  $\delta$ -й магнитопровод имеет  $m_{\mathbf{K}\delta}$  контуров, то размерности матриц  $Z_{\mathbf{K}\delta\delta}^{\mathbf{M}}, \theta_{\Delta\mathbf{M}j\delta}$  и  $\theta_{\mathbf{M}\Delta\delta\gamma}$  равны соответственно  $(1 \times m_{\mathbf{K}\delta}), (m_{\mathbf{K}\delta} \times m_{\mathbf{K}\delta})$  и  $(m_{\mathbf{K}\delta} \times 1)$ .

Наиболее простой вид (30) приобретает при использовании в МЦ одноконтурных (в частности кольцевых) магнитопроводов, для которых  $m_{\mathbf{K}\delta} = 1$ . В этом случае

$$\left. \begin{aligned} (Z_{\mathbf{K}\delta\delta}^{\mathbf{M}})^{-1} &= y_{\delta}^{\mathbf{M}}, \\ \theta_{\Delta\mathbf{M}j\delta} &= [w_{j\delta}]; \theta_{\mathbf{M}\Delta\delta\gamma} = [w_{\delta\gamma}], \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

где  $y_{\delta}^{\mathbf{M}}$  — магнитная проводимость  $\delta$ -го магнитопровода;  $w_{j\delta}$  — число витков обмотки, связывающей  $j$ -й контур ЭЦ;  $w_{\delta\gamma}$  — число витков обмотки, связывающей  $\delta$ -й магнитопровод с  $\gamma$ -м контуром ЭЦ.

Из (29)—(31) получим

$$\Delta Z_{\mathbf{K}\delta}^{\Delta} = \rho y_{\delta}^{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} w_{1\delta} w_{\delta 1} & w_{1\delta} w_{\delta 2} & \dots & w_{1\delta} w_{\delta n_{\mathbf{K}}} \\ w_{2\delta} w_{\delta 1} & w_{2\delta} w_{\delta 2} & \dots & w_{2\delta} w_{\delta n_{\mathbf{K}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n_{\mathbf{K}}\delta} w_{\delta 1} & w_{n_{\mathbf{K}}\delta} w_{\delta 2} & \dots & w_{n_{\mathbf{K}}\delta} w_{\delta n_{\mathbf{K}}} \end{bmatrix} =$$

$$= \rho y_{\delta}^{\mathbf{M}} \theta_{\Delta\mathbf{M}} \theta_{\delta}^{\mathbf{T}}, \quad (32)$$

где  $\theta_{\delta}$  — матрица контурной связи  $\delta$ -го одноконтурного магнитопровода;

$$\theta_{\delta} = \begin{bmatrix} w_{1\delta} \\ w_{2\delta} \\ \vdots \\ w_{n_{\mathbf{K}}\delta} \end{bmatrix}.$$

Соотношение (32) позволяет легко определить матрицу дополнительных сопротивлений контурной связи ЭЦ. В качестве примера рассмотрим варианты ЭМЦ с четырехконтурной ( $n_{\mathbf{K}}=4$ ) ЭЦ, отличающиеся исполнением МЦ. Основные сведения об ЭМЦ и соответствующие им выражения для матриц  $\Delta Z_{\mathbf{K}}^{\Delta}$  приведены в табл. 2.

В качестве примера составления матриц рассмотрим ЭМЦ, приведенную на рис. 3. Для нее имеем  $n_{\mathbf{B}}=2, n_{\mathbf{K}}=2, m_{\mathbf{B}}=3, m_{\mathbf{K}}=2$ . В соответствии с принятыми направлениями и нумерацией ветвей и обхода контуров ЭЦ (сплошные стрелки), а также принятыми направлениями и нумерацией ветвей и обхода контуров МЦ (пунктирные стрелки) определим матрицы  $\Gamma_{\Delta\Delta}, \Gamma_{\mathbf{M}\mathbf{M}}, W_{\Delta\mathbf{M}}$  и  $W_{\mathbf{M}\Delta}$ , с помощью которых на основании четырех последних соотношений (27) найдем матрицы  $\Gamma_{\Delta\mathbf{M}}, \Gamma_{\mathbf{M}\Delta}, \theta_{\Delta\mathbf{M}}$  и  $\theta_{\mathbf{M}\Delta}$ . Сведения о найденных матрицах приведены в табл. 3.

Для матриц сопротивления ветвей и матрицы э. д. с. такой ЭМЦ имеем

$$Z_{\mathbf{B}}^{\Delta} = \begin{bmatrix} (Z_0 + R_0) & 0 \\ 0 & (Z_{\mathbf{H}} + R_1 + R_2) \end{bmatrix}; \quad Z_{\mathbf{B}}^{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} Z_{\mathbf{B}1}^{\mathbf{M}} & \theta & 0 \\ 0 & Z_{\mathbf{B}2}^{\mathbf{M}} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{\mathbf{B}3}^{\mathbf{M}} \end{bmatrix};$$

$$E_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix},$$

где  $R_0, R_1, R_2$  — активные сопротивления обмоток  $w_0, w_1$  и  $w_2$ ;  $Z_{\mathbf{B}1}^{\mathbf{M}}, Z_{\mathbf{B}2}^{\mathbf{M}}, Z_{\mathbf{B}3}^{\mathbf{M}}$  — магнитные сопротивления соответствующих стержней магнитопровода.

**Выводы.** 1. Соотношения (24)—(26), устанавливающие связь исходных параметров электрической и магнитной цепей, их топологических характеристик и характеристик связи с величинами токов и магнитных потоков, позволяют формализовать процедуру расчета сложных электромагнитных цепей, сводя ее к определению и последующему учету в расчетных соотношениях дополнительных сопротивлений контурной связи электрической цепи.

2. Дополнительные сопротивления контурной связи в электромагнитной цепи, выполненной на отдельных магнитопроводах, определяются суммой дополнительных сопротивлений контурной связи, обусловленных каждым из магнитопроводов в отдельности. Между этими сопротивлениями, параметрами электрической цепи и магнитопроводов существует зависимость, установленная соотношениями (28)—(30).

3. При выполнении магнитной цепи в виде одноконтурных магнитопроводов дополнительные сопротивления контурной связи, обусловленные каждым из магнитопроводов, определяются соотношением (32).

Таблица 3

$E_{\Delta\mathbf{B}}$	1 0	0 1	$\Gamma_{\Delta\Delta}^{\mathbf{T}}$	1 0	0 1	$W_{\Delta\mathbf{M}}$	$w_0$ 0	0 ( $-w_1$ )	0 ( $-w_2$ )	$\Gamma_{\mathbf{M}\Delta}^{\mathbf{T}}$	$w_0$ ( $-w_1$ )	0 ( $w_1 + w_2$ )
$\Gamma_{\Delta\Delta}$	1 0	0 1	$E_{\Delta\mathbf{K}}$	1 0	0 1	$\Gamma_{\Delta\mathbf{M}}$	$w_0$ 0	0 ( $-w_1$ )	0 ( $-w_2$ )	$\theta_{\Delta\mathbf{M}}$	$w_0$ ( $-w_1$ )	0 ( $w_1 + w_2$ )
$W_{\mathbf{M}\Delta}$	$w_0$ 0 0	0 ( $-w_1$ ) ( $-w_2$ )	$\Gamma_{\mathbf{M}\mathbf{M}}^{\mathbf{T}}$	$w_0$ 0 0	0 ( $-w_1$ ) ( $-w_2$ )	$E_{\mathbf{M}\mathbf{B}}$	1 0 0	0 1 0	0 0 1	$\Gamma_{\mathbf{M}\mathbf{M}}^{\mathbf{T}}$	1 1 0	0 -1 -1
$\Gamma_{\mathbf{M}\Delta}$	$w_0$ 0	( $-w_1$ ) ( $w_1 + w_2$ )	$\theta_{\mathbf{M}\Delta}$	$w_0$ 0	( $-w_1$ ) ( $w_1 + w_2$ )	$\Gamma_{\mathbf{M}\mathbf{M}}$	1 0	1 -1	0 -1	$E_{\mathbf{M}\mathbf{K}}$	1 0	0 1

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Липковский К. А. Трансформаторно-ключевые исполнительные структуры преобразователей переменного напряжения. — Киев: Наукова думка, 1983. — 216 с.
2. Глузман П. Л., Юдин В. В., Черных Ю. А. Стабилизированный преобразователь переменного напряжения. — В кн.: Электронная техника в автоматике / Под ред. Конева Ю. И. : Радио и связь, 1984, с. 146—151.

3. Липман А. А. «Электрическая» и «магнитная» схемы электромагнитной цепи. — Электричество, 1974, № 7, с. 65—68.

4. Юдин В. В. Об эквивалентном преобразовании сложной магнитной цепи с контурами электрической связи. — Электричество, 1983, с. 46—47.

5. Толстов Ю. Г., Теврюков А. А. Теория электрических цепей. — М.: Высшая школа, 1971—296 с.

[16.01.87]

УДК 621.316.11:621.317.727.1.001.24

## Влияние делителей на точность измерения симметричных составляющих трехфазного напряжения

ШЕСТОПАЛОВ А. М.

Измерение параметров качества трехфазного напряжения, как известно, является непростой технической задачей вследствие нелинейного характера зависимости этих параметров от напряжений в трехфазной системе, а также из-за необходимости приведения с высокой точностью векторов этих напряжений к виду, обеспечивающему формирование измерительных сигналов.

В устройствах измерения и калибровки параметров качества электроэнергии ослабление трехфазного напряжения до необходимых уровней ведется с использованием делителей напряжений в цепях передачи каждой фазы.

Для сохранения удовлетворительных метрологических характеристик этих устройств к делителям приходится предъявлять весьма жесткие требования с точки зрения идентичности коэффициентов передачи в каждом плече. В связи с этим представляет интерес определение влияния разбросов (или случайных изменений) параметров элементов плеч делителей на трехфазные напряжения прямой, обратной и нулевой последовательностей в этих цепях.

Коэффициент передачи фазного напряжения в делителе, выполненном, как показано на рисунке, а, на RC-элементах, определяется выражением

$$k(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + r_1 + j\omega(\tau_1 + r_1\tau_2)}, \quad (1)$$

где  $r_1 = R_1/R_2$  — отношение активных сопротивлений плеч делителя напряжения;  $\tau_1 = C_1R_1$ ,  $\tau_2 = R_2C_2$  — постоянные времени верхнего и нижнего плеч делителя напряжения.

Для делителя напряжения, выполненного согласно схеме на рисунке, б на RL-элементах, коэффициент передачи отличается от соотношения (1) лишь тем, что величину  $\tau_1$  заменяет  $\tau_2 = L_2/R_2$ , а  $\tau_2 = \tau_1 = L_1/R_1$ .

Преобразуя выражение (1) к виду

$$k(j\omega) = \frac{1 + r_1 + \omega^2\tau_1(\tau_1 + r_1\tau_2) + j\omega r_1(\tau_1 - \tau_2)}{(1 + r_1)^2 + \omega^2(\tau_1 + r_1\tau_2)^2}, \quad (2)$$

отметим, что для обычно используемых номиналов элементов в плечах указанных делителей на частоте сети, а также для гармоник сети достаточно высокого порядка имеем  $\omega^2(\tau_1 + r_1\tau_2)^2 \ll (1 + r_1)^2$ , так что выражение (2) можно упростить, представив для фазы  $m$ , где  $m \in (a, b, c)$ , коэффициент деления напряжения в виде

$$k_m(j\omega) = k_m e^{j\beta_m} = \frac{1}{1 + r_{1m}} + j \frac{\omega r_{1m}(\tau_{1m} - \tau_{2m})}{(1 + r_{1m})^2}, \quad (3)$$

где  $k_m$  и  $\beta_m$  — модуль и фазовый сдвиг коэффициента передачи напряжения для фазы  $m$ .

Полагая, что компоненты делителя имеют относительно небольшие случайные отклонения от номиналов, при которых согласно условию  $\tau_{1m} = \tau_{2m}$  обеспечивается частотная независимость коэффициента передачи (3), запишем значения сопротивлений, емкостей и индуктивностей, включенных в  $m$ -е фазы делителей напряжения, как  $R_{1m} = R_{10} + \Delta R_{1m}$ ;  $R_2 = R_{20} + \Delta R_{2m}$ ;  $C_{1m} = C_{10} + \Delta C_{1m}$ ;  $C_{2m} = C_{20} + \Delta C_{2m}$ ;  $L_{1m} = L_{10} + \Delta L_{1m}$ ;  $L_{2m} = L_{20} + \Delta L_{2m}$ .

5\*

При этом действительная составляющая коэффициента передачи (3) будет равна

$$k_m \cos \beta_m = k_0 [1 - (1 - k_0)(\Delta r_{1m} - \Delta r_{2m})], \quad (4)$$

тогда как мнимые составляющие для RC- и RL-делителей соответственно будут иметь вид

$$k_m \sin \beta_m = k_0 (1 - k_0) \omega \tau_0 (\Delta r_{1m} - \Delta r_{2m} + \Delta c_{1m} - \Delta c_{2m}) \quad (5)$$

и

$$k_m \sin \beta_m = k_0 (1 - k_0) \omega \tau_0 (\Delta r_{1m} - \Delta r_{2m} + \Delta l_{2m} - \Delta l_{1m}), \quad (6)$$

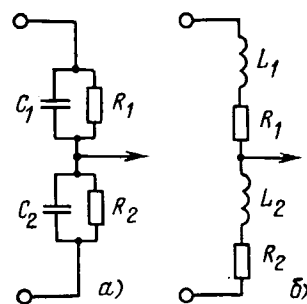
где  $\Delta r_{1m} = \frac{\Delta R_{1m}}{R_{10}}$ ;  $\Delta r_{2m} = \frac{\Delta R_{2m}}{R_{20}}$ ;  $\Delta c_{1m} = \frac{\Delta C_{1m}}{C_{10}}$ ;

$$\Delta c_{2m} = \frac{\Delta C_{2m}}{C_{20}}; \quad \Delta l_{1m} = \frac{\Delta L_{1m}}{L_{10}}; \quad \Delta l_{2m} = \frac{\Delta L_{2m}}{L_{20}} \text{ — относительные отклонения сопротивлений емкостей и индуктивностей от номинальных значений в верхних и нижних плечах делителей для } m\text{-го фазного напряжения; } k_0 = \frac{R_{20}}{R_{10} + R_{20}} \text{ — номинальный}$$

коэффициент передачи делителя;  $\tau_0 = R_{10}C_{10} = R_{20}C_{20} = \frac{L_{10}}{R_{10}} =$

$= \frac{L_{20}}{R_{20}}$  — постоянные времени плеч RC- или RL-делителя при соблюдении условия частотной независимости коэффициента передачи делителя.

Обозначим комплексные амплитуды фазных напряжений, действующих на входах делителей, как  $U_m e^{j\omega t}$ . Для различных фаз  $m \in (a, b, c)$  имеем соответственно  $\alpha_a = 0$ ;  $\alpha_b = \alpha_a + 2\pi/3$ ;  $\alpha_c = \alpha_a + 4\pi/3$ , где  $\alpha_b, \alpha_c$  — отклонения от  $2\pi/3$  фазовых сдвигов между соответствующими входными фазными напряжениями делителей.



Схемы делителей напряжения

После прохождения напряжения фазы  $m$  через делитель амплитуда напряжения этой фазы с учетом (3) будет равна  $U_m k_m e^{j(\gamma_m + \beta_m)}$ .

Амплитуды симметричных составляющих обратной, нулевой и прямой последовательностей  $S_1, S_2, S_3$  для трехфазного выходного напряжения делителей определим соответственно суммированием ортогональных компонентов выходных фазных напряжений с учетом фазовых сдвигов векторов суммируемых напряжений:

$$S_i = \frac{1}{3} \sqrt{\left[ \sum_{m=a,b,c} U_m k_m \cos(\gamma_{mi} + \beta_m) \right]^2 + \left[ \sum_{m=a,b,c} U_m k_m \sin(\gamma_{mi} + \beta_m) \right]^2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Здесь фазовые сдвиги  $\gamma_{mi}$  для различных фаз  $m \in (a, b, c)$  и различных симметричных составляющих определяются выражениями:

$$\gamma_{a1} = \gamma_{a2} = \gamma_{a3} = 0; \quad \gamma_{b1} = \frac{2\pi}{3} + \alpha_b; \quad \gamma_{b2} = \frac{4\pi}{3} + \alpha_b; \\ \gamma_{b3} = \alpha_b; \quad \gamma_{c1} = \frac{4\pi}{3} + \alpha_c; \quad \gamma_{c2} = \frac{2\pi}{3} + \alpha_c; \quad \gamma_{c3} = \alpha_c.$$

Для делителей на  $RC$ -элементах, пользуясь (3) — (5), запишем значения симметричных составляющих (7) с выделением независимых случайных относительных приращений сопротивлений и емкостей:

$$S_i = \frac{k_0(1-k_0)U_0}{3} \sqrt{\left[ q_{0i} + \sum_{m=a,b,c} q_{1im}(\Delta r_{1m} - \Delta r_{2m}) + \sum_{m=a,b,c} q_{2im}(\Delta c_{1m} - \Delta c_{2m}) \right]^2 + \left[ t_{0i} + \sum_{m=a,b,c} t_{1im}(\Delta r_{1m} - \Delta r_{2m}) + \sum_{m=a,b,c} t_{2im}(\Delta c_{1m} - \Delta c_{2m}) \right]^2}, \quad i \in (1, 2, 3), \quad (8)$$

где  $U_0$  — номинальное фазное напряжение;  $q_{0i} = \frac{1}{1-k_0} \sum_{m=a,b,c} m \cos \gamma_{mi}$ ,  $t_{0i} = \frac{1}{1-k_0} \sum_{m=a,b,c} m \sin \gamma_{mi}$  — нормированные средние значения ортогональных компонентов  $i$ -й симметричной составляющей;  $q_{1im} = -m(\cos \gamma_{mi} + \omega\tau_0 \sin \gamma_{mi})$ ,  $t_{1im} = m(\omega\tau_0 \cos \gamma_{mi} - \sin \gamma_{mi})$ ,

$q_{2im} = -\omega\tau_0 m \sin \gamma_{mi}$ ,  $t_{2im} = m\omega\tau_0 \cos \gamma_{mi}$  — весовые коэффициенты при случайных относительных отклонениях резисторов и емкостей;  $a, b, c$  — индексы фаз; кроме того, величины  $a = U_a/U_0$ ,  $b = U_b/U_0$ ,  $c = U_c/U_0$  соответственно определяют нормированные значения указанных фазных напряжений.

Для делителей на  $RL$ -элементах симметричные составляющие выходного трехфазного напряжения могут быть записаны аналогично, исходя из выражений (3), (4) и (6). При этом отличие в сравнении с (8) здесь будет лишь в замене  $\Delta c_{1m}$  и  $\Delta c_{2m}$  соответственно на  $\Delta l_{2m}$  и  $\Delta l_{1m}$ .

Обратимся к представлению симметричных составляющих согласно (8) в виде

$$S_i = \sqrt{Q_i^2 + T_i^2}, \quad i \in (1, 2, 3). \quad (9)$$

Полагая, что случайные отклонения номиналов резисторов, конденсаторов и индуктивностей делителей трехфазного напряжения распределены по нормальному закону, отметим, что ортогональные компоненты  $Q_i$  и  $T_i$  симметричных составляющих будут описываться двумерным нормальным законом  $p(Q_i, T_i)$  со средними значениями ортогональных компонентов  $Q_i$  и  $T_i$ , равными

$$\bar{Q}_i = \frac{k_0(1-k_0)q_{0i}U_0}{3}; \quad \bar{T}_i = \frac{k_0(1-k_0)t_{0i}U_0}{3}, \quad (10)$$

и значениями дисперсий  $\sigma_{1i}^2$  и  $\sigma_{2i}^2$  этих компонентов и величиной коэффициента корреляции  $\rho_i$ , определяемыми выражениями:

$$\sigma_{1i}^2 = \frac{k_0^2(1-k_0)^2 U_0^2}{9} \left[ \sum_{m=a,b,c} q_{1im}^2 (\sigma_{r1m}^2 + \sigma_{r2m}^2) + \sum_{m=a,b,c} q_{2im}^2 (\sigma_{c1m}^2 + \sigma_{c2m}^2) \right]; \quad (11)$$

$$\sigma_{2i}^2 = \frac{k_0^2(1-k_0)^2 U_0^2}{9} \left[ \sum_{m=a,b,c} t_{1im}^2 (\sigma_{r1m}^2 + \sigma_{r2m}^2) + \sum_{m=a,b,c} t_{2im}^2 (\sigma_{c1m}^2 + \sigma_{c2m}^2) \right]; \quad (12)$$

$$\rho_i = \frac{k_0^2(1-k_0)^2 U_0^2}{9\sigma_{1i}\sigma_{2i}} \left[ \sum_{m=a,b,c} q_{1im}t_{1im} (\sigma_{r1m}^2 + \sigma_{r2m}^2) + \sum_{m=a,b,c} q_{2im}t_{2im} (\sigma_{c1m}^2 + \sigma_{c2m}^2) \right], \quad (13)$$

где  $\sigma_{r1m}^2, \sigma_{r2m}^2, \sigma_{c1m}^2, \sigma_{c2m}^2$  — дисперсии относительных приращений номиналов резисторов и конденсаторов в соответствующих плечах делителей напряжения отдельных фаз  $m \in (a, b, c)$ .

Для  $RL$ -делителей выражения для дисперсии и коэффициента корреляции будут отличаться от (11) — (13) лишь заменой величин  $\sigma_{c1m}^2, \sigma_{c2m}^2$  на  $\sigma_{l1m}^2, \sigma_{l2m}^2$ .

Рассмотрение выражений (11) — (13) с учетом обычного соблюдения неравенства  $\omega\tau_0 \ll 1$  показывает, что при сравнимых значениях дисперсий номиналов резисторов и конденсаторов (индуктивностей) преобладающее влияние на случайный характер изменения симметричных составляющих выходного трехфазного напряжения оказывают резисторы, входящие в  $RC$ - или  $RL$ -делители трехфазного напряжения, и значения дисперсий  $\sigma_{1i}^2$  и  $\sigma_{2i}^2$  и коэффициентов корреляции  $\rho_i$  можно считать равными

$$\sigma_{1i}^2 = \frac{k_0^2(1-k_0)^2 U_0^2}{9} \sum_{m=a,b,c} m^2 (\sigma_{r1m}^2 + \sigma_{r2m}^2) \cos^2 \gamma_{mi}; \quad (14)$$

$$\sigma_{2i}^2 = \frac{k_0^2(1-k_0)^2 U_0^2}{9} \sum_{m=a,b,c} m^2 (\sigma_{r1m}^2 + \sigma_{r2m}^2) \sin^2 \gamma_{mi}; \quad (15)$$

$$\rho_i = \frac{\sum_{m=a,b,c} m^2 \sin 2\gamma_{mi} (\sigma_{r1m}^2 + \sigma_{r2m}^2)}{2 \sqrt{\left[ \sum_{m=a,b,c} m^2 (\sigma_{r1m}^2 + \sigma_{r2m}^2) \cos^2 \gamma_{mi} \right] \times \left[ \sum_{m=a,b,c} m^2 (\sigma_{r1m}^2 + \sigma_{r2m}^2) \sin^2 \gamma_{mi} \right]}}. \quad (16)$$

Если относительные дисперсии номиналов резисторов, помещенных в различные плечи и фазы делителей трехфазного напряжения, одинаковы ( $\sigma_{r1m}^2 = \sigma_{r2m}^2 = \sigma_r^2$ ), уровни входных фазных напряжений, подаваемых на делители, равны между собой:  $U_a = U_b = U_c = U$ , а фазовые сдвиги между фазными напряжениями близки к  $2\pi/3$ , т. е.  $a = b = c$  и  $\alpha_b = \alpha_c = 0$ , то коэффициенты корреляции (16) будут равны нулю  $\rho_i = 0$ , где  $i \in (1, 2, 3)$ . При этом дисперсии ортогональных компонентов обратной и нулевой последовательностей  $\sigma_{1i}^2$  и  $\sigma_{2i}^2$  ( $i = 1, 2$ ) согласно (14) и (15) оказываются одинаковыми и равными

$$\sigma_{1i}^2 = \sigma_{2i}^2 = \sigma_0^2 = \frac{1}{3} k_0^2 (1-k_0)^2 \sigma_r^2 U^2, \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

Для прямой последовательности дисперсия компонента  $T_3$  равна нулю ( $\sigma_{23}^2 = 0$ ), а дисперсия компонента  $Q_3$  равна

$$\sigma_{13}^2 = \frac{2}{3} k_0^2 (1-k_0)^2 \sigma_r^2 U^2. \quad (18)$$

Равенство нулю дисперсии для компонента  $T_3$  соответствует тому, что при оговоренных условиях распределение величин

прямой последовательности будет подчиняться одномерному нормальному закону.

Средние значения компонентов (10) для обратной и нулевой последовательностей при указанных ограничениях равны нулю  $\bar{Q}_i = \bar{T}_i = 0$  для  $i=1, 2$ , а для прямой последовательности они будут равны  $\bar{Q}_3 = k_0 U$ ,  $\bar{T}_3 = 0$ .

От двухмерного нормального закона распределения ортогональных компонентов  $Q_i$ ,  $T_i$ , где  $i \in (1, 2, 3)$ , заменой переменных  $Q_i = S_i \cos \theta_i$ ,  $T_i = S_i \sin \theta_i$  можно перейти к двумерному закону  $p(S_i, \theta_i)$  распределения амплитуд  $S_i$  и фаз  $\theta_i$  для обратной, нулевой и прямой последовательностей.

Заметим, что при одинаковых фазных напряжениях и фазовых сдвигах между ними, равных  $2\pi/3$ , амплитуды величин обратной и нулевой последовательностей одинаковы  $S_1 = S_2$ , и фазы для этих последовательностей противоположны по знаку, т. е.  $\theta_1 = -\theta_2$ .

Выполняя интегрирование  $p(S_i, \theta_i)$  по  $\theta_i$ , получим, что при допущении одинаковых дисперсий относительных отклонений номиналов резисторов, а также допущении одинаковых фазных напряжений и сдвигов фаз между ними, равных  $2\pi/3$ , распределения амплитуд величин обратной или нулевой последовательностей подчиняются закону Релея:

$$p(S) = \frac{3S}{k_0^2 (1 - k_0)^2 \sigma_r^2 U^2} \exp \left[ -\frac{3S^2}{2k_0^2 (1 - k_0)^2 \sigma_r^2 U^2} \right]$$

со средним значением

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{\pi}{6}} k_0 (1 - k_0) \sigma_r U \quad (19)$$

и среднеквадратичным отклонением

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{4 - \pi}{6}} k_0 (1 - k_0) \sigma_r U. \quad (20)$$

Поскольку дисперсия коэффициента передачи резистивного делителя напряжения в одной из фаз  $m$  равна

$$\sigma_k^2 = k_0^2 (1 - k_0)^2 (\sigma_{r1m}^2 + \sigma_{r2m}^2),$$

а величины (19), (20) при оговоренном предположении  $\sigma_{r1m} = \sigma_{r2m} = \sigma_r$  могут быть представлены как

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \sigma_k U; \quad (19a)$$

$$\sigma_s = \frac{\sqrt{4 - \pi}}{2\sqrt{3}} \sigma_k U, \quad (20a)$$

где  $\sigma_k = \sqrt{2} k_0 (1 - k_0) \sigma_r$  — среднеквадратичное отклонение коэффициента передачи одного из идентичных делителей, используемых при понижении трехфазного напряжения.

Если задаться пределом допускаемой погрешности, привносимой делителями  $\Delta = \bar{S} + g \sigma_s$ , где  $g$  — коэффициент доверительности, то из (19a) и (20a) можно определить допустимое среднеквадратичное отклонение коэффициента передачи для используемых делителей трехфазного напряжения:

$$\sigma_k = \frac{2\sqrt{3}\Delta}{(\sqrt{\pi} + g\sqrt{4 - \pi}) U}.$$

Распределение фаз обратной или нулевой последовательностей, получающееся интегрированием  $p(S_i, \theta_i)$  по  $S_i$  для  $i=1, 2$  при оговоренных условиях оказывается равномерным:

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

В порядке сравнения с (19) можно отметить, что в случае отклонения одного из коэффициентов передачи делителя от номинального значения при допущениях, аналогичных вышеуказанным, амплитуды величин обратной или нулевой последовательностей будут равны не нулю, а как это следует из (7) и (4),

$$S = \frac{1}{3} k_0 (1 - k_0) U \Delta r, \quad (21)$$

где  $\Delta r = \Delta R_1 / R_{10}$  или  $\Delta r = \Delta R_2 / R_{20}$  — относительное отклонение значений сопротивлений резисторов  $R_1$  или  $R_2$  от номинальных в верхнем или нижнем плечах одного из делителей.

Из выражений (18) — (20) можно сделать вывод, что относительные значения среднего и среднеквадратичного отклонений для обратной и нулевой последовательностей  $\bar{S}/U$ ,  $\sigma_s/U$  и относительное среднеквадратичное отклонение для прямой последовательности  $\sigma_{13}/U$  будут не больше, чем относительные среднеквадратичные отклонения номиналов резисторов в делителях, причем наибольшие значения указанных величин для обратной, нулевой и прямой последовательностей будут иметь место при коэффициенте передачи, равном  $k_0 = 0,5$ .

Если резистивные делители напряжения будут выполняться на катушечных резисторах, то их вследствие наличия паразитных и выходных емкостей можно отнести к  $RC$ -делителям. При их использовании в измерительных цепях сопротивления резисторов верхнего и нижнего плеч  $R_1$  и  $R_2$  делителей, исходя из выбираемых значений коэффициентов деления, обычно будут отличаться не более, чем на порядок, а емкость нижнего плеча  $C_2$ , состоящая из паразитной емкости и входной емкости цепи, присоединенной к выходу делителя, оказывается намного больше, чем паразитная емкость  $C_1$  верхнего плеча; в связи с этим для таких делителей обычно  $\tau_2 \gg \tau_1$ , и коэффициент передачи (2) при этом можно представить как

$$k(j\omega) = \frac{1 + r_1 - j\omega r_1 \tau_2}{(1 + r_1)^2}. \quad (22)$$

Согласно (22) фазовый сдвиг  $\beta$  этих делителей можно определить из выражения

$$\operatorname{tg} \beta = -\omega \tau_2 (1 - k_0), \quad (23)$$

и при встречающихся значениях правой части (23) можно считать, что

$$\beta = -\omega \tau_2 (1 - k_0). \quad (24)$$

Фазовый сдвиг при  $k_0 = 0,3$ ,  $C_2 = 100$  пФ,  $R_2 = 50$  кОм на частоте 50 Гц равен  $\beta = -0,05^\circ$ .

Делители на катушечных сопротивлениях можно отнести к  $RL$ -делителям, и при незначительном влиянии паразитных емкостей коэффициент передачи этих делителей будет также определяться выражением (2). Для этих делителей обычно  $R_1 \gg R_2$ ,  $L_1 \gg L_2$  и  $\tau_1 \gg \tau_2$ , поэтому для этих делителей коэффициент передачи можно считать равным

$$k_L(j\omega) = \frac{1 + r_1 + j\omega r_1 \tau_1 \tau_2}{(1 + r_1)^2},$$

а фазовый сдвиг этих делителей можно определять как

$$\beta_L = \omega \tau_1 (1 - k_0). \quad (25)$$

При  $k_0 = 0,3$ ,  $R_1 = 1$  кОм,  $L_1 = 500$  мкГн фазовый сдвиг  $\beta_L$  на частоте 50 Гц в катушечных делителях равен  $0,005^\circ$ .

Наличие незначительных фазовых сдвигов (24), (25) на частоте сети, а также на гармонических частотах достаточно высокого порядка позволяет сделать вывод о малых отличиях модуля коэффициента передачи этих делителей от значений, обусловленных только резистивными компонентами. Это означает, что в случае отсутствия частотной компенсации коэффициента передачи делителей, как и в случае использования частотно-компенсированных делителей, отклонения для обратной и нулевой последовательностей, как и отклонения для прямой последовательности трехфазного напряжения, будут определяться в основном изменениями резистивных компонентов этих делителей.

В качестве примера укажем, что в случае масштабного преобразования трехфазного напряжения, имеющего коэффициенты несимметрии и неуравновешенности, близкие к нулю, при коэффициенте передачи  $k_0 = 1/3$  делители на резисторах с относительным среднеквадратичным отклонением  $\sigma_r \leq 5 \cdot 10^{-3}$  ( $\sigma_k \leq 1,5 \times 10^{-3}$ ) будут привносить согласно (19) или (19a) систематическую погрешность коэффициентов несимметрии и неуравновешенности 0,08 %; кроме того, при этом согласно (20) или (20a) для указанных коэффициентов будет иметь место среднеквадратичное отклонение, приблизительно равное 0,04 %.

Для сравнения заметим, что изменение напряжения на одной из фаз на 1 % в рассматриваемой трехфазной системе напряжений дает приращение коэффициента несимметрии 0,3 %, а в сетях общего назначения ГОСТом 13109—67 допускаются значения коэффициента несимметрии, не превышающие 2 %.

[18.08.86]

## О системном подходе в преподавании электротехнических дисциплин

(статья Нетушила А. В. «Электричество», 1986, № 5, с. 43—47)

МАСЕКАС С. Ю., канд. техн. наук

Каунасский политехнический институт

Стержнем обсуждаемой статьи следует считать вопрос о традиционном знаке «минус» в выражении  $e_L = -d\psi/dt$ . Автор показывает, что этот знак следует поменять на положительный, изменив направление стрелки э. д. с. на схемах. Это показано на основе анализа сути векторов  $E^{\text{пот}}$  и  $E^{\text{инд}}$ . С целью практического применения результатов этого анализа автор далее описывает как определить направление  $e_2^{\text{инд}}$  во вторичном контуре. По-видимому, такого теоретического обоснования должно быть достаточно для выбора условных положительных направлений не только при изложении теории трансформаторов, но и для всего курса электрических машин. Так как наиболее наглядно это можно показать на трансформаторах, то в настоящей статье остановимся в основном только на них.

Для выбора условно положительных направлений для трансформатора достаточно принять, что направления э. д. с. и тока в первичной обмотке (в приемнике) должны быть противоположны, а во вторичной обмотке (в источнике) одинаковы. В этом случае как для цепей и машин постоянного тока (рис. 1, а), так и для цепей переменного тока с индуктивной катушкой, трансформаторов и синхронных машин (рис. 1, б) можно соответственно записать  $U=E$  и  $u=e_L$ . Эти равенства справедливы, если  $e_L = L di/dt$ .

Многие методические противоречия исчезают, если исключить из рассмотрения э. д. с. Тогда для индуктивной катушки можно написать лишь выражение напряжения:  $u = L di/dt$ , но этого не достаточно для определения условных положительных направлений электрических величин вторичной обмотки трансформатора. Необходимо еще знать направление  $e_2$ , которое определяется направлением  $e_1$  (рис. 1, в). Логическая последовательность разметки условных положительных направлений, по-видимому, должна быть такой:  $u_1 \rightarrow i_1 \rightarrow e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow i_2 \rightarrow u_2$ .

Следующий шаг, при котором особенно важно учитывать принятые условные положительные направления, — это переход к схеме приведенного трансформатора (рис. 1, г). При этом не возникает никаких казусных ситуаций, которые бывают в системе с «минусами». В «минусной» системе либо приходится изменять направления  $u_2$  или  $i_2$  на противоположные, либо делать оговорки типа «идем на минус север» [1]. К сожалению, в учебной литературе это не всегда делается, и читателю предоставляется возможность самому разгадывать «фокус» с опрокидыванием фазы.

Приняв «плюсовую» систему (рис. 2), можно записать такое уравнение для мгновенных значений м. д. с.:  $N_1 i_1 - N_2 i_2 = N_1 i_0$ . Как из уравнения, так и из рис. 2 следует, что ток  $i_1$  — намагничивающий, а  $i_2$  — размагничивающий. Частный, но важный случай, когда ток синусоидальный, тогда уравнение в комплексной форме имеет вид

$$N_1 \underline{i}_1 - N_2 \underline{i}_2 = N_1 \underline{i}_0.$$

В «плюсовой» системе векторная диаграмма трансформатора соответствует принципу его действия и отражает физическую суть происходящих в нем процессов. Трансформатор не опрокидывает ни фазу напряжения, ни тока, соответствует всем требованиям стандартных опытов его испытаний, правильно определяются группы соединения и решаются многие другие вопросы. Детальный анализ вариантов выбора положительных направлений проведен как А. В. Нетушилом в обсуждаемой статье (по шести критериям истинности), так и И. В. Антиком [1] (по семи примерам разногласий).

Что «король голый» высказывалось давно [1], но в учебной литературе «плюсовая» система продвигается очень медленно. Тем не менее, не дожидаясь положительных результатов голосования в МЭК, некоторые авторы уже используют «плюсовую»

систему в учебной литературе [2 и 3] как возможный, хотя пока не признанный вариант. Появилась даже учебная литература [4 и 5], в которой «плюсовая» система принята как основная. Несмотря на пестроту условных направлений, используемых в американской электротехнической литературе, и здесь все чаще применяется «плюсовая» система обозначений [6 и 7]. Запись выражения для э. д. с.  $e_L = d\psi/dt$  проходит через весь курс электрических машин. При этом никого не смущает, что э. д. с. опережает по фазе ее порождающий магнитный поток, также как аналогичное опережение напряжения током конденсатора до сих пор ни у кого не вызвало сомнений.

Дискуссионные вопросы, поставленные в статье А. В. Нетушила, обсуждались на республиканском семинаре преподавателей электротехники Литовской ССР. По нашему мнению, следует ввести «плюсовую» систему во всем курсе Э и Э, так как это позволяет более логично, наглядно и методично, излагать все разделы курса и показать неразрывную связь между ними. Убедительных доводов против «плюсовой» системы на семинаре высказано не было. Сомнения касались лишь пользы введения «плюсовой» системы только в одном курсе, в то время как в соседних курсах и многочисленных учебниках будет продолжать использоваться «минусовая» система. По мнению С. Кудараускаса (Клайпедский факультет Каунасского политехнического института) «плюсовую» систему в курсе Э и Э следует обязательно ввести, так как это самостоятельный и практически единственный курс по ТОЭ для студентов неэлектротехнических специальностей.

После семинара С. Маразас (каф. электрических машин Каунасского политехнического института) в письменном виде (схемы, уравнения, векторные диаграммы) параллельно изложил оба варианта (в «минусовой» и «плюсовой» системах) основ-

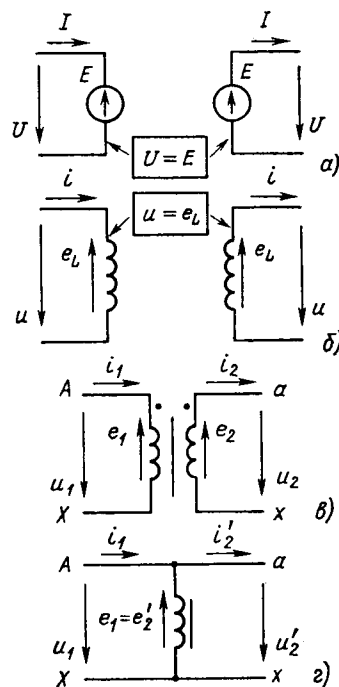


Рис. 1

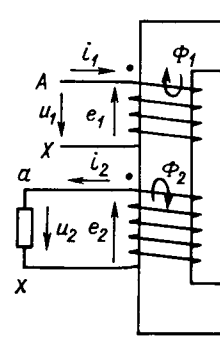


Рис. 2

ных вопросов электрических машин. Как и следовало ожидать, «плюсовая» система дала бесспорный положительный результат. К такому же выводу мы пришли после полной проверки всего курса Э и Э. Для внедрения «плюсовой» системы главной преградой остаются традиции и привычка.

Вышесказанное, а также многочисленные публикации [1—7 и др.] полностью подтверждает заключение В. Г. Герасимова [8]: «Эта несогласованность влечет за собой ряд противоречий в изложении теории трансформаторов и электрических машин. Для ликвидации этих противоречий необходимо и достаточно исключить знак «минус» в формуле закона электромагнитной индукции и записывать его в форме  $e = d\Phi/dt = L di/dt$ , изменив направление стрелки э. д. с., самоиндукции на схемах...» Эта мысль могла бы быть одним из основополагающих выводов данной дискуссии.

Необходимо обратить внимание и на некоторые другие вопросы системного подхода, возникающие при изложении курса Э и Э. Особенностью этого курса является то, что им охватывается материал не менее пяти самостоятельных курсов, нередко читаемых студентами электротехнических специальностей разных кафедр. В едином курсе Э и Э приходится согласовать не только терминологию, но и буквенные обозначения с разнообразной индексацией. Все это не всегда стыкуется в разных курсах, возникают большие трудности по соблюдению рекомендаций стандартов.

Стандартом [9], являющимся обязательным для учебной литературы, предусмотрена единая система обозначения комплексных величин:  $U, I, E, S, Z, Y$ . И если раньше в виде исключения разрешалось временные функции обозначать точкой, сейчас стандартом такое обозначение не предусмотрено. Теперь, в частности, одна точка над буквенным обозначением величины означает первую ее производную во времени.

Заслуживает внимания предложение о том, что в целях упрощения записи целесообразно ввести комплексное реактивное...» сопротивление [10], т. е.  $X = jX$ . Аналогично следует писать  $B = jB$ ,  $Q = jQ$ . Таким образом, все комплексные величины в электротехнике можно записать в единой форме:  $U = U_a + jU_r$ ;  $I = I_a + jI_r$ ;  $Z = R + jX$ ;  $Y = G - jB$ ;  $S = P + jQ$ . Что касается величин  $\vec{R}$ ,  $\vec{G}$  и  $\vec{P}$ , то они являются векторами на комплексной плоскости и должны изображаться со стрелками, несмотря на то, что они всегда совпадают с реальной осью.

Обозначение реальной и мнимой частей комплексной величины предусмотрено стандартом [9] в качестве резервного. По-видимому, этими резервными обозначениями в электротехнике не следует злоупотреблять, так как визуально их запись сходна с обозначениями  $R_e$  и  $I_m$  (эквивалентное сопротивление, амплитудное значение тока). На наш взгляд, на координатных осях вполне приемлемо проставлять  $+1$ ,  $+j$  в качестве единичных операторов или векторных ортов.

Положительные направления координатных осей  $+1$ ,  $+j$  во всех векторных диаграммах следовало бы выбирать одинаково

выми во всем курсе, тем более читаемым для неэлектриков. Векторные диаграммы должны строиться в единой комплексной координатной системе, а не координатные оси «пристраиваться» к векторным диаграммам. Во всех векторных диаграммах основной вектор должен быть горизонтальным и направлен слева направо. Следует отказаться от «вертикальных» векторных диаграмм.

Чертежи и математические выражения давно стали средством международного научно-технического языка. С этой же целью пора перейти на международную систему обозначений в электротехнике. Тем более, не следует применять смешанную систему индексаций: часть индексов национальных, а часть международных. Нашими новыми стандартами, которые согласованы со стандартами СЭВ и рекомендациями МЭК, предусмотрено и разрешено применение только международных обозначений. Тенденция применения международной системы обозначений замечена в последних изданиях стандартов. Например, стандарт [11] требует по международной системе обозначать выводы всех выпускаемых электрических машин и трансформаторов, выполнять все надписи на стендах и приборах.

Переход на международную систему обозначений не уменьшает роли создания новых терминов на родном языке, тем самым развивая и обогащая его. И все это ни в коем случае не может снизить исключительной роли родного языка в учебном процессе, будь это средняя или высшая школа.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антик И. В. О выборе условно положительных направлений и токов при анализе работы трансформатора. — Электричество, 1985, № 11.
2. Борисов Ю. М., Липатов Д. Н. Общая электротехника. — М.: Высшая школа, 1976.
3. Борисов Ю. М., Липатов Д. Н., Зорин Ю. Н. Электротехника. — М.: Высшая школа, 1985.
4. Траубе Е. С., Миргородский В. Г. Электротехника и основы электроники. — М.: Высшая школа, 1985.
5. Справочное пособие по электротехнике и основам электроники / Под ред. А. В. Нетушила. — М.: Высшая школа, 1986.
6. Slemmon G. R., Straughen A. Electric machines. — Addison — Wesley Publ. Comp., 1980.
7. Fitzgerald A. E., Kingsley Ch., Kusko A. Electric machinery. — McGraw — Hill Book Comp., 1971.
8. Герасимов В. Г. О системном подходе в преподавании электротехнических дисциплин. — Электричество, 1986, № 5.
9. ГОСТ 1494—77 (СТ СЭВ 3231—81). Электротехника. Буквенные обозначения основных величин.
10. Иванов Л. Л. К методике изложения некоторых вопросов курса электротехники. — В кн.: Электротехника, сборник научно-методических сетей. — М.: Высшая школа, 1973. вып. 1.
11. ГОСТ 26772—85 (СТ СЭВ 3170—81). Машины электрические вращающиеся. Обозначения выводов и направления вращения.

[27.02.87]

НИКОЛАИДЕ АНДРЕЙ, доктор техн. наук

Брашов, СРР

В обсуждаемой статье предложены важные и строго научно обоснованные пояснения в представлениях и анализ электромагнитических явлений. Тем не менее, в одном из рассмотренных в статье примеров содержится вывод, который представляется необоснованным. На рис. 4 в качестве примера системного подхода рассматривается согласование условных направлений напряжений и токов для трансформатора и делается вывод, что схема на рис. 4, а, которая весьма часто применяется в технической литературе для анализа электрических машин, является наименее удачной. Такое заключение и представляется нам необоснованным, причем, на наш взгляд, это несоответствие объясняется не методом анализа автора, который является правильным, а принимаемыми критериями.

В связи с этим нам хотелось бы сделать следующие замечания. Если схемы на рис. 4 рассматривать как состоящие из отдельных звеньев (источники э. д. с., индуктивности и др.), то в этом случае принимаемые автором критерии можно полностью считать приемлемыми. В действительности же схемы на рис. 4 относятся к определенному электромагнитному аппарату или машине с конкретной геометрической конфигурацией обмоток. С учетом этого соображения схема замещения должна отражать

определенную специфику аппарата, которая изложена с различной степенью точности и ясности в курсах электрических машин. На рисунке изображены первичная и вторичная обмотки трансформатора и соответствующая схема замещения, где для простоты сердечник не изображен. Из рассмотрения рисунка видно, что:

1. Первичная и вторичная обмотки намотаны согласно на одном сердечнике;
2. Произведена определенная маркировка зажимов обмоток, например  $a_1x_1$  для первичной обмотки и  $a_2x_2$  для вторичной обмотки;
3. В соответствии с указанным нужно и принимать положительное направление при обходе каждой обмотки для вычисления э. д. с. (контур интегрирования) и определенное направление для положительной нормали к поверхности витка обмотки (для вычисления магнитного потока).

Эти два направления обычно согласуют между собой с помощью правила правого винта, принятого также для выражения закона электромагнитной индукции. Логично было бы также, чтобы положительное направление нормалей к поверхностям двух обмоток было бы одинаковым.

4. Необходимо принять также положительное направление для электрического тока, которое обычно принимается таким, чтобы при обтекании обмотки током с положительным направлением получался бы положительный поток.

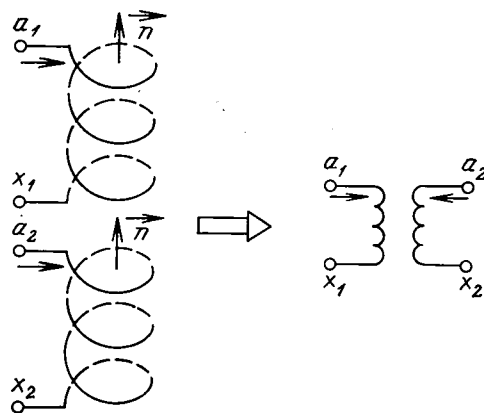
Эти соображения, связанные с геометрической конфигурацией обмоток, ведут к тому, что в электрической схеме э. д. с. и токи в каждой обмотке должны иметь одинаковое направление. Следовательно, второй критерий, предложенный автором обсуждаемой статьи, остается в силе, а первый заменяется двумя критериями, один из которых подобен второму. Таким образом, прибавляется третий критерий, относящийся к ориентации направлений относительно зажимов как приемника, так и генератора.

Представляется интересным использовать описанные выше три критерия.

Следует отметить также, что с точки зрения согласованности условных направлений, принятых в теории электромагнитного поля, и положительных направлений, выбранных для трансформатора, что наилучшими являются схемы на рис. 4, а и г (схемы на рис. 4, б и в не отвечают упомянутым условиям), причем схема из рис. 4, а имеет преимущество в том, что соответствует условиям направления передачи энергии. Описанные преимущества схемы на рис. 4, а остаются в силе и для векторной диаграммы.

С учетом изложенного, таблица критериев будет другой. Что же касается третьего и четвертого критериев рассматриваемой статьи, то они никак не снижают достоинств указанной схемы на рис. 4, а, так как относятся к маркировке зажимов (следовательно достаточно уточнить отношения между значениями  $u_2$  и  $u_{2\text{зж}}$  относительно рис. 4, а и г). Подобные замечания можно отнести и к пятому критерию.

Симметрию уравнений относительно индексов 1 и 2 в критерии 6 возможно осуществить только тогда, когда принимается



та же условность (приемник или генератор) как для первичных, так и для вторичных зажимов, что не всегда приемлемо.

Разумеется, векторные диаграммы должны соответствовать используемым схемам.

Как следует из сказанного выше, невозможно найти такую единственную систему направлений, которая могла бы удовлетворить всем условиям или критериям (некоторые из которых могут быть произвольными), но представляется оправданным выбирать эти условные направления в соответствии с теми, что применяются при изложении теории электромагнитного поля. Поэтому в курсах электрических машин следует отдать предпочтение схеме на рис. 4, а, которая вытекает из схемы рис. 4, г.

КАДЕЙШВИЛИ В. Г., канд. техн. наук

Дискуссия о системном подходе в преподавании электротехнических дисциплин представляется весьма нужной и своевременной. Ее результаты должны способствовать перестройке высшего образования по электротехническим направлениям.

Выступившие в дискуссии убедительно доказали важность согласованности изложения материала между различными курсами в системе непрерывного электротехнического образования, нарушение такой согласованности оказывает самое отрицательное влияние на весь учебно-воспитательный процесс. Указывались и конкретные примеры нарушения связи между дисциплинами. Разумеется, этот список можно продолжить. В частности, следует обратить внимание на несогласованность между теорией расчета электрических цепей в установившемся режиме, излагаемой в курсе ТОЭ, и методами расчета электротехнических сетей и систем, изучаемых студентами электроэнергетических специальностей на старших курсах.

Здесь несогласованность достигала такого уровня, что в известном учебнике по электрическим сетям<sup>1</sup> методы расчета сетей квалифицируются как «незаконные», с точки зрения строгой теории цепей. Между тем очевидно, что эти методы не могут иметь под собой никакой другой научной основы, кроме теории цепей, и если в настоящее время такая связь не прослеживается, то это является следствием исторически возникшей несогласованности между отдельными дисциплинами, которую необходимо самым энергичным образом устранять совместными усилиями специалистов по ТОЭ и электрическим сетям.

Более чем двадцатилетний опыт преподавания ТОЭ в Грузинском политехническом институте и одновременно участие в расчетах режимов сетей энергосистемы на ЦВМ послужили основой для проведения автором в 1979 г. специального исследования о методической связи между теорией электрических цепей и методами расчета сетей энергетических систем. Эта работа позволила вскрыть основные причины несогласованности.

В соответствии с функциональным назначением все узлы сетей энергосистем характеризуются активной и реактивной мощностью, а также узловым напряжением. Между тем в теории цепей для описания электромагнитных процессов в любой ветви или двухполюснике используются такие режимные параметры, как ток в ветви, напряжение на ее зажимах и сдвиг фаз между векторами напряжения и тока.

В соответствии с доминирующей ролью энергетических

процессов на принципиальных схемах сетей и систем источники энергии изображаются не э. д. с. или задающими токами, как это принято в курсе ТОЭ, а комплексными мощностями, поступающими от них в сеть. Также комплексной мощностью представляются приемники электрической энергии. В связи с этим, нелинейные соотношения описываются не вольт-амперными характеристиками, как это принято в теории нелинейных цепей, а функциональной зависимостью «мощность — напряжение».

Следовательно, для того, чтобы обучающиеся могли строить математические модели и составлять расчетные схемы на основе тех научных абстракций и идеализированных элементов, которые приняты в ТОЭ необходимо подчеркнуть важность преобразования триады режимных параметров сети (активные и реактивные мощности и узловые напряжения) в эквивалентные токи, напряжения и углы сдвига фаз между ними, которые могут использоваться в уравнениях Кирхгофа и других, вытекающих из них методах, развиваемых в курсе ТОЭ.

В частности, необходимо сознательное овладение приемами приведения указанных выше источников и приемников мощности к схемам с источниками э. д. с. или токов, как это принято в теоретической электротехнике.

В практических расчетах сетей энергосистем осуществляются алгебраические преобразования, которые можно трактовать, по существу, как замену источников мощности идеальными источниками тока, включенными на узловое напряжение. Осушается это не явно, но именно на такое преобразование указывают выражения  $\dot{S}_k / \dot{U}_k$ , встречающиеся в расчетных формулах сетей энергосистемы, полученных по самым различным специфическим методам расчета сетей, в том числе и по методу «расчета в мощностях».

Другая трудность заключается в том, что в результате такого преобразования получается зависимый от узлового напряжения нелинейный источник тока, который мало отражен в современной теоретической электротехнике, расчетная же практика преодолевает это препятствие с помощью метода последовательных приближений. Учитывая, что в специфических условиях сетей энергетических систем узловые напряжения в отличие от напряжений ветвей изменяются в небольших пределах, часто оказывается возможным ограничиться первыми приближениями значений  $\dot{U}_k$ , соответствующими номинальному напряжению сети. При этом получается идеальный источник тока, задающий ток которого определяется мощностью источника или

<sup>1</sup> Электрические сети/В. А. Веников, А. А. Глазунов, Л. А. Жуков, Л. А. Солдаткина. — М.: Высшая школа, 1971.

приемника энергии, присоединенного к соответствующему узлу сети.

Такая же линейная модель замещения источника или приемника энергии может быть применена на каждом шаге последовательных приближений при расчете сети без упрощающих предположений, что открывает путь для широкого применения всех методов теории линейных цепей в расчетах режимов сетей энергетических систем.

Наиболее естественно в таких условиях применять метод узловых напряжений. В этом случае задающие токи источников и приемников образуют матрицу правых частей соответствующей системы уравнений, значения которых корректируются на каждом шаге процедуры последовательных приближений по уточненным значениям узловых напряжений, которые образуют матрицу искоемых величин системы.

Применение метода контурных токов менее удобно, хотя этот метод и позволяет в большинстве случаев сократить количество совместно решаемых уравнений. Здесь возникают трудности, связанные с выбором независимых контуров, а также подсчетом и корректировкой контурных э. д. с. по задающим токам, что требует на каждом шаге последовательных приближений промежуточного вычисления узловых напряжений.

Кроме того, преобразование идеальных источников тока, включенных на узловые напряжения без параллельных проводимостей, в эквивалентные э. д. с. по элементарным формулам, приведенным во всех учебниках по ТОЭ, также связано с серьезными затруднениями, которые преодолеваются с помощью правила переноса источников. На это лишь в последние годы обратили внимание авторы отдельных учебных пособий. Именно это правило (в неявной форме) лежит в основе известного из теории сетей метода расчета одноконтурных замкнутых сетей с одним источником питания.

В сложных многоконтурных схемах применение такого подхода затруднительно, так как каждый такой источник тока, включенный на узловое напряжение, приходится заменять целым рядом источников э. д. с., включенных во все ветви вдоль произвольно выбранного непрерывного пути от точки присоединения источника тока до балансирующего узла<sup>2</sup>. При этом может оказаться необходимым в одной и той же ветви включать последовательно несколько э. д. с., имитирующих действие различных задающих токов на данном участке.

При записи уравнений сети по так называемым строгим методам эти трудности не бросаются в глаза из-за сложных матричных построений, скрывающих физическую суть выполняемых преобразований. Нигде не объяснено, например, что матричное выражение

$$(N)(Z_B) \begin{pmatrix} M_2^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} (J)$$

соответствует замене задающих токов контурными э. д. с.

Эквивалентные схемы с источниками э. д. с. применяются, как правило, в расчетах устойчивости, когда важно определение так называемой внутренней мощности генераторов. Эти расчеты выполняются обычно с использованием обобщенных параметров электрических цепей. Как отмечено в настоящей дискуссии Вениковым В. А., и в этом вопросе наблюдается несогласованность с определениями, принятыми в ТОЭ. Так, в учебниках по электрическим сетям входными и взаимными сопротивлениями

<sup>2</sup> Еще одна специфическая особенность расчета сетей — балансирующий узел нужно иметь и в том случае, когда расчет ведется по методу контурных токов.

ми или проводимостями называют взаимно-обратные величины выражающие отношение э. д. с. ветви к току ветви (сопротивление) или наоборот (проводимость).

Между тем, в теоретической электротехнике входными и взаимными сопротивлениями называют отношение узлового напряжения к задающему току в узле. А входные и взаимные проводимости представляют собой отношение контурного тока в контурной э. д. с.

Для того чтобы ликвидировать несогласованность в данном вопросе достаточно было бы обобщенные параметры, используемые в расчетах сетей энергосистемы, называть входными и взаимными проводимостями по ветвям. При этом для обобщенных параметров, используемых в ТОЭ, можно было бы применять понятия входных и взаимных сопротивлений по узлам и входных и взаимных проводимостей по контурам.

Кроме того, необходимо показать возможность расширения матрицы узловых и контурных коэффициентов до системы параметров по ветвям.

В целом проведенное исследование показало, что не существует никаких специфических методов расчета режимов сетей энергосистем, в том числе и объявленных «незаконными», которые невозможно было бы обосновать с помощью научных положений теории цепей с учетом тех или иных предположений. Те же фундаментальные положения ТОЭ могут быть использованы для уяснения физической сути матричных преобразований, составляющих основу строгих методов расчета сложных электрических сетей. Но для этого необходимо устранить ту несогласованность, о которой говорилось выше, и, в первую очередь, обратить внимание на те преобразования, которые могли бы связать теорию цепей со специфическими методами расчета сетей энергосистемы.

В связи с этим представляется целесообразным предложение, высказанное в настоящей дискуссии Герасимовым В. Г., о необходимости сочетания фундаментальной подготовки по основам электротехники с профилизацией в соответствии со специализацией обучающихся. В частности, необходимо для студентов электроэнергетических специальностей раздел ТОЭ, касающийся электрических цепей в установившемся режиме, излагать в двух частях. В первой части будет излагаться общая теория, а во второй — особенности применения этих теоретических положений в специфических условиях сетей энергетических систем. Соответствующие коррективы должны быть внесены также в программы преподавания курса электрических сетей.

Наконец, несколько слов по поводу выбора условных положительных направлений тока, напряжения и э. д. с. двухобмоточного трансформатора, вынесенного на обсуждение в статье, открывающей дискуссию.

Автор предлагает выбор лучшего варианта осуществлять по шести критериям с использованием приемов теории игр и выбора решений. Но приведенный в статье перечень критериев не является ни исчерпывающим, ни абсолютным. В зависимости от исследуемой задачи в этот перечень можно включить ряд других критериев или исключить некоторые из них.

Например, во многих случаях можно было бы исключить третий и четвертый критерии о согласовании варианта с изложением теории измерительных трансформаторов и наоборот включить критерий, характеризующий согласованность варианта с выбором знаков в основных формулах ТОЭ, связывающих токи напряжения и э. д. с. Кроме того, эти критерии не равноценны и им следует присваивать определенные веса. В целом выбор на предлагаемой основе носит в определенной степени субъективный характер, и в каждом частном случае должен решаться с учетом конкретных особенностей исследуемой задачи.

## Уважаемый читатель!

Редакция журнала «Электричество» сообщает, что 9-й Международный симпозиум по электромагнитной совместимости состоится 28—30 июня 1988 г. в г. Вроцлаве (ПНР).

## Копылов И. П. Электрические машины. — Москва: Энергоатомиздат, 1986, 360 с.

Рецензируемая книга написана на базе новых достижений в теории электромеханического преобразования энергии и практике электромашиностроения. В частности, нашли отражение достижения математической теории и новые конструктивные видоизменения электрических машин, а также мировоззренческие вопросы. В свете современных требований книга наряду с привитием профессиональных знаний будет обязывать студентов использовать и углублять полученные на младших курсах математические навыки. На примерах показан вклад отечественных ученых в становление и развитие электрических машин, что представляется весьма важным для учебника.

Основные особенности нового учебника состоят в следующем:

1. Материал располагается по-новому. Изучение теории электрических машин начинается с главы «Введение в электромеханику», в которой рассматриваются общие вопросы теории электрических машин переменного и постоянного тока. Здесь дается математическое описание процессов преобразования энергии в идеальной машине и реальной электрической машины с бесчисленным числом гармоник в воздушном зазоре и множеством контуров на роторе и статоре, дается понятие параметров машины, приводятся общие положения расчета магнитной системы.

В предшествующих изданиях часть этого материала давалась в главе «Общие вопросы машин переменного тока», которая располагалась после разделов «Машины постоянного тока» и «Трансформаторы» в середине книги. Это методически неправильно, так как общие вопросы теории электрических машин справедливы как для машин переменного тока, так и для машин постоянного тока.

2. Впервые изложение всех разделов теории электрических машин начинается с дифференциальных уравнений, которые справедливы для переходных и установившихся режимов, а затем излагается материал, основанный на применении векторных диаграмм, схем замещений и круговых диаграмм.

Автору удалось строго и в то же время наглядно и просто связать уравнения динамики и статики в единое целое, ввести большую математизацию курса, показать роль ЭВМ в развитии теории электрических машин. Большим достоинством нового учебника является глубокое описание процессов преобразования энергии со строгим математическим анализом и раскрытием физических представлений.

3. На основе математических моделей показана общность всех электрических машин. Введение понятия об электрических машинах, как электромеханических преобразователях энергии, позволило связать общими подходами обычные машины и машины с жидким и газообразным ротором, линейные и многомерные машины.

4. Впервые в курсе «Электрические машины» удалось связать в единое целое индуктивные, емкостные и индуктивно-емкостные электромеханические преобразователи. Это несомненная удача автора. Введение краткого описания таких машин открывает новые горизонты для создания уникальных электромеханических преобразователей.

5. Правильным с точки зрения практики и методики изучения электрических машин является более объемное представление коллекторных электрических машин и каскадов электрических машин.

Следует отметить удачное объяснение влияния вихревых токов на вид механической характеристики электрических машин, представление о классификации высших гармонических и другие вопросы.

К недостаткам учебника следует отнести очень сжатое изложение физической сущности некоторых вопросов, заставляющее буквально вчитываться в каждую фразу. Не каждому студенту это по силам. Поэтому при переиздании учебника целесообразно уделить больше внимания таким вопросам, как особенности холостого хода трехфазных трансформаторов, параллельная работа, регулирование частоты вращения асинхронных двигателей и двигателей постоянного тока, реакция якоря синхронных машин и машин постоянного тока, внезапное короткое замыкание и т. д.

Конечно, дополнительные пояснения потребуют увеличения объема книги, однако, по нашему мнению, учебник заслуживает этого.

Книга хорошо издана. Особенно следует отметить удачно подобранные рисунки, которые дают читателю полное представление об устройстве электрических машин и их узлов.

Пожалуй, впервые автору удалось так сжато и глубоко изложить современную теорию электрических машин, поэтому, без сомнения, рецензируемая книга станет настольной как для студентов, так и для инженеров-электромехаников.

Сипайлов Г. А., проф.



## Вниманию читателей

ВИНИТИ выпускает в 1987 г. информационное издание «Итоги науки и техники», серия

### ПОЖАРНАЯ ОХРАНА

Том 8. Пожарная безопасность атомных электростанций

Плановый объем 8 уч.-изд. л., ориентировочная цена 1 р. 20 к.

Автор к.т.н. Микеев А. К.

Особенности пожарной опасности атомных электростанций (АЭС) и аналогичных объектов; расчетные методики определения риска и вероятности возникновения пожаров на АЭС, экономические аспекты аварий и основные принципы создания противопожарной защиты АЭС; средства и способы обеспечения пожарной безопасности; организация тушения пожаров АЭС.

Издание рассчитано на широкий круг научных и инженерно-технических работников объектов атомной энергетики, работников пожарной охраны, преподавателей и студентов энергетических и пожарно-технических учебных заведений.

Издание высылается наложенным платежом из имеющихся в наличии.

Заказы от организаций и индивидуальных подписчиков направлять по адресу: 140010, г. Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403. ПИК ВИНИТИ, отдел распространения. Телефон 553-56-29.

## Азад Алиевич Эфендизаде

(К 80-летию со дня рождения)

Исполнилось 80 лет со дня рождения и 55 лет научно-педагогической и общественной деятельности одного из видных ученых в области электроэнергетики и проблем управления академиком АН Азерб. ССР, заслуженного деятеля науки республики, члена КПСС с 1940 г., профессора Азада Алиевича Эфендизаде.

Азад Алиевич родился в г. Шемахе. В 1931 г. окончил Ленинградский политехнический институт по специальности инженер-электрик. С 1931 г. начал практическую деятельность в ВСНХ Азерб. ССР в качестве ответственного исполнителя по электрохозяйству Энергобюро ВСНХ; он занимался также вопросами изыскания, проектирования и строительства электростанций местного значения.

В последующие годы А. А. Эфендизаде работал на ГРЭС им. Красина, Сумгаитской ТЭЦ, а с 1938 г. перешел на преподавательскую работу в АЗИНЕФТЕХИМ им. М. Азизбекова.

В годы Великой Отечественной войны А. А. Эфендизаде был направлен в Кировабад главным энергетиком Кировабадского объединения электростанций и директором вновь организованной Кировабадской научно-исследовательской базы АН Азерб. ССР.

В 1945 г. он защитил кандидатскую диссертацию в Энергетическом институте АН Азерб. СССР, в котором стал работать с 1946 г. в качестве старшего научного сотрудника, заместителя директора, директора, руководителя лаборатории. В 1952 г. Азад Алиевич защитил докторскую диссертацию, в 1953 г. ему присвоено звание профессора. В 1969 г. он избран академиком АН Азерб. ССР. В настоящее время А. А. Эфендизаде — ведущий сотрудник отдела электроснабжения АзНИИЭ.



Главное направление научной деятельности А. А. Эфендизаде связано с управляемым автоматизированным электроприводом, динамикой частотно-регулируемого асинхронного электропривода и систем широтно-импульсного регулирования электропривода постоянного тока. Все работы Азада Алиевича отличаются актуальностью и практической направленностью, особенно это относится к работам, проведенным для нефтяной промышленности Азербайджана. Им опубликовано более 250 работ, в том числе 5 монографий.

А. А. Эфендизаде принимал самое деятельное участие во многих Международных конгрессах ИФАК, был одним из организаторов международных симпозиумов в Баку.

Более 30 лет А. А. Эфендизаде ведет преподавательскую работу в ка-

честве профессора кафедры «Электропривод и автоматизация промышленных установок» АЗИНЕФТЕХИМ; им подготовлено несколько учебников и учебных пособий на азербайджанском языке по теории электропривода, автоматическому управлению и регулированию, которыми широко пользуются студенты технических вузов республики. Среди его учеников высококвалифицированные специалисты кандидаты и доктора наук.

Большую и плодотворную работу ведет проф. А. А. Эфендизаде по созданию азербайджанской технической терминологии. Им составлены и выпущены три трех- и шестизычных словаря терминов по электроприводу, автоматическому управлению и электромеханике (последний — в 1987 г.).

Широко известна научно-организационная деятельность А. А. Эфендизаде. Он является бессменным председателем Азерб. территориальной группы советского национального комитета по автоматическому управлению (ИФАК), председателем Совета по автоматизации научных исследований АН Азерб. ССР, членом Главной редакции Азербайджанской Советской энциклопедии, членом Международного комитета терминологии и стандартов ИФАК, председателем специализированного совета по защите кандидатских диссертаций и др.

Большая научная, педагогическая и общественная работа А. А. Эфендизаде отмечена орденами Трудового Красного Знамени, «Знак Почета», медалями.

Замечательный ученый и учитель, человек высокой культуры и эрудиции, неутомимый труженик, Азад Алиевич Эфендизаде пользуется искренним уважением всех, кто его знает.

Группа товарищей и учеников

## Марк Ефимович Иерусалимов

(К 70-летию со дня рождения)

Исполнилось 70 лет со дня рождения доктора технических наук, профессора, заслуженного работника высшей школы Украинской ССР, заведующего кафедрой техники высоких напряжений Киевского ордена Ленина политехнического института, члена КПСС с 1940 г. Марка Ефимовича Иерусалимова.

М. Е. Иерусалимов окончил электротехнический факультет Киевского политехнического института в феврале

1941 г. и был оставлен для преподавательской работы на кафедре электрических сетей, систем и техники высоких напряжений.

Начало его работы в институте прервала Великая Отечественная война. После окончания курсов командного состава при Военной электротехнической академии связи им. С. М. Буденного М. Е. Иерусалимов был направлен в действующую армию и принимал непосредственное участие в ге-

роической обороне Ленинграда и в боях по прорыву блокады города.

После тяжелого ранения в 1944 г. М. Е. Иерусалимов возвратился в Киевский политехнический институт. С 1945 по 1951 г. он работал начальником учебной части института и одновременно читал курс «Техника высоких напряжений» для всех специальностей электроэнергетического факультета.

В 1951 г. он защитил кандидатскую

диссертацию на тему «Рентгенодефектоскопия высоковольтных изоляторов», а в 1967 г. — докторскую диссертацию на тему «Неразрушающие испытания изоляции высоковольтного электрооборудования».

В 1971—1975 гг. М. Е. Иерусалимов заведует кафедрой электрических измерений и электротехнических материалов, с 1975 г. избирается на должность заведующего кафедрой техники высоких напряжений КПИ. Он приложил много сил для постановки соответствующих профилирующих курсов и модернизации лабораторий.

М. Е. Иерусалимов является специалистом широкого профиля в области техники высоких напряжений. Основные его научные работы посвящены разработке и исследованию методов контроля и испытаний изоляции высоковольтного электрооборудования. Для научной работы М. Е. Иерусалимова характерна тесная связь с задачами практики, с производством. М. Е. Иерусалимов имеет более 120 научных публи-



каций, в том числе 7 книг. Большое внимание он уделяет учебно-методической работе.

Многогранна общественная деятельность М. Е. Иерусалимова. Он является членом Научно-методических комиссий Минвуза СССР и УССР, председателем Республиканской секции электротехники высоких напряжений УкрНТОЭ и ЭП, членом редколлегии межвузовского сборника «Электрические сети и системы», членом Совета ветеранов Великой Отечественной войны института, неоднократно избирался в состав партийного бюро.

М. Е. Иерусалимов награжден правительственными наградами, грамотами Минвуза УССР. В 1978 г. Указом Президиума Верховного Совета УССР ему присвоено почетное звание заслуженного работника высшей школы Украинской ССР.

Разносторонность знаний, партийная принципиальность создали М. Е. Иерусалимову заслуженный авторитет и признание.

Группа товарищей



## Владимир Алексеевич Винокуров

(К 70-летию со дня рождения)

Исполнилось 70 лет со дня рождения заведующего кафедрой «Электрические машины» Московского института инженеров железнодорожного транспорта, заслуженного изобретателя РСФСР, доктора технических наук, профессора Владимира Алексеевича Винокурова.

В. А. Винокуров — участник Великой Отечественной войны и курсант Военно-воздушной инженерной академии им. Н. Е. Жуковского, где с 1947 г. после защиты кандидатской диссертации он успешно занимался педагогической и научно-исследовательской работой. В 1962 г. защитил докторскую диссертацию, в 1963 г. ему присвоено ученое звание профессора.

В. А. Винокуров — специалист в области транспортной электроэнергетики. Основные направления его научных исследований связаны с созданием высокоэффективных транспортных энергоустановок для работы в тяжелых эксплуатационных условиях с предельными электромагнитными нагрузками. Под руководством В. А. Винокурова в результате многолетних исследований, усилиями ряда научных и производственных организаций была решена проблема электроснабжения сверхзвуковых высотных летательных аппаратов и обеспечен отечественный приоритет в этой области. В. А. Винокуров заложил основы приоритетных разработок мощных высокоэффективных линейных тяговых двигателей, являющихся важнейшими звеньями новых транспортных систем на магнитном подвесе.



Результаты его теоретических работ нашли отражение более, чем в 200 научных трудах.

Проводя глубокие теоретические исследования, Владимир Алексеевич уделяет большое внимание доведению их до уровня инженерной практики. За плодотворную научную и изобретательскую работу и реализацию изобретений с высоким народнохозяйственным эффектом ему в 1968 г. Президиумом Верховного Совета РСФСР присвоено звание «Заслуженный изобретатель РСФСР».

Постоянное внимание В. А. Винокуров уделяет подготовке специалистов-электромехаников и молодых научных кадров. Он является автором разработок методов расчетов ряда электрических машин (повышенной частоты, высотных, с асимметричными магнитными системами, линейных двигателей), опубликованных в 10 монографиях и многочисленных статьях. Им написаны в соавторстве 7 учебников и большое число учебных пособий, которые широко используются при подготовке инженеров по транспортной электромеханике. Под научным руководством Владимира Алексеевича подготовлено 17 кандидатов технических наук, им создана школа специалистов в области линейных электродвигателей.

В. А. Винокуров ведет большую общественную работу, являясь членом экспертной комиссии ВАК по энергетике, членом Научно-методического Совета МВ и ССО СССР по электромеханике, членом редколлегии научно-технического сборника «Аэродинамика и теплоотдача в электрических машинах».

В 1972 г. В. А. Винокуров перешел на работу в МИИТ, где возглавил коллектив кафедры «Электрические машины», и в короткий срок сумел сплотить и направить усилия коллектива на решение важных народнохозяйственных задач по разработке и созданию перспективного тягового электропривода транспортных систем на новых технологических принципах.

Группа товарищей и учеников

# Владимир Александрович Лабунцов

(К 60-летию со дня рождения)

В. А. Лабунцов родился 11 июля 1927 г. в Ленинграде. После окончания в 1944 г. средней школы поступил в Московский энергетический институт, который окончил с отличием в 1950 г. по специальности «Промышленная электроника»; в том же году был принят в аспирантуру. В 1953 г. успешно защитил кандидатскую диссертацию на тему «Ионный преобразователь частоты для питания асинхронных двигателей».

В диссертации В. А. Лабунцов, в частности, показал, что явление самораскачивания в системе автономный инвертор — асинхронный двигатель, наблюдавшееся до этого рядом авторов, объясняется переходом двигателя в режим конденсаторного самовозбуждения за счет наличия в составе питающего его инвертора коммутирующих конденсаторов. На основе изучения условий такого самовозбуждения им были даны рекомендации по устранению этого явления, которые в дальнейшем применялись многими разработчиками вентильных преобразователей частоты для асинхронного электропривода.

С 1953 г. В. А. Лабунцов начал работать преподавателем на кафедре «Промышленная электроника» МЭИ, в 1957 г. был утвержден в ученом звании доцента. Здесь он читал ряд курсов, много времени уделял методической работе, в том числе составлению программ по ряду учебных дисциплин и учебных планов по специальности.

Одновременно с преподавательской деятельностью В. А. Лабунцов активно вел научно-исследовательскую работу в области автономных инверторов, преобразователей частоты и систем управления этими и другими преобразователями. Быстро оценив перспективность тиристорных, появившихся в начале 60-х годов, и активно включившись в работы по изучению характеристик и применению этого нового класса силовых полупроводниковых приборов, он стал одним из ведущих специалистов



в нашей стране в области тиристорной преобразовательной техники. В 1973 г. В. А. Лабунцов защитил докторскую диссертацию «Анализ и синтез тиристорных автономных инверторов напряжения», в которой на основе глубокого изучения электромагнитных процессов показал возможности этого важного для практики класса автономных преобразователей.

С 1961 г. В. А. Лабунцов выполнял обязанности заместителя заведующего кафедрой. В 1974 г. он был избран по конкурсу на должность заведующего кафедрой «Промышленная электроника», сменив на этом посту организатора и бессменного руководителя кафедры с момента ее создания в 1943 г. проф. И. Л. Каганова. Одновременно В. А. Лабунцов принял у И. Л. Каганова и функции председателя Научно-методического совета по промышленной электронике при Минвузе СССР, объединяющего в настоящее время более 25 кафедр вузов страны и ряд родственных кафедр, связанных с преподаванием промышленной электроники.

Группа товарищей, редакция и редколлегия журнала «Электричество»

## Виктор Александрович Игнатов

(К 50-летию со дня рождения)

Трудовой путь В. А. Игнатов начал в 1956 г., успешно совмещая работу с учебой во Всесоюзном заочном энергетическом институте. После окончания института в 1961 г. работал в промышленности, занимался разработкой специальных электрических машин, обладающих улучшенными характеристиками и новыми свойствами. В 1967 г. защитил в Московском энергетическом институте диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук, в которой им были предложены новые торцевые электрические машины и прогрессивная технология их изготовления.

В 1972 г. во ВНИИЭлектромаш успешно защитил докторскую диссертацию, в которой были представлены результаты исследований и расчета магнитного поля в области зубчатого воздушного зазора асинхронных двигате-



лей методом пересекающихся областей с использованием функций Грина и конформных преобразований частичных областей, а также вопросы теории и проектирования многополюсных повортных трансформаторов с печатными обмотками при применении новых прогрессивных методов малоотходной технологии. Новые конструкции электрических машин и способы их изготовления легли в основу более 60 изобретений В. А. Игнатова. Основные результаты исследований опубликованы им более чем в 200 научных трудах, в том числе трех монографиях.

Большой вклад В. А. Игнатов внес в разработку теории и новых конструкций электродвигателей с сердечниками, прессованными из порошков на основе магнитно-мягких композиционных материалов, что дает возможность экономить большое количество электротех-

нической стали. В работах В. А. Игнатов рассмотрены вопросы распределения магнитного поля в таких сердечниках, выявлены рациональные соотношения основных размеров, даны практические рекомендации по выбору и применению композиций из магнитных порошков.

В 1962 г. В. А. Игнатов работает в высшей школе, сочетая педагогическую и воспитательную работу с научно-исследовательской деятельностью. За руководство лучшей студенческой НИР на всесоюзном конкурсе был награжден грамотой Минвуза СССР и ЦК ВЛКСМ.

С 1978 г. В. А. Игнатов возглавля-

ет кафедру электротехники и электрооборудования Всесоюзного заочного инженерно-строительного института, являясь одновременно научным руководителем отраслевой лаборатории микроэлектродвигателей Минэлектротехпрома, где при его участии создаются перспективные образцы электродвигателей малой мощности на основе применения ресурсосберегающей технологии.

Работы В. А. Игнатова трижды отмечены золотыми медалями и дипломами ВДНХ СССР. Большой вклад он вносит в подготовку научных кадров, под его руководством защищено

десять кандидатских диссертаций.

Педагогическую, воспитательную и научную деятельность В. А. Игнатов успешно сочетает с общественной работой. Он является внештатным заведующим отделом Комитета народного контроля Ждановского района Москвы, членом профсоюзного комитета института, председателем постоянно действующего научно-технического семинара на ВДНХ СССР.

Желаем Виктору Александровичу дальнейших успехов в плодотворной и многогранной деятельности.

Группа товарищей



## Сергей Владимирович Страхов

Советская электротехническая наука понесла тяжелую утрату. На 79-м году жизни скончался лауреат премии им. П. Н. Яблочкова, доктор технических наук, профессор Сергей Владимирович Страхов, посвятивший около 60 лет делу развития электротехники и подготовки инженеров-электриков нашей страны.

С. В. Страхов родился 19 марта 1908 г. После завершения высшего образования с 1930 по 1933 г. он работал ассистентом, с 1933 по 1939 г. доцентом Московского энергетического института на кафедрах «Центральные электрические станции» и «Теоретические основы электротехники». С 1939 по 1943 г. С. В. Страхов был начальником кафедры «Электротехника и радиотехника» в Военной академии химической защиты, после чего с 1943 по 1960 г. вновь работал в МЭИ на кафедре ТОЭ. В 1961 г. в Московском институте инженеров железнодорожного транспорта С. В. Страхов организовал кафедру «Автоматика и телемеханика» и возглавлял ее в течение двадцати пяти лет. За эти годы было выпущено более двух тысяч инженеров-электриков по специальности «Автоматика и телемеханика». Педагогическая деятельность С. В. Страхова связана также и с Ивановским энергетическим институтом, где с 1936 по 1941 г. он работал н. о. профессора и заведующим кафедрой ТОЭ.

На протяжении многих лет С. В. Страхов входил в состав авторского коллектива по созданию известного в СССР и за рубежом учебника по теоретической электротехнике. Усовершенствованием этого учебника Сергей Владимирович занимался до последних дней своей жизни.



Основным научным достижением С. В. Страхова являлась разработка метода расчета переходных процессов в сложных электрических цепях, содержащих вращающиеся электрические машины и статические элементы. В 1958 г. С. В. Страхову была присвоена ученая степень доктора технических наук, а в июне 1961 г. — ученое звание профессора. В 1967 г. Президиум АН СССР отметил научную деятельность С. В. Страхова премией П. Н. Яблочкова. К числу научных результатов С. В. Страхова относятся и многочисленные исследования сложных автоматически управляемых динамических систем в области энергетики и транспорта, применение методов оптимизации для синтеза этих систем. Результаты научной деятельности С. В. Страхова нашли отражение в более чем 160 печатных работах.

С. В. Страхов поддерживал тесные связи с работниками промышленности, с большой готовностью оказывал высококвалифицированную научную помощь сотрудникам предприятий авиационной промышленности, энергетики и транспортного машиностроения.

Под научным влиянием и руководством С. В. Страхова были выполнены 12 докторских и 36 кандидатских диссертаций. В работе с научной молодежью его отличали доброжелательность, объективность, высокая требовательность.

Значительное место в жизни С. В. Страхова занимала научно-общественная деятельность. Он был членом Научного совета АН СССР «Научные основы электрофизики и электроэнергетики», членом Научно-методического совета по автоматике и телемеханике МВиссо СССР, ученым секретарем и председателем энергетической секции Московского Дома ученых, членом Совета МДУ. С. В. Страхов был яркой, многогранной личностью, в диапазон его интересов входили и наука, и искусство, и спорт.

Как руководитель научно-педагогического коллектива Сергей Владимирович отличался высокой принципиальностью, преданностью делу науки и высшей школы, постоянной готовностью к восприятию и поддержке новых научных идей. Защищая свои принципы и взгляды, он не боялся идти против течения, остаться при голосовании в меньшинстве или даже в единственном числе.

Выражая наше глубокое соболезнование близким покойного, мы навсегда сохраним светлую память о Сергее Владимировиче Страхове.

Группа товарищей



Фишман М. М. Анализ флуктуаций нестационарных параметров режима энергосистем с помощью структурных функций	45
Шилин Н. В., Левченко И. С. Исследование комбинированной модели газового буфера масляных выключателей	50
Бут Д. А. Анализ и расчет вентильных генераторов	56
Макаров Ф. К. К расчету магнитного поля в воздушном зазоре электрической машины	
Крогерис А. Ф., Рашевец К. К., Трейманис Э. П., Шинка Я. К. Оценка энергетических процессов по мгновенной мощности	
Тонкаль В. Е., Жуйков В. Я., Денисюк С. П. Применение понятия энергии для анализа энергетических процессов в системах с вентильными преобразователями	
Кадомский Д. Е. Активная и реактивная мощности — характеристики средних значений работы и энергии периодического электромагнитного поля в элементах нелинейных цепей	
Резник Л. Ф., Торбенков Г. М., Чечушков В. Г. Об одном подходе к определению составляющих мощности произвольной цепи	
Фрадкин Б. М., Федорова Е. М., Колли Я. Н., Поповская И. Ф. Электромагнитное поле кабеля со скрученными жилами	45
1 Грачева И. Ю., Грибков Д. А., Кузнецов Ю. И., Минаква И. И. — Синхронные, многочастотные и хаотические процессы в системах связанных генераторов	50
7 Мучник Г. Ф., Доманин М. Г., Астахов А. Ю. Использование аппарата универсальной теории Фейгенбаума для колебательного контура с нелинейной емкостью	56
21	
<b>СООБЩЕНИЯ</b>	
31 Струнский М. Г., Горбов М. М. Расчет электрической емкости между пластиной и двумя параллельными плоскостями	59
36 Юдин В. В. Расчет линейных электромагнитных цепей методом объединенных матриц	63
39 Шестопалов А. М. Влияние делителей на точность измерения симметричных составляющих трехфазного напряжения	67
43	
<b>ДИСКУССИИ</b>	
<b>БИБЛИОГРАФИЯ</b>	
<b>ХРОНИКА</b>	

CONTENTS

Fishman M. M. — Analysis of Fluctuations in the Non-Steady-State Parameters of Power Systems by Means of Structural Functions	45
Shilin N. V., Levchenko I. S. — A Study of a Composite Model for the Gas Buffer in Oil Circuit Breakers	50
Boot D. A. — Analysis and Design of Valve Type Generators	56
Makarov F. K. — On Calculating the Magnetic Field in the Air Gap of an Electric Machine	
Krogeris A. F., Rashevitz K. K., Treimanis E. P., Shinka J. K. — An Evaluation of Energy Phenomena on the Basis of Instantaneous Power	
Tonkal V. E., Zhuikov V. J., Denisiuk S. P. — Application of the Concept of Energy for Analysis of Energy Phenomena in Systems With Electronic Converters	
Kadomski D. E. — Real and Reactive Power As Characteristics for Mean Values of Work and Energy in the Periodic Electromagnetic Field of Non-Linear Circuit Elements	
Reznik L. F., Torbenkov G. M., Chechushov V. G. — On One Approach for Finding the Components of Power in a Circuit	
Fradkin B. M., Fedorova E. M., Colly J. N., Popovskaya I. F. — The Electromagnetic Field of a Cable With Twisted Conductors	45
1 Gracheva I. U., Gribkov D. L., Kuznetsov U. I., Minakova I. L. — Synchronous, Multi-Frequency and Random Processes in Systems With Coupled Generators	50
7 Muchnik G. F., Domanin M. G., Astakhov A. U. — Application of the Mechanism of Universal Feigenbaum Theory to an Oscillatory Circuit With a Non-Linear Capacitor	56
12	
21	
<b>REPORTS</b>	
31 Strunski M. G., Gorbov M. M. — Calculation of the Capacitance Between a Plate and Two Parallel Planes	59
36 Yudin V. V. — Design of Linear Electromagnetic Circuits By Means of a United Matrix Technique	63
39 Shestopalov A. M. — How Dividers Influence the Accuracy of Measurement of Symmetrical Components of Three-Phase Voltages	67
43	
<b>DISCUSSION</b>	
<b>BIBLIOGRAPHY</b>	
<b>CHRONICLE</b>	

# Рефераты публикуемых статей

УДК 621.311.072.8.083.7:519.3.001.24

Анализ флуктуаций нестационарных параметров режима энергосистем с помощью структурных функций. Фишман М. М. — «Электричество», 1987, № 7

Показано, что для статистического анализа флуктуаций нестационарных телеизмеряемых параметров режима с меняющимся средним уровнем могут быть использованы выборочные нормированные структурные функции. С их помощью удается определить дисперсию некоррелированной составляющей телеизмеряемого параметра, а также дисперсию, скорость спада корреляционной функции и время корреляции коррелированной составляющей. Получены формулы, определяющие точность предлагаемого алгоритма статистического анализа. Описана методика практического использования алгоритма и приведены результаты экспериментов, относящиеся к анализу флуктуаций псевдослучайного гауссовского процесса и реальных параметров режима энергосистем. Библ. 12.

УДК 621.316.57.064.25.001.57

Исследование комбинированной модели газового буфера масляных выключателей. Шилин Н. В., Левченко И. С. — «Электричество», 1987, № 7

Разработана комбинированная модель газового буфера, применяемого в дугогасящих устройствах масляных выключателей, согласно которой на начальном этапе работы газовая смесь сжимается трансформаторным маслом (поршневая модель), а после максимального сжатия происходит перемешивание газовой смеси и трансформаторного масла в объеме газового буфера. Рассмотрена задача для второго этапа работы газового буфера, описываемая системой нелинейных уравнений в частных производных. Для ее решения применен численный метод конечных разностей. Приводится алгоритм расчета. Сравнение экспериментальных и расчетных данных показывает их существенно лучшее совпадение по сравнению с расчетом по поршневой модели. Библ. 11.

УДК 621.313.12+621.314.632.001.24

Анализ и расчет вентильных генераторов. Бут Д. А. — «Электричество», 1987, № 7

Рассмотрены вентильные генераторы (ВГ), состоящие из бесконтактного синхронного генератора и полупроводникового выпрямителя (ПВ). Синхронный генератор с возбуждением от постоянных магнитов на основе редкоземельных материалов объединен с управляемым ПВ, а генератор с электромагнитным индуктором — с неуправляемым ПВ.

В приближении инженерной теории электрических машин рассмотрены основные процессы в ВГ с учетом коммутации вентилей для управляемых и неуправляемых ПВ (трехфазных, шестифазных, с выводом нуля, мостовых), построены основные характеристики, разработаны методики расчета массогабаритных и энергетических показателей ВГ. Проведены расчеты автономных ВГ для мощностей 100 и 1000 кВт с высоким быстродействием и окружными скоростями 100—120 м/с. Библ. 14.

УДК 621.313.013.001.24

К расчету магнитного поля в воздушном зазоре электрической машины. Макаров Ф. К. — «Электричество», 1987, № 7

Приведена методика расчета магнитного поля в воздушном зазоре электрической машины, основанная на численно аналитическом способе расчета магнитного поля в неоднородной в целом области, которая представляется в виде совокупности однородных, подобластей прямоугольной формы.

Предлагаемый алгоритм решения задачи увеличивает потенциальные возможности по расчету магнитных полей в различных электротехнических устройствах. Библ. 20.

УДК 621.3.016.2.076.7

Оценка энергетических процессов по мгновенной мощности. Кругерис А. Ф., Рашевец К. К., Трейманис Э. П., Шинка Я. К. — «Электричество», 1987, № 7

На основе анализа мгновенной электрической мощности при передаче электрической энергии от питающей системы потребителю и сопоставления составляющих передаваемого потока энергии предложена новая физически обоснованная система энергетических показателей для нелинейных несинусоидальных электрических систем. Эффективность преобразования параметров электроэнергии определяется соотношениями потоков передаваемой, обратной, накопленной и использованной потребителем энергии и характеризуется коэффициентами использования энергии системы, потребителя и накопителя. Равномерность потока энергии характеризуется коэффициентами колебания полной и активной энергии. Дана оценка применения этих коэффициентов на примерах передачи электрической энергии от источников одно- и трехфазного синусоидального напряжения нелинейному и несимметричному потребителю с накопителем. Библ. 3.

УДК 621.3.016.25.001.2

Применение понятия обменной энергии для анализа энергетических процессов в системах с вентильными преобразователями. Тонкаль В. Е., Жуikov В. Я., Денисюк С. П. — «Электричество», 1987, № 7

Рассмотрено определение баланса энергии в цепях с вентильными элементами с учетом особенностей физических процессов, протекающих в таких цепях. Применение интегральных составляющих мощности — обменная мощность со стороны генератора и со стороны нагрузки, мощность накопления — позволяют сформулировать критерии оптимального энергопотребления и компенсации обменной энергии, а также ввести систему показателей, связывающую составляющие энергии и длительность интервалов энергетически неизменных состояний системы. Библ. 6.

УДК 621.372.016.24/25

Активная и реактивная мощности — характеристики средних значений работы и энергии периодического электромагнитного поля в элементах нелинейных цепей. Кадомский Д. Е. — «Электричество», 1987, № 7

Дана общая интерпретация понятий активная и реактивная мощность в общей связи с работой и энергией периодического электромагнитного поля для конечного объема источника электроэнергии и для элементов нелинейной электрической цепи. Показана тождественность (с точностью до постоянного множителя) понятия среднего значения электромагнитной части внутренней энергии среды (по Ландау Л. Д. и Лифшицу Е. М.) в рассматриваемом объеме источника и реактивной мощности во внешней электрической цепи (по Илиовицы М. — Шеддину Н. Н.). Показана возможность совместного применения известного интегрального определения активной мощности и вводимого интегрального определения реактивной мощности для описания энергетического баланса периодического процесса в нелинейной электрической цепи. Библ. 5.

УДК 537.212:621.315.22

Электромагнитное поле кабеля со скрученными жилами. Фрадкин Б. М., Федорова Е. М., Колли Я. Н., Поповская И. Ф. — «Электричество», 1987, № 7

Приводится расчет электромагнитного поля экранированного кабеля с двумя спиральными плоскими жилами при произвольной толщине оболочки. Решение для векторных магнитного и электрического потенциалов представлено в виде ряда собственных функций. Для постоянных интегрирования дифференциальных уравнений отдельных областей получена система алгебраических уравнений, решаемая с помощью ЭВМ. Дан расчет электромагнитного поля кабеля с учетом внешнего тока. Библ. 5.

УДК 621.3:538.3:536.7

Использование аппарата универсальной теории Фейгенбаума для колебательного контура с нелинейной емкостью. Мучник Г. Ф., Доманин М. Г., Астахов А. Ю. — «Электричество», 1987, № 7

Рассмотрены процессы перехода в стохастические режимы (режимы динамического хаоса) электрических колебаний в нелинейном последовательном  $RLC$ -контуре, содержащем конденсатор с кубической кулон-вольтовой характеристикой. Приведены результаты численного решения на ЭВМ описывающего исследуемый контур уравнения Дуффинга в виде фазовых портретов — зависимости тока в контуре от заряда нелинейной емкости. Исследованы вопросы точности и сходимости численных решений. Получены расчетные зависимости показателя Ляпунова и бифуркационной диаграммы исследуемой системы — максимального значения заряда конденсатора на интервале времени, равном периоду вынуждающей гармонической э. д. с. — от управляющего параметра. Установлено, что переход от упорядоченных колебаний к хаотическим происходит посредством последовательных удвоений периода, причем параметры бифуркационной диаграммы близки к универсальной константе  $\delta = 4,669...$  Обнаружено чередование интервалов устойчивых и стохастических колебаний. Библ. 9.

УДК 538.323.531.551

Расчет эквивалентных параметров скин-слоя с учетом джоулева нагрева. Петров С. Р. — «Электричество», 1987, № 7

На основе численного решения задачи о нестационарной диффузии гармонического и затухающего электромагнитных полей в проводящее полупространство проанализировано влияние джоулева нагрева проводника на изменение эквивалентных параметров скин-слоя. Получены приближенные аналитические соотношения, которые могут быть использованы при построении схем замещения силовоточных импульсных устройств. Библ. 8.

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Бертинов А. И., Будзко И. А., Веников В. А., Глебов И. А., Евсеев Б. Н. (зам. главного редактора), Ефремов И. С., Иванов-Смоленский А. В., Ильинский Н. Ф., Комельков В. С., Костенко М. В., Лабунцов В. А., Ларионов В. П., Лидоренко Н. С., Лизунов С. Д., Мамиконянц Л. Г. (главный редактор), Мучник Г. Ф., Нетушил А. В., Сабинин Ю. А., Слежановский О. В., Совалов С. А., Тареев Б. М., Тиходеев Н. Н., Толстов Ю. Г., Федосеев А. М., Шакарян Ю. Г., Шаталов А. С., Шилин Н. В.

Научные редакторы: Б. Д. Макашкин, А. Л. Прилуцкий

Адреса редакции: 103012, Москва, К-12, Б. Черкасский пер., 2/10, Телефон 924-24-80

101000 Москва, Главный почтамт, абонентный ящик № 648

Адрес для телеграмм: МОСКВА, 12, ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Технический редактор Н. Н. Хотулёва

Сдано в набор 14.05.87. Подписано в печать 07.07.87 Т-12161 Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>8</sub> Печать высокая Усл. печ. л. 10 Усл. кр.-отт. 10,5 Уч.-изд. л. 11,90 Тираж 5710 экз. Заказ 1337

Энергоатомиздат, 113114 Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10  
Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский полиграфический комбинат ВО «Союзполиграфпром»  
Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,  
142300 г. Чехов Московской области