



# ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

**1987**

•ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ•

**2**

УДК 621.316.1.11.001.57

## О методах решения многокритериальных оптимизационных задач электроэнергетики с неопределенными величинами

ВЕНИКОВ В. А., доктор техн. наук, БУДЗКО И. А., академик ВАСХНИЛ,  
ЛЕВИН М. С., доктор техн. наук, БЛОХИНА Е. Л., канд. техн. наук, ПЕТРОВ В. А., инж.

Большинство оптимизационных электроэнергетических задач приходится решать в условиях неполной (неоднозначной, нечеткой, неопределенной) исходной информации [1—4]. Как правило, неопределенность информации порождается двумя основными причинами. Первая из них заключается в том, что в сложных оптимизационных задачах энергетики последствия выбора решения в большинстве случаев невозможно оценить однозначно, с помощью одного показателя (критерия). Действительно, эти последствия сами по себе качественно различны и, кроме того, они всегда связаны с затратами качественно различных ресурсов — финансовых, материальных и трудовых. Неизбежность оценки решений по нескольким критериям обычно связывают с неопределенностью предпочтений лица или органа, принимающего решение (ОПР). В технических задачах в роли ОПР обычно выступает группа квалифицированных специалистов, например, группа инженеров проектной организации, научно-технический совет министерства или ведомства и т.п. Неопределенность предпочтений ОПР в общем случае и обуславливает многокритериальность оптимизационных задач или необходимость оценки решений по векторному критерию [4—9].

Вторая основная причина неопределенности исходной информации вытекает из самой сущности сложных систем, к которым относится энергетика, и заключается в объективно существующей неполноте наших знаний о будущих состояниях системы [1, 2].

Наиболее рельефно указанная причина проявляется при решении глобальных задач электроэнергетики, например, при оптимизации на дальнюю перспективу топливно-энергетического баланса больших регионов, оптимизации структуры крупных объединений энерго-

систем и т.д. Однако и в задачах более низкого иерархического уровня и даже, например, при выборе параметров распределительных электрических сетей напряжением 0,38—35 кВ легко обнаружить ряд расчетных величин, для которых нет обоснованных фиксированных значений. Сюда в первую очередь относятся параметры законов изменения электрических нагрузок на сроки 5—10 лет, значения ущербов от перерывов электроснабжения, ухудшения качества электрической энергии, строительства электроэнергетических объектов на сельскохозяйственных угодьях и др.

Необходимо также отметить, что в ряде задач в качестве неопределенных целесообразно рассматривать факторы, информацию о которых принципиально уточнить возможно, но ценой затрат, заведомо больших, чем эффект от ожидаемого уточнения решения. К таким факторам относятся, например, потери электроэнергии в электрических сетях, где нет автоматизированных систем учета энергии.

Во всех перечисленных случаях мы сталкиваемся с необходимостью выбора решений в условиях неопределенности «состояний природы» или неопределенности «среды».

В настоящей статье рассматриваются некоторые методические особенности решения оптимизационных задач с неопределенными факторами, в которых, кроме того, неопределенность предпочтений ОПР приводит к необходимости использования векторного критерия.

Решение таких задач, как правило, состоит из двух этапов [4, 5]. Первый из них заключается в преобразовании векторного критерия в скалярный, в результате чего многокритериальная задача оптимизации сводится к однокритериальной. При этом, естественно, сохраня-

ется неопределенность «среды» и, таким образом, остаются все трудности, связанные с выбором решения в условиях неопределенности.

На втором этапе происходит собственно выбор решения. Для этого можно использовать принцип гарантированного результата, применив критерии Вальда или Сэвиджа [4]. Можно получить решение и с помощью критерия Лапласа [6]. Наконец, во многих технических задачах целесообразно использовать метод районирования множеств векторов состояния природы [7].

На обоих этапах решения рассматриваемого класса задач, т. е. при образовании скалярного критерия и при выборе решения, результат может быть получен на основе двух различных подходов.

Первый из них подробно изложен, например, в [4, 5] и, кроме того, в [8—10] и условно может быть назван «классическим». Второй подход основан на применении теории нечетких множеств [11—14].

В настоящей статье будет показано, что в рамках обычных методологических предпосылок решения технических задач оба подхода приводят к одинаковым численным результатам.

Рассмотрим задачу преобразования векторного критерия в скалярный.

Прежде всего необходимо отметить, что некоторые специалисты (см., например, [15]) оспаривают целесообразность и возможность формализованного решения многокритериальных задач. Эти исследователи считают, что при анализе многокритериальных задач можно ограничиться выявлением только эффективных паретовских решений, т. е. таких решений, которые не могут быть улучшены по любому из рассматриваемых критериев без ухудшения хотя бы одного из остальных показателей. По нашему мнению, вопрос о целесообразности формализации и численного решения многокритериальных задач целиком относится к компетенции ОПР. Если этот орган склоняется к самостоятельному выбору одного из паретовских решений (обычно при небольшом их числе), то с таким подходом, естественно, следует согласиться. Но исследователь должен готовить для ОПР и более подробные количественные оценки возможных решений, не скрывая, что эти оценки по ряду причин могут носить субъективный характер.

В сложных задачах выбора решений, конечно, не следует полностью полагаться на «строгие» алгоритмы, которые могли бы привести к единственно правильному, однозначному выбору. Таких алгоритмов не существует. Вместе с тем в современной теории исследования операций или, как ее иначе называют, теории принятия (выбора) решений разработан ряд логически обоснованных приемов, позволяющих формализовать процесс выбора решения, в частности, при нескольких критериях и при неопределенности «среды». Эти приемы позволяют сопоставить достоинства и недостатки различных вариантов и, таким образом, облегчают окончательный выбор.

Пусть, например, рассматривается какая-либо электроэнергетическая задача — выбор количества трансформаторов на трансформаторной подстанции, выбор сечения проводов на участке воздушной линии (ВЛ) и т. п. Каждое возможное решение задачи оценивается по нескольким частным или локальным критериям эффективности (приведенные затраты, надежность электроснабжения, потери электроэнергии и т. п.). Условимся в дальнейшем рассматривать только такие критерии, для которых возможна их количественная оценка (хотя в об-

щем случае это и необязательно). Тогда при тех или иных условиях среды (параметры трансформаторов, сопротивления проводов, расчетные нагрузки, показатели повреждаемости оборудования и т. п.) можно для каждого из принятых к рассмотрению решений определить численные значения всех критериев. Совокупность этих значений и составляет векторный критерий эффективности. Однако однозначный выбор решения по векторному критерию затруднен из-за различных в общем случае значений частных критериев. Естественно, для такого выбора желательно определить единый скалярный критерий, с помощью которого по принципу «больше (меньше) — лучше» можно было бы оценить возможные решения.

Если эта задача решается на основе «классического» подхода, то предварительно с участием ОПР формулируется один из возможных принципов или критериев оптимальности. Им может, например, служить принцип справедливости критериев или справедливого компромисса. В соответствии с этим принципом наилучшим считается такое решение, при котором обеспечивается наименьшее ухудшение всех показателей. Можно показать, что принципу справедливого компромисса соответствует мультипликативный скалярный критерий эффективности вида

$$\Phi = \prod_{q=1}^n f_q \rightarrow \max, \quad (1)$$

где  $f_q$ ,  $q = \overline{1, n}$  — частные критерии [4].

Выражение (1) записано для условия, что наилучшему решению соответствуют максимальные значения всех частных критериев.

Использование мультипликативного критерия не требует предварительного приведения частных критериев к единому масштабу. Однако такая операция, называемая нормализацией частных критериев, необходима при использовании других принципов оптимальности, так как численные значения частных критериев обычно отличаются единицами измерения и порядком величин и это затрудняет последующие действия с критериями.

Нормализация — это, по существу, выражение численных значений всех частных критериев в относительных единицах и в одном масштабе (обычно от 0 до 1).

Здесь имеется определенная аналогия с использованием системы относительных единиц, упрощающей, например, расчеты переходных процессов в электрических системах. Однако в традиционных задачах электротехники применение относительных единиц просто более удобно, но отнюдь не является обязательным. Нормализация же частных критериев — непременный этап скаляризации векторного критерия (разумеется, если частные критерии характеризуются разными единицами измерения).

Методов нормализации существует много, поэтому выбор способа нормализации — прерогатива ОПР. Наиболее часто для нормализации векторного критерия, состоящего из  $n$  частных критериев  $f_q$ ,  $q = \overline{1, n}$ , используется линейное преобразование компонентов, при котором столбцовая матрица  $\|\Phi\|$  умножается на квадратную диагональную матрицу  $\|M\|$  порядка  $n$ , и результат складывается с вектором  $\bar{A} = (a_1, \dots, a_n)$ . Ненулевые члены диагональной матрицы могут представлять собой числа, обратные максимальным значе-

ниям критериев  $f_{1\max}, \dots, f_{n\max}$  или разностям  $f_{1\max} - f_{1\min}, \dots, f_{n\max} - f_{n\min}$ . Составляющими вектора  $\bar{A}$  могут быть, например, взятые с обратным знаком произведения  $f_{q\min} q$ . В частном случае  $\bar{A} = 0$ .

Нормализованный векторный критерий эффективности  $\bar{\Phi}_n$  может, например, состоять из  $n$  компонентов:

$$\bar{f}_q = \frac{f_q - f_{q\min}}{f_{q\max} - f_{q\min}}, \quad (2)$$

причем, как уже отмечалось, численные нормализованные значения частных критериев заключены в интервале от 0 до 1.

Множество нормализованных значений частных критериев принадлежит некоторой  $n$ -мерной поверхности, которую можно сопоставить с другой аналогичной поверхностью, представляющей «идеальный» векторный критерий. Тогда выбор принципа оптимальности можно отождествить с выбором критерия наилучшего приближения этих двух поверхностей. В частности, в качестве такого критерия в общем случае принимают условие оптимальности в среднем для степени  $S$ . Можно показать, что такому принципу оптимальности соответствует аддитивный скалярный критерий эффективности вида

$$\Phi = \sum_q \bar{f}_q^S \rightarrow \max(\min). \quad (3)$$

Операцию перехода от множества частных критериев к скалярному критерию называют сверткой векторного критерия. В специальной литературе рассматриваются принципиальные достоинства и недостатки различных методов свертки. Однако нужно иметь в виду следующее.

Во-первых, суждение о предпочтительности тех или других принципов и методов свертки, в том числе и в различных электроэнергетических задачах, должно основываться на опыте практического решения многокритериальных задач. Пока что этот опыт в энергетике невелик.

Во-вторых, в специальной литературе отмечается, что относительная ясность и логичность применения указанных выше принципов оптимальности имеют место лишь в случае одинаковой важности всех частных критериев. Если же необходимо учитывать их приоритет, то формально это достигается введением в мультипликативный критерий показателя важности  $\alpha_q$ , а в аддитивный критерий — коэффициента важности  $\lambda_q$ :

$$\Phi = \prod_q (\bar{f}_q)^{\alpha_q}; \quad (4)$$

$$\Phi = \sum_q \lambda_q \bar{f}_q. \quad (5)$$

Однако при подобных преобразованиях логическое обоснование использования различных принципов оптимальности (и, следовательно, методов свертки) становится затруднительным.

Наконец, следует указать, что в ряде технических задач, помимо множества критериев, которые желательно максимизировать или минимизировать, могут существовать ограничения некоторых других показателей. В этом случае численные расчеты с использованием скалярного критерия усложняются. Действительно, после выбора на втором этапе «окончательного» решения его необходимо проверить по заданным ограничениям и в случае их нарушения внести в расчеты необходимые поправки. Эта процедура может повторяться, что, естественно, усложняет решение задачи.

Как уже отмечалось, другой подход к образованию

скалярного критерия эффективности возможен на основе использования теории нечетких множеств [11—14]. Здесь в качестве математической модели неопределенных понятий, которыми оперирует исследователь при описании своих представлений о реальной системе, используется нечеткое множество. Эта модель имеет нечеткие, размытые границы, и степень принадлежности любого элемента данному множеству находится в интервале между полной принадлежностью и полной непринадлежностью.

Один из способов указания степени принадлежности элемента данному множеству заключается, например, в задании числа из интервала  $(0,1)$ .

Обозначим через  $X$  некоторое множество элементов. Тогда нечетким множеством  $Y$  в  $X$  будет совокупность пар вида  $[x, \mu_y(x)]$ , где  $x \in X$ , а  $\mu_y$  — функция  $X$  на интервале  $(0,1)$ , называемая функцией принадлежности нечеткого множества  $Y$ . Значение  $\mu_y(x)$  этой функции для конкретного  $x$  называется степенью принадлежности рассматриваемого элемента нечеткому множеству  $Y$ .

Существуют также нечеткие множества с функциями принадлежности, значениями которых являются нечеткие подмножества интервала  $(0,1)$ .

Таким образом, функция принадлежности нечеткого множества может быть произвольной функцией или даже произвольным отображением.

Объединением нечетких множеств  $A$  и  $B$  в  $X$  называется нечеткое множество  $A \cup B$  с функцией принадлежности вида

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad x \in X. \quad (6)$$

Пересечением нечетких множеств  $A$  и  $B$  в  $X$  называется нечеткое множество  $A \cap B$  с функцией принадлежности вида

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad x \in X. \quad (7)$$

При подходе к оптимизационным задачам с позиций теории нечетких множеств цели принятия решений и множество альтернатив рассматриваются как симметричные нечеткие подмножества универсального множества альтернатив, т.е. набора возможных выборов ОПР.

Пусть  $X$  — универсальное множество возможных решений. Нечеткой целью в  $X$  является нечеткое подмножество  $X$ , которое обозначим  $G$ . Для конкретизации нечеткости цели используем функцию принадлежности  $\mu_G(x)$ , значения которой лежат в интервале  $(0,1)$ . Чем выше степень принадлежности возможного решения  $x$  нечеткому множеству цели  $G$ , т.е. чем ближе значение  $\mu_G(x)$  к 1, тем больше степень достижения этой цели при выборе решения  $x$ . В этом смысле прослеживается некоторая аналогия с «классическим» подходом. Чем ближе значения нормализованного частного критерия  $\bar{f}_q$  к 1, тем больше выбранное решение удовлетворяет целям ОПР.

Нечеткие ограничения также описываются нечеткими подмножествами множества  $X$  и обозначаются  $S$ . Степень удовлетворения рассматриваемого решения данному ограничению характеризуется соответствующей функцией принадлежности  $\mu_S(x)$ .

Таким образом, решить оптимизационную задачу означает достигнуть цели при соблюдении ограничений. Однако при нечеткой постановке задачи можно говорить не просто о достижении цели, а о ее достижении в той или иной степени, причем следует учитывать и соблюдение ограничений. Пусть некоторое решение  $x$  обеспе-

живает достижение цели со степенью  $\mu_G(x)$  и удовлетворяет ограничению со степенью  $\mu_C(x)$ . Тогда принимается, что степень удовлетворения решения равна наименьшему из этих двух чисел.

Таким образом, нечетким решением задачи достижения нечеткой цели называется пересечение нечетких множеств цели и ограничений:

$$D = G \cap C,$$

или

$$\mu_D(x) = \min(\mu_G(x), \mu_C(x)), \quad x \in X. \quad (8)$$

Если в задаче имеется несколько целей и ограничений (многокритериальная задача с ограничениями), то нечеткое решение имеет вид

$$D = G_1 \cap \dots \cap G_n \cap C_1 \cap \dots \cap C_m$$

или, с использованием функции принадлежности —

$$\mu_D(x) = \min(\mu_{G_1}(x), \dots, \mu_{G_n}(x), \mu_{C_1}(x), \dots, \mu_{C_m}(x)), \quad (9)$$

где  $n$  и  $m$  — соответственно количество целей и ограничений.

В определении нечеткого решения  $D$  как пересечения или, в более общем смысле, как слияния целей и ограничений подразумевается, что все входящие в  $D$  цели и ограничения имеют одинаковую важность. Если некоторые цели или ограничения более важны, чем остальные, решение  $D$  может быть выражено выпуклой комбинацией целей и ограничений с весовыми коэффициентами, характеризующими относительную важность отдельных составляющих. Таким образом,  $\mu_D(x)$  может быть записано в виде [11]:

$$\mu_D(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \mu_{G_i}(x) + \sum_{j=1}^m \beta_j(x) \mu_{C_j}(x), \quad (10)$$

где  $\alpha_i$  и  $\beta_j$  — функции принадлежности, для которых соблюдается

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^m \beta_j(x) \equiv 1.$$

С учетом последнего ограничения функции  $\alpha_i$  и  $\beta_j$  могут быть подобраны так, чтобы отразить относительную важность целей  $G_n$  и ограничений  $C_m$ . Если в выражении  $\mu_D(x)$  считать  $m=n=1$ , то легко установить, что любое нечеткое множество, содержащееся в объединении  $G \cup C$ , включает и пересечение  $G \cap C$ . Таким образом, выражение (10) можно рассматривать, как своеобразный аналог скалярного критерия (5). Определенное преимущество подхода с позиций нечетких множеств заключается в том, что в выражение (10) в явном виде включены возможные ограничения некоторых показателей, что упрощает дальнейшие расчеты. Кроме того, помимо количественных критериев в выражение (10) с помощью так называемой лингвистической переменной можно включить и показатели, не имеющие строгой количественной оценки [12].

Основные трудности при реализации подхода на основе нечетких множеств возникают на этапе логического обоснования и формирования функций принадлежности нечетких множеств целей и ограничений. Если рассматриваемые в задаче цели и ограничения заданы аналитическими зависимостями, то имеет смысл связать с ними и соответствующие функции принадлежности. Для этого, например, можно использовать нормализа-

цию, приводящую различные цели и ограничения к общему началу отсчета и общим единицам измерения.

С другой стороны, существует класс задач, при анализе которых трудности, связанные с назначением функций принадлежности, легко преодолеваются. Это, в частности, задачи с оптимальными решениями, обладающими значительным запасом устойчивости по отношению к изменениям параметров модели. В этом случае при выборе параметров модели не требуется высокая точность. К таким задачам, в частности, относятся многие задачи электроэнергетики.

После образования скалярного критерия или формирования функции принадлежности (10) можно перейти ко второму этапу решения теперь уже однокритериальной задачи — выбору решения в условиях неопределенности «среды». Как уже отмечалось, при «классическом» подходе для этого можно применить методы теории игр, основанные, например, на использовании критерия Лапласа, минимаксных критериев Вальда и Сэвиджа, а также метод районирования множества векторов состояния природы.

Особенности применения этих методов при решении ряда электроэнергетических задач и соответствующие результаты уже освещались (например, [16—18]). Поэтому ниже для пояснения приведенного в конце статьи численного примера лишь кратко излагается порядок решения задачи методом районирования соответственно при «классическом» и «нечетко-множественном» подходах.

После свертки векторного критерия и с учетом изложенного выше скалярный критерий  $\Phi$  примет вид

$$\Phi = \Phi(F, Z), \quad (11)$$

где  $F$  — вектор переменных, являющихся возможными решениями;  $Z$  — вектор переменных, представляющих собой неопределенные неконтролируемые факторы.

Решение задачи заключается в нахождении решения  $F_{\text{опт}}$ , максимизирующего (или минимизирующего) выражение (11).

Аналогично в терминах нечетких множеств выбранное решение должно обеспечить максимум функции принадлежности  $\mu_D(x)$ :

$$\max_{x \in X} \mu_D(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \mu_{G_i}(x) + \sum_{j=1}^m \beta_j(x) \mu_{C_j}(x). \quad (12)$$

Функцию принадлежности нечеткого решения  $D$  также можно записать в виде

$$\mu_D = \mu_D(f, z), \quad f \in \tilde{F}, \quad z \in \tilde{Z},$$

где  $\tilde{F}$  — нечеткое множество решений;  $\tilde{Z}$  — нечеткое множество значений неопределенного фактора.

Запишем выражения скалярного критерия оптимальности для двух различных возможных решений  $F_1$  и  $F_2$ :

$$\Phi_1 = \Phi(F_1, Z);$$

$$\Phi_2 = \Phi(F_2, Z).$$

Приравняв затем правые части этих выражений и решим полученное уравнение «парной границы» относительно  $Z$ :

$$Z = Z(F_1, F_2).$$

Ту же процедуру нужно выполнить со следующей парой решений  $F_2$  и  $F_3$  и т.д. В результате вся область значений неопределенного фактора  $Z$  будет разбита на районы, в каждом из которых оптимально лишь одно

решение  $F_0$ . Точно так же уравнение парной границы можно записать и для функции принадлежности нечетного решения. Если пределы изменения неопределенного фактора в каждом из районов достаточно широки, возможен однозначный выбор наилучшего решения. В противном случае для окончательного выбора решения необходимо привлечение дополнительной информации о неопределенном факторе.

Проиллюстрируем изложенные выше положения на упрощенном численном примере выбора сечений проводов участка ВЛ 10 кВ на деревянных опорах с железобетонными приставками в I климатическом районе. Длину участка ВЛ примем равной 1 км. В качестве возможных решений будем рассматривать выбор на участке сечения проводов А25, А35, А50, А70, А95, А120.

Обычно подобные задачи решают построением экономических интервалов, используя критерий минимума приведенных затрат [19, 20]. Однако сечение провода, соответствующее минимуму приведенных затрат, нельзя считать наилучшим решением. Действительно, из-за свойства экономической стабильности систем энергетики [2] приведенные затраты для смежных сечений проводов отличаются всего лишь на 5—8 %, что намного ниже возможных погрешностей исходных данных. Поэтому для выбора рационального сечения целесообразно использовать дополнительные критерии [18, 21, 22]. Такими дополнительными критериями могут быть, например, масса проводникового металла, сумма затрат энергии на производство проводов и потерь энергии в них за срок службы линии и т.п. Указанные два критерия — масса проводов и суммарные затраты энергии — противоречивы и, таким образом, выбор дополнительных критериев, а также их ранжирование должны производиться с учетом предпочтений ОПР. Другая особенность рассматриваемой задачи заключается в наличии неопределенности «среды». Эта неопределенность вносится из-за незнания закона изменения нагрузки в течение расчетного периода, за который следует суммировать годовые приведенные затраты. Кроме того, точно неизвестна и длительность этого периода [23].

На основании экспертных оценок примем показательный закон роста нагрузки с минимальным и максимальным показателями ежегодного роста  $q_{\min}=1$  и  $q_{\max}=1,12$ . Длительность расчетного периода также оценим предельными значениями  $t_{\text{pmin}}=5$  лет и  $t_{\text{pmax}}=10$  лет.

Тогда для суммарных приведенных затрат за срок  $t_p$  можно записать [23]:

$$Z = \frac{pa}{\beta E_{\text{н.п}}} + \frac{pb}{\beta E_{\text{н.п}}} F + \frac{3\tau c l_1^2}{1000F} Z_s. \quad (13)$$

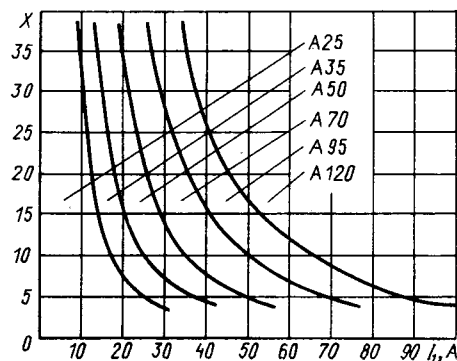
Аналогично для критерия затрат электроэнергии с учетом затрат на производство алюминиевых проводов получим [21]:

$$W = 3w_0 d F + \frac{3\tau c l_1^2}{1000F} Z_w. \quad (14)$$

Здесь

$$Z_s = \sum_{t=1}^{t_p} q^{2(t-1)} \beta^{(t-1)}; \quad (15)$$

$$Z_w = \sum_{t=1}^{t_p} q^{2(t-1)}; \quad (16)$$



$$\beta = \frac{1}{1 + E_{\text{н.п}}}; \quad (17)$$

$p=0,156$  — коэффициент, учитывающий нормативные отчисления от капитальных вложений и отчисления на амортизацию линии;  $a=2200$  руб/км — постоянная часть стоимости линии, не зависящая от сечения проводов;  $b=11,6$  руб/км·мм<sup>2</sup> — постоянный коэффициент в линейной зависимости стоимости линии от сечения;  $\rho=29,5$  Ом·мм<sup>2</sup>/км — удельное сопротивление алюминия;  $\tau=1000$  час/год — годовое число часов потерь;  $c=0,0269$  руб/кВт·ч — удельные замыкающие затраты на электроэнергию;  $d=2,7 \cdot 10^{-6}$  кг/мм<sup>3</sup> — удельная плотность алюминия;  $E_{\text{н.п}}=0,08$  — нормативный коэффициент приведения одновременных затрат;  $w_0=40$  кВт·ч/кг — затраты электроэнергии на производство 1 кг алюминия;  $I_1=20$  А — заданное значение нагрузки на участке линии в первый год расчетного периода;  $F$  — сечение алюминиевых проводов, мм<sup>2</sup>.

Выражения (15) и (16) представляют собой неопределенный фактор, значения которого образуют интервал неопределенности с пределами  $Z_{\min} \div Z_{\max}$ . В данном примере  $Z_{\min}=4$ ,  $Z_{\max}=30$ .

Сформируем решение на основе «классического» подхода. Так как частные критерии эффективности имеют неодинаковую размерность, то их с помощью нормализации необходимо привести к одной системе отсчета. Как уже отмечалось, существует несколько способов нормализации: естественная, по Сэвиджу, относительная [6]. Расчеты показали, что все эти способы в данном случае приводят к одинаковому решению.

После нормализации частные критерии свертывают в скалярный критерий  $\Phi$ . Используем для этого аддитивный критерий (5):

$$\Phi = \sum_{q=1}^n \lambda_q \bar{f}_q, \quad \sum_{q=1}^n \lambda_q = 1.$$

Упрощенно считая, что частные критерии  $\bar{Z}$  и  $\bar{W}$  не различаются по важности ( $\lambda_1=\lambda_2=0,5$ ), после преобразований получим скалярный критерий вида

$$\Phi = -67,5 \cdot 10^{-4} + 2,7 \cdot 10^{-4} F + 0,74 \cdot 10^{-4} \frac{I_1^2 Z}{F}.$$

Так как нагрузка на участке ВЛ и срок суммирования затрат представляют собой неопределенные факторы, для решения задачи необходимо использовать один из указанных выше методов [4, 6, 7]. Применим метод районирования множества векторов состояния природы. Результаты районирования приведены на рисунке.

Рассмотрим теперь решение задачи с использованием аппарата нечетких множеств. Нечеткими целями задачи

являются  $\tilde{Z}$ -минимизация приведенных затрат и  $\tilde{W}$ -минимизация затрат энергии с учетом ее составляющей на производство алюминия. Будем также считать, что цели одинаково важны, а ограничения отсутствуют. Тогда решение можно представить в следующем виде:

$$\mu_D = 0,5\mu_{\tilde{Z}} + 0,5\mu_{\tilde{W}},$$

где  $\mu_D$ ,  $\mu_{\tilde{Z}}$ ,  $\mu_{\tilde{W}}$  — функции принадлежности соответственно нечеткого множества решений  $D$ , нечеткого множества минимальных значений приведенных затрат  $\tilde{Z}$  и нечеткого множества минимальных значений затрат энергии  $\tilde{W}$ . Функции принадлежности  $\mu_{\tilde{Z}}$  и  $\mu_{\tilde{W}}$  определяются нормализацией соответствующих критериев  $\tilde{Z}$  и  $\tilde{W}$ :

$$\mu_{\tilde{Z}} = \frac{Z_{\max} - Z_i}{Z_{\max} - Z_{\min}};$$

$$\mu_{\tilde{W}} = \frac{W_{\max} - W_i}{W_{\max} - W_{\min}}.$$

После преобразований функция принадлежности нечеткого решения примет вид

$$\mu_D = 1,07 - 2,7 \cdot 10^{-4} F - 0,74 \cdot 10^{-4} \frac{I_1^2 Z}{F}. \quad (18)$$

Приняв  $Z = \text{const}$  и продифференцировав (18) по  $F$ , получим выражение, аналогичное (8) в [24].

Районирование неопределенного фактора по выражению (18) также приводит к результатам, представленным на рисунке.

Можно показать, что при обоих рассматриваемых подходах одинаковые решения получаются и при использовании для выбора в условиях неопределенности «среды» методов теории игр.

Из рисунка видно, что при заданных значениях  $I_1$  и интервала неопределенности  $Z_{\min} \div Z_{\max}$  однозначное решение задачи получить нельзя, так как в зону оптимальности попадают три сечения А25, А35 и А50.

Таким образом, при решении задач в условиях неопределенности «среды» основные усилия инженера должны быть направлены на частичное или полное снятие неопределенности. Для этого необходима дополнительная информация о значениях неопределенного фактора. Источниками такой информации могут служить данные статистической обработки результатов ранее проведенных наблюдений и измерений и их экстраполяция, результаты имитационного моделирования и экспертные оценки.

Продолжим рассмотрение примера. Пусть в качестве дополнительной информации о значениях неопределенного фактора используются экспертные оценки. Ранее нижняя и верхняя границы неопределенного фактора определялись по формулам (15) и (16), причем  $Z_{\min}$  соответствовали значения  $t_p = 5$  лет,  $q_{\min} = 1$ , а  $Z_{\max} = t_p = 10$  лет,  $q_{\max} = 1,12$ .

Пусть с помощью экспертов уточняются минимальное и максимальное значения коэффициента ежегодного роста нагрузки  $q$ , его среднее значение  $q_{cp}$ , а также значение расчетного периода  $t_p$ .

При «классическом» подходе к решению задачи информация, полученная от экспертов, может быть обработана известными методами [25, 26]. В результате среднее значение коэффициента  $q_{cp} = 1,062$ ,  $t_p = 7$  лет; тогда значение неопределенного фактора  $Z = 10,34$ . Из рисунка видно, что при этом значении  $Z$  и известном  $I_1$  оптимальным следует считать период А35.

Опыт показывает, что наиболее полное и гибкое использование дополнительной, обычно нечеткой информации достигается применением аппарата теории нечетких множеств [14]. При традиционном подходе предпочтения экспертов интерпретируются как четкие бинарные отношения, а в рамках теории нечетких множеств эти предпочтения могут быть представлены в виде нечетких бинарных отношений, что в данном случае при количественной оценке фактора позволяет более естественно и тонко отразить степень предпочтения экспертом одной оценки другой. Аналогично, при экстраполяции результатов статистической обработки данных на основе числовых характеристик рассматриваемых распределений легко формируются соответствующие функции принадлежности.

Кроме того, и это представляется весьма важным, при наличии дополнительной информации аппарат нечетких множеств позволяет объединить оба этапа решения задачи с неопределенностью целей и «среды».

Пусть на основе дополнительной информации экспертов установлены значения обобщенной функции принадлежности нагрузки  $\mu_{\tilde{Z}}(z)$  [14, 27]:

|                   |      |      |      |      |      |      |
|-------------------|------|------|------|------|------|------|
| $q$               | 1,02 | 1,04 | 1,06 | 1,08 | 1,10 | 1,12 |
| $\tilde{Z}$       | 8    | 9    | 10,5 | 11,6 | 13,3 | 16,1 |
| $\mu_{\tilde{Z}}$ | 0,50 | 0,70 | 0,86 | 0,81 | 0,52 | 0,20 |

Нечеткие множества  $\tilde{Z}$  и  $\tilde{W}$  являются функциями нечеткого множества  $\tilde{Z}$  и образуют нечеткие отношения  $\mathcal{P}_1(\tilde{Z} \times \tilde{Z})$  и  $\mathcal{P}_2(\tilde{W} \times \tilde{Z})$ . Используя композиционное правило вывода [12], можно записать:

$$\tilde{Z} = \tilde{Z} \circ \mathcal{P}_1; \quad (19)$$

$$\tilde{W} = \tilde{Z} \circ \mathcal{P}_2, \quad (20)$$

где знак  $\circ$  обозначает операцию композиции. Так как нечеткие множества  $\tilde{Z}$ ,  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  имеют конечные носители, то операция композиции сводится к максимному произведению матриц.

Нечеткие отношения  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  имеют свои функции принадлежности  $\mu_{\mathcal{P}_1}$  и  $\mu_{\mathcal{P}_2}$ . Их значения определяются путем нормализации соответствующих критериев оптимальности  $\tilde{Z}$  и  $\tilde{W}$ :

| $F$                        | $\tilde{Z}$ |       |       |       |       |       |
|----------------------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                            | 8           | 9     | 10,5  | 11,6  | 13,3  | 16,1  |
| $\mu_{\mathcal{P}_1} = 25$ | 1           | 1     | 1     | 0,997 | 0,981 | 0,943 |
| 35                         | 0,957       | 0,967 | 0,984 | 1     | 1     | 1     |
| 50                         | 0,827       | 0,841 | 0,855 | 0,889 | 0,899 | 0,896 |
| 70                         | 0,609       | 0,622 | 0,644 | 0,667 | 0,678 | 0,703 |
| 95                         | 0,311       | 0,318 | 0,330 | 0,344 | 0,351 | 0,367 |
| 120                        | 0           | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |

| $F$                        | $\tilde{Z}$ |       |       |       |       |       |
|----------------------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                            | 8           | 9     | 10,5  | 11,6  | 13,3  | 16,1  |
| $\mu_{\mathcal{P}_2} = 25$ | 0,825       | 0,743 | 0,582 | 0,393 | 0,199 | 0     |
| 35                         | 1           | 0,979 | 0,917 | 0,845 | 0,771 | 0,675 |
| 50                         | 0,985       | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| 70                         | 0,781       | 0,808 | 0,831 | 0,859 | 0,888 | 0,976 |
| 95                         | 0,416       | 0,434 | 0,454 | 0,477 | 0,501 | 0,674 |
| 120                        | 0           | 0     | 0     | 0     | 0     | 0,246 |



Функции принадлежности нечетких множеств  $\tilde{Z}$  и  $\tilde{W}$  определяются следующим образом;

$$\mu_{\tilde{Z}} = V[\mu_{\tilde{Z}} \wedge \mu_{\mathcal{P}_1}]; \quad (21)$$

$$\mu_{\tilde{W}} = V[\mu_{\tilde{Z}} \wedge \mu_{\mathcal{P}_2}]; \quad (22)$$

|                   |       |       |       |       |       |       |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $F$               | 25    | 35    | 50    | 70    | 95    | 120   |
| $\mu_{\tilde{Z}}$ | 0,860 | 0,860 | 0,855 | 0,667 | 0,351 | 0     |
| $\mu_{\tilde{W}}$ | 0,700 | 0,860 | 0,860 | 0,830 | 0,501 | 0,200 |

Окончательное решение имеет вид:

$$\mu_D = V[\mu_{\tilde{Z}} \wedge \mu_{\tilde{W}}].$$

Максимум  $\mu_D = 0,86$ , что соответствует сечению провода марки АЗ5.

Как видно из примера, оба подхода к решению задачи дали один и тот же результат.

Несмотря на то, что с точки зрения инженера «классический» подход более нагляден, «нечеткомножественный» подход менее громоздок и может быть реализован более простыми алгоритмами. Это преимущество приобретает особое значение при увеличении размерности задачи, так как позволяет относительно просто сформировать решение при нескольких неопределенных факторах. Кроме того, как уже отмечалось, применяя аппарат теории нечетких множеств, можно более эффективно использовать дополнительную информацию, а также естественно объединять оба этапа решения многокритериальных задач с неопределенными величинами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веников В. А., Веников Г. В. Теория подобия и моделирования. — М.: Высшая школа, 1984.
2. Мелентьев Л. А. Системные исследования в энергетике. — М.: Наука, 1983.
3. Будзко И. А., Левин М. С. Особенности оптимизационных задач энергетике и методов их решения. — Электричество, 1981, № 3.
4. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1971.
5. Борисов В. И. Проблемы векторной оптимизации. — В кн.: Исследование операций. М.: Наука, 1972.
6. Трухачев Р. И. Модели решений в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1984.
7. Динер И. Я. Районирование множеств векторов состояния природы и задача выбора решения. — В кн.: Исследование операций. М.: Наука, 1972.
8. Кини Р. Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях предпочтения и замещения. — М.: Радио и связь, 1981.

9. Теория прогнозирования и принятия решений/Под ред С. А. Саркисяна. — М.: Высшая школа, 1977.
10. Батищев Д. И. Методы оптимального проектирования. — М.: Радио и связь, 1984.
11. Беллман Р., Заде Л. Принятие решений в расплывчатых условиях. — В кн.: Вопросы анализа и процедуры принятия решений. М.: Мир, 1976.
12. Заде Л. Пронятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976.
13. Веников В. А., Оруджев Ф. Д. Размытое подобие нечетко заданных процессов в электрических системах. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1983, № 2.
14. Экель П. Я., Попов В. А. Применение теории нечетких множеств для решения задач моделирования и оптимизации распределительных сетей. — В кн.: Методы и системы принятия решений. Рига: РПИ, 1985.
15. Вентцель Е. С. Исследование операций. — М.: Наука, 1980.
16. Васин Ю. Н., Горелик В. А. Принцип минимакса в задаче выбора проводов ВЛ. — Техническая кибернетика, 1975, № 2.
17. Выбор мощности резервной электростанции сельскохозяйственного предприятия/И. А. Будзко, М. С. Левин, А. Е. Мурадян, Г. Л. Эбина. — Электричество, 1980, № 3.
18. Будзко И. А., Левин М. С., Блохина Е. Л. Выбор параметров электрических сетей сельских населенных пунктов. — Электричество, 1983, № 3.
19. Будзко И. А., Захарин А. Г., Эбин Л. Е. Сельские электрические сети. — М.: Госэнергоиздат, 1963.
20. Веников В. А., Астахов Ю. Н. Экономические интервалы для выбора оптимальных вариантов энергетических объектов и их применение при технико-экономических расчетах электропередач. — Изв. АН СССР. Энергетика и автоматика, 1962, № 3.
21. Будзко И. А., Левин М. С. Энергетически целесообразная плотность тока в проводах электрических линий. — Электричество, 1985, № 2.
22. Астахов Ю. Н., Черемисин Н. М. Дискуссия по статье [21]. — Электричество, 1985, № 2.
23. Будзко И. А., Левин М. С. Электроснабжение сельскохозяйственных предприятий и населенных пунктов. — М.: Агропромиздат, 1985.
24. Экель П. Я. Дискуссия по статье [21]. — Электричество, 1986, № 7.
25. Добров Г. М. Экспертные оценки в научно-техническом прогнозировании. — Киев: Наукова думка, 1974.
26. Бешелев С. Д., Гуревич Ф. Г. Математические методы экспертных оценок. — М.: Статистика, 1974.
27. Кузьмин В. Б., Овчинников С. В. Построение групповых решений в пространстве нечетких бинарных отношений. — В кн.: Вопросы кибернетики. Экспертные оценки. М.: АН СССР, 1979.

117.06.86

УДК 621.3.11.1.016.25

## Реактивная мощность в задачах электроэнергетики

ЖЕЖЕЛЕНКО И. В., доктор техн. наук, САЕНКО Ю. Л., инж.

Ждановский металлургический институт

Интенсивное внедрение вентильных преобразователей, мощных электродуговых сталеплавильных печей, сварочных агрегатов и других электротехнологических установок с существенно нелинейными вольт-амперными характеристиками (нелинейных нагрузок) привело к искажению кривых токов и напряжения в питающих и распределительных электрических сетях. Несинусоидальность кривых напряжения в ряде случаев превосходит значение 5 %, допустимое согласно ГОСТ 13109—67\*. Содержание высших гармоник в кривых токов, как правило, оказывается большим, чем в кривых напряжения.

Эти обстоятельства обуславливают актуальность вопроса об оценке значений реактивной мощности в электрических сетях при несинусоидальных режимах. Известные в настоящее время способы ее определения во многом формальны либо произвольны, основываются на математических абстракциях или аналогиях с процессами иной природы (1).

Ниже рассматриваются ряд вопросов энергетики, при анализе и решении которых на практике используется понятие «реактивная мощность». В качестве исходной посылки принимается классическое положение, согласно которому реактивная мощность характеризует



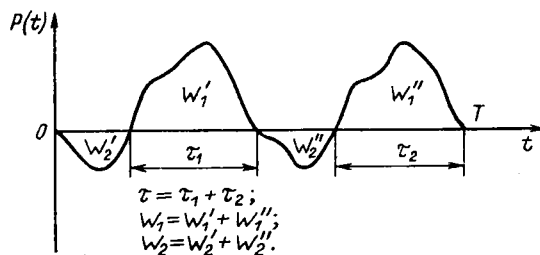


Рис. 1. График мгновенной мощности нелинейной нагрузки

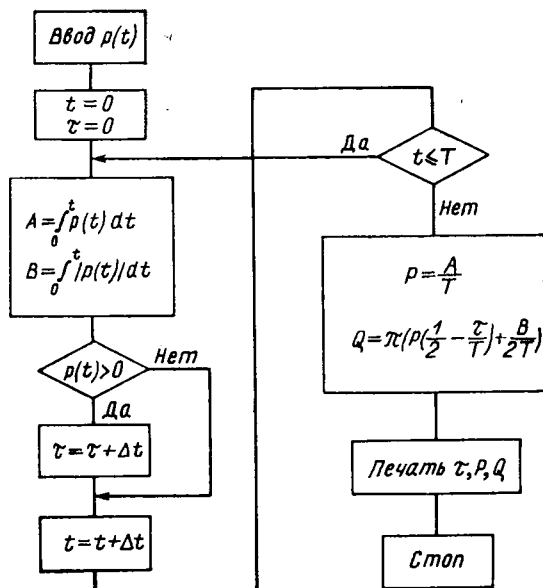


Рис. 2. Структурная схема программы вычисления реактивной мощности

интенсивность обмена электромагнитной энергией между потребителем, содержащим накопители энергии (индуктивности или емкости), и источником. Это положение в полной мере отвечает физической сущности электромагнитных процессов в электрических цепях [2, 3].

**Расчетные выражения.** Выражение для определения обменной мощности  $Q_{об}$  получим из рассмотрения процессов обмена энергии в однофазной электрической цепи с периодическими несинусоидальными токами с периодом  $T$ . Если в течение времени  $\tau < T$  энергия  $W_1$  поступает от источника к потребителю, а в течение времени  $T - \tau$  энергия  $W_2$  возвращается источнику, то справедливы следующие соотношения (рис. 1):

$$\left. \begin{aligned} W_1 + W_2 &= PT; \\ W_1 - W_2 &= \int_0^T |p(t)| dt, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $P$  — мощность, потребляемая нагрузкой (активная мощность);  $p(t)$  — мгновенная мощность.

Обменная мощность

$$Q_{об} = \frac{W_1 - P\tau}{T}. \quad (2)$$

Подставляя значение  $W_1$ , определенное из системы уравнений (1), окончательно получаем

$$Q_{об} = P \left( \frac{1}{2} - \frac{\tau}{T} \right) + \frac{1}{2T} \int_0^T |p(t)| dt. \quad (3)$$

При активной нагрузке ( $\tau = T$ )

$$Q_{об} = -\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P = 0. \quad (4a)$$

Из последнего выражения следует очевидное с физической точки зрения положение, что при чисто активной нагрузке обмен энергией между источником и потребителем отсутствует, поток электромагнитной энергии является однонаправленным ( $p(t) > 0$ ). Обмен энергией существует только в случае, когда в течение времени  $\tau < T$  мгновенная мощность принимает отрицательные значения.

В случае реактивной нагрузки ( $P = 0$ )

$$Q_{об} = \frac{1}{2T} \int_0^T |p(t)| dt. \quad (4b)$$

При смешанной (активно-реактивной) линейной нагрузке

$$u = \sqrt{2}U \sin \omega t;$$

$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi),$$

выражение для мгновенной мощности имеет вид

$$p = ui = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi),$$

и на основании (3) обменная мощность

$$Q_{об} = \frac{1}{\pi} UI \sin \varphi = \frac{1}{\pi} Q, \quad (4b)$$

где  $Q$  — реактивная мощность, являющаяся квадратурной составляющей активной мощности нагрузки  $P$ .

При выводе выражения (4b) использовалось соотношение

$$\tau = T - \frac{2\varphi}{\omega} = \left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right)T,$$

где  $\omega$  — круговая частота напряжения (тока) в сети.

Для сохранения принятых соотношений и методов расчета реактивной мощности в цепях синусоидального тока представляется целесообразным в общем случае характеризовать обменные энергетические процессы с помощью понятия реактивной мощности, определяемой как

$$Q = \pi Q_{об}. \quad (5)$$

Последнее выражение при определении  $Q_{об}$  по формуле (3) имеет строгий физический смысл. Из него, в частности, усматривается зависимость значения  $Q$  при несинусоидальных периодических процессах от фазных углов гармоник, поскольку от них зависит время  $\tau$ .

Непосредственный расчет  $Q_{об}$  и  $Q$  по выражениям (3) и (5) сопряжен с весьма значительными трудностями; поэтому расчеты целесообразно выполнять на ЭВМ. Структурная схема программы вычисления реактивной мощности представлена на рис. 2. Программа составлена для ЭВМ типа ЕС-1022 на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV.

**Корректность различных методов оценки реактивной мощности.** Основываясь на выражениях (3) и (5), можно оценить степень корректности использования известных выражений для оценки значений  $Q$  при несинусоидальных режимах [3]:

$$Q = \sum Q_v; \quad (5a)$$

$$Q = \sum v Q_v; \quad (5b)$$

$$Q = \sum \frac{1}{\nu} Q_{\nu}, \quad (5b)$$

где  $Q_{\nu} = U_{\nu} I_{\nu} \sin \varphi_{\nu}$ .

Из-за сложности структуры выражения (3) практически невозможно решение этой задачи в общем виде; поэтому ограничимся сравнением результатов расчета  $Q$  для конкретных случаев. Найдем реактивную мощность конденсатора, последовательно подключенного к источнику тока прямоугонльно-ступенчатой формы (рис. 3, а). Как известно, такую форму кривой имеет сетевой ток трехфазного мостового преобразователя с соединением обмоток трансформатора звезда — звезда (Y/Y).

На рис. 3, б и в представлены кривые напряжения на конденсаторе  $u(\omega t)$  и мгновенной мощности  $p(\omega t)$ . На основании (5) и (46) реактивная мощность

$$Q = \frac{\pi}{2T} \int_0^T |p(t)| dt = \frac{2\pi}{T} \int_0^{T/6} p(t) dt,$$

где

$$p(t) = \frac{6 U_m I_m}{T} t - U_m I_m; I_m = \frac{6 C U_m}{T}.$$

После интегрирования и алгебраических преобразований получаем

$$Q = 0,5 \omega C U_m^2.$$

Найдем реактивные мощности отдельных гармоник, ограничившись седьмой. Разложение кривых  $u(\omega t)$  и  $i(\omega t)$  в ряд Фурье имеет вид:

$$U(t) = \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} U_m \left( \sin \omega t - \frac{1}{25} \sin 5 \omega t + \frac{1}{49} \sin 7 \omega t \right);$$

$$i(t) = \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} \omega C U_m \left( \cos \omega t - \frac{1}{5} \cos 5 \omega t + \frac{1}{7} \cos 7 \omega t \right).$$

При этом

$$Q_{\nu} = \frac{1}{\nu^3} \left( \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} U_m \right)^2 \frac{\omega C}{2}.$$

Расчет по формулам (5, а—в) дает

$$\begin{aligned} \Sigma Q_{\nu} &= 0,56 U_m^2 \omega C; \Sigma \nu Q_{\nu} = 0,59 U_m^2 \omega C; \Sigma \frac{1}{\nu} Q_{\nu} = \\ &= 0,55 U_m^2 \omega C, \end{aligned}$$

т.е. погрешности оценки  $\Sigma Q_{\nu}$  находятся в пределах 10 %. Обратим внимание на то, что в рассматриваемом случае искажение кривой напряжения относительно невелико (коэффициент несинусоидальности  $k_{nc} \approx 4,5 \%$ ). При больших искажениях погрешности существенно возрастают. Например, если

$$u(\omega t) = \sqrt{2} \sin(\omega t + 0,1) + \sqrt{2} \cdot 0,5 \sin(2 \omega t + 0,3);$$

$$i(\omega t) = \sqrt{2} \sin(\omega t + 0,4) + \sqrt{2} \cdot 1,5 \sin(2 \omega t + 0,1),$$

то результат расчета по выражениям (3) и (5) дает  $Q = 1,24$ ;  $\Sigma Q_{\nu} = 0,442$  (погрешность  $\delta = 64 \%$ );  $\Sigma \nu Q_{\nu} = 0,293$  ( $\delta = 76 \%$ );  $\Sigma \frac{1}{\nu} Q_{\nu} = 0,516$  ( $\delta = 58 \%$ ).

Значения реактивных мощностей, определенных по выражениям (5, а—в), оказались существенно заниженными по сравнению с найденными через обменную мощность. Интересно, что при определении реактивной мощности по эквивалентным синусоидам  $Q_{\nu}$  погрешность оказалась намного меньшей ( $Q = 0,901$ ;  $\delta = 27 \%$ ).

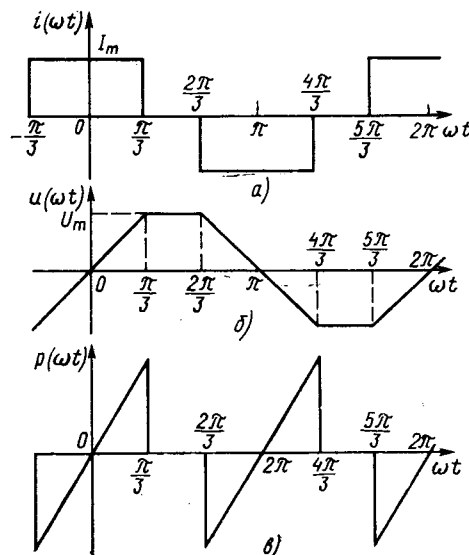


Рис. 3. Графики тока, напряжения и мгновенной мощности конденсатора

Некорректность выражений (5, а—в) свидетельствует также о нецелесообразности использования для определения  $Q$  формул (3) типа

$$Q = \frac{1}{\omega T} \int_0^T u \frac{di}{dt} dt; Q = \frac{\omega}{T} \int_0^T i (\int u dt) dt.$$

Ниже будет указан частный случай, когда использование выражений (5, б и в) дает корректные результаты.

В электротехнической практике режимные расчеты (составление балансов мощностей, определение потерь мощности и энергии, потерь и отклонений напряжения, статической устойчивости и др.) выполняются по значениям активных и реактивных мощностей, определенных по первым гармоникам напряжения и тока. Различного рода нормативные документы, регламентирующие степень компенсации реактивной мощности и принятые в отечественной и зарубежной практике, также ориентируют на компенсацию первой гармоники. Поэтому представляет интерес оценка погрешности  $\delta_1$  определения реактивной мощности по первой гармонике  $Q_1$  по сравнению со значениями  $Q$ , найденными через обменную мощность (выражения (3) и (5)):

$$\delta_1 = \frac{Q - Q_1}{Q} 100 \%. \quad (6)$$

Были произведены массовые расчеты значений  $\delta_1$  по результатам измерений гармонического состава токов и напряжений в системах электроснабжения предприятий, а также в электрических сетях энергосистем; учитывались гармоники напряжения (тока), пренебрежение которым изменило бы коэффициент несинусоидальности напряжения  $k_{ncu}$  (тока  $k_{nci}$ ) более, чем на 5 %. Сдвиг по фазе между высшими гармониками напряжения и тока варьировался в пределах  $0 - \pi$ .

Результаты расчетов позволили заключить, что при  $k_{ncu} \leq 5 \%$  и  $k_{nci} \leq 5 \%$  значение  $\delta_1$  не превосходит 5 %; среднее значение  $\delta_{иср}$  3—4 %.

При уровне значимости, отвечающем интегральной вероятности 95 %, погрешность, равная 5 %, может считаться вполне приемлемой. Поэтому при соответствии качества электроэнергии требованиям ГОСТ 13109—67\*

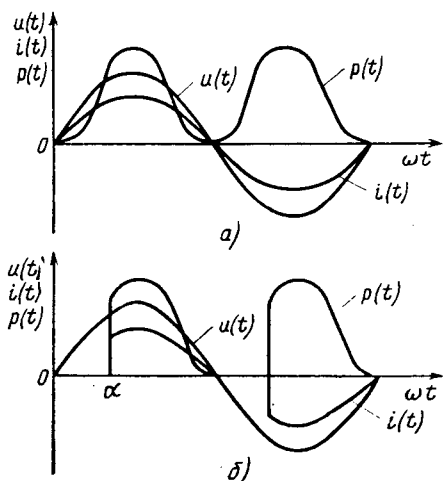


Рис. 4. Характеристики преобразователей с активной нагрузкой

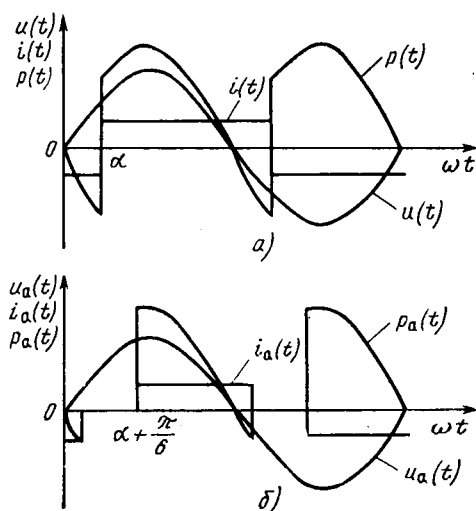


Рис. 5. Характеристики преобразователей с активно-индуктивной нагрузкой, потребляющих реактивную мощность

вполне допустимо оценивать значение реактивной мощности по первым гармоникам напряжения и тока.

*Реактивная мощность в устройствах преобразовательной техники и электротехнологических установках.* Электромагнитные процессы в цепях с неуправляемыми и управляемыми вентилями сопряжены с нелинейными преобразованиями токов и напряжений, вследствие которых появляются высшие гармоники и сдвиги фаз между первыми гармониками. Последнее обстоятельство, по-видимому, обусловило распространенную точку зрения, что вентильные нагрузки являются потребителями реактивной мощности. Проанализируем правомерность этого положения, приняв для простоты некоторые допущения, которые не могут существенно повлиять на результаты:

1) вентили идеальны, открытие и закрытие их происходит мгновенно;

2) цепи имеют сосредоточенные параметры.

Рассмотрение временных диаграмм токов, напряжений и мгновенных мощностей управляемых и неуправляемых выпрямителей как однофазного, так и трехфазного тока при активной нагрузке показывает, что во всех случаях  $P(t) > 0$ , т. е. обмен энергией между источником и потребителем не происходит (рис. 4, а, б). В случае управляемых вентилей при угле управления  $\alpha \neq 0$

первая гармоника тока отстает от напряжения на некоторый угол сдвига  $\varphi_1$ . При подключении конденсатора параллельно выпрямителю действующее значение тока и активных потерь в линии может быть снижено.

При активно-индуктивной нагрузке выпрямители потребляют реактивную мощность только тогда, когда ток, обусловленный запасенной в индуктивности энергией магнитного поля, замыкается через источник: в случае управляемых выпрямителей однофазного тока — в схеме с нулевым выводом трансформатора или мостовой схемы с четырьмя вентилями без нулевого диода (рис. 5, а), в трехфазной мостовой схеме при  $\alpha > \pi/6$  (рис. 5, б). Если ток, обусловленный запасенной в индуктивности энергией, замыкается через вентили, а не через источник, обмен энергией не происходит; реактивная мощность в установившемся режиме из сети не потребляется.

Это справедливо для всех схем неуправляемых двухполупериодных выпрямителей однофазного тока и неуправляемых выпрямителей трехфазного тока (рис. 6, а); управляемых мостовых схем однофазного тока с двумя управляемыми и двумя неуправляемыми вентилями и трехфазного тока с тремя управляемыми и тремя неуправляемыми вентилями, для управляемых нулевых и мостовых схем с нулевым диодом (рис. 6, б), для трехфазной мостовой схемы при  $\alpha < \pi/6$  (рис. 6, в).

Анализ энергетических процессов выпрямителей при идеализированных условиях позволяет сделать общий вывод, что возникающий в рассмотренных схемах сдвиг фаз между первыми гармониками напряжения и тока не во всех случаях связан с обменными процессами между выпрямителем и источником энергии; поэтому речь может идти о компенсации как реактивной мощности, так и сдвига фаз.

Активная нагрузка (сопротивление), изменяющаяся во времени в зависимости от напряжения, температуры или каких-либо других факторов  $\theta$ , потребляет из сети

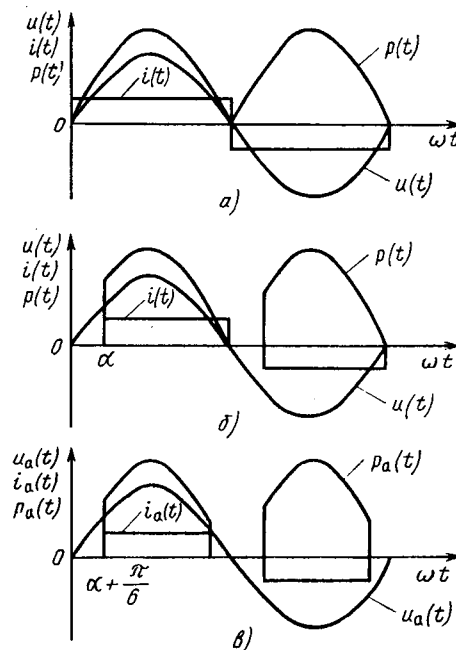


Рис. 6. Характеристики преобразователей с активно-индуктивной нагрузкой, не потребляющих реактивную мощность

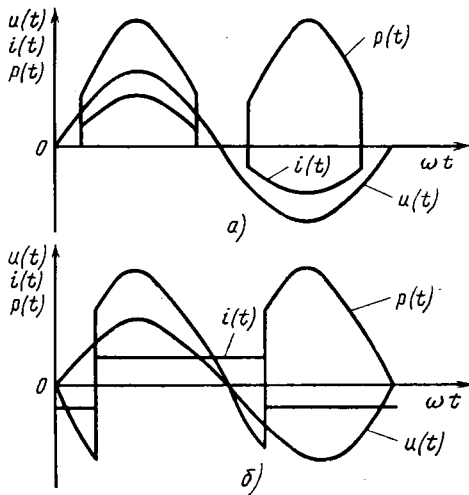


Рис. 7. Характеристики электрической дуги дуговой сталеплавильной печи

только активную мощность, поскольку во всех случаях

$$p(t) = \frac{u^2}{R(t)} > 0. \quad (7)$$

На рис. 7, а представлены кривые напряжения сети  $u(t)$ , напряжения электрической дуги дуговой сталеплавильной печи  $u_d(t)$  и тока  $i(t)$ , а также мгновенной мощности  $P(t)$  (4), иллюстрирующие это положение. Очевидно, в рассматриваемом случае  $Q=0$ . При наличии индуктивности в цепи дуги  $p(t) \geq 0$  и  $Q \neq 0$  (рис. 7, б). Аналогичные кривые характеризуют процессы в цепях со сварочной дугой.

В заключение отметим, что электрические установки практически во всех случаях обладают индуктивностью и емкостью; поэтому между источником и потребителем всегда происходит в большей или меньшей мере обмен электромагнитной энергией.

**Компенсация сдвига фаз.** Из предыдущего следует, что в электрических сетях с нелинейными нагрузками мероприятия по Компенсации реактивной мощности обеспечивают изменение первой гармоники квадратурной составляющей тока, обусловленной как обменными процессами, так и сдвигом фаз между напряжением и сетевыми токами управляемых преобразователей. Практически отсутствует необходимость ее разделения на отдельные составляющие, определяемые обменом и сдвигом фаз, а также обеими причинами. Представляется целесообразным указанную составляющую называть одним термином, например, общепринятым «реактивная составляющая тока» или «реактивный ток»  $I_p$ . Представляется также более правильным термин «компенсация сдвига фаз» вместо «компенсация реактивной мощности», имея в виду сдвиг по фазе между первыми гармониками напряжения и тока. Задача компенсации сдвига фаз заключается в нахождении оптимального значения  $I_p$ , отвечающего минимуму народно-хозяйственных затрат на соответствующие технические и организационные мероприятия. Току  $I_p$  соответствует квадратурное значение мощности.

$$Q = k U I_p, \quad (8)$$

где  $k=1$  или  $\sqrt{3}$  для одно-или трехфазных симметричных цепей.

Компенсация сдвига фаз может рассматриваться как

задача компенсации мощности  $Q_p \equiv I_p$ ; возможно, имеет смысл сохранить для величины  $Q_p$  название «реактивная мощность», имея в виду, однако, двойственную природу этой величины. В дальнейшем изложении будем использовать термин «реактивная мощность».

Рассмотрим в общем виде вопрос компенсации сдвига фаз в сети с нелинейной нагрузкой, приняв в качестве критерия оптимизации минимума среднеквадратического значения тока на выводах нагрузки.

Напряжение и ток на выводах нагрузки

$$U(t) = U_0 + \sum_{v=1}^{\infty} U_{vm} \sin(v \omega t + \beta_v);$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{v=1}^{\infty} I_{vm} \sin(v \omega t + \gamma_v).$$

Ток в цепи конденсатора

$$i_c(t) = C \frac{du(t)}{dt} = \omega C \sum_{v=1}^{\infty} v U_{vm} \cos(v \omega t + \beta_v).$$

Действующее значение суммарного тока

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [i(t) + i_c(t)]^2 dt = \omega^2 C^2 (v U_v)^2 - 2 \omega C \sum_{v=1}^{\infty} v I_v U_v \sin \varphi_v + \sum_{v=1}^{\infty} I_v^2,$$

где

$$\varphi_v = \beta_v - \gamma_v.$$

Решая уравнение

$$\frac{\partial I^2}{\partial C} = 0,$$

получаем оптимальное значение емкости:

$$C = \frac{\sum_{v=1}^{\infty} v I_v U_v \sin \varphi_v}{\omega \sum_{v=1}^{\infty} (v U_v)^2}. \quad (9a)$$

Номинальная (паспортная) мощность конденсатора (или батареи конденсаторов) определяется при номинальном значении напряжения  $U_H$ :

$$Q_H = U_H^2 \omega C = \frac{U_H^2 \sum_{v=1}^{\infty} v U_v I_v \sin \varphi_v}{\sum_{v=1}^{\infty} (v U_v)^2}. \quad (9b)$$

Из выражения (9, а) следует равенство

$$\sum_{v=1}^{\infty} v U_v I_v \sin \varphi_v = \omega C \sum_{v=1}^{\infty} (v U_v)^2,$$

левая часть которого представляет собой реактивную мощность нагрузки

$$Q_H = \sum_{v=1}^{\infty} v U_v I_v \sin \varphi_v = \sum_{v=1}^{\infty} v Q_v,$$

а правая — конденсатора

$$Q_c = \omega C \sum_{v=1}^{\infty} (v U_v)^2 = \sum_{v=1}^{\infty} v U_v (v \omega C U_v) = \sum_{v=1}^{\infty} v U_v I_v = \\ = \sum_{v=1}^{\infty} v Q_{cv}.$$

Таким образом, в частном случае компенсации сдвига фаз с помощью параллельно подключенного конденсатора по условию минимума потерь в линии реактивная мощность нагрузки и конденсатора определяется по выражению (5, 6).

Если нагрузкой является нелинейная емкость, то для минимизации тока нагрузки реактивная мощность нагрузки и компенсирующей индуктивности определяется выражением (5, а). Эти положения могут быть использованы при проектировании различного рода фیلтровокомпенсирующих устройств, основанных на использовании реактивных элементов, если в качестве критерия оптимизации принимается минимум потерь в питающих линиях.

В заключение еще раз подчеркнем, что в общем случае выражения (5, а — в) не являются корректными.

**Выводы.** 1. В электрических сетях с нелинейными нагрузками при наличии реактивных элементов возникает обмен энергией между потребителем и источником; интенсивность обменных процессов характеризуется значением реактивной мощности, пропорциональным величине обменной мощности. Необходимым и достаточным условием возникновения реактивной мощности является наличие участков отрицательного значения мгновенной мощности на интервале, равном периоду напряжения сети.

2. Оценка значений реактивной мощности путем суммирования соответствующих мощностей на частотах гармоник (в том числе с умножением на коэффициенты, зависящие от номера гармоники) в общем случае не отвечает физической сущности энергетических обменных процессов в электрических цепях и не является корректной.

3. При выполнении расчетов режимных параметров в питающих и распределительных электрических сетях, в которых качество электроэнергии по напряжению отвечает требованиям ГОСТ 13109—67, с достаточной для практики точностью можно использовать значения реактивной мощности, определенные по первым гармоникам напряжения и тока.

4. Выпрямители однофазного и трехфазного тока, работающие на активную нагрузку, не потребляют из сети реактивную мощность в силу отсутствия обмена энергией между источником и потребителем. В случае активно-индуктивной нагрузки в конкретных схемах управляемых преобразователей обмен энергией может отсутствовать несмотря на наличие сдвига по фазе между первыми гармониками напряжения и сетевого тока; этот сдвиг может компенсироваться с помощью конденсаторов, подключаемых параллельно.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маевский О. А. Энергетические показатели вентильных преобразователей. — М.: Энергия, 1978.
2. Демирчян К. С. Реактивная или обменная мощность. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1984, № 2.
3. Жарков Ф. П. Об одном способе определения реактивной мощности. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1984, № 2.
4. Свечанский А. Д., Смелянский М. Я. Электрические промышленные печи. — М.: Энергия, 1970.

[16.01.86]

УДК 621.315.1. 018.8.001.24

## Упрощенный метод расчета затухания линейного тракта каналов высокочастотной связи по воздушной линии при гололеде

ШКАРИН Ю. П.

Для определения работоспособности каналов высокочастотной (ВЧ) связи по ВЛ при неблагоприятных метеорологических условиях необходимо прогнозировать изменение параметров линейных ВЧ-трактов при возникновении и на проводах линии гололедно-изморозевых образований (ГИО).

В настоящее время существует достаточно точный метод расчета на ЭВМ затухания линейного тракта с учетом осесимметричных ГИО на проводах ВЛ и с использованием матричных методов расчета параметров ВЛ [1]. Кроме того, существуют упрощенные методы расчета дополнительного затухания, вносимого ГИО, основанные на ряде допущений [1—5]. Упрощенные методы расчета должны обеспечивать возможность быстрого, без обращения к большим ЭВМ, определения дополнительного затухания, вносимого ГИО в линейный тракт каналов ВЧ-связи по ВЛ, а также анализа изменения этого затухания при изменении конструкции ВЛ, частоты, длины линии и т.д.

Упрощенные методы, изложенные в [1—3], используются обычно для расчета линейных трактов с присоеди-

нением к ВЛ по схемам фаза — земля или фаза — фаза. Эти методы дают возможность определять влияние ГИО только на коэффициент затухания междуфазной моды двухпроводной линии. Влияние ГИО на коэффициент фазы не рассматривалось. Такая постановка вопроса не дает возможности проанализировать влияние ГИО на затухание линейных трактов с различными схемами присоединения к многопроводным ВЛ, когда величина затухания определяется разностью коэффициентов затухания и коэффициентов фазы различных модальных составляющих [1, 3]. Кроме того, как показывает анализ, проведенный в настоящей статье, упрощенные методы определения влияния ГИО на затухание междуфазной модальной составляющей учитывают не все воздействующие факторы.

Упрощенный метод [4, 5] определения влияния ГИО на коэффициент затухания применяется при организации линейных трактов по ВЛ с присоединением к изолированным проводам расщепленных фаз и тросов (так называемых внутрифазных и внутритросовых трактов). Формулы для расчета получены из общих выражений

приведенных в [2]. Анализ исходных уравнений [2] для напряжения проводов ВЛ, из которых получены выражения для коэффициентов распространения, показывает, что они составлены с допущениями, приводящими к значительным погрешностям при вычислении дополнительного затухания от ГИО для внутрифазных и внутритросовых трактов. Поэтому расчет дополнительного затухания, обусловленного ГИО, производимый по формулам [4, 5], дает завышенное значение затухания. Кроме того, эта методика не учитывает всех причин, влияющих на затухание линейных трактов при наличии ГИО.

Целью настоящей статьи является рассмотрение упрощенного метода расчета дополнительного затухания, свободного от указанных выше недостатков. При этом будем считать, что комплексная относительная диэлектрическая проницаемость ГИО

$$\epsilon_{л. отн} = \epsilon_{л. отн} - j \epsilon_{л. отн}' = \epsilon_{л. отн} (1 - j \operatorname{tg} \delta_{л.}),$$

характеризующая ГИО при рассмотрении их влияния на условия распространения по линиям, известна (см. например, [6]).

Как показано в приложении, коэффициент затухания  $\alpha_s$  и коэффициент фазы  $\beta_s$   $s$ -й ( $s=1, 2, 0$ ) модальных составляющих для ВЛ с одинаковыми проводами могут быть представлены в виде суммы (на примере трехфазной ВЛ):

$$\alpha_s = \alpha_{пр s} + \alpha_{з s} + \Delta \alpha_{г s}; \quad (1)$$

$$\beta_s = \beta_c + \Delta \beta_s; \quad (2)$$

$$\Delta \beta_s = \Delta \beta_{пр s} + \Delta \beta_{з s} + \Delta \beta_{г s}, \quad (2a)$$

где  $\alpha_{пр s}$ ,  $\alpha_{з s}$ ,  $\Delta \alpha_{г s}$  — части коэффициента затухания  $s$ -й моды, обусловленные соответственно потерями в проводах, земле с конечной проводимостью и в ГИО;  $\beta_c$  — фазовый коэффициент в линии без потерь;  $\Delta \beta_{пр s}$ ,  $\Delta \beta_{з s}$ ,  $\Delta \beta_{г s}$  — части коэффициента фазы  $s$ -й моды, обусловленные потерями в проводах, земле и ГИО.

При этом слагаемые  $\alpha_s$  имеют размерность Нп/м, а слагаемые  $\beta_s$  и  $\Delta \beta_s$  — рад/м; для частоты  $\omega = 2\pi f$  они вычисляются следующим образом ( $s=1, 2, 0$ ):

$$\alpha_{пр s} = \Delta \beta_{пр s} = \frac{R_{пр}}{p 2 Z_{cs}}; \quad (3)$$

$$\alpha_{з s} = [(\omega \mu_0 / 2\pi) \operatorname{Im}(F_{мс})] / (2 Z_{cs}); \quad (4)$$

$$\Delta \beta_{з s} = [(\omega \mu_0 / 2\pi) \operatorname{Re}(F_{мс})] / (2 Z_{cs}); \quad (5)$$

$$\Delta \alpha_{г s} = \frac{\omega \mu_0 \operatorname{tg} \delta_{л. отн}}{p 2 \pi \epsilon_{л. отн} (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_{л. отн}) 2 Z_{cs}} \ln \left( 1 + \frac{d_{л.}}{r} \right); \quad (6)$$

$$\Delta \beta_{г s} = \frac{\omega \mu_0 [\epsilon_{л. отн}' (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_{л. отн}) - 1]}{p 2 \pi \epsilon_{л. отн}' (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_{л. отн}) 2 Z_{cs}} \ln \left( 1 + \frac{d_{л.}}{r} \right); \quad (7)$$

$$\beta_c = \omega / 3 \cdot 10^8. \quad (8)$$

Здесь  $R_{пр}$  — активное сопротивление одного из проводов расщепленной фазы на рассматриваемой частоте. Ом/м;  $\operatorname{Im}(F_{мс})$  и  $\operatorname{Re}(F_{мс})$  — мнимая и действительная части интеграла Карсона, вычисленные для рассматриваемой  $s$ -й моды при заданной частоте и удельном сопротивлении земли;  $Z_{cs}$  — волновое сопротивление  $s$ -й моды (Ом), определенное для рассматриваемой линии без учета потерь, причем в случае ГИО при расчете  $Z_{cs}$  радиус провода линии принимается равным сумме действительного радиуса провода и толщины стенки ГИО;  $r$  — радиус провода, м (одной составляющей расщепленной фазы);  $d_{л.}$  — толщина стенки ГИО.

Формулы (1) — (8) справедливы как для ВЛ без ГИО так и при наличии ГИО. При отсутствии ГИО ( $d_{л.}=0$ ) имеем  $\Delta \alpha_{г s} = \Delta \beta_{г s} = 0$ , и формулы (1), (2) с учетом (3) — (5) соответствуют общепринятым формулам для упрощенного расчета действительной и мнимой частей коэффициентов распространения модальных составляющих [1].

Величина  $Z_{cs}$  может быть определена по общей формуле (П-10) с учетом (П-2) и (П-7), приведенных в приложении. Для ВЛ с горизонтальным расположением проводов значения  $Z_{cs}$  определяются с учетом (П-12).

$$\left. \begin{aligned} Z_{c1} &= 60 \ln \left[ \frac{2h}{r_3} \left( \frac{\sqrt{(2h)^2 + S_{13}^2}}{S_{13}} \right)^{1/3} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{S_{12}}{\sqrt{(2h)^2 + S_{12}^2}} \right)^{4/3} \right]; \\ Z_{c2} &= 60 \ln \left[ \frac{2h}{r_3} \frac{S_{13}}{\sqrt{(2h)^2 + S_{13}^2}} \right]; \\ Z_{c0} &= 60 \ln \left[ \frac{2h}{r_3} \left( \frac{\sqrt{(2h)^2 + S_{12}^2}}{S_{12}} \right)^{4/3} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{\sqrt{(2h)^2 + S_{13}^2}}{S_{13}} \right)^{2/3} \right]; \\ r_3 &= \left[ (r + d_{л.}) \sum_{i=2}^p D_{1i} \right]^{1/p}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $h$  — расчетная высота подвеса проводов ВЛ;  $S_{12}$  и  $S_{13}$  — расстояния между средней и крайней фазами и двумя крайними фазами соответственно;  $D_{1i}$  — расстояние между 1-м и  $i$ -м ( $i=2, 3, \dots, p$ ) проводами фазы, расщепленной на  $p$  составляющих.

Для внутрифазной (ВФ) и внутритросовой (ВТ) модальных составляющих величины  $Z_{cs}$  с учетом ГИО вычисляются по формуле

$$Z_{с вф} = Z_{с вт} = 60 \ln \left( \frac{D_{12}}{r + d_{л.}} \right). \quad (11)$$

Упрощенные формулы для приближенного вычисления значений  $\alpha_{пр s}$ ,  $\alpha_{з s}$ ,  $\Delta \beta_{пр s}$  и  $\Delta \beta_{з s}$  для линии без учета ГИО, основанные на представлении  $\operatorname{Im}(F_{мс})$  и  $\operatorname{Re}(F_{мс})$  в виде рядов по степеням логарифма отношения  $f/\rho_3$  и учете при расчете  $R_{пр}$  и  $Z_{cs}$  типовых марок проводов и типовых опор, приведены в [1, 3]; далее будем определять только зависимости прироста величин  $\alpha_s$  и  $\beta_s$ , обусловленного ГИО, и анализировать эти зависимости.

Из выражений (9) — (11) можно видеть, что волновое сопротивление модальной составляющей линии без потерь, определенное для линии с ГИО, т. е.  $Z_{с г}$ , меньше, чем для линии без ГИО,  $Z_{cs}$ .

$$Z_{с г} = Z_{cs} - \frac{60}{p} \ln \left( 1 + \frac{d_{л.}}{r} \right). \quad (12)$$

С учетом этого, рассматривая выражения (3) — (7) для определения слагаемых  $\alpha_s$  и  $\Delta \beta_s$ , можно показать, что увеличение коэффициента затухания и коэффициента фазы линии с ГИО происходит не только за счет появления слагаемых  $\Delta \alpha_{г s}$  и  $\Delta \beta_{г s}$ , но и за счет увеличения слагаемых, определяемых формулами (3) — (5), что ранее в упрощенных методах не учитывалось.

Таким образом, общее изменение значений  $\alpha_s$ -й и  $\Delta\beta_s$ -й модальной составляющей при ГИО может быть записано в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha_{rs} &= \frac{\alpha_s 60}{Z_{cs} p k_{zs}} \ln \left( 1 + \frac{d_{\pi}}{r} \right) + \frac{M_{\alpha s}}{k_{zs}} \ln \left( 1 + \frac{d_{\pi}}{r} \right); \\ \Delta\beta_{rs} &= \frac{\Delta\beta_s 60}{Z_{cs} p k_{zs}} \ln \left( 1 + \frac{d_{\pi}}{r} \right) + \frac{M_{\beta s}}{k_{zs}} \ln \left( 1 + \frac{d_{\pi}}{r} \right); \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{\alpha s} &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \operatorname{tg} \delta_{\pi} f}{\rho \varepsilon_{\pi, \text{отн}} (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_{\pi}) 2Z_{cs}}; \\ M_{\beta s} &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} [\varepsilon'_{\pi, \text{отн}} (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_{\pi}) - 1] f}{\rho \varepsilon_{\pi, \text{отн}} (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_{\pi}) 2Z_{cs}}; \\ k_{zs} &= 1 - \frac{60}{p Z_{cs}} \ln \left( 1 + \frac{d_{\pi}}{r} \right), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где  $\alpha_s$ ,  $\Delta\beta_s$  и  $Z_{cs}$  — соответствующие значения, вычисленные без учета ГИО.

Упрощенные формулы для вычисления значений  $\alpha_s$  и  $\Delta\beta_s$  без учета гололеда приведены в [1 и 3].

В частотных зависимостях затухания линейных трактов с неоптимальными схемами присоединения к нетранспонированным ВЛ и с любыми схемами присоединения к транспонированным ВЛ существует область частот, располагающаяся вблизи частоты полюса затухания, где затухание линейного тракта резко увеличивается. Полюс (пик) затухания обусловлен вычитанием напряжений двух междофазных модальных составляющих, приходящих на приемный конец линии со сдвигом в  $\pi$  рад.

Обычно рабочие частоты каналов связи по таким линейным трактам выбирают так, чтобы они располагались ниже частоты полюса затухания [1, 3]. При этом необходимо знать, как изменяется взаимная фаза модальных напряжений на приемном конце линии при появлении ГИО.

Из анализа выражений для  $\Delta\alpha_{rs}$  и  $\Delta\beta_{rs}$  по формулам (6) и (7) видно, что ГИО изменяет эти величины для модальных составляющих 1, 2 и 0 обратно пропорционально величинам  $Z_{cs}$  ( $s=1, 2, 0$ ).

Из выражений (9) для вычисления  $Z_{cs}$  видно, что так как  $S_{13}=2S_{12}$ , имеет место неравенство

$$Z_{c1} < Z_{c2} < Z_{c0}, \quad (15)$$

и увеличение коэффициентов затухания и коэффициентов фазы при ГИО максимально для модальных составляющих с малыми потерями и минимально для модальных составляющих с большими потерями, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha_{r1} &> \Delta\alpha_{r2} > \Delta\alpha_{r0}; \\ \Delta\beta_{r1} &> \Delta\beta_{r2} > \Delta\beta_{r0}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Соотношения (16) говорят о том, что при наличии ГИО уменьшается разность фазовых коэффициентов распространения междофазных мод 1 и 2  $\Delta\beta_{12} = \beta_2 - \beta_1$ , и частота, соответствующая полюсу затухания, сдвигается в область более высоких частот. Таким образом, в рабочем диапазоне частот каналов ВЧ-связи, выбранном так, как было указано выше, прирост затухания тракта будет определяться практически только мало различающимися одним от другого приростом затухания междофазных модальных составляющих 1 и 2, и затухание линейного тракта с учетом ГИО  $a_{\pi, \text{т.г}}$  может быть до-

статочно точно вычислено по формуле

$$a_{\pi, \text{т.г}} = a_{\pi, \text{т}} + \Delta\alpha_{\text{гс.м.ф}} l_{\text{г}}, \quad (17)$$

где  $a_{\pi, \text{т}}$  — затухание тракта, вычисленное без влияния ГИО;  $l_{\text{г}}$  — длина участка линии, покрытая ГИО;  $\Delta\alpha_{\text{гс.м.ф}}$  — вычисленное по (13) суммарное увеличение коэффициента затухания междофазной моды, являющейся определяющей для данного тракта.

Для трактов со схемами присоединения фаза — земля или фаза — фаза определяющей является мода 1; для ВФ и ВТ-трактов определяющей является соответственно внутрифазная или внутритросовая мода.

**Приложение.** Из выражений, приведенных в [1], можно получить, что диагональная матрица коэффициентов распространения модальных составляющих

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} [1 + \mathbf{M} \lambda^{-1} \mathbf{N}^{-1} \lambda + \lambda^{-1} \mathbf{F} \mathbf{N}^{-1} \lambda]^{1/2}, \quad (\text{П-1})$$

где  $\mathbf{M}$  — комплексная диагональная матрица, характеризующая собственные внутренние сопротивления проводов, причем потери в ГИО учитываются этой же матрицей (если все провода ВЛ одинаковы и покрыты ГИО одинаковой толщины, матрица  $\mathbf{M}$  записывается как скалярный множитель);  $\mathbf{F}$  — квадратная симметрическая комплексная матрица, характеризующая дополнительные внешние собственные и взаимные сопротивления проводов из-за влияния конечной проводимости земли;  $\mathbf{N}$  — квадратная симметрическая действительная матрица, характеризующая внешние собственные и взаимные индуктивные сопротивления и емкостные проводимости проводов при идеальной проводимости земли;  $\lambda$  — квадратная комплексная матрица преобразования модальных напряжений в напряжении фаз.

Все матрицы имеют порядок, равный числу проводов ВЛ.

Можно показать, что если произведение  $\lambda^{-1} \delta$  является диагональной матрицей ( $\delta$  — квадратная комплексная матрица, преобразующая модальные токи в токи проводов), матричные преобразования типа

$$\left. \begin{aligned} \lambda^{-1} \mathbf{F} \lambda &\approx \lambda^{-1} \mathbf{F} \delta = \mathbf{F}_m; \\ \lambda^{-1} \mathbf{N} \lambda &\approx \lambda^{-1} \mathbf{N} \delta = \mathbf{N}_m \end{aligned} \right\} \quad (\text{П-2})$$

приводит к диагональным матрицам  $\mathbf{F}_m$  и  $\mathbf{N}_m$ .

Расчеты, проведенные на ЭВМ для ВЛ с типовыми опорами и одинаковыми проводами, показали, что указанное допущение ( $\lambda^{-1} \delta$  — диагональная матрица) удовлетворяется достаточно хорошо.

С учетом сказанного уравнение (П-1) может быть записано в виде

$$\gamma \approx j\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} (1 + \mathbf{M} \mathbf{N}_m^{-1} + \mathbf{F}_m \mathbf{N}_m^{-1})^{1/2}, \quad (\text{П-3})$$

где матрицы  $\mathbf{N}_m$  и  $\mathbf{F}_m$  — диагональные, определяемые по (П-2).

Таким образом, уравнение (П-3) распадается на скалярные уравнения для вычисления коэффициента распространения каждой из модальных составляющих

$$\gamma_s = j\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} (1 + M/N_{ms} + F_m/N_{ms})^{1/2}, \quad (\text{П-4})$$

где  $s$  — номер модальной составляющей;  $\gamma_s$ ,  $N_{ms}$  и  $F_m$  —  $s$ -е элементы диагональных матриц  $\gamma$ ,  $\mathbf{N}_m$  и  $\mathbf{F}_m$ .

Так как второе и третье слагаемые в скобках выражения (П-4) определяют поправку к коэффициенту распространения в линии без потерь, а их значения намного меньше 1, выражение (П-4) записывается в окон-



чательном виде:

$$\gamma_s = j\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} + \frac{j\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{2} (M/N_{Ms} + F_{Ms}/N_{Ms}). \quad (\text{П-5})$$

Согласно [1] значение  $M$  вычисляется по формуле:

$$M = (1+j) \frac{2\pi}{j\omega\mu_0} R_{np} + \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{л.отн}}\right) \ln\left(1 + \frac{d_{л}}{r}\right) = \\ = (1+j) \frac{2\pi}{j\omega\mu_0} R_{np} + \\ + \frac{[\epsilon'_{л.отн}(1 + \text{tg}^2 \delta_{л}) - 1] - j \text{tg} \delta_{л}}{\epsilon'_{л.отн}(1 + \text{tg}^2 \delta_{л})} \ln\left(1 + \frac{d_{л}}{r}\right). \quad (\text{П-6})$$

Элементы матрицы  $N$  для ВЛ, привода которой расположены согласно рисунку, определяются как

$$\left. \begin{aligned} N_{kh} &= \ln \frac{2h_k}{r_0}; \\ N_{ik} &= N_{ki} = \ln \frac{\sqrt{(h_k + h_i)^2 + (b_k - b_i)^2}}{\sqrt{(h_k + h_i)^2 + (b_k - b_i)^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П-7})$$

где  $k$  и  $i$  — номера рассматриваемых проводов с высотой подвеса  $h_k$  ( $h_i$ ) и горизонтальной координатой  $b_k$  ( $b_i$ );

$$r_0 = \left[ (r + d_{л}) \sum_{i=2}^p D_{1i} \right]^{1/p}$$

— эквивалентный радиус расщепленной фазы, определяемый с учетом толщины стенки ГИО.

Произведя дальнейшие преобразования (П-5) с учетом (П-6), можно получить для действительной ( $\alpha_s$ , Нп/м) и мнимой ( $\beta_s$ , рад/м) частей  $\gamma_s$  выражения:

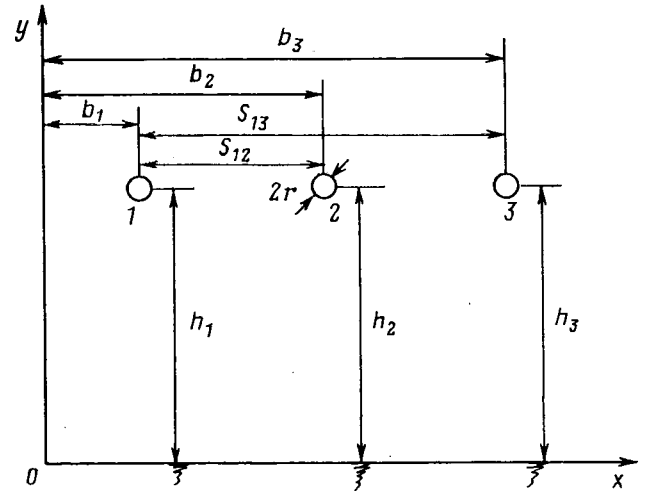
$$\alpha_s = \frac{R}{2Z_{cs}} + 4\pi \cdot 10^{-7} f \frac{|\text{Im}(F_{Ms})|}{2Z_{cs}} + \\ + 4\pi \cdot 10^{-7} f \frac{\text{tg} \delta_{л}}{2Z_{cs} \epsilon'_{л.отн} (1 + \text{tg}^2 \delta_{л})} \ln\left(1 + \frac{d_{л}}{r}\right); \quad (\text{П-8})$$

$$\beta_s = \beta_c + \frac{R_{np}}{2Z_{cs}} + 4\pi \cdot 10^{-7} f \frac{|\text{Re}(F_{Ms})|}{2Z_{cs}} + \\ + 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{[\epsilon'_{л.отн}(1 + \text{tg}^2 \delta_{л}) - 1] f}{2Z_{cs} \epsilon'_{л.отн} (1 + \text{tg}^2 \delta_{л})} \ln\left(1 + \frac{d_{л}}{r}\right); \quad (\text{П-9})$$

$$Z_{cs} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} N_{Ms} = 60 N_{Ms}. \quad (\text{П-10})$$

Значения  $N_{Ms}$  ( $s=1, 2, 0$ ) равны  $s$ -му элементу диагональной матрицы  $N_M$  (второе из уравнений (П-2), в котором элементы матрицы  $N$  определяются по (П-7)). Так, для ВЛ с горизонтальным расположением проводов (рисунок), у которой  $h_1=h_2=h_3$ ,  $b_2-b_1=S_{12}$  и  $b_3-b_1=S_{13}$ , при условии записи матрицы  $\lambda$  в виде

$$\lambda = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{П-11})$$



элементы  $N_{Ms}$  получаются равными

$$\left. \begin{aligned} N_{M1} &= \left\{ \ln\left(\frac{2h}{r_0}\right) + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{\sqrt{(2h)^2 + S_{13}^2}}{S_{13}}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{3} \ln\left(\frac{\sqrt{(2h)^2 + S_{12}^2}}{S_{12}}\right) \right\}; \\ N_{M2} &= \left\{ \ln\left(\frac{2h}{r_0}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{(2h)^2 + S_{13}^2}}{S_{13}}\right) \right\}; \\ N_{M0} &= \left\{ \ln\left(\frac{2h}{r_0}\right) + \frac{4}{3} \ln\left(\frac{\sqrt{(2h)^2 + S_{12}^2}}{S_{12}}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \ln\left(\frac{\sqrt{(2h)^2 + S_{13}^2}}{S_{13}}\right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П-12})$$

Аналогично, рассматривая двухпроводную линию, можно получить выражения для  $Z_c$  для внутрифазных и внутритросовых мод.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Костенко М. В., Перельман Л. С., Шкарин Ю. П. Волновые процессы и электрические помехи в многопроводных линиях высокого напряжения. — М.: Энергия, 1973.
2. Костенко М. В., Перельман Л. С., Шимко Г. И. Методика расчета параметров волновых каналов воздушных многопроводных линий с приближенным учетом гололедных образований на проводах. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1969, № 1.
3. Руководящие указания по расчету параметров и выбору схем высокочастотных трактов по линиям электропередачи. — М.: Энергия, 1975.
4. Книжник Р. Г. Влияние гололедных образований на параметры каналов передачи информации по внутрифазным трактам линий электропередачи. — Экспресс-информация. Сер. Средства и системы управления в энергетике, вып. 1(76). М.: Информэнерго, 1977.
5. Ишкин В. Х., Цитвер И. И. Высокочастотная связь по линиям электропередачи 330—750 кВ. — М.: Энергоиздат, 1981.
6. Богородский В. В., Гаврило В. П. Лед. Физические свойства, современные методы гляциологии. — Л.: Гидрометиздат, 1980.

17.03.86]

# Применение параметров многофазных тоководов для расчета токов в нагрузке и при коротких замыканиях

ТОЗОНИ О. В., КОСТЕНКО Т. Я.

Многофазные промышленные тоководы состоят из массивных медных шин разнообразного сечения, расстояния между которыми часто меньше диаметров сечений отдельных шин. Распределение тока по сечению каждой шины зависит от нагрузки всего токовода. При этом изменяются потери энергии в шинах и потокосцепления с ними. Поэтому такие понятия, как активное и реактивное сопротивление фазы токовода, теряют смысл параметров — постоянных величин, не зависящих от нагрузки токовода. Однако, если характеристики материала шин и окружающей их среды не зависят от интенсивности электромагнитного поля ( $\gamma = \text{const}$ ,  $\mu = \mu_0 = \text{const}$ ), то соотношения между падениями напряжений на шинах и токами в них будут линейными и в общем случае выражаются в виде линейных уравнений с постоянными коэффициентами [1]. Для  $m$ -фазного токовода они имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_{20} &= \dot{I}_2 z_{22} + \dot{I}_3 z_{23} + \dots + \dot{I}_m z_{2m}; \\ \dot{u}_{30} &= \dot{I}_2 z_{32} + \dot{I}_3 z_{33} + \dots + \dot{I}_m z_{3m}; \\ &\vdots \\ \dot{u}_{m0} &= \dot{I}_2 z_{m2} + \dot{I}_3 z_{m3} + \dots + \dot{I}_m z_{mm}; \\ \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dots + \dot{I}_m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Соотношения (1) связывают между собой токи  $I_n$  в шинах с падениями напряжений  $\dot{U}_{k0}$  в контурах токовода единичной длины, каждый из которых состоит из одной для всех контуров опорной, шины и  $n$ -й шины. Постоянные коэффициенты  $z_{in}$ , входящие в (1), не зависят от нагрузки токовода, и, следовательно, являются его параметрами. Они зависят только от размеров, формы, взаимного расположения шин токовода и характеристик их материала.

Рассматривая соотношения (1) как уравнения относительно  $(m-1)^2$  неизвестных параметров  $z_{ik}$ , заключаем, что для определения всех параметров в общем случае необходимо рассчитать все токи и падения напряжения в  $(m-1)$ -м линейно-независимом режиме токовода и затем решить  $(m-1)$  систему линейных уравнений с  $(m-1)$  неизвестными параметрами каждая. Так, для трехфазного токовода достаточно рассчитать два различных режима, из которых имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}'_{10} &= \dot{I}'_{1z_{11}} + \dot{I}'_{3z_{13}}; & \dot{u}'_{30} &= \dot{I}'_{1z_{31}} + \dot{I}'_{3z_{33}}; \\ \dot{u}''_{10} &= \dot{I}''_{1z_{11}} + \dot{I}''_{3z_{13}}; & \dot{u}''_{30} &= \dot{I}''_{1z_{31}} + \dot{I}''_{3z_{33}}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь за опорный взят провод второй фазы. Решая систему (2) относительно неизвестных  $z_{ib}$ , находим:

$$\left. \begin{aligned} z_{11} &= \frac{\dot{u}_{10}^{\prime\prime} i_{13}^{\prime\prime} - \dot{u}_{10}^{\prime\prime} i_{13}^{\prime}}{i_{11}^{\prime\prime} i_{13}^{\prime\prime} - i_{11}^{\prime} i_{13}^{\prime}}; & z_{33} &= \frac{\dot{u}_{30}^{\prime\prime} i_{11}^{\prime\prime} - \dot{u}_{30}^{\prime\prime} i_{11}^{\prime}}{i_{11}^{\prime\prime} i_{13}^{\prime\prime} - i_{11}^{\prime} i_{13}^{\prime}}; \\ z_{13} &= \frac{\dot{u}_{10}^{\prime\prime} i_{11}^{\prime\prime} - \dot{u}_{10}^{\prime\prime} i_{11}^{\prime}}{i_{11}^{\prime\prime} i_{13}^{\prime\prime} - i_{11}^{\prime} i_{13}^{\prime}}; & z_{31} &= \frac{\dot{u}_{30}^{\prime\prime} i_{13}^{\prime\prime} - \dot{u}_{30}^{\prime\prime} i_{13}^{\prime}}{i_{11}^{\prime\prime} i_{13}^{\prime\prime} - i_{11}^{\prime} i_{13}^{\prime}}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Параметры  $z_{ik}$  введены нами чисто формально и придавать им физический смысл комплексных сопротивлений отдельных шин токовода не следует. В [1 и 2] изложены методы определения параметров  $z_{ib}$ . Покажем

как пользоваться этими параметрами для анализа различных режимов трехфазного токовода.

На рис. 1 приведена полная схема цепи, частью которой служит токовед. Нагрузка состоит из сопротивлений  $z_A$ ,  $z_B$  и  $z_C$ , соединенных в звезду. Шины токовед изображены отрезками линий длиной  $l$ , заключенными между сечениями 1, 2, 3 и 1', 2', 3'. По определению величин  $\dot{u}_{10}$  и  $\dot{u}_{30}$  [1] для контуров 11'2'2 и 33'2'2 в соответствии со вторым законом Кирхгофа находим:

$$\dot{u}_{10} = \frac{\dot{e}_2 - \dot{e}_1 - \dot{u}_{21}}{l}; \quad \dot{u}_{30} = \frac{\dot{e}_2 - \dot{e}_3 - \dot{u}_{23}}{l}. \quad (4)$$

Отсюда имеем

$$\dot{u}_{21} = \dot{e}_2 - \dot{e}_1 - \dot{u}_{10}l; \quad \dot{u}_{23} = \dot{e}_2 - \dot{e}_3 - \dot{u}_{30}l. \quad (5)$$

С другой стороны, при принятых на схеме рис. 1 направлениях токов  $I_k$  падения напряжения на сопротивлениях нагрузки равны:

$$\dot{u}_{21} = \dot{I}_1 z_A - \dot{I}_2 z_B; \quad \dot{u}_{23} = \dot{I}_3 z_C - \dot{I}_2 z_B; \quad \sum_{k=1}^3 \dot{I}_k = 0. \quad (6)$$

Приравняв правые части соотношений (5) и (6), исключив ток  $i_2$  и заменив величины  $i_{10}$  и  $i_{30}$  их выражениями (2), получим систему линейных уравнений относительно токов  $i_1$  и  $i_3$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_2 - \dot{e}_1 - (\dot{I}_1 z_{11} + \dot{I}_3 z_{13}) l &= \dot{I}_1 (z_A + z_B) + \dot{I}_3 z_B; \\ \dot{e}_2 - \dot{e}_3 - (\dot{I}_1 z_{31} + \dot{I}_3 z_{33}) l &= \dot{I}_1 z_B + \dot{I}_3 (z_B + z_C). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

После приведения системы уравнений к нормальной форме получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1(z_A + z_B + z_{11}l) + \dot{I}_3(z_B + z_{13}l) &= \dot{e}_2 - \dot{e}_1; \\ \dot{I}_1(z_B + z_{31}l) + \dot{I}_3(z_B + z_C + z_{33}l) &= \dot{e}_2 - \dot{e}_3. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Решив эту систему уравнений, получим явные выражения для фазных токов в зависимости от фазных э. д. с. источника, параметров токовода и сопротивлений нагрузки  $z_A, z_B, z_C$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{J}_1 &= \frac{(\dot{e}_3 - \dot{e}_1) z_B + (\dot{e}_2 - \dot{e}_1)(z_C + z_{33}l) +}{z_A z_B + z_B z_C + z_C z_A + z_B(z_{33} + z_{11} - z_{13} - z_{31})l +} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{+ (\dot{e}_3 - \dot{e}_2) z_{13}l}{+ (z_A z_{33} - z_C z_{11})l + (z_{11} z_{33} - z_{13} z_{31})l^2}; \\ \dot{J}_3 &= \frac{(\dot{e}_1 - \dot{e}_3) z_B + (\dot{e}_2 - \dot{e}_3)(z_A + z_{11}l) +}{z_A z_B + z_B z_C + z_C z_A + z_B(z_{33} + z_{11} - z_{13} - z_{31})l +} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{+ (\dot{e}_1 - \dot{e}_2) z_{31}l}{+ (z_A z_{33} + z_C z_{11})l + (z_{11} z_{33} - z_{13} z_{31})l^2}. \end{aligned} \right\} (9)$$

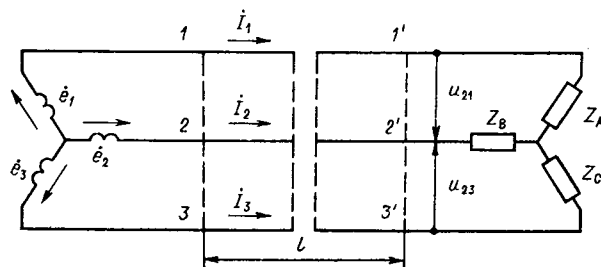


Рис. 1

Таблица 1

| Номер<br>варианта | Размеры<br>токовода,<br>мм                             | Параметры  | Ток к. з. и при нагрузке  |   |
|-------------------|--|--|---|---|
|                   |  |  | а) $z_A = z_B = z_C = 0$<br>б) $z_A = z_B = z_C = 1 \text{ Ом}$   | Ток к. з.<br>а) $z_B = z_C = 0, z_A = 1 \text{ Ом}$<br>б) $z_A = z_C = 0, z_B = 1 \text{ Ом}$<br>в) $z_A = z_B = 0, z_C = 1 \text{ Ом}$   |
| 1<br>(рис. 2)     | $L = 100,$<br>$d_1 = 20,$<br>$d_2 = 200,$<br>$v = 10$  | $z_{11} = 2,429 \cdot 10^{-5}, < 58^\circ 24';$<br>$z_{13} = 0,3769 \cdot 10^{-5}, < 60^\circ 30';$<br>$z_{33} = 2,16 \cdot 10^{-5}, < 88^\circ 13';$<br>$z_{31} = 1,41 \cdot 10^{-5}, < 9^\circ 41'$  | а) $i_{1K3} = 6233, < 139^\circ 34';$<br>$i_{3K3} = 10688, < 200^\circ 53';$<br>б) $i_A = 99, < 179^\circ 1'; i_C = 101,$<br>$< 299^\circ 19'$        | а) $i_{1K2} = 147, < 202^\circ 32'; i_{3K2} = 7968,$<br>$< 182^\circ 21';$<br>б) $i_{1K2} = 4617, < 56^\circ 16';$<br>$i_{3K2} = 4822, < 236^\circ 18';$<br>в) $i_{1K2} = 7160, < 151^\circ 25';$<br>$i_{3K2} = 227, < 293^\circ 40'$ |
| 2<br>(рис. 2)     | $L = 200,$<br>$d_1 = 20,$<br>$d_2 = 200,$<br>$v = 10$  | $z_{11} = 2,545 \cdot 10^{-5}, < 58^\circ 35';$<br>$z_{13} = 0,2 \cdot 10^{-5}, < 58^\circ 50';$<br>$z_{33} = 2,236 \cdot 10^{-5}, < 92^\circ 10';$<br>$z_{31} = 1,554 \cdot 10^{-5}, < 5^\circ 54'$   | а) $i_{1K3} = 6123, < 143^\circ 59';$<br>$i_{3K3} = 10541, < 198^\circ 16';$<br>б) $i_A = 99, < 178^\circ 58';$<br>$i_C = 101, < 299^\circ 17'$       | а) $i_{1K2} = 154, < 205^\circ 23';$<br>$i_{3K2} = 7689, < 178^\circ 30';$<br>б) $i_{1K2} = 4175, < 53^\circ 41';$<br>$i_{3K2} = 4383, < 233^\circ 50';$<br>в) $i_{1K2} = 6825, < 151^\circ 16';$<br>$i_{3K2} = 236, < 293^\circ 14'$ |
| 3<br>(рис. 2)     | $L = 300,$<br>$d_1 = 20,$<br>$d_2 = 200,$<br>$v = 10$  | $z_{11} = 2,594 \cdot 10^{-5}, < 58^\circ 46';$<br>$z_{13} = 0,213 \cdot 10^{-5}, < 56^\circ;$<br>$z_{33} = 2,268 \cdot 10^{-5}, < 93^\circ 42';$<br>$z_{31} = 1,616 \cdot 10^{-5}, < 4^\circ 41'$     | а) $i_{1K3} = 6080, < 145^\circ 38';$<br>$i_{3K3} = 10483, < 197^\circ 21';$<br>б) $i_A = 99, < 178^\circ 56';$<br>$i_C = 101, < 299^\circ 16'$       | а) $i_{1K2} = 1560, < 206^\circ 27';$<br>$i_{3K2} = 7581, < 177^\circ 1';$<br>б) $i_{1K2} = 4014, < 52^\circ 38';$<br>$i_{3K2} = 4223, < 232^\circ 50';$<br>в) $i_{1K2} = 6692, < 151^\circ 7';$<br>$i_{3K2} = 239, < 283^\circ 6'$   |
| 4<br>(рис. 2)     | $L = 600,$<br>$d_1 = 20,$<br>$d_2 = 200,$<br>$v = 10$  | $z_{11} = 2,654 \cdot 10^{-5}, < 59^\circ 3';$<br>$z_{13} = 0,161 \cdot 10^{-5}, < 47^\circ 52';$<br>$z_{33} = 2,304 \cdot 10^{-5}, < 95^\circ 22';$<br>$z_{31} = 1,691 \cdot 10^{-5}, < 3^\circ 27'$  | а) $i_{1K3} = 6015, < 147^\circ 33';$<br>$i_{3K3} = 10404, < 196^\circ 25';$<br>$i_A = 99, < 178^\circ 53';$<br>$i_C = 101, < 299^\circ 16'$          | а) $i_{1K2} = 159, < 207^\circ 44';$<br>$i_{3K2} = 7460, < 175^\circ 23';$<br>б) $i_{1K2} = 3835, < 51^\circ 24';$<br>$i_{3K2} = 4044, < 231^\circ 40';$<br>в) $i_{1K2} = 6534, < 150^\circ 50';$<br>$i_{3K2} = 243, < 292^\circ 55'$ |
| 5<br>(рис. 3)     | $L = 140,$<br>$d = 50,$<br>$v = 10$                    | $z_{11} = 17,2 \cdot 10^{-5}, < 81^\circ 58';$<br>$z_{13} = 4,9 \cdot 10^{-5}, < 77^\circ 9'$  | а) $i_{1K3} = 953, < 111^\circ 32';$<br>$i_{3K3} = 1004, < 203^\circ 34';$<br>б) $i_{1K3} = 96, < 173^\circ 57';$<br>$i_{3K3} = 100, < 293^\circ 41'$ | б) $i_{1K2} = 242 + j585, i = 633, < 67^\circ 31';$<br>$i_{3K2} = -328 - j704 = 776,$<br>$< 244^\circ 58'$  |
| 6<br>(рис. 4)     | $L = 1000,$<br>$d = 250,$<br>$v = 10$                  | $z_{11} = 2,6275 \cdot 10^{-4}, < 88^\circ 5';$<br>$z_{13} = 1,314 \cdot 10^{-4}, < 88^\circ 5'$   | а) $i_{1K3} = 762, < 91^\circ 54';$<br>$i_{3K3} = 762, < 211^\circ 56';$<br>б) $i_{1K3} = 99, < 172^\circ 33';$<br>$i_{3K3} = 99, < 292^\circ 33'$    | б) $i_{1K2} = 262 + j527 = 588, < 63^\circ 31';$<br>$i_{3K2} = -358 - j637 = 731,$<br>$< 240^\circ 38'$   |
| 7<br>(рис. 5)     | $L = 600,$<br>$e = 200,$<br>$\delta = 20,$<br>$v = 11$ | $z_{11} = 2,84 \cdot 10^{-4}, < 87^\circ 4';$<br>$z_{13} = 1,005 \cdot 10^{-4}, < 88^\circ 54'$  | а) $i_{1K3} = 607, < 102^\circ 15';$<br>$i_{3K3} = 617, < 203^\circ 4';$<br>б) $i_A = 96, < 170^\circ 38';$<br>$i_C = 100, < 290^\circ 16'$           | б) $i_{1K2} = 172 + j362 = 401, < 64^\circ 37';$<br>$i_{3K2} = -267 - j473 = 543,$<br>$< 240^\circ 32'$   |
| 8<br>(рис. 6)     | $L = 600,$<br>$e = 200,$<br>$\delta = 20,$<br>$v = 10$ | $z_{11} = 3,006 \cdot 10^{-5}, < 76^\circ 33';$<br>$z_{13} = 3,155 \cdot 10^{-5}, < 67^\circ 1';$<br>$z_{33} = 1,903 \cdot 10^{-5}, < 48^\circ 44';$<br>$z_{31} = 1,582 \cdot 10^{-5}, < 63^\circ 32'$ | а) $i_{1K3} = 5249, < 84^\circ 33';$<br>$i_{3K3} = 7233, < 220^\circ 58';$<br>б) $i_A = 100, < 178^\circ 56';$<br>$i_C = 100, < 299^\circ 16'$        | а) $i_{1K2} = 118, < 172^\circ 34';$<br>$i_{3K2} = 5440, < 203^\circ 19';$<br>б) $i_{1K2} = 5750, < 59^\circ 26';$<br>$i_{3K2} = 5867, < 239^\circ 26';$<br>в) $i_{1K2} = 5842, < 132^\circ 44';$<br>$i_{3K2} = 170, < 299^\circ 24'$ |

Таблица 2

| $f=50$ Гц;<br>$\gamma=52,5 \times 10^6$ См/м | Токи в проводах при протекании симметричной системы токов $[i]=10^4$ А |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  | вариант 1  | вариант 2                              | вариант 3                              | вариант 4                              | вариант 5                              | вариант 6                              |
| 1-й провод (A)                               | $i_1 = 4363$<br>$\angle 124^\circ 22'$                                 | $i_1 = 4639$<br>$\angle 122^\circ 12'$ | $i_1 = 4740$<br>$\angle 121^\circ 24'$ | $i_1 = 4842$<br>$\angle 120^\circ 33'$ | $i_1 = 4568$<br>$\angle 114^\circ 23'$ | $i_1 = 5501$<br>$\angle 146^\circ 59'$ |
| 2-й провод (A')                              | $i_2 = 5442$<br>$\angle 160^\circ 31'$                                 | $i_2 = 5160$<br>$\angle 118^\circ 4'$  | $i_2 = 5064$<br>$\angle 118^\circ 45'$ | $i_2 = 4979$<br>$\angle 119^\circ 28'$ | $i_2 = 5229$<br>$\angle 124^\circ 53'$ | $i_2 = 5557$<br>$\angle 93^\circ 20'$  |
| 3-й провод (B)                               | $i_3 = 8156$<br>$\angle 313^\circ 7'$                                  | $i_3 = 8615$<br>$\angle 309^\circ 36'$ | $i_3 = 8816$<br>$\angle 308^\circ 6'$  | $i_3 = 9068$<br>$\angle 306^\circ 13'$ | $i_3 = 5427$<br>$\angle 349^\circ 17'$ | $i_3 = 5369$<br>$\angle 27^\circ 52'$  |
| 4-й провод (B')                              | $i_4 = 7293$<br>$\angle 54^\circ 43'$                                  | $i_4 = 7912$<br>$\angle 57^\circ$      | $i_4 = 8201$<br>$\angle 57^\circ 46'$  | $i_4 = 8577$<br>$\angle 58^\circ 32'$  | $i_4 = 4537$<br>$\angle 120^\circ 51'$ | $i_4 = 5708$<br>$\angle 333^\circ 54'$ |
| 5-й провод (C)                               | $i_5 = 5433$<br>$\angle 243^\circ 27'$                                 | $i_5 = 5171$<br>$\angle 241^\circ 37'$ | $i_5 = 5076$<br>$\angle 240^\circ 58'$ | $i_5 = 4987$<br>$\angle 240^\circ 21'$ | $i_5 = 5428$<br>$\angle 239^\circ 31'$ | $i_5 = 5624$<br>$\angle 213^\circ 6'$  |
| 6-й провод (C')                              | $i_6 = 4370$<br>$\angle 235^\circ 39'$                                 | $i_6 = 4626$<br>$\angle 238^\circ 7'$  | $i_6 = 4728$<br>$\angle 238^\circ 53'$ | $i_6 = 4834$<br>$\angle 239^\circ 31'$ | $i_6 = 4328$<br>$\angle 240^\circ 36'$ | $i_6 = 5478$<br>$\angle 267^\circ 38'$ |

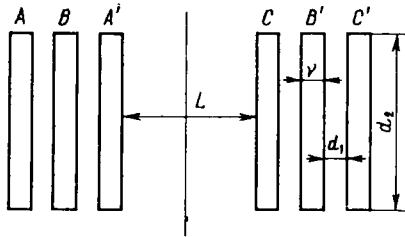


Рис. 2

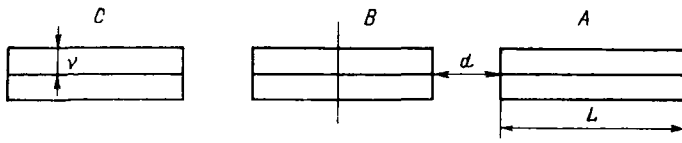


Рис. 3

связаны соотношениями [1]  $z_{11}=z_{33}=2z_{13}=2z_{31}=2z$ . При этом выражения (11) упрощаются и принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{-\sqrt{3}E \left[ z_C e^{j\frac{\pi}{6}} + z_B e^{-j\frac{\pi}{6}} + \sqrt{3} z l \right]}{z_A z_B + z_B z_C + z_C z_A + (z_A + z_B + z_C) 2z l + 3z^2 l^2}; \\ i_3 &= \frac{\sqrt{3}E \left[ z_B e^{-j\frac{\pi}{6}} - j z_A + \sqrt{3} z l e^{-j\frac{\pi}{3}} \right]}{z_A z_B + z_B z_C + z_C z_A + (z_A + z_B + z_C) 2z l + 3z^2 l^2}. \end{aligned} \right\} (12)$$

Применим формулы (9), (11), (12) для расчета токов короткого замыкания.

а) Трехфазное короткое замыкание симметричного токовода:

$$z_A = z_B = z_C = 0; \quad z_{11} = z_{33} = 2z_{13} = 2z_{31} = 2z,$$

где  $z$  — комплексное сопротивление 1 м шины каждой фазы [1]. Токи в фазах равны:

$$\left. \begin{aligned} i_{1\text{кз}} &= \frac{\sqrt{3}E \sqrt{3} z l}{3z^2 l^2} = -\frac{E}{z l}; \\ i_{3\text{кз}} &= \frac{\sqrt{3}E z \sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{3}} l}{3z^2 l^2} = -\frac{E}{z l} e^{j\frac{2\pi}{3}} = i_{1\text{кз}} e^{j\frac{2\pi}{3}}. \end{aligned} \right\} (13)$$

б) Двухфазное короткое замыкание симметричного токовода:

$$\left. \begin{aligned} z_A = z_C = 0; \quad z_B \gg z; \\ i_{1\text{кз}} &= \frac{-\sqrt{3}E \left[ z_B e^{-j\frac{\pi}{6}} + \sqrt{3} z l \right]}{2z_B z l + 3z^2 l^2} \approx \\ &\approx -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{E}{z l} e^{-j\frac{\pi}{6}}; \end{aligned} \right\} (14)$$

Для симметричной системы фазных э. д. с.

$$e_1 = E; \quad e_2 = E e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \quad e_3 = E e^{j\frac{2\pi}{3}}. \quad (10)$$

Формулы (9) упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{-\sqrt{3}E \left[ z_C e^{j\frac{\pi}{6}} + z_B e^{-j\frac{\pi}{6}} + (z_{33} e^{j\frac{\pi}{6}} - j z_{13}) l \right]}{z_A z_B + z_B z_C + z_C z_A + z_B (z_{33} + z_{11} - z_{13} - z_{31}) l + (z_A z_{33} + z_C z_{11}) l + (z_{11} z_{33} - z_{13} z_{31}) l^2}; \\ i_3 &= \frac{\sqrt{3}E \left[ z_B e^{-j\frac{\pi}{6}} - j z_A + (z_{31} e^{j\frac{\pi}{6}} - j z_{11}) l \right]}{z_A z_B + z_B z_C + z_C z_A + z_B (z_{33} + z_{11} - z_{13} - z_{31}) l + (z_A z_{33} + z_C z_{11}) l + (z_{11} z_{33} - z_{13} z_{31}) l^2}. \end{aligned} \right\} (11)$$

В тоководе, сечение которого симметрично относительно трех осей, сдвинутых на угол  $2\pi/3$ , параметры

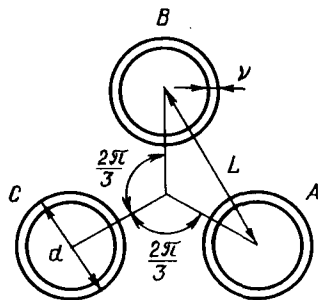


Рис. 4

$$I_{3K2} = \frac{\sqrt{3} E \left[ z_B e^{-j\frac{\pi}{6}} + \sqrt{3} z l e^{-j\frac{\pi}{3}} \right]}{2 z_B z l + 3 z^2 l^2} \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{E}{z l} e^{-j\frac{\pi}{6}} = -I_{1K2}.$$

в) Трехфазное короткое замыкание несимметричного токовода:

$$\begin{aligned} z_A = z_B = z_C = 0; \\ I_{1K3} &= \frac{-\sqrt{3} E \left( z_{33} e^{j\frac{\pi}{6}} - j z_{13} \right)}{(z_{11} z_{33} - z_{31} z_{13}) l}; \\ I_{3K3} &= \frac{\sqrt{3} E \left( z_{31} e^{j\frac{\pi}{6}} - j z_{11} \right)}{(z_{11} z_{33} - z_{31} z_{13}) l}. \end{aligned} \quad (15)$$

г) Двухфазное короткое замыкание несимметричного токовода:

$$\begin{aligned} z_A = z_C = 0; \quad z_B \gg z_{ik}; \\ I_{1K2} &= \frac{-\sqrt{3} E \left[ z_B e^{-j\frac{\pi}{6}} + \left( z_{33} e^{j\frac{\pi}{6}} - j z_{13} \right) l \right]}{z_B (z_{11} + z_{33} - z_{13} - z_{31}) l + (z_{11} z_{33} - z_{31} z_{13}) l^2} \approx \\ &\approx -\frac{\sqrt{3} E e^{-j\frac{\pi}{6}}}{(z_{11} + z_{33} - z_{13} - z_{31}) l}; \\ I_{3K2} &= \frac{\sqrt{3} E \left[ z_B e^{-j\frac{\pi}{6}} + \left( z_{31} e^{j\frac{\pi}{6}} - j z_{11} \right) l \right]}{z_B (z_{11} + z_{33} - z_{13} - z_{31}) l + (z_{11} z_{33} - z_{31} z_{13}) l^2} \approx \\ &\approx \frac{\sqrt{3} E e^{-j\frac{\pi}{6}}}{(z_{11} + z_{33} - z_{13} - z_{31}) l} = -I_{1K2}. \end{aligned} \quad (16)$$

д) Двухфазное короткое замыкание несимметричного токовода:

$$\begin{aligned} z_A = z_B = 0; \quad z_C \gg z_{ik}; \\ I_{1K2} &= \frac{-\sqrt{3} E \left[ z_C e^{j\frac{\pi}{6}} + \left( z_{33} e^{j\frac{\pi}{6}} - j z_{13} \right) l \right]}{z_C z_{11} l + (z_{11} z_{33} - z_{13} z_{31}) l^2}; \\ I_{3K2} &= \frac{\sqrt{3} E \left( z_{31} e^{j\frac{\pi}{6}} - j z_{11} \right)}{z_C z_{11} l + (z_{11} z_{33} - z_{13} z_{31}) l}. \end{aligned} \quad (17)$$

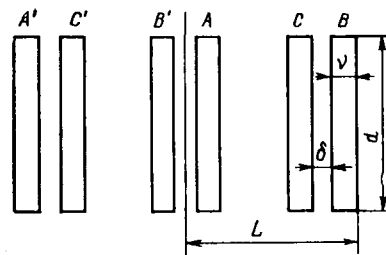


Рис. 5

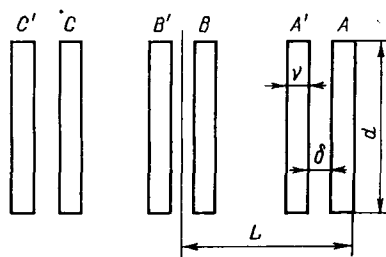


Рис. 6

е) Двухфазное короткое замыкание несимметричного токовода:

$$\begin{aligned} z_B = z_C = 0; \quad z_A \gg z_{ik}; \\ I_{1K2} &= \frac{-\sqrt{3} E \left( z_{33} e^{j\frac{\pi}{6}} - j z_{31} \right)}{z_A z_{33} l + (z_{11} z_{33} - z_{13} z_{31}) l^2}; \\ I_{3K2} &= \frac{\sqrt{3} E \left[ -j z_A + \left( z_{31} e^{j\frac{\pi}{6}} - j z_{11} \right) l \right]}{z_A z_{33} l + (z_{11} z_{33} - z_{13} z_{31}) l^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

В табл. 1, 2 приведены результаты расчета токов в трехфазных тоководах различных конструкций, показанных на рис. 2—6. Все тоководы длиной  $l=1000$  м подключены к симметричной трехфазной синусоидальной э. д. с.  $E=100$  В, частотой  $f=50$  Гц. Остальные исходные данные приведены в таблице для каждого варианта конструкции. Вычислялись токи в активной нагрузке  $z_A = z_B = z_C = 1$  Ом, а также в фазах при 3- и 2- фазных коротких замыканиях на концах шин.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тозони О. В. Расчет электромагнитных полей на вычислительных машинах. — Киев: Техніка, 1967. — 252 с.
2. Тозони О. В., Колерова Т. Я. Многофазные промышленные тоководы. — Киев: Наукова думка, 1965. — 368 с.

[15.08.86]

# Чувствительность линейных цепей к вариации структуры и параметров элементов

МЕЛЕШКИН В. Н., канд. техн. наук

Москва

Сложные электрические цепи, какими являются, в частности, современные электроэнергетические сети и системы, обычно функционируют в условиях регулярных или случайных изменений их структуры и параметров элементов (подключение или отключение источников и потребителей, скачкообразное изменение их мощностей и т. п.) [1]. Последствия таких вариаций можно прогнозировать расчетным путем, например, определяя режим работы цепи для каждого из возможных или наиболее вероятных сочетаний ее структуры и параметров элементов. Очевидно, что этот путь характеризуется достаточно большим объемом вычислений, выполнение которых может оказаться затруднительным даже при современном состоянии вычислительных методов и средств.

Более эффективным представляется подход, основанный на оценке изменений режима цепи, обусловленных вариацией ее структуры или параметров [2—3]. По-видимому, решающим здесь является то, что на практике существенное изменение структуры и параметров цепи столь же маловероятно, как и совпадение во времени множества случайных событий, а последствия незначительного количества вариаций могут быть оценены расчетным путем, естественно, при меньшем объеме вычислений.

Об этом, в частности, свидетельствует и известная из теории цепей теорема о взаимных приращениях (теорема вариации), которая позволяет определить приращение тока в одной из ветвей цепи, обусловленное приращением сопротивления или э. д. с. другой ее ветви, если заданы входная и взаимная проводимости обеих ветвей [4]. Однако в существующей формулировке область применения этой теоремы ограничена однократной вариацией сопротивления, причем только в одной из ветвей цепи, так как каждая такая вариация сопровождается изменением упомянутых входных и взаимных проводимостей.

В настоящей статье предпринята попытка обобщить теорему о взаимных приращениях на случай конечного числа вариаций параметров ветвей и структуры линейной цепи. Для упрощения доказательства ограничимся рассмотрением резистивных цепей, составленных из автономных и, возможно, зависимых источников и потребителей электроэнергии. Как известно, такие цепи могут быть представлены двумя эквивалентными каноническими схемами, имеющими одинаковую структуру, но различающимися составом элементов в ветвях. В одной из этих схем ( $RE$ -схема) ветви образованы резисторами и источниками э. д. с., соединенными последовательно, а в другой ( $GJ$ -схема) — параллельным соединением резисторов и источников тока, причем эквивалентность схем обеспечивается следующими соотношениями между параметрами их элементов:

$$R = G^{-1}; E = RJ,$$

где  $R$  и  $G$  — матрицы сопротивлений и проводимостей ветвей;  $E$  и  $J$  — матрицы э. д. с. и токов источников в ветвях.

Исходя из этого, режим работы рассматриваемой цепи можно определить — в соответствии с принципом

наложения [5] — по формулам

$$I = G_b E; U = R_b J, \quad (1)$$

где  $I$  и  $U$  — матрицы токов и напряжений ветвей;  $G_b$  и  $R_b$  — матрицы входных и взаимных проводимостей и сопротивлений ветвей:

$$\left. \begin{aligned} G_b &= K^t (K R K^t)^{-1} K; \\ R_b &= (R G_b - 1) R, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $K$  — матрица контуров цепи.

Необходимо заметить, что приведенные выше соотношения справедливы при условии, если положительные направления токов, напряжений и э. д. с. в ветвях эквивалентных схем выбраны одинаковыми и соответствуют ориентации ребер в структурном графе цепи.

Приведенные соотношения показывают, что изменения параметров и структуры цепи неизбежно отражаются на элементах матриц входных и взаимных проводимостей и сопротивлений, а также на параметрических матрицах источников энергии. Происходящие при этом изменения режима работы цепи можно оценить исходя из соотношений (1), например, следующим образом:

$$\Delta I = G_b \Delta E + \Delta G_b E + \Delta G_b \Delta E, \quad (3)$$

где  $\Delta E$  и  $\Delta G_b$  — матрицы приращений э. д. с. в ветвях и приращений входных и взаимных проводимостей ветвей;  $\Delta I$  — матрица соответствующих им приращений токов в ветвях.

Как видно, первое из слагаемых в правой части равенства (3) определяет результат вариации параметров источников, второе отражает последствия изменения входных и взаимных проводимостей, а последнее слагаемое проявляется при совмещении указанных вариаций.

Причиной изменения входных и взаимных проводимостей, как следует из соотношения (2), могут быть вариации параметров потребителей или структуры цепи. В первом случае для их оценки можно воспользоваться формулой (см. приложение 1):

$$\Delta G_b = -G_b \Delta R G_b, \quad (4)$$

где  $\Delta R$  — матрица приращений сопротивлений в ветвях;  $G_b$  — матрица входных и взаимных проводимостей цепи с учетом последствия этих приращений.

Из формулы (4) следует

$$G'_b = G_b + \Delta G_b = G_b (1 + \Delta R G_b)^{-1}. \quad (5)$$

В связи с полученным результатом необходимо сделать, по крайней мере, три замечания. Во-первых, формула (5) позволяет оценить последствия одновременного изменения сопротивлений в произвольном количестве ветвей. Однако при изменении параметров большинства потребителей в цепи ее использование оправдано только в тех случаях, когда невозможно применить исходное соотношение (2), например, если неизвестны или утрачены структура цепи и параметры потребителей.

Если же вариация параметров потребителей сводится к изменению сопротивлений лишь в нескольких ветвях цепи, то матрица  $\Delta R$  оказывается весьма разреженной

и по объему вычислений формула (5) становится предпочтительнее соотношения (2). В частности, размер матрицы, которая подвергается наиболее трудоемкой операции обращения, в формуле (2) определяется числом независимых контуров, а в формуле (5) — при блочном представлении разреженной матрицы — фактически соответствует количеству варьируемых ветвей в цепи.

Во-вторых, полученный результат действительно позволяет обобщить известную теорему вариации. Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить выражения (4) и (5) в соотношение (3), принять в нем  $\Delta E = 0$  и учесть первое из определений (1):

$$\Delta I = -G_b(1 + \Delta R G_b)^{-1} \Delta R I. \quad (6)$$

Как видно, приведенная матричная запись обобщенной теоремы вариации тождественна по форме известным соотношениям [5], позволяющим определить приращения тока, к примеру, в ветвях  $m$  и  $n$  при изменении сопротивления одной из них на  $\Delta r$ :

$$\Delta i_m = -\frac{\Delta r m g_{mm}}{1 + \Delta r m g_{mm}} i_m; \quad \Delta i_n = -\frac{\Delta r m g_{nm}}{1 + \Delta r m g_{mm}} i_m,$$

причем обе эти формулы непосредственно следуют из матричного соотношения (6). Однако преимущество предложенного обобщения состоит в том, что формула (6) дает возможность вычислить приращения токов, обусловленные одновременной вариацией сопротивлений в произвольном количестве ветвей.

Наконец, полученный результат позволяет определить условия взаимной компенсации последствий вариации параметров источников и потребителей в цепи. Для этого достаточно принять равным нулю левую часть равенства (3), а в правой его части объединить первое и третье слагаемые:

$$0 = G'_b \Delta E + \Delta G_b E,$$

откуда с учетом (4) и (1) следует:

$$\Delta E = \Delta R I. \quad (7)$$

Приведенное соотношение дает возможность вычислить приращения  $\Delta E$  э. д. с. источников энергии, необходимые для полной компенсации изменений на  $\Delta R$  сопротивления ветвей в цепи. Его можно рассматривать и как обобщение на произвольное количество вариаций известной теоремы о компенсации [5].

Вариацию структуры цепи в общем случае (при неизменных количестве ветвей и параметрах их элементов) естественно описать матрицей приращений  $\Delta K$ . Однако анализ соотношения (2) показывает, что оценить последствия подобного изменения структуры в приемлемой для практических расчетов форме не удастся. Поэтому ограничимся рассмотрением двух частных случаев (размыкания и замыкания отдельных ветвей) и выясним, как при этом изменяются входные и взаимные проводимости и сопротивления исходной цепи.

При такой постановке задачи исходные соотношения (1) целесообразно представить в виде блочных матриц:

$$\begin{bmatrix} I_p \\ I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{pp} & G_{pq} \\ G_{qp} & G_{qq} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_p \\ E_q \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} U_p \\ U_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{pp} & R_{pq} \\ R_{qp} & R_{qq} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_p \\ J_q \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где индексы  $p$  и  $q$  соответствуют неизменным и коммутируемым ветвям цепи.

В этих условиях замыкание  $q$  ветвей можно рас-

сматривать как результат предельной вариации параметров их элементов:

$$\Delta E = - \begin{bmatrix} 0 \\ E_q \end{bmatrix}; \quad \Delta R = - \begin{bmatrix} 0 & r_{pq} \\ r_{qp} & r_{qq} \end{bmatrix},$$

где  $r_{pq}$ ,  $r_{qp}$  и  $r_{qq}$  — блоки матрицы  $R$  сопротивлений исходной цепи.

Последствия такой вариации параметров могут быть оценены по соотношениям (3) — (5), однако указанный способ характеризуется достаточно большим объемом вычислений, если исходная цепь является необратимой.

Более эффективным представляется описание условий замыкания ветвей в виде матрицы приращений

$$\Delta U_q = -U_q, \quad (9)$$

которое позволяет для оценки его последствий воспользоваться непосредственно вторым из соотношений (8). Можно показать (см. приложение 2), что при этом напряжения неизменных ветвей получают приращения

$$\Delta U_p = -R_{pq} R_{qq}^{-1} U_q, \quad (10)$$

а матрица входных и взаимных сопротивлений этих ветвей изменяется на величину

$$\Delta R_{pp} = -R_{pq} R_{qq}^{-1} R_{qp}. \quad (11)$$

Аналогичным образом размыкание  $q$  ветвей целесообразно описать приращением

$$\Delta I_q = -I_q,$$

чтобы показать, используя первое из соотношений (8), что матрица входных и взаимных проводимостей неизменных ветвей получает при этом приращение

$$\Delta G_{pp} = -G_{pq} G_{qq}^{-1} G_{qp}. \quad (12)$$

Соотношения (11) и (12) можно рассматривать как обобщение на произвольные линейные цепи подобных по виду формул, описывающих изменение узловых проводимостей или контурных сопротивлений многополюсника при объединении двух его внешних узлов или контуров [6].

Разумеется, изложенные выше результаты могут быть распространены и на периодические, в частности,

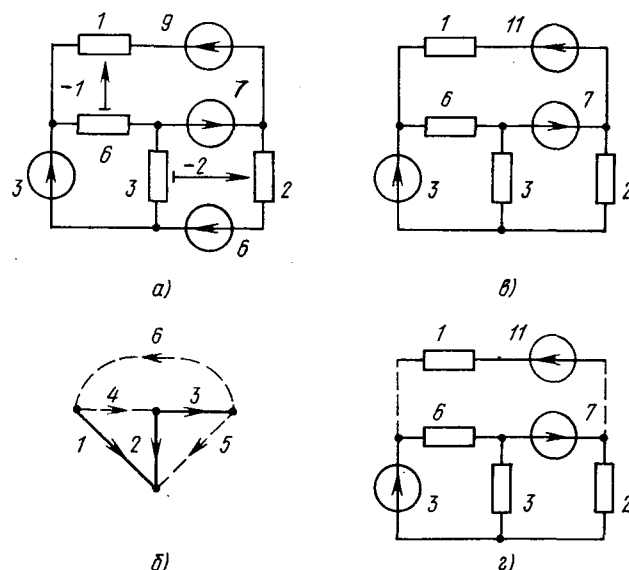


Схема (а) и граф (б) необратимой цепи, а также эквивалентная ей (в) и упрощенная (г) схемы обратимых цепей



гармонические режимы линейных цепей, если воспользоваться комплексным представлением гармонических функций времени и соответственно комплексными сопротивлениями и проводимостями ветвей.

В качестве примера рассмотрим электрическую цепь, схема и граф которой приведены на рисунке, а и б. Как видно, эта цепь является необратимой, содержащей наряду с автономными источниками э. д. с. и резисторами управляемые элементы. Параметры всех элементов (сопротивления в омах и э. д. с. в вольтах) указаны непосредственно на схеме, а порядковые номера ветвей и условно положительные направления токов в них заданы графом, причем первые три ветви схемы соответствуют дереву графа.

Параметрические и структурная матрицы рассматриваемой цепи имеют следующий вид:

$$E = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$K^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Соответствующие им матрицу входных и взаимных проводимостей и матрицу токов в ветвях вычисляем по формулам (2) и (1):

$$G_{\text{в}} = \frac{1}{78} \begin{bmatrix} 42 & -24 & 24 & 0 & -18 & 42 \\ -12 & 18 & -18 & 0 & -6 & -12 \\ 5 & -14 & 27 & 13 & 9 & 18 \\ -7 & 4 & 9 & 13 & 3 & 6 \\ -30 & 6 & -6 & 0 & 24 & -30 \\ 35 & -20 & 33 & 13 & -15 & 48 \end{bmatrix};$$

$$I = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Выясним, во-первых, как изменится режим цепи, например, при отсутствии управляемых элементов. Соответствующий переход от необратимой цепи к обратной можно представить как вариацию сопротивлений исходной цепи, причем матрицу приращений  $\Delta R$  в данном случае следует определить двумя ненулевыми элементами:

$$\Delta r_{52} = 2; \quad \Delta r_{64} = 1.$$

Последствия такой вариации параметров можно оценить, воспользовавшись формулами (5) и (6):

$$G_{\text{в}}' = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 35 & -14 & 9 & -5 & -21 & 30 \\ -14 & 20 & -18 & 2 & -6 & -12 \\ 9 & -18 & 27 & 9 & 9 & 18 \\ -5 & 2 & 9 & 11 & 3 & 6 \\ -21 & -6 & 9 & 3 & 27 & -18 \\ 30 & -12 & 18 & 6 & -18 & 36 \end{bmatrix};$$

$$\Delta I = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -31 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \\ 33 \\ -30 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что полученная матрица входных и взаимных проводимостей симметрична.

Во-вторых, определим, как следует изменить э. д. с. источников в ветвях обратимой цепи, чтобы скомпенсировать последствия состоявшейся вариации сопротивлений. Обратившись к формуле (7), найдем, что желаемый эффект может быть достигнут следующими приращениями э. д. с.:

$$\Delta E_5 = -6; \quad \Delta E_6 = 2.$$

Описанные выше вариации сопротивлений и э. д. с. отражены в схеме обратимой цепи (см. рисунок, в), которая эквивалентна исходной в том смысле, что токи ветвей в обеих цепях одинаковы.

Наконец, оценим последствия изменения структуры полученной обратимой цепи, выразившегося, к примеру, в размыкании ветви б. С этой целью разобьем матрицу  $G_{\text{в}}'$  на блоки, полагая  $p=5$  и  $q=1$ , и обратимся к формуле (12), которая позволяет вычислить приращения и, следовательно, полные значения входных и взаимных проводимостей для первых пяти ветвей:

$$\Delta G_{pp} = \frac{-1}{72} \begin{bmatrix} 25 & -10 & 15 & 5 & -15 \\ -10 & 4 & -6 & -2 & 6 \\ 15 & -6 & 9 & 3 & -9 \\ 5 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ -15 & 6 & -9 & -3 & 9 \end{bmatrix};$$

$$G_{pp}' = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 & -5 & -3 \\ -2 & 8 & -6 & 2 & -6 \\ -3 & -6 & 9 & 3 & 9 \\ -5 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ -3 & -6 & 9 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что в матрице  $G_{pp}'$  третья и пятая строки одинаковы, а элементы первой и четвертой строк различаются только знаками. Это означает, что соответствующие им ветви в результате размыкания ветви б оказались соединенными последовательно (см. рисунок, г).

Приложение 1. Вычисление матрицы приращений входных и взаимных проводимостей при вариации сопротивлений ветвей.

За исходное возьмем соотношение (2), представив его системой следующих трех равенств:

$$G_b = K^t G_h K; \quad (\text{П-1})$$

$$G_h = R_h^{-1}; \quad (\text{П-2})$$

$$R_h = K R K^t, \quad (\text{П-3})$$

где  $R_h$  — матрица контурных сопротивлений цепи [5].

Если матрица сопротивлений ветвей получает приращение  $\Delta R$ , то в соответствии с (П-3) матрица контурных сопротивлений изменяется на величину

$$\Delta R_h = K \Delta R K^t, \quad (\text{П-4})$$

а обратная ей матрица  $G_h$  получает приращение  $\Delta G_h$ , которое может быть определено на основании (П-2):

$$(\Delta R_h + R_h)(\Delta G_h + G_h) = 1.$$

Раскрывая в этом выражении скобки и упрощая его, в частности приводя подобные при  $\Delta G_h$ , находим:

$$\Delta G_h = -G_h^* \Delta R_h G_h, \quad (\text{П-5})$$

где  $G_h^* = G_h + \Delta G_h$ .

При этом  $G_b$  также получает приращение  $\Delta G_b$ , которое можно вычислить исходя из (П-1) по формуле

$$\Delta G_b = K^t \Delta G_h K.$$

Подставляя в приведенное выражение  $\Delta G_h$  из (П-5) и  $\Delta R_h$  из (П-4), находим:

$$\Delta G_b = -K^t G_h^* K \Delta R K^t G_h K,$$

откуда, с учетом (П-1), следует (4).

**Приложение 2.** Вычисление матрицы приращений входных и взаимных сопротивлений цепи при замыкании отдельных ветвей.

В качестве исходного примем второе из соотношений (8), представив его системой двух следующих мат-

ричных уравнений:

$$U_p = R_{pp} J_p + R_{pq} J_q; \quad (\text{П-6})$$

$$U_q = R_{qp} J_p + R_{qq} J_q. \quad (\text{П-7})$$

Условия (9) замыкания  $q$  ветвей можно реализовать такими приращениями  $\Delta J_q$  токов источников в этих ветвях, при которых напряжения на них становятся равными нулю:

$$0 = U_q + R_{qq} \Delta J_q,$$

откуда следует

$$\Delta J_q = -R_{qq}^{-1} U_q. \quad (\text{П-8})$$

Такая вариация параметров источников вызывает изменение напряжений  $\Delta U_p$  на  $p$  ветвях, которое в соответствии с (П-6) и (П-8) может быть определено непосредственно по формуле (10). При этом результирующие напряжения  $U_p'$  упомянутых ветвей, как видно из (П-6) и (П-7), оказываются зависимыми только от токов  $J_p$  источников энергии в этих ветвях:

$$U_p' = (R_{pp} - R_{pq} R_{qq}^{-1} R_{qp}) J_p = R_{pp}' J_p,$$

так что матрица  $R_{pp}$  входных и взаимных сопротивлений  $p$  ветвей при обрыве  $q$  ветвей действительно получает приращение, определяемое формулой (11).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пелисье Р. Энергетические системы/Пер. с франц. — М.: Высшая школа, 1982. — 568 с.
2. Жуков Л. А., Стратан И. П. Установившиеся режимы сложных электрических сетей и систем. Методы расчетов. — М.: Энергия, 1979. — 416 с.
3. Горушкин В. И., Пивоваров В. Ф. Корректировка матриц параметров электрической сети при коммутации. — Электричество, 1979, № 7, с. 11—15.
4. Основы теории цепей/Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. — М.: Энергия, 1975. — 752 с.
5. Теоретические основы электротехники/Под ред. П. А. Ионкина. — М.: Высшая школа, 1976, т. 1. — 544 с.
6. Сигорский В. П., Петренко А. И. Основы теории электронных схем. — Киев: Техника, 1967. — 609 с.

[06.06:86]

УДК 621.372.001.8

## О структурных элементах электрических цепей

МУСТАФА Г. М.

Москва

При разработке программ анализа многих классов электрических цепей можно обойтись представлением о структуре как о графе с соответствующими структурными матрицами. Однако в некоторых случаях такое ограничение приводит к усложнениям алгоритмов и снижению общности. В теории цепей наряду с графическими рассматриваются и структуры более общего вида [1—5]. Математическим понятием, занимающим место графов при рассмотрении таких структур, являются матроиды. Сопоставляемые графам матроиды составляют подкласс множества матроидов. Большинство понятий теории графов (контур, сечения, деревья и т. п. [6]) переносятся на матроиды общего вида, хотя возможность наглядного истолкования этих понятий теряется. Матрицы контуров и сечений графа заменяются матрицами координатизации матроидов [4].

Для теоретических и прикладных работ по анализу электроэнергетических систем, содержащих вентильные

коммутаторы, сложные многообмоточные трансформаторы и вращающиеся электрические машины переменного тока, характерно использование весьма общего понятия структуры, что обусловлено основными свойствами этих схем [7, 8]. Целесообразным, а иногда и необходимым, является использование такого общего понятия структуры и при построении программ машинного анализа схем электроэнергетики.

Полное описание цепей «графического» типа дает таблица инцидентности ветвей и узлов. Из нее общим формальным путем получается любая из необходимых в процедуре анализа структурных матриц. Такой же общий формальный путь необходим и при автоматизации анализа цепей обобщенной структуры. Для осуществления этого используются особые элементы схем, которые могут быть названы соединительными (структурными). Типичным соединительным элементом является идеальный трансформатор. Вместе с узлами идеальные транс-

форматоры используются для получения сжатых структурных матриц, которые являются матрицами координатизации матроидов и в общем случае не являются графическими [9]. Такова же и роль прочих соединительных элементов.

Настоящая статья посвящена рассмотрению тех общих свойств соединительных элементов, которые существенным образом сказываются на построении программ анализа схем преобразователей электрической энергии.

*Соединительные элементы первого рода.* Уравнения Кирхгофа

$$Bv = 0, \quad Qi = 0, \quad u = \text{col}(u_1, \dots, u_n), \quad i = \text{col}(i_1, \dots, i_n) \quad (1)$$

выделяются среди всевозможных систем уравнений с  $2n$  переменными тем, что они

- а) линейны;
- б) имеют ранг, равный числу ветвей, т. е. половине числа переменных;
- в) состоят из независимых подсистем для токов и напряжений;
- г) матрицы подсистем ортогональны;
- д) матрицы подсистем содержатся в некотором подмножестве множества унимодулярных матриц, для которых сами элементы и определители всех квадратных подматриц равны 0 или  $\pm 1$ .

Систему уравнений, удовлетворяющую первым четырем условиям, но не обязательно последнему условию, можно назвать системой почти графического типа. Соединительным элементом (СЭ) первого рода является совокупность ветвей с переменными  $u_\omega = \text{col}(u_{1\omega}, \dots, u_{n_\omega})$ ,  $i_\omega = \text{col}(i_{1\omega}, \dots, i_{n_\omega})$ , которые связаны уравнениями этого типа.

В соответствии с определением уравнения таких СЭ имеют вид

$$b_\omega u_\omega = 0, \quad q_\omega i_\omega = 0, \quad (2)$$

где матрицы коэффициентов с размерами  $k_\omega \times n_\omega$  и  $p_\omega \times n_\omega$  ортогональны и имеют вместе взятые ранг  $n_\omega$ :

$$b_\omega q_\omega^+ = 0, \quad \text{rang} \begin{bmatrix} b_\omega \\ q_\omega \end{bmatrix} = \text{rang } b_\omega + \text{rang } q_\omega = k_\omega + p_\omega = n_\omega. \quad (3)$$

Определение СЭ как совокупности двухполюсных ветвей не снижает общности, так как характеристики любого многополюсника могут быть отнесены к замещающей схеме из двухполюсных ветвей.

Матрицы однородной системы уравнений (2) определены лишь с точностью до невырожденного множителя, даже одному графу можно сопоставить различные матрицы контуров и сечений. При строгом подходе следовало бы говорить о паре двойственных матроидов и соответствующих подпространствах. Если совокупности напряжений и токов  $u, i$  рассматриваются как векторы  $n$ -мерного пространства  $R_n$ , то каждой строке матриц  $B, Q$  сопоставляется вектор сопряженного пространства (т. е. пространства линейных функционалов)  $\bar{R}_n$ , имеющего ту же размерность [10]. Линейные оболочки совокупностей векторов  $B, Q$  образуют подпространства в  $\bar{R}_n$ . Им соответствуют подпространства допустимых значений токов и напряжений, удовлетворяющих уравнениям связей и лежащих в  $R_n$ . Каждая структурная матрица представляет один из эквивалентных базисов соответствующего подпространства из  $\bar{R}_n$ . Такая геометрия

часть трактовка часто используется при рассмотрении цепей [12]. При анализе обычно можно обойтись понятием структурных матриц, если помнить, что каждая из них является только представителем класса эквивалентности.

Двухобмоточный идеальный трансформатор, описываемый уравнениями

$$[-\omega_2 \omega_1] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0; \quad [\omega_1 \omega_2] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = 0,$$

удовлетворяет определению СЭ. Таков же и любой многообмоточный трансформатор. Матрицы  $b_\omega, q_\omega$  идеального трансформатора имеют постоянные коэффициенты, которые, однако, могут отличаться от 0 и  $\pm 1$ . С другой стороны, любая пара матриц со свойствами, описываемыми (3), может быть реализована совокупностью идеальных трансформаторов, если только коэффициенты матриц постоянны.

Уравнения идеального вентиля или коммутатора, составленного из таких вентилях, записываются с помощью матриц, зависящих от вектора состояния:

$$b_\omega(S) u_\omega = 0, \quad q_\omega(S) i_\omega = 0.$$

Каждому замкнутому вентилю в векторе состояния

$$S = (s_1, \dots, s_{n_\omega})$$

сопоставляется единица, а каждому разомкнутому вентилю — нуль. Каждому ненулевому элементу  $S$  сопоставляется строка  $b_\omega(S)$  с единицей в той же позиции, а каждому нулевому элементу  $(S)$  — строка в  $q_\omega(S)$  с единицей в той же позиции, так что  $b_\omega(S), q_\omega(S)$  образуют вместе некоторую перестановку строк единичной матрицы. Условия ортогональности и полноты из определения СЭ здесь выполняются очевидным образом. Характерно, что размеры матрицы  $b_\omega(S), q_\omega(S)$  являются переменными. Ранг матрицы  $b_\omega(S)$  равен числу замкнутых, а ранг  $q_\omega(S)$  — числу разомкнутых вентилях. Например, для трехфазной нулевой схемы коммутатора, содержащей три вентиля, при  $S = (0 \ 1 \ 1)$  получается

$$b_\omega(S) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad q_\omega(S) = [1 \ 0 \ 0].$$

При анализе схем с трехфазными преобразователями и электрическими машинами иногда используют ортогональные координаты [7], которые вводятся уравнением

$$\text{col}(x_d, x_q, x_h) = \chi(\vartheta) \text{col}(x_a, x_b, x_c),$$

где

$$\chi(\vartheta) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \cos(\vartheta - \alpha) & \cos(\vartheta + \alpha) \\ -\sin \vartheta & -\sin(\vartheta - \alpha) & -\sin(\vartheta + \alpha) \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3},$$

причем  $\vartheta$  — угол поворота координат.

Матрицы коммутатора при этом преобразуются так:

$$b_\omega \rightarrow b_\omega \chi^t(\vartheta), \quad q_\omega \rightarrow q_\omega \chi^t(\vartheta).$$

В строке  $m$  матрицы  $b_\omega$  есть только одна единица, если ее позиция обозначена  $i(m)$ , то строка  $b_\omega, m$  перейдет в следующую:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} [\cos(\vartheta - i\alpha), -\sin(\vartheta - i\alpha), 1/\sqrt{2}].$$

Эта форма уравнений несколько сложнее исходной, однако лучше отображает трехфазную симметрию.

Для построения схем замещения систем с вращающимися машинами переменного тока целесообразно использовать идеальный фазорегулятор (ФР), получающийся при предельной идеализации соответствующего реального устройства [11].

Переменные шести ветвей ФР связаны между собой линейными алгебраическими уравнениями, описывающими поворот трехфазной системы величин:

$$[1_3 - \Lambda(\vartheta)] \begin{bmatrix} u_s \\ u_r \end{bmatrix} = 0, \quad [\Lambda^t(\vartheta) 1_3] \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} = 0,$$

где  $u_s = \text{col}(u_{sa}, u_{sb}, u_{sc}), \dots, i_r = \text{col}(i_{ra}, i_{rb}, i_{rc})$ ,

$$\Lambda(\vartheta) = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \cos(\vartheta + \alpha) & \cos(\vartheta - \alpha) \\ \cos(\vartheta - \alpha) & \cos \vartheta & \cos(\vartheta + \alpha) \\ \cos(\vartheta + \alpha) & \cos(\vartheta - \alpha) & \cos \vartheta \end{bmatrix},$$

$$1_3 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Фазорегулятор может рассматриваться как совокупность идеальных трансформаторов с переменными и согласованно изменяющимися коэффициентами трансформации. Матрицы ФР удовлетворяют требованиям полноты и ортогональности (3).

**Мощность соединительных элементов.** По закону сохранения энергии сумма мощностей ветвей цепи (включающая и источники) тождественно равна нулю:

$$p = \sum u_k i_k = u^t i = 0. \quad (4)$$

В соответствии с теоремой Теллегена [12] для выполнения последнего тождества существенно только выполнение законов Кирхгофа. Собственные характеристики ветвей несущественны, и (4) соблюдается при подстановке любой пары значений  $i, u$ , удовлетворяющих первому и второму уравнениям Кирхгофа. Действительно, с помощью контурного и узлового преобразований токи и напряжения цепи могут быть выражены через сокращенный базис:

$$i = B^t I, \quad u = Q^t U,$$

где  $I = \text{col}(I_1, \dots, I_k), U = \text{col}(U_1, \dots, U_p)$  —

векторы контурных токов и напряжений сечений.

Подстановка в выражение для мощности приводит к выражению

$$p = u^t i = U^t Q B^t I \equiv 0.$$

В этом доказательстве принадлежность матриц  $B, Q$  графу несущественна, используются только полнота системы (при переходе к  $I, U$ ) и ортогональность. Таким образом, в общем случае мощность связей, налагаемых СЭ, тождественно равна нулю.

Известно, что при нулевом значении полной мощности из условия выполнения закона Кирхгофа для напряжений вытекает выполнение его для рассматриваемого вектора токов и наоборот [12]. В действительности справедливо более сильное утверждение:

если для совокупности ветвей переменные  $u, i$  связаны линейными (условие а) и раздельными (условие в) уравнениями и, кроме того, выполняются следующие условия:

е) билинейный функционал — мощность связей — при всех допустимых токах и напряжениях имеет нулевые значения,

ж) ранг связей не ниже числа ветвей, то рассматриваемая совокупность является соединительным элементом первого рода.

При доказательстве необходимо показать, что из условий а, в, е, ж вытекают условия б, г об ортогональности и полноте. Действуя от противного, предположим, что

$$\text{rang} \begin{bmatrix} b_\omega \\ q_\omega \end{bmatrix} < n.$$

Тогда существует вектор  $f$ , ортогональный к  $b_\omega$  и  $q_\omega$  одновременно, так что значения  $u_\omega = f, i_\omega = f$  удовлетворяют уравнениям (2). Но при этом мощность

$$p = u_\omega^t i_\omega = f^t f = \|f\|^2$$

отличалась бы от нуля. Таким образом из условия е для нулевой мощности следует, что ранг связей не ниже числа ветвей, а это вместе с условием дает

$$\text{rang} \begin{bmatrix} b_\omega \\ q_\omega \end{bmatrix} = n_\omega. \quad (5)$$

Перейдем к ортогональности. Пусть  $\hat{q}_\omega, \hat{b}_\omega$  — ортогональные дополнения  $b_\omega, q_\omega$  соответственно, так что

$$b_\omega \hat{q}_\omega^t = 0, \quad q_\omega \hat{b}_\omega^t = 0, \quad \text{rang} \begin{bmatrix} b_\omega \\ \hat{q}_\omega \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} \hat{b}_\omega \\ q_\omega \end{bmatrix} = n_\omega. \quad (6)$$

Ранги введенных матриц определяются равенствами

$$\text{rang} \hat{q}_\omega = n - k_\omega, \quad \text{rang} \hat{b}_\omega = n - p_\omega. \quad (7)$$

Допустимые токи и направления могут быть выражены через сокращенный базис с помощью введенных ортогональных дополнений;

$$u_\omega = \hat{q}_\omega^t U_\omega, \quad i_\omega = \hat{b}_\omega^t I_\omega,$$

так что выражение для мощности будет иметь вид

$$p = U_\omega^t q_\omega b_\omega^t I_\omega.$$

Значения  $U_\omega, I_\omega$  произвольны, и поэтому мощность может быть везде равна нулю, только если

$$\hat{q}_\omega \hat{b}_\omega^t = 0. \quad (8)$$

Отсюда следует

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \hat{b}_\omega \\ q_\omega \end{bmatrix} = \text{rang} \hat{b}_\omega + \text{rang} q_\omega = 2n - (p_\omega + k_\omega) = n_\omega, \quad (9)$$

так что линейные оболочки векторов  $\hat{q}_\omega, \hat{b}_\omega$  образуют разложение пространства  $R_\omega$  на {прямую сумму подпространств. В силу этого и определения (6) подпространства  $b_\omega, q_\omega$  содержатся соответственно в подпространствах  $\hat{b}_\omega, \hat{q}_\omega$ , откуда с учетом (9) следует, что эти подпространства просто совпадают, а матрицы  $b_\omega, \hat{b}_\omega$  и  $q_\omega, \hat{q}_\omega$  эквивалентны. При этом ортогональность  $b_\omega, q_\omega$  вытекает из (8).

Доказанное утверждение может рассматриваться как определение СЭ, эквивалентное первоначальному данному. Согласно ему СЭ являются совокупностями ветвей с нулевой мощностью и раздельными уравнениями для токов и напряжений.

Последнее условие характеризует невырожденность; если оно не выполняется, то число ветвей рассматриваемого СЭ может быть снижено без изменения его воздействия на внешнюю цепь.

**Редукция структурных уравнений.** Рассмотрим цепь с  $n$  ветвями,  $n_\omega$  из которых принадлежит СЭ, так что число собственно ветвей составляет  $n_\sigma = n - n_\omega$ . Исходное описание структуры включает в себя таблицу соединений, из которой обычным образом получаются матрицы контуров и сечений графа. При соответствующей группировке переменных уравнения Кирхгофа записываются в виде

$$[B_\sigma B_\omega] \begin{bmatrix} u_\sigma \\ u_\omega \end{bmatrix} = 0, [Q_\sigma Q_\omega] \begin{bmatrix} i_\sigma \\ i_\omega \end{bmatrix} = 0. \quad (10)$$

Число связей, налагаемых этими уравнениями на  $2n$  переменных цепи, равно числу ветвей:  $k + p = n$ .

Уравнения соединительных элементов  $b_\omega u_\omega = 0$ ,  $q_\omega i_\omega = 0$  налагают дополнительно  $k_\omega + p_\omega = n_\omega$  связей на переменные цепи.

Уравнение каждой собственной ветви связывает пару ее переменных, например

$$d/dt(Li) = u, \quad d/dt(Cu) = i, \dots$$

Общее число этих уравнений равно  $n_\sigma$ . Таким образом получается полная система уравнений, содержащая

$$n + n_\omega + n_\sigma = 2n$$

уравнений относительно того же числа переменных.

Уравнения Кирхгофа (10) и уравнения СЭ (2) совпадают по типу и могут рассматриваться вместе как расширенная система структурных уравнений:

$$\begin{bmatrix} B_\sigma & B_\omega \\ & b_\omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_\sigma \\ u_\omega \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} Q_\sigma & Q_\omega \\ & q_\omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_\sigma \\ i_\omega \end{bmatrix} = 0. \quad (11)$$

Редукция расширенной системы заключается в том, что у нее выделяется совокупность уравнений, связывающая только переменные собственных ветвей. Осушается она с помощью алгоритма последовательного исключения Гаусса [10]. Он применяется так, что исключаются только переменные из столбцов  $\omega$ , а преобразованию подвергаются строки матриц [11] целиком.

По завершению редукции в столбцах  $\omega$  матриц (11) образуются нулевые строки на месте тех исходных строк, которые линейно зависимы от остающихся. Уравнения (11) приводятся к виду

$$\begin{matrix} k'' \\ k' \end{matrix} \begin{bmatrix} B_\sigma^* & B_\omega^* \\ B_\sigma' & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_\sigma \\ u_\omega \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{matrix} p'' \\ p' \end{matrix} \begin{bmatrix} Q_\sigma^* & Q_\omega^* \\ Q_\sigma' & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_\sigma \\ i_\omega \end{bmatrix} = 0. \quad (12)$$

Подматрицы  $B_\omega^*$ ,  $Q_\omega^*$  состоят каждая из независимых строк, так что первые уравнения (12) не накладывают никаких ограничений на значения переменных  $u_\sigma$ ,  $i_\sigma$ . Вторая подсистема связывает только переменные собственных ветвей;

$$B_\sigma u_\sigma = 0, \quad Q_\sigma i_\sigma = 0. \quad (13)$$

Прежде чем применять ее при анализе как систему структурных уравнений почти графического типа необходимо убедиться, что она обладает существенными свойствами этих уравнений, т. е. ортогональностью и

полнотой

$$B_\sigma^* (Q_\sigma^*)^t = 0, \quad \text{rang} \begin{bmatrix} B_\sigma^* \\ Q_\sigma^* \end{bmatrix} = n_\sigma. \quad (14)$$

В частном случае, когда исключаемый СЭ является вентильным коммутатором, это очевидно. Матрицы  $B_\sigma^*$ ,  $Q_\sigma^*$  оказываются при этом просто структурными матрицами частной схемы замещения, получаемой удалением разомкнутых и стягиванием замкнутых вентилях. Если исходная система является графической, то такой же окажется и редуцированная система. Соответствующую абстрактную формулировку дают леммы о том, что минор матроида сам является матроидом, а минор графического матроида остается графическим [4].

Пригодное для общего случая подробное доказательство, основанное на прямом использовании теорем о линейной зависимости, приведено в [9]. Ниже приводится упрощенный за счет привлечения понятия мощности вариант доказательства.

Ортогональность редуцированных матриц очевидным образом наследуется у исходной расширенной системы. Чтобы убедиться в том, достаточно записать поблочно произведение расширенных матриц из (12). В силу ортогональности сумма рангов  $B_\sigma^*$ ,  $Q_\sigma^*$  не превышает числа ветвей  $n_\sigma$ . Допустимыми напряжениями и токами являются те, при которых удовлетворяется расширенная система (11) в целом. На всех допустимых векторах нулевой является как общая мощность ветвей, так и мощность СЭ

$$p = u_\sigma^t i_\sigma + u_\omega^t i_\omega = 0, \quad p_\omega = u_\omega^t i_\omega = 0.$$

Следовательно, на допустимых векторах собственных ветвей общая мощность последних также является нулевой:

$$p_\sigma = p - p_\omega = 0.$$

Таким образом установлено, что отделяющаяся система обладает всегда набором свойств  $a$ ,  $e$ ,  $ж$ , т. е. имеет почти графический тип и может применяться при анализе в качестве структурных уравнений цепи.

**Применение СЭ и строение программ анализа.** Пусть рассматривается система, составленная из трансформаторов, вентильных коммутаторов и вращающихся машин переменного тока. Если не применять СЭ, то в схеме замещения трансформаторы и машины описываются как совокупности ветвей с недиагональными матрицами индуктивностей. Такой путь приемлем, пока не учитываются насыщения. В трансформаторах или машинах с разветвленной магнитной системой насыщаться могут различные участки магнитопровода; множеству возможных состояний его соответствует множество различных матриц взаимной индуктивностей, а условия перехода от одной из них к другой являются функциями состояния магнитной системы.

В этих условиях при анализе приходится параллельно с расчетом электрической цепи вести расчет магнитной [15]. Такое построение усложняет программы. Кроме того сужается общность, так как могут возникать вырожденные ситуации при устремлении магнитных сопротивлений некоторых ветвей к нулю или бесконечности. Применение таких СЭ, как идеальные трансформаторы, фазорегуляторы и вентили, позволяет обойти эти затруднения еще на стадии постановки задачи. Недиагональные матрицы параметров собственных ветвей в этом

случае не привлекаются вовсе. Взаимоиндукция отображается схемами из простых индуктивностей, идеальных трансформаторов и источников. Насыщение отображается с помощью простых индуктивностей и ключей; контроль состояния магнитной системы сводится к контролю напряжений и токов ветвей электрической цепи.

Рассмотренные выше СЭ различаются по характеру изменения коэффициентов их уравнений во времени. В соответствии с этим процедура исключения целесообразно реализовать как многоступенчатую (рис. 1). Идеальные трансформаторы являются стационарными элементами, и исключение их производится один раз на подготовительной стадии. Из матриц графа  $B$ ,  $Q$  и матриц трансформаторов  $b_{\omega}$ ,  $q_{\omega}$  при этом вырабатываются сжатые структурные матрицы  $B'$ ,  $Q'$ , имеющие почти графический тип (в частных случаях они могут быть и графическими, но в общем случае это не так [9, 14]). Идеальные вентили являются кусочно-стационарными: их уравнения изменяются только в изолированных точках временной оси; на межкоммутационных интервалах они неизменны. Соответственно исключение их произво-

поток рассеяния между ярами (ветвь 6), а потоки рассеяния между расположенными на одном стержне обмотками полагаются пренебрежимо малыми. Ветви 4 отображают стержни с примыкающими участками ярем. Магнитное сопротивление ненасыщенного стержня полагается нулевым, а насыщенного — равным фиксированной величине (остаточному сопротивлению). Сопротивления обмоток и вентилях полагаются пренебрежимо малыми.

Построение электрической схемы замещения трансформатора производится по принципу дуальности [16], соответствующий граф показан на рис. 2, б штрихами. Связь схемы замещения трансформатора с внешней схемой отображается идеальными трансформаторами 7 (рис. 2, в). Ветви 4 магнитной цепи, имеющие переменное сопротивление, при переходе к электрической цепи заменяются последовательным соединением остаточной индуктивности 4 и идеального вентиля 5. Полный граф схемы состоит из трех частей (рис. 2, в, г, д), которые взаимодействуют через идеальные трансформаторы. Расширенная контурная матрица имеет вид

|       | 1              | 2          | 7 <sup>(1)</sup> | 4              | 5              | 6 | 7 <sup>(2)</sup> | 3              | 7 <sup>(3)</sup> | 7 <sup>(4)</sup> |
|-------|----------------|------------|------------------|----------------|----------------|---|------------------|----------------|------------------|------------------|
| $G_1$ | -1<br>-1<br>-1 | 1<br><br>1 | 1<br><br>1<br>1  |                |                |   |                  |                |                  |                  |
| $G_2$ |                |            |                  | -1<br>-1<br>-1 | -1<br>-1<br>-1 |   | 1<br><br>1       |                |                  |                  |
|       |                |            |                  | 1 1 1          | 1 1 1          | 1 |                  |                |                  |                  |
| $G_3$ |                |            |                  |                |                |   |                  | 1<br><br>1     | 1<br><br>1       | -1<br>-1         |
|       |                |            |                  | 1<br><br>1     |                |   | -1<br>-1<br>-1   |                |                  |                  |
| ИТ    |                |            |                  | 1<br><br>1     |                |   |                  | -1<br>-1<br>-1 |                  |                  |
|       |                |            |                  | 1<br><br>1     |                |   |                  |                |                  | -1<br>-1<br>-1   |

дится заново каждый раз после переключения. При этом по матрицам  $B'$ ,  $Q'$  и вектору состояния вентилях  $S$  вырабатываются сжатые матрицы  $B''$ ,  $Q''$ , описывающие частную схему замещения. Фазорегуляторы являются нестационарными элементами, и их исключение производится заново для каждого рассматриваемого момента времени. При этом по матрицам ФР (которые вычисляются как функции узлов поворота), вырабатываются матрицы  $B'''$ ,  $Q'''$ , описывающие структуру почти графической цепи, составленной из простых ветвей  $L$ ,  $C$ ,  $R$ , ... . Анализ последней ведется далее обычным образом.

Для иллюстрации изложенного рассмотрим преобразования, связанные с СЭ, на примере трехфазного параллельного инвертора (рис. 2). Рассмотрение ведется на весьма идеализированном уровне. В магнитной цепи трансформатора (рис. 2, б) учитывается общий

После исключения идеальных трансформаторов получается первая сжатая контурная матрица:

|                | 1          | 2 | 4                    | 5                    | 6 | 3          |
|----------------|------------|---|----------------------|----------------------|---|------------|
| -1<br>-1<br>-1 | 1<br><br>1 |   | 1<br><br>1           | 1<br><br>1           |   |            |
|                |            |   | 1 -1<br>1 -1<br>-1 1 | 1 -1<br>1 -1<br>-1 1 |   | 1<br><br>1 |
|                |            |   | 1 1 1                | 1 1 1                | 1 |            |

Схема содержит две группы идеальных вентилях; исключение их удобно провести в две стадии. Пусть

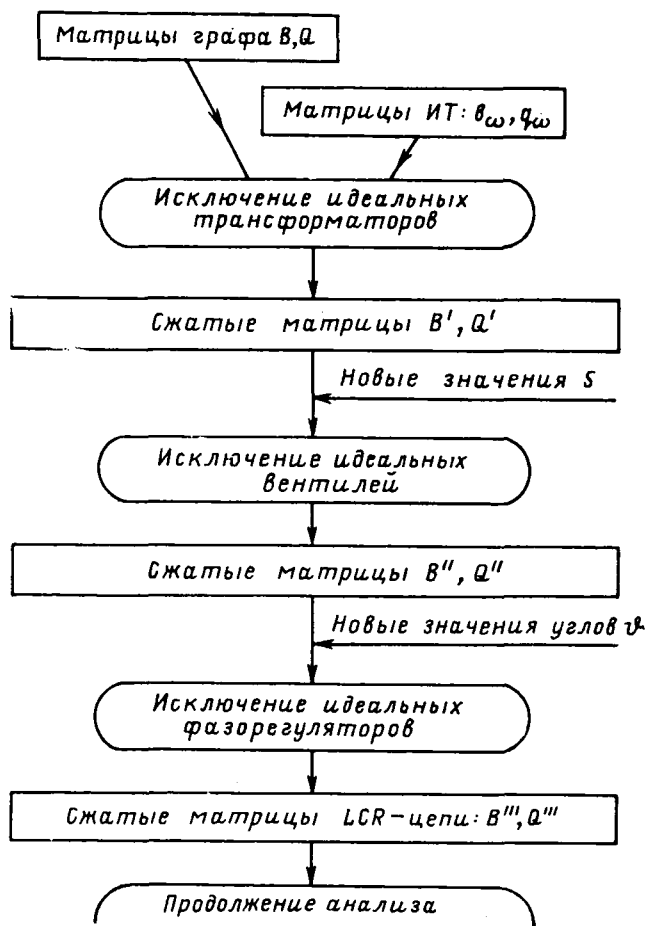


Рис. 1. Структура программы обработки соединительных элементов

замкнут вентиль 2 а, тогда после исключения остается

| 4 | 5 | 3     | 6 | 1  |
|---|---|-------|---|----|
| 1 | 1 |       | 0 | 1  |
| 1 | 1 | -1    | 0 | 1  |
|   | 1 | -1 -1 | 0 | 1  |
|   |   | 1 -1  | 1 | -3 |
|   |   | 1 1 1 |   |    |

В ненасыщенном состоянии трансформатора (все вентили 4 разомкнуты) контурная матрица частной схемы замещения образуется из последних двух строк:

$$B(100\ 000) = \begin{bmatrix} & 3 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Если насыщен стержень фазы а, сюда добавляется еще контур

$$B(100\ 100) = \begin{bmatrix} & 5 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & & & & 1 \\ & 1 & -1 & 1 & -3 \\ & 1 & 1 & 1 & \end{bmatrix}. \quad (16)$$

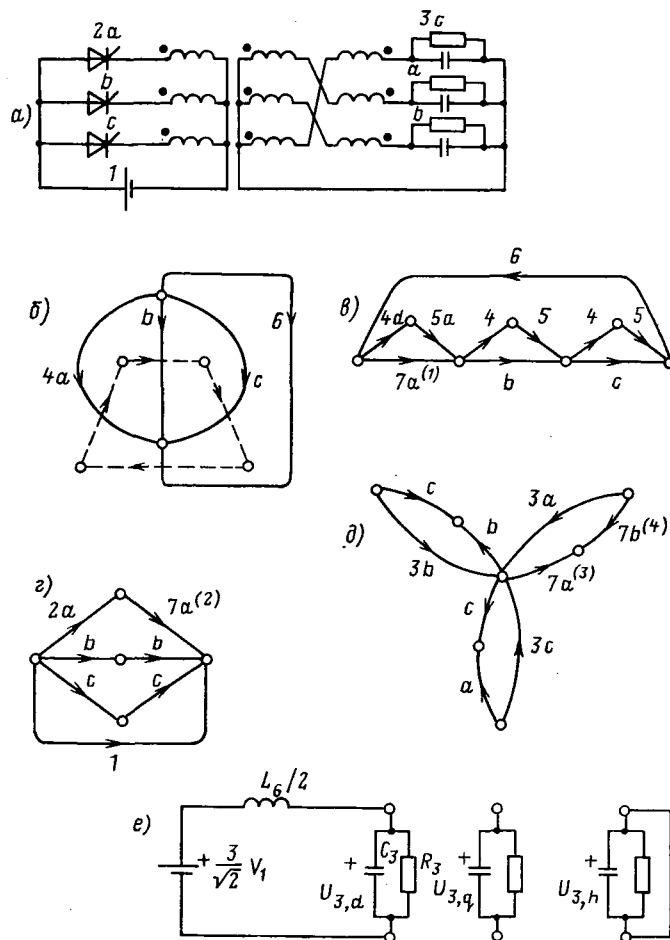


Рис. 2. Параллельный инвертор (а); упрощенная магнитная цепь (б); дуальная схема замещения трансформатора (в) графы подсхем (г, д); частная схема замещения в ортогональных осях в сост. 100000

При насыщении стержня фазы в

$$B(100\ 010) = \begin{bmatrix} & 5 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & & & 1 \\ & 1 & -1 & 1 & -3 \\ & 1 & 1 & 1 & \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Для всех остальных состояний вентилей контурные матрицы частных схем замещения получаются аналогично. Матрицы сечений, когда они нужны, могут получаться как ортогональное дополнение контурных матриц. Заметим, что в приведенных выше контурных матрицах опущены ветви — «мосты», не входящие ни в один из контуров.

Матрицы частных схем замещения не являются унитарными; например в (15) ветвь 1 входит с коэффициентом 3, а определитель в столбцах 3а, 3с равен 2. Тем более они не графические. Однако это не препятствует обычному применению их при формировании уравнений. В частных случаях, используя преобразования координат, матрицы (15), (16) можно привести к графическому типу и получить возможность иллюстрации рисунком. Например, если ветви 3 симметричны, то можно преобразовать их координаты так:

$$x_{dqh} = \chi(\pi/6) x_{abc}.$$



При этом (15) переходит в матрицу

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 6 & 1 \\ dqh & & \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \sqrt{2} & 1 & -3 \\ \hline \sqrt{3} & & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Далее меняем масштаб для ветвей 6, 1;

$$u_{6,\text{нов}} = 1/\sqrt{2} u_6, \quad i_{6,\text{нов}} = \sqrt{2} i_6, \quad u_{3,\text{нов}} = 3/\sqrt{2} u_3 \dots$$

При таком преобразовании переменных параметры ветвей также изменяются;

$$L_{6,\text{нов}} = L_6/2,$$

а последняя матрица переходит в матрицу контуров графа (рис. 2, е):

$$B(100\ 000) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 6 & 1 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array} \quad (18)$$

Ветвь 3q не входит ни в один из контуров, т. е. является мостом; ветвь 3h является петлей. Переход к ортогональным осям можно было произвести на уровне исходной расширенной системы структурных уравнений, и само исключение осуществляется исходя из преобразованной расширенной системы.

Уравнения и соединительные элементы гираторного типа. Соединительные элементы первого рода не исчерпывают всех элементов с нулевой мощностью. Гиратор [16] является «неэнергетическим» элементом, но уравнения его включают токи и напряжения:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{array} = 0,$$

или в общем виде

$$\begin{array}{|c|c|} \hline g_1 & g_2 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{c} u \\ i \end{array} = 0.$$

При анализе гираторных схем можно использовать последовательность действий, аналогичную описанной выше, а именно — формирование расширенной системы структурных уравнений, исключение СЭ и затем анализ на основе сжатой системы структурных уравнений. Расширенная система имеет вид

| $u_\sigma$ | $u_\omega$ | $i_\sigma$ | $i_\omega$ |
|------------|------------|------------|------------|
| $B_\sigma$ | $B_\omega$ |            |            |
|            |            | $Q_\sigma$ | $Q_\omega$ |
|            | $g_1$      |            | $g_2$      |

В результате редукции из нее определяется сжатая система вида

$$\begin{array}{|c|c|} \hline u_\sigma & i_\sigma \\ \hline G_1 & G_2 \\ \hline \end{array}.$$

Можно показать, что она обладает свойствами косимметричности и полноты:

$$G_1 G_2^t + (G_1 G_2^t)^t = 0;$$

$$\text{rang } G = n,$$

заменяющими для гираторных схем свойства ортогональности и полноты (3). Можно показать также, что эти свойства вытекают из условий пассивности и линейности связей и эквивалентны им.

Прямые аналоги гираторов в схемах электроэнергетики не встречаются, однако сопоставление с ними полезно для уяснения места рассмотренных СЭ среди всевозможных соединительных элементов цепей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Проблемы численного моделирования процессов в электрических цепях/К. С. Демирчян, Ю. В. Ракитский, П. А. Бутырин и др. Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1982, № 2.
2. Бутырин П. А., Гришкевич А. А. Минимальные структуры математических моделей электрических цепей. В кн.: Тезисы III международного симпозиума по теоретической электротехнике. — М.: МЭИ, 1985.
3. Minty G. J. On the axiomatic foundations of the theories directed linear graphs, electrical networks and network. — Programming Journal of Math. and Mechanics, 1966, vol. 15, N 3.
4. Айгнер М. Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1982.
5. Силомаа Э. С. Основы синтеза схемных структур соединений многополюсных цепей. — Таллин: ТПИ, 1983.
6. Сешу С., Рид М. Б. Линейные графы и электрические цепи. — М.: Высшая школа, 1971.
7. Крон Г. Применение тензорного анализа в электротехнике. — М—Л.: Госэнергоиздат, 1955.
8. Кениг Г., Блекуэлл В. Теория электротехнических систем. — М—Л.: Энергия, 1965.
9. Мустафа Г. М. Матрицы цепей с трансформаторами и алгебраизация методов из анализа. — Электричество, 1984, № 1.
10. Шилов Г. И. Математический анализ. Конечномерные векторные пространства. — М.: Наука, 1969.
11. Костенко М. П., Пиотровский Л. М. Электрические машины. Ч. 2. Машины переменного тока. — М—Л.: Энергия, 1965.
12. Пенфилд П., Спенс Р., Дюннер С. Энергетическая теория электрических цепей. — М.: Энергия, 1974.
13. Мустафа Г. М., Шаранов И. М. Представление трансформаторов в программе анализа тиристорных преобразователей. ЭП. Преобразовательная техника, 1977, № 2.
14. Duffin R. J. An analysis of the wang algebra of networks. — Trans. of the American Math. Soc., 1959, vol. 93, N 1.
15. Cherry E. C. The duality between interlinked electric and magnetic circuits and the formation of transformer equivalent circuits. — The Proc. of the Physical Soc., 1949, vol. 62, N 350 B.
16. Tellegen B. D. H. The gyrator — a new electric network element. — Philips Res. Rept., 1948, N 3.

[27.05.85]

# Анализ электромагнитных процессов в маловентильном асинхронном электроприводе с квазичастотным управлением

ГЛАЗЕНКО Т. А., доктор техн. наук, УСОЛЬЦЕВ А. А., канд. техн. наук, ХРИСАНОВ В. И., канд. техн. наук

Ленинград

Одной из задач, часто встречающихся при разработке асинхронного электропривода, является формирование пусковых и тормозных режимов, а также кратковременных режимов регулирования частоты вращения в небольшом диапазоне с последующей работой двигателя (АД) на естественной механической характеристике. Для этой цели в условиях массового применения более всего подходят маловентильные тиристорные преобразователи (МП) с естественной коммутацией (рис. 1), в которых используется способ квазичастотного управления.

Совершенствованию способов квазичастотного управления посвящено много работ в СССР и за рубежом, большая часть которых носит эмпирический характер, в то время как теоретические исследования проводятся либо очень приближенно методом гармонического анализа, либо сложными численными методами, требующими применения современных ЦВМ и развитого программного обеспечения. Поэтому целью статьи является развитие методов анализа установившихся электромагнитных процессов в системе МП — АД и разработка несложной методики их расчета, позволяющей проводить оценку эффективности и выбор для конкретной задачи того или иного способа управления тиристорами МП с погрешностью не более 30 %.

Анализ электромагнитных процессов целесообразно проводить на основе дифференциальных уравнений, описывающих систему МП—АД на отдельных интервалах постоянства структуры силовой цепи с использованием допущений, линеаризующих модель преобразователя и двигателя, т. е. АД представляет собой симметричную ненасыщенную машину, ротор которой вращается с постоянной угловой скоростью, а тиристоры являются

деленности моментов выключения тиристоров возможно только численными методами.

Для снижения затрат машинного времени и расширения класса используемых для расчета ЦВМ целесообразно использовать аналитические решения. Эти решения известны и получены ранее различными способами, однако их можно получить и матричными методами, представляющими определенный теоретический и практический интерес, так как в структуре и свойствах матриц коэффициентов дифференциальных уравнений различных режимов работы АД находят отражение многие свойства асинхронной машины. Кроме того, с помощью методов матричной алгебры значительно упрощается процесс получения дифференциального уравнения режима двухфазного включения в форме Коши, а также решение уравнений, описывающих симметричные режимы работы АД. Поэтому остановимся на матричных методах решения подробнее.

В режиме трехфазного включения работа АД описывается в координатах  $\alpha-\beta$ , неподвижных относительно статора, следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{p}{\omega} \|X\| = \|A_{\alpha\beta}^{(3)}\| \cdot \|X\|, \quad (1)$$

где  $p$  — символ дифференцирования;  $\omega$  — угловая частота сетевого напряжения;  $\|X\|^T = \|i_{s\alpha} i_{s\beta} i_{r\alpha} i_{r\beta} u_{s\alpha} u_{s\beta}\|$  — вектор переменных увеличенной размерности, включающий проекции векторов токов статора ( $i_{s\alpha}$ ,  $i_{s\beta}$ ) и ротора ( $i_{r\alpha}$ ,  $i_{r\beta}$ ) на оси координат, а также проекции вектора сетевого напряжения ( $u_{s\alpha}$ ,  $u_{s\beta}$ );

$$\|A_{\alpha\beta}^{(3)}\| = \begin{vmatrix} -\alpha'_s & \frac{(1-s)(1-\sigma)}{\sigma} & \frac{\alpha'_r x_m}{x_s} & \frac{(1-s)x_m}{x_s \sigma} & \frac{1}{x_s \sigma} & 0 \\ \frac{(1-s)(1-\sigma)}{\sigma} & -\alpha'_s & -\frac{(1-s)x_m}{x_s \sigma} & \frac{\alpha'_r x_m}{x_s} & 0 & \frac{1}{x_s \sigma} \\ \frac{\alpha'_s x_m}{x_r} & -\frac{(1-s)x_m}{x_r \sigma} & -\alpha'_r & -\frac{(1-s)}{\sigma} & -\frac{(1-\sigma)}{\sigma x_m} & 0 \\ \frac{(1-s)x_m}{x_r \sigma} & \frac{\alpha'_s x_m}{x_r} & \frac{1-s}{\sigma} & -\alpha'_r & 0 & -\frac{(1-\sigma)}{\sigma x_m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

идеальными ключами с нулевым сопротивлением в открытом и бесконечным сопротивлением в закрытом состоянии и переключения их происходят без потерь за бесконечно малый промежуток времени.

В этом случае задача анализа электромагнитных процессов в системе МП—АД без нулевого провода в основном сводится к решению дифференциальных уравнений АД в режимах трех- и двухфазного включений, а также отключенного состояния с учетом начальных условий на границах интервалов постоянства структуры силовой цепи. Решение этих уравнений для всего периода повторяемости процессов вследствие неопре-

— матрица коэффициентов, в которой  $\alpha'_s = \frac{r_s}{x_s \sigma}$ ;  $\alpha'_r = \frac{r_r}{x_r \sigma}$ ;

$\sigma = 1 - \frac{x_m^2}{x_s x_r}$ ;  $r_s$ ,  $r_r$ ,  $x_s$ ,  $x_r$  и  $x_m$  — параметры Т-образной схемы замещения АД;  $s$  — скольжение ротора АД.

Матрицу  $\|A_{\alpha\beta}^{(3)}\|$  можно представить в блочной форме записи в виде

$$\|A_{\alpha\beta}^{(3)}\| = \{\|A_{ij}\|\}, \quad (2)$$

блоки которой  $\|A_{ij}\|$  размером  $2 \times 2$ :

$$\|A_{11}\| = -\alpha'_s \|E\| - [(1-s)(1-\sigma)/\sigma] \|B\|; \quad \|A_{12}\| = \{\alpha'_r \|E\| -$$

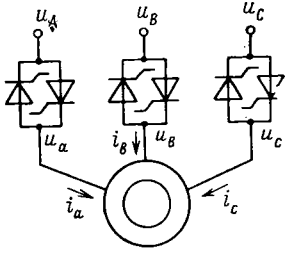


Рис. 1. Силловая схема простейшего маловентильного асинхронного электропривода

$$-[(1-s)/\sigma] \|B\| x_m/x_s;$$

$$\|A_{13}\| = [1/(x_s\sigma)] \|E\|; \|A_{21}\| = \{\alpha'_s \|E\| + [(1-s)/\sigma] \|B\| x_m/x_r;$$

$$\|A_{23}\| = -\alpha'_r \|E\| + [(1-s)/\sigma] \|B\|;$$

$$\|A_{33}\| = [-(1-s)/(x_m\sigma)] \|E\|;$$

$$\|A_{31}\| = \|A_{32}\| = \|0\|; \|A_{33}\| = \|B\|$$

являются функциями от матрицы

$$\|B\| = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для решения уравнения (1) нужно определить собственные значения и собственные векторы матрицы  $\|A_{\alpha\beta}^{(3)}\|$ . Для этого можно воспользоваться тем, что все ее блоки являются функциями от матрицы  $\|B\|$ , поэтому для их определения достаточно найти выражения для собственных значений и собственных векторов матриц  $\|B\|$  и  $\|A_m\|$ , где  $\|A_m\|$  — матрицы, элементы которых  $A_{ij}(\beta_m)$  получены путем замены матрицы  $\|B\|$  в выражениях для блоков  $\|A_{ij}\| = f_{ij}(\|B\|)$  ее собственными значениями  $\beta_m$ . Математическое доказательство корректности метода определения собственных значений и собственных векторов матрицы  $\|A_{\alpha\beta}^{(3)}\|$  через собственные значения и собственные векторы матриц  $\|B\|$  и  $\|A_m\|$  дано в приложении 1.

Порядок характеристического уравнения матриц  $\|A_m\|$  не зависит от выбора системы координат, равен трем и соответствует числу векторов переменных. Это объясняется тем, что блочная запись матрицы  $\|A_{\alpha\beta}^{(3)}\|$  соответствует векторному представлению уравнения (1) в виде

$$\frac{p}{\omega} \begin{bmatrix} \|i_s\| \\ \|i_r\| \\ \|u_s\| \end{bmatrix} = \{f_{ij}(\|B\|)\} \begin{bmatrix} \|i_s\| \\ \|i_r\| \\ \|u_s\| \end{bmatrix},$$

где переменные представлены векторами в соответствующих подпространствах, а  $\|B\|$  — некоторая обобщенная матрица, вид и размер которой определяются выбором системы координат в подпространствах переменных. Ранг этой матрицы равен двум и соответствует размерности подпространств векторов переменных.

В случае описания электромагнитных процессов в  $m$ -фазной симметричной системе координат при  $m > 2$  определитель матрицы  $\|B_m\|$  равен нулю и существует дефект матрицы, равный  $(m-2)$ . Поэтому любая матрица  $\|B_m\|$ , соответствующая  $m$ -фазной системе координат с помощью элементарных преобразований приводится к матрице  $\|B\|$ . В этом свойстве матриц  $\|B_m\|$  находит свое отражение принцип эквивалентности симметричной  $m$ -фазной машины двухфазной.

Характеристическое уравнение матриц  $\|A_m\|$  можно представить в виде

$$\det [\|A_m\| - \lambda \|E\|] = (\beta_m - \lambda) \{ [-\alpha'_s - (1-s)(1-\sigma)\beta_m/\sigma] \times$$

$$\times [-\alpha'_r + (1-s)\beta_m/\sigma] - [\alpha'_s + (1-s)\beta_m x_m/x_r] \times \\ \times [\alpha'_r - (1-s)\beta_m x_m/x_s] \} = 0. \quad (3)$$

Собственные значения и собственные векторы матрицы  $\|B\|$  равны  $-\beta_1 = j$ ;  $\beta_2 = -j$ ;  $\|x_1\|^T = \|1-j\|$ ;  $\|X_2\|^T = \|1+j\|$ . Подставляя  $\beta_1$  и  $\beta_2$  в (3), определим собственные значения матриц  $\|A_m\|$ , соответствующие собственным значениям матрицы  $\|A_{\alpha\beta}^{(3)}\|$ :

$$\lambda_{1,2} = \pm j; \lambda_{3,4} = \psi_2^{(3)} \pm j\chi_2^{(3)}; \lambda_{5,6} = \psi_3^{(3)} \pm j\chi_3^{(3)*}.$$

Из системы алгебраических уравнений

$$[A_{11}(\beta_m) - \lambda_{pm}] y_{1m} + A_{12}(\beta_m) y_{2m} + A_{13}(\beta_m) y_{3m} = 0;$$

$$A_{21}(\beta_m) y_{1m} + [A_{22}(\beta_m) - \lambda_{pm}] y_{2m} + A_{23}(\beta_m) y_{3m} = 0;$$

$$[A_{33}(\beta_m) - \lambda_{pm}] y_{3m} = 0$$

при всех значениях  $\lambda_{pm}$  определим координаты собственных векторов  $\|Y_{pm}\|$  матрицы  $\|A_m\|$ , по которым с учетом координат собственных векторов матрицы  $\|B\|$  найдем собственные векторы матрицы  $\|A_{\alpha\beta}^{(3)}\|$ , а затем фундаментальную матрицу решений уравнения (1) в виде  $\|\Phi^{(3)}(t)\| = [x_{ij}] \text{diag}\{e^{\lambda_1 t} \dots e^{\lambda_6 t}\}$ , где  $[x_{ij}]$  — матрица образованная из координат собственных векторов  $\|X_j\|$ . Тогда общее решение приобретает вид  $\|X\| = \|\Phi^{(3)}(t)\| \cdot \|I\|$ , где  $\|I\|^T = \|I_1 I_2 \dots I_6\|$ .

Выделяя из общего решения вещественное, найдем выражения для мгновенных значений токов в режиме трехфазного включения в виде

$$\left. \begin{aligned} i_{s\alpha}^{(3)} &= \sum_{k=1}^3 I_{sk}^{(3)} \exp[\psi_k^{(3)} t] \cos[\chi_k^{(3)} t - \varphi_{sk}^{(3)}]; \\ i_{s\beta}^{(3)} &= \sum_{k=1}^3 I_{sk}^{(3)} \exp[\psi_k^{(3)} t] \sin[\chi_k^{(3)} t - \varphi_{sk}^{(3)}]; \\ i_{r\alpha}^{(3)} &= \sum_{k=1}^3 I_{rk}^{(3)} \exp[\psi_k^{(3)} t] \cos[\chi_k^{(3)} t + \varphi_{rk}^{(3)}]; \\ i_{r\beta}^{(3)} &= \sum_{k=1}^3 I_{rk}^{(3)} \exp[\psi_k^{(3)} t] \sin[\chi_k^{(3)} t + \varphi_{rk}^{(3)}]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Дифференциальные уравнения, соответствующие электромагнитным процессам в АД в режиме двухфазного включения, можно представить в виде

$$\frac{p}{\omega} \|X\| = \|A_{\alpha\beta}^{(2)}\| \|X\|, \quad (5)$$

где  $\|X\|$  — вектор переменных, тождественный вектору в уравнении (1).

Матрицу коэффициентов  $\|A_{\alpha\beta}^{(2)}\|$  для случая, при котором ось отключенной обмотки статора АД совмещена с осью  $\alpha$  системы координат, можно получить преобразованием матрицы  $\|A_{\alpha\beta}^{(3)}\|$  с помощью метода симметричных составляющих. Для этого запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{p}{\omega} \|X_{pn}\| = \|A_{pn}^{(3)}\| \|X_{pn}\|,$$

Встречающиеся здесь и далее в тексте выражения для декрементов затухания  $\psi$ , частот вращения  $\chi$ , начальных фаз  $\varphi$  и амплитуд  $I$  составляющих токов статора и ротора с верхними индексами в скобках, соответствующими числу подключенных к источнику питания обмоток статора АД, представлены через параметры схемы замещения АД и проекции векторов переменных на оси координат  $\alpha-\beta$  в момент перехода к этому режиму работы и даны в приложении 2.

где  $\|X_{pn}\|^T = i_{sa}^p i_{sa}^n i_{ra}^p u_{sa}^p u_{sa}^n$  — вектор переменных, представленных составляющими прямой ( $p$ ) и обратной ( $n$ ) последовательности, а матрица  $\|A_{pn}^{(3)}\| = \|H\| \|A_{\alpha\beta}^{(3)}\| \|H\|^{-1}$  получена с помощью матрицы перехода к новой системе координат  $\|H\| = \text{diag}\{\|h\|\}$  и обратной матрицы  $\|H\|^{-1} = \text{diag}\{\|h\|^{-1}\}$ , в которых

$$\|h\| = \begin{vmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \|h\|^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{vmatrix}.$$

При отключении тиристора в фазе  $A$  возникают условия  $i_{sa} = i_{sa}^p + i_{sa}^n = 0$  и  $u_{sa} = u_{sa}^p + u_{sa}^n = 0$ . Проведая элементарные преобразования первых двух столбцов матрицы  $\|A_{pn}^{(3)}\|$  в соответствии с этими условиями, мы получим матрицу  $\|A_{pn}^{(2)}\|$ , после чего, переходя к координатам  $\alpha-\beta$ , получим матрицу  $\|A_{\alpha\beta}^{(2)}\|$  в виде

$$\|A_{\alpha\beta}^{(2)}\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_s & -(1-s)x_m/(x_s\sigma) & \alpha_r x_m/x_s & 0 & 1/(x_s\sigma) \\ 0 & -(1-s)x_m/x_r & -\alpha_r\sigma & -(1-s) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_s x_m/x_r & (1-s)/\sigma & -\alpha_r & 0 & -(1-\sigma)/(x_m\sigma) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

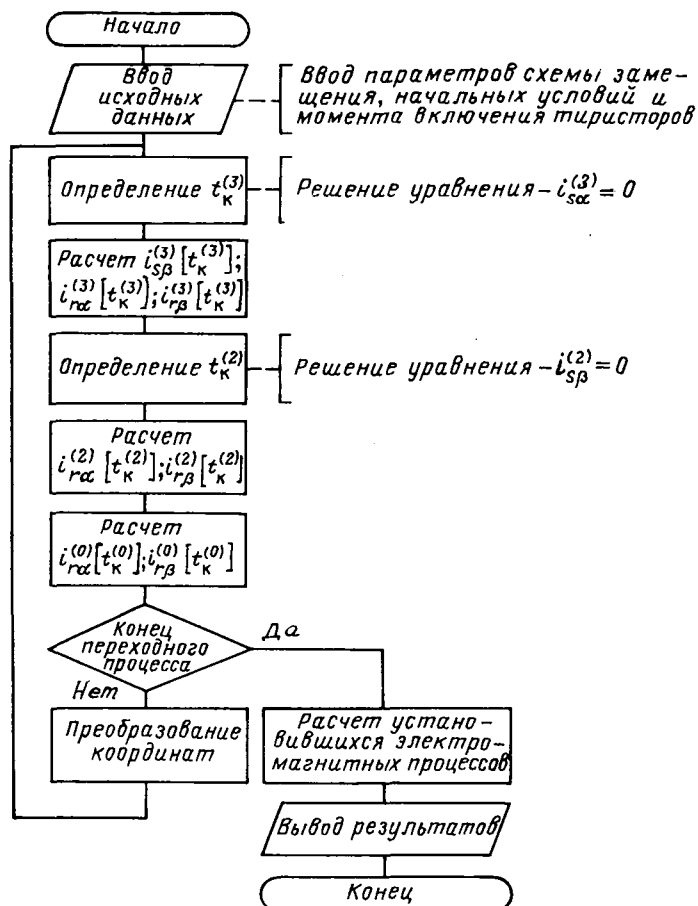


Рис. 2. Блок-схема программ расчета электромагнитных процессов в АД при координатном квазичастотном управлении тиристорами

Матрица  $\|A_{\alpha\beta}^{(2)}\|$  не может быть представлена в блочной форме так, чтобы все ее блоки были функциями от матрицы  $\|B\|$ , так как матрица  $\|B\|$  коммутирует только с симметрическими или кососимметрическими матрицами, главная диагональ которых состоит из одинаковых элементов. Поэтому собственные значения матрицы  $\|A_{\alpha\beta}^{(2)}\|$  находим из характеристического уравнения  $(\lambda^2+1)(\lambda^3+a'\lambda^2+b'\lambda+c')=0$  в виде  $\lambda_{1,2}=\pm j$ ,  $\lambda_{3,4}=\psi_2^{(2)}\pm j\chi_2^{(2)}$ ;  $\lambda_5=\chi_3^{(2)}$ .

Используя выражения для собственных значений матрицы  $\|A_{\alpha\beta}^{(2)}\|$ , мы можем определить координаты собственных векторов, найти общее и выделить вещественное решение уравнения (5) аналогично тому, как это было сделано для уравнения (1). В результате получим выражения для мгновенных значений токов:

$$\left. \begin{aligned} i_{sa}^{(2)} &= 0; \quad i_{s\beta}^{(2)} = \sum_{k=1}^3 I_{sk}^{(2)} \exp[\psi_k^{(2)} t] \sin[\chi_k^{(2)} t - \varphi_{sk}^{(2)}]; \\ i_{ra}^{(2)} &= \sum_{k=1}^3 I_{rk}^{(2)} \exp[\psi_k^{(2)} t] \cos[\chi_k^{(2)} t - \varphi_{rk}^{(2)}]; \\ i_{r\beta}^{(2)} &= \sum_{k=1}^3 I_{rk}^{(2)'} \exp[\psi_k^{(2)} t] \sin[\chi_k^{(2)} t - \varphi_{rk}^{(2)'}]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Дифференциальные уравнения отключенного состояния статора АД можно представить в матричной форме:

$$\frac{p}{\omega} \|X\| = \|A_{\alpha\beta}^{(0)}\| \cdot \|X\|,$$

где  $\|A_{\alpha\beta}^{(0)}\|$  — блочная матрица размером  $6 \times 6$ , все блоки которой нулевые, кроме  $\|A_{33}^{(0)}\| = \|A_{33}^{(3)}\|$  и  $\|A_{22}^{(0)}\| = -\alpha_r\sigma \|E\| + (1-s) \|B\|$ .

Матрица  $\|A_{\alpha\beta}^{(0)}\|$  представляет собой прямую сумму блоков  $\|A_{22}^{(0)}\| \oplus \|A_{33}^{(0)}\|$ , поэтому каждый из блоков может рассматриваться независимо от другого как самостоятельная матрица. В данном случае нас интересуют значения токов ротора, поэтому из выражения для блока  $\|A_{22}^{(0)}\|$ , учитывая его функциональную связь с матрицей  $\|B\|$ , определим  $\lambda_{1,2}$  через  $\beta_{1,2}$  следующим образом:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha_r\sigma [-(\beta_{1,2})^2] + (1-s) \beta_{1,2} = -\alpha_r\sigma \pm j(1-s).$$

Собственные векторы  $\|A_{\alpha\beta}^{(0)}\|$  соответствуют собственным векторам матрицы  $\|B\|$ , поэтому фундаментальную матрицу решений можно представить в виде

$$\|\Phi^{(0)}(t)\| = 1/\sqrt{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{vmatrix} \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\},$$

а затем, выделив вещественное решение, найти выражения для токов ротора:

$$\left. \begin{aligned} i_{ra}^{(0)} &= I_r^{(0)} \exp[\psi^{(0)} t] \cos[(1-s)\omega t + \varphi_r^{(0)}]; \\ i_{r\beta}^{(0)} &= I_r^{(0)} \exp[\psi^{(0)} t] \sin[(1-s)\omega t + \varphi_r^{(0)}]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Таким образом, методами матричной алгебры мы получили выражения мгновенных значений токов статора и ротора для всех возможных режимов работы системы МП—АД при отсутствии нулевого провода, которые позволяют разработать программу расчета энер-

гетических и механических характеристик при известном алгоритме управления тиристорами. Принцип построения программы заключается в том, что в пределах интервала постоянства структуры силовой цепи электромагнитные процессы в системе МП—АД рассчитываются по выражениям (4), (6), (7), а каждая из границ интервалов определяется либо из решения логических уравнений управления тиристорами (моменты включения тиристоров), либо из условия равенства нулю мгновенного значения фазного тока статора АД (моменты выключения тиристоров).

На первом этапе расчета в программу вводят параметры схемы замещения АД, начальные условия и алгоритм включения тиристоров в пределах периода повторяемости процессов  $T_n$ . Начальными условиями для расчета являются значения токов статора и ротора АД в момент первого включения тиристоров, частота вращения ротора и угол регулирования  $\alpha$ . Токи статора и ротора АД обычно выбираются нулевыми, после чего расчет установившегося режима производится до момента окончания переходного процесса, определяемого из условия равенства начальных условий в двух или более соседних периодах повторяемости.

Алгоритм включения каждого из тиристоров можно описать логическим выражением, связывающим сигналы модуляции и развертки, а также условие включения — положительное напряжение на аноде, определяемое как разность между напряжением сети и э. д. с., наводимой в отключенной обмотке статора АД ( $e = d\psi_s/dt$ ). Эти логические выражения являются функциями времени и образуют в общем случае систему логических уравнений, решение которой (определение интервалов времени, при которых эти выражения истинны) дает возможность рассчитать моменты включения тиристоров. Однако при инженерных расчетах можно пренебречь влиянием э. д. с. отключенной обмотки и условие включения определять по полярности напряжения сети.

Рассмотрим вариант блок-схемы программы расчета характеристик АД при квазичастотном управлении (рис. 2) на примере одного из способов (рис. 3). По этому способу [5] включение тиристоров производится одновременно во всех трех фазах непосредственно в момент совпадения полярностей фазных ( $u_A, u_B, u_C$ ) и модулирующих напряжений ( $u_{mA}, u_{mB}, u_{mC}$ ) или с некоторой задержкой на угол регулирования  $\alpha$ . Как следует из рис. 3, при отсутствии э. д. с. в отключенных обмотках одновременное включение трех тиристоров будет происходить при  $t = t_{0n}^{(3)} = [\pi/3 + \alpha + (n-1) \times 8\pi/3]/\omega$ , где  $n=1, 2, 3, \dots$  — целые положительные числа, соответствующие номеру периода повторяемости процессов  $T_{пн}$ . Вследствие фазового смещения напряжений сети первым выключится тиристор в фазе А (рис. 3), поэтому момент его выключения  $t_k^{(3)} = t_0^{(2)}$  можно определить из решения уравнения  $i_{sA}^{(3)} = 0$ , а затем по выражениям (4) рассчитать  $i_{sB}^{(3)}(t_k^{(3)})$ ,  $i_{sC}^{(3)}(t_k^{(3)})$  и  $i_{rB}^{(3)}(t_k^{(3)})$ , которые являются начальными условиями для следующего режима двухфазного включения.

Момент выключения тиристоров в фазах В и С  $t_k^{(2)} = t_0^{(1)}$  можно определить из решения уравнения  $i_{sB}^{(2)} = 0$ , после чего рассчитать токи ротора для этого момента времени по выражениям (6). Используя эти данные, можно по выражениям (7) определить токи ротора в момент начала следующего периода повторяемости  $t_{0(n+1)}^{(3)} = t_{0n}^{(3)} + T_{пн}$ , сравнить их значения со зна-

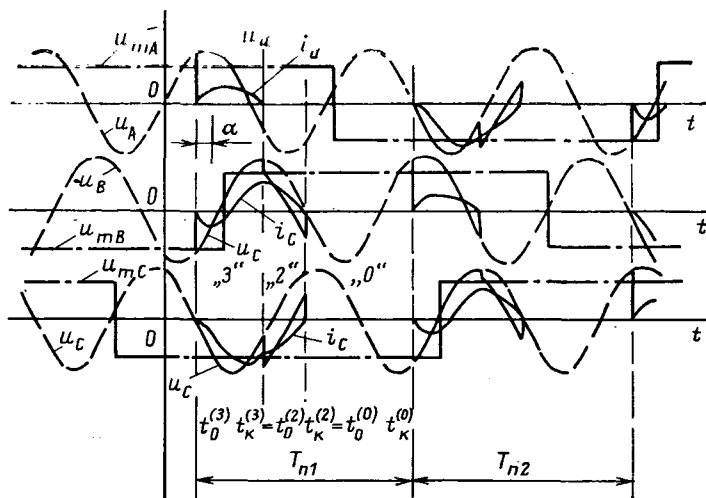


Рис. 3. Временные диаграммы фазных токов и напряжений в системе МП—АД при координированном квазичастотном управлении

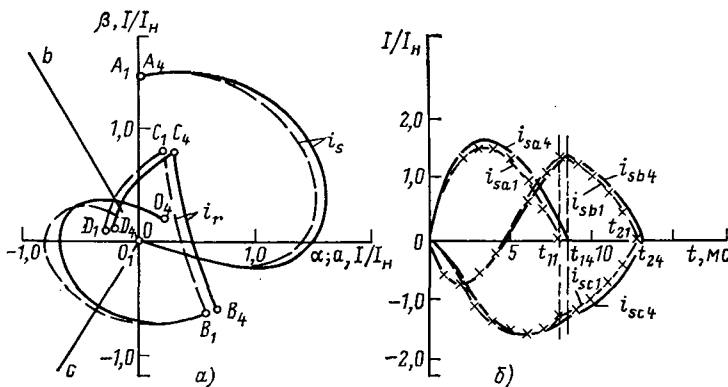


Рис. 4. Годографы векторов токов статора и ротора (а) и проекции вектора тока статора на оси фазных обмоток (б) в первом и четвертом периодах повторяемости электромагнитных процессов

чениями, полученными в конце предыдущего периода повторяемости, и если они совпадают с заданной точностью, рассчитать механические и энергетические характеристики АД.

Если же переходный процесс не закончен, то пользуясь тем, что в следующем периоде повторяемости электромагнитные процессы протекают в той же последовательности, но все векторы смещены в пространстве на угол  $2\pi/3$ , можно преобразовать систему координат, развернув оси на угол  $2\pi/3$ , и повторить расчет в новой координатной системе.

С помощью описанной программы были рассчитаны электромагнитные процессы в АД типа АОЛ-011/4 при управлении по способу [5]. На годографах векторов токов статора и ротора (рис. 4, а) для первого периода повторяемости и установившегося состояния режиму 3 соответствуют кривые ОА и ОВ, режиму 2 — АО и ВС, а режиму 0 — логарифмическая спираль CD. На рис. 4, б знаком «х» показаны точки экспериментальных значений фазных токов статора АД. Их отклонения от расчетных не превышают 15 %, что свидетельствует о хорошей сходимости результатов расчета и эксперимента.

**Приложение 1.** Пусть некоторая матрица  $\|A\|$  размером  $n(k \times k)$  может быть представлена в блочной

форме в виде  $\|A\| = \{\|A_{ij}\|\}$ , где каждый блок  $\|A_{ij}\| = f_{ij}\{\|B\|\}$  является некоторой функцией от матрицы  $\|B\|$  размером  $k \times k$ , имеющей собственные значения  $\beta_m$  и собственные векторы  $\|X_m\|^T = \|x_{1m} x_{2m} \dots x_{km}\|$ ;  $m = 1, 2, \dots, k$ .

Составим матрицу  $\|A_m\|$ , элементы которой получены путем замены матрицы  $\|B\|$  в выражениях для блоков матрицы  $\|A\|$  ее собственным значением  $\beta_m$ . Допустим, что матрица  $\|A_m\|$  имеет собственные значения  $\lambda_{pm}$  и собственные векторы  $\|Y_{pm}\|^T = \|y_{1p} y_{2p} \dots y_{np}\|$ , где  $p = 1, 2, \dots, n$ . Умножим матрицу  $\|A\|$  на вектор

$$\|Z_{pm}\| = \begin{pmatrix} y_{1p} \|X_m\| \\ y_{2p} \|X_m\| \\ \vdots \\ y_{np} \|X_m\| \end{pmatrix},$$

координаты которого являются произведением каждой из координат собственного вектора  $\|Y_{pm}\|$  матрицы  $\|A_m\|$  на собственный вектор  $\|X_m\|$  матрицы  $\|B\|$ . Получим

$$\|A\| \cdot \|Z_{pm}\| = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \|A_{1j}\| y_{jp} \|X_m\| \\ \sum_{j=1}^n \|A_{2j}\| y_{jp} \|X_m\| \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \|A_{nj}\| y_{jp} \|X_m\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n f_{1j}(\beta_m) y_{jp} \|X_m\| \\ \sum_{j=1}^n f_{2j}(\beta_m) y_{jp} \|X_m\| \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n f_{nj}(\beta_m) y_{jp} \|X_m\| \end{pmatrix} = \lambda_{pm} \begin{pmatrix} y_{1p} \|X_m\| \\ y_{2p} \|X_m\| \\ \vdots \\ y_{np} \|X_m\| \end{pmatrix}.$$

Таким образом, собственные значения  $\lambda_{pm}$  и собственные векторы  $\|Z_{pm}\|$  являются собственными значениями и собственными векторами матрицы  $\|A\|$ .

Приложение 2

Режим  
работы

Выражения для амплитуд, декрементов затухания, начальных фаз и частот вращения составляющих токов АД при различных режимах работы

3

$$\begin{aligned} I_{s1}^{(3)} &= U_m \sqrt{a_1^2 + b_1^2} / [x_s (c_1^2 + d_1^2)]; \quad I_{s2}^{(3)} = I_{r2}^{(3)} h_3 \sqrt{a_3^2 + b_3^2}; \quad I_{s3}^{(3)} = I_{r3}^{(3)} h_3 \sqrt{a_4^2 + b_4^2}; \quad I_{r1}^{(3)} = U_m (1 - \sigma) s / (x_m \sqrt{c_1^2 + d_1^2}); \\ I_{r2}^{(3)} &= \sqrt{A_2^2 + B_2^2}; \quad I_{r3}^{(3)} = \sqrt{A_3^2 + B_3^2}; \quad \psi_{2,3}^{(3)} = -(\alpha'_s + \alpha'_r) (1 \mp \gamma) / 2; \quad \chi_{2,3}^{(3)} = [(1 - s) \pm \zeta (\alpha'_s + \alpha'_r)] / 2; \quad \alpha_s = r_s / x_s; \quad \alpha_r = \\ &= r_r / x_r; \quad \gamma = [\sqrt{(V^2 + \beta^2 + \alpha)}] / 2; \quad \zeta = [(1 - s) \sqrt{(V^2 + \beta^2 - \alpha)}] / (2 \cdot |1 - s|); \quad \psi_1^{(3)} = 0; \quad \chi_1^{(3)} = \omega; \quad \alpha = 1 - \\ &- [4\alpha'_s \alpha'_r \sigma + (1 - s)^2] / (\alpha'_s + \alpha'_r)^2; \quad \beta = 2(1 - s) (\alpha'_s - \alpha'_r) / (\alpha'_s + \alpha'_r)^2; \quad \psi_{s1}^{(3)} = \arctg [(A_1 b_1 - B_1 a_1) / (A_1 a_1 + B_1 b_1)]; \quad \varphi_{r1}^{(3)} = \\ &= \arctg [(A_1 d_1 + B_1 c_1) / (A_1 c_1 - B_1 d_1)]; \quad \psi_{s2}^{(3)} = \arctg [(A_2 b_3 - B_2 a_3) / (A_2 a_3 + B_2 b_3)]; \quad \varphi_{r2}^{(3)} = \arctg (B_2 / A_2); \quad \varphi_{r3}^{(3)} = \\ &= \arctg (B_3 / A_3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{s3}^{(3)} &= \arctg [(A_3 b_4 - B_3 a_4) / (A_3 a_4 + B_3 b_4)]; \quad A_1 = U_m \cos [\omega t_0^{(3)}]; \quad B_1 = U_m \sin [\omega t_0^{(3)}]; \quad a_1 = \alpha_s (\alpha_r^2 + s_2) + \alpha_r (1 - \sigma) s; \\ b_1 &= (\alpha_r^2 + \sigma s^2); \quad c_1 = \alpha_s s + \alpha_r; \quad d_1 = \alpha_s \alpha_r - \sigma s; \quad a_2 = \alpha_s (\alpha_r - \alpha_s) - (1 - s)^2 (2 - \sigma) \sigma; \quad b_2 = (\alpha_s + \alpha_r) [\gamma \alpha_s + \zeta (1 - s) \sigma]; \\ a_3 &= a_2 + b_2; \quad c_2 = (1 - s) [2\alpha_s (1 - \sigma) + \alpha_r \sigma]; \quad d_2 = (\alpha_s + \alpha_r) [\gamma (1 - s) \sigma - \zeta \alpha_s]; \quad b_3 = c_2 + d_2; \quad a_4 = a_2 - b_2; \quad b_4 = c_2 - d_2; \\ h_1 &= 1 / [x_s (c_1^2 + d_1^2)]; \quad h_2 = (1 - \sigma) s / [x_m (c_1^2 + d_1^2)]; \quad h_3 = x_r / \{[\alpha_s^2 + (1 - s)^2 \sigma^2] 2x_m\}; \quad A_2 = f_3 - A_3; \quad B_2 = f_4 - B_3; \quad A_3 = \\ &= -(D_1 b_2 + D_2 d_2) / [2(b_2^2 + d_2^2)]; \quad B_3 = -(D_1 d_2 - D_2 b_2) / [2(b_2^2 + d_2^2)]; \quad D_1 = f_1 - f_3 a_3 - f_4 b_3; \quad D_2 = f_2 - f_3 b_3 + \\ &+ f_4 a_3; \quad f_1 = i_{s\alpha_0}^{(3)} - (A_1 a_1 + B_1 b_1) h_1 / h_3; \quad f_2 = i_{s\beta_0}^{(3)} - (A_1 b_1 - B_1 a_1) h_1 / h_3; \quad f_3 = i_{r\alpha_0}^{(3)} + (A_1 c_1 + B_1 d_1) h_2; \quad f_4 = i_{r\beta_0}^{(3)} + \\ &+ (A_1 d_1 + B_1 c_1) h_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{s1}^{(2)} &= U_m h_4 \sqrt{a_6^2 + b_6^2}; \quad I_{r1}^{(2)} = U_m h_5 \sqrt{a_5^2 + b_5^2}; \quad I_{r1}^{(2)'} = U_m h_6 \sqrt{a_7^2 + b_7^2}; \quad I_{s1}^{(2)} = U_m h_4 \sqrt{a_6^2 + b_6^2}; \quad I_{r1}^{(2)} = U_m h_5 \sqrt{a_5^2 + b_5^2}; \\ I_{r1}^{(2)'} &= U_m h_6 \sqrt{a_7^2 + b_7^2}; \quad I_{r3}^{(2)} = I_{r3}^{(2)'} = I_{s3}^{(2)} \sqrt{a_8^2 + b_8^2}; \quad \psi_1^{(2)} = 0; \quad \chi_1^{(2)} = \omega; \quad \psi_{2,3}^{(2)} = \mp (A + B) - a' / 3; \quad \chi_2^{(2)} = \sqrt{3} (A - B) / 2; \\ a' &= \alpha'_s + \alpha'_r + \alpha_r; \quad b' = \alpha'_r (2\alpha_s + \alpha_r) + (1 - s)^2; \quad c' = \alpha'_s [\alpha_r^2 + (1 - s)^2]; \quad \chi_3^{(2)} = 0; \quad A = \sqrt[3]{-q' / 2 + \sqrt{Q}}; \quad B = \\ &= \sqrt[3]{-q' / 2 - \sqrt{Q}}; \quad Q = (p' / 3)^3 + (q' / 2)^2; \quad p' = -(q')^2 / 3 + b'; \quad q' = 2(a' / 3)^3 - a' b' / 3 + c'; \\ \varphi_{s1}^{(2)} &= \arctg (A_1 a_6 - B_1 b_6) / (A_1 b_6 + B_1 a_6); \quad \varphi_{r1}^{(2)} = \arctg (A_1 a_5 - B_1 b_5) / (A_1 b_5 + B_1 a_5); \quad \varphi_{r1}^{(2)'} = \arctg (A_1 a_7 - B_1 b_7) / (A_1 b_7 + \\ &+ B_1 a_7); \quad \varphi_{s2}^{(2)} = \arctg (A_4 / B_4 - \pi); \quad \varphi_{s3}^{(2)} = 0; \quad \varphi_{r2}^{(2)} = \arctg (A_4 b_9 + B_4 a_9) / (A_4 a_9 - B_4 b_9); \quad \varphi_{r2}^{(2)'} = \arctg (A_4 a_{10} + \\ &+ B_4 b_{10}) / (A_4 b_{10} - B_4 a_{10}); \quad \varphi_{r3}^{(2)} = \arctg (b_8 / a_8 - \pi) = \varphi_{r3}^{(2)'}; \end{aligned}$$

| режим работы | Выражение для амплитуд, декрементов затухания, начальных фаз и частот вращения составляющих токов АД при различных режимах работы  |
|--------------|--|
| 2            | $a_5 = \alpha_r (1 + \sigma) + \alpha_s [s(2-s) - \alpha_r^2]; \quad b_5 = \alpha_r^2 + 2\alpha_s \alpha_r - s(2-s)\sigma; \quad c_5 = 2\alpha_r; \quad d_5 = s(2-s) - \alpha_r^2; \quad a_6 = a_5 c_5 - b_5 d_5; \quad b_6 =$ $= a_5 d_5 + b_5 c_5; \quad c_6 = \alpha_r; \quad d_6 = s(2-s); \quad a_8 = x_s \{ [\psi_3^{(2)}]^2 \sigma + \psi_3^{(2)} \omega (\alpha_s + \alpha_r) + \omega^2 \alpha_s \alpha_r \} / [x_m (1-s) \omega \psi_3^{(2)}]; \quad b_8 = x_s [\psi_3^{(2)} +$ $+ \alpha_s \omega] / [x_m \psi_3^{(2)}]; \quad a_9 = [\psi_2^{(2)}]^2 + \{ [\varphi_2^{(2)}]^2 + [\chi_2^{(2)}]^2 \} \omega (\alpha_s' + \alpha_r') + \psi_2^{(2)} \{ \omega^2 \alpha_s' \alpha_r' \sigma + [\chi_2^{(2)}]^2 \}; \quad b_9 = \chi_2^{(2)} \{ [\psi_2^{(2)}]^2 + [\chi_2^{(2)}]^2 -$ $- \omega^2 \alpha_s' \alpha_r' \sigma \}; \quad a_{10} = [\psi_2^{(2)}]^2 + [\chi_2^{(2)}]^2 + \alpha_s \omega \psi_2^{(2)}; \quad b_{10} = \chi_2 \alpha_s \omega; \quad h_4 = 1 / [x_s (a_5^2 + b_5^2)]; \quad h_5 = (1-s) \alpha_r h_6; \quad h_6 = (1-$ $- \sigma) / [x_m (a_5^2 + b_5^2)]; \quad h_7 = h_8 \sigma / [\omega (1-s)]; \quad h_8 = x_s / x_m \{ [\psi_2^{(2)}]^2 + [\chi_2^{(2)}]^2 \}; \quad A_1 = U_m \cos [\omega t_0^{(2)}]; \quad B_1 = U_m \sin [\omega t_0^{(2)}]; \quad g_1 =$ $= i_{\beta_0}^{(2)} + h_4 (A_1 a_6 - B_1 b_6); \quad g_2 = i_{r\alpha_0}^{(2)} - h_5 (A_1 b_5 + B_1 a_5); \quad g_3 = i_{r\beta_0}^{(2)} - h_6 (A_1 a_7 - B_1 b_7); \quad \Delta = h_7 h_8 (a_9 b_{10} + b_9 a_{10}) -$ $- h_8 a_8 b_{10} - h_7 b_8 b_8; \quad A_4 = [g_1 (h_8 a_8 b_{10} + h_7 b_8 b_8) + g_2 h_8 b_{10} + g_3 h_7 b_8] / \Delta; \quad B_4 = [g_1 (h_8 a_8 a_{10} - h_7 b_8 a_8) + g_2 (h_8 a_{10} - b_8) + g_3 (a_8 -$ $- h_7 a_8)] / \Delta$ |
| 0            | $i_r^{(0)} = \sqrt{[i_{r\alpha_0}^{(0)}]^2 + [i_{r\beta_0}^{(0)}]^2}; \quad \varphi_r^{(0)} = \arctg [i_{r\beta_0}^{(0)} / i_{r\alpha_0}^{(0)}]; \quad \psi^{(0)} = -\alpha_r \omega$  |

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фираго Б. И., Павлович С. Н. Исследование электромагнитного момента асинхронного двигателя, питаемого от НПЧ. — Изв. вузов. Энергетика, 1974, № 9.
2. Грико В. И., Ткачев В. М., Федоров А. В. Гармонический анализ кривых напряжения и тока простейших тиристорных преобразователей частоты с непосредственной связью при активно-индуктивной нагрузке. — Изв. вузов. Энергетика, 1972.

3. Глазенко Т. А., Хрисанов В. И. Полупроводниковые системы импульсного асинхронного электропривода малой мощности. — Л.: Энергоатомиздат, 1983.
4. Копылов И. П., Щедрин О. П. Расчет на ЦВМ характеристик асинхронных машин. — М.: Энергия, 1973.
5. А. с. № 1035767 (СССР). Способ управления асинхронным электроприводом / Т. А. Глазенко, А. А. Усольцев, В. И. Хрисанов. — Оpubл. в Б. И., 1983, № 30.

[04.07.85]

УДК 621.374.324

## Способы и устройства аналогового управления силовыми широтно-импульсными регуляторами на магнитно-транзисторных ключах

ЕРЕМЕНКО В. Г., канд. техн. наук

Московский энергетический институт

Ключевые транзисторные регуляторы напряжения и тока широко используются в преобразовательной технике и в системах электропитания для экономичного регулирования и управления потоками мощности между источниками электрической энергии, накопителями энергии и нагрузкой [1—5]. Для управления силовыми транзисторами регуляторов обычно используются схемы управления, содержащие задающий генератор, управляемый широтно-импульсный модулятор и предварительный усилитель мощности [5]. При низких напряжениях питания и при больших диапазонах изменения тока нагрузки мощность, потребляемая такой схемой управления, существенно возрастает и достигает 30 % мощности нагрузки.

Использование составных транзисторов для регулирования тока базы силовых транзисторов и увеличения коэффициента усиления транзисторных ключей приводит к увеличению падения напряжения на открытом транзисторном ключе до 1 В и к увеличению длительностей фронтов тока и напряжения. Использование для регулирования тока базы трансформаторов тока [3, 4] позволяет создать экономичные силовые регуляторы, имеющие повышенный к. п. д. при малых напряжениях и широких диапазонах изменения тока нагрузки.

В настоящее время такие схемы известны как за рубежом [2], так и в отечественной практике [3, 4]. Схемы

магнитно-транзисторных регуляторов благодаря наличию положительной обратной связи по току нагрузки, создаваемой трансформатором тока, отличаются простотой и надежностью работы, высокой перегрузочной способностью. В отличие от известных схем с импульсным управлением [5] эти схемы управляются постоянным напряжением, не требуют специального задающего генератора и широтно-импульсного модулятора. Применение этих схем целесообразно в системах, где не требуется постоянная частота модуляции и эта частота ограничена несколькими килогерцами.

На рис. 1 приведена электрическая схема одноконтурного широтно-импульсного регулятора [4]. Число витков обмотки  $W_2$  в 5—10 раз превышает число витков  $W_1$ , благодаря этому напряжение на обмотке  $W_1$  соизмеримо с падением напряжения на переходе эмиттер-коллектор транзистора  $T1$ . На выходе блока управления БУ имеется изменяющееся напряжение  $U_{\gamma}$ , регулирующее коэффициент заполнения импульсов  $K_s$  регулятора. Размагничивающая обмотка  $W_3$  трансформатора тока  $T$  имеет такое же число витков, как и  $W_1$ . В большинстве практических случаев  $W_1 = W_2 = 1 \div 2$  витка, а трансформатор тока выполнен на феррите марки 2000НМ1. Широтно-импульсный регулятор находится в режиме автоколебаний. В момент  $t_1$  (рис. 2) открывается транзистор  $UT1$  и ток нагрузки  $i_{\kappa 1}$ , протекая



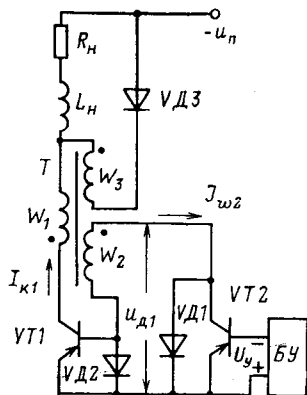
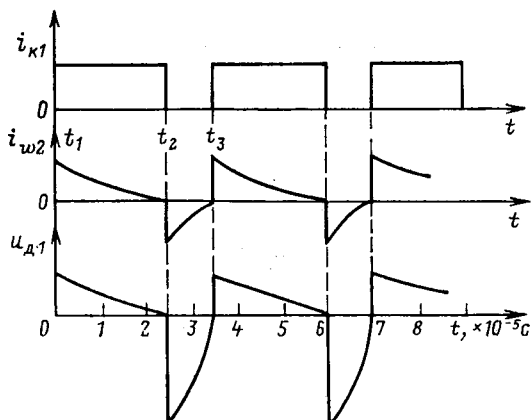


Рис. 1. Схема однотактного широтно-импульсного модулятора

Рис. 2. Осциллограммы токов и напряжений модулятора:  $m_i=100$  мкс/см;  $i_{k1}$  — ток коллектора VT1;  $m_{i1}=4$  А/см;  $i_{w2}$  — ток вторичной обмотки  $W_2$  трансформатора тока;  $m_{i2}=0,5$  А/см;  $U_{VD1}$  — напряжение на регулирующем транзисторе VT2,  $m_u=1$  В/см

через обмотку  $W_1$ , наводит э. д. с. в обмотке  $W_2$  такой полярности, что транзистор VT1 открыт током  $i_{w2}$ , протекающим по контуру «эмиттер-база VT1, обмотка  $W_2$ , диод VD1». Мгновенное значение тока  $i_{w2}$  определяется из следующего равенства:

$$i_{w2} = \frac{i_{k1} W_1 - H l}{W_2}, \quad (1)$$

где  $H$  — н. с. сердечника трансформатора тока, А·м<sup>-1</sup>;  $l$  — средняя длина силовой линии, м.

По мере намагничивания сердечника  $H$  возрастает, а  $i_{w2}$  уменьшается (рис. 2) и к моменту  $t_2$  сердечник трансформатора  $T$  насыщается, ток  $i_{w2}$  уменьшается до критического значения:

$$i_{w2 \text{ min}} = i_{k1} / h_{21a}. \quad (2)$$

Транзистор VT1 выходит из состояния насыщения, и напряжение на его переходе коллектор — эмиттер начинает нарастать, его ток начинает уменьшаться, а э. д. с. в обмотках трансформатора тока меняет знак, поскольку электромагнитная энергия сердечника начинает уменьшаться. В течение времени  $t_2 - t_1$  ток  $i_{k1}$  несколько нарастает (на рис. 1 из-за большого значения  $L_H$  он практически постоянный), а напряжение на диоде VD1  $U_{d1}$  уменьшается из-за уменьшения тока  $i_{w2}$ . При смене знака э. д. с. в  $W_2$  в момент  $t_2$  (рис. 1) транзистор VT1 запирается, ток нагрузки начинает протекать через VD3,  $w_3$  в прежнем направлении за счет э. д. с. самоиндукции в  $L_H$ .

При выключении VT1, на его коллекторе возникает кратковременный всплеск напряжения [на 30 % больший, чем напряжение источника питания  $U_H$  из-за рассеивания энергии, запасенной в одном витке  $W_3$  трансформатора тока  $T$ . Ток нагрузки, протекая через  $W_3$ , размагничивает сердечник, при этом по обмотке  $W_2$  также протекает ток обратного направления, определяемый равенством (1), в котором вместо  $i_{k1}$  нужно подставить значение тока через диод VD3. Время перемагничивания сердечника трансформатора тока определяется согласно закону электромагнитной индукции средним напряжением на его обмотке  $U_{w2}$  во время открытого и закрытого состояния; это напряжение равно:

$$U_{w20} = U_{э.бТ1} + U_{d1}. \quad (3)$$

Это напряжение зависит от тока базы (1), однако стабильность этого напряжения довольно высока, поскольку в  $U_{э.бТ1}$  и в  $U_{d1}$  большую долю составляет пороговое напряжение. Время открытого состояния

$$t_0 = \frac{\Delta B W_2 S_c}{U_{э.бТ1} + U_{d1}}, \quad (4)$$

где  $U_{э.бТ1}$  — напряжение на переходе эмиттер — база транзистора VT1;  $\Delta B$  — диапазон изменения индукции в магнитопроводе трансформатора тока;  $W_2$  — число витков вторичной обмотки;  $S_c$  — сечение магнитопровода;  $U_{d1}$  — напряжение на открытом диоде VD1.

Обычно  $\Delta B = 0,2 \div 0,3$  Тл для феррита марки 2000 НМ, для пермаллоя 79 НМ значение  $\Delta B = 1 \div 1,3$  Тл, для пермаллоя 50 НП  $\Delta B = 2 \div 2,5$  Тл. Во время закрытого состояния  $t_n = t_3 - t_2$  напряжение на обмотке  $W_2$  зависит от управляющего сигнала:

$$U_{w2n} = U_{d2} + U_{э.кТ2}. \quad (5)$$

Время паузы  $t_n$ , когда транзистор VT1 закрыт, равно

$$t_n = \frac{\Delta B W_2 S_c}{U_{d2} + U_{э.кТ2}}, \quad (6)$$

где  $U_{d2}$  — напряжение на открытом диоде VD2;  $U_{э.кТ2}$  — напряжение на переходе эмиттер — коллектор регулирующего транзистора VT2.

Регулируя напряжение  $U_{э.кТ2}$  изменением тока базы транзистора VT2, соединенного с блоком управления БУ, можно в данной схеме регулировать время запертого состояния  $t_n$  транзистора VT1. После размагничивания сердечника трансформатора тока процесс повторяется и схема будет находиться в режиме автоколебаний, так как в момент  $t_3$  транзистор VT1 опять включится. Схема сохраняет работоспособность и при чисто активной нагрузке — без диода VD3 и обмотки  $W_3$ , либо при активно-индуктивной нагрузке и с диодом VD3, но без обмотки  $W_3$ . В этом случае следует применять не пермаллой, а магнитомягкий феррит и после запираания VT1 сердечник размагничивается самопроизвольно до остаточной индукции  $B_m$ . При этом возрастает частота автоколебаний из-за уменьшения диапазона изменения индукции  $\Delta B$ . Схема не позволяет получить коэффициент заполнения импульса  $K_s = 1$ , поскольку даже при полностью запертом транзисторе VT2 некоторое небольшое время нужно на размагничивание сердечника и на рассасывание заряда в диоде VD1. Минимальное значение  $K_s$  также ограничено, поскольку даже при полностью открытом транзисторе VT2 напряжение  $U_{w2}$  не уменьшается до нуля.

Регулятор имеет хорошие энергетические характеристики при переменном токе нагрузки, поскольку согласно равенству (1) ток базы автоматически изменяется при вариации тока нагрузки. Частота автоколебаний регулятора непостоянна и рассчитывается следующим образом:

$$f = \frac{1}{t_0 + t_{\text{п}}} = \frac{U_{w20} U_{w2\text{п}}}{W_2 \Delta B S_c (U_{w20} + U_{w2\text{п}})} = \frac{(U_{\text{э.б}} + U_{VD}) (U_{VD} + U_{\text{э.кТ2}})}{W_2 \Delta B S_c (U_{\text{э.б}} + 2U_{VD} + U_{\text{э.кТ2}})} \quad (7)$$

Коэффициент заполнения импульсов

$$K_3 = \frac{t_0}{t_0 + t_{\text{п}}} = \frac{W_{w2\text{п}}}{U_{w20} + U_{w2\text{п}}} = \frac{U_{VD} + U_{\text{э.кТ2}}}{U_{\text{э.б}} + 2U_{VD} + U_{\text{э.кТ2}}} \quad (8)$$

Регулируемое напряжение  $U_{\text{э.кТ2}}$  может изменяться от  $U_{\text{э.к min}} = 0,1$  В до  $U_{\text{э.к max}} = 50$  В;  $U_{VD} = 0,6$  В;  $U_{\text{э.б}} = 1$  В. С учетом этих величин напряжений расчетные значения  $K_3$  будут следующие:

$$K_{3\text{ max}} = \frac{50,6}{52,2} = 0,97; \quad (9)$$

$$K_{3\text{ min}} = \frac{0,7}{2,3} = 0,3. \quad (10)$$

Практически получены значения  $K_{3\text{ max}} = 0,95$  и  $K_{3\text{ min}} = 0,25$ . Частота минимальна при  $K_{3\text{ min}}$ , т. е. при полностью открытом транзисторе VT2, диапазон изменения частоты невелик: 1100—1800 Гц во всем диапазоне изменения  $K_3$ . Диапазон регулирования  $K_3$  определяет диапазон регулирования тока нагрузки  $d$ . Практически достигнутый диапазон регулирования тока нагрузки  $d$  больше, чем рассчитанный диапазон регулирования  $K_3$ :

$$d = \frac{i_{\text{н max}}}{i_{\text{н min}}} = \frac{8,8\text{А}}{1,6\text{А}} = 4,6; \quad d = \frac{K_{3\text{ max}}}{K_{3\text{ min}}}.$$

Без обмотки  $W_3$  диапазон регулирования тока нагрузки возрастает:  $d = 6,7$ . При максимальном токе нагрузки  $i_{\text{н max}}$  ток базы и обмотки  $W_2$  выбирается равным

$$i_{w2\text{ max}} = \frac{i_{\text{н max}}}{h_{21\text{н}}} = \frac{i_{\text{н max}} W_1}{W_2}, \quad (11)$$

где  $h_{21\text{н}} = \frac{i_{\text{к}}}{i_{\text{б}}}$  — коэффициент передачи насыщенного транзистора в точке минимума мощности статических потерь  $P_{\text{т}} = U_{\text{э.к}} i_{\text{к}} + U_{\text{б.э}} i_{\text{б}} = \text{min}$ .

Для большинства типов транзисторов  $h_{21\text{н}} = 2-15$ ; соответственно этому току выбирается диод VD1. Амплитуда тока через диод VD2 и запертый транзистор VT2 также равна этому значению. Минимальный ток нагрузки при  $K_{3\text{ min}}$  в 4,5—6,7 раз меньше  $i_{\text{н max}}$ , он же определяет максимальный ток, протекающий через диоды VD2 и транзистор VT2 во время его полного открытия. Следовательно, ток базы транзистора VT2  $i_{\text{б2}}$  определяется так:

$$i_{\text{б2}} = \frac{i_{\text{н max}} W_1}{(4,5-6,7) h_{21\text{н}} W_2} \approx \frac{i_{\text{н max}}}{5 h_{21\text{н}}}. \quad (12)$$

Максимальная мощность управления, потребляемая при минимальном токе нагрузки,

$$P_{\text{у}} = U_{\text{б.э}} i_{\text{б2}} = \frac{U_{\text{б.э}} i_{\text{н max}}}{5 h_{21\text{н}}}. \quad (13)$$

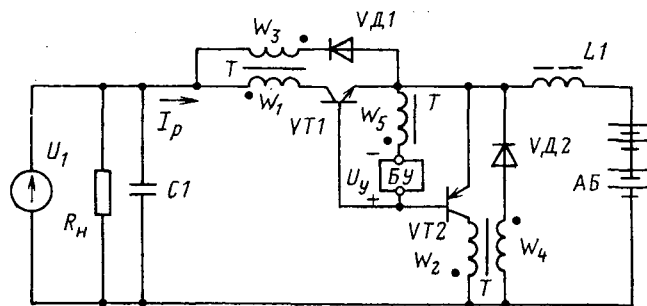


Рис. 3. Схема автономной системы электропитания

Коэффициент усиления по мощности

$$K_P = \frac{P_{\text{н}}}{P_{\text{у}}} = 5 \frac{u_{\text{н}}}{u_{\text{б.э}}} h_{21\text{н}}^2. \quad (14)$$

На рис. 3 приведена электрическая схема системы электропитания постоянного напряжения [3], выполненная по структурной схеме реверсивного ключевого регулятора напряжения [5]. В этой схеме применены магнитно-транзисторные ключи с аналоговым управлением, что также позволяет отказаться от задающего генератора, широтно-импульсного модулятора и предварительного усилителя мощности и существенно повысить к. п. д. при длительной работе на долевых нагрузках.

В этой схеме нерегулируемый источник питания  $U_1$  с параллельно подсоединенной нагрузкой  $R_{\text{н}}$  и сглаживающим конденсатором  $C_1$  соединен через силовой регулятор на транзисторах VT1, VT2 и диодах VD1, VD2, дроссель  $L_1$  с аккумулятором AB. Трансформатор тока  $T$  содержит четыре силовых обмотки  $W_1-W_4$  и базовую обмотку  $W_5$ .

Система работает следующим образом. Транзисторы VT1 и VT2 находятся в режиме периодических автоколебаний с переменной скважностью, зависящей от напряжения  $U_{\text{у}}$  на выходе блока управления. При заряде аккумуляторной батареи ток проходит по цепи обмотки  $W_1$  — транзистор VT1 — дроссель  $L_1$ . Ток обмотки  $W_5$  открывает транзистор VT1, а в дросселе  $L_1$  накапливается энергия, поскольку  $U_{\text{н}} > U_{\text{AB}}$ . При насыщении сердечника трансформатора тока  $T$  транзистор VT1 запирается, поскольку согласно (1) уменьшается его базовый ток. После записывания VT1 ток дросселя  $L_1$  протекает по диоду VD2, обмотке  $W_4$  и его значение начинает уменьшаться, поскольку он поддерживается за счет энергии, запасенной в дросселе  $L_1$ . При этом на базовой обмотке  $W_5$  возникает напряжение, открывающее VT2.

После насыщения сердечника трансформатора  $T$  схема переключается снова: закроется VT2 и откроется VT1. Скорость перемагничивания сердечника трансформатора тока определяется в одном направлении суммой управляющего напряжения выхода БУ и напряжения база — эмиттер силового транзистора, а в другом направлении — их разностью. В результате этого скважность переключения транзисторов VT1 и VT2 зависит от величины управляющего напряжения выхода блока управления и напряжение на нагрузке при соответствующем изменении управляющего напряжения поддерживается стабильным.

При разряде батареи ток проходит по цепи дроссель  $L_1$  — открытый транзистор VT2 — обмотка  $W_2$ , при этом энергия запасается в дросселе  $L_1$ , а э. д. с. обмотки  $W_5$

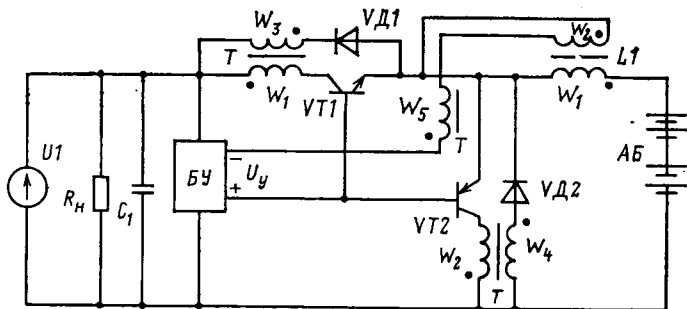


Рис. 4. Схема автономной системы электропитания с обратной связью по напряжению на дросселе

способствует открытию транзистора VT2. При насыщении сердечника трансформатора транзистор VT2 закрывается, а запасенная в дросселе  $L_1$  энергия через диод VD1, обмотку  $W_3$  будет передаваться в нагрузку, причем э. д. с. обмотки  $W_5$  сменит знак и будет открывать транзистор VT1. С целью расширения диапазона регулирования блок управления должен быть выполнен с реверсивным по знаку напряжению выходом, а с целью повышения устойчивости процесса автоколебаний дроссель  $L_1$  может быть снабжен вторичной обмоткой  $W_2$  (рис. 4), включенной последовательно с базовой обмоткой трансформатора тока  $W_5$  и выходом блока управления. Это позволяет уменьшить мощность блока управления, поскольку в этом случае основная мощность управления будет поступать из дросселя  $L_1$  через  $W_2$ .

Введение в базовый контур БУ —  $W_5$  —  $W_2$  напряжения обмотки дросселя  $W_2$  позволяет получить комбинированную положительную обратную связь в системе — как по току (обмотки  $W_5$ ), так и по напряжению на дросселе (обмотка  $W_2$ ). Напряжение этой обмотки невелико (1–2 В), но устойчивость автоколебаний существенно повышается, особенно в режиме малых токов дросселя и АБ, когда не хватает мощности трансформатора тока для четкого переключения транзисторов. Схема легко самовозбуждается, обладает высоким к. п. д., сердечник трансформатора тока перематывается от +В до –В, в нем отсутствует одностороннее насыщение — как во всех автоколебательных схемах.

При увеличении напряжения блока управления в схеме может наступить состояние длительного и полного открытия транзистора VT1 током блока управления. Автоколебания в этом случае в схеме прекращаются, а вся мощность управления транзистора VT1 будет поступать из блока управления.

На рис. 3 и 4 напряжение нагрузки больше напряжения максимально заряженной аккумуляторной батареи. В этом случае ток в шине регулятора  $I_p$  будет пульсирующий от нуля до значения тока дросселя. Это может приводить к чрезмерному увеличению емкости конденсатора  $C_1$ , который включен с целью ограничения пульсаций напряжения на нагрузке. В случае, если можно реализовать условие  $U_{AB} \geq U_n$ , то дроссель  $L_1$  можно подключить к нагрузке, а общую точку обмоток  $W_1$  и  $W_3$  трансформатора тока подсоединить к аккумулятору. В этом случае пульсирующий ток от нуля до  $I_{AB}$  будет протекать через аккумулятор, а в шине регулятора, соединенной с нагрузкой, ток будет существенно сглажен дросселем  $L_1$ . Этот режим позволяет обеспечить минимум установленной массы реактивных элементов регулятора — конденсатора  $C_1$  и дросселя  $L_1$ .

| Параметры | Расчетные соотношения для схем регуляторов                    |   |
|-----------|---|---|
|           | рис. 3  | рис. 4  |
| $t_0$     | $\frac{2B_m W_5 S_c}{U_{6.э} - U_y}$                          | $\frac{2B_m W_5 S_c}{U_{6.э} - U_y - (U_n - U_{AB}) \frac{W_2}{W_1}}$   |
| $t_n$     | $\frac{2B_m W_5 S_c}{U_{6.э} + U_y}$                          | $\frac{2B_m W_5 S_c}{U_{6.э} + U_y - U_{AB} \frac{W_2}{W_1}}$   |
| $f$       | $\frac{(U_{6.э} - U_y)(U_{6.э} + U_y)}{4B_m W_5 S_c U_{6.э}}$ | $\frac{[U_{6.э} - U_y - (U_1 - U_{AB}) \frac{W_2}{W_1}] \times}{2B_m W_5 S_c \times} \times [U_{6.э} + U_y - U_{AB} \frac{W_2}{W_1}] \times (2U_{6.э} - U_n \frac{W_2}{W_1})$ |
| $K_3$     | $\frac{U_{6.э} + U_y}{2U_{6.э}}$                              | $\frac{U_{6.э} + U_y - U_{AB} \frac{W_2}{W_1}}{2U_{6.э} - U_n \frac{W_2}{W_1}}$   |
|           | $U_n \geq U_{AB}$   | $U_n \leq U_{AB}$   |
| $C_1$     | $\frac{I_0 K_\Phi}{4\pi f U_n}$                               | $\left(\frac{3g_L}{4m_C}\right)^{4/7} \left(\frac{I_0}{f}\right)^{6/7} \left(\frac{K_\Phi}{M_3 B_s \Delta \pi}\right)^{3/7}$  |
| $L_1$     | $\frac{U_{AB} K_\Phi i}{4\pi f I_0}$                          | $\left(\frac{4m_C K_\Phi}{3g_L}\right)^{4/7} \frac{(M_3 B_s \Delta)^{3/7}}{4f^{8/7} I_0^{6/7} \pi^{11/7}}$  |

Расчетные соотношения для расчета  $C_1$  и  $L_1$  зависят от схемы; формулы для схем регуляторов сведены в таблицу.

В таблице приняты обозначения:

$I_0$  — ток дросселя (постоянная составляющая), А;  $K_2$  — коэффициент фильтрации — напряжения  $K_\Phi = U_n/U_{n\sim}$  и тока  $K_{\Phi i} = I_0/I_{0\sim}$ ;  $f$  — частота автоколебаний Гц;  $t_0$  — время открытого состояния VT1, с;  $t_n$  — время, запертого состояния VT1, с;  $U_{AB}$  — напряжение аккумуляторной батареи, В;  $U_{n\sim}$  — амплитуда пульсаций напряжения нагрузки, В;  $g_L$  — удельная масса дросселя, кг/м<sup>3</sup>;  $m_C$  — удельная масса конденсатора, кг/Ф;  $B_m$  — индукция насыщения магнитопровода дросселя и трансформатора тока, Тл;  $\Delta$  — плотность тока в обмотках, А·м<sup>-2</sup>;  $M_3 = 4\varphi_{ст}\varphi_{ок}K_0K_{ст}$  — коэффициент геометрии магнитопровода дросселя.

Полный диапазон регулирования  $K_3 = t_0/(t_0 + t_n) = 0-1$  для рис. 3 получается при реверсивном выходе блока управления  $U_y = \pm U_{6.э}$ , а для схемы рис. 4 такой полный диапазон регулирования  $K_3$  получается при более узком диапазоне изменения  $U_y$ :

$$U_y = U_{6.э} \div \left( U_{AB} \frac{W_2}{W_1} - U_{6.э} \right).$$

Мощность блока управления в обоих случаях одинакова и равна

$$P_y = U_y I_0 = \frac{I_0}{h_{21H}} U_{6.э}.$$

Коэффициент усиления по мощности

$$K_P = \frac{P_{AB}}{P_y} = \frac{U_{AB}}{U_{6.9}} U_{21H}.$$

Данные схемы могут использоваться в замкнутых системах автоматического регулирования или стабилизации среднего напряжения на нагрузке. В этом случае сигнал обратной связи подается на блок управления. В простейшем случае параметрической стабилизации напряжения на нагрузке  $U_H$  (для рис. 3 без обратной связи по напряжению на нагрузке, а с регулировкой по основному возмущению — изменению напряжения питания) достаточно базу транзистора VT2 соединить через стабилитрон и резистор с минусом  $U_H$ . В этом случае при  $U_H < U_{CT}$  на нагрузку подается  $U_H$  практически полностью, а при  $U_H > U_{CT}$  коэффициент передачи напряжения  $U_H$  на нагрузку  $K_3$  начинает уменьшаться:  $U_H = K_3 U_H$  — тем самым напряжение на нагрузке подерживается постоянным.

Для ускорения процесса коммутации можно рекомендовать включение конденсатора параллельно ВД1.

Практически достигнутый к. п. д. системы на рис. 3

и 4, выполненной на кремниевых транзисторах VT1 типа КТ805 и германиевых VT2 типа ГТ806, диодах 2Д213 находится в пределах  $0,93 \div 0,95$  при работающем первичном источнике и  $0,84 \div 0,85$  — при отключенном первичном источнике, питание нагрузки от аккумуляторной батареи, напряжение нагрузки 27 В, точность стабилизации напряжения нагрузки  $\pm 0,5$  В (среднее значение), диапазон изменения мощности тока нагрузки 10 : 1, диапазон изменения напряжения аккумуляторной батареи 20—25 В.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Еременко В. Г. Транзисторные преобразователи с токовым управлением. — М.: Моск. энерг. ин-т, 1982.
2. Пат. 3610963 (США). Switch drive circuit for the time ratio controlled transistor switching circuits / E. H. Higgins.
3. А. с. 699510 (СССР). Система электропитания постоянного напряжения / Г. М. Веденеев, В. Г. Вигдорчик, В. Г. Еременко, А. Б. Токарев. Оpubл. в Б. И., 1979, № 43.
4. А. с. 729836 (СССР). Широтно-импульсный модулятор / Г. М. Веденеев, В. Г. Еременко, А. Б. Токарев, А. В. Сукманов. Оpubл. в Б. И., 1980, № 15.
5. Коссов О. А. Усилители мощности на транзисторах в режиме переключений. — 2-е изд. — М.: Энергия, 1971. [27.01.86]

УДК 538.527:537.722

## Электродинамические силы, действующие на спиральные проводники с током

ВАСЕЦКИЙ Ю. М., канд. техн. наук

Институт электродинамики АН УССР

Катушки со спиральной навивкой проводников широко используются в электротехнических устройствах и физических установках. Протекание в них больших токов сопровождается возникновением в обмотках значительных механических напряжений. Если поперечные размеры проводников малы по сравнению с расстоянием между ними, то для исследования напряженно-деформированного состояния обмотки достаточно знать лишь распределение линейной плотности электродинамических сил. Ее в принципе можно рассчитать, определив вначале объемную плотность сил и проинтегрировав затем по площади сечения проводника. Однако для проводников сложной конфигурации такой расчет наталкивается на большие технические трудности [1, 2].

В [3] показано, что для плоских контуров эта задача может быть существенно упрощена. Она сводится к однократному интегрированию выражения, в котором геометрия сечения проводников учитывается с помощью отдельно рассчитываемого параметра. В настоящей статье аналогичный подход обобщается на случай пространственных контуров и используется для анализа электродинамических сил, действующих на спиральные проводники.

1. В контуре, образованном проводником произвольной формы, объемная плотность электродинамических сил  $\vec{f}$  определяется по известной формуле [4]:

$$\vec{f}_Q = \mu_0 \vec{j}_Q \times \vec{H}_Q, \quad \vec{H}_Q = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_M \times \vec{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dV_M, \quad (1)$$

где  $\vec{j}$  — плотность тока;  $\vec{H}$  — напряженность магнитного

поля;  $\vec{r}_{QM}$  — вектор, направленный из точки наблюдения  $Q$  в точку истока  $M$ ; интегрирование ведется по всему объему  $V_M$ , занятому токами.

Выделим в проводнике ось  $O_1$  (рис. 1), которая совпадает с одной из линий тока. Линейная плотность сил  $\vec{F}$  относительно этой оси определяется как предел отношения суммарной силы, действующей на элемент проводника между двумя поперечными сечениями, к длине осевой линии между ними. Поперечное сечение представляет собой поверхность, перпендикулярную к любой линии тока. Тогда, исходя из (1), линейная плотность сил  $\vec{F}$  при равномерной плотности тока находится из выражения

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi S^2} \int_{S_Q} \int_{V_M} \frac{R_Q}{R_Q^0} \frac{\vec{t}_Q \times (\vec{t}_M \times \vec{r}_{QM})}{r_{QM}^3} dV_M dS_Q, \quad (2)$$

в котором  $I$  — суммарный ток контура;  $\vec{t}$  — единичный вектор, касательный к линии тока;  $S$  — площадь сечения проводника;  $R_Q/R_Q^0$  — предел отношения длин элементов произвольной линии тока и осевой линии; внутренний интеграл вычисляется по всем точкам  $M$  при фиксированном  $Q$ , а внешний берется по всем точкам  $Q$  поперечного сечения.

Непосредственное интегрирование по формуле (2) для контуров сложной формы затруднительно. Замена же реального изгибающегося проводника нитью тока приводит, как легко показать, к неинтегрируемой особен-

ности в точке определения линейной плотности сил. Поэтому при проведении вычислений приходится спрямлять участок контура вблизи особой точки, либо в пределах выделенной окрестности проводить трудоемкий численный расчет [2]. Аналогичные проблемы возникают и при нахождении собственной индуктивности контуров [5, 6]. Однако для контуров с малым поперечным сечением проводников учет особенности при расчете сил может быть выполнен аналитически.

Задача, как и для плоских контуров, заключается в упрощении выражения (2) и замене его следующим однократным интегралом вдоль оси  $O_1$  контура  $L$ :

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_L \frac{t_Q^0 \times (\vec{r}_M^0 \times \vec{r}_{QM}^0)}{(r_{QM}^0 + R_H^2)^{3/2}} dt_M^0, \quad (3)$$

где индексом «0» отмечены точки, принадлежащие оси  $O_1$ ;  $R_H$  — параметр, учитывающий размеры и форму сечения проводника.

Эта процедура ранее была предложена Тозони О. В. в расчетах индуктивностей [6]. Правомочность такой замены обусловлена следующим обстоятельством. В пределах малой окрестности  $L_1$  контура вблизи рассматриваемого сечения учитывается реальное распределение плотности тока по сечению (рис. 1), и из условия равенства интегралов (2) и (3) определяется параметр  $R_H$ . В пределах другого участка  $L_2$  равенство интегралов с достаточной точностью обеспечивается при условии  $l^2/D^2 \gg 1$  и  $l^2/R_H^2 \gg 1$ , где  $D$  — характерный размер сечения проводника;  $l$  — длина участка  $L_1$ .

Проанализируем результат  $\vec{F}_1$  интегрирования по формуле (2) для участка  $L_1$  контура, образованного спиральным проводником с шагом  $h$ . Значение  $\vec{F}_1$  удобно представить в виде касательной  $F_{1t}$ , нормальной  $F_{1n}$  и бинормальной  $F_{1b}$  компонент к осевой линии  $O_1$ . Опуская промежуточные выкладки, запишем выражения, в которых отброшены величины порядка  $D^2/l^2$ :

$$\left. \begin{aligned} F_{1t} &\approx \frac{\mu_0 I^2}{4\pi S^2} \frac{a^2 b}{(a^2 + b^2)^2} \int_{S_Q} \int_{S_M} \frac{\eta_Q}{a} \left( \ln \frac{l}{D} + \right. \\ &\quad \left. + \ln \frac{D}{\rho_{QM}} - 1 \right) dS_M dS_Q; \\ F_{1n} &\approx -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi S^2} \frac{a}{a^2 + b^2} \int_{S_Q} \int_{S_M} \left[ \left( 1 + \frac{b^2}{a^2 + b^2} \frac{\xi_Q}{a} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \ln \frac{l}{D} + \ln \frac{D}{\rho_{QM}} - 1 \right) + \frac{\xi_Q}{a} \right] dS_M dS_Q; \\ F_{1b} &\approx -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi S^2} \frac{ab^2}{(a^2 + b^2)^2} \int_{S_Q} \int_{S_M} \frac{\xi_Q}{a} \left( \ln \frac{l}{D} + \right. \\ &\quad \left. + \ln \frac{D}{\rho_{QM}} - 1 \right) dS_M dS_Q. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь  $a$  — радиус цилиндрической поверхности, на которой расположена осевая линия;  $b = h/2\pi$ ;  $\xi$  и  $\eta$  представляют собой винтовые координаты точек на поверхности поперечного сечения и являются аналогом декартовых координат на поверхности геликоида [7]. Орты  $\vec{e}_\xi$  и  $\vec{e}_\eta$  направлены соответственно вдоль нормали и бинормали к линиям тока (на осевой линии  $\xi = \eta = 0$ ). Величина  $\rho_{QM}$  — расстояние между точками поперечного сечения.

В выражениях (4) интегрирование проводится дважды по одной и той же площади поперечного сечения  $S$ , а индексы  $M$  и  $Q$  обозначают точки, по которым ведется интегрирование.

Из (4) видно, что значения составляющих  $\vec{F}_1$  зависят от положения осевой линии, относительно которой находится линейная плотность сил. Если ось  $O_1$  выбрана в центре тяжести сечения, то с точностью до  $D^2/l^2$  выполняются условия

$$\int_S \xi dS = \int_S \eta dS = 0, \quad (5)$$

обращающие в нуль наиболее существенные слагаемые в  $F_{1t}$  и  $F_{1b}$ . Причем для проводников с поперечным сечением, симметричным относительно центра тяжести,  $F_{1t} = F_{1b} = 0$ . В дальнейшем и для несимметричных сечений будем пренебрегать членами, по порядку величины не превосходящими  $D/l$  по сравнению с  $\ln l/D = 1$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} F_{1t} &= F_{1b} = 0, \quad F_{1n} = \\ &= -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi S^2} \int_{S_Q} \int_{S_M} \left( \ln \frac{l}{\rho_{QM}} - 1 \right) dS_M dS_Q. \end{aligned} \quad (6)$$

Сравнивая (6) с результатом интегрирования выражения (3) в пределах того же участка  $L_1$ , найдем, что формулы (2) и (3) приводят к одному и тому же результату, если ось  $O_1$  выбрана в центре тяжести сечения, а параметр  $R_H$  определяется из формулы

$$\ln \frac{D}{R_H} = \frac{1}{S^2} \int_{S_Q} \int_{S_M} \ln \frac{D}{\rho_{QM}} dS_M dS_Q. \quad (7)$$

Здесь  $D$  может быть любым, однако для конкретных случаев в качестве  $D$  удобно выбирать некоторый характерный размер поперечного сечения.

Анализ показывает, что все выводы остаются справедливыми с той же точностью, если поперечное сечение плоское и перпендикулярно осевой линии  $O_1$ .

Отметим, что при выводе формул спиральный характер линий тока использовался только в пределах малого участка  $L_1$  контура. Однако в пределах  $L_1$  выражения справедливы для любых достаточно гладких пространственных контуров, так как можно пренебречь изменением кривизны и кручения линий тока и характеризовать их элементами спиральных линий. Следовательно, окончательные формулы (3) и (7) применимы для произвольных пространственных контуров, в том числе и контуров, содержащих в качестве элементов спирали конечной длины.

Таким образом, линейную плотность электродинамических сил, действующих на проводники пространственного контура можно рассчитывать с помощью однократного интегрирования выражения (3) вдоль контура. Геометрия сечения проводника учитывается параметром  $R_H$ , значение которого не зависит от формы контура и может быть вычислено отдельно по формуле (7).

Величина параметра  $R_H$  легко определяется для простых форм поперечного сечения. Для эллиптического и прямоугольного сечений их значения приведены в [3]. Например, если проводник имеет круглое сечение радиуса  $R$ , то  $R_H = Re^{-1/4}$ .

2. Рассмотрим симметричную систему  $m$  спиральных бесконечных проводников, один из которых изображен на рис. 1. Будем считать, что по всем проводникам протекает одинаковый ток  $I$ . Для расчета электродинамиче-

ских сил достаточно задать уравнение осевой линии и форму поперечного сечения проводников. Уравнение оси  $O_1$  для  $i$ -го проводника имеет вид

$$x_i = a \cos \left( \varphi - \frac{2\pi i}{m} \right); \quad y_i = a \sin \left( \varphi - \frac{2\pi i}{m} \right); \quad z_i = b\varphi, \quad (8)$$

где  $x, y, z$  — декартовы координаты спиральных кривых;  $\varphi$  — текущий параметр, который изменяется в пределах  $-\infty, +\infty$ .

Допустим, кроме того, что данная система токов находится во внешнем по отношению к ней магнитном поле напряженностью  $\vec{H}$ , имеющей однородную составляющую  $H_z$  вдоль оси  $Oz$  и азимутальную составляющую  $H_\varphi$ , созданную продольным током  $I_0$ .

Так как все проводники  $m$ -заходной спирали находятся в равномерном положении, то можно ограничиться определением линейной плотности сил  $\vec{F}$  в какой-либо точке одного из них. Слагаемую силы  $\vec{F}$  взаимодействия

тока с внешним полем  $\vec{H}$  приближенно можно найти как силу взаимодействия сосредоточенного на оси  $O_1$  тока  $I$  с полем  $\vec{H}$ . Вносимая при этом погрешность, связанная с неоднородностью  $H_\varphi$ , составляет величину порядка  $D^2/a^2$ . Используя уравнение спиралей (8), из формулы (3) найдем выражение для составляющей линейной плотности сил по нормали к осевой линии  $O_1$ :

$$F_n = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi a} |\sin \theta| \sum_{i=0}^{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\operatorname{ctg}^2 \theta - 1) \sin^2 t - \operatorname{ctg}^2 \theta \times}{\left[ \sin^2 t + \operatorname{ctg}^2 \theta \left( t + \frac{\pi i}{m} \right)^2 + \right.} \\ \left. + \beta^2 \right]^{3/2}} dt - \mu_0 I \left( H_z \sin \theta - \frac{I_0}{2\pi a} \cos \theta \right). \quad (9)$$

Здесь  $\beta = R_H/2a$ , величина  $\theta = \operatorname{arccotg}(b/a)$  представляет собой угол наливки проводников относительно продольной оси  $Oz$ . Положительные и отрицательные значения  $\theta$  относятся соответственно к право- и левинитовым спиральям. Нормаль к оси  $O_1$  направлена по радиусу к центру цилиндрической поверхности, бинормаль по касательной к ней. Так как спиральные проводники располагаются симметрично, то составляющая силы по бинормали равна нулю, и, следовательно, линейная плотность сил имеет только радиальную компоненту.

Для определения слагаемой силы  $F_n$  взаимодействия выделенного проводника с остальными  $m-1$  проводниками можно воспользоваться результатами, приведенными в [8], где, однако, индукция магнитного поля представлена в виде рядов по произведениям модифицированных функций Бесселя. Интеграл же в формуле (9) при  $i=0$ , в котором нельзя пренебрегать величиной  $\beta^2$ , вычисляется с помощью аналитических методов только в предельных случаях.

Расчет линейной плотности сил  $F_n$  при произвольной величине угла наливки  $\theta$  проводился с использованием методов численного интегрирования на ЭВМ. На рис. 2 показаны зависимости приведенного значения  $F_n^* = \frac{4\pi a F_n}{\mu_0 I^2}$  от угла наливки  $\theta$  при  $R_H/a = 0,06$ , когда внешнее поле отсутствует ( $H_z = 0, I_0 = 0$ ). Увеличение числа заходов  $m$  приводит к более быстрому изменению силы  $F_n$  в зависимости от  $\theta$ . Радиальное усилие для одно-

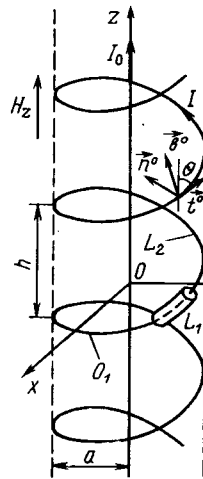


Рис. 1

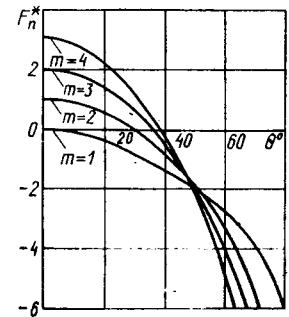


Рис. 2

заходной спирали всегда направлено наружу от центральной оси. Характерной же особенностью обмоток с  $m \geq 2$  является изменение знака  $F_n$  при некотором значении угла  $\theta_0$ , которое зависит от заходности  $m$  и величины параметра  $R_H$ .

Если  $\theta < \theta_0$ , то радиальное усилие от взаимодействия выделенного проводника с остальными проводниками направлено к центру и превышает по величине противоположно направленное усилие, возникающее от взаимодействия с собственным полем выделенной спирали. При  $\theta = \theta_0$  линейная плотность сил равна нулю и проводники находятся в электродинамическом равновесии. Радиальное усилие в спиральных обмотках с большим углом наливки  $\theta > \theta_0$  направлено от центра. При этом линейная плотность сил взаимодействия отдельного проводника с остальными также меняет свое направление при значениях углов наливки, определяемых точками пересечения кривых для  $m > 1$  и  $m = 1$ .

Для пологой наливки спиралей, когда  $\theta^2 \ll 1$ , асимптотическое поведение величины  $F_n$  описывается выражением

$$F_n \approx \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a} \left[ m - 1 + \theta^2 \left( \ln \frac{\beta}{|\theta|} + \gamma + \frac{1}{2} \right) \right] - \mu_0 I \left( \theta H_z - \frac{I_0}{2\pi a} \right), \quad (10)$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера.

Это выражение указывает на плавное стремление  $F_n$  к значению, которое соответствует взаимодействию прямолинейных токов ( $\theta = 0$ ).

С увеличением угла наливки соседние витки спирали приближаются друг к другу, что ведет к снижению точности расчета. Из оценки относительной погрешности  $\delta$  при углах  $\theta$ , приближающихся к  $\pi/2$ , получаем  $\delta \sim \frac{D^2 m^2}{4\pi^2 a^2 \cos^2 \theta}$ . Применяемый способ расчета не позволяет находить электродинамические силы в плотной спиральной обмотке. Однако определение линейной плотности сил, действующих на кольцевой проводник с током, не представляет труда. Для этого в формуле (9) при  $\theta = \pi/2$  необходимо взять интеграл в пределах от  $\theta$  до  $2\pi$ . Пренебрегая членами порядка  $\beta^2$ , запишем

$$F_n = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi a} \left( \ln \frac{8a}{R_H} - 1 \right) - \mu_0 I H_z. \quad (11)$$

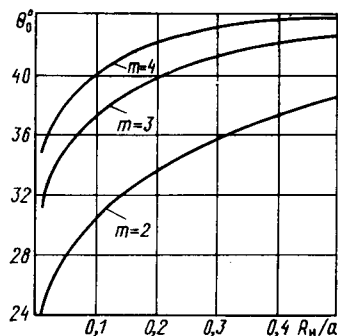


Рис. 3

В частном случае проводника с круглым поперечным сечением из (11) получается хорошо известное выражение для  $F_n$  [4].

В последнее время в связи с развитием сильноточной техники возрастает интерес к поискам путей снижения уровня возникающих в обмотках механических напряжений [9]. Одним из возможных способов является использование такой геометрии обмоток, при которой электродинамические усилия минимальны [10, 11]. Спиральная обмотка, для которой выполнено условие

$$F_n = 0, \quad (12)$$

представляет уравновешенную систему проводников с током. Она не является полностью «бессиловой» [12], так как равновесие обеспечивается лишь интегрально для линейной плотности сил, локальные же усилия всестороннего сжатия проводников остаются. Условие (12) можно рассматривать как уравнение электродинамического равновесия спиральной обмотки, связывающее между собой угол навивки, значение напряженности внешнего поля, заходность и параметр  $R_H$ .

Из выражения (9) при условии (12) можно заключить, что приведенные на рис. 2 кривые представляют собой также зависимость величины  $\frac{4\pi a H_z}{I} \sin \theta - \frac{2I_0}{I} \cos \theta$

от угла навивки  $\theta$  уравновешенной системы токов. Видно, что увеличение внешнего поля  $H_z$ , направленного в ту же сторону, что и токи в правовинтовой системе проводников, приводит к уменьшению угла навивки. Наоборот, протекание в ту же сторону осевого тока  $I_0$  ведет к росту угла  $\theta$  в уравновешенной системе.

При отсутствии источников внешнего поля уравнение (12) разрешимо при  $m \geq 2$ . Результаты его численного решения представлены на рис. 3, где приводятся зависимости угла навивки  $\theta_0$  уравновешенной обмотки от величины  $R_H/a$  для  $m=2, 3, 4$ . Угол  $\theta_0$  резко увеличивается в области малых значений  $R_H/a$ . Характер этого изменения находится из (10) при  $H_z=0, I_0=0$ :

$$\sim \frac{R_H}{a} \approx \frac{2}{|\theta_0| \exp \frac{m-1}{\theta_0^2}}. \quad (13)$$

Затем зависимость становится более плавной. Угол навивки  $\theta_0$  больше для спиралей с большей заходностью, но во всех случаях не превосходит  $45^\circ$ .

В физических установках часто используются винтовые обмотки, расположенные на тороидальной поверхности [11]. Представляет интерес сравнение углов навивки тороидальных и цилиндрических уравновешенных обмоток. Так, для тороидальной магнитной системы с отношением большого радиуса тора к малому (аспектовым отношением), равным  $A=3,7$ , угол навивки трехзаходной обмотки составил около  $40^\circ$  [13]. При тех же размерах и форме поперечного сечения токопроводов в виде кольцевого сектора [13], рассчитанный по формуле (7) параметр  $R_H \approx 0,265a$ . Из рис. 3 видно, что ему соответствует навивка уравновешенной цилиндрической спирали  $\theta_0 \approx 40,5^\circ$ . Сравнение иллюстрирует возможность использования приведенных в данной статье результатов и для оценки углов навивки тороидальных систем с большим аспектвым отношением.

В заключение отметим, что при отсутствии внешнего поля равновесие цилиндрической спиральной системы проводников является неустойчивым относительно угла  $\theta$ . Это видно из приведенных на рис. 2 зависимостей. Отклонение угла навивки от  $\theta_0$  приводит к радиальным усилиям, стремящимся увеличить возникшее отклонение.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиевский Б. Л., Орлов В. Л. Расчет параметров магнитных полей осесимметричных катушек. — М.: Энергоатомиздат, 1983.
2. Том Р., Тарр Дж. Магнитные системы МГД-генераторов и термоядерных установок. — М.: Энергоатомиздат, 1985.
3. Васецкий Ю. М. К расчету ponderomotorных сил в уединенных плоских контурах с током. — Техническая электродинамика, 1985, № 5.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
5. Калантаров П. Л., Цейтлин Л. А. Расчет индуктивностей. — Л.: Энергия, 1970.
6. Тозони О. В. Метод вторичных источников в электротехнике. — М.: Энергия, 1975.
7. Диментберг Ф. М. Винтовое исчисление. — М.: Наука, 1965.
8. Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей. — М.: Иностран. лит-ра, 1961.
9. Карасик В. Р. Физика и техника сильных магнитных полей. — М.: Наука, 1964.
10. Рабинович М. С. Экспериментальные исследования на стеллараторах. — УНТ. Сер. Физика плазмы, 1981, т. 2.
11. «Бессилловые» тороидальные магнитные системы термоядерных установок/В. З. Амелин, А. В. Базаева, В. Е. Быков и др. — ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез, 1978, вып. 1—2.
12. Chandrasekhar S., Kendall P. C. On force — free magnetic fields. — Astrophys. J., 1957, vol. 126, N 2.
13. Характерные особенности силового нагружения и напряженного состояния винтовых обмоток установок торсионного типа/А. В. Георгиевский, В. И. Корявко, М. Д. Парог и др. — ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез, 1984, вып. 2(15).

[27.10.86]



# Анализ вентильных моделей при решении задач дискретной оптимизации

БЕРКОВИЧ Е. И., канд. техн. наук

Полупроводниковые вентили (диоды и тиристоры) составляют основу статических преобразователей электрической энергии. Вместе с тем электрические схемы, содержащие эти приборы в качестве своих элементов, могут использоваться как физические или математические аналоговые модели задач дискретной оптимизации, решаемых в теории исследований операций. В частности, некоторые задачи линейного программирования могут быть решены построением эквивалентных электрических цепей, состоящих только из диодов, источников напряжения и источников тока [1]. Методы решения оптимизационных задач, в частности задач линейного программирования, с помощью моделирования электрическими цепями уступают методам решения таких задач на ЦВМ. Однако электрическое моделирование представляет собой теоретический интерес, а в задачах с небольшим числом переменных оно может оказаться наиболее простым и экономичным средством решения задач.

С точки зрения протекания электрических процессов этот класс вентильных схем рассмотрен в литературе крайне недостаточно, неизвестны также аналитические методы анализа подобных схем. Настоящая статья посвящена разработке таких методов на базе [2]. Они должны позволить не только избежать операций набора моделирующих цепей, измерений в них токов и напряжений, но и упростить процесс решения, создать предпосылки для разработки более эффективных алгоритмов для ЦВМ.

Электрические схемы, содержащие диоды, источники тока и напряжения, возникают также как расчетные модели на первом шаге машинного анализа широкого круга вентильных преобразователей, когда состояние вентилей неизвестно, начальные значения токов через индуктивности и напряжений на емкостях учитываются идеальными источниками соответственно тока и напряжения. Изложенные ниже методы принципиально позволяют определить состояние диодов на этом интервале.

Ниже будут рассмотрены электрические схемы вентильных моделей, предназначенных для определения в так называемой транспортной задаче максимального потока и минимальной стоимости его доставки, а в задаче о сетевом планировании — кратчайшего пути. Будет рассмотрена также схема вентильной модели общей задачи линейного программирования.

Транспортную сеть, для которой необходимо определить максимальный поток или при заданном общем потоке минимальную стоимость транспортировки, как и сетевой график, принято представлять графом, например, подобным на рис. 1, а. Узлы и ветви графа нумеруются, причем каждой ветви сопоставляется пропускная способность — в случае задачи о максимальном потоке, или величина пути — в случае задачи о сетевом планировании (в таблице рис. 1). Первая и третья колонки содержат номера ветвей графа, а вторая и четвертая колонки — их пропускные способности (в данном примере).

В первом случае необходимо определить максимальный поток, который может потечь из начального узла 1 в конечный узел 10, во втором — минимальный (или максимальный) путь из начального узла в конечный. Конфигурация электрической схемы вентильной модели этих задач полностью повторяет граф исходной задачи.

В вентильной модели транспортной задачи каждая ветвь электрической схемы представляет собой параллельные соединения диода и источника тока (рис. 1, б), значение которого равно пропускной способности данной ветви. Между узлами 1 и 10 схемы должен быть включен единственный источник напряжения (показан пунктиром). Ток через этот источник будет равен искомому максимальному потоку. В случае модели сетевого графика каждая ветвь схемы представляет собой последовательное соединение источника напряжения и диода (рис. 1), причем значение источника напряжения должно быть равно длительности пути. Между узлами 1 и 10 необходимо включить единственный источник тока. Напряжение на этом источнике будет равно искомой величине пути.

Если необходимо определить минимальную стоимость транспортирования потока по сети при заданной его полной величине между начальным и конечным узлами, то в эквивалентной электрической схеме (рис. 2, а) все ветви заменяются соединением вида рис. 2, б, в котором источник тока равен пропускной способности ветви, а источник напряжения — стоимости транспортирования по этой ветви. Между узлами 1 и 6 включается источник тока, равный заданному потоку. Значения источников токов и напряжений для рассматриваемого примера даны в таблице рис. 2: первая колонка — номер ветви, вторая — пропускная способность, третья — стоимость. Мощность, выделяемая на источнике тока, и будет равна минимальной стоимости.

Рассмотрим методы аналитического решения электрических цепей рис. 1, 2.

Напряжения на вентильях  $u_i$  и их токи  $i_i$  характеризуются неравенствами

$$-u_i \geq 0, \quad i_i \geq 0,$$

причем

$$u_i i_i = 0.$$

В дальнейшем, оперируя такими неравенствами, будем пользоваться возможностью замены двух неравенств  $A_i \geq 0, A_j \geq 0$  одним, им эквивалентным;

$$\lambda_i A_i + \lambda_j A_j - |\lambda_i A_i - \lambda_j A_j| \geq 0, \quad (1a)$$

где  $\lambda_i > 0, \lambda_j > 0$  — произвольные величины, или возможностью замены, если  $A_i = 0$  или  $A_j = 0$ , одним равенством

$$\lambda_i A_i + \lambda_j A_j - |\lambda_i A_i - \lambda_j A_j| = 0. \quad (1б)$$

Использование подобных выражений делает целесообразным введение следующих операций над величинами  $A_i, A_j$  ( $\lambda_i = \lambda_j = 1$ );

выбор наибольшего — величина  $A_i \oplus A_j$  равна большему из этих чисел (любому из них, если  $A_i = A_j$ ), т. е.

$$A_i \oplus A_j = \frac{1}{2} (A_i + A_j + |A_i - A_j|); \quad (2a)$$

выбор наименьшего — величина  $A_i \otimes A_j$  равна меньшему из этих чисел (любому из них, если  $A_i = A_j$ ), т. е.

$$A_i \otimes A_j = \frac{1}{2} (A_i + A_j - |A_i - A_j|). \quad (2б)$$

Операции « $\oplus$ » и « $\otimes$ » используются в непрерывной (многозначной) математической логике и образуют буле-



ву алгебру [5]. На их применении базируется излагаемый аналитический метод анализа цепей.

Для этих операций выполняются законы:

тождественности (идемпотентности) —

$$A_i \oplus A_i = A_i; \quad A_i \otimes A_i = A_i;$$

сочетательные —

$$(A_i \oplus A_j) \oplus A_k = A_i \oplus (A_j \oplus A_k);$$

$$(A_i \otimes A_j) \otimes A_k = A_i \otimes (A_j \otimes A_k);$$

переместительные —

$$A_i \oplus A_j = A_j \oplus A_i; \quad A_i \otimes A_j = A_j \otimes A_i;$$

распределительные —

$$A_i \otimes (A_j \oplus A_k) = A_i \otimes A_j \oplus A_i \otimes A_k;$$

$$A_i \oplus (A_j \otimes A_k) = (A_i \oplus A_j) \otimes (A_i \oplus A_k),$$

непосредственно проверяемые, например, по (2а) и (2б).

Ряд других законов и свойств, которым подчиняются операции « $\oplus$ » и « $\otimes$ », здесь не приводится.

При сочетании операций « $\oplus$ » и « $\otimes$ » со сложением справедливы следующие соотношения, также вытекающие из (2а) и (2б):

$$\left. \begin{aligned} A_i \oplus A_j + A_k \oplus A_l &= (A_i + A_k) \oplus (A_j + A_l) \oplus \\ &\oplus (A_j + A_k) \oplus (A_i + A_l); \\ A_i \otimes A_j + A_k \otimes A_l &= (A_i + A_k) \otimes (A_j + A_l) \otimes (A_j + A_k) \otimes \\ &\otimes (A_j + A_l); \\ A_i \oplus A_j + A_k \otimes A_l &= (A_i + A_k) \otimes (A_i + A_l) \oplus (A_j + A_k) \otimes \\ &\otimes (A_j + A_l), \end{aligned} \right\} (3)$$

откуда в частном случае  $A_i = A_j$  имеем

$$A_i + A_k \oplus A_l = (A_i + A_k) \oplus (A_i + A_l);$$

$$A_i + A_k \otimes A_l = (A_i + A_k) \otimes (A_i + A_l).$$

При сочетании операции « $\oplus$ » и « $\otimes$ » с умножением в случае положительных  $A_i, A_j, A_k, A_l$  справедливы следующие соотношения;

$$\left. \begin{aligned} (A_i \oplus A_j) (A_k \oplus A_l) &= A_i A_k \oplus A_i A_l \oplus A_j A_k \oplus A_j A_l; \\ (A_i \otimes A_j) (A_k \otimes A_l) &= A_i A_k \otimes A_i A_l \otimes A_j A_k \otimes A_j A_l; \\ (A_i \oplus A_j) (A_k \otimes A_l) &= A_i A_k \otimes A_i A_l \oplus A_j A_k \otimes A_j A_l. \end{aligned} \right\} (4)$$

В частном случае  $A_i = A_j$

$$A_i (A_k \oplus A_l) = A_i A_k \oplus A_i A_l;$$

$$A_i (A_k \otimes A_l) = A_i A_k \otimes A_i A_l.$$

При  $A_i < 0$ , т. е.  $(-A_i) > 0$

$$\left. \begin{aligned} -A_i (A_k \oplus A_l) &= -A_i A_k \otimes -A_i A_l; \\ -A_i (A_k \otimes A_l) &= -A_i A_k \oplus -A_i A_l \end{aligned} \right\} (5a)$$

и при  $A_i = -1$

$$\left. \begin{aligned} -(A_k \oplus A_l) &= -A_k \otimes -A_l; \\ -(A_k \otimes A_l) &= -A_k \oplus -A_l. \end{aligned} \right\} (5b)$$

Последние соотношения позволяют использовать выражения (3) также и в случае вычитания путем замены отрицательного слагаемого на положительное по правилам (5б), а также соотношения (4) в случае умножения при  $-A_i > 0, -A_j > 0$ .

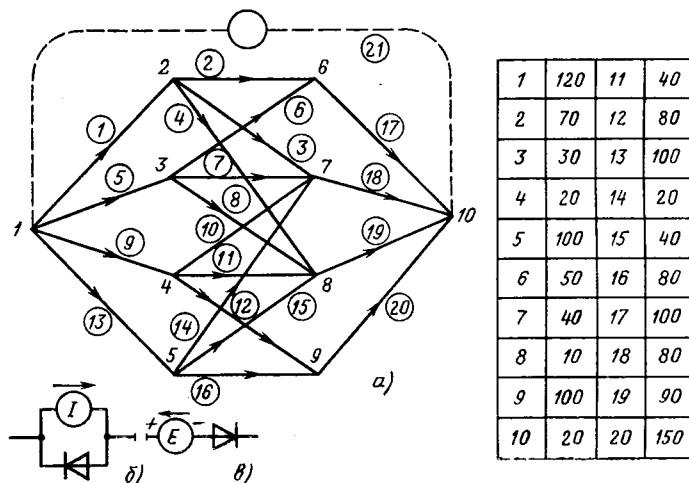


Рис. 1. Граф электрической цепи и схемы ее ветвей для моделирования транспортной задачи и задачи сетевого планирования

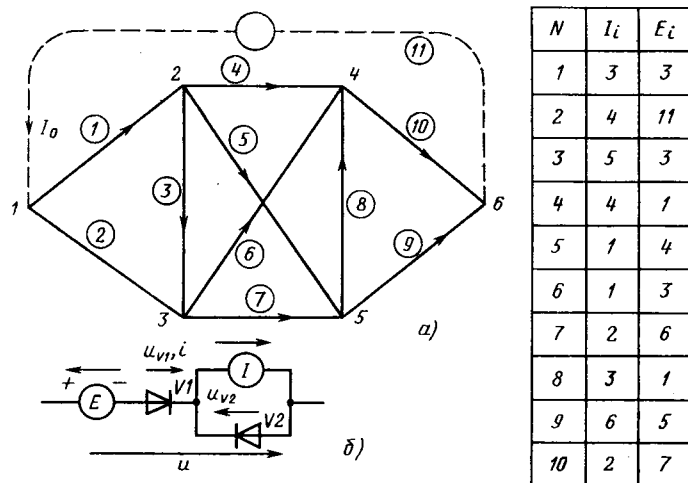


Рис. 2. Граф электрической цепи и схема ее ветвей для моделирования задачи о максимальной стоимости потока

Пусть при  $A_i \geq 0$  даны неравенства

$$a_1 \leq A_1 \otimes A_2; \quad a_2 \leq A_1 \otimes A_3,$$

из которых следует, что

$$a_1 + a_2 \leq A_1 \otimes A_2 + A_1 \otimes A_3, \quad (6a)$$

или в соответствии с (3)

$$a_1 + a_2 \leq 2A_1 \otimes (A_1 + A_3) \otimes (A_1 + A_2) \otimes (A_2 + A_3). \quad (6б)$$

Пусть к тому же известно, что в отношении общего члена правой части (6а) справедливо неравенство

$$a_1 + a_2 \leq A_1. \quad (6в)$$

Объединяя неравенства (6б) и (6в) в одно, получаем

$$a_1 + a_2 \leq A_1 \otimes 2A_1 \otimes (A_1 + A_3) \otimes (A_1 + A_2) \otimes (A_2 + A_3), \quad (6г)$$

или с учетом очевидности отбрасывания членов  $2A_1, A_1 + A_3, A_1 + A_2$ , меньших  $A_1$ , имеем

$$a_1 + a_2 \leq A_1 \otimes (A_2 + A_3).$$

Таким образом, в этом важном случае

$$A_1 \otimes A_2 + A_1 \otimes A_3 = A_1 \otimes (A_2 + A_3). \quad (6д)$$

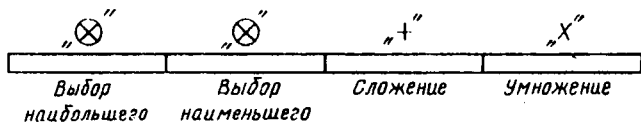


Рис. 3. Шкала операций

Правая часть выражения (6а) может быть непосредственно, не прибегая к объединению неравенства (6б), (6в), преобразована в правую часть (6д), если для положительных величин с одинаковым индексом ввести при сложении правило тождественности (идемпотентности):

$$A_i + A_i = A_i. \quad (7)$$

Это правило распространяется и на операцию « $\oplus$ » в (6д). В основе правила (7) применительно к цепям на рис. 1, 2 лежит тот простой факт, что ни пропускная способность  $i$ -й ветви, ни моделирующая ее величина источника тока не могут превысить заданного уровня независимо от числа слагаемых, т. е.  $\sum I_i = I_i$ .

Однако требование приведения тождественных величин, т. е. соблюдение (7), выдвигает необходимость введения очередности выполнения операций выбора наибольшего « $\oplus$ », выбора наименьшего « $\otimes$ », сложения и умножения в соответствии со шкалой операции рис. 3: первой операцией всегда является умножение, второй — сложение, третьей — выбор наименьшего « $\otimes$ », четвертой — выбор наибольшего « $\oplus$ ». При этом, если среди слагаемых отсутствуют члены с одинаковыми индексами, то операции « $+$ » и « $\otimes$ », « $\oplus$ » могут выполняться в любой очередности. Запись в виде левой части (3) означает, что вначале должно быть выполнено суммирование, а затем операции « $\otimes$ », « $\oplus$ », как это записано в правой части (3), где скобки объединяют первоочередно суммируемые члены.

Перейдем теперь непосредственно к анализу электрической цепи на рис. 1, а в случае, когда ветви схемы представляют собой параллельное соединение источника тока и диода, а к точкам 1 и 10 подключен единичный источника напряжения (модель транспортной задачи). Рассмотрим контурный ток  $J$  в одном из направленных контуров схемы рис. 1, а, например, ток  $i$ -го контура, состоящего из ветвей 1—2—17—21. Очевидно  $J \leq I_1$ ,  $J \leq I_2$ ,  $J \leq I_{17}$  или, переходя в соответствии с (2а), (2б) и [2] к одному неравенству:  $J \leq I_1 \otimes I_2 \otimes I_{17}$ .

Запишем контурные токи всех направленных контуров схемы рис. 1. С этой целью составим матрицу инцидентий (см. таблицу), позволяющую учесть, следуя определенной системе, все контуры.

Таким образом, имеем следующие контуры (ветвь 21 в записи контуров опущена): 1—2—17; 5—6—17; 1—3—18; 5—7—18; 9—10—18; 13—14—18; 1—4—19; 5—8—19; 9—11—19; 13—15—19; 9—12—20; 13—16—20.

Нумеруя токи контуров в порядке их записи (1—2—17—первый контур, 5—6—17—второй контур и т. д.), будем иметь:

$$\begin{aligned} J_1 &\leq I_1 \otimes I_2 \otimes I_{17}; & J_2 &\leq I_5 \otimes I_6 \otimes I_{17}; & J_3 &\leq I_1 \otimes I_3 \otimes I_{18}; \\ J_4 &\leq I_5 \otimes I_7 \otimes I_{18}; & J_5 &\leq I_9 \otimes I_{10} \otimes I_{18}; & J_6 &\leq I_{13} \otimes I_{14} \otimes I_{18}; \\ J_7 &\leq I_1 \otimes I_4 \otimes I_{19}; & J_8 &\leq I_5 \otimes I_8 \otimes I_{19}; & J_9 &\leq I_9 \otimes I_{11} \otimes I_{19}; \\ J_{10} &\leq I_{13} \otimes I_{15} \otimes I_{19}; & J_{11} &\leq I_9 \otimes I_{12} \otimes I_{20}; & J_{12} &\leq I_{13} \otimes I_{16} \otimes I_{20}. \end{aligned}$$

| $\begin{matrix} u \\ b \end{matrix}$ | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|--------------------------------------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1                                    | 1 | -1 |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 2                                    |   | 1  |    |    |    | -1 |    |    |    |    |
| 3                                    |   | 1  |    |    |    |    | -1 |    |    |    |
| 4                                    |   | 1  |    |    |    |    |    | -1 |    |    |
| 5                                    | 1 |    | -1 |    |    |    |    |    |    |    |
| 6                                    |   |    | 1  |    |    | -1 |    |    |    |    |
| 7                                    |   |    | 1  |    |    |    | -1 |    |    |    |
| 8                                    |   |    | 1  |    |    |    |    | -1 |    |    |
| 9                                    | 1 |    |    | -1 |    |    |    |    |    |    |
| 10                                   |   |    |    | 1  |    |    | -1 |    |    |    |
| 11                                   |   |    |    | 1  |    |    |    | -1 |    |    |
| 12                                   |   |    |    | 1  |    |    |    |    | -1 |    |
| 13                                   | 1 |    |    |    | -1 |    |    |    |    |    |
| 14                                   |   |    |    |    | 1  |    | -1 |    |    |    |
| 15                                   |   |    |    |    | 1  |    |    | -1 |    |    |
| 16                                   |   |    |    |    | 1  |    |    |    | -1 |    |
| 17                                   |   |    |    |    |    |    | 1  |    |    | -1 |
| 18                                   |   |    |    |    |    |    | 1  |    |    | -1 |
| 19                                   |   |    |    |    |    |    |    | 1  |    | -1 |
| 20                                   |   |    |    |    |    |    |    |    | 1  | -1 |

Сумма всех контурных токов, очевидно, будет равна току общей ветви 21, т. е.

$$\sum_{i=1}^{i=12} J_i = J_0,$$

причем для  $J_0$  можем записать (заменяя знак « $\otimes$ » для краткости знаком « $\cdot$ »):

$$\begin{aligned} J_0 &\leq I_1 I_2 I_{17} + I_5 I_6 I_{17} + I_1 I_3 I_{18} + I_5 I_7 I_{18} + \\ &+ I_9 I_{10} I_{18} + I_{13} I_{14} I_{18} + I_1 I_4 I_{19} + I_5 I_8 I_{19} + I_9 I_{11} I_{19} + \\ &+ I_{13} I_{15} I_{19} + I_9 I_{12} I_{20} + I_{13} I_{16} I_{20}. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку в электрической цепи рис. 1, а установлено максимально возможное значение тока, то в последнем выражении знак « $\leq$ » должен быть отброшен и оставлен только знак равенства. Таким образом, получаем замкнутое, в явной форме равенство для определения тока  $J_0$ , а следовательно, и максимального потока в сети. Остается выполнить предваряющие преобразования в правой части (8), основываясь на правилах (3)—(7).

Собрав члены с  $I_{17}$ ,  $I_{18}$ ,  $I_{19}$  и  $I_{20}$ , получим:

$$\begin{aligned} J_0 &= I_{18} (I_1 I_3 + I_5 I_7 + I_9 I_{10} + I_{13} I_{14}) + I_{19} (I_1 I_4 + I_5 I_8 + \\ &+ I_9 I_{11} + I_{13} I_{15}) + I_{17} (I_1 I_2 + I_5 I_6) + I_{20} (I_9 I_{12} + I_{13} I_{16}), \end{aligned}$$

из которого после суммирования первого слагаемого со вторым и третьим с четвертым имеем

$$J_0 = M_1 M_2 + M_3 M_4,$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= (I_{18} + I_{19})(I_{18} + I_1 I_4 + I_5 I_8 + I_9 I_{11} + I_{13} I_{15}); \\ M_2 &= (I_{19} + I_1 I_3 + I_5 I_7 + I_9 I_{10} + I_{13} I_{14})[I_1 (I_3 + I_4) + \\ &\quad + I_5 (I_7 + I_8) + I_9 (I_{10} + I_{11}) + I_{13} (I_{14} + I_{15})]; \\ M_3 &= (I_{17} + I_{20})(I_{17} + I_{19} I_{12} + I_{13} I_{16}); \\ M_4 &= (I_{20} + I_1 I_2 + I_5 I_6)(I_1 I_2 + I_5 I_6 + I_9 I_{12} + I_{13} I_{16}). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} J_0 &= M_1 M_2 + M_3 M_4 = \\ &= (M_1 + M_3)(M_1 + M_4)(M_2 + M_3)(M_2 + M_4), \end{aligned}$$

и выполняя формальные алгебраические операции, найдем суммы, приведенные в скобках:

первая сумма

$$\begin{aligned} M_1 + M_3 &= (I_{17} + I_{18} + I_{19} + I_{20})(I_{17} + I_{18} + I_{19} + I_{19} I_{12} + \\ &\quad + I_{13} I_{16})(I_{17} + I_{18} + I_{20} + I_1 I_4 + I_5 I_8 + I_9 I_{11} + \\ &\quad + I_{13} I_{16})[I_{17} + I_{18} + I_1 I_4 + I_5 I_8 + I_9 (I_{11} + \\ &\quad + I_{12}) + I_{13} (I_{15} + I_{16})]; \end{aligned}$$

вторая сумма

$$\begin{aligned} M_1 + M_4 &= (I_{18} + I_{19} + I_{20} + I_1 I_2 + I_5 I_6)(I_{18} + I_{19} + \\ &\quad + I_1 I_2 + I_5 I_6 + I_9 I_{12} + I_{13} I_{16})[I_{18} + I_{20} + I_1 (I_2 + I_4) + \\ &\quad + I_5 (I_6 + I_8) + I_9 I_{11} + I_{13} I_{16}][I_{18} + I_1 (I_2 + I_4) + \\ &\quad + I_5 (I_6 + I_8) + I_9 (I_{11} + I_{12}) + I_{13} (I_{15} + I_{16})]; \end{aligned}$$

третья сумма

$$\begin{aligned} M_2 + M_3 &= (I_{17} + I_{19} + I_{20} + I_1 I_3 + I_5 I_7 + I_9 I_{10} + \\ &\quad + I_{13} I_{14})[I_{17} + I_{19} + I_1 I_3 + I_5 I_7 + I_9 (I_{10} + I_{12}) + \\ &\quad + I_{13} (I_{14} + I_{16})][I_{17} + I_1 (I_3 + I_4) + I_5 (I_7 + I_8) + \\ &\quad + I_9 (I_{10} + I_{11} + I_{12}) + I_{13} (I_{14} + I_{15} + I_{16})][I_{17} + \\ &\quad + I_{20} + I_1 (I_3 + I_4) + I_5 (I_7 + I_8) + \\ &\quad + I_9 (I_{10} + I_{11}) + I_{13} (I_{14} + I_{15})]; \end{aligned}$$

четвертая сумма

$$\begin{aligned} M_2 + M_4 &= [I_{19} + I_{20} + I_1 (I_2 + I_3) + I_5 (I_6 + I_7) + \\ &\quad + I_9 I_{10} + I_{13} I_{14}][I_{19} + I_1 (I_2 + I_3) + I_5 (I_6 + I_7) + I_9 (I_{10} + \\ &\quad + I_{12}) + I_{13} (I_{14} + I_{16})][I_{20} + I_1 (I_2 + I_3 + I_4) + I_5 (I_6 + \\ &\quad + I_7 + I_8) + I_9 (I_{10} + I_{11}) + I_{13} (I_{14} + I_{15})][I_1 (I_2 + I_3 + \\ &\quad + I_4) + I_5 (I_6 + I_7 + I_8) + I_9 (I_{10} + I_{11} + \\ &\quad + I_{12}) + I_{13} (I_{14} + I_{15} + I_{16})]. \end{aligned}$$

Подставляя значения токов  $I_i$ , получаем:

$$\begin{aligned} M_1 + M_3 &= 410, \quad M_1 + M_4 = 430, \quad M_2 + M_3 = 400, \\ M_2 + M_4 &= 420 \end{aligned}$$

и соответственно  $J_0 = 400$ .

Задача о сетевом графике является дуальной только что рассмотренной транспортной задаче: источники тока заменяются источниками напряжения, параллельное соединение источника и диода заменяется последовательным включением, операция « $\otimes$ » — на операцию « $\oplus$ » (рис. 1, в). Для определения всех направленных контуров, в каждом из которых сумма напряжений источников

$\Sigma E_i$  и напряжение  $U_0$  единичного источника тока, подключенного к истоку 1 и стоку 10 схемы, связаны неравенством

$$U_0 \geq \Sigma E_i, \quad (9a)$$

целесообразно воспользоваться матрицей инцидентий. Объединяя неравенства (9a) для каждого контура в одно и отбрасывая знак неравенства, получаем очевидное выражение:

$$U_0 = S \sum_i E_i, \quad (9b)$$

где  $S$  — знак «суммирования» по операции « $\oplus$ ».

Рассмотрим вариант транспортной задачи при заданных для каждой ветви стоимостях перевозок. Рассмотрение проведем на примере сети, граф которой представлен на рис. 2.

Этой сети может быть противопоставлена электрическая схема, граф которой совпадает с приведенным, ветви выполнены в виде соединений рис. 2, б, а между истоком 1 и стоком 6 включен источник тока. В таблице рис. 2 для каждой ветви указаны стоимость перевозки и пропускная способность, или, если говорить об электрической модели — величины э. д. с. и источников токов ветвей. Величина источника тока, включенного в дополнительную ветвь 11, определяет заданную суммарную величину транспортируемого потока.

Определим токи в ветвях полученной схемы. Их величины распределятся таким образом, что будет обеспечиваться минимальная стоимость транспортируемого потока, т. е.

$$\sum_i E_i i_i = \min.$$

Рассмотрим одиночную ветвь рис. 1, г. Сумма напряжений на диодах  $V1, V2$

$$u_{v1} - u_{v2} = u - E,$$

ток ветви  $i \geq 0, I - i \geq 0$ .

Возможны три случая:

Если  $i > 0, I - i > 0$ , диоды  $V1$  и  $V2$  открыты, и напряжение  $u_{v1} - u_{v2} = u - E = 0$ ;

Если  $I - i = 0$ , диод  $V1$  открыт, диод  $V2$  закрыт (или находится в критическом состоянии), т. е. —  $u_{v2} = u - E \geq 0$ ;

наконец, если  $i = 0$ , диод  $V2$  открыт, а  $V1$  закрыт или находится в критическом состоянии, т. е.  $u_{v1} = u - E \leq 0$ .

Этим состояниям диодов соответствует вольт-амперная характеристика (ВАХ) ветви, представленная на рис. 4. Участок  $i = 0, u_{v1} = 0$  нас в дальнейшем количественно интересоваться не будет, поэтому аналитическое представление ВАХ дадим только для двух других участков. Объединяя неравенства для первого и второго случаев, получаем искомое уравнение ВАХ:

$$(u - E) \otimes \rho (I - i) = 0, \quad (10a)$$

где  $\rho > 0$  — произвольный множитель размерности сопоставления.

При последовательном соединении ветвей уравнение ВАХ двух ветвей с параметрами  $E_1, I_1$  и  $E_2, I_2$  будет иметь вид

$$[u - (E_1 + E_2)] \otimes \rho (I_1 \otimes I_2 - i) = 0, \quad (10b)$$

где  $u$  — суммарное напряжение двух последовательных ветвей, а при параллельном соединении

$$(u - E_1) \otimes \rho (I_1 - i) \oplus (u - E_1 - E_2) \otimes \rho (I_1 + I_2 - i) = 0, \quad (10в)$$

где  $i$  — суммарный ток двух параллельных ветвей.

Определим, как и в предыдущем примере, все направленные контуры. Пусть суммы напряжений источников в этих контурах образуют последовательность

$$e_1 \leq e_2 \leq e_3 \leq e_4 \leq e_5 \leq e_6 \leq e_7 \leq e_8 \leq e_9.$$

Для всех контурных токов при сохранении нумерации контуров запишем:

$$\begin{aligned} J_1 &\leq I_1 I_4 I_{10}; J_2 \leq I_1 I_5 I_9; J_3 \leq I_1 I_5 I_7 I_{10}; \\ J_4 &\leq I_1 I_3 I_6 I_{10}; J_5 \leq I_1 I_3 I_7 I_9; J_6 \leq I_1 I_3 I_7 I_8 I_{10}; \\ J_7 &\leq I_2 I_6 I_{10}; J_8 \leq I_2 I_7 I_9; J_9 \leq I_2 I_8 I_{10} I_7. \end{aligned}$$

Тогда результирующее напряжение ВАХ всей схемы относительно напряжения  $u$  между точками 1—6 и относительно тока  $i$  в общей ветви будет иметь вид:

$$\begin{aligned} (u - e_1) \otimes \rho(J_1 - i) \oplus (u - e_1 - e_2) \otimes \rho(J_1 + J_2 - i) \oplus (u - \\ - e_1 - e_2 - e_3) \otimes \rho(J_1 + J_2 + J_3 - i) \oplus (u - e_1 - e_2 - e_3 - \\ - e_4) \otimes \rho(J_1 + J_2 + J_3 + J_4 - i) \oplus \\ \oplus \left( u - \sum_{i=1}^9 e_i \right) \otimes \rho \left( \sum_{i=1}^9 J_i - i \right) = 0 \end{aligned}$$

или в сокращенной записи

$$\sum_{k=1}^9 \left( u - \sum_{i=1}^k e_i \right) \otimes \rho \left( \sum_{i=1}^k J_i - i \right) = 0, \quad (11)$$

где  $\int$ —знак «суммирования» по операции « $\oplus$ »;  $k$ —номер контура.

Так как  $i = I_0$ , то равенство (11) дает уравнение относительно напряжения  $u$ .

Пусть в нашем примере заданный ток  $I_0 \geq \sum_{i=1}^6 J_i$ ,

$$I_0 \leq \sum_{i=1}^7 J_i,$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^9 \left( u - \sum_{i=1}^k e_i \right) \otimes \rho \left( \sum_{i=1}^k J_i - I_0 \right) = 0. \quad (12)$$

Так как при  $k > 6$  все члены  $\sum_{i=1}^k J_i - I_0 > 0$ , то члены вида  $u - \sum_{i=1}^k e_i$ , будучи меньше  $\rho \left( \sum_{i=1}^k J_i - I_0 \right)$ , могут быть равны нулю, т. е. удовлетворять уравнению.

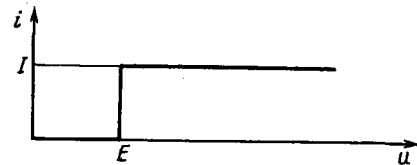
Точно также при  $k < 6$  все члены  $\sum_{i=1}^k J_i - I_0 < 0$ , члены вида  $u - \sum_{i=1}^k e_i$ , будучи меньше  $\rho \left( \sum_{i=1}^k J_i - I_0 \right)$ , не могут быть равны нулю, т. е. не могут удовлетворять уравнению (12).

Таким образом, все члены с  $k < 6$  могут быть отброшены. Приравнявая  $u$  поочередно к значениям  $u = \sum_{i=1}^k e_i$ ,  $k \geq 7$ , найдем, что  $u = \sum_{i=1}^7 e_i = 21$ .

По найденному напряжению и ВАХ каждого контура находим ток каждого контура. В нашем случае  $J_1 = 2$ ,  $J_2 = 1$  и т. д.

Моделирование с помощью вентильной цепи общей задачи линейного программирования рассмотрим на

Рис. 4. Вольт-амперная характеристика ветви по схеме рис. 2, б



конкретном примере. Пусть при ограничительных условиях

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 8; \\ 2x_2 - 5x_3 &\leq 10; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 15, \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

записанных для переменных  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$  и  $x_3 \geq 0$ , необходимо найти те значения этих переменных, которые максимизируют выражение

$$3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = \max. \quad (13b)$$

Этой задаче соответствует вентильная цепь на рис. 5, а, в которой источники тока  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  равны величинам правых частей неравенств (13a), источники э. д. с. — величинам коэффициентов при  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  выражения (13b), коэффициенты трансформации трансформаторов постоянного напряжения, для которых справедливы соотношения  $u_1 = ku_2$ ,  $i_2 = -ki_1$  (рис. 5, з), равны коэффициентам при  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  левых частей неравенств (13a), а ограничения  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$  обеспечиваются благодаря наличию в схеме диодов  $V1$ ,  $V2$  и  $V3$ . Токи цепи  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  дадут искомые значения  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ . Действительно, в электрической цепи минимизируется мощность  $E_1 i_1 + E_2 i_2 + E_3 i_3$ , или, в других обозначениях, выражение  $3x_1 + 5x_2 + 4x_3$ .

Таким образом, для решения задачи линейного программирования необходимо найти токи электрической цепи на рис. 5, а. С этой целью образуем с помощью дополнительных трансформаторов с коэффициентами трансформации  $k_8$ ,  $k_9$ ,  $k_{10}$  (принимая их равными единице) вспомогательный объединяющий контур с током  $\xi$ , напряжением на входе  $\eta$  (рис. 5, б). Как видно из рис. 5, б, первичные обмотки дополнительных трансформаторов включены параллельно источникам тока, а вторичные обмотки — последовательно. Точки 1 и 2 играют роль точек истока и стока в схемах рис. 1 и 2.

Для схемы рис. 5, а, б неравенства для токов будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} 2i_1 + 3i_2 + \xi &\leq 8; \\ 2i_2 + 5i_3 + \xi &\leq 10; \\ 3i_1 + 2i_2 + 4i_3 + \xi &\leq 15, \end{aligned} \right\} \quad (14a)$$

а для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} 2u_1 + 3u_3 &\geq E_1; \\ 3u_1 + 2u_2 + 2u_3 &\geq E_2; \\ 5u_2 + 4u_3 &\geq E_3; \\ \eta + u_1 + u_2 + u_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14b)$$

Отметим, что неравенства (14a) образуют прямую задачу линейного программирования, а неравенства (14b)—двойственную задачу [6]. Объединяя неравенства (14a) в одно, получаем

$$(8 - 2i_1 - 3i_2) \otimes (10 - 2i_2 - 5i_3) \otimes (15 - 3i_1 - 2i_2 - 4i_3) - \xi \geq 0. \quad (15a)$$

Аналогично, объединение неравенств (14b) в одно

дает:

$$\eta - (E_1 - 3u_1 - u_2 - 4u_3) \oplus (E_2 - 4u_1 - 3u_2 - 3u_3) \oplus (u_1 - 6u_2 - 5u_3) \geq 0. \quad (15б)$$

Если цепь на рис. 5, б имеет решение, то выражения (15) при определенных значениях  $i_1, i_2, i_3$  будут

$$I - \xi \geq 0, \quad (15в)$$

$$\eta - U \geq 0. \quad (15г)$$

Последним двум неравенствам соответствует внешняя характеристика рис. 5, в с уравнением  $(I - \xi) \otimes (\eta - U) = 0$ .

Запишем полную систему уравнений для токов и напряжений с учетом токов диодов  $V4-V3$   $i_4, i_5, i_6$  и напряжений диодов  $V1-V3$   $u_4, u_5, u_6$  (рис. 5, а):

$$\left. \begin{aligned} 2i_1 + 3i_2 + i_4 + \xi &= 8; \\ 2i_2 + 5i_3 + i_5 + \xi &= 10; \\ 3i_1 + 2i_2 + 4i_3 + i_6 + \xi &= 15; \\ 2u_1 + 3u_3 - u_4 &= 3; \\ 3u_1 + 2u_2 + 2u_3 - u_5 &= 5; \\ 5u_2 + 4u_3 - u_6 &= 4; \\ u_1 + u_2 + u_3 &= \eta. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Как известно, такие системы решаются методом итераций, которые заканчиваются, когда  $\xi = 0$ . Пусть на одном из шагов известно базовое решение:  $i_3 = 0,4$ ;  $i_6 = 5,4$ ;  $u_5 = 1,1$ ;  $u_1 = 1,5$ ;  $u_2 = 0,8$ ;  $\xi = 8$ ;  $\eta = 2,3$  (остальные значения токов и напряжений равны нулю). На начальном шаге итераций базовые решения принимаются равными нулю.

Поскольку при рассмотренном базовом решении диод  $V1$  находится в критическом состоянии ( $u_4 = 0$ ,  $i_1 = 0$ ), то производим проверку изменения базовых токов и напряжений при открытии диода (заменив его единичным источником тока) и при закрытии (заменив диод единичным источником напряжения). Правые части системы (16) при такой проверке принимаются равными нулю. Для приращений по току, вызванных включением единичного источника, из первых трех уравнений системы (16) получаем после подстановки  $i_1 = 1$ :

$$2 + \Delta\xi = 0; \quad 5\Delta i_3 + \Delta\xi = 0;$$

$$3 + 4\Delta i_3 + \Delta i_6 + \Delta\xi = 0,$$

откуда  $\Delta\xi = -2$ ;  $\Delta i_3 = 0,4$ ;  $\Delta i_6 = -2,6$ .

Составим суммы:

$$\xi_0 = \xi + \alpha\Delta\xi; \quad i_{60} = i_6 + \alpha\Delta i_6,$$

в которых

$$\alpha = \left(-\frac{\xi}{\Delta\xi}\right) \otimes \left(-\frac{i_6}{\Delta i_6}\right) = 2,075 \text{ и } \xi_0 = 3,85, \quad i_{60} = 0,$$

т. е. при включенном состоянии диода  $V1$  диод  $V4$  должен быть выключен, ток  $\xi$  при этом уменьшается, что говорит о правильном направлении итерации.

Новая базисная система уравнений, соответствующая новой структуре схемы, будет иметь вид:

$$2i_1 + \xi = 8; \quad 5i_3 + \xi = 10;$$

$$3i_1 + 4i_3 + \xi = 15,$$

откуда

$$i_1 = \frac{27}{13}; \quad i_3 = \frac{16}{13}; \quad \xi = \frac{50}{13},$$

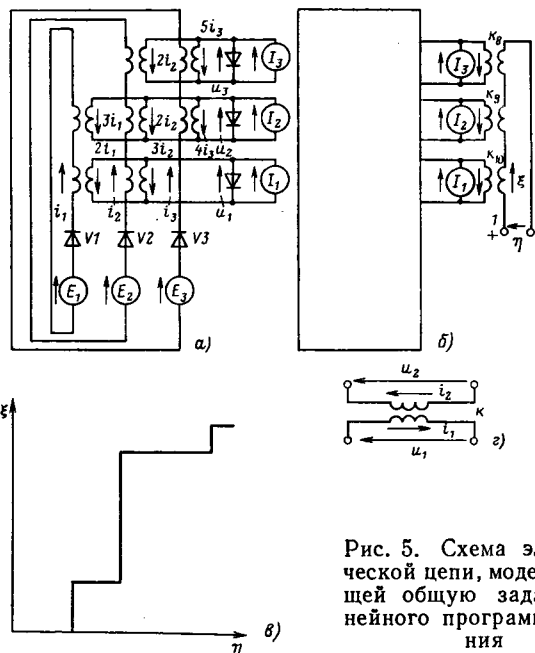


Рис. 5. Схема электрической цепи, моделирующей общую задачу линейного программирования

В критическом состоянии находится диод  $V2$ . Проверка его включенного состояния дает сразу окончательное решение задачи ( $\xi = 0$ ):

$$i_1 = \frac{89}{41}; \quad i_2 = \frac{50}{41}; \quad i_3 = \frac{62}{41}; \quad i_4 = i_5 = i_6 = 0;$$

$$u_4 = u_5 = u_6 = 0; \quad u_1 = \frac{45}{41}; \quad u_2 = \frac{24}{41}; \quad u_3 = \frac{11}{41}.$$

Существующая практика решения вентильных схем на ЭВМ предусматривает принятие начального предположения, что все вентили находятся в закрытом состоянии, затем по полученной структуре схемы определяются те вентили, которые должны быть включены. Со поставление методов анализа вентильных схем с методами решения общей задачи линейного программирования показывает, что такая постановка вопроса для достаточно сложной схемы неправомерна, так как вновь образованная структура схемы может давать в решении отрицательные токи через вентили, т. е. требовать новых уточнений, окончание которых не может быть заранее предсказано.

Таким образом, более строгой при анализе возможной структуры вентильной схемы, в том числе преобразовательной, на ЭВМ, является методика линейного программирования.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деннис Дж. Б. Математическое программирование и электрические цепи. — М.: Инстр. лит-ра, 1961.
2. Беркович Е. И. Анализ вентильных преобразователей с применением модуль — функций. — Электричество, № 12, 1983.
3. А. С. № 175749 (СССР). Моделирующее устройство для расчета сетевых графиков/Г. Е. Пухов, В. В. Васильев. Опул в Б. И., 1965, № 20.
4. Анисков В. В., Витенберг И. М. Электрическое моделирование задач сетевого планирования и управления. — М.: Энергия, 1973.
5. Гинзбург С. А. Математическая непрерывная логика и изображение функций. — М.: Энергия, 1968.
6. Данциг Дж., Форд Л., Фулкерсон Д. Алгоритм для одновременного решения прямой и двойственной задач линейного программирования. — В кн.: Линейные неравенства и смежные вопросы, — М.: Инстр. лит-ра, 1959.

[17.06.86]

## Критериальный анализ задач и резервирования в системах промышленного электроснабжения

ТЮХАНОВ Ю. М., УСИХИН В. Н.

Обеспечение оптимального резервирования в системах электроснабжения промышленных предприятий является одной из важнейших проблем при разработке электротехнической части проектов. Как известно, оптимальность любого проектного решения должна устанавливаться по условию минимума соответствующей функции приведенных затрат. Одной из составляющих такой функции в условиях рассматриваемой задачи является ущерб от перерыва в электроснабжении. Следует отметить, что величина ущерба от перерыва в электроснабжении на стадии проектирования определима только с весьма значительной погрешностью, которая, например, для потребителей нефтеперерабатывающих заводов и предприятий по производству труб составляет несколько десятков процентов [1, 2]. При учете погрешности в исходной информации необходим и достаточен [3] поиск не точки оптимума исследуемой функции, а области устойчивости оптимизации (ОУО), под которой понимается область, содержащая точку оптимума, причем внутри ОУО относительные изменения функции не превышают погрешности в исходной информации. Как следует из принципа равнопрочности элементов исследования [4], все варианты проектных решений, соответствующие ОУО, являются равноэкономичными, т.е. ни об одном из них нельзя сказать, что он хуже оптимального, или что какой-то из них лучше другого.

Для оценки границ ОУО весьма эффективны методы критериального анализа [5], позволяющие устанавливать эти границы без осуществления оптимизации в конкретной задаче. В частности, критериальным анализом была установлена перспективность экономической оценки ущерба от отклонений напряжения в узлах нагрузки с асинхронными двигателями [6]; аналогичный вывод сформулирован [7] для ламп накаливания, изготовленных на повышенные напряжения. Методами критериального анализа была установлена необходимость полной компенсации реактивных нагрузок в промышленных электрических сетях 0,38—0,66 кВ [8], а также определены условия полного использования компенсирующей способности синхронных двигателей [9]. Возможность представления результатов критериального анализа в безразмерной форме и их независимость от конкретных численных значений большинства параметров анализируемых задач обуславливает перспективность его использования и для оценки оптимальности резервирования в системах электроснабжения промышленных предприятий, и, в частности, при выборе числа трансформаторов в комплектных трансформаторных подстанциях (КТП). В настоящее время КТП изготавливаются с одним или двумя трансформаторами. При последующем изложении будем полагать, что независимо от числа трансформаторов КТП мощность нагрузки последней и схема распределения электроэнергии ниже шин 0,38—0,66 кВ КТП остаются неизменными, а при отказе одного трансформатора (или любого другого последовательного элемента в цепи трансформатора) остающийся в работе трансформатор с учетом своей перегрузочной способности обеспечивает на время, необходимое для ликвидации аварии, электроснабжение потребителей без ограничения по мощности, т.е. у двухтрансформаторных КТП отказ одного трансформатора к ущербу не приводит.

Введем следующие обозначения:  $q_c$  — вероятность перерыва в электроснабжении в точке подключения рассматриваемой КТП к системе электроснабжения (т.е. вероятность отказа в питающей КТП системе электроснабжения);  $q$  — вероятность отказа (перерыва в электроснабжении) последовательной цепи от точки подключения одного из трансформаторов КТП к питающей системе электроснабжения до шин низшего напряжения этого трансформатора КТП;  $x$  — число трансформаторов на КТП;  $y$  — ущерб от перерыва в электроснабжении на шинах низшего напряжения КТП;  $z_1, z_2$  — приведенные затраты, обусловленные установкой одно- и двухтрансформаторной КТП.

Структурная схема для расчета вероятности отказа при одно- и двухтрансформаторных КТП приведена на рис. 1.

Согласно [10] суммарная вероятность отказа системы (рис. 1) равна для одной трансформаторной КТП

$$q_{\Sigma} = q_c + q(1 - q_c), \quad (1)$$

а для двухтрансформаторной КТП —

$$q_{\Sigma} = q_c + q^2(1 - q_c). \quad (2)$$

Таким образом, зависимость  $q_{\Sigma} = f(x)$  можно представить в виде

$$q_{\Sigma} = q_c + q^x(1 - q_c). \quad (3)$$

Функциональная зависимость приведенных затрат КТП от числа трансформаторов может быть найдена следующим образом. Через три точки с координатами  $x = 0, z = 0$ ;  $x = 1, z = z_1$  и  $x = 2, z = z_2$  может быть проведена единственная кривая вида:

$$z(x) = Ax^{\alpha}, \quad (4)$$

неизвестные параметры  $A, \alpha$  которой определяются из условий:

$$1. \text{ При } x = 1 \quad z(x) = z_1, \text{ или } A = z_1. \quad (5)$$

$$2. \text{ При } x = 2 \quad z(x) = z_2, \text{ или } 2^{\alpha}A = z_2. \quad (6)$$

После подстановки (5) в (6) и решения относительно  $\alpha$  имеем

$$\alpha = 1,44 \ln \frac{z_2}{z_1} \quad (7)$$

или

$$z(x) = z_1 x^{1,44 \ln z_2/z_1}. \quad (8)$$

С учетом изложенного подлежащая оптимизации функция суммарных затрат представляется в виде

$$F = z_1 x^{\alpha} + y q_{\Sigma}$$

или

$$F = z_1 x^{\alpha} + (1 - q_c) y q^x + y q_c. \quad (9)$$

Последнее слагаемое в (9) характеризует ущерб, обуславливаемый отказом в питающей КТП системе электроснабжения, величина которого не зависит от числа трансформаторов КТП. Поэтому оптимальное число трансформаторов КТП должно соответствовать минимуму выражения

$$f = z_1 x^{\alpha} + (1 - q_c) y q^x \rightarrow \min. \quad (10)$$

Нетрудно заметить, что при увеличении  $x$  первое слагаемое в (10) растет, а второе — уменьшается (поскольку  $q < 1$ ), т.е. при некотором значении  $x = x_0$  значение  $f$  минимально и равно  $f = f_0$ . Для критериального анализа (10) введем обозначения:  $\varphi = f/f_0$  — относительное значение целевой функции;  $z = x/x_0$  — относительное значение числа трансформаторов.

Разделив обе части (10) на  $f_0$ , с учетом введенных обозначений получим:

$$\varphi = \frac{z_1 x_0^{\alpha}}{f_0} \left( \frac{x}{x_0} \right)^{\alpha} + \frac{(1 - q_c) y}{f_0} q^{\frac{x}{x_0}}$$

или

$$\varphi = \frac{z_1 x_0^{\alpha}}{f_0} z^{\alpha} + \frac{(1 - q_c) y}{f_0} q^{x_0 z}. \quad (11)$$

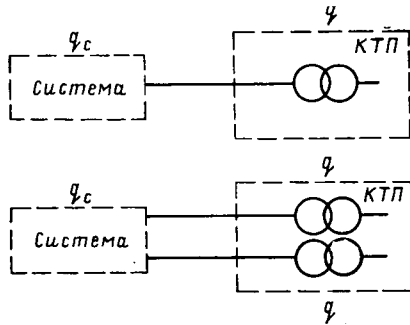


Рис. 1

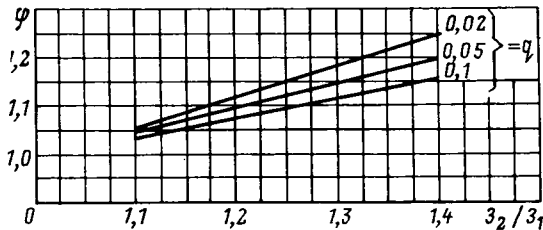


Рис. 2

Выражение (11), являясь записью (10) в относительных единицах, обладает следующими свойствами: его минимум соответствует значению  $z=1$  (т. е.  $x=x_0$ ) и равен  $\alpha=1$  (так как в этой точке  $f=f_0$ ).

Критерии подобия для (11) определим как

$$\pi_1 = \frac{z_1 x_0}{f_0}, \quad \pi_2 = \frac{(1-q_c) y}{f_0}, \quad (12)$$

а запись (11) в критериальной форме имеет вид:

$$\varphi = \pi_1 z^\alpha + \pi_2 q^{x_0 z}. \quad (13)$$

Поскольку число слагаемых в (13) на единицу превышает число переменных, то в иной форме значения критериев подобия могут быть определены посредством следующей стандартной процедуры. По определению, в точке минимума (13)  $z=1$  и  $\varphi=1$ , т. е.

$$1 = \pi_1 + \pi_2 q^{x_0}, \quad (14)$$

и, кроме того, производная  $d\varphi/dz$  при  $z=1$  равна нулю, чему соответствует равенство

$$0 = \alpha \pi_1 + \pi_2 q^{x_0} \ln q^{x_0}. \quad (15)$$

Совместное решение (14), (15) дает

$$\pi_1 = \frac{-\ln q^{x_0}}{\alpha - \ln q^{x_0}}; \quad \pi_2 = \frac{\alpha}{(\alpha - \ln q^{x_0}) q^{x_0}}, \quad (16)$$

и после подстановки (16) в (13) имеем

$$\varphi = \frac{-\ln q^{x_0}}{\alpha - \ln q^{x_0}} z^\alpha + \frac{\alpha}{\alpha - \ln q^{x_0}} q^{x_0(z-1)}. \quad (17)$$

Отметим, что относительные значения  $\varphi$  по (17) при любых значениях  $z$  не зависят ни от численных значений ущерба, ни от абсолютных значений стоимостных показателей КТП с разным числом трансформаторов, а определяются только показателем степени  $\alpha$ , пропорциональным, согласно (7), логарифму отношения затрат на КТП, вероятностью отказа  $q$  и значением оптимального числа трансформаторов на КТП. Подобные выводы вообще характерны для результатов критериального анализа, и при всей их неожиданности они отнюдь не парадоксальны, поскольку, в частности, в условиях рассматриваемой задачи факторы, не влияющие непосредственно на относительное значение затрат  $\varphi$ , определяют значение  $x_0$ .

Практическая применимость (17) заключается в следующем: значения  $\alpha$  и  $q$  в отличие от  $y$ , определяющего  $x_0$ , на стадии проектирования известны, поэтому, задавая, например,  $x_0=1$ , по (17) можно определить возможное увеличение затрат, если

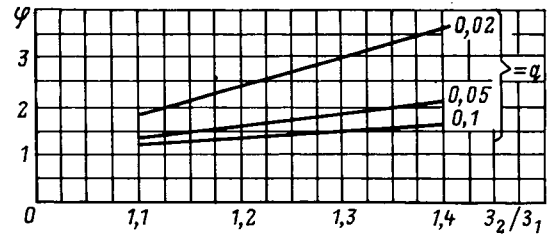


Рис. 3

вместо оптимального варианта (однотрансформаторной КТП) принята двухтрансформаторная подстанция (т. е.  $z=2$ ). Аналогично, задавая  $x_0=2$ , можно определить увеличение затрат, если вместо оптимального варианта с двухтрансформаторной КТП принят вариант с однотрансформаторной ( $z=0,5$ ).

**Пример.** Для электроснабжения потребителей общей мощностью  $S=2240$  кВ·А рассматриваются варианты применения однотрансформаторной КТП с масляным трансформатором 2500 кВ·А с выходом двух магистралей с нагрузкой 1120 кВ·А каждая, либо двухтрансформаторной КТП с масляными трансформаторами  $2 \times 1600$  кВ·А с выходом каждого трансформатора на магистраль с нагрузкой 1120 кВ·А. Отношение приведенных затрат на КТП с учетом питающих линий и выключателей 10 кВ в рассматриваемых вариантах  $z_2/z_1=1,15$ , вероятность отказа  $q=0,025$ . Определить возможные увеличения приведенных затрат относительно оптимума в вариантах.

**Решение.** Допустим, что оптимальным числом трансформаторов КТП является  $x_0=1$ , и оценим возможное увеличение затрат при установке двухтрансформаторной КТП.

По (7)  $\alpha=0,2$ .

По (16):  $\pi_1=0,95$ ;  $\pi_2=0,05$ .

По (17) при  $z=2$   $\varphi=1,09$ , т. е. возможное увеличение затрат составляет 9 %, что значительно меньше погрешности в определении ущерба от перерыва электроснабжения. Иными словами, если теоретически оптимальное число трансформаторов КТП равно 1, то варианты с одно- и двухтрансформаторными подстанциями равноэкономичны.

Если же ущерб от перерыва в электроснабжении у рассматриваемых потребителей таков, что оптимальной является двухтрансформаторная КТП, то применение однотрансформаторной КТП приведет к росту затрат, определяемому при  $z=0,5$  следующим образом:  $\pi_1=0,97$ ;  $\pi_2=0,03$ ,  $\varphi=2,04$ .

На практике в зависимости от длины и конструктивного исполнения линии между рассматриваемой КТП и точкой ее подключения к питающей системе, а также от числа и типа коммутирующих аппаратов между точкой подключения к питающей системе и КТП, значения  $q$  составляют несколько процентов, а отношение приведенных затрат  $z_2/z_1$  лежит в пределах 1,1—1,4. Для  $q=0,02$ —0,1 и  $z_2/z_1=1,1$ —1,4 на рис. 2 и 3 представлены относительные изменения функции приведенных затрат при отклонениях числа трансформаторов КТП от оптимума, причем рис. 2 соответствует изменению суммарных затрат в зависимости от  $q$  и  $z_2/z_1$  при условии, что «теоретически» оптимальным является вариант с однотрансформаторной КТП, но к установке принята двухтрансформаторная КТП, а рис. 3 — случаю, когда вместо оптимального варианта с двухтрансформаторной КТП к установке принята однотрансформаторная.

Данные рис. 2 и 3 свидетельствуют в пользу более осторожной стратегии при выборе числа трансформаторов КТП. Завышение числа трансформаторов на КТП согласно рис. 2 может привести к увеличению значения затрат, не превышающему погрешности в оценке возможного ущерба от перерыва в электроснабжении, что свидетельствует о равноэкономичности вариантов. В то же время при установке однотрансформаторной КТП в случае, когда оптимальным решением является КТП с двумя трансформаторами, увеличение суммарных затрат составляет десятки и сотни процентов.

Необходимо отметить, что формула (8) справедлива для определения затрат не только в зависимости от числа трансформаторов КТП, но и для любых других элементов системы электроснабжения. В последнем случае под  $z_1$  понимаются затраты на один некоторый элемент, а под  $z_2$  — на два взаиморезервируемых элемента. Поэтому предложенный подход к решению задачи принципиально применим для анализа изменений затрат при составлении любых вариантов электроснабжения потребителей по одному нерезервируемому или двум взаиморезервируемыми элементам системы электроснабжения.

**Выводы.** Полученное критериальное уравнение позволяет оценивать изменения суммарных затрат при изменении числа

трансформаторов на КТП, причем наличие для этого данных относительно ущерба от перерыва в электроснабжении не является обязательным.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Червонный Е. М., Щеголькова Т. М. Регрессионный анализ ущерба от нарушений электроснабжения нефтеперерабатывающих заводов. — Изв. вузов. Электромеханика, 1982, № 9.
2. Вожков М. И., Малеко В. А. Оценка ущерба от перерывов электроснабжения трубного производства. — Инструктивные указания по проектированию электротехнических промышленных установок, 1983, № 6.
3. Веников В. А., Глазунов А. А., Тюханов Ю. М. Математические модели формирования оптимальных схем электроснабжения при автоматизированном проектировании. — Электричество, 1983, № 1.
4. Грекова И. Методологические особенности прикладной математики на современном этапе ее развития. — Вопросы философии, 1976, № 6.
5. Метод относительных единиц при решении некоторых

технико-экономических задач энергетики / В. А. Веников, Ю. Н. Астахов, Э. Н. Зуев, Д. Д. Карасев. — Электричество, 1967, № 8.

6. Тюханов Ю. М., Архипенко В. В. Определение области экономической устойчивости функции расчетных затрат, зависящих от уровня напряжения на горнообогатительных предприятиях. — В кн.: Регулирование напряжения в электрических сетях. М.: Энергия, 1968.
7. Кунгс Я. А., Тюханов Ю. М. О выборе расчетного напряжения ламп накаливания. — Светотехника, 1985, № 8.
8. Тюханов Ю. М., Усехин В. Н. Применение критериального анализа и шагового метода расчета при выборе мощности компенсирующих средств. — Изв. вузов. Электромеханика, 1982, № 9.
9. Усехин В. Н. Оценка экономичности использования компенсирующей способности синхронных двигателей методами теории подобия — Изв. вузов. Энергетика, 1984, № 2.
10. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории вероятности. — М.: Радио и связь, 1983.

[16.09.86]

УДК 621.316.925.001.24

## Анализ четырехугольной характеристики срабатывания избирательного органа сопротивления устройства ОАПВ при различных коэффициентах компенсации

МИХАЙЛОВА М. В., инж.

В настоящее время в устройствах однофазного автоматического повторного включения (ОАПВ) для линий 500—750 кВ используются избирательные органы (ИО) сопротивления, включающие на фазное напряжение и фазный ток, компенсированный током нулевой последовательности, и имеющие характеристику срабатывания в виде двух пересекающихся окружностей [1].

Недостатками такой характеристики срабатывания являются, во-первых, возможность неполного охвата замеров сопротивления в поврежденных фазах при замыканиях на землю через переходное сопротивление  $R_3$  на удаленном от места установки устройства ОАПВ конце линии, что приводит к каскадному отключению повреждения при сравнительно небольших значениях  $R_3$ , и, во-вторых, пониженная чувствительность в области пересечения окружностей. Кроме того, составная форма характеристики срабатывания вызывает необходимость проверки «защелкивания» двух окружностей при выборе ее параметров [2, 3]. Следует учитывать, что, как правило, для обеспечения отстройки характеристики срабатывания ИО сопротивления от замеров сопротивления в неповрежденных фазах при однофазных замыканиях на землю вблизи места установки устройства ОАПВ необходимо снижать значения коэффициента компенсации по току нулевой последовательности вплоть до нуля. В случае составной характеристики срабатывания верхняя окружность формируется с коэффициентом компенсации, выбранным в соответствии с выражением

$$k = \frac{Z_{0л} - Z_{1л}}{3Z_{1л}}, \quad (1)$$

где  $Z_{1л}$  и  $Z_{0л}$  — модули сопротивлений соответственно прямой и нулевой последовательности защищаемой линии (в общем случае с учетом взаимной индукции).

Нижняя окружность формируется со сниженным коэффициентом  $k$  (в том числе равным нулю).

Это позволяет анализировать каждую из окружностей характеристики в соответствующей комплексной плоскости сопротивления: верхнюю — в плоскости

$$Z' = \frac{\dot{U}_\phi}{\dot{I}_\phi + k'3\dot{I}_{0т}}, \quad (2)$$

а нижнюю — в плоскости

$$Z'' = \frac{\dot{U}_\phi}{\dot{I}_\phi + k''3\dot{I}_{0т}}. \quad (3)$$

В выражениях (2) и (3)  $\dot{U}_\phi$ ,  $\dot{I}_\phi$ ,  $\dot{I}_0$  — соответственно фазное напряжение, фазный ток и ток нулевой последовательности;  $k'$  — коэффициент компенсации, соответствующий выражению (1);  $k'' < k'$ .

Во вновь разрабатываемых устройствах ОАПВ для линий сверхвысокого напряжения предусматривается выполнение ИО сопротивления с характеристикой срабатывания в виде четырехугольника [4]. Такая форма характеристики обеспечивает несколько больший охват замеров сопротивления в поврежденных фазах при замыканиях на землю через  $R_3$  на удаленном конце линии и не имеет остальных отмеченных выше недостатков, присущих ИО с составной характеристикой срабатывания.

Как указано выше, для отстройки от замеров сопротивления в неповрежденных фазах при однофазном замыкании на землю вблизи места установки устройства ОАПВ необходимо иметь сниженный коэффициент компенсации по току нулевой последовательности. При использовании ИО сопротивления с характеристикой в виде одного четырехугольника, вершины которого располагаются в разных квадрантах комплексной плоскости сопротивления (рис. 1) и имеют отличающиеся коэффициенты компенсации, возникает вопрос о способах анализа такой характеристики срабатывания и методе выбора ее параметров. Ниже даются анализ рассматриваемой характеристики срабатывания с использованием способа приведения ее параметров к плоскостям, соответствующим заданным коэффициентам компенсации, и основанный на нем метод выбора этих параметров.

Предположим, что вершины  $Z_I$  и  $Z_{II}$  четырехугольника формируются с коэффициентом компенсации  $k=k'$ , а  $Z_{III}$  и  $Z_{IV}$  — с коэффициентом компенсации  $k=k''$ . В этом случае в устройстве ИО сравниваются между собой следующие э. д. с.:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_I &= k_1 \dot{U}_{\phi.т} + k_2 (\dot{I}_{\phi.т} + k' 3\dot{I}_{0т}); \\ \dot{E}_{II} &= k_3 \dot{U}_{\phi.т} + k_4 (\dot{I}_{\phi.т} + k' 3\dot{I}_{0т}); \\ \dot{E}_{III} &= k_5 \dot{U}_{\phi.т} + k_6 (\dot{I}_{\phi.т} + k'' 3\dot{I}_{0т}); \\ \dot{E}_{IV} &= k_7 \dot{U}_{\phi.т} + k_8 (\dot{I}_{\phi.т} + k'' 3\dot{I}_{0т}), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где индекс «т» означает некоторый текущий режим, соответствующий подводимым напряжению и токам к ИО рассматриваемой фазы.

Характеристика срабатывания ИО может быть представлена в двух плоскостях комплексного сопротивления:  $Z'$  — в соответствии с выражением (2) и  $Z''$  — в соответствии с выражением (3).



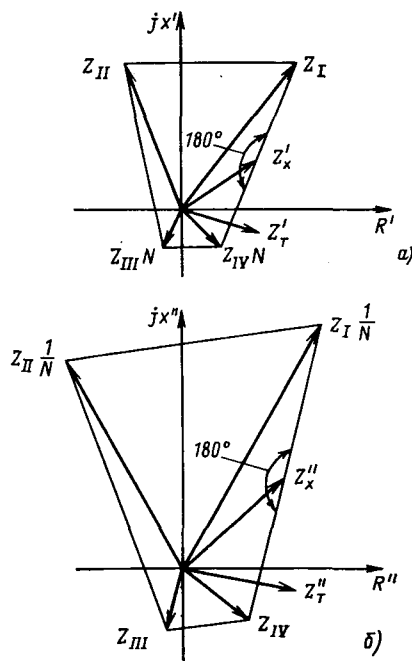


Рис. 1. Характеристика срабатывания ИО сопротивления в виде четырехугольника:

а) в плоскости  $Z' = \frac{\dot{U}_\Phi}{i_\Phi + k'3i_{от}}$ ;

б) в плоскости  $Z'' = \frac{\dot{U}_\Phi}{i_\Phi + k''3i_{от}}$

Для построения характеристики в плоскости  $Z'$  преобразуем выражения системы (4) к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_I &= k_1 (i_{\Phi.т} + k'3i_{от}) \left( Z'_T + \frac{k_2}{k_1} \right) = \\ &= k_1 (i_{\Phi.т} + k'3i_{от}) (Z'_T - Z_I); \\ \dot{E}_{II} &= k_3 (i_{\Phi.т} + k'3i_{от}) \left( Z'_T + \frac{k_4}{k_3} \right) = \\ &= k_3 (i_{\Phi.т} + k'3i_{от}) (Z'_T - Z_{II}); \\ \dot{E}_{III} &= k_5 (i_{\Phi.т} + k'3i_{от}) \left( Z'_T + \frac{k_6}{k_5} \frac{i_{\Phi.т} + k''3i_{от}}{i_{\Phi.т} + k'3i_{от}} \right) = \\ &= k_5 (i_{\Phi.т} + k'3i_{от}) (Z'_T - Z_{III}N_T); \\ \dot{E}_{IV} &= k_7 (i_{\Phi.т} + k'3i_{от}) \left( Z'_T + \frac{k_8}{k_7} \frac{i_{\Phi.т} + k''3i_{от}}{i_{\Phi.т} + k'3i_{от}} \right) = \\ &= k_7 (i_{\Phi.т} + k'3i_{от}) (Z'_T - Z_{IV}N_T), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где  $Z'_T = \frac{\dot{U}_{\Phi.т}}{i_{\Phi.т} + k'3i_{от}}$  — значение сопротивления, измеряемого

ИО в плоскости  $Z'$ ;  $Z_I = -\frac{k_2}{k_1}$ ;  $Z_{II} = -\frac{k_4}{k_3}$ ;  $Z_{III} = -\frac{k_6}{k_5}$ ;

$Z_{IV} = -\frac{k_8}{k_7}$  — сопротивления срабатывания ИО (уставки);

$N_T = \frac{1 + k'' \frac{3i_{от}}{i_{\Phi.т}}}{1 + k' \frac{3i_{от}}{i_{\Phi.т}}}$  — коэффициент пересчета, являющийся функ-

цией токов текущего режима.

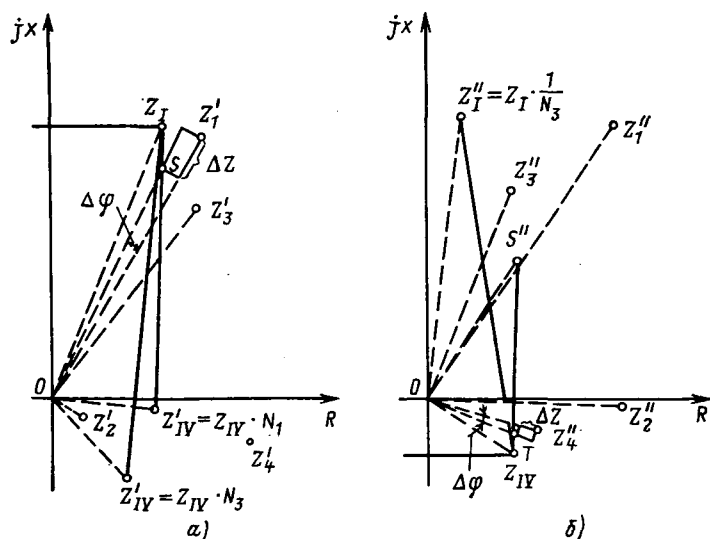


Рис. 2. Построение правой граничной линии характеристики:

а) в плоскости  $Z' = \frac{\dot{U}_\Phi}{i_\Phi + k'3i_{от}}$ ;

б) в плоскости  $Z'' = \frac{\dot{U}_\Phi}{i_\Phi + k''3i_{от}}$

Аналогично для построения характеристики в плоскости  $Z''$  преобразуем выражения системы (4) к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_I &= k_1 (i_{\Phi.т} + k'3i_{от}) \left( Z''_T + \frac{k_2}{k_1} \frac{i_{\Phi.т} + k'3i_{от}}{i_{\Phi.т} + k''3i_{от}} \right) = \\ &= k_1 (i_{\Phi.т} + k'3i_{от}) \left( Z''_T - Z_I \frac{1}{N_T} \right); \\ \dot{E}_{II} &= k_3 (i_{\Phi.т} + k'3i_{от}) \left( Z''_T + \frac{k_4}{k_3} \frac{i_{\Phi.т} + k'3i_{от}}{i_{\Phi.т} + k''3i_{от}} \right) = \\ &= k_3 (i_{\Phi.т} + k'3i_{от}) \left( Z''_T - Z_{II} \frac{1}{N_T} \right); \\ \dot{E}_{III} &= k_5 (i_{\Phi.т} + k'3i_{от}) \left( Z''_T + \frac{k_6}{k_5} \right) = \\ &= k_5 (i_{\Phi.т} + k'3i_{от}) (Z''_T - Z_{III}); \\ \dot{E}_{IV} &= k_7 (i_{\Phi.т} + k'3i_{от}) \left( Z''_T + \frac{k_8}{k_7} \right) = \\ &= k_7 (i_{\Phi.т} + k'3i_{от}) (Z''_T - Z_{IV}), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $Z''_T = \frac{\dot{U}_{\Phi.т}}{i_{\Phi.т} + k''3i_{от}}$  — значение сопротивления, измеряемого

ИО в плоскости  $Z''$ .

Из системы уравнений (5) видно, что величины  $Z_I$  и  $Z_{II}$  являются вершинами характеристики срабатывания в плоскости  $Z'$ , в то время как  $Z_{III}$  и  $Z_{IV}$  — только уставками ИО при  $k = k'$ , которым в указанной плоскости соответствуют текущие значения вершин  $Z'_{III} = Z_{III}N_T$  и  $Z'_{IV} = Z_{IV}N_T$ , являющиеся функциями токов текущего режима. Аналогично из системы уравнений (6) видно, что в плоскости  $Z''$  величины  $Z_{III}$  и  $Z_{IV}$  являются вершинами характеристики срабатывания, а  $Z_I$  и  $Z_{II}$  — только уставками ИО при  $k = k'$ , которым в указанной плоскости соответствуют текущие значения вершин  $Z''_I = Z_I \frac{1}{N_T}$ ,  $Z''_{II} = Z_{II} \frac{1}{N_T}$ .

Из систем уравнений (5) и (6) и обозначений для  $Z'_T$ ,  $Z''_T$  и  $N_T$  видно, что

$$\frac{Z'_T}{Z''_T} = N_T;$$

$$\frac{Z'_T - Z'_i}{Z'_T - Z'_i} = N_T; \quad (8)$$

$$\frac{Z'_T}{Z'_i} = \frac{Z''_T}{Z''_i}, \quad (9)$$

где  $i$  — номер рассматриваемой вершины характеристики ИО в соответствующей комплексной плоскости.

Таким образом, отношение между векторами, определяющими взаимное положение текущего значения сопротивления, замераемого ИО, и вершины его характеристики в плоскостях  $Z'$  и  $Z''$ , определяется коэффициентом пересчета  $N_T$ , а отношение между значениями текущего сопротивления и вершины характеристики одинаково в обеих плоскостях.

Отметим, что выражения (8) и (9) справедливы не только для вершин рассматриваемой характеристики, но и для любой пары точек  $Z'_i$  и  $Z''_i$  (в плоскостях соответственно  $Z'$  и  $Z''$ ), для которых выполняется соотношение  $Z'_i \cdot Z''_i = N_T$ .

Из сказанного выше следует, что в любой из плоскостей ( $Z'$  или  $Z''$ ) характеристика ИО может быть построена только для некоторой пары текущих значений  $Z'_T$  и  $Z''_T$  и соответствующего им значения  $N_T$ . При этом в плоскости  $Z'$  вершины  $Z_{I1}$  и  $Z_{I2}$  постоянны, т. е. не изменяются при изменении  $Z'_T$ , а  $Z_{I3}$  и  $Z_{I4}$  перемещаются при изменении  $Z'_T$ . В плоскости  $Z''$  вершины  $Z_{I1}$  и  $Z_{I4}$  не изменяются, а  $Z_{I2}$  и  $Z_{I3}$  перемещаются при изменении  $Z''_T$ .

На рис. 1, а и б в качестве примера приведены характеристики ИО в плоскостях соответственно  $Z'$  и  $Z''$  при некоторой паре текущих значений замераемого сопротивления  $Z'_T$  и  $Z''_T$ .

Независимо от того, какие токи подводятся к схеме формирования (с различными или одинаковыми коэффициентами компенсации), условие срабатывания ИО не изменяется и соответствует значению угла между подведенными векторами  $\vec{E}_I \div \vec{E}_{IV}$ , равному  $180^\circ$ . Поэтому в любой из плоскостей ( $Z'$  и  $Z''$ ) граничной линией характеристики между ее вершинами с разными коэффициентами компенсации является прямая, положение любой точки на которой соответствует углу  $180^\circ$  между векторами  $\vec{E}_I \div \vec{E}_{IV}$ . Как показано на рис. 1, а, для замераемого при этом сопротивления срабатывания  $Z'_x$  в плоскости  $Z'$  можно записать:

$$\frac{Z_I - Z'_x}{Z_{IV}N_T - Z'_x} = M'e^{j180^\circ} = -M', \quad (10)$$

где  $M'$  меняется от 0 до  $\infty$  при перемещении точки  $Z'_x$  от  $Z_I$  до  $Z_{IV}N_T$ .

Аналогично для характеристики в плоскости  $Z''$  (рис. 1, б)

$$\frac{Z_I \frac{1}{N_T} - Z''_x}{Z_{IV} - Z''_x} = -M''.$$

Учитывая полученное выше отношение (9), легко доказать, что

$$M' = M'' = M.$$

Приведенный анализ характеристики срабатывания ИО с различными коэффициентами компенсации дает возможность разработать метод выбора ее параметров по условиям обеспечения требуемой селективности и проверки чувствительности.

В качестве примера рассмотрим построение правой стороны характеристики ИО с вершинами (установками)  $Z_I$  и  $Z_{IV}$ . Для левой стороны с вершинами  $Z_{I2}$  и  $Z_{I3}$  построение будет производиться аналогично. Построение верхней (в плоскости  $Z'$ ) и нижней (в плоскости  $Z''$ ) сторон характеристики производится по условию обеспечения чувствительности ИО к замыканию на землю через  $R_3$  соответственно на конце линии, противоположном месту установки устройства, и в месте его установки.

На рис. 2, а для плоскости  $Z'$  показаны замеры сопротивлений  $Z'_1, Z'_2, Z'_3$  и  $Z'_4$ . Замеры  $Z'_1$  и  $Z'_2$  более, чем остальные, ограничивают область возможного расположения характеристики,

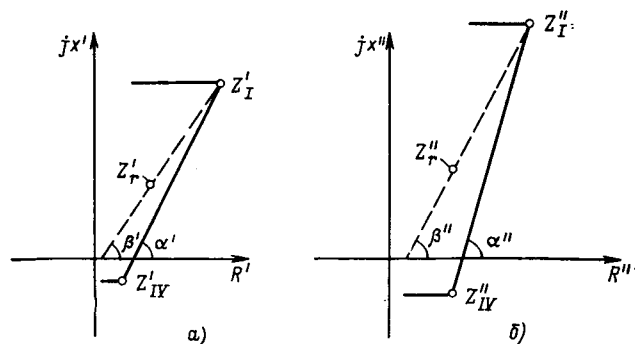


Рис. 3. Проверка чувствительности:

а) в плоскости  $Z' = \frac{U_\Phi}{I_\Phi + k'3I_0}$ ;

б) в плоскости  $Z'' = \frac{U_\Phi}{I_\Phi + k''3I_0}$

причем замер  $Z'_2$  имеет малое по модулю значение, в связи с чем требуется снизить коэффициент компенсации при формировании  $\vec{E}_{IV}$ . В плоскости  $Z''$  с выбранным сниженным коэффициентом компенсации  $k''$  известно положение замеров сопротивления  $Z''_1, Z''_2, Z''_3, Z''_4$  (рис. 2, б), причем наиболее ограничивающими область возможного расположения характеристики являются замеры  $Z''_3$  и  $Z''_4$ . Выбор параметров характеристики производится по условию отстройки от рассматриваемых замеров с учетом возможных погрешностей по модулю ( $\Delta z$ ) и по углу ( $\Delta \phi$ ). В плоскости  $Z'$  вокруг точки  $Z'_1$  строится зона, учитывающая указанные погрешности (рис. 2, а). Крайнюю точку этой зоны, которая определяет положение правой стороны характеристики, назовем точкой  $S$ . В плоскости  $Z''$  аналогичная зона строится вокруг точки  $Z''_4$  (рис. 2, б). Крайнюю точку этой зоны назовем точкой  $T$ .

Для точки  $S$  применим соотношения (8) и (9) с коэффициентом пересчета  $N_4$ , характеризующим пару замеров  $Z'_4$  и  $Z''_4$ , и построим точку  $S''$  в плоскости  $Z''$ . Через полученную таким образом точку  $S''$  и точку  $T$  проведем прямую, которая в рассматриваемой плоскости является правой стороной искомой характеристики для рассмотренной пары замеров. Вершина  $Z_{IV}$  в плоскости  $Z''$  определяется как точка пересечения полученной правой стороны с нижней гранью характеристики. В плоскости  $Z'$  положение вершины  $Z_{IV}$  определяется для  $N_1 = Z'_1/Z''_1$  по выражению  $Z'_{IV} = Z_{IV}N_1$ .

Прямая, проведенная через точки  $Z'_{IV}$  и  $S$ , является правой стороной характеристики при указанном  $N_1$ . Вершина  $Z_I$  в плоскости  $Z'$  определяется как точка пересечения полученной правой стороны с верхней гранью характеристики.

Покажем, что в обеих плоскостях характеристика с полученными таким образом вершинами  $Z_I$  и  $Z_{IV}$  отстроена от всех других имеющихся замеров сопротивления. Рассмотрим, в частности, замер сопротивления  $Z'_3$  ( $Z''_3$ ). В плоскости  $Z'$  с учетом коэффициента пересчета  $N_3 = Z'_3/Z''_3$  определяется положение вершины  $Z'_{IV}$  по выражению  $Z'_{IV} = Z_{IV}N_3$ . В плоскости  $Z''$  определяется положение вершины  $Z'_1$  по выражению  $Z'_1 = Z_I \frac{1}{N_3}$ . Согласно выражениям (8) и (9) соотношения между  $Z_I$  и  $Z_3$ , имеющиеся в плоскости  $Z'$ , выполняются в плоскости  $Z''$  между  $Z''_3$  и  $Z''_1$ , а соотношения между  $Z_{IV}$  и  $Z_3$  в плоскости  $Z''$  выполняются в плоскости  $Z'$  между  $Z'_{IV}$  и  $Z'_3$ .

Вышеизложенное показано на рис. 2, а и б, откуда видно, что характеристика отстроена от замера сопротивления  $Z'_3$  ( $Z''_3$ ). Аналогично можно показать, что характеристика отстроена также и от замера сопротивления  $Z'_2$  ( $Z''_2$ ).

Проверка чувствительности ИО, характеристика которого сформирована при различных коэффициентах компенсации, основывается также на выражениях (8) и (9), показывающих,

что соотношения между значениями измеряемого сопротивления и вершин характеристики в разных плоскостях одинаковы. Поэтому достаточно для какой-либо одной из плоскостей ( $Z'$  или  $Z''$ ) проверить нахождение измеряемого сопротивления в зоне характеристики. В другой плоскости сохранится то же положение.

Предлагаемый метод основан на том, что в случае, когда угол наклона прямой, проведенной через вершину  $Z'_1$  ( $Z''_1$ ) и измеряемое сопротивление в поврежденной фазе, к оси абсцисс меньше угла наклона правой грани характеристики в плоскости  $Z'$  ( $Z''$ ), чувствительность ИО обеспечивается. В противном случае чувствительность ИО не обеспечивается, поскольку измеряемое сопротивление находится вне зоны характеристики.

На рис. 3, а и б показана проверка чувствительности для любой из плоскостей. При этом в каждой плоскости известна характеристика, построенная с учетом коэффициента  $N_T$ , для рассматриваемого по условию чувствительности замера  $Z'_r$  ( $Z''_r$ ).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баумштейн К. И., Смирнова Т. В. Избирательные органы для устройства ОАПВ линии 750 кВ. — М.: Энергия, 1967 — Тр. / ин-т Энергосетьпроект, вып. 7.
2. Дороднова Т. Н., Михайлова М. В., Рубинчик В. А. Исследование расчетных условий для выбора параметров характеристики срабатывания избирательных органов устройства ОАПВ. — Электричество, 1980, № 2.
3. Дороднова Т. Н., Михайлова М. В. Выбор параметров характеристики срабатывания избирательных органов устройств ОАПВ. — В кн.: Автоматическое управление энергосистемами в аварийных режимах. М.: Энергоиздат, 1981.
4. Ермоленко В. М., Козлов В. И., Красева В. Н. Релейная защита и линейная автоматика электропередач высоких напряжений. — Электротехника, 1985, № 8.

[13.04.86]

УДК 62-83:621.65.534

## Крутильные колебания насосных агрегатов с электроприводом по схеме асинхронного вентильного каскада

ХВАТОВ С. В. доктор техн. наук, АНИШЕВ Е. Ю., канд. техн. наук,  
ТИТОВ В. Г., канд. техн. наук, ЮДИН В. В., канд. техн. наук, ЧЕРЕМИСИН В. В., инж..

Одной из рациональных областей применения электропривода по схеме асинхронного вентильного каскада (АВК) являются мощные насосные агрегаты. Они широко используются в качестве главных циркуляционных насосов (ГЦН) атомных электростанций (АЭС) и представляют собой вертикальную конструкцию значительной длины (10—12 м) и массы (до 120 т), выполненную на подшипниках скольжения [1]. Собственная частота механических колебаний этих агрегатов, имеющих большой момент инерции, как правило, достаточно низка. Установленная мощность привода достигает нескольких тысяч киловатт.

Из-за несинусоидальности формы тока ротора АВК  $i_r$  частота вращения и амплитуда его обобщенного вектора колеблются около некоторых средних значений, что приводит к колебаниям электромагнитного момента привода [2, 3].

В статье, написанной по результатам разработок и экспериментальных исследований, проведенных авторами совместно с институтом ВНИИЭлектропривод и Московским вертолетным заводом, убедительно показано, что колебания электромагнитного момента могут явиться источником возникновения в таком агрегате механических резонансных явлений и, как следствие, аварийных процессов разрушения его конструкции [3]. Несомненно, что такие резонансные крутильные колебания должны учитываться при проектировании агрегата. Исследование электромеханических процессов агрегата необходимо начать с анализа мгновенного значения электромагнитного момента АВК, при этом следует заметить, что электропривод ГЦН АЭС в режимах обеспечения станции получает питание от аварийного дизель-генератора. Поэтому целесообразно выражения момента АВК получить аналитически для наиболее общего случая — питания его от явнополюсного синхронного генератора (СГ).

Анализ проведем при следующих допущениях: частота вращения СГ и асинхронной машины (АМ) в рассматриваемой точке постоянны; активные сопротивления цепей СГ и АМ равны нулю.

Фазные токи статора АМ определим, решая уравнения системы СГ — АВК в ортогональной системе осей  $d, q, 0$ , жестко связанной с ротором СГ. Только в этом случае дифференциальные уравнения СГ не содержат периодических коэффициентов. Тогда с учетом принципа постоянства потокоцепления дифференциальные уравнения напряжений статора СГ будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} u_{dr} &= -\frac{x_{dr}}{\omega_1} \frac{di_{dr}}{dt} + E_d'' + x_{qr} i_{qr}; \\ u_{qr} &= -\frac{x_{qr}}{\omega_1} \frac{di_{qr}}{dt} + E_q'' - x_{dr} i_{dr}; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $x_{dr}, x_{qr}$  — сверхпереходные сопротивления СГ по осям  $d, q$  за сверхпереходными э. д. с.  $E_d'', E_q''$ ;  $\omega_1$  — круговая частота СГ;  $i_{dr}, i_{qr}$  — токи статора СГ по осям  $d, q$ , определяемые по первому закону Кирхгофа:

$$i_{dr} = i_{dc} + i_{dн}; \quad i_{qr} = i_{qc} + i_{qн}, \quad (2)$$

где  $i_{dc}, i_{qc}$  — токи статора АМ;  $i_{dн}, i_{qн}$  — фазные токи сетевой группы вентилей тиристорного преобразователя АВК, преобразованные к осям  $d, q$ .

Уравнения напряжений статора АМ в системе осей  $d, q, 0$ :

$$\left. \begin{aligned} u_{dc} &= L_s \frac{di_{dc}}{dt} + L_m \frac{di_{dp}}{dt} - \omega_1 L_s i_{qc} - \omega_1 L_m i_{qp}; \\ u_{qc} &= L_s \frac{di_{qc}}{dt} + L_m \frac{di_{qp}}{dt} + \omega_1 L_s i_{dc} + \omega_1 L_m i_{dp}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $L_s, L_m$  — индуктивность АМ со стороны статора и взаимная индуктивность;  $i_{dp}, i_{qp}$  — токи ротора АМ в осях  $d, q, 0$ .

Учитывая, что в точке присоединения СГ к АМ  $u_{dr} = u_{dc}$ ,  $u_{qr} = u_{qc}$ , приравниваем (1) и (3) и с учетом (2) получаем систему уравнений относительно составляющих токов статора АМ  $i_{dc}, i_{qc}$ :

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{x_{dr}}{\omega_1} + L_s \right) \frac{di_{dc}}{dt} - a i_{qc} &= E_d'' - L_m \frac{di_{qp}}{dt} - \\ &- \frac{x_{dr}}{\omega_1} \frac{di_{dн}}{dt} + i_{qp} x_{м} + i_{qн} x_{qr}; \\ \left( \frac{x_{qr}}{\omega_1} + L_s \right) \frac{di_{qc}}{dt} + b i_{dc} &= E_q'' - L_m \frac{di_{qp}}{dt} - \\ &- \frac{x_{qr}}{\omega_1} \frac{di_{qн}}{dt} - i_{dp} x_{м} + i_{dн} x_{dr}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $a = x_s + x_{qr}$ ;  $b = x_s + x_{dr}$ ;  $x_{м} = \omega_1 L_m$ ;  $x_s = \omega_1 L_s$ .

Решение системы (4) без учета аperiodических составляющих токов, затухающих вскоре после включения АМ, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} i_{dc} &= \frac{E_d'' \sin \omega_1 t - E_q'' \cos \omega_1 t + E_q'' - i_{dp} x_{м} - i_{dн} x_{dr}}{b}; \\ i_{qc} &= \frac{E_d'' \cos \omega_1 t + E_q'' \sin \omega_1 t - E_d'' - i_{qp} x_{м} - i_{qн} x_{qr}}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Используя обратное преобразование координат от осей  $d, q$ , 0 к осям  $A, B, C$ , из (5) получаем выражения фазных токов статора АМ:

$$i_{A, B, C} = \frac{E''}{x_{A2}} \sin(2\omega_1 t + \psi - \varphi_{A2}) - \frac{E''}{x_{A0}} \sin(\psi + \varphi_{A2}) + I_{M0} \sin(\omega_1 t + \psi + \varphi_0) + I_H \sin(\omega_1 t + \varphi_H + \psi) + I_H \sin(\omega_1 t + \psi + \varphi_H), \quad (6)$$

где  $E'' = \sqrt{E_d'^2 + E_q'^2}$  — амплитуда неискаженной ЭДС СГ;

$x_{A2} = \frac{2ab}{a-b}$ ;  $x_{A0} = \frac{2ab}{a+b}$  — индуктивные сопротивления;

$$I_{M0} = \sqrt{\left(\frac{E_q'}{a}\right)^2 + \left(\frac{E_q'}{b}\right)^2}; \quad I_H = x_M \sqrt{\left(\frac{i_{dp}}{b}\right)^2 + \left(\frac{i_{qp}}{a}\right)^2}; \quad I_H = x_{dr} \sqrt{\left(\frac{i_{dn}}{b}\right)^2 + \left(\frac{i_{qn}}{a}\right)^2} — амплитуды$$

векторов намагничивающего и нагрузочного токов, а также тока инвертора в статоре АМ;  $\psi$  — угол фазы: для фазы  $A$   $\psi = 0$ ; для фазы  $B$   $\psi = -120^\circ$ ; для фазы  $C$   $\psi = +120^\circ$ ;

$$\varphi_{A2} = \arctg \frac{E_q'}{E_d'}; \quad \varphi_0 = \arctg \frac{E_q' a}{E_d' b}; \quad \varphi_H = \arctg \frac{i_{dp} a}{i_{qp} b}; \quad \varphi_H = \arctg \frac{i_{dn} a}{i_{qn} b} — углы сдвига фаз токов.$$

Анализ (6) показывает, что при решении уравнения (5) не учитывалась конкретная форма токов роторного и сетевого преобразователей  $i_{dp}, i_{qp}, i_{dn}, i_{qn}$ . Они вошли в выражение токов  $i_{ds}, i_{qs}$  (5) с независимыми от времени коэффициентами. Отсюда следует, что решение (6) является универсальным, поскольку может быть использовано при любой форме фазных токов ротора и инвертора. В (6) первое слагаемое — ток двойной частоты, обусловленный магнитной несимметрией ротора СГ; второе слагаемое — постоянная составляющая фазного тока статора АМ (указанные токи в реальной машине из-за наличия активных сопротивлений аperiodически затухают через некоторый промежуток времени после включения); третье слагаемое в (6) — периодическая составляющая тока контура намагничивания АМ.

Общее выражение электромагнитного момента АМ в ортогональной системе координат  $d, q, 0$  можно записать как

$$M = \frac{3}{2} p_n \frac{x_M}{\omega_1} (i_{dp} i_{qs} - i_{dq} i_{ps}), \quad (7)$$

где  $p_n$  — число пар полюсов обмотки статора АМ.

Подставляя в (7) выражения (5) для токов  $i_{ds}, i_{qs}$  без учета аperiodических составляющих (первых слагаемых) имеем:

$$M = \frac{3p_n x_M}{2\omega_1} \left\{ \left( \frac{x_M}{b} - \frac{x_M}{a} \right) i_{dp} i_{qp} - \left( \frac{E_q' i_{qp}}{b} - \frac{E_d' i_{dp}}{a} \right) + \left( \frac{x_{dr}}{b} i_{dn} i_{dp} - \frac{x_{qr}}{a} i_{qn} i_{qp} \right) \right\}. \quad (8)$$

Формула (8) получена с учетом соизмеримости мощностей АМ и СГ. Она является общим выражением электромагнитного момента АВК. Величины  $x_{qr}/a, x_{dr}/b$  весьма малы и в практических расчетах последним слагаемым в круглых скобках формулы (8) может пренебречь.

Выражение (8) позволяет определить зависимость электромагнитного момента АМ от времени в стационарном режиме работы, а также его высшие гармонические. При этом необходимо знать форму тока ротора ( $i_{dp}, i_{qp}$ ) [4].

Для трапециевидальной формы тока ротора АМ выражения моментов на участках коммутации и межкоммутационных участках имеют вид:

$$M_{\gamma}(t) = \frac{3p_n x_M I_d}{2k_e \omega_1} \left\{ k_{M0} I_{M0} \sin(\gamma - \beta_1 + \varphi_0) + \right.$$

$$+ \frac{\gamma_k i}{\gamma_k} \sin(\gamma - \beta_2 + \varphi_0) + \frac{k_{M0}^2 x_M I_d}{k_e} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \times \\ \times \left[ \frac{1}{2} \sin 2(\gamma - \beta_1) + \frac{\gamma_k i}{\gamma_k} \sin[2\gamma - (\beta_1 + \beta_2)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_k i}{\gamma_k} \right)^2 \sin 2(\gamma - \beta_2) \right] \}; \quad (9)$$

$$M(t) = \frac{3p_n x_M I_d}{2k_e \omega_1} \left\{ k_{M0} I_{M0} \sin(\gamma - \alpha' + \varphi_0) + \right. \\ \left. + \frac{I_d x_M k_{M0}^2}{2k_e} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \sin 2(\gamma - \alpha') \right\}, \quad (10)$$

где  $\gamma = s\omega_1 t$ ;  $\beta_1 = -\frac{\pi}{6} + n_n \frac{\pi}{3}$ ;  $\beta_2 = \frac{\pi}{2} + n_n \frac{\pi}{3}$ ;  $\alpha' = \frac{\pi}{6} + n_n \frac{\pi}{3}$ ;  $I_d$  — выпрямленный ток ротора;  $\gamma_k, \gamma_k i$  — угол

коммутации тока ротора и его текущее значение;  $s$  — скольжение АМ;  $k_e$  — коэффициент трансформации АМ;  $n_n$  — номер интервала коммутации. Значение  $k_{M0}$  зависит от схемы соединения фаз ротора.

При питании привода от сети бесконечной мощности:

$$M_j(t) = \frac{3p_n x_M I_d k_{M0}}{2k_e \omega_1} \frac{u_m}{x_s} \left[ \sin(\gamma - \beta_1 + \varphi_0) + \right. \\ \left. + \frac{\gamma_k i}{\gamma_k} \sin(\gamma - \beta_2 + \varphi_0) \right]; \quad (11)$$

$$M(t) = \frac{3p_n x_M I_d k_{M0}}{2k_e \omega_1} \frac{u_m}{x_s} \sin(\gamma - \alpha' + \varphi_0). \quad (12)$$

Из анализа (9)–(12) следует:

так как смена интервалов дискретности  $n_n$  происходит с шестикратной частотой скольжения, то электромагнитный момент является периодической функцией и пульсирует также с этой частотой;

при питании от «мощной сети» на межкоммутационных интервалах мгновенное значение момента пропорционально произведению синусоидально изменяющегося «намагничивающего тока»  $I_{M0}$  на постоянный ток  $I_d$ ;

при питании от СГ с явнополюсным ротором в кривой момента присутствуют дополнительные слагаемые небольшой величины, изменяющиеся на интервале дискретности с удвоенной частотой скольжения.

Для определения среднего значения и высших гармонических выражение момента представлено в виде гармонического ряда Фурье:

$$M = M_{c0} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^M \cos 6m\gamma + b_m^M \sin 6m\gamma) = \\ = M_{ср} + \sum_{m=1}^{\infty} M_m \times \sin(6m\gamma + \varphi_m), \quad (13)$$

где среднее значение момента

$$M_{ср} = \frac{9\sqrt{2} E_s k_{M0} I_d p_n}{2\pi \omega_1} \sin\left(\varphi_0 + \frac{\gamma_k}{2}\right) \frac{\sin \gamma_k/2}{\gamma_k/2}; \quad (14)$$

амплитуды косинусных и синусных членов ряда

$$a_m^M = \int_0^{\gamma_p} M_{\gamma}(t) \cos 6m\gamma d\gamma + \int_{\gamma_p}^{\pi/3} M(t) \cos 6m\gamma d\gamma; \quad (15)$$

амплитуда и фаза  $m$ -й гармоники момента

$$M_m = \sqrt{(a_m^M)^2 + (b_m^M)^2}; \quad \varphi_m = \arctg(a_m^M/b_m^M).$$

Нахождение интегралов (15) в общем виде затруднительно, поэтому при практических расчетах коэффициенты  $a_m^M$  и  $b_m^M$  определяются для конкретных значений углов коммутации.

В случае питания привода от неявнополюсного СГ или сети

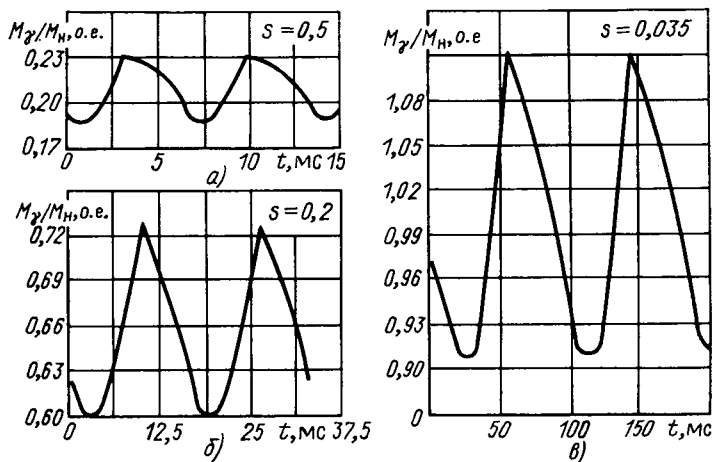


Рис. 1. Зависимости электромагнитного момента АВК от времени при питании от сети бесконечной мощности: а —  $s=0,5$ ; б —  $s=0,2$ ; в —  $s=0,035$

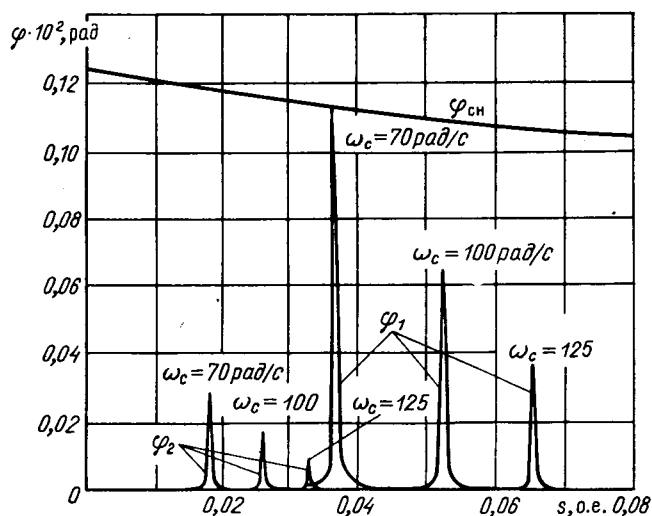


Рис. 2. Расчетные амплитуды крутильных колебаний вала насоса с электроприводом АВК  $P_H=3500$  кВт при различной частоте собственных колебаний вала агрегата  $\omega_c$ :  $\varphi_1$  — от первой гармоники момента;  $\varphi_2$  — от второй гармоники момента;  $\varphi_{с.н}$  — от статического момента насоса

бесконечной мощности

$$M_m = \frac{9 \sqrt{2} p_{\text{н}} k_{\text{м0}} I_{\text{м0}} d x_{\text{м}}}{2 \pi \omega_1 (36 m^2 - 1)} \text{ или } M_m^* \frac{M_m}{M_{\text{ср}}} 100 \% = \frac{2}{36 m^2 - 1} 100 \% \quad (16)$$

Расчетные зависимости  $M_\gamma/M_H = f(t)$  для электропривода насоса мощностью 3500 кВт представлены на рис. 1. На частоте вращения 965 об/мин амплитуда пульсации момента достигает 10 % его среднего значения. Частота пульсаций при этом составляет около 11 Гц.

Для расчета крутильных колебаний представим механическую систему «электродвигатель — насос» двухмассовой с сосредоточенными моментами инерции в роторе электродвигателя  $J_{\text{дв}}$  и роторе насоса  $J_{\text{н}}$ . Приняв, что на валу электродвигателя действует периодический момент, равный одной из высших гармоник электромагнитного момента АВК  $M_m$  с частотой пульсации  $\omega_m = 6 m \omega_1$ , можно в соответствии с [5] записать уравнения колебательного движения системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_{\text{дв}}}{dt^2} + 2 n_{\text{дв}} \frac{d \varphi_{\text{дв}}}{dt} + \omega_{с.дв}^2 (\varphi_{\text{дв}} - \varphi_{\text{н}}) &= \frac{M_m}{J_{\text{дв}}} \sin \omega_m t; \\ \frac{d^2 \varphi_{\text{н}}}{dt^2} + 2 n_{\text{н}} \frac{d \varphi_{\text{н}}}{dt} + \omega_{с.н}^2 (\varphi_{\text{н}} - \varphi_{\text{дв}}) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где  $\omega_{с.дв}$ ,  $\omega_{с.н}$ ,  $n_{\text{дв}}$ ,  $n_{\text{н}}$  — частоты собственных механических колебаний и коэффициенты сопротивления роторов двигателя и насоса;  $\varphi_{\text{дв}}$ ,  $\varphi_{\text{н}}$  — угловая (крутильная) деформация валов двигателя и насоса от  $m$ -й гармоники вращающего момента.

Решив (17), получаем выражение для установившегося значения амплитуды вынужденных колебаний деформации вала:

$$\varphi_{\text{н}} = \frac{\omega_{с.н}^2 M_m}{\omega_m \omega_{с.дв}^2 J_{\text{дв}} \sqrt{4 \left( n_{\text{н}} \frac{\omega_{с.дв}^2 - \omega_m^2}{\omega_{с.дв}^2} + n_{\text{дв}} \frac{\omega_{с.н}^2 - \omega_m^2}{\omega_{с.н}^2} \right) + \omega_m^2 \left( \frac{\omega_m^2}{\omega_{с.дв}^2} - 1 - \frac{4 n_{\text{н}} n_{\text{дв}}}{\omega_{с.дв}^2} \right)^2}} \quad (18)$$

где  $\omega_{с} = \sqrt{\frac{(J_{\text{дв}} + J_{\text{н}}) c}{J_{\text{дв}} J_{\text{н}}}}$  — угловая частота собственных колебаний двухмассовой системы;  $c$  — крутильная жесткость системы.

На рис. 2 показаны расчетные амплитуды крутильных колебаний вала насоса электропривода по схеме АВК с номинальной мощностью 3500 кВт, вызванных пульсациями первой и второй

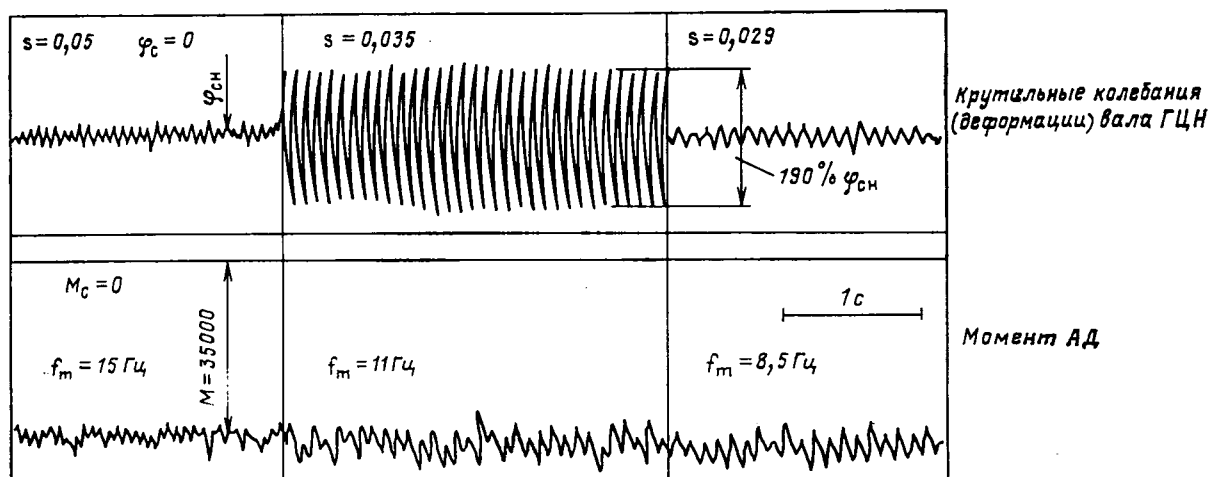


Рис. 3. Осциллограммы пульсаций электромагнитного момента и крутильных колебаний вала насоса в схеме АВК ( $P_H=3500$  кВт,  $f_c=11$  Гц)

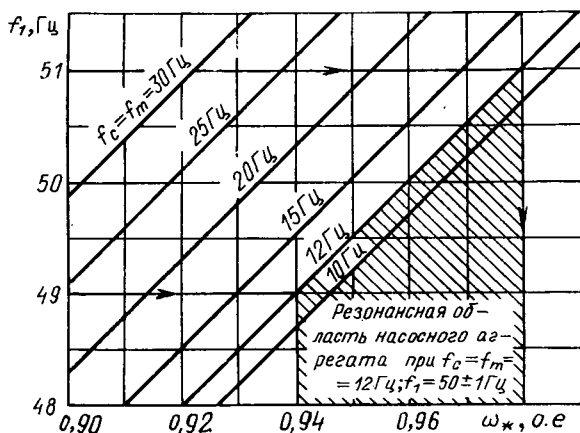


Рис. 4. Номограмма определения резонансных областей работы насосных агрегатов с различной частотой собственных колебаний  $f_c$  при колебаниях частоты питающего напряжения  $f_1$

гармоник момента АВК, в зависимости от скольжения и собственной частоты насосного агрегата  $\omega_c$ .

На рис. 3 приведены опытные осциллограммы пульсаций момента и крутильных колебаний вала насоса, снятые на этом же приводе с помощью системы тензодатчиков, установленных на валу насоса, и специально измерительного устройства.

Анализ показывает, что зависимости  $\varphi(s)$  имеют явно выраженные резонансные участки. При частотах пульсаций момента АВК, близких к частоте собственных колебаний двухмассовой системы ( $\omega_c = \omega_m$ ), амплитуды крутильных колебаний значительно усиливаются и могут превышать механические напряжения от основного статического крутящего момента двигателя несмотря на то, что пульсация момента составляет не более 10 %, а его первой гармоники 5,7 %. Причем эти колебания носят циклический характер (до  $10^6$  циклов в сутки), что может вызвать при работе ГЦН в этих областях усталостные перенапряжения и разрушения вала агрегата.

Незначительные резонансы (не более 10 % от  $\varphi_1$  при  $\omega_m = \omega_c$ ) имеют место при скольжениях привода, когда частота пульсаций АВК совпадают с частотами собственных колебаний валов насоса и двигателя ( $\omega_m = \omega_{c.н}$  и  $\omega_m = \omega_{c.дв}$ ).

Если при постоянной частоте питающей сети резонансная зона крутильных колебаний представляет собой узкую полосу по частоте вращения (5—7 об/мин), то с учетом возможных колебаний  $f_1$  резонансная зона перемещается в широком диапазоне.

Например, при собственной частоте крутильных колебаний насосного агрегата  $f_c = 12$  Гц и колебаниях частоты сети  $f_1 = 50 \pm 1$  Гц резонансная зона перемещается в диапазоне частот вращения 940—980 об/мин, что иллюстрируется рис. 4. Представленная на рисунке номограмма позволяет для различных собственных частот насосного агрегата определить в зависимости от диапазона возможных изменений частот питающего напряжения зону скоростей привода, в которой имеют место резонансные явления. Определение такой зоны для  $f_c = 12$  Гц показано на рисунке.

Таким образом, при проектировании насосных агрегатов с электроприводом по схеме АВК необходимо считаться с крутильными колебаниями и стремиться к смещению резонансных зон в нерабочие области агрегата.

Для снижения амплитуды крутильных колебаний следует уменьшать момент инерции ротора насоса  $J_n$ . Это снижает долю возбуждающего момента привода, передаваемого на вал насоса, увеличивая вместе с тем собственную частоту агрегата  $\omega_c$ . Рост  $\omega_c$  позволяет сместить резонансную точку в область более низких частот вращения, где значение момента пульсации  $M_m$  падает, так как пропорционально квадрату частоты вращения снижается средний момент привода.

При питании электропривода от автономного СГ явнополюсным ротором в электромагнитном моменте, кроме составляющей с частотой  $\omega_1$ , присутствует дополнительная составляющая с частотой  $2\omega_1$ , обусловленная магнитной несимметрией ротора СГ. Это обстоятельство также должно учитываться при проектировании автономных электроприводов, так как несмотря на незначительную амплитуду пульсации момента от этой составляющей (не более 2 %), знакопеременные деформации в резонансной области для частоты  $2\omega_1$  также значительно усиливаются.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Регулируемый электропривод главных циркуляционных насосов III блока Белоярской АЭС / Г. Б. Онищенко, В. М. Пономарев, Е. Ю. Анишев и др. — Электрические станции, 1982, № 6.
2. Анишев Е. Ю., Юдин В. В. Расчет пульсаций электромагнитного момента электропривода насосного агрегата по схеме АВК-ЭП. Электропривод, 1984, № 1 (123).
3. Ключев В. И. Ограничение динамических нагрузок электропривода. — М.: Энергия, 1971.
4. Хватов С. В., Титов В. Г., Степахин Ю. Г. Реверсивный электропривод по схеме синхронного вентильного каскада. — Электричество, 1984, № 10.
5. Маслов Г. С. Расчеты колебаний валов. — М.: Машиностроение, 1980.

[28.03.86]

УДК 621.316.98.001.57

## О повышении эффективности молниезащиты

АЛЕКСАНДРОВ Г. Н., доктор техн. наук, КАДЗОВ Г. Д., канд. техн. наук

Для молниезащиты объектов обычно используются стержневые молниеотводы с заостренной вершиной. При этом предполагается, что резкая неоднородность поля вблизи вершины молниеотвода способствует развитию встречного лидера и увеличивает вероятность поражения молниеотвода.

Анализ условий молниезащиты, выполненный в [1], позволил сделать вывод об определяющем влиянии на ориентировку канала молнии степени искажения поля развивающегося лидера, создаваемого наземными объектами. Степень искажения поля лидера определяется зарядом, наводимым на наземном объекте, и зарядом, образуемым вблизи объекта за счет протекания ионизационных процессов. Чем больше заряд на наземном объекте, тем большая часть потока вектора электрического смещения поля лидера молнии замыкается на объекте и тем больше вероятность его поражения молнией. Таким образом, согласно этой гипотезе доля полного потока вектора электрического смещения, замыкающегося на наземном объекте, определяет вероятность его поражения молнией. Для лабораторной модели развивающегося канала лидера (рис. 1) она может быть оценена расчетным

путем исходя из системы потенциальных уравнений

$$\begin{cases} U = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2; \\ 0 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2. \end{cases} \quad (1)$$

где  $U$  и  $q_1$  — потенциал и заряд канала лидера;  $\alpha_{11}$  — его собственный потенциальный коэффициент;  $q_2$  и  $\alpha_{22}$  — заряд и собственный потенциальный коэффициент наземного объекта;  $\alpha_{12}$  — взаимный потенциальный коэффициент канала лидера и наземного объекта.

Из второго уравнения следует, что отношение

$$q_2/q_1 = -\alpha_{12}/\alpha_{22}. \quad (2)$$

Поскольку взаимный потенциальный коэффициент не зависит от размеров электродов, а определяется только их взаимным расположением, отношение  $q_2/q_1$ , характеризующее долю потока вектора электрического смещения, замыкающегося на наземном объекте, определяется, в основном, собственным потенциальным коэффициентом наземного объекта, который уменьшается при увеличении размеров последнего.

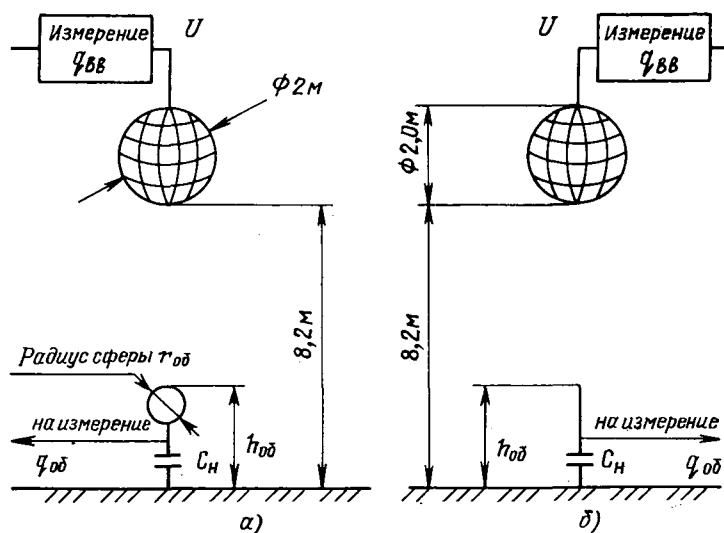


Рис. 1. Схемы испытаний для определения влияния параметров объектов на поражаемость их разрядами: а — объект со сферической вершиной радиусом  $r_{об}$ ; б — стержневой объект

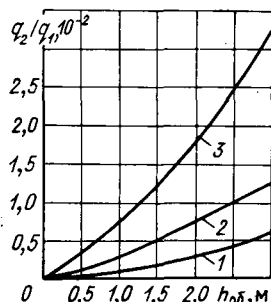


Рис. 2. Расчетные значения соотношения  $q_2/q_1$ , характеризующего долю потока вектора электрического смещения, замыкающегося на объекте со сферической вершиной радиусом  $r_{об}$ : 1 —  $r_{об}=0,1$  м; 2 —  $r_{об}=0,2$  м; 3 —  $r_{об}=0,5$  м

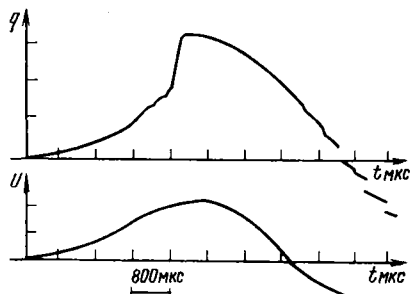


Рис. 3. Характерная осциллограмма напряжения  $U=f(t)$  на высоковольтном электроде и заряда  $q_2$ , индуцированного на объекте в отсутствие пробоя разрядного промежутка

В связи с этим увеличение радиуса сферической вершины наземного объекта (рис. 1) при неизменной его высоте приводит к увеличению отношения  $q_2/q_1$  (рис. 2, кривые 1, 2, 3). Следует заметить, что расчеты по формуле (2) выполнены без учета объемного заряда, и, следовательно, полученные данные сильно занижены. Но они позволяют составить представление о характере влияния высоты объектов и их размеров на искажение поля разрядного промежутка, создаваемое объектом. Экспериментальная проверка гипотезы об определяющем влиянии на ориентировку молнии отношения  $q_2/q_1$  была выполнена на наружном испытательном стенде лаборатории сверхвысоких напряжений ЛПИ им. М. И. Калинина при использовании в качестве источника импульсов напряжения каскада испытательных трансформаторов 2,25 МВ [2].

Лидер молнии моделировался длинной искрой, развивающейся от высоковольтного сферического электрода диаметром 2 м. Наземный объект моделировался вертикальными стержнями диаметром 40 мм различной высоты. Для увеличения размеров

Рис. 4. Зависимость вероятности поражения разрядами длиной искры объектов со сферической вершиной радиусом  $r_{об}$  от высоты этих объектов: 1 —  $r_{об}=0,02$  м; 2 —  $r_{об}=0,2$  м; 3 —  $r_{об}=0,5$  м

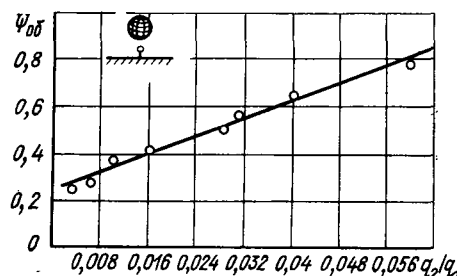
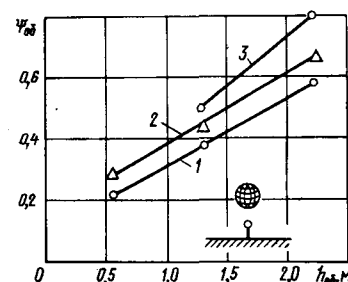


Рис. 5. Зависимость вероятности поражения объектов различной высоты и формы от создаваемого ими искажения поля разрядного промежутка, характеризуемого соотношением  $q_2/q_1$

наземного объекта на заземленный стержневой электрод устанавливались сферы диаметром 0,4 и 1 м. Исследования производились при расстоянии от высоковольтного электрода до земли 8,2 м (рис. 1) при максимальном напряжении импульса, близком к 90 %-ному разрядному напряжению для этого промежутка. Поражаемость наземного объекта оценивалась по отношению числа поражений объекта разрядами длиной искры к общему числу разрядов в серии (не менее, чем 100 опытов).

Одновременно измерялся заряд на высоковольтном электроде и на наземном объекте по схеме, показанной на рис. 1. Заряд измерялся при отсутствии разрядов в воздушном промежутке. Измеренные максимальные значения зарядов при отсутствии разрядов усреднялись для каждой серии опытов.

Типичная осциллограмма заряда на наземном объекте в отсутствие разряда приведена на рис. 3. Как видно, вблизи максимума напряжения на высоковольтном электроде заряд на объекте резко увеличивается, что свидетельствует о возникновении стримерной короны.

Результаты измерений при указанных выше размерах промежутка приведены в табл. 1. Средний заряд высоковольтного электрода  $q_1$  при вероятности пробоя воздушного промежутка 0,9 составил 530 мкКл. Зависимости поражаемости наземных объектов от их высоты значительно различаются для объектов с разными размерами их вершин (рис. 4). В отличие от зависимости на рис. 4 поражаемость разрядами тех же объектов, приведенная в функции от  $q_2$  или  $q_2/q_1$  (рис. 5), увеличивается практически линейно с ростом заряда, индуцируемого на объектах, и эта зависимость одинакова для объектов любой высоты и с любым размером вершины. Этот результат свидетельствует об определяющем влиянии на ориентировку разряда молнии доли потока вектора электрического смещения, замыкающегося на объекте.

Приведенные данные показывают, что для большей эффективности молниезащиты наземных объектов следует увеличивать заряд, индуцируемый на молниеотводе, по сравнению с зарядом, индуцируемым на защищаемом объекте. Причем это увеличение может быть обеспечено не только за счет существенно большей высоты молниеотводов, но и за счет развития их поверхности.

Проверка этого вывода по данным табл. 1 была выполнена для воздушного промежутка длиной 10 м путем измерений вероятности поражения наземного объекта, моделированного вертикальным стержнем длиной 1 м, при его защите стержневым молниеотводом высотой 2, 3 и 4 м молниеотводом высотой 2 м с тороидальной вершиной (рис. 6). Расстояние между молниеотводом и объектом изменялось в широких пределах. Результаты исследований, выполненных по методике [2], приведены в табл. 2. Как видно, применение молниеотвода с развитой поверхностью вершины позволило существенно снизить вероятность поражения

Таблица 1

| Высота объекта $h_{об}$ , м | Радиус вершины объекта $r_{об}$ , м | Число опытов $N_{оп}$ | Число разрядов $N_p$ | Число поражений объекта разрядами $N_{об}$ | Вероятность поражения объекта разрядами $\Psi_{об}$ | Доверительный интервал вероятности поражения объекта разрядами $P=0,95$ | Заряд, индуцируемый на объекте $q_1$ , мкКл | $q_2/q_1$ |
|-----------------------------|-------------------------------------|-----------------------|----------------------|--|---|---|---|-----------|
| 0,65                        | 0,02<br>0,20                        | 117                   | 100                  | 22   | 0,22  | 0,30—0,16   | 1,6   | 0,003     |
|                             |                                     | 114                   | 100                  | 27   | 0,27  | 0,36—0,22   | 3,1   | 0,006     |
| 1,3                         | 0,02                                | 112                   | 100                  | 37   | 0,37  | 0,45—0,31   | 4,8   | 0,009     |
|                             | 0,20                                | 111                   | 100                  | 42   | 0,42  | 0,51—0,37   | 8,1   | 0,015     |
|                             | 0,50                                | 115                   | 100                  | 50   | 0,50  | 0,58—0,41   | 14,3  | 0,027     |
| 2,2                         | 0,02                                | 113                   | 100                  | 58   | 0,58  | 0,64—0,49   | 13,8  | 0,026     |
|                             | 0,20                                | 109                   | 100                  | 66   | 0,66  | 0,74—0,58   | 19,4  | 0,037     |
|                             | 0,50                                | 107                   | 100                  | 80   | 0,80  | 0,86—0,72   | 31,4  | 0,059     |

Таблица 2

| Тип молниеотвода                                  | Высота молниеотвода $h_m$ , м | Расстояние между объектом и молниеотводом $x$ , м | Количество разрядов в серии $N_{оп}$ | Количество попаданий разрядов в объект $N_{об}$ | Вероятность поражения объекта $\Psi_{об}$ | Доверительные интервалы вероятности поражения объекта при $P=0,95$ |
|---|-------------------------------|---|--------------------------------------|---|---|--|
| Молниеотвод с тороидальной вершиной $R_m = 0,6$ м | 2                             | 1,5   | 150                                  | 1   | 0,0067                                    | 0,0002—0,012   |
|   |                               | 2,0   | 100                                  | 5   | 0,05                                      | 0,03—0,07  |
|   |                               | 2,5   | 50                                   | 4   | 0,08                                      | 0,04—0,12  |
| Стержневой молниеотвод                            | 2                             | 0,9   | 100                                  | 6   | 0,06                                      | 0,04—0,08  |
|   |                               | 1,5   | 100                                  | 17  | 0,17                                      | 0,12—0,22  |
|   |                               | 2,0   | 50                                   | 11  | 0,22                                      | 0,17—0,27  |
|   |                               | 2,5   | 50                                   | 19  | 0,38                                      | 0,29—0,45  |
|   | 3                             | 1,0   | 100                                  | 2   | 0,02                                      | 0,006—0,034  |
|   |                               | 1,5   | 100                                  | 6   | 0,06                                      | 0,036—0,084  |
|   |                               | 2,0   | 100                                  | 9   | 0,09                                      | 0,06—0,12  |
|   |                               | 2,5   | 100                                  | 16  | 0,16                                      | 0,12—0,20  |
|   | 4                             | 1,5   | 200                                  | 2   | 0,01                                      | 0,003—0,017  |
|   |                               | 2,0   | 100                                  | 4   | 0,04                                      | 0,02—0,06  |
|   |                               | 2,5   | 100                                  | 6   | 0,06                                      | 0,036—0,084  |
|   |                               |   |                                      |   |   |  |

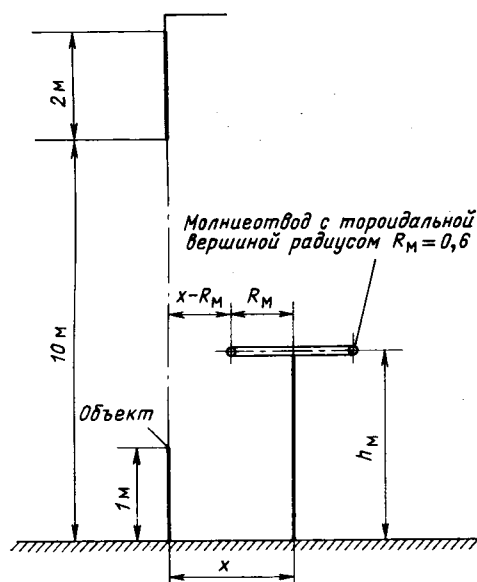


Рис. 6. Схема испытаний для определения эффективности использования молниеотводов с развитой поверхностью вершины

защищаемого объекта даже при одинаковом расстоянии между ближайшей к объекту точкой тороида и защищаемым объектом ( $x - R_m$ ). Например, при высоте стержневого молниеотвода 2 м и расстоянии до объекта  $x = 0,9$  м вероятность поражения объекта составила 0,06, а при том же расстоянии между вертикальной осью объекта и тороидальной вершиной молниеотвода  $x - R_m = 0,9$  м ( $x = 1,5$  м,  $R_m = 0,6$  м) вероятность поражения объекта составила 0,0067, т. е. практически на порядок меньше. Для достижения такой же надежности молниезащиты с помощью стержневого молниеотвода, как следует из табл. 2, его высота должна быть удвоена ( $h_m = 4$  м).

Если же измерять расстояние между молниеотводом и защищаемым объектом по расположению их оснований (расстояние  $x$  на рис. 6), то эффективность молниезащиты с помощью молниеотвода с развитой поверхностью возрастает еще более. Например, при  $x = 1,5$  м вероятность поражения объекта, защищаемого стержневым молниеотводом высотой 2 м,  $\Psi_{об} = 0,17$ , а при защите молниеотводом с развитой поверхностью — 0,0067, что в 25 раз меньше.

Приведенные данные показывают, что молниеотводы с развитой поверхностью вершины позволяют не только значительно повысить надежность молниезащиты, но и уменьшить высоту молниеотводов, предназначенных для защиты объектов ограниченной площади, в том числе нефтеналивных судов, бензохранилищ, электрических подстанций и т.п.

Для широкого использования полученных результатов целесообразно выполнить их апробацию на натуральных объектах, а также выполнить широкий комплекс исследований зон защиты молниеотводов с развитой вершиной, как это было сдела-



но ранее при составлении Руководящих указаний по молниезащите [3].

**Выводы.** 1. Ориентировка лидера молнии определяется наведенными на наземных объектах зарядами, искажающими электрическое поле лидера.

2. Эффективность молниезащиты может быть повышена не только путем увеличения высоты молниеотвода, но и путем развития поверхности вершины молниеотвода.

3. Критерием эффективности молниеотвода является степень увеличения заряда на его вершине в поле развивающегося лидера.

4. Экспериментально доказана возможность существенного

уменьшения высоты молниеотвода при установке на его вершине, например, тороидального экрана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курилов В. А. Об ориентировке разрядов молнии на заземленные объекты. — Изв. вузов. Энергетика, 1978, № 11.
2. Об ориентировке канала длиной искры / Г. А. Александров, В. Л. Иванов, Э. М. Базелян, Е. А. Садыхова. — Электричество, 1973, № 3.
3. Акопян А. А. Исследование защитного действия молниеотводов на моделях — Электричество, 1937, № 9—10.

[26.06.86]

УДК 621.313.392.001.24

## Критериальная оценка относительной массы магнитной системы бесконтактных машин

МУРЫГИН А. И., канд. техн. наук

В последнее время интенсивно развиваются бесконтактные синхронные машины, предложены и разработаны торцевые машины с аксиально-когтеобразными полюсами [1, 2]. Они нашли применение преимущественно в качестве источников питания передвижных и транспортных средств.

Характерной особенностью бесконтактных машин, в большей степени относящейся к машинам с внешним магнитопроводом, охватывающим якорь, является значительная протяженность магнитной цепи и относительная сложность ее геометрии, в связи с чем рациональное проектирование индуктора машины приобретает особо важное значение.

При сравнении различных типов машин, определении области их предпочтительного использования и решении ряда других практических задач могут быть эффективно применены критериальные показатели, позволяющие оценить магнитную систему машины в целом. Такие критерии использования электромагнитной системы по ее удельной массе предлагаются и рассматриваются в настоящей статье.

Наиболее существенной составляющей массы бесконтактной машины ввиду значительной протяженности ее магнитной цепи является масса ферромагнитной стали. Для магнитной цепи из  $N$  последовательных участков массу стали можно представить в виде

$$G_{Fe} = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{2p\Phi_i L_i \gamma_{Fe i}}{B_{Fe i}} \quad (1)$$

Здесь  $\Phi_i$  и  $B_{Fe i}$  — магнитный поток (на пару полюсов) и индукция на участке;  $L_i$  — длина участка;  $\gamma_{Fe}$  — удельная масса стали участка магнитопровода;  $2p$  — число полюсов индуктора.

Поток  $i$ -го участка магнитной цепи  $\Phi_i$  целесообразно выразить через безразмерный коэффициент рассеяния участка цепи, определяемый как

$$k_{\sigma i} = \frac{\Phi_i}{\Phi_0} = \frac{\Phi_0 + \Phi_{\sigma i}}{\Phi_0} = 1 + \Delta_{\sigma i}, \quad (2)$$

где  $\Phi_0$  и  $\Phi_{\sigma i}$  — основной магнитный поток в воздушном зазоре и потоки рассеяния.

Выражение (1) с учетом (2) при обычно выполняемом условии  $\gamma_{Fe i} \approx \text{const}$  запишется в виде

$$G_{Fe} = 2p\Phi_0 \gamma_{Fe} \sum_{i=1}^{i=N} k_{\sigma i} \frac{L_i}{B_{Fe i}}. \quad (3)$$

Зависимость относительной активной массы от основных электромагнитных нагрузок и размеров определим из полученного соотношения и выражения электромагнитной мощности машины [3], откуда имеем

$$g_{Fe} = \frac{2p\gamma_{Fe}\Phi_0 \sum_{i=1}^{i=N} k_{\sigma i} \frac{L_i}{B_{Fe i}}}{k_1 \alpha_i A B_{\delta} D^3 n f_1}, \quad (4)$$

где  $k_1$  — коэффициент, зависящий от формы кривой поля и геометрии обмотки;  $\alpha_i$  — расчетная полюсная дуга;  $A$  и  $B_{\delta}$  — линейная нагрузка и максимальная индукция в зазоре;  $D$  — расчетный диаметр машины;  $n$  — частота вращения;  $f_1$  — функция относительной длины машины.

Для машин цилиндрического типа  $A = \text{const}$ ,  $f_1 = l/D$ , где  $l$  — расчетная длина машины. Для торцевых машин:  $A = A_{\max}$ ;  $D = D_N$ ;  $f_1 = 0,5 \beta (1 - \beta^2)$  [4]. Здесь  $\beta$  — отношение внутреннего диаметра пакета якоря  $D_B$  к наружному  $D_N$ , который целесообразно использовать в качестве базового размера.

В выражении (4) значение основного полезного потока определим через значение индукции в зазоре, тогда

$$g_{Fe} = \frac{k_2}{ADn} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{k_{\sigma i} L_i}{B_{Fe i}}. \quad (5)$$

Для цилиндрических машин  $k_2 = \frac{60}{\pi} \gamma_{Fe} 10^7$ , для торцевых  $k_2 = \frac{60\gamma_{Fe}}{\pi\beta} 10^7$ , если линейная нагрузка в А/см, индукция в Т, линейные размеры в см.

Для практических применений дальнейший анализ выражения (5) целесообразно упростить, используя усредненную расчетную индукцию в магнитопроводе  $B_{Fe}$ . Она обычно близка к действительным значениям, так как при рациональном конструировании машины выполняют условие постоянства индукции различных участков магнитной цепи.

Введем в качестве показателя использования магнитопровода величину

$$k_B = \frac{B_{Fe}}{B_{\delta}} \approx \frac{\sum_{i=1}^{i=N} B_{Fe i} L_i}{B_{\delta} \sum_{i=1}^{i=N} L_i}, \quad (6)$$

тогда соотношение (5) будет

$$g_{Fe} = \frac{k_2}{AB_{\delta} k_B n D} \sum_{i=1}^{i=N} k_{\sigma i} L_i. \quad (7)$$

Относительная масса активной стали электрической машины теперь представлена через основные электромагнитные нагрузки, частоту вращения и некоторую функцию геометрических размеров машины. Введем обозначение этой функции в безразмерной форме

$$g_0 = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{i=N} k_{\sigma i} L_i, \quad (8)$$

а равенство (7) запишем в несколько ином виде, исключая влия-

ние частоты вращения в его правой части:

$$g_{Fe} = \frac{k_g g_0}{AB_0 k_B} \quad (9)$$

Функция  $g_0$ , как следует из соотношения (8), имеет минимум для каждого типа магнитной системы, так как при прочих равных условиях коэффициент  $k_g$  вначале уменьшается с ростом линейных размеров (в частности междуполусных), а затем их дальнейшее увеличение практически не уменьшает рассеяния. Поэтому функция  $g_0$  может быть применена для оценки магнитной системы при проектировании. Ее целесообразно использовать, в частности, при разработке бесконтактных магнитных систем, имеющих внешний магнитопровод, или торцевых с аксиальным расположением якоря и индуктора машины, для которых важны, но отсутствуют в литературе рекомендации по выбору геометрии магнитной цепи в целом.

Если у синхронных машин классического исполнения заданы основных размеров якоря фактически определяет габариты индуктора и машины в целом, то для бесконтактных машин выбор размеров индуктора является самостоятельной задачей. Широкая возможность варьирования этих размеров возникает, например, при аксиальном расположении якоря и индуктора торцевой однопакетной машины внутризамкнутого типа, конструктивная схема которой приведена на рисунке [5].

Ввиду неопределенности решения таких задач практически чаще всего вначале ограничиваются эмпирическим выбором геометрии полюсных систем и магнитопроводов или используют подобие, а затем определяют соответствующее рассеяние магнитной цепи и снова корректируют размеры.

Более рационален выбор геометрии индуктора путем определения некоторых его размеров в зависимости от размера основного воздушного зазора  $\delta_1$ . Размеры индуктора можно рассчитывать, задавая значения промежутков между разноименными системами (см. рисунок)

$$c_H \geq c_B \geq (15 \div 20) \delta_1. \quad (10)$$

Здесь  $c_B$  и  $c_H$  — минимальные расстояния различных полюсных систем до полюсов противоположной полярности.

Рекомендованные значения расстояний соответствуют регламентированному уровню потоков междуполусного рассеяния при ограничении размеров индуктора, т. е. обеспечивают близкое к минимуму значение функции  $g_0$ .

Правомомерность использования выражения (10) можно также пояснить, используя некоторую аналогию потоков рассеяния разноименнополюсной синхронной машины с постоянной составляющей потока в зазоре гомополлярных индукторных машин, для которых рекомендации вида (10) известны.

Можно показать, что коэффициенты рассеяния  $i$ -х участков магнитной цепи  $k_{\sigma i}$  примерно постоянны при сохранении геометрического подобия и одинаковых параметрах, характеризующих режимы электрических и магнитных нагрузок, в том числе при постоянстве синхронного индуктивного сопротивления реакции якоря по продольной оси  $x_{ad} = \text{const}$ :

$$\Delta \delta_i \approx \frac{\delta_1}{\tau} \frac{2(1 + \Delta_F)}{\alpha_i f_2} \sum_1^i (k_{H_i} + x_{ad} \sin \psi) \frac{S_{\sigma i k}}{l_{\sigma i k} D}. \quad (11)$$

Здесь  $\delta_1$  — эквивалентный основной воздушный зазор;  $\tau$  — полюсное деление на расчетном диаметре машины;  $\alpha_i$  — расчетная полюсная дуга;  $\psi$  — угол сдвига между векторами тока якоря и э. д. с., наведенной результирующим продольным потоком.

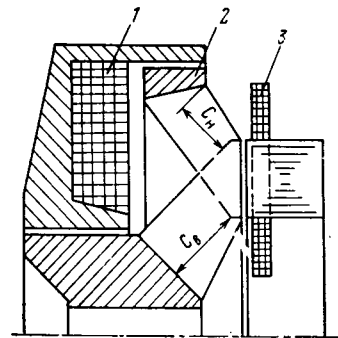
Поле  $i$ -го участка магнитной цепи характеризуется в (11) коэффициентом насыщения  $k_{H_i}$ , площадью и средней длиной составляющих частичных полей рассеяния  $S_{\sigma i k}$  и  $l_{\sigma i k}$ . Функция  $f_2$  определяется относительной длиной машины:  $f_2 = f_1$  — для цилиндрических машин или  $f_2 = 0,25(1 - \beta^2)$  для торцевых машин. Влияние дополнительных воздушных зазоров учтено добавочным слагаемым

$$\Delta_F = \frac{\delta_2 B_{\delta 2}}{\delta_1 B_{\delta 1}}, \quad (12)$$

где  $\delta_2$  — дополнительный воздушный зазор;  $B_{\delta 1}$  и  $B_{\delta 2}$  — максимальная индукция в основном и дополнительном зазорах, соответственно.

Соотношение (11) получено путем определения потоков рассеяния в зависимости от междуполусной м.д.с. и геометрических размеров магнитной цепи с учетом насыщения стали.

При тех же указанных ранее условиях из формулы (8) получаем, что функция  $g_0$  постоянна, а из равенства (9) можно установить, что относительная масса индуктора также по-



Конструктивная схема торцевой однопакетной машины с аксиально-когтеобразными полюсами:

1 — неподвижный магнитопровод индуктора с обмоткой возбуждения; 2 — ротор с наружной и внутренней разноименными полюсными системами, 3 — якорь

стоянна, если неизменен коэффициент использования магнитной цепи  $C_2 = AB_0 k_B = \text{const}$ . Относительная масса индуктора остается неизменной и в ряде геометрически подобных машин с пропорциональным изменением коэффициента использования  $C_2 = D$  (ряд Видмара) и функции  $g_0$  ( $g_0 = D$ ).

Выражения (8), (9) и (11), (12) позволяют установить связь критерия  $g_0$  с эксплуатационными параметрами и размерами машины. Они показывают, в частности, целесообразность конструктивных мероприятий, обеспечивающих уменьшение относительного воздушного зазора  $\delta_1/\tau$ , являющегося главным фактором, определяющим рассеяние магнитной цепи, при соответствующем выборе электромагнитных нагрузок и параметров.

Для бесконтактных машин отношение активной длины к расчетному диаметру  $l/D$  изменяется мало [3, 4] и во многих случаях соблюдается геометрическое подобие, поэтому не только в серии, но и для индивидуальных исполнений в ограниченном диапазоне изменения мощности значения функции  $g_0$  и  $g_0 D$  существенно ограничены.

При прочих равных условиях, критерий  $g_0$  характеризует активную массу машины, обусловленную спецификой магнитной системы, поэтому его можно назвать также удельной относительной массой электромеханической магнитной системы.

Изложенные положения, ограниченное изменение относительной активной массы стали и существование минимума функции  $g_0$  подтверждаются также результатами расчетов относительной массы активных материалов цилиндрических бесконтактных синхронных машин с когтеобразными полюсами и внешним магнитопроводом, выполненных Х. Л. Даугулисом [6].

Как следует из равенства (8), в частном случае геометрического подобия при неизменных коэффициентах рассеяния различных участков магнитной цепи  $k_{\sigma i} = \text{const}$  можно сравнивать магнитные системы, оперируя только расчетной длиной индукционной линии их основного потока возбуждения. Поэтому относительная длина указанной линии наиболее часто применяется [3, 7] при качественном сравнении использования стали магнитопровода различных типов машин. Однако такое сравнение в общем случае не может дать достоверных количественных результатов, так как значение коэффициентов рассеяния магнитной цепи существенно изменяется в зависимости от ее геометрии и на практике для быстроходных бесконтактных машин могут быть равными  $k_g = 1,5$  и более.

Из соотношений (6) и (7) нетрудно установить, что масса активной стали индуктора электрической машины минимальна при наибольшем значении коэффициента  $k_B = k_{B\text{max}}$ . Этот максимум достигается при постоянстве индукции различных участков цепи  $B_{Fe i} = \text{const} = [B_{\text{доп}}]$  ( $[B_{\text{доп}}]$  — допустимая индукция в стали, выбираемая обычно вблизи зоны насыщения по кривой намагничивания стали магнитопровода). При тех же ограничениях — постоянных значениях индукции различных участков цепи — как показано в [8], обеспечивается при прочих равных условиях максимальное значение потока в магнитной цепи — максимальная добротность цепи.

Непосредственное определение критерия  $g_0$  для различных магнитных систем по формуле (8) представляет собой определенные трудности. Однако он может быть легко вычислен по данным построенных машин близкого ряда по соотношению (9).

Изложенные ранее положения иллюстрируются числовыми значениями критериальных величин  $g_0$ ,  $g_0 D$ , определенных по данным некоторых торцевых однопакетных машин с аксиально-

| Исполнение     | Параметр        |  | Критерий |              |
|----------------|-----------------|--|----------|--------------|
|                | Мощность, кВт·А | Относительный зазор $(\delta/\tau) \cdot 10^3$ | $g_0$    | $g_0 D$ , см |
| Торцевое       | 4,0             | 8,0  | 2,5      | 20,0         |
|                | 4,5             | 45,4   | 2,1      | 33,5         |
|                | 9,0             | 16,4   | 2,0      | 30,6         |
|                | 15,0            | 5,5  | 1,3      | 29,1         |
| Цилиндрическое | 1,25            | 5,8  | 5,6      | 63,1         |
|                | 2,5             | 7,7  | 5,2      | 69,2         |
|                | 5,0             | 7,1  | 4,6      | 72,0         |

когтеобразными полюсами малой и средней мощности индивидуального исполнения и цилиндрических машин с когтеобразными полюсами и внешним магнитопроводом одной серии, приведенными в таблице.

Из приведенных данных следует, что использование критериальных показателей для предварительной оценки массы машины вполне оправдано в случае близкого ряда машин, а также приемлемо и при более широких условиях. Полученные значения удельной относительной массы  $g_0$  и критерия  $g_0 D$  имеют характерный диапазон для различных разновидностей магнитных систем, что может быть положено в основу при сравнении использования их стали.

Для бесконтактных машин масса индуктора является преобладающей и составляет до 80 % результирующей массы в машинах с когтеобразными полюсами и внешним магнитопроводом, поэтому приведенные в таблице показатели  $g_0$  и  $g_0 D$  определены по результирующей массе стали машины, что удобно для приближенных интегральных оценок. На основе данных таблицы можно непосредственно сравнивать, при прочих равных условиях, относительные значения активной массы двух различных типов магнитных систем, учитывая различные масштабы линейных размеров. Если принять приведенное к среднему диаметру якоря значение функции  $g_0 D$  равным:

$$(g_0 D)_c = \frac{2}{1+\beta} g_0 D \approx \frac{2 \cdot 26,7}{1+0,65} = 32 \text{ см},$$

то можно определить, что масса торцевой магнитной системы внутризамкнутого типа примерно в 2 раза меньше. Учитывая массу меди и конструктивную массу, получим, что отношение полных масс сравниваемых машин  $k_m$  будет меньше указанного отношения их активных составляющих, так как в торцевой машине масса одного из щитов является конструктивной. По опыту разработок автора и данным [9]  $k_m \approx 1,5$  в диапазоне частот вращения  $n = (12 \div 15) \cdot 10^3 \text{ мин}^{-1}$ . При уменьшении частоты вращения относительные значения полной и активной массы оказываются тем более близкими, чем меньше частота вращения, поэтому применение когтеобразных цилиндрических машин с внешним магнитопроводом в соответствии с изложенным наиболее эффективно в диапазоне весьма высоких частот вращения  $n \geq 30 \cdot 10^3 \text{ мин}^{-1}$ , где относительное значение активной массы существенно уменьшается, а конструктивной наоборот увеличивается.

Выбор типа магнитной системы машины для конкретных условий проектирования является одной из практически наиболее важных задач, которые могут быть решены на основе предложенных критериев. Как при выборе геометрии индуктора, так и при оценке массо-габаритных показателей с помощью критерия  $g_0$  решаются задачи первого этапа проектирования. Хотя обеспечивается лишь первое приближение в решении указанных задач, не исключающее необходимости в дальнейшем детального электромагнитного расчета, предлагаемая методология значительно сокращает сроки поиска оптимальных решений.

Рассмотренные ранее примеры относились к бесконтактным машинам. Вместе с тем, что следует как из общего характера данного в статье анализа, так и из приведенных расчетов, предложенные критерии приемлемы для количественных оценок массы других типов машин с ферромагнитным магнитопроводом. При более широком изменении нагрузок и геометрии якоря различных машин целесообразна раздельная оценка всех составляющих массы, а при определении  $g_0$  в этих случаях рационально использовать только массу индуктора. Таким образом, предложенные критерии можно рассматривать как попытку создания элементов обобщенной теории магнитных цепей электрических машин.

Предложенные критериальные показатели могут служить основой для выбора геометрии индукторов прежде всего бесконтактных машин с протяженными и разветвленными магнитными цепями, где выбор геометрии индуктора является важной самостоятельной задачей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аспит В. В. Классификация электрических машин с когтеобразными элементами магнитной цепи. Бесконтактные электрические машины. — Тезисы докладов второй Всесоюзной конференции по бесконтактным электрическим машинам. — Рига, 1963.
2. Мурыгин А. И. Некоторые вопросы исследования, расчета и проектирования синхронных торцевых машин с когтеобразными полюсами: Автореф. дисс. на соискание степени канд. техн. наук — М., 1980, В надзаг.: Московский энергетический институт.
3. Некоторые особенности бесконтактных синхронных машин с внешнезамкнутым магнитным потоком — И. Д. Урусов, А. И. Мурыгин, Л. И. Поляшов, В. С. Рыжков. — Труды ВНИИЭМ, 1966, т. 23.
4. Мурыгин А. И. Предварительный выбор основных размеров якоря торцевых бесконтактных синхронных машин. — Бесконтактные электрические машины. — Рига: Зинатне, 1972, № 11.
5. А. с. № 144892 (СССР). Бесконтактная разноименнополюсная синхронная электрическая машина торцевого типа / П. Р. Барышев, А. И. Мурыгин, В. И. Туманов. Оpubл. в Б. И., 1962, № 4.
6. Даугулис Х. Л. Аналитические выражения для веса и потерь синхронных машин малой мощности. — Бесконтактные электрические машины. — Рига: Зинатне, 1969, № 8.
7. Иосифьян А. Г. Вопросы электромеханики. — М.: Энергия, 1975.
8. Аспит В. В. Синхронные машины с когтеобразными полюсами — Изд-во АН Латв. СССР 1959.
9. Паластин Л. М. Синхронные машины автономных источников питания. — М.: Энергия, 1980.

[25.09.86]

УДК 621.313.333.001.24

## Анализ многополюсного линейного асинхронного двигателя с различными обмотками индуктора

ПАРХОМЕНКО А. И., КАРАСЬ С. В., ИВАНИЦКИЙ С. В., МАХОРСКИЙ Ю. Л., САРАПУЛОВ Ф. Н.

При расчете статических характеристик линейных асинхронных двигателей (ЛАД) хорошие результаты дает метод детализированных схем замещения [1—3], позволяющий выполнить численный анализ при сравнительно небольших затратах машинного времени. Вместе с тем при значительном количестве зубцов индуктора расход машинного времени и необходимый объем памяти существенно возрастают, что может стать серьезным препятствием на стадии оптимизационных расчетов при проектировании таких устройств. Далее предлагается способ

преодоления указанных трудностей, а также приводятся некоторые результаты анализа статических характеристик линейного асинхронного двигателя.

Как известно [4], на основе схемы замещения магнитной цепи рис. 1 можно записать уравнение магнитного состояния в матричной форме:

$$K_R \Phi = F^s + F^r, \quad (1)$$

где  $F^r = I^r$  — вектор токов в стержнях короткозамкнутой клетки

«ротора» — вторичного элемента (в.э.);  $\Phi$  — вектор потоков в участках яра индуктора;  $F^s$  — вектор токов в пазах индуктора (пазовых м.д.с.);  $K_R$  — матрица коэффициентов, определяемых параметрами схемы замещения, т.е. размерами и магнитными свойствами сердечников.

Вторичные элементы с короткозамкнутой клеткой при произвольной форме паза, а также в виде массивной проводящей пластины с некоторым приближением [3] могут быть сведены к двухклеточному с параметрами клеток, не зависящими от частоты. На рис. 2 показана схема замещения двухклеточного ротора вращающейся машины (КРАД), причем  $z_{cm}$  и  $z_{kn}$  означают комплексные сопротивления  $n$ -х стержней 1-й и 2-й клеток, а также  $n$ -го участка боковой шины (короткозамыкающего кольца);  $E_n$  — э.д.с. в стержнях.

Для случая ЛАД 5 и 6-й контуры размыкаются, а число стержней определяется протяженностью в.э.

На основании 1-го и 2-го законов Кирхгофа можно составить систему матричных уравнений:

$$\begin{aligned} A_{11}I_1 + A_{12}I_2 + A_{13}I_3 + A_{14}I_4 &= 0; \\ A_{21}I_1 + A_{22}I_2 + A_{23}I_3 + A_{24}I_4 &= 0; \\ A_{31}I_1 + A_{32}I_2 + A_{33}I_3 + A_{34}I_4 &= E; \\ A_{41}I_1 + A_{42}I_2 + A_{43}I_3 + A_{44}I_4 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $I_1, I_2$  — векторы токов в стержнях клеток;  $I_3, I_4$  — векторы токов в верхнем и нижнем короткозамыкающих кольцах.

Первое и второе уравнения составлены на основе 1-го закона Кирхгофа для верхнего и нижнего узлов схемы. Третье и четвертое уравнения составлены на основе 2-го закона Кирхгофа для указанных на схеме контуров. При этом в уравнениях введены э.д.с. движения, а коэффициенты матриц  $A_{nm}$  определяются сопротивлениями стержней и участков колец клеток. Следует учесть, что матрицы коэффициентов  $A_{14}, A_{23}, A_{43}, A_{44}$  — нулевые, а  $A_{11}$  и  $A_{12}$  — единичные. После упрощений система матричных уравнений (2) примет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & A_{24} \\ A_{31} & 0 & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

Решение системы уравнений (3) относительно вектора пазовых токов в. э.  $I^r$  имеет вид

$$I^r = I_1 + I_2 = A_{31} \{ -A_{31} [(A_{42} - A_{41})^{-1} A_{41} A_{13} + A_{13}] + A_{33} + A_{34} A_{24}^{-1} A_{21} A_{13}^{-1} \}^{-1} E. \quad (4)$$

Если учесть, что вектор э. д. с. в стержнях

$$E = -K_\Phi^r \Phi, \quad (5)$$

то уравнение (4) можно переписать в более удобном виде:

$$I^r = -K_\Phi \Phi, \quad (6)$$

$$\text{где } K_\Phi = A_{31} \{ -A_{31} [(A_{42} - A_{41})^{-1} A_{41} A_{13} + A_{13}] + A_{33} + A_{34} A_{24}^{-1} A_{21} A_{13}^{-1} \}^{-1} K_\Phi^r.$$

В качестве элементарного звена обмотки индуктора принимаем кольцевую катушку, уложенную в паз вокруг яра. Из таких катушек можно получить схему обмотки любой степени сложности. Простейшая из возможных модификаций — многофазная кольцевая обмотка, каждая катушка которой является фазой.

Уравнение электрического состояния для  $n$ -й катушки фазы в установившемся режиме работы после перехода к одновитковым секциям записывается в виде:

$$\dot{U}_n^s = j\omega \Phi_n + z_n^s I_n^s, \quad (7)$$

где  $z_n^s, \dot{U}_n^s, I_n^s$  — комплексное сопротивление, приложенное напряжение и ток фазы соответственно.

В матричной форме (7) принимает вид

$$U^s = K_\Phi^s \Phi + z^s I_\Phi^s, \quad (8)$$

где  $I_\Phi^s$  — вектор фазовых токов;  $z^s$  — квадратная матрица, имеющая размерность, равную числу катушек-фаз (пазов) индуктора, с ненулевыми элементами  $a_{nm} = z_n^s$ , т. е. однодиагональная матрица.

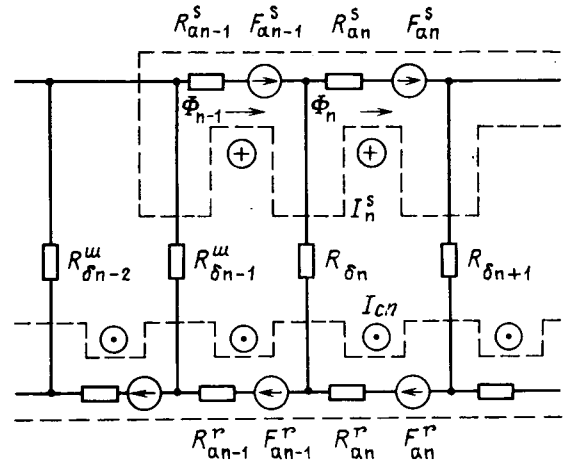


Рис. 1. Магнитная цепь и ее схема замещения

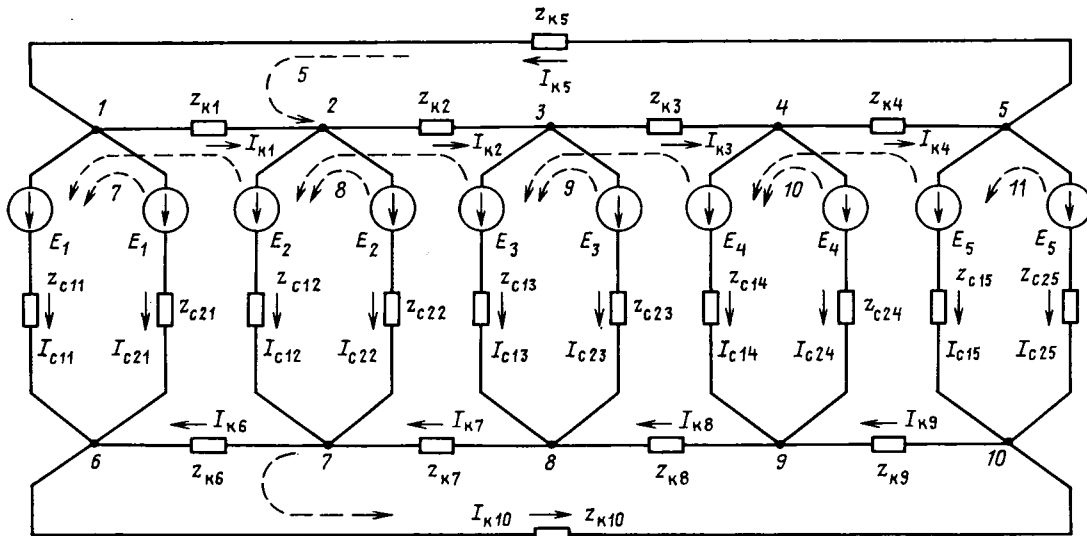


Рис. 2. Электрическая схема замещения ротора КРАД:  $q=1, p=1$

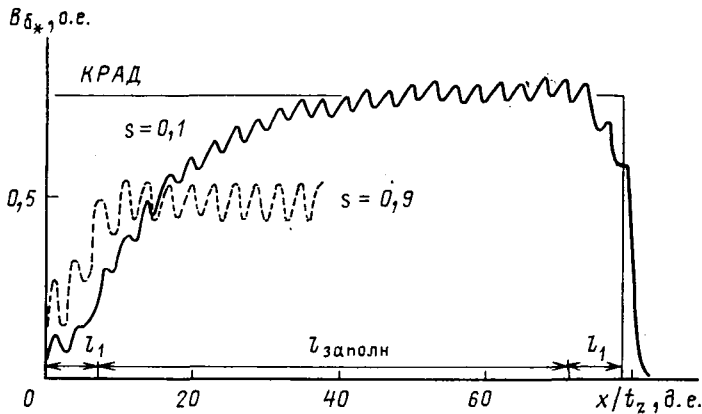


Рис. 3. Распределение индукции в зазоре 9-полюсного ЛАД с двухполюсной барабанной обмоткой ( $l_1$  — зоны полузаполненных пазов)

Таковую же размерность имеют векторы  $U^s$ ,  $I_\Phi^s$  и  $\Phi$ . Для случая машины с разомкнутым магнитопроводом размерности вектора  $\Phi$  и строк матрицы  $K_\Phi$  возрастают на число зубцовых делений в краевых зонах, но ненулевые элементы добавляются лишь в векторе  $\Phi$ .

Из (8) можно записать

$$I_\Phi^s = R_\Phi + K_\Phi \Phi, \quad (9)$$

где  $K_\Phi$  — однодиагональная матрица с ненулевыми элементами  $a_{nn} = K_n = -j\omega/z_n^s$ ;  $R_\Phi$  — матрица-столбец с элементами  $R_n = U_n^s/z_n^s$ .

Вектор токов в пазах индуктора  $F^s$  связан с вектором токов в фазах  $I_\Phi^s$  соотношением

$$F^s = K_{\text{пр}} I_\Phi^s, \quad (10)$$

где  $K_{\text{пр}}$  — матрица линейных преобразований координат от фазовых к пазовым.

В более сложных схемах катушки включаются последовательно, образуя параллельные ветви фаз. Схема соединения катушек и фаз обмотки (кольцевая, однослойная или двухслойная барабанные, при  $q=1, 2, \dots$ ,  $a=1, 2, \dots$ , для соединения фаз звездой, треугольником и т.д.) определяет размерность и значения элементов матриц и векторов в (9) и (10). При этом процедура заполнения матриц легко формализуется, что обеспечивает их автоматизированное компьютерное построение.

Например, если рассматривается трехфазная барабанная однослойная обмотка с диаметральной шагом и  $a=2$  при  $p=2$  для линейного двигателя с шестью зубцовыми делениями в каждой краевой зоне, то в первом и втором столбцах матрицы  $K_{\text{пр}}$  члены с  $n=13$  по  $n=18$  повторяют с обратным знаком значения элементов с номерами  $n=7 \div 12$ , в ненулевые элементы третьего и четвертого столбцов начинаются уже с  $n=19$ , так как токи  $I_5^s$  и  $I_6^s$  протекают в параллельных ветвях, расположенных на второй паре полюсных делений. Аналогично в матрице  $K_\Phi^s$  элементы первой и второй строк с  $n=13 \div 18$  повторяют с обратным знаком элементы с  $n=7 \div 12$ , а ненулевые члены третьей и четвертой строк начинаются с  $n=19$ .

Если барабанная однослойная обмотка не имеет параллельных ветвей и питается по схеме звезды без нулевого провода от заданной системы линейных напряжений, то число строк в  $K_\Phi^s$  и столбцов в  $K_{\text{пр}}$  сокращается до двух, но все строки и столбцы оказываются заполненными коэффициентами, повторяющимися с обратным знаком через шесть элементов.

Изменение  $q$  ведет к изменению числа повторяющихся подряд одинаковых элементов в строках и столбах коэффициентов  $K_\Phi$  и  $K_{\text{пр}}$ .

Увеличение числа полюсов вызывает пропорциональное увеличение размерности тех частей матриц, которые соответствуют активной зоне модели.

Если рассматривается двухслойная обмотка, то в соответствии с добавлением дополнительных секций появляются добавочные слагаемые в элементах строк матрицы  $K_\Phi^s$  и столбцов

матрицы  $K_{\text{пр}}$  — те же коэффициенты с обратными знаками и со сдвигом на шаг секции. Это эквивалентно размещению на индукторе двух однослойных обмоток, включенных последовательно-встречно и сдвинутых по расточке на шаг секции.

Совместное решение уравнений (1), (6), (9) и (10) позволяет найти распределение потоков в ярме и токов по пазам переходных и затем по известным выражениям [2—4] интегральные показатели машины: усилие, к. п. д.,  $\cos \varphi$ .

Как показано в [5] для машины с одноклеточным вторичным элементом, при некоторых упрощениях после перехода к единичному шагу разбиения схемы замещения рис. 1 и 2 сводятся к длинным линиям с распределенными э. д. с. Такая математическая модель дает для индукции в немагнитном зазоре и вторичной линейной плотности тока решение в виде [5]:

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{пр}} e^{-idx} + \sum_1^k C_n e^{\lambda_n x}, \quad (11)$$

причем первое слагаемое характерно для вращающейся машины, а экспоненциальные составляющие обусловлены разомкнутостью магнитопровода.

Для рассматриваемого класса линейных асинхронных двигателей (ЛАД) промышленного применения (электромагнитная добротность  $e_0=3 \div 8$ ) эти составляющие при скольжениях  $s \geq 0,1$  практически затухают на 4—6 полюсных делениях  $\tau$  от входного края и на  $\tau$  — от выходного края индуктора. В результате средняя часть машины с разомкнутым магнитопроводом оказывается практически не затронутой краевым эффектом. Это же можно видеть из рис. 3, на котором показано распределение индукции в зазоре 9-полюсного короткозамкнутого ЛАД с  $e_0=6,2$  мощностью 125 кВт, разработанного и изготовленного ВНИИВЭ. Кривая рассчитана на основании решения уравнений (1), (6), (9), (10) и иллюстрирует влияние дискретности распределения м. д. с. по пазам (зубчатость), полузаполненности пазов индуктора на крайних полюсных делениях (участки  $l_1$ ).

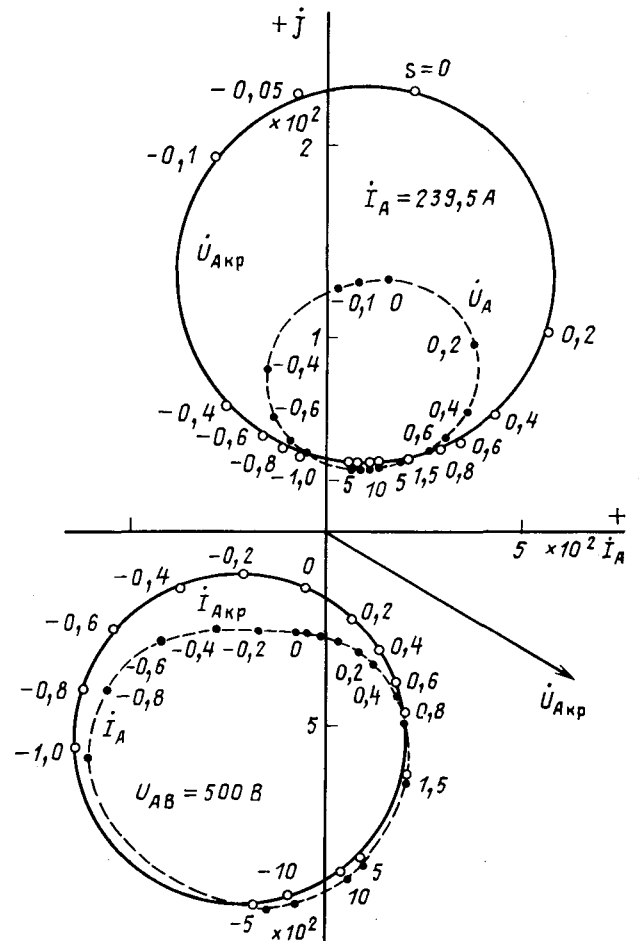


Рис. 4. Годографы токов и напряжений КРАД и ДАД (ЛАД) в каскаде

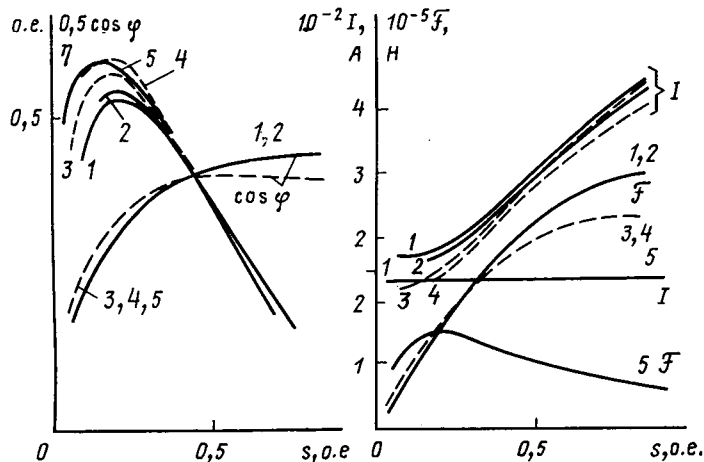


Рис. 5. Характеристики ЛАД, полученные по методике «Тандем» (1, 3) и непосредственно (2, 4) при питании от источника напряжения; 1, 2 — сплошной в. э.; 3, 4 — короткозамкнутый в. э.; 5 — при питании от источника тока, короткозамкнутый в. э., «Тандем»

Прямой линией показан уровень индукции вращающегося симметричного двигателя с такими же параметрами (КРАД). Как видно, особенно ярко краевой эффект сказывается при  $s=0,1$  на входном краю индуктора. Число  $k$  и показатели  $\lambda_n$  экспонент в (11) зависят от добротности  $e_0$ , скольжения  $s$  и параметров вторичной обмотки машины. Для общего случая одно-клеточного в. э. с реальными боковыми шинами  $k=5$ .

Экспоненты в распределениях  $B$ ,  $I^2$ , а следовательно, и соответствующие составляющие удельного усилия  $F_{уд}$  и потерь по расточке  $x$  становятся пренебрежимо малы на расстояниях  $3x/Re\lambda_n$  от краев в глубь индуктора. Исследования показывают, что протяженность зоны проявления краевого эффекта на входном краю активной зоны  $\Delta x_{к.з}$  определяется в основном отрицательной вещественной частью  $\lambda_3$ . Были сняты зависимости  $|Re\lambda_3|$  от  $s$  при  $T_c=0$  и от  $e_0$  при некоторых скольжениях, а также зависимости  $\Delta x_{к.з}/\tau = 3/\pi |Re\lambda_3|$  от скольжения. Они показывают, что изменение постоянной времени стержня  $T_c$  в основном не изменяет  $\Delta x_{к.з}$ , но ведет к существенной деформации кривых  $B(x)$ ,  $F_{уд}(x)$ , а следовательно, к изменению полного усилия машины.

С уменьшением  $e_0$  корни  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  по значению приближаются друг к другу, причем вещественная часть  $\lambda_3$  стремится к  $(-1)$  даже при малых скольжениях. Вместе с тем растут по абсолютной величине вещественные части  $\lambda_4$  и  $\lambda_5$ , которые ко-свенно характеризуют магнитные свойства магнитопровода. Это явление отражает известный факт, что при малых  $e_0$  на показатели машины в основном влияет разомкнутость магнитопровода, т. е. первичный продольный краевой эффект [6]. С другой стороны, расширяется зона  $\Delta x_{к.з}$ , в результате чего кривая  $F_{уд}(x)$  имеет обширные области  $x$ , в которых  $(F_{уд}/F_{уд-кр}) > 1$ .

Отмеченный характер распределения дифференциальных величин по расточке машины для  $e_0 \geq 3$  позволяет приближенно свести исходный многополюсный дуговой двигатель, соответствующий рассматриваемому ЛАД, к каскадному включению на один рабочий орган (вал) малополюсного дугового двигателя, активная зона которого перекрывает зону проявления продольного краевого эффекта исходного, и вращающегося симметричного двигателя, свободного от краевого эффекта. Протяженность активной зоны КРАД перекрывает «оставшуюся» область расточки исходной машины. Характеристики КРАД могут быть рассчитаны при минимальном числе полюсов  $2p=2$ . Согласование скоростей выполняется с помощью идеального редуктора.

| $s$ | $I_{кл}^2/I_{ш}^2$ | $\eta_{кл}/\eta_{ш}$ | $\frac{\cos \varphi_{кл}}{\cos \varphi_{ш}}$ |
|-----|--------------------|----------------------|--|
| 0,1 | 0,84               | 1,19                 | 1,07   |
| 0,2 | 0,89               | 1,10                 | 1,03   |
| 0,3 | 0,93               | 1,06                 | 1,00   |

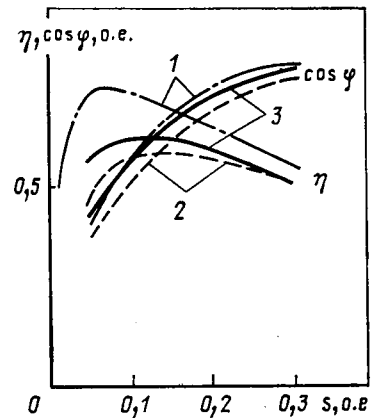


Рис. 6. Характеристики кругового (1) и линейного асинхронного двигателя с укороченным (2) и удлиненным (3) шагом обмотки индуктора

Возможны два варианта каскадного включения эквивалентных двигателей. Первый получается при последовательном соединении обмоток индукторов машин. Этот вариант наиболее точно моделирует ЛАД с последовательным соединением секций первичной обмотки при его питании от источника тока. Второй вариант наиболее точно моделирует ЛАД с параллельными ветвями в обмотке индуктора при его питании от источника напряжения.

Указанная методика расчета реализована в виде вычислительной программы для ЭВМ. Программа обладает большой универсальностью и позволяет находить параметры асинхронной машины для двухслойной и однослойной обмоток индуктора. Двухслойная обмотка может быть рассчитана при полном, укороченном и удлиненном шагах секций. Однослойная барабанная или кольцевая обмотки могут быть проанализированы при последовательном и параллельном соединениях катушечных групп.

На рис. 4 показаны годографы токов в фазах  $A$  индукторов кругового  $I_{Акр}$  и дугового  $I_A$  двигателей каскада, к которому сводится линейный асинхронный двигатель с двухслойной обмоткой индуктора  $y=7$ ,  $q=3$ ,  $2p=8+1$  при питании от источника симметричного трехфазного линейного напряжения  $U_n^s=500$  В согласно второму варианту включения эквивалентных двигателей. КРАД имеет  $2p=4$ , а ДАД  $2p=4+1$ . Токи в фазах индуктора ДАД превосходят фазные токи КРАД особенно в зоне малых скольжений, что видно из рис. 4 (нижняя полу-плоскость) и вызвано влиянием продольного краевого эффекта. К тому же в отличие от симметричной трехфазной машины эти токи составляют несимметричную трехфазную систему. Искажается также и система фазных напряжений ДАД, например при  $s=0,1$  получено:  $U_{фА}=138,7$  В;  $U_{фВ}=149,4$  В;  $U_{фС}=146,6$  В, тогда как для КРАД  $U_{фА}=U_{фВ}=U_{фС}=144,8$  В, а линейное напряжение  $U_n^s=250$  В.

На том же рис. 4 приведены годографы фазных напряжений индукторов кругового  $U_{Акр}$  и дугового  $U_A$  двигателей каскада при последовательном включении обмоток. Обмотки обтекаются симметричной системой токов  $I=239,5$  А. Годограф напряжения  $U_{Акр}$  (как тока  $I_{Акр}$  в предыдущем случае) представляет собой окружность, в то время как для дугового двигателя существенно отличается от окружности. Это вызвано влиянием продольного краевого эффекта, приводящего также к искажению симметрии фазных напряжений дуговой машины, а следовательно, и напряжений исходного ЛАД.

На рис. 5 показаны интегральные характеристики обсуждаемого ЛАД, полученные непосредственным расчетом по выражениям (1), (6), (9), (10) — кривые 2, 4, а также путем сведения его к каскадному включению эквивалентных машин — кривые 1, 3, 5 для двух исполнений в. э. — сплошного немагнитного (1, 2) и короткозамкнутого (3, 4, 5). Хорошая сходимость результатов, полученных двумя способами, подтверждает правомерность изложенной методики замены многополюсной машины каскадом из ЛАД и КРАД.

Из рассмотрения этого же рис. 5 можно заключить, что ЛАД с короткозамкнутым в. э. в диапазоне скольжений  $s=0,1 \div 0,3$  дает при тех же условиях меньшие токи индуктора, более высокие значения к. п. д. и  $\cos \varphi$  по сравнению с вариантом сплошного в. э. Это видно из таблицы, в которой по-

казаны отношения величин для ЛАД с короткозамкнутым (индекс «кл») и сплошным (индекс «ш») в. э.

На том же рис. 5 приведены кривые, соответствующие режиму заданной симметричной системы токов индуктора (питания от источника тока). Видно, что при этом двигатель обеспечивает больший к. п. д. в области скольжения  $s \leq 0,2$ , что объясняется отсутствием в токах обратной последовательности и, следовательно, обратно бегущего поля. Как и в симметричных вращающихся двигателях, эта последовательность ухудшает показатели машины.

На рис. 6 приведены зависимости к. п. д. и  $\cos \phi$  от скольжения для ЛАД с теми же параметрами для случаев удлиненного ( $y=11$ ) и укороченного ( $y=7$ ) шагов секций обмотки индуктора. Как видно, удлиненный шаг дает возможность повысить к. п. д. и  $\cos \phi$ , что можно объяснить удлинением сердечника индуктора и связанным с этим ослаблением влияния продольного краевого эффекта.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сарапулов Ф. Н. Расчет режима короткого замыкания индукционного двигателя на основе магнитной схемы замещения. — Электричество, 1976, № 6.

2. Исследование электромеханических переходных процессов линейного асинхронного короткозамкнутого двигателя / Ф. Н. Сарапулов, А. А. Емельянов, С. В. Иваницкий, М. Г. Резин. — Электричество, 1982, № 10.

3. Особенности расчета характеристик линейного асинхронного двигателя с массивным магнитопроводом / А. Ю. Коняев В. С. Проскураков, М. Г. Резин, Ф. Н. Сарапулов. — Электричество, 1983, № 8.

4. Сарапулов Ф. Н., Махорский Ю. Л., Бегалов В. А. Расчет характеристик линейной индукционной машины при различных схемах соединения обмотки индуктора. — М.: Информэлектро, 1981, № 74195.

5. Исследование короткозамкнутого асинхронного двигателя с разомкнутым магнитопроводом / Ф. Н. Сарапулов, В. А. Бегалов, С. В. Иваницкий — Электричество, 1982, № 5.

6. Вольдек А. И. Индукционные магнитогидродинамические машины с жидкометаллическим рабочим телом. — Л.: Энергия, 1970.

[28.02.85]

УДК [621.313.13:537.228.1].001.24

## Расчет характеристик пьезоэлектрического двигателя с учетом потерь во фрикционном контакте

ВИШНЕВСКИЙ В. С., канд. техн. наук, БЫКОВСКИЙ В. Ю., инж.

Киев

В настоящее время разработчики электромеханических устройств проявляют большой интерес к пьезоэлектрическим двигателям с целью замены ими традиционных электромагнитных двигателей. Приведенный в [1, 2] расчет пьезоэлектрических двигателей не учитывает потерь во фрикционном контакте, поэтому имеющиеся методики не позволяют производить расчет характеристик пьезоэлектрических двигателей, а дают только оценочные результаты.

Рассмотрим двигатель, осциллятор которого выполнен в виде тонкой пьезоэлектрической пластины, поляризованной по толщине, с электродами, нанесенными на основных поверхностях [3]. Пластина закреплена в центре и одним своим концом упирается в поверхность ротора (рис. 1).

К электродам пластины подключен источник синусоидального напряжения  $E$ , частота которого равна основной резонансной частоте продольных колебаний осциллятора. В результате действия электрического напряжения в пластине возбуждаются продольные колебания. При этом в результате перемещения конца пластины по поверхности ротора в ней возбуждаются изгибные колебания. Продольные колебания являются «тянущими», т. е. сообщают вращение ротору. Изгибные колебания осуществляют зацепление между осциллятором и ротором.

В [4] приведен анализ сил, возникающих во фрикционном контакте при работе двигателя. Выделим из этих сил силы, совершающие работу (рис. 1):  $F_0$  — сила, деформирующая материал осциллятора;  $F'_0$  — сила, действующая со стороны осциллятора на ротор. Сила  $F_0$  может быть разложена на две составляющие  $F_3$  и  $F_T$ . Сила  $F_3$  работы не совершает, а сила  $F_T$  — вращает ротор. Наличие перечисленных сил вызывает возникновение колебательности скоростей;  $v_0$  — колебательная скорость конца осциллятора;  $v_T$  — колебательная скорость осциллятора в направлении действия силы  $F_T$ .

При движении конца осциллятора вперед вследствие неидеальности фрикционного контакта происходит его проскальзывание относительно поверхности ротора. В результате этого поверхность ротора движется под действием силы  $F'_T$  со скоростью  $v'_T$ .

Используя принцип электромеханических аналогий [5] с учетом рассмотренной выше системы сил и скоростей, можно представить эквивалентную электрическую схему такого двигателя в виде, показанном на рис. 2, а. На схеме четырехполюсник  $I$  отображает эквивалентную схему осциллятора [6]. Здесь  $c_0$  — статическая емкость осциллятора;  $Tr. 1$  — идеаль-

ный трансформатор, характеризующий электромеханическую связь, с коэффициентом трансформации.

$$N_1 = \frac{2bd_{31}}{S_{11}^E}, \quad (1)$$

где  $b$  — ширина пьезоэлектрической пластины;  $d_{31}$  — пьезомодуль;  $S_{11}^E$  — упругая податливость материала осциллятора;  $c_m$  и  $L_m$  — механическая емкость и индуктивность осциллятора соответственно;  $R_0$  — сопротивление механических потерь внутри осциллятора.

Четырехполюсник  $II$  характеризует фрикционный контакт между осциллятором и ротором. Он содержит:  $R_{тр}$  — сопротивление потерь на трение;  $Tr. 3$  — идеальный трансформатор, отражающий преобразование энергии колебаний осциллятора в энергию вращения поверхности ротора;  $R_{оп}$  характеризует потери на трение в опорах, а  $R_{изг}$  — потери в резонаторе изгибных колебаний, которые трансформируются в резонатор продольных колебаний. Трансформатор  $Tr. 2$  отображает угол контакта  $\alpha$ :

$$N_2 = \cos \alpha. \quad (2)$$

Трансформатор  $Tr. 4$  учитывает радиус ротора:

$$N_4 = r, \quad (3)$$

$R_4$  — сопротивление нагрузки, равное  $\frac{M}{\omega}$ .

Представленная схема с учетом того, что частота источника  $E$  всегда поддерживается равной резонансной частоте осциллятора, может быть преобразована в более простую, показанную на рис. 2, б (на схеме  $R_{н\Sigma}$  — суммарное сопротивление акустических потерь). При этом пренебрегаем влиянием  $c_0$ , считая, что входящие в схему сопротивления одного порядка с сопротивлением потерь в керамике.

Эквивалентная схема рис. 2, а позволяет получить уравнения для момента и частоты вращения:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{I}{N_1 N_2 N_3 N_4} \left( 1 + N_2^2 \frac{R_{н\Sigma}}{R_{тр}} \right) - \frac{N_1 N_2}{N_3 N_4} \frac{E}{R_{тр}}; \\ M &= N_1 N_2 N_3 N_4 E - \frac{N_2 N_3 N_4}{N_1} R_{н\Sigma} I, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$



откуда может быть получено уравнение для нагрузочных характеристик двигателя:

$$\omega = \frac{N_1}{N_2 N_3 N_4} \frac{E}{R_{n\Sigma}} - \frac{N_2^2 R_{n\Sigma} + R_{TP}}{N_2^2 N_3^2 N_4^2 R_{n\Sigma} R_{TP}} M. \quad (5)$$

С учетом (1), (2), (3) и (5)

$$\omega = \frac{2bd_{31}}{rN_3 S_{11}^E \cos \alpha} \frac{E}{R_{n\Sigma}} - \frac{R_{n\Sigma} \cos^2 \alpha + R_{TP}}{r^2 N_3^2 \cos^2 \alpha R_{n\Sigma} R_{TP}} M. \quad (6)$$

Схема рис. 2, б позволяет получить зависимость к. п. д. пьезоэлектрического двигателя от значения нагрузки  $R_H$ :

$$\eta = \frac{1}{\frac{R_{n\Sigma} N_2^2 + R_{TP}}{N_3^2 N_4^2 R_{TP}} R_H + \frac{R_{n\Sigma} N_1^2 N_3^2 N_4^2}{R_H} + 2 \frac{R_{n\Sigma} N_2^2}{R_{TP}} + 1}. \quad (7)$$

Эта зависимость имеет максимум при

$$R_H = R_{TP} N_3^2 N_4^2 \sqrt{\frac{R_{n\Sigma} N_2^2}{R_{n\Sigma} N_2^2 + R_{TP}}}. \quad (8)$$

При этом максимальное значение к. п. д. рассчитывается по формуле:

$$\eta_{\max} = \frac{R_{TP}}{\left( \sqrt{R_{n\Sigma} N_2^2} + \sqrt{R_{n\Sigma} N_2^2 + R_{TP}} \right)^2}. \quad (9)$$

Зависимость к. п. д. от нагружающего момента определяется формулой:

$$\eta = \frac{N_1 N_2 N_3 N_4 R_{TP} E M - (N_2^2 R_{n\Sigma} + R_{TP}) M^2}{N_1^2 N_2^2 N_3^2 N_4^2 R_{TP} E^2 - N_1 N_2 N_3 N_4 R_{TP} E M}. \quad (10)$$

Положение максимума к. п. д. на нагрузочной характеристике двигателя относительно максимального момента определяется формулой:

$$\frac{M_{\eta \max}}{M_{\max}} = m' = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{R_{n\Sigma} N_2^2}{R_{n\Sigma} N_2^2 + R_{TP}}}}. \quad (11)$$

Согласно эквивалентной схеме (рис. 2, б) можно показать, что отношение мощности, выделяющейся на фрикционном контакте, к мощности, выделяющейся на нагрузке, однозначно связано со значением  $\eta_{\max}$  следующим образом:

$$\frac{P_{\Phi.к}}{P_{\text{вых}}} = \frac{1 - \eta_{\max}}{1 + \eta_{\max}}, \quad (12)$$

где  $P_{\Phi.к}$  — мощность, выделяющаяся во фрикционном контакте (на сопротивлении  $R_{TP}$ );  $P_{\text{вых}}$  — мощность, выделяющаяся на нагрузке. Приведенная формула позволяет по значению  $\eta_{\max}$  оценить значение мощности, выделяющейся во фрикционном контакте.

Рассмотрим входящие в формулу (6) параметры и методики их измерения и определения.

Параметры пьезокерамики  $d_{31}$  и  $S_{11}^E$ , входящие в коэффициент  $N_1$ , определяются известными методами и могут быть взяты из ГОСТ на пьезоматериалы. Суммарное сопротивление акустических потерь может быть рассчитано по формуле:

$$R_{n\Sigma} = R_0 \frac{R_{\text{вх.д}}}{R_{\text{вх.0}}}, \quad (13)$$

где

$$R_0 = \frac{\omega_0 L_M}{Q} = \frac{\omega_0 m}{2Q}; \quad (14)$$

$\omega_0$  — резонансная частота осциллятора;  $m$  — масса осциллятора;  $Q$  — добротность свободного осциллятора, измеряемая при максимальном токе через пьезоэлемент;  $R_{\text{вх.д}}$  — входное электрическое сопротивление ненагруженного двигателя, измеряемое при максимальной скорости вращения ротора;  $R_{\text{вх.0}}$  — входное электрическое сопротивление осциллятора при максимальном токе через пьезоэлемент.

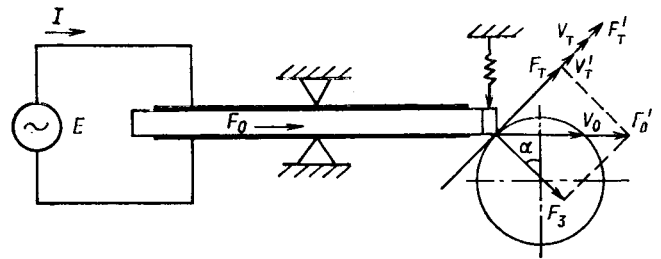


Рис. 1. Конструкция пьезоэлектрического двигателя

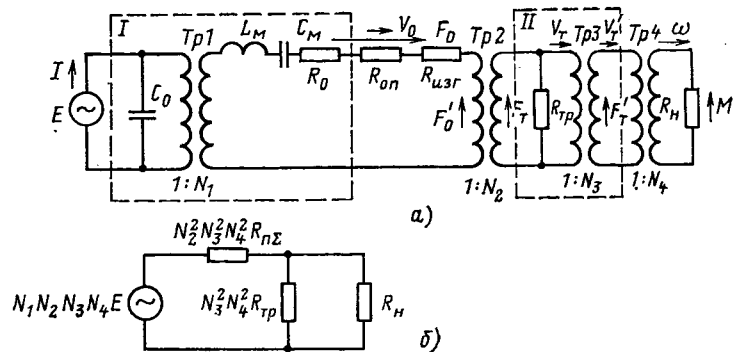


Рис. 2. Эквивалентная схема пьезоэлектрического двигателя, учитывающая потери во фрикционном контакте (а) и упрощенная эквивалентная схема (б)

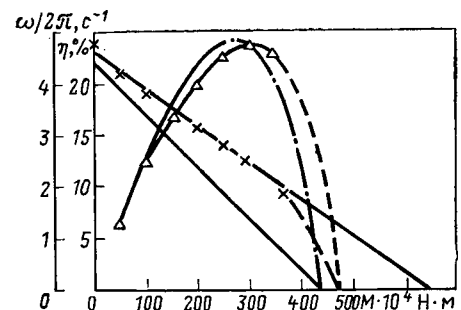


Рис. 3. Характеристики образца пьезоэлектрического двигателя, полученные экспериментальным и расчетным путем: —X—X— экспериментальная нагрузочная характеристика; — — — — — нагрузочная характеристика аппроксимированная прямой; — — — — — расчетная нагрузочная характеристика; —\Delta— экспериментально полученная зависимость к. п. д. от момента нагрузки; — — — — — расчетная зависимость к. п. д. от момента нагрузки

Коэффициент трансформации  $N_3$  определяется из системы уравнений для четырехполосника:

$$\left. \begin{aligned} F'_T &= N_3 F_T; \\ v'_T &= \frac{v_T}{N_3}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Если принять, что постоянная сила  $F'_T$ , вращающая ротор, равна амплитудному значению силы  $F_T$ , то  $N = \sqrt{2}$ . Сопротивление потерь во фрикционном контакте определяется характеристикой фрикционного контакта и зависит от свойств применяемой фрикционной пары. Это сопротивление может быть рассчитано по формуле:

$$R_{TP} = \frac{M_{\max} R_{n\Sigma} N_2^2}{\omega_{\max} R_{n\Sigma} N_2^2 N_3^2 N_4^2 - M_{\max}}, \quad (16)$$

где  $M_{\max}$ ,  $\omega_{\max}$  — соответственно максимальные момент и частота вращения двигателя при данном напряжении источника  $E$ .



Другой способ определения  $R_{тр}$  — по значению  $\eta_{\max}$ :

$$R_{тр} = \frac{4\eta_{\max}}{(1 - \eta_{\max})^2} R_{л\Sigma} N_2^2. \quad (17)$$

Проверка рассмотренной методики расчета производилась на двигателе с осциллятором, выполненным из пьезокерамики типа ЦТС-25 размером  $60 \times 12 \times 3,6$  мм. Другие исходные параметры двигателя:  $m = 19,75$  г;  $d_{31} = 7,83 \cdot 10^{-11}$  м/В;  $S_{11}^E = 1,17 \times 10^{-11}$  М<sup>2</sup>/Н;  $\alpha = 45^\circ$ ;  $r = 8,7$  мм;  $R_{л\Sigma} = 33,6$  Н·с/м;  $R_{тр} = 27,3$  Н·с/м.

Рассчитанная нагрузочная характеристика для максимальной скорости вращения и зависимости к. п. д. при  $E = 50$  В приведена на рис. 3. Здесь же приведены экспериментально полученные характеристики. По приведенным зависимостям видно, что отклонение расчетных характеристик от экспериментальных не превышает 30 %.

Учет потерь во фрикционном контакте позволяет учесть проскальзывание ротора относительно осциллятора. Наличие проскальзывания у реального пьезоэлектрического двигателя приводит к значительному уменьшению частоты вращения ротора с увеличением нагрузки, что определяет ход характеристик реального двигателя. Нагрузочная характеристика становится значительно «мягче» — увеличивается ее угол наклона, а на зависимости к. п. д. от момента нагрузки появляется максимум, который определяет максимальный к. п. д. двигателя.

Наличие максимума к. п. д. определяет область целесообразных нагрузок двигателя. В этой области на осцилляторе двигателя выделяется минимальная энергия, т. е. в таком режиме двигатель меньше нагревается.

УДК 621.319.4.001.24.088

## О погрешности, допускаемой при расчете емкости цилиндрических конденсаторов

КАЗАНЦЕВ В. П., КУКЛИН Е. И.

Красноярск

В инженерной практике емкость реальных цилиндрических конденсаторов конечной длины часто определяют как

$$C \approx l C_l, \quad (1)$$

где  $C_l$  — погонная емкость между двумя бесконечно длинными безграничными оболочками, конечные части которых, имеющие длину  $l$ , и образуют конденсатор.

Примером здесь может служить вошедшая в учебник формула для расчета емкости цилиндрического конденсатора с соосными круговыми оболочками [1 и 2]. Напомним, что формула (1) связана с использованием метода конформных отображений для решения задач о емкости цилиндрических конденсаторов [3 и 4]. Однако как в учебной [1 и 2], так и в научной [3 и 4] литературе вопрос о том, насколько различаются правая и левая части соотношения (1) из-за существенного отличия электрического поля вблизи краев конденсатора от электрического поля в бесконечно длинном конденсаторе, не рассматривается. При проектировании различных устройств (а в реальных устройствах всегда имеют дело с цилиндрическими конденсаторами конечной длины) важно уметь оценить погрешность формулы (1) с тем, чтобы соотнести ее с заданными допусками. Представляется, что задача об оценке погрешности формулы (1) до сих пор не была решена, потому что для этого не был разработан метод, в полной мере отвечающий существу задачи.

В настоящей статье с помощью развитого в [5—7] метода вариационных неравенств будет показано, что для реального значения емкости между цилиндрической оболочкой и цилиндром, а следовательно, и для емкости конденсатора, образованного цилиндрическими оболочками, справедливы неравенства

$$1 < \frac{C}{l C_l} < 1 + \frac{2\sqrt{S}}{l} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{C_l}}, \quad (2)$$

где  $S$  — площадь, ограниченная контуром (рис. 1);  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная.

При этом для емкости системы «цилиндр — оболочка» верхняя оценка является более точной.

Чтобы обосновать неравенства (2), обратимся к вариационной формулировке задачи о емкости системы двух проводников.

Приведенная методика расчета основана на использовании электромеханических аналогий [5, 6], введение которых правильно на основании идентичности дифференциальных уравнений, описывающих механические и электрические системы. Поэтому использование аналогий не приводит к появлению дополнительных погрешностей при расчетах.

При этом следует сказать, что приведенная методика учитывает нелинейности фрикционного контакта, которая оказывает влияние при малых значениях колебательных скоростей, т. е. в области низких значений напряжений питания двигателя и проявляется в наличии порога на зависимостях частот вращения и вращающего момента от значения напряжения питания.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лавриненко В. В., Карташев И. А., Вишневский В. С. Пьезоэлектрические двигатели. — М.: Энергия, 1980.
2. Вишневский В. С., Карташев И. А., Шейко Ю. А. Коэффициент полезного действия пьезоэлектрических двигателей. — Диэлектрики и полупроводники, 1977, вып. 12.
3. Вишневский В. С. и др. Патент № 4.019.073 (США) М. кл. H01 41/04, 1977.
4. Вишневский В. С., Карташев И. А., Лавриненко В. В. Эквивалентные схемы пьезоэлектрических двигателей. — Вестник Киевского политехнического ин-та. Сер. Радиоэлектроника, 1976, вып. 13.
5. Ленк А. Электромеханические системы. — М.: Энергоиздат, 1982.
6. Методы и приборы ультразвуковых исследований. — В кн.: Физическая акустика, т. I / Под ред. У. Мэзона. — М.: Мир, 1966.

[02.04.86]

Прежде всего заметим, что емкость может быть выражена через функционал энергии электрического поля:

$$C = \frac{2}{U^2} W(\varphi), \quad (3)$$

где

$$W(\varphi) = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 dV; \quad (4)$$

$U$  — разность потенциалов между проводниками;  $\varphi$  — потенциал электрического поля.

Интегрирование в правой части формулы (4) проводится по объему всего пространства  $\Omega$ . В свою очередь, величину  $C_l$  можно найти как

$$C_l = \frac{2}{U^2} w(\tilde{\varphi}), \quad (5)$$

где

$$\tilde{w}(\tilde{\varphi}) = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \tilde{\varphi})^2 dS; \quad (6)$$

$\tilde{\varphi}(x, y)$  — решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} = 0$$

в области, ограниченной кривыми  $\Gamma$  и  $\Gamma_1$ , удовлетворяющее граничным условиям

$$\tilde{\varphi}|_{\Gamma} = 0; \quad \tilde{\varphi}|_{\Gamma_1} = U. \quad (7)$$

Интегрирование уравнения (6) проводится по плоскости  $xy$  (см. рисунок).

Таким образом, задача о сравнении  $C$  и  $l C_l$  сведена к задаче о сравнении значений функционалов (4) и (6). Левое неравенство (2) непосредственно следует из общего положения об уменьшении емкости при уменьшении диэлектрической проницаемости в любой части среды, окружающей проводники [3].

Для доказательства правого неравенства (2) используем следующую вариационную формулировку задачи о емкости

системы двух проводников: функционал (4), рассматриваемый на множестве непрерывных кусочно-гладких в  $\Omega$  пробных потенциалов  $\Phi^*$ , принимающих на проводниках постоянные значения  $U_1$  и  $U_2$  — такие, что их разность

$$U_1 - U_2 = U \quad (8)$$

остаётся постоянной для всех  $\Phi^*$  — достигает своего минимума на потенциале  $\Phi$ , соответствующем решению задачи о ёмкости системы двух проводников, т. е. потенциал  $\Phi$  должен удовлетворять уравнению Лапласа в области вне проводников, принимать на проводниках постоянные значения  $U_{10}$  и  $U_{20}$  — такие, что при этом суммарный заряд проводников равен нулю, а

$$U_{10} - U_{20} = U. \quad (9)$$

Эта вариационная формулировка обобщает известный принцип Дирихле [8] на случай задачи о ёмкости системы двух проводников. Справедливость этой формулировки следует из непосредственно проверяемого тождества

$$W(\Phi^*) - W(\Phi) = W(\Phi^* - \Phi) + \varepsilon_0 \int_{\Omega} \nabla \Phi \nabla (\Phi^* - \Phi) dV, \quad (10)$$

интеграл в правой части которого равен нулю, поскольку, используя формулу Остроградского—Гаусса, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \Phi \nabla (\Phi^* - \Phi) dV &= (U_{10} - U_1) \frac{q}{\varepsilon_0} - (U_{20} - U_2) \frac{q}{\varepsilon_0} = \\ &= (U_{10} - U_1 - U_{20} + U_2) \frac{q}{\varepsilon_0} = 0. \end{aligned}$$

Учитывая равенство нулю интеграла в правой части тождества (11), а также положительность функционала  $W(\Phi^* - \Phi)$ , получаем неравенство

$$W(\Phi) \leq W(\Phi^*). \quad (11)$$

Оно и доказывает данную выше вариационную формулировку задачи о ёмкости системы двух проводников.

Выбирая в качестве пробного потенциала  $\Phi^*$  в правой части неравенства (11) функцию, совпадающую в области  $|z| < l/2$  ( $x, y$ ) и равную

$$\Phi^* = \begin{cases} \tilde{\Phi}(x, y) \Phi(z) & \text{при } z > \frac{l}{2}; \\ \tilde{\Phi}(x, y) \Phi(-z) & \text{при } z < -\frac{l}{2}, \end{cases} \quad (12)$$

после ее подстановки в функционал  $W(\Phi^*)$  и интегрирования по переменным  $x$  и  $y$ , получаем

$$W(\Phi^*) = l w(\tilde{\Phi}) + 2 \int_{l/2}^{\infty} (A \Phi^2(z) + B \Phi'^2(z)) dz, \quad (13)$$

где

$$A = w(\tilde{\Phi}); \quad B = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \tilde{\Phi}^2 dx dy. \quad (14)$$

Функция  $\Phi(z)$ , минимизирующая функционал (13) и удовлетворяющая уравнению Эйлера—Лагранжа

$$\Phi'' - \frac{A}{B} \Phi = 0,$$

равна единице при  $z = \frac{l}{2}$  и обращается в нуль на бесконечности. Легко найти, что

$$\Phi(z) = \exp \left[ \sqrt{\frac{A}{B}} \left( \frac{l}{2} - z \right) \right].$$

Соответствующее этой функции значение рассматриваемого функционала определяется как

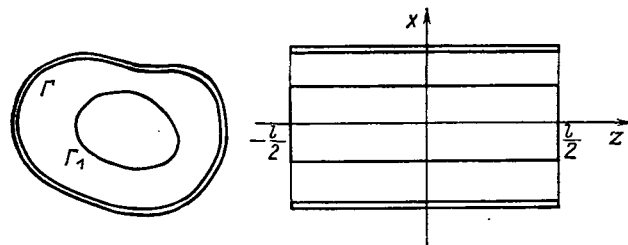
$$W(\Phi^*) = l w(\tilde{\Phi}) + 2 \sqrt{AB}. \quad (15)$$

Учитывая также, что

$$0 \leq \tilde{\Phi} \leq U \quad (16)$$

(эти неравенства следуют из теоремы о максимальном и минимальном значениях потенциала [9]), найдем

$$B < \frac{\varepsilon_0 U^2}{2} S. \quad (17)$$



Подставляя  $W(\Phi^*)$  из соотношения (15) в неравенство (11) и используя формулы (5), (6) и неравенство (17), приходим к правому неравенству (2). Таким образом, неравенства (2) доказаны.

В случае, когда пространство между обкладками конденсатора заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon > 0$ , вместо неравенств (2) будем иметь следующие:

$$1 < \frac{C}{C_l} < 1 + \frac{2\sqrt{S}}{l} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon C_l}}. \quad (18)$$

С помощью неравенств (18) погрешность расчета ёмкости цилиндрических конденсаторов по формуле (1) можно оценить величиной

$$\Delta = \frac{\sqrt{S}}{l} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon C_l}}. \quad (19)$$

**Примеры.** Для конденсатора, образованного соосными квадратными обложками с параллельными сторонами длины  $h$  и  $b$ , при отношениях  $h/b=0,5$  и  $l/b=2$ , погрешность приближенного значения ёмкости  $\Delta=15,6\%$ ; при  $h/b=0,9$  значение  $\Delta=5,8\%$ . При значении  $l/b=10$  приведенные выше погрешности уменьшаются в 5 раз. Вычисления проведены для  $\varepsilon=1$  с использованием значений погонной ёмкости, полученных в [4].

Погонная ёмкость между коаксиальными круговыми обложками с радиусами  $r$  и  $R$  хорошо известна:

$$C_l = 2\pi\varepsilon_0 \left( \ln \frac{R}{r} \right)^{-1}.$$

Оценить погрешность найденного по формуле (1) значения ёмкости конденсатора с такими обложками можно точнее, подставив в соотношение (19) вместо  $S = \pi R^2$  величину, вычисленную по формуле

$$S = \pi R^2 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \left( \ln \frac{R}{r} \right)^{-2} - \frac{r^2}{R^2} \left( \ln \frac{R}{r} \right)^{-1} \right]. \quad (20)$$

Эта формула соответствует точному значению коэффициента  $B$ .

Для диэлектрической проницаемости  $\varepsilon=1$ ,  $l/R=2$  при  $r/R=0,5$  погрешность  $\Delta=19,1\%$ , а при  $r/R=0,9$  значение  $\Delta=10,7\%$ . Для среды с  $\varepsilon=2$  и отношения  $l/R=10$  указанные погрешности уменьшаются в 10 раз.

Авторы надеются, что предложенные в этой работе метод оценки погрешности найдет применение в практике при определении точности расчетов и во многих других электростатических задачах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Том III. Электричество. — М.: Наука, 1977. — 687 с.
2. Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм. — М.: Высшая школа, 1983. — 463 с.
3. Иосель Ю. Я., Качанов Э. С., Струнский М. Г. Расчет электрической ёмкости. — Л.: Энергия, 1981. — 288 с.
4. Струнский М. Г., Горбов М. М. Расчет электрической ёмкости между двумя длинными соосными прямоугольными обложками. — Электричество, 1984, № 8, с. 32—37.
5. Казанцев В. П. Вариационные оценки эффективной проводимости среды с макроскопическими включениями. — Изв. вузов. Физика, 1979, № 5, с. 53—59.
6. Казанцев В. П. Вариационные оценки ёмкостей проводящих пластин. — ЖТФ, 1983, т. 53, № 3, с. 449—457.
7. Казанцев В. П. О методе вариационных неравенств в электростатике. — Изв. вузов. Физика, 1984, № 11, с. 93—98.
8. Полиа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. — М.: Физматгиз, 1962. — 336 с.
9. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966, с. 149.

# Расчет магнитного поля и параметров осесимметричной системы обмоток в кольцевой полости прямоугольного сечения

ДАНИЛЬЧУК А. А., канд. техн. наук

Москва

Осесимметричные системы обмоток нашли широкое применение в различных электротехнических устройствах. Для расчета таких систем применяется много математических методов, одним из которых является метод разделения переменных. Применительно к задачам энергетики этот метод подробно изложен в [1].

В настоящей статье приводится вариант метода разделения переменных для расчета магнитного поля и интегральных параметров осесимметричной системы обмоток в кольцевой полости прямоугольного сечения (в частности, в цилиндрической полости) при различной комбинации граничных условий первого и второго рода.

**Расчетная схема и основные допущения.** Расчетная схема, к которой можно свести ряд электромагнитных устройств (трансформаторы, реакторы, индуктивные накопители энергии, индукторы и т. д.), показана на рис. 1. Система обмоток находится в цилиндрической кольцевой полости, ограниченной по радиусу двумя цилиндрическими поверхностями (экранами) с радиусами  $R_{\text{э.в}}$  и  $R_{\text{э.н}}$  (в частном случае  $R_{\text{э.в}}=0$ ).

Цилиндрические координаты  $r, z$  разместим таким образом, чтобы ось  $z$  совпадала с осью полости, а точка  $z=0$  располагалась на середине высоты полости, которая равна  $2h_0$ .

Считаем, что границы полости образованы идеальными электромагнитными экранами с нулевым электрическим сопротивлением ( $\rho_0=0$ ), либо идеальными магнитными экранами с бесконечной магнитной проницаемостью ( $\mu_0=\infty$ ). Граничным условием для электромагнитного экрана является равенство нулю нормальной составляющей индукции магнитного поля, для магнитного экрана — равенство нулю тангенциальной составляющей.

Внутри полости располагается  $k$  цилиндрических обмоток, имеющих зоны с разной плотностью витков. Зоны и обмотки могут иметь различное соединение. Таким образом, в качестве базового однородного элемента для получения расчетных формул и для дальнейшей реализации на ЭВМ целесообразно выбрать  $v$ -ую цилиндрическую зону  $i$ -й обмотки, имеющей равномерно расположенных по ее сечению  $w_{iv}$  витков с током  $i_{iv} = I_{miv} \sin \times (\omega t + \psi_{iv})$ . Каждая зона, помимо  $w_{iv}$  и  $i_{iv}$ , характеризуется внутренним и наружным радиусами  $r_{ivn}$  и  $r_{ivb}$ , соответственно и координатами границ по высоте: нижней  $z_{ivn}$  и верхней  $z_{ivb}$ , откуда ширина зоны  $b_{iv} = r_{ivn} - r_{ivb}$ , высота зоны  $h_{iv} = z_{ivb} - z_{ivn}$ .

Полагаем, что средняя плотность тока в сечении зоны

$$J_{cp\ iv} = \frac{I_{iv} w_{iv}}{b_{iv} h_{iv}} \quad (1)$$

имеет только азимутальную составляющую. Соответственно напряженность электрического поля имеет только одну азимутальную составляющую  $E_{iv}$ , а индукция магнитного поля осевую  $B_{ziv}$  и радиальную  $B_{riv}$  составляющие внутри рассматриваемой полости. Для упрощения записей при рассмотрении одной зоны индексы опускаем.

**Исходные уравнения и общее решение задачи.** Пренебрегая токами смещения и вихревыми токами в рассматриваемой полости, из системы уравнений Максвелла для данной задачи дифференциальное уравнение для комплекса действующего значения напряженности электрического поля имеет вид

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E}{\partial r} \right) - \frac{E}{r} \right] + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = F(r, z); \quad (2)$$

$$R_{\text{э.в}} \leq r \leq R_{\text{э.н}}; \quad -h_0 \leq z \leq h_0,$$

где

$$F(r, z) = -j\omega\mu_0 J_{cp} f(r) f(z); \quad (3)$$

$f(r), f(z)$  — функция распределения плотности тока по осям  $r$  и  $z$ ,  $j = \sqrt{-1}$ ;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м;

$$f(r) = \begin{cases} 1 & \text{при } r_{\text{в}} \leq r \leq r_{\text{н}}; \\ 0 & \text{при } r_{\text{н}} < r \leq R_{\text{н}}, R_{\text{э.в}} \leq r < r_{\text{в}}; \end{cases} \quad (4)$$

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z_{\text{н}} \leq z \leq z_{\text{в}}; \\ 0 & \text{при } z_{\text{в}} \leq z < h_0, -h_0 \leq z < z_{\text{н}}. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, решается неоднородная задача с однородными граничными условиями. По методу разделения переменных решение для напряженности электрического поля ищем в виде [2]:

$$E(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m(z) [A_m J_1(k_m r) + B_m N_1(k_m r)], \quad (6)$$

где  $J_1(k_m r), N_1(k_m r)$  — функции Бесселя и Неймана первого рода первого порядка, являющиеся независимыми решениями первого уравнения системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial E(r)}{\partial r} \right] + \left[ k_m^2 r - \frac{1}{r} \right] E(r) &= 0; \\ \frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} - k_m^2 E(z) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

получающейся при разделении переменных соответствующего (2) однородного уравнения;  $A_m, B_m$  — постоянные интегрирования;  $E_m(z)$  — функция, зависящая только от  $z$ .

Собственные числа  $k_m$  определяются при подстановке в (6) граничных условий при  $r=R_{\text{э.в}}$  и  $r=R_{\text{э.н}}$ . Формулы для определения собственных чисел для всех вариантов радиальных границ сведены в табл. 1. Используя граничные условия при  $r=R_{\text{э.в}}$  и  $r=R_{\text{э.н}}$  и известные соотношения

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE) = j\omega B_z; \quad \frac{\partial E}{\partial z} = j\omega B_r, \quad (8)$$

из (6) получим трансцендентные уравнения (9) для определения собственных чисел. При больших значениях аргумента эти уравнения могут быть выражены через тригонометрические функции (10). Решение трансцендентного уравнения при больших значениях аргумента выражается формулой (11). Собственные числа при больших значениях аргумента выражаются через (12), а в общем случае — через (13), причем при  $R_{\text{э.в}} \neq 0$  собственные числа имеют асимптотические приближения [3]. Поскольку асимптотические приближения дают близкие значения собственных чисел их уточнение может производиться по методу Ньютона, который является наиболее употребительным методом уточнения корней трансцендентных уравнений [4]. Трансцендентное уравнение для всех вариантов радиальных границ

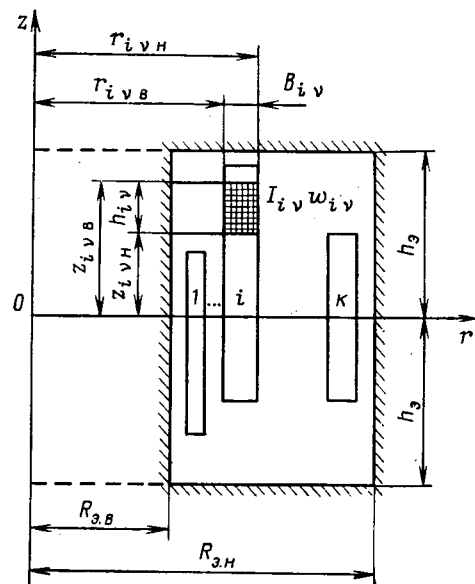


Рис. 1. Расчетная схема

при  $R_{\partial, \text{в}} \neq 0$  можно представить в обобщенном виде:

$$\varphi(x) = J_p(\text{в})(x) N_p(\text{н})(\lambda x) - N_p(\text{в})(x) J_p(\text{н})(\lambda x), \quad (14)$$

где порядок  $p$  функций Бесселя и Неймана с аргументом  $x$  определяется типом внутреннего экрана, а с аргументом  $\lambda x$  — типом наружного экрана, причем  $p=1$  для электромагнитного экрана и  $p=0$  — для магнитного. Тогда производная трансцендентного уравнения

$$\varphi'(x) = J_p(\text{в})(x) N_p'(\text{н})(\lambda x) + J_p'(\text{в})(x) N_p(\text{н})(\lambda x) - N_p(\text{в})(x) J_p'(\text{н})(\lambda x) - N_p'(\text{в})(x) J_p(\text{н})(\lambda x)$$

и, следовательно, уточненный корень

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\varphi_s(x_n)}{\varphi_s'(x_n)}. \quad (15)$$

График трансцендентного уравнения для полости с радиальными электромагнитными экранами при  $\lambda=2$  показан на рис. 2.

При найденных собственных числах функцию  $F(r, z)$  разложим в ряд по функциям  $J_1(k_m r)$  и  $N_1(k_m r)$ , т. е. представим  $F(r, z)$  в виде

$$F(r, z) = -j \omega \mu_0 J_{\text{ср}} f(z) \sum_{m=1}^{\infty} [a_m J_1(k_m r) + b_m N_1(k_m r)]. \quad (16)$$

Обозначив отношение  $\frac{b_m}{a_m} = v_m$ , которое определяется из граничных условий как

$$v_m = - \frac{J_p(k_m R_{\partial, \text{в}})}{N_p(k_m R_{\partial, \text{в}})},$$

где  $p=0$  для магнитного экрана и  $p=1$  — для электромагнитного, получим выражение для определения  $a_m$ :

$$a_m = \frac{R_{\partial, \text{н}} \int_{R_{\partial, \text{в}}}^{R_{\partial, \text{н}}} f(r) r [J_1(k_m r) + v_m N_1(k_m r)] dr}{R_{\partial, \text{н}} \int_{R_{\partial, \text{в}}}^{R_{\partial, \text{н}}} r [J_1(k_m r) + v_m N_1(k_m r)]^2 dr} = \frac{F_T}{F_z}. \quad (17)$$

Интегрирование числителя и знаменателя дает [5]:

$$F_T = \frac{\pi r}{2 k_m} \left\{ H_0(k_m r) [J_1(k_m r) + v_m N_1(k_m r)] - H_1(k_m r) [J_0(k_m r) + v_m N_0(k_m r)] \right\} \Big|_{R_{\partial, \text{в}}}^{R_{\partial, \text{н}}}, \quad (18)$$

где  $H_0, H_1$  — функции Струве нулевого и первого порядков.

$$F_z = \frac{1}{2} r^2 \left\{ [J_1(k_m r) + v_m N_1(k_m r)]^2 + [J_0(k_m r) + v_m N_0(k_m r)]^2 \right\} - \frac{r}{k_m} \left\{ J_0(k_m r) + v_m N_0(k_m r) \right\} [J_1(k_m r) + v_m N_1(k_m r)] \Big|_{R_{\partial, \text{н}}}^{R_{\partial, \text{в}}}. \quad (19)$$

Если  $R_{\partial, \text{в}} = 0$ , то в предыдущих формулах  $v_m = 0$ .

Подставляя ряды (6) и (11) в уравнение (2), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для  $E_m(z)$ :

$$\frac{\partial^2 E_m(z)}{\partial z^2} - k_m^2 E_m(z) = -j \omega J_{\text{ср}} f(z). \quad (20)$$

Для его решения функцию  $f(z)$  представим в виде ряда Фурье по тригонометрическим функциям с учетом граничных условий при  $z = \pm h_0$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(k_n z) + d_n \cos(k_n z). \quad (21)$$

В табл. 2 приведены расчетные формулы разложения функции распределения плотности тока по оси  $z$ .

Вследствие ограниченного числа членов разложения функция распределения  $f(z)$ , представленная рядом (21), имеет колебания (рис. 3), существенно снизить которые помогает метод о-множителей Ланцюша, согласно которому сглаживание до-

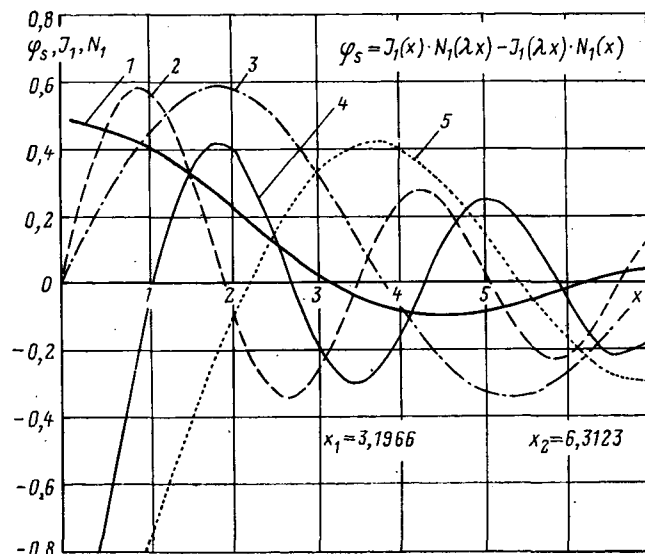


Рис. 2. График трансцендентного уравнения для внутреннего и наружного электромагнитных экранов при  $\lambda=2$  (1) и графики входящих в него специальных функций: Бесселя  $J_1(\lambda x)$  (2) и  $J_1(x)$  (3) и Неймана  $N_1(\lambda x)$  (4) и  $N_1(x)$  (5)

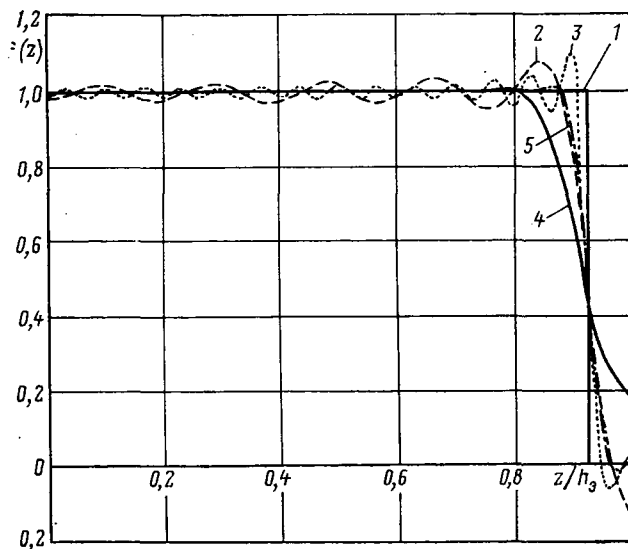


Рис. 3. Графики функции распределения плотности тока симметрично расположенной зоны по высоте полости при  $h/2h_0 = 0.92$ : 1 — исходная функция; 2, 3 — расчет по (21) при числе членов разложения 20 и 60; 4, 5 — расчет по (21) с учетом коэффициентов Ланцюша

стигается путем умножения коэффициентов  $c_n$  и  $d_n$  на множители [6]:

$$\sigma_n = \frac{\sin \frac{\pi n}{n_K}}{\frac{\pi n}{n_K}}, \quad (26)$$

где  $n_K$  — число членов разложения.

Полученная при этом кривая разложения показана на рис. 3. После интегрирования (20) получим

$$E_m(z) = -j \omega \mu_0 J_{\text{ср}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k_m^2 + k_n^2} [c_n \sin(k_n z) + d_n \cos(k_n z)] \quad (27)$$

и окончательно решение для  $E$  будет иметь вид

Таблица 1

Формулы для расчета собственных чисел по оси  $r$ 

| Тип экрана:<br>наружного<br>внутреннего   | магнитный<br>магнитный  | электромагнитный<br>электромагнитный                             | магнитный<br>электромагнитный                                    | электромагнитный<br>магнитный                            | магнитный<br>отсутствует  | электромагнитный<br>отсутствует |
|---|---|--|--|--|---|---------------------------------|
| Обозначения   | $x = k_m R_{\partial. \text{ в}}; \lambda = R_{\partial. \text{ н}} / R_{\partial. \text{ в}}$  |  |  |  | $x = k_m R_{\partial. \text{ н}}$   |                                 |
| Трансцендентное уравнение (9)   | $J_v(x) N_v'(\lambda x) - N_v(x) J_v'(\lambda x) = 0$<br>$v = 0$  | $J_v(x) N_v'(\lambda x) - N_v(x) J_v'(\lambda x) = 0$<br>$v = 1$ | $J_v'(x) N_v(\lambda x) - N_v'(x) J_v(\lambda x) = 0$<br>$v = 0$ | $J_v'(x) N_v(x) - N_v'(\lambda x) J_v(x) = 0$<br>$v = 0$ | $J_v(x) = 0$<br>$v = 0$ $v = 1$   |                                 |
| Трансцендентное уравнение при больших значениях аргумента (10) и его решение (11) | $\sin[(\lambda - 1)x + \alpha\pi/2] = 0$<br>$\alpha = 0$ $\alpha = 1$ $\alpha = -1$<br>$x_m = \pi(m + l)/(\lambda - 1), m = 1, 2, 3, \dots$<br>$l = 0$ $l = -0,5$   |  |  |  | $\cos[x - (2v + 1)\pi/4] = 0$<br>$x_m = \pi(m + t), m = 1, 2, 3, \dots$<br>$t = -0,25$ $t = 0,25$                         |                                 |
| Собственные числа при больших значениях аргумента (12) и в общем случае (13)      | $k_m = x_m / R_{\partial. \text{ в}};$<br>$k_m = \left( x_m + \frac{p}{x_m} + \frac{q - p^2}{x_m^3} + \frac{\rho - 4pq + 2p^2}{x_m^5} + \dots \right) / R_{\partial. \text{ в}}$<br>где $p = (\mu - 1)/8\lambda;$<br>$q = \frac{(\mu - 1)(\mu - 25)(\lambda^3 - 1)}{6(4\lambda)^3(\lambda - 1)};$<br>$\rho = \frac{(\mu - 1)(\mu^2 - 114\mu + 1073)(\lambda^5 - 1)}{5(4\lambda)^5(\lambda - 1)}$<br>$\mu = 4v^2$<br>$p = (3\lambda + 1)/[8\lambda(\lambda - 1)]$<br>$q = \frac{-63\lambda^3 - 25}{6(4\lambda)^3(\lambda - 1)};$<br>$\rho = \frac{1899\lambda^5 + 1173}{5(4\lambda)^5(\lambda - 1)}$ |  |  |  | $k_m = x_m / R_{\partial. \text{ н}};$<br>$k_m = \frac{\xi_m}{R_{\partial. \text{ н}}};$<br>$\xi_m$ — корни функции $J_v$ |                                 |

Таблица 2

Формулы для расчета собственных чисел и коэффициентов разложения функции распределения плотности тока по оси  $z$ 

| Тип экрана: верхнего<br>нижнего                      | электромагнитный<br>электромагнитный  | магнитный<br>магнитный | электромагнитный<br>магнитный  | магнитный<br>электромагнитный |
|--|---|------------------------|--|-------------------------------|
| Трансцендентное уравнение (22)                       | $\sin(2k_n h_{\partial}) = 0$   |                        | $\sin^2(k_n h_{\partial}) - \cos^2(k_n h_{\partial}) = 0$  |                               |
| Собственные числа (23)                               | $k_n = \pi n / (2h_{\partial}), n = 0, 1, 2, 3, \dots$  |                        | $k_n = (2n - 1)\pi / (4h_{\partial}), n = 1, 2, 3, \dots$  |                               |
| Коэффициенты разложения (24)                         | $c_0 = 0; d_0 = (z_{\text{в}} - z_{\text{н}}) / (2h_{\partial});$<br>$c_n = \frac{1}{k_n h_{\partial}} [\cos(k_n z_{\text{в}}) - \cos(k_n z_{\text{н}})];$<br>$n_c = 2, 4, 6, \dots$ $n_c = 1, 3, 5, \dots$<br>$d_n = \frac{1}{k_n h_{\partial}} [\sin(k_n z_{\text{в}}) - \sin(k_n z_{\text{н}})];$<br>$n_d = 1, 3, 5, \dots$ $n_d = 2, 4, 6, \dots$ |                        | $c_n = d_n$<br>$c_n = \frac{1}{2k_n h_{\partial}} \{ - [\cos(k_n z_{\text{в}}) - \cos(k_n z_{\text{н}})] +$<br>$+ s \cdot [\sin(k_n z_{\text{в}}) - \sin(k_n z_{\text{н}})] \}$<br>$s = (-1)^n$ $s = (-1)^{n+1}$ |                               |
| Члены ряда функции распределения плотности тока (25) | $f_0(z) = c_0$ $f_0(z) = d_0$<br>$f_n(z) = c_n \sin(k_n z) + d_n \cos(k_n z)$   |                        | $f_n(z) = c_n [\sin(k_n z) + s \cdot \cos(k_n z)]$   |                               |

$$E(r, z) = -j\omega\mu_0 J_{cp} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_m}{k_m^2 + k_n^2} [J_1(k_m r) + v_m N_1(k_m r)] [c_n \sin(k_n z) + d_n \cos(k_n z)], \quad (28)$$

формулы для расчета составляющих индукции магнитного поля во всем объеме полости:

$$B_z = \mu_0 J_{cp} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_m}{k_m^2 + k_n^2} [a_m J_0(k_m r) + b_m N_0 \times (k_m r)] [c_n \sin(k_n z) + d_n \cos(k_n z)]; \quad (29)$$

Используя полученное выражение для  $E$  (28) из (8), получаем

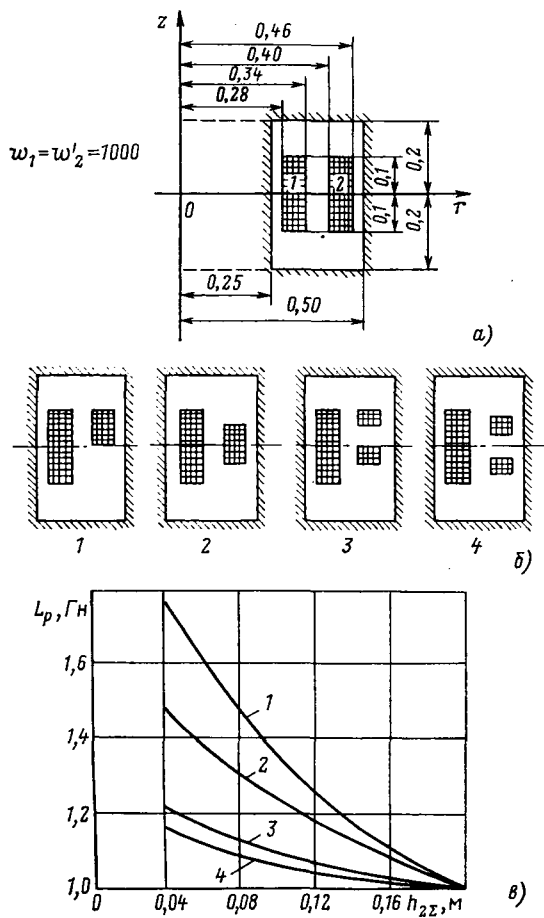


Рис. 4. Размеры полости и обмоток (а), варианты укорочения наружной обмотки (б) и зависимость индуктивности рассеяния обмоток от суммарной длины наружной обмотки (в) (для вариантов укорочения 3, 4 длина обмотки равна сумме длин ее частей)

$$B_r = \mu_0 J_{cp} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{k_m^2 + k_n^2} [a_m J_1(k_m r) + b_m N_1 \times \\ \times (k_m r)] [c_n \cos(k_n z) - d_n \sin(k_n z)]. \quad (30)$$

При расчете магнитного поля в полости с двумя магнитными радиальными экранами к радиальной составляющей индукции магнитного поля необходимо прибавить слагаемое

$$\Delta B_r = \mu_0 J_{cp} \frac{b_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} [c_n \cos(k_n z) - d_n \sin(k_n z)], \quad (31)$$

в котором коэффициент

$$b_0 = b / \ln(R_{\theta, n} / R_{\theta, в}), \quad (32)$$

где  $b$  — ширина зоны.

При  $R_{\theta, в} = 0$  коэффициенты  $b_0$ ,  $b_m$  равны нулю.

Для расчета магнитного поля от совокупности зон или обмоток целесообразно определить суммарные коэффициенты разложения и затем воспользоваться формулами (29) — (30). Следует отметить, что если все границы полости имеют  $\mu_0 = \infty$ , то физический результат получается только в том случае, если в полости выполняется условие равенства нулю суммарных ампервитков

$$\sum_{iv} i_{iv} w_{iv} = 0.$$

**Расчет интегральных параметров.** Из аналитических выражений для индукции магнитного поля нетрудно получить параметры, обусловленные магнитным полем, которые определяются интегрированием индукции магнитного поля или ее квадрата по объему.

Рассмотрим получение интегральных параметров на примере индуктивных параметров, являющихся основной характеристикой таких систем. Используя зависимости

$$L = 2 W / i^2; \quad (33)$$

$$W = \frac{1}{2 \mu_0} \int_v (B_z^2 + B_r^2) 2 \pi r dr dz, \quad (34)$$

получаем следующее выражение для индуктивности зоны:

$$L = 2 \mu_0 \pi \alpha h_0 \frac{w^2}{h^2 b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^2 + d_n^2}{(k_m^2 + k_n^2)^2} \times \\ \times \{k_m^2 [a_m^2 I(J_0^2) + a_m b_m I(J_0 N_0) + b_m^2 I(N_0^2)] + \\ + k_n^2 [a_m^2 I(J_1^2) + a_m b_m I(J_1 N_1) + b_m^2 I(N_1^2)]\}, \quad (35)$$

где  $\alpha = 2$  при  $n = 0$  и  $\alpha = 1$  при  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $I$  — интегралы квадратов и произведений специальных функций в пределах радиальных границ полости, например

$$I(J_0^2) = \int_{R_{\theta, в}}^{R_{\theta, н}} r J_0^2(k_m r) dr. \quad (36)$$

Вклад в индуктивность, обусловленный слагаемым индукции магнитного поля по (31), составляет

$$\Delta L = 2 \mu_0 \pi h_0 \frac{m^2}{h^2 b^2} b_0^2 \ln \frac{R_{\theta, н}}{R_{\theta, в}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2 + d_n^2}{k_n^2}. \quad (37)$$

Полученными формулами можно воспользоваться для расчета индуктивности системы зон и обмоток. Для этого вместо  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $c_n$  и  $d_n$  необходимо подставлять соответствующие суммы.

**Расчет на ЭВМ.** Расчет реализован на языке PL-1 на ЭВМ ЕС-1033. Функции Бесселя, Неймана и Струве вычислялись по степенным рядам для малых значений аргумента и по асимптотическим рядам при больших значениях аргумента. Корни функции  $J_v(x)$  при значениях аргумента  $x < 125$  были введены в виде массивов. По формулам табл. 1 вычислялись точные значения собственных чисел при  $R_{\theta, в} = 0$  и асимптотических приближений при  $R_{\theta, в} \neq 0$ . При этом уточнялись собственные числа с заданной точностью методом Ньютона. Коэффициенты  $a_m$  и  $b_m$  рассчитывались по выражениям (17) — (19). Собственные числа и коэффициенты разложения по оси  $z$  вычислялись по формулам табл. 2.

После расчета собственных чисел и коэффициентов разложения индукция магнитного поля и интегральные параметры рассчитывались независимо по соответствующим формулам путем суммирования рядов.

**Пример расчета.** В качестве иллюстрации возможностей метода рассмотрим расчет индуктивности рассеяния обмоток, расположенных в полости с идеальными магнитными экранами. На рис. 4, а показаны размеры полости и обмоток (в метрах). одинаковой высоты с противоположно направленными токами, причем  $i_1 w_1 = i_2 w_2$ . Индуктивность рассеяния обмоток, приведенная к числу витков, равному 1000, составляет 0,995 Гн. В трансформаторах специального назначения возникают режимы, когда в данный момент ток протекает только по части одной или двух обмоток. На рис. 4, б показаны некоторые варианты режимов, при которых ток протекает только по части наружной обмотки. При этом расчет индуктивности затрудняется. В то же время индуктивность рассеяния является элементом электрической цепи и требует точного расчета. На рис. 4, в показаны рассчитанные по изложенному методу зависимости индуктивности рассеяния трансформатора от суммарного осевого размера наружной обмотки для показанных на рис. 4, б режимов. Графики показывают, что в зависимости от взаимного положения области обмотки с током индуктивности рассеяния существенно отличаются. Приведенный пример иллюстрирует возможность метода расчета применительно к индуктивности рассеяния трансформатора со сложным режимом работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосель Ю. Я. Расчет потенциальных полей в энергетике (справочная книга). — Л.: Энергия, 1978.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
3. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками, и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979.
4. Фильчаков П. Ф. Справочник по высшей математике. — Киев: Наукова думка, 1972.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
6. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. — М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1961.

[17.09.86]

УДК 621.311.1(049.3)

## Электроэнергетикам — фундаментальный учебник

Издательством «Высшая школа» в конце 1985 г. выпущен написанный профессором Вениковым В. А. учебник «Переходные электромеханические процессы в электрических системах». Нынешнее отечественное издание учебника является четвертым. Предыдущие были в 1964, 1970 и 1978 гг., а, по существу, в форме монографии и в 1958 г. В этот же период книга издавалась на английском, польском, чешском и японском языках. Третье издание учебника отмечено присуждением его автору Государственной премии СССР.

Устойчивый интерес к учебнику на протяжении 30 лет, проявляемый педагогами и учащимися высшей школы, инженерами и научными работниками, является признанием его высоких качеств, фундаментальности.

Все издания учебника не были стереотипны. Каждое последующее, в том числе рецензируемое четвертое издание, отличались методическим усовершенствованием и обновлением научно-технического материала. Последнему существенно способствовало активное участие автора в решении проблем современной энергетики.

Методическая концепция автора, определившая особенности книги как учебника, сводится к следующим, оправдавшим себя в практике преподавания курса основным положениям.

Исходная подготовка студентов в области режимов электрических систем должна базироваться прежде всего на изучении физических процессов в автоматизированных электросистемах и принципах их количественного описания. Тем самым студентам — будущим инженерам — обеспечивается в дальнейшем возможность решения сложных практических задач современной электроэнергетики.

Подразделение материала книги на четыре в известной мере автономные группы глав (1—6, 7—9, 10—12 и 13—14) дает возможность их независимого изучения, что оказывается полезным при использовании этой многоплановой книги учащимися и инженерами разных электроэнергетических специальностей.

Концентрическое построение учебника с наращиванием аспектов и глубины рассмотрения вопросов излагаемого материала («индуктивный метод»), несомненно, создает наиболее

благоприятные возможности для его понимания и усвоения. Последнее особенно важно для организации и воспитания самостоятельности познавательной работы студентов.

Весьма важным и, безусловно, нужным является принятый во всем материале книги системный подход, который дает будущим специалистам представление о сущности межэлементных связей и взаимной зависимости подлежащих инженерным расчетам электромеханических процессов в этих системах и их элементах.

В новом издании автор дополнил прежний иллюстративный материал, который в целом мастерски создан и весьма повышает дидактические качества текста.

Следует отметить совершенствование автором трактовки отдельных понятий, важных в теории электромеханических процессов. К ним в первую очередь следует отнести введенное обобщенное понятие динамической устойчивости электрических систем, которым охватывается статическая устойчивость как частный случай, имеющий место при малых отклонениях координат режима. Дано оригинальное и наглядное пояснение взаимосвязи параметрических характеристик системы и закономерностей соответствующих им явлений (с. 245—246). С помощью метода малых колебаний проведено наглядное обоснование практических критериев устойчивости (с. 266—267). Впервые в этом курсе рассмотрены вопросы управления передачами постоянного тока, обеспечивающего повышение устойчивости таких систем (с. 480—484).

В учебнике нашел отражение многолетний опыт автора по воспитанию на научно-техническом материале коммунистического мировоззрения будущих советских инженеров.

Использование фундаментального учебника Валентина Андреевича Веникова по переходным электромеханическим процессам в его четвертом издании явится вкладом в проводимую интенсификацию теоретической и практической подготовки инженеров-электроэнергетиков. Книга будет способствовать созданию новых более совершенных электроэнергетических систем и их эффективной и безаварийной эксплуатации.

ГЛЕБОВ И. А., академик, ВИЛЕСОВ Д. В., проф., РЯБИНИН И. А., проф.



УДК 621.311:658.284.011.56

## Маркушевич Н. С. Автоматизированная система диспетчерского управления. Из опыта Латвийской энергосистемы. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 136 с.

Содержание книги базируется на многолетнем положительном опыте создания и развития АСДУ Латвийской энергосистемы, которая занимает одно из ведущих мест в области автоматизации диспетчерского управления.

В последние годы в АСДУ энергообъединений и энергосистем наряду с дальнейшим совершенствованием задач планирования режимов, оперативного контроля и учета наметилась устойчивая тенденция к развитию задач оперативной оценки и оптимизации режима, задач — «советчиков» диспетчера, задач автоматического управления. При этом широко используются различного рода модели реального времени, как детерминиро-

ванные, так и стохастические. Одновременно с этим продолжается внедрение АСДУ на более низких уровнях диспетчерского управления (на диспетчерских пунктах (ДП) ПЭС, РЭС, подстанциях), создавая предпосылки для организации многоуровневых интегрированных АСДУ. Оба этих аспекта не получили еще достаточного освещения в технической литературе, поэтому книга Н. С. Маркушевича, посвященная задачам оперативного управления нормальными режимами энергосистемы в реальном времени, а также автоматизации управления распределительными и питающими сетями, является актуальной и интересной для широкого круга читателей-энергетиков. Следует также отметить,



что в вопросах управления напряжением и реактивной мощностью (чему в книге уделено основное внимание) АСДУ Латвийской энергосистемы занимает передовые позиции.

В первой главе приведен анализ погрешностей телеизмерений (ТИ) параметров режима, возникающих в тракте «измерительные трансформаторы — ЭВМ», рассмотрены методы определения недостоверных ТИ активной мощности и напряжения, практические способы повышения их достоверности. В отличие от методов оценивания состояния, требующих достаточно больших вычислительных ресурсов ЭВМ, автором рассматриваются более простые технические и организационные методы (проверка баланса мощности в узлах схемы, усреднение, сравнение интегрированных значений мощности с показаниями счетчиков электроэнергетики, метод опорных узлов для оценки средне-взвешенных напряжений в узлах сети и т. д.), позволяющие обеспечить повышение достоверности ТИ при использовании сравнительно небольших ресурсов ЭВМ. Приведено много примеров расчетов.

Вторая глава посвящена задачам контроля и учета параметров режима энергосистемы в реальном времени. Описан метод оценки потерь мощности в ВЛ 330 кВ с учетом потерь на корону, в трансформаторах 330/110 кВ и в гидрогенераторах, работающих в режиме синхронных компенсаторов. Рассмотрена оценка потерь мощности в сетях 110, 20 и 0,4 кВ на основе регрессионных моделей. Показано, что погрешность оперативной оценки потерь электроэнергии, получаемой численным интегрированием потерь мощности, не превышает одного процента. Другой важной задачей этого класса является оперативный контроль и анализ баланса активной мощности и электроэнергии в энергосистеме, позволяющие в реальном времени и ретроспективно контролировать фактические и прогнозируемые значения потребления, полезного отпуска, потерь электроэнергии в сетях, расхода на собственные нужды, выработки и перетоков электроэнергии, а также отклонения фактических значений от планируемых и прогнозируемых. Третьей задачей, рассмотренной в этой главе, является оценка расхода энергоресурсов на ТЭЦ и ГЭС. Для ТЭЦ на основе регрессионных зависимостей, ТИ электрической нагрузки и периодически вводимых вручную данных о тепловых параметрах агрегатов определяются: оптимальное распределение тепловой и электрической нагрузки между агрегатами ТЭЦ, удельный расход и пережог топлива при неоптимальном распределении нагрузок. В этом разделе приведены таблицы коэффициентов регрессионных моделей турбин типа Т-100-130 и ПТ-60-130. Для каскада ГЭС на основе ТИ активной мощности верхнего и нижнего бьефов и энергетических характеристик определяются удельные расходы воды на каждой ГЭС, а также прогнозируются уровни бьефов и анализируется эффективность работы каскада в том или ином режиме.

В третьей главе рассматриваются методы и алгоритмы решаемой в реальном времени задачи оптимизации режима по реактивной мощности. Эта задача заключается в минимизации потерь электроэнергии в основной сети при ограничениях по располагаемой мощности источников реактивной мощности, значениям напряжений в узлах сети и токов по линиям электропередачи. Для решения этой задачи в реальном времени с помощью мини-ЭВМ используется свернутая модель, полученная с помощью предварительных расчетов на ЭВМ общего назначения. Модель позволяет определять рост потерь электроэнергии при изменении реактивной мощности источников в соответствии с коэффициентами чувствительности потоков распределения реактивной мощности и напряжений в узлах схемы, определяемых методом активного эксперимента. Указанный метод предусматривает периодическое (по команде диспетчера) изменение реактивной мощности источников, при котором в ЭВМ фиксируются и статистически обрабатываются ТИ контролируемых параметров режима, а затем вычисляются коэффициенты чувствительности. Автор отмечает, что предложенный метод централизованного управления реактивной мощностью был реализован на первом этапе в режиме советчика диспетчеру, а на втором — в режиме автоматического управления пятью электростанциями.

В этой же главе рассмотрены еще две задачи, органически связанные с первой: оптимизация числа гидрогенераторов, работающих в режиме синхронных компенсаторов (СК), и коррекция уставок регуляторов автотрансформаторов основной сети. Обе задачи работают в режиме советчика диспетчеру, обеспечивая минимизацию потерь в сетях с учетом ограничений по напряжению в узлах сети и регулировочными возможностями объектов регулирования (располагаемой реактивной мощностью СК, положением переключателей ответвлений автотрансформаторов). При этом используется простой и экономный алгоритм

направленного перебора сочетаний агрегатов на ГЭС и пошагового поиска положения переключателей автотрансформаторов.

Четвертая глава посвящена управлению режимом электрической сети 110 кВ. В ней описаны особенности и структура информационного обеспечения, необходимого для управления режимом сети. В связи с тем, что оснащение всей сети 110 кВ устройствами телеизмерения трудно выполнимо, автор предлагает минимизировать число необходимых ТИ за счет развитого моделирования режимов сети.

При этом необходимый минимум ТИ включает в себя значения перетоков мощностей в хордах схемы 110 кВ и параметров режима на подстанциях 330/110 кВ, а расчет потоков распределения выполняется для радиальной сети. Такой подход позволяет использовать для этой цели мини-ЭВМ. Моделирование нагрузки в узлах сети осуществляется либо с помощью типовых графиков, либо регрессионными методами в зависимости от суммарной нагрузки энергосистемы. В этой главе подробно рассмотрены алгоритмы регулирования режима сети 110 кВ путем управления коэффициентами трансформации автотрансформаторов 330/110 кВ с целью минимизации оттока электроэнергии с шин электростанций при соблюдении требований к качеству и надежности электроснабжения. Как и в предыдущих задачах, используется направленный перебор возможных состояний ответвлений трансформатора в пределах разрешенного диапазона. В последнем разделе главы описано моделирование отклика режима сети на изменение коэффициентов трансформации автотрансформаторов 330/110 кВ в условиях неопределенности. При этом могут использоваться как метод активного эксперимента, так и расчетные методы.

Результаты решения этой задачи должны выдаваться диспетчеру в виде рекомендаций и реализовываться путем передачи телекоманд на изменение напряжения автотрансформаторов.

Пятая глава посвящена вопросам автоматизации диспетчерского управления в распределительных электрических сетях. В первом разделе главы изложены основные принципы информационного обеспечения автоматизированного планирования режимов распределительных электросетей Латгавского как шага, предшествующего автоматизации оперативного управления.

Во втором разделе изложена перспективная структура многоуровневой автоматизированной системы диспетчерского управления распределительными электросетями, предусматривающая оснащение ДП ПЭС комплексами мини-ЭВМ, ДП РЭС — микропроцессорными системами, телемеханизацию центров питания, распределительных пунктов, секционирующих выключателей, а также потребительских установок. При этом организуется сеть межмашинных межузловых обменов информацией (ДП энергосистемы — ДП ПЭС — ДП РЭС), позволяющая, кроме передачи данных, осуществлять иерархическое итеративное решение ряда задач оперативного и автоматического управления. Предусматривается широкое использование радиоканалов для телемеханизации объектов нижних уровней управления.

В последнем разделе рассмотрены основные задачи оперативного и автоматического управления режимом распределительных сетей, включающие: контроль схемы сети, обработку ТИ, управление нагрузкой, проверку чувствительности защит и термической устойчивости оборудования, определение места повреждения линий электропередачи, моделирование режима сети, оптимизацию схемы распределительной сети, оптимизацию режима напряжения центров питания и режима работы компенсаторов потребителей и др.

По книге можно сделать следующие замечания.

1. Содержание книги не охватывает весь комплекс задач АСДУ энергосистем. В книге отсутствует раздел, посвященный структуре комплекса технических средств, не рассмотрены задачи приема, обработки, накопления и отображения оперативной информации, оперативного и автоматического управления режимом по активной мощности, прогноза нагрузки, расчета надежности режимов, противоаварийного оперативного контроля за состоянием оборудования и энергоресурсов противоаварийного управления и др.

2. Первая глава книги, посвященная контролю, оценке и повышению достоверности телеинформации, поступающей в ЭВМ ОИК, названа «Отображение информации в ОИК». Слово «отображение» упоминается и в названиях разделов и в тексте главы. В ранее изданных публикациях по АСУ и АСДУ такой контекст предполагает описание технических и программных средств, эргономических приемов для представления информации пользователю.

3. В разделе «Юптимизация состава оборудования на ГЭС» (глава 3) рассмотрен лишь выбор оптимального количе-



ства гидрогенераторов, работающих в режиме синхронных компенсаторов, а оптимизация состава гидрогенераторов каскада ГЭС в активном режиме не рассмотрена.

Эти замечания относятся к уточнению содержания книги,

которая, несмотря на некоторое ограничение круга рассматриваемых вопросов представляет несомненный теоретический и практический интерес для специалистов в области создания и эксплуатации АСДУ энергосистем.

ОРНОВ В. Г.

УДК 621.3(049.3)

## Филиппов Е. Основы электротехники. 7-е изд. — Берлин: Техника, 1984. 984 с. (на немецком языке)

Фундаментальная книга Филиппова Е., профессора теоретической электротехники Высшего технического училища в Ильменау (ГДР), широко известна. Она не только выдержала 7 изданий в ГДР, но и переведена на ряд европейских языков. Сейчас готовится 8-е издание. На русском языке книга не выходила.

Книга состоит из краткого введения, 8 глав, обширного списка литературы и подробного алфавитного указателя.

В краткой рецензии практически невозможно даже перечислить названия основных параграфов книги, объем которой близок к 1000 с., не говоря уж о подробной оценке их содержания. Ограничимся лишь общим обзором каждой из глав.

Глава первая посвящена электростатическому полю в вакууме и диэлектрических средах. Уравнения Лапласа и Пуассона задаются и решаются в прямоугольных, цилиндрических и сферических координатах. В этом же разделе рассмотрены линейные и нелинейные диэлектрики и их характеристики.

Далее излагаются аналитические и численные методы расчета электростатических полей, в том числе с применением конформных преобразований, а также метода Монте-Карло при решении задачи Дирихле. Решаются многочисленные примеры для различных конструкций и систем электродов, включая землю. Глава занимает 190 с.

В главе второй рассматривается электрическое поле постоянных токов. Помимо чисто «полевых» задач в главе излагаются «цепные» задачи для линейных и нелинейных цепей постоянного тока. Уделено достаточное внимание также матричным и топологическим методам.

Таким образом, вторая глава по своей структуре резко отличается от принятой у нас классификации учебного материала: цепи линейные, нелинейные и поля. Такой подход, несомненно, заинтересует наших читателей. В целом глава занимает 103 с.

Глава третья посвящена магнитному полю постоянных токов. Содержание этой главы в основном соответствует нашим лучшим учебникам по ТОЭ и поэтому не пересказывается. Однако автор вводит не принятый у нас вектор  $\mathbf{G} = \text{rot } \mathbf{H}$ , что удобно в некоторых случаях. Приведены многочисленные примеры расчетов магнитных цепей, в том числе разветвленных, собственных и взаимных индуктивностей, энергии и сил, действующих в постоянном магнитном поле. Помимо системы СИ используется очень удобная внесистемная система электротехнических единиц: вольт, ампер, ом, секунда. Глава занимает 153 с.

В главе четвертой рассматривается электромагнитное поле. Приводятся система уравнений Максвелла и другие уравнения электромагнитного поля, а также методы их решения. Рассматриваются энергия магнитного поля и вектор Пойнтинга, волновые уравнения для электродинамических потенциалов, уравнения Даламбера для векторного и скалярного потенциалов, вектор Герца. Глава занимает 20 с.

В главе пятой излагается механизм проводимости тока в проводящих, полупроводящих и диэлектрических средах. Изложение ведется на высоком научном уровне, но без углубления в квантово-механические представления, недоступные студентам технических вузов. Рассматриваются эмиссия электронов из металла, токи в жидких и газовых средах, виды разрядов, ток в вакууме, ламповые диоды и триоды.

Все эти вопросы относятся, скорее, к электрофизике, нежели к теоретическим основам электротехники, в нашем понимании данного курса. Некоторые разделы (вакуумные триоды и др.) явно устарели. Глава занимает 90 с.

Глава шестая посвящена теории переменных токов. Первая треть главы соответствует нашим учебникам по ТОЭ и не пересказывается. Заметим лишь, что параграфы, посвященные круго-

вым диаграммам, устарели: развитие вычислительной техники делает ненужным громоздкие и недостаточно точные графоаналитические расчеты.

В этой же главе рассмотрены многофазные системы, симметричные и несимметричные, включая метод симметричных составляющих. Далее излагаются несинусоидальные токи, ряды и интеграл Фурье, биения и модуляция, воздействие на линейные цепи несинусоидальных э. д. с.

Затем после чисто «цепных» задач, автор снова переходит к «полевым» методам анализа распределения тока и магнитного потока в проводе, в тонком листе и в пазу. Потом опять следует переход к «цепным» методам при анализе катушек со стальным сердечником, трансформаторов, феррорезонансов и т. д.

В этой же главе излагается теория четырехполосников, фильтров и длинных линий. Глава заканчивается описанием диполя Герца и решением уравнений Максвелла с помощью вектора Герца, анализом ближней и дальней зон излучения. Глава занимает 297 с.

Глава седьмая посвящена общим методам расчета произвольных линейных электрических цепей. В ней рассматриваются методы уравнений Кирхгофа, контурных токов и узловых потенциалов. Глава занимает 11 страниц.

В главе восьмой рассматриваются переходные процессы в линейных цепях. В ней излагаются классический, операторный и спектральный методы, иллюстрированные рядом примеров. Рассмотрены также переходные функции и интегралы Дюамеля. Глава занимает 50 с.

Список литературы содержит 178 названий, из них 35 советских авторов. Упомянуто практически все, что издавалось у нас по ТОЭ. Ссылок на литературу в тексте нет. Алфавитный указатель содержит свыше 1100 терминов и фамилий.

Переходя к общей оценке рецензируемой книги, следует прежде всего отметить ее важнейшее достоинство — она носит энциклопедический характер. В этом смысле учебник проф. Е. Филиппова чем-то напоминает уникальную книгу К. А. Круга «Основы электротехники», изданную в 30-х годах двумя томами — 560 и 948 с. Представляется, что и в наши дни необходимость в энциклопедическом пособии, охватывающем все (или почти все) сведения, лежащие в основе современной электротехники, несомненно существует.

Другая интересная особенность рецензируемой книги состоит в совершенно иной классификации материала по сравнению с принятой у нас. В основу своей классификации Е. Филиппов положил зависимость движения зарядов от времени: неподвижные заряды (электростатика), постоянный ток, переменный ток. При этом, как отмечалось, он не разносит по разным главам задачи теории поля и задачи теории цепей, линейных и нелинейных. При всей методической спорности подобного подхода, принятого, кстати, во многих современных зарубежных учебниках по ТОЭ, он имеет и несомненные достоинства. Главнейшее из них, по нашему мнению, состоит в много большей «физичности» изложения курса ТОЭ, меньшей его абстрагированности.

К сожалению, многие из авторов современных учебных планов вообще исключают из курсов ТОЭ теорию электромагнитного поля, оставив лишь теорию цепей. Глубокая прочность подобного подхода очевидна, и рецензируемая книга лишь подтверждает данное мнение.

Из сказанного выше несомненно следует, что книга Е. Филиппова — фундаментальный учебник, написанный на очень высоком научном и методическом уровне. По нашему мнению, ее стоит перевести на русский язык, ориентируясь на новое издание. Она будет полезна самому широкому кругу читателей как своеобразный энциклопедический справочник по ТОЭ и примыкающим к ней разделам электрофизики.

КАГАНОВ З. Г., проф.

## Эдуард Александрович Меерович

(К 80-летию со дня рождения)

Исполнилось 80 лет со дня рождения доктора технических наук, профессора Эдуарда Александровича Мееровича. Крупнейший специалист в области теоретических основ электротехники Э. А. Меерович внес большой вклад в развитие отечественной науки и техники.

Инженерная деятельность Э. А. Мееровича началась в 1929 г., когда после окончания электропромышленного факультета Института народного хозяйства он начал работать на Московском трансформаторном заводе. Первые научные работы, посвященные исследованиям полей рассеяния и потерь в крупных трансформаторах, оформили интерес молодого специалиста к методам расчета электромагнитных полей.

После перехода в 1934 г. в Энергетический институт АН СССР Э. А. Меерович опубликовал серию статей по расчету магнитного поля вблизи ферромагнетиков, завершившуюся в 1938 г. фундаментальной работой об использовании метода изображений при конечной проницаемости на границе области. Другой цикл работ, принесший ему в 1941 г. ученую степень доктора технических наук, связан с расчетом переходных электромагнитных процессов. Новый операторный метод, основанный на применении рядов Фурье, получил дальнейшее развитие в трудах Э. А. Мееровича и его учеников и с успехом применялся при решении таких задач электроэнергетики, как расчет процессов в линии с продольной емкостной



компенсацией (передача Волжской ГЭС им. В. И. Ленина — Москва).

Э. А. Меерович всегда связывал свои исследования в области теоретических основ электротехники с актуальными проблемами энергетики. Поэтому в 50-е годы его внимание привлекли электротепловые поля, образующиеся при сбойке подземных скважин с помощью электрического тока. Последовали оригинальные работы, за которые ему была присуждена премия Президиума АН СССР. В начале 60-х годов под его руководством разверты-

ваются исследования магнитных полей и электродинамических сил в зоне расплава мощных электролизеров алюминия. В содружестве с другими НИИ и производственными организациями были найдены эффективные технические решения, положенные в основу проектирования предприятий энергоемкой алюминиевой промышленности. В связи с этой же задачей предложены и разработаны измерители постоянного тока до сотен килоампер. Под руководством Э. А. Мееровича разрабатывалась система безынерционного измерения токов в линиях ультравысокого напряжения.

Практическим выходом методов расчета переменного электромагнитного поля в проводящей среде явилась выполненная учениками Эдуарда Александровича под его руководством работа по мощным трехфазным токопроводам генераторного напряжения, удостоенная премии АН СССР им. Яблочкова.

Большое значение Э. А. Меерович придает научно-методической работе. Хорошо известна вышедшая в 1966 г. его книга «Методы релятивистской электродинамики в электротехнике». Ученики Э. А. Мееровича — высококвалифицированные кандидаты и доктора наук — свидетельство успеха его многолетней педагогической деятельности. Свой богатейший опыт и знания Э. А. Меерович широко использует как член редакционной коллегии журнала «Электричество».

Желаем Эдуарду Александровичу здоровья и успехов в работе.

Группа товарищей и учеников, редакция и редколлегия журнала «Электричество»



### ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

Имеются в продаже и высылаются наложенным платежом (без задатка), нижеперечисленные книги:

Ахметжанов А. А. Высокоточные системы передачи угла автоматических устройств. — 1975. — 64 к.

Векслер М. С. Измерительные приборы с электростатическими механизмами. — 1974. — 76 к.

Негевский И. Б. Операционные магнитные усилители. — 1971. — 1 р. 11 к.

Заказы направлять по адресу:  
209020, г. Обнинск, Калужской обл. ул. Мигунова, 4. Книжный магазин № 1

## Зосим Григорьевич Каганов

(К 75-летию со дня рождения)

Исполнилось 75 лет со дня рождения и 55 лет научно-инженерной деятельности доктора технических наук, профессора Зосима Григорьевича Каганова.

В 1931 г. З. Г. Каганов окончил Киевский техникум связи и в 1932 г. поступил на вечернее отделение Ивановского энергетического института. После окончания института работал дежурным инженером ТЭЦ и старшим инженером-электриком в Карелии.

В 1940 г. З. Г. Каганов поступил в аспирантуру Ивановского энергетического института, но война помешала работе над диссертацией. С 1942 по 1946 г. он находился в рядах Советской Армии, где в 1943 г. был принят в партию.

В 1948 г. З. Г. Каганов защитил кандидатскую диссертацию, посвященную изучению волновых явлений в электрических машинах, в 1949 г. получил звание доцента.

С 1959 г. З. Г. Каганов — старший научный сотрудник института автоматики и электрометрии Сибирского отделения АН СССР, а с 1961 г. — зав. лабораторией в Транспортно-энергетическом институте СО АН СССР. Здесь под непосредственным руководством З. Г. Каганова были организованы две новые лаборатории высоковольтных устройств и волновых процессов в электрических машинах.



В 1963 г. З. Г. Каганов защитил докторскую диссертацию на тему «Волновые явления в электрических машинах», и в 1969 г. ему присвоено звание профессора.

С 1971 г. З. Г. Каганов заведует кафедрой ТОЭ в Уфимском авиационном институте, а с 1982 г. является профессором этой же кафедры.

З. Г. Каганов опубликовал более 130 научных трудов, в том числе три монографии по волновым явлениям в электрических машинах, статьи по вопросам теории нагруженных длинных линий с потерями, в частности, пространственно неоднородных, имеет ряд публикаций по расчетам трехмерных электромагнитных полей в средах, а также авторские свидетельства и учебные пособия.

З. Г. Каганов подготовил свыше двадцати кандидатов технических наук.

Зосим Григорьевич активно пропагандирует передовые достижения науки: в русском переводе под его редакцией вышла книга чешских авторов В. Геллера и В. Г. Гаматы «Высшие гармоники в асинхронных машинах», в течение 15 лет выходит редактируемый им межвузовский сборник «Сложные электромагнитные поля и электрические цепи», характеризуемый высоким научным уровнем.

Желаем Зосиму Григорьевичу долгого здоровья и дальнейших успехов в его плодотворной научно-педагогической деятельности.

Группа товарищей и учеников

~~~~~

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Бертинов А. И., Будзко И. А., Веников В. А., Глебов И. А., Евсеев Б. Н. (зам. главного редактора), Ефремов И. С., Иванов-Смоленский А. В., Ильинский Н. Ф., Комельков В. С., Костенко М. В., Лабунцов В. А., Ларионов В. П., Лидоренко Н. С., Лизунов С. Д., Мамиконянц Л. Г. (главный редактор), Меерович Э. А., Мучник Г. Ф., Нетушил А. В., Сабинин Ю. А., Слежановский О. В., Сопалов С. А., Тареев Б. М., Тиходеев Н. Н., Толстов Ю. Г., Федосеев А. М., Шакарян Ю. Г., Шаталов А. С., Шилин Н. В.

Научные редакторы: Б. Д. Макашкин, А. Л. Прилуцкий

Адреса редакции: 103012, Москва, К-12, Б. Черкасский пер., 2/10. Телефон 924-24-80 101000, Москва, Главный почтамт, абонентный ящик № 648

Адрес для телеграмм: МОСКВА, 12, ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Технический редактор Н. Н. Хотулева

Сдано в набор 11.12.86 Подписано в печать 03.02.87 Т-03571 Формат 60×90 1/8 Печать высокая Усл. печ. л. 10 Усл. кр.-отт. 10,5  
Уч.-изд. л. 12,01 Тираж 5934 экз. Заказ 3514

Энергоатомиздат, 113114 Москва, М-114, Щлюзовая наб., 10.  
Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский полиграфический комбинат ВО «Союзполиграфпром» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 142300 г. Чехов Московской области

|                                                                                                                                                                                 |    |                                                                                                                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Веников В. А., Будзко И. А., Левин М. С., Блохина Е. Л., Петров В. А. О методах решения многокритериальных оптимизационных задач электроэнергетики с неопределенными величинами | 1  | СООБЩЕНИЯ                                                                                                                                                                 |    |
| Жежеленко И. В., Саенко Ю. Л. Реактивная мощность в задачах электроэнергетики                                                                                                   | 7  | Тюханов Ю. М., Усихин В. Н. Критериальный анализ задач и резервирования в системах промышленного электроснабжения                                                         | 49 |
| Шкарин Ю. П. Упрощенный метод расчета затухания линейного тракта каналов высокочастотной связи по воздушной линии при гололеде                                                  | 12 | Михайлова М. В. Анализ четырехугольной характеристики срабатывания избирательного органа сопротивления устройства ОАПВ при различных коэффициентах компенсации            | 51 |
| Тозони О. В., Костенко Т. Я. Применение параметров многофазных тоководов для расчета токов в нагрузке и при коротких замыканиях                                                 | 16 | Хватов С. В., Анишев Е. Ю., Титов В. Г., Юдин В. В., Черемисин В. В. Крутильные колебания насосных агрегатов с электроприводом по схеме асинхронного вентильного каскада  | 54 |
| Мелешкин В. Н. Чувствительность линейных цепей к вариации структуры и параметров элементов                                                                                      | 20 | Александров Г. Н., Кадзов Г. Д. О повышении эффективности молниезащиты                                                                                                    | 57 |
| Мустафа Г. М. О структурных элементах электрических цепей                                                                                                                       | 23 | Мурыгин А. И. Критериальная оценка относительной массы магнитной системы бесконтактных машин                                                                              | 60 |
| Глазенко Т. А., Усольцев А. А., Хрисанов В. И. Анализ электромагнитных процессов в маловентильном асинхронном электроприводе с квазичастотным управлением                       | 30 | Пархоменко А. И., Карась С. В., Иваницкий С. В., Махорский Ю. Л., Сарапулов Ф. Н. Анализ многополюсного линейного асинхронного двигателя с различными обмотками индуктора | 62 |
| Еременко В. Г. Способы и устройства аналогового управления силовыми широтно-импульсными регуляторами на магнитно-транзисторных ключах                                           | 35 | Вишневский В. С., Быковский В. Ю. Расчет характеристик пьезоэлектрического двигателя с учетом потерь во фрикционном контакте                                              | 66 |
| Васецкий Ю. М. Электродинамические силы, действующие на спиральные проводники с током                                                                                           | 39 | Казанцев В. П., Кушлин Е. И. О погрешности, допускаемой при расчете емкости цилиндрических конденсаторов                                                                  | 68 |
| Беркович Е. И. Анализ вентильных моделей при решении задач дискретной оптимизации                                                                                               | 43 | Данильчук А. А. Расчет магнитного поля и параметров осесимметричной системы обмоток в кольцевой полости прямоугольного сечения                                            | 70 |
|                                                                                                                                                                                 |    | БИБЛИОГРАФИЯ                                                                                                                                                              | 74 |
|                                                                                                                                                                                 |    | ХРОНИКА                                                                                                                                                                   | 77 |

CONTENTS

|                                                                                                                                                                                                     |    |                                                                                                                                                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Venikov V. A., Budzko I. A., Levin M. S., Blokhina E. L., Petrov V. A. — On Methods for Solving Multi-Criterial Optimization Problems in Electrical Power Engineering With Indeterminate Quantities | 1  | REPORTS                                                                                                                                                                                                                 |    |
| Jehezhenko I. V., Sayenko U. L. — Reactive Power in Electrical Power Engineering Problems                                                                                                           | 7  | Тюханов Ю. М., Усикхи В. Н. — Criterial Analysis of Redundancy in Industrial Power Supply Systems                                                                                                                       | 49 |
| Shkarin U. P. — A Simplified Method for Calculating the Attenuation Over the Line Circuit of Carrier Communication Channels on Overhead Transmission Lines Under Sleet Conditions                   | 12 | Михайлова М. В. — Analysis of the Quadrilateral Operating Characteristics for the Impedance Discriminating Relays of the Single-Phase Automatic Reclosure Unit for Different Zero-Sequence Current Compensation Factors | 51 |
| Tozoni O. V., Kostenko T. J. — Employing the Parameters of Polyphase Current Leads in Calculating Load and Fault Currents                                                                           | 16 | Khvatov S. V., Anishev E. U., Titov V. G., Udin V. V., Cheremisin V. V. — Torsional Vibrations in Pumps With an Asynchronous Electric Drive                                                                             | 54 |
| Meleshkin V. N. — Sensitivity of Linear Circuits to Variations in the Structure and Parameters of Elements                                                                                          | 20 | Alexandrov G. N., Kadzov G. D. — On Improvement of the Effectiveness of Lightning Protection                                                                                                                            | 57 |
| Mustapha G. M. — On Structural Elements of Electric Circuits                                                                                                                                        | 23 | Murigin A. I. — A Criterial Estimate of the Relative Mass of the Magnetic System for Contactless Machines                                                                                                               | 60 |
| Glazenko T. A., Usoltsev A. A., Khrisanov V. L. — Analysis of Electromagnetic Transients in a Quasi-Frequency Controlled Asynchronous Electric Drive With Few Rectifying Elements                   | 30 | Parkhomenko A. I., Kapas S. V., Ivanitski S. V., Makhorski U. L., Sarapulov F. N. — Analysis of a Multi-Pole Linear Asynchronous Motor With Different Inductor Windings                                                 | 62 |
| Yeremenko V. G. — Ways and Means for Analog Control With Pulse-Width Power Regulators Employing Magnetic Transistorized Keys                                                                        | 35 | Vishnevski V. S., Bikovski V. U. — Calculation of the Characteristics of a Piezoelectric Motor With Account Taken of Losses in the Frictional Contact                                                                   | 66 |
| Vasetski U. M. — Electrodynamical Forces Acting on Spiral Current Conducting Leads                                                                                                                  | 39 | Kazantsev V. P., Kuklin E. I. — On the Error Committed in Calculating the Capacitance of Cylindrical Condensers                                                                                                         | 68 |
| Berkovitch E. I. — Analysis of Electronic Models in Solving Discrete Optimization Problems                                                                                                          | 43 | Danilchuk A. A. — Calculation of the Magnetic Field and Parameters of an Axially Symmetrical System of Windings in a Ring-Shaped Area of Rectangular Section                                                            | 70 |
|                                                                                                                                                                                                     |    | BIBLIOGRAPHY                                                                                                                                                                                                            | 74 |
|                                                                                                                                                                                                     |    | CHRONICLE                                                                                                                                                                                                               | 77 |

УДК 621.316.1.11.001.57

О методах решения многокритериальных оптимизационных задач электроэнергетики с неопределенными величинами. Веников В. А., Будзко И. А., Левин М. С., Блохина Е. Л., Петров В. А. — «Электричество», 1987, № 2

Рассмотрены два подхода к решению многокритериальных оптимизационных задач с неопределенными факторами. Первый подход заключается в свертывании частных критериев эффективности и последующем применении игровых методов теории исследования операций или метода районирования. Второй подход основан на использовании теории нечетких множеств. На примере выбора сечения проводов воздушной линии по двум критериям показано, что оба подхода приводят к одинаковым численным результатам. Библ. 27.

УДК 621.311.1.016.25

Реактивная мощность в задачах электроэнергетики. Жежелевко И. В., Саенко Ю. Л. — «Электричество», 1987, № 2

Получено выражение для определения реактивной мощности в электрических сетях при несинусоидальных режимах; приведен анализ различных методов ее расчета. Рассмотрены электромагнитные процессы в устройствах преобразовательной техники и электротехнологических установках с точки зрения обмена электромагнитной энергией, а также вопросы компенсации реактивной мощности в электрических сетях при наличии высших гармоник. Библ. 4.

УДК 621.315.1.018.8.001.24

Упрощенный метод расчета затухания линейного тракта каналов высокочастотной связи по воздушной линии при гололеде. Шкари Ю. П. — «Электричество», 1987, № 2

Рассмотрен упрощенный метод определения влияния гололедно-изморозевых образований (ГИО) с известными параметрами на коэффициенты распространения модальных составляющих трехпроводных ВЛ и затухание ВЧ-трактов по этим линиям. Библ. 6.

УДК 621.372.001.24

Чувствительность линейных цепей к вариации структуры и параметров элементов. Мелешкин В. Н. — «Электричество», 1987, № 2

Известная в теории цепей теорема о взаимных приращениях обобщена на случай конечного числа вариаций параметров ветвей и структуры линейной цепи. Дана оценка влияния приращений э. д. с. и токов источников энергии, сопротивлений потребителей, а также обрывов ветвей и замыканий узлов на приращения токов и напряжений во всех ветвях цепи. Рассмотрен пример, иллюстрирующий основные из полученных результатов. Библ. 6.

УДК 621.372.001.8

О структурных элементах электрических цепей. Мустафа Г. М. — «Электричество», 1987, № 2

Рассмотрены с общей точки зрения такие элементы схем замещения преобразовательной электрической энергии, как идеальные трансформаторы, вентили и фазорегуляторы. Уравнения их в существенных чертах совпадают с характеризующими графы уравнениями Кирхгофа, в соответствии с чем они могут именоваться структурными или соединительными элементами (СЭ). Мощность СЭ является тождественно нулевой. Проанализирована связь между этим физическим свойством и алгебраическими свойствами уравнений. Описана последовательность анализа схем с СЭ, включающая в себя формирование расширенной совокупности структурных уравнений и последующие исключения СЭ. Показано, что отделяющаяся сжатая совокупность структурных уравнений по типу близка к уравнениям Кирхгофа. Место графов применительно к ней занимает более общее понятие матриц. В ходе дальнейшего анализа цепи сжатая совокупность структурных уравнений может использоваться подобно уравнениям Кирхгофа с незначительным изменением применяемых процедур. При рассматриваемом подходе постоянные или переменные недиагональные матрицы взаимноиндуктивностей не используются, все взаимодействия между ветвями отражаются СЭ. Преимущества этого подхода проявляются при анализе электроэнергетических систем с насыщенными трансформаторами, вентилями и вращающимися электрическими машинами. Библ. 16.

УДК 621.374.324

Способы и устройства аналогового управления силовыми широтно-импульсными регуляторами на магнитно-транзисторных ключах. Еременко В. Г. — «Электричество», 1987, № 2

Рассмотрены различные схемы экономичного управления широтно-импульсными регуляторами, выполненными на магнитно-транзисторных ключах с положительной обратной связью по току. Приведены расчетные соотношения, необходимые для проектирования указанных регуляторов. Показаны преимущества этих схем, позволяющих совместить в силовых ключах регуляторов функции задающего генератора, широтно-импульсного модулятора и отказаться от введения промежуточного ключевого усилителя мощности. Библ. 5.

УДК 538.527:537.722

Электродинамические силы, действующие на спиральные проводники с током. Васецкий Ю. М. — «Электричество», 1987, № 2

Предложен способ расчета линейной плотности электродинамических сил, действующих на проводники гладкого пространственного контура. Показано, что определение линейной плотности сил сводится к однократному интегрированию вдоль контура выражения, в котором форма сечения проводников учитывается с помощью отдельно рассчитываемого параметра. Проанализировано влияние угла навивки, заходности и параметра сечения проводников спиральной системы на распределение электродинамических сил. Определены углы навивки спиральных проводников с током, находящихся в электродинамическом равновесии. Библ. 13.

УДК [621.372:621.382.2.026] 001.8

Анализ вентильных моделей при решении задач дискретной оптимизации. Беркович Е. И. — «Электричество», 1987, № 2

Рассмотрен класс электрических цепей, состоящих только из диодов, источников напряжения, источников тока и идеальных трансформаторов. Такие цепи являются моделями задач дискретной оптимизации, решаемых в теории исследования операций. Выполнен анализ электрических процессов подобных схем, предложен метод их аналитического расчета. Аналитические методы представляют теоретический интерес, позволяют избежать операции набора электрических моделей и измерений в них токов и напряжений, а также создать предпосылки для поиска более эффективных алгоритмов для ЦВМ. Библ. 6.

УДК 621.316.1.001.2.001.57

Критериальный анализ задачи резервирования в системах промышленного электроснабжения. Туханов Ю. М., Усичкин В. Н. — «Электричество», 1987, № 2

Получено критериальное уравнение, по которому производится оценка вариантов схем электроснабжения с одно- и двухтрансформаторными комплектными трансформаторными подстанциями. Библ. 10.

УДК 621.316.925.001.24

Анализ четырехугольной характеристики срабатывания избирательного органа устройства ОАПВ при различных коэффициентах компенсации. Михайлова М. В. — «Электричество», 1987, № 2

Предложен способ анализа характеристики срабатывания избирательных органов сопротивления устройства ОАПВ в виде одного четырехугольника для случая, когда коэффициенты компенсации при формировании вершин четырехугольника различаются между собой. На основе предложенного способа дан метод выбора параметров указанной характеристики срабатывания. Библ. 4.

УДК 62—83:621.65.534

Крутильные колебания насосных агрегатов с электроприводом по схеме асинхронного вентильного каскада. Хватов С. В., Анишев Е. Ю., Титов В. Г., Юдин В. В., Черемисин В. В. — «Электричество», 1987, № 2

На основании выражений мгновенного значения электромагнитного момента АВК проведен анализ крутильных колебаний вала насосного агрегата. Приведены экспериментальные результаты исследования агрегата мощностью 3500 кВт. Библ. 5.

УДК 621.316.98.001.57

О повышении эффективности молниезащиты. Александров Г. Н., Кадзов Г. Д. — «Электричество», 1987, № 2

Рассмотрен способ повышения эффективности молниезащиты путем использования молниеотводов с увеличенной зоной защиты, достигаемой применением молниеотводов с развитой поверхностью вершины, например, при установке на вершине молниеотвода тороидального экрана. Приводятся физическое обоснование этого явления, основанное на установленной взаимосвязи между долей потока вектора электрического смещения, замыкающегося на объекте, и поражаемостью объекта разрядами. Теоретические положения подтверждены экспериментальными исследованиями, выполненными на крупномасштабных моделях в воздушных промежутках длиной 8—10 м. Библ. 3.

УДК 621.313.392.001.24

Критериальная оценка относительной массы магнитной системы бесконтактных машин. Мурыгин А. И. — «Электричество», 1987, № 2

Установлены критериальные показатели, характеризующие магнитную систему электрической машины по величине ее удельной относительной массы. Обоснована перспективность использования предложенных показателей как при конструировании индуктора машины, так и при сравнении различных магнитных систем. Теоретические положения иллюстрируются расчетами по данным построенных бесконтактных машин. Библ. 9.

УДК 621.313.333.001.24

Анализ многополюсного линейного асинхронного двигателя с различными обмотками индуктора. Пархоменко А. И., Карась С. В., Иваницкий С. В., Махорский Ю. Л., Сарапулов Ф. Н. — «Электричество», 1987, № 2

Предлагается методика численного анализа многополюсного линейного асинхронного двигателя. Исходный двигатель представлен в виде двухмашинного каскада, состоящего из дугостаторного и кругового малополюсных асинхронных двигателей, работающих на один вал. Приводятся анализ влияния параметров обмоток на интегральные характеристики двигателя, рассчитанные на ЭВМ ЕС. Библ. 6.

УДК 621.3.045.013.001.24

Расчет магнитного поля и параметров осесимметричной системы обмоток в кольцевой полости прямоугольного сечения. Данильчук А. А. — «Электричество», 1987, № 2

Приведен вариант аналитического метода расчета магнитного поля осесимметричной системы обмоток в кольцевой полости прямоугольного сечения при однородных граничных условиях первого и второго рода. Показана возможность аналитического расчета интегральных параметров системы, обусловленных магнитным полем. Дано краткое описание реализации метода на ЭВМ. Приведен пример практического использования метода. Библ. 6.

УДК 621.319.4.001.24.088

О погрешности, допускаемой при расчете емкости цилиндрических конденсаторов. Казанцев В. П., Кузнецов Е. И. — «Электричество», 1987, № 2

Используя вариационные принципы электростатики проводников, получены неравенства для значения емкости цилиндрических конденсаторов конечной длины. На основании этих неравенств предложена простая формула для оценки погрешности, допускаемой при расчете емкости цилиндрических конденсаторов по общепринятой формуле. Библ. 9.

УДК 621.313.13:537.228.1

Расчет характеристик пьезоэлектрического двигателя с учетом потерь во фрикционном контакте. Вишневский В. С., Быковский В. Ю. — «Электричество», 1987, № 2

Приведены эквивалентные электрические схемы пьезоэлектрического двигателя, учитывающие потери во фрикционном контакте путем введенного в них сопротивления потерь на трение.

Получены теоретические выражения для расчета основных характеристик двигателя по параметрам пьезоэлектрического осциллятора и фрикционного контакта. Рассмотрены способы практического измерения и расчета этих параметров. Даны экспериментальные и расчетные зависимости для реального образца пьезоэлектрического двигателя. Библ. 6.