ОММУНИЗМ — ЭТО ЕСТЬ СОВЕТСКАЯ ВЛАСТЬ
ЛЮС ЭЛЕКТРИФИКАЦИЯ ВСЕЙ СТРАНЫ (Ленин)

ЖУРНАЛ
ОСНОВАН
1880 г.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

7
ИЮЛЬ
1985

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОРГАН АКАДЕМИИ НАУК СССР, ГОСУДАРСТВЕННОГО КОМИТЕТА СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ, ЦП НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА ЭНЕРГЕТИКИ
И ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ ИМЕНИ АКАДЕМИКА Г. М. КРЖИЖАНОВСКОГО

МОСКВА ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ

УДК 537.523:621.3.027.89

Исследования на моделях электрической прочности многоэлектродных изоляционных систем подстанций при коммутационных перенапряжениях

АЛЕКСАНДРОВ Г. Н., доктор техн. наук, КОРОТКОВ В. В., канд. техн. наук

Ленинград

На электрическую прочность изоляционных конструкций подстанций при воздействии коммутационных перенапряжений оказывает влияние множество факторов. Поэтому для получения достоверных результатов условия экспериментальных исследований должны максимально точно отражать реальные условия работы изоляционной конструкции. Решение такой задачи для изоляционных конструкций аппаратов высших классов напряжения очень сложно и связано со значительными затратами, а порой оказывается невозможным. Указанное обстоятельство определяет необходимость и целесообразность разработки методов моделирования, позволяющих производить количественный анализ и прогнозирование электрической прочности изоляционных конструкций высших классов напряжения.

На принципиальную возможность создания модели указывают обнаруженные условия подобия многоэлектродных изоляционных систем типа «электрод — электрод — земля» с изоляционными расстояниями 6—15 м [1, 2]. В [1] показано, что при заданном отношении расстояний между электродами к расстоянию до земли $K_S = S/H$ и заданном отношении напряжения на соседнем электроде к максимуму положительного импульса на электроде, с которого развивается разряд $K_U = U^-_{0,5}/U^+_{0,5}$ отношение 50 %-ного разрядного напряжения относительно земли к 50 %-ному разрядному напряжению при заземленном соседнем электроде $U^* = U^+_{0,5}/U^+_{0,50}$ оказывается одинаковым независимо от абсолютных размеров изоляционных промежутков. При постоянных отношениях K_S и K_U неизменным для различных длин изоляционных промежутков указанных изоляционных систем остается и распределение числа разрядов по путям «электрод — электрод» и «электрод — земля» [2]. Указанные обстоятельства дали возможность авторам [1, 2] сделать вывод о том, что отношения K_S и K_U являются критериями подобия изоляционных систем «электрод — электрод — земля» и позволяют обобщать характеристики электрической прочности и распределения разрядов в таких системах, а многоэлектродные системы длинных воздушных промежутков могут быть смоделированы при испытаниях их электрической прочности.

Для практического использования найденных критериев подобия проведены специальные исследования с целью:

разработки принципов построения моделей;

определения минимальных длин изоляционных промежутков моделей, при которых критерии подобия справедливы.

Проводились исследования простых (идеализированных) систем типа «экран — экран — земля» и «экран — подножник на земле». Исследования характеристик электрической прочности таких систем отличаются большей простотой и меньшей трудоемкостью по сравнению с исследованиями электрической прочности изоляционной конструкции аппарата. Это существенно облегчает накопление и анализ экспериментальных данных об

© Энергоатомиздат, «Электричество», 1985

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Таблица 1

Изоляционная система	Размеры электродов	Длины изоляционных промежутков
Два экрана сложной формы с подводящими шлейфами над землей [3	Экраны 2,0 м×2,0 м×6,6 м, из трубы диаметром 90 мм	$S=6{,}3\div13{,}2$ м $H=6{,}1\div13{,}0$ м
Два решетчатых сферических экрана над землей [1]	Экраны диаметром 2,0 м, из трубы диаметром 90 мм	$S=6\div14$ м $H=11\div15$ м
Два тороидальных экрана над землей	Экраны диаметром 0,6 м из трубы диаметром 50 мм	$S=2{,}3\div2{,}8$ м $H=2{,}3\div2{,}8$ м
Два решетчатых сферических экрана над землей	Экраны диаметром 0,5 м, из прутка диаметром 8 мм	$S=0{,}5\div3{,}0$ м $H=0{,}5\div3{,}0$ м
Экран — подножник на земле	Экран — решетчатая сфера диаметром 0,5 м из прутка диаметром 8 мм; подножник — тороиды диаметром 0,4 м, 0,8 м и 1,3 м из трубы диаметром соответственно 40 мм, 90 мм и 90 мм	Между экраном и землей — 2,0÷3,5 м; между экраном и подножником — 0,5÷3,5 м

электрической прочности моделей при воздействии коммутационных перенапряжений. При этом именно по характеристикам изоляционных систем «экран — экран — земля» и «экран — подножник на земле» может быть составлено представление о характеристиках электрической прочности изоляционных конструкций аппаратов в целом [3, 4]. В соответствии с конструкцией электродов аппаратов высших классов напряжения в качестве электродов в моделях использовались экраны сложной формы с подводящими шлейфами, сферические и тороидальные экраны. Описание моделей и исследуемых изоляционных систем приведено в табл. 1.

Электроды моделей двух первых изоляционных систем (табл. 1) изготавливались геометрически подобными оригиналу. Изоляционные расстояния моделей при испытаниях изменялись в некоторых пределах, определяемых пределами изменения изоляционных расстояний в моделируемых системах и выбранным масштабом моделирования электродов.

Исследования проводились на стенде наружных испытаний Ленинградского политехнического института (ЛПИ) при коммутационных импульсах напряжения с длиной фронта 3000 мкс, получаемых от двух каскадов трансформаторов 2,25 МВ. Импульсы различной полярности синхронно подавались на экраны моделей исследуемых изоляционных систем. В ходе опытов определялись 50 %-ные разрядные напряжения относительно земли $U^{+}_{0,5}$ и между электродами $U_{0,5}=U^{+}_{0,5}+|U^{-}|$ (для изоляционной системы «экран — подножник на земле» во всех опытах $U^{-}=0$), а также коэффициент вариации σ^{*}. Кривая эффекта, по которой находились эти величины, определялась на основании 100—150 опытов. В некоторых сериях число опытов увеличивалось до 350—400.

В некоторых опытах на положительно заряженном высоковольтном электроде, с которого развивается разряд, проводились измерения полного заряда $q_{m0,5}$ с помощью специального измерительного устройства по методике, описанной в [5].

По осциллограммам испытательных импульсов при разрядах в части опытов определялись значения предразрядных времен $\tau_{p0,5}$ по методике, предложенной в [6].

При испытаниях изоляционных систем «экран — экран — земля» в ходе опытов фиксировалось такое число разрядов по различным направлениям: в промежутке между высоковольтными электродами n_S и в промежутке между положительно заряженным электродом и землей n_H. По результатам наблюдений направлений развития разрядов определялась относительная частость перекрытия изоляционного промежутка между высоковольтными электродами $n^{*}_{s}=n_S/(n_S+n_H)$.

На рис. 1 приведены зависимости 50 %-ных разрядных напряжений от напряжения на отрицательно заряженном электроде для изоляционной системы двух

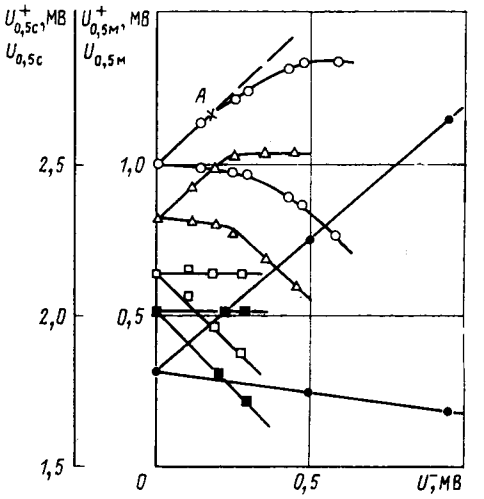


Рис. 1. Зависимости 50 %-ных разрядных напряжений системы экранов с подводящими шлейфами $U_{0,5c}$, $U^{+}_{0,5c}$ и ее моделей $U_{0,5м}$ $U^{+}_{0,5м}$ от напряжения на отрицательно заряженном электроде U^{-} для моделей с изоляционными расстояниями меньше 1,5 м при различных K_S (■ — $S=1{,}0$ м, $K_S=0{,}5$; □ — $S=1{,}375$ м, $K_S=0{,}89$), для моделей с изоляционными расстояниями больше 1,5 м и $K_S=1{,}0$ (△—$S=2{,}0$ м; ○—$S=2{,}6$ м) и для моделируемой системы при $K_S=1{,}0$ и $S=7{,}0$ м (●)

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

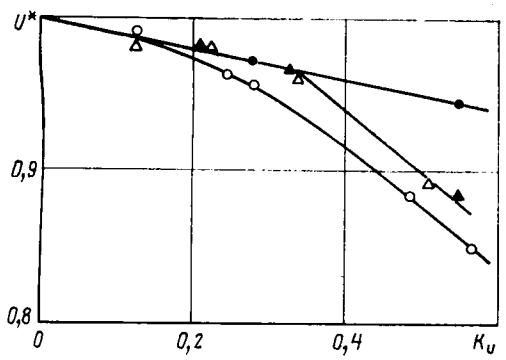


Рис. 2. Зависимости $U^* = f(K_U)$ для изоляционной системы двух экранов с подводящими шлейфами над землей (●) и ее моделей (○, △, ▲) при $K_S=1{,}0$; ● — $S=7{,}0$ м; ○ — $S=2{,}6$ м; △ — $S=2{,}0$ м; ▲ — $S=1{,}7$ м

экранов с подводящими шлейфами и ее моделей в масштабе 1 : 4 и 1 : 8 при различных длинах изоляционных промежутков. Данные рис. 1 показывают, что разрядные характеристики модели масштаба 1 : 8 (изоляционные расстояния менее 1,5 м) независимо от отношения K_S во всем диапазоне изменения U^- существенно отличаются от характеристик исходной системы. В отличие от исходной системы разрядные напряжения между электродами $U_{0,5}$ не зависят от напряжения U^-, а разрядные напряжения относительно земли $U^+_{0,5}$ линейно уменьшаются при увеличении U^-, так, что сумма $U_{0,5} = U^+_{0,5} + |U^-|$ остается неизменной. Причем 50 %-ные разрядные напряжения между электродами $U_{0,5}$ во всем диапазоне изменения напряжения U^- соответствуют величине средней разрядной напряженности, определяемой для 50 %-ной вероятности перекрытия, $E_р = U_{0,5}/S$, равной примерно 5 кВ/см, что свидетельствует о стримерной форме развития разряда. Об этом же свидетельствует и малый разброс разрядных напряжений ($\sigma^* \approx 0{,}015$—$0{,}02$).

Разрядные характеристики модели масштаба 1 : 4 согласуются с характеристиками исходной системы вплоть до некоторого значения U^-, когда разрядные напряжения начинают отклоняться в меньшую сторону. При уменьшении изоляционных расстояний моделей изменение характера зависимостей разрядных напряжений наблюдается при меньших значениях U^-.

Характер зависимостей $U_{0,5} = f(U^-)$ для моделей изменяется при таких изоляционных расстояниях и напряжениях на электродах, когда средняя разрядная напряженность $E_р$ достигает примерно значения 5 кВ/см. При этом стандарт σ^* уменьшается от 5—6 % до 1,5—2,0 %. Совпадение характера зависимостей $U_{0,5} = f(U^-)$ для моделей и исходной системы наблюдается при $E_р < 5$ кВ/см, когда $\sigma^* \approx 0{,}05$—$0{,}06$. Эти результаты свидетельствуют о развитии разряда в лидерной форме. Поэтому диапазон изменения расстояний и напряжений, обеспечивающий развитие разряда в лидерной форме, будем называть областью моделирования.

В том случае, если в области моделирования отрицательно заряженный электрод модели начинает корочировать при напряжении между электродами $U < U_{0,5}$, скорость роста $U_{0.5}$ с ростом U^- снижается (рис. 1, $S = 2{,}6$ м, точка A). Это объясняется тем, что образование объемного заряда вокруг отрицательно заряженного электрода приводит к увеличению влияния последнего на условия развития разряда с положительно заряженного электрода [7].

При исследовании электрической прочности изоляционной системы двух тороидальных экранов над землей оценка начальных напряжений короны, на электродах которой в соответствии с [8] может быть произведена достаточно просто и точно ($U_к \approx 260$ кВ), были получены зависимости 50 %-ных разрядных напряжений, аналогичные по характеру представленным на рис. 1 для $S = 2{,}6$ м. Во всех случаях при достижении напряжением U^- значения $U^- = U_к$ скорость роста напряжения $U_{0,5}$ с ростом U^- снижается. Отмеченное обстоятельство показывает, что коронирование электродов может оказывать заметное влияние на разрядные характеристики моделей и приводить к уменьшению разрядных напряжений.

По полученным в результате испытаний моделей системы «экран — экран — земля» с подводящими шлейфами данным были построены зависимости разрядных напряжений в относительных единицах $U^* = f(K_U)$. На рис. 2 приведен пример таких зависимостей для моделей и для исходной системы. Зависимость $U^* = f(K_U)$ для исходной системы построена для случая отсутствия короны на отрицательно заряженном электроде.

Относительные разрядные характеристики моделей масштаба 1 : 4 (изоляционные расстояния больше 1,5 м) совпадают с характеристикой исходной системы с тем же отношением K_S лишь до некоторого отношения напряжений K_U на электродах, при достижении которого относительная величина разрядных напряжений U^* в моделях начинает уменьшаться с ростом K_U быстрее, чем в исходной системе. Вычисления показали, что эти величины K_U соответствуют либо предельным значениям средней разрядной напряженности в области моделирования $E_р \approx 5$ кВ/см (рис. 2, $S = 2{,}0$ м и $S = 1{,}7$ м), либо начальному напряжению короны на экранах моделей (рис. 2, $S = 2{,}6$ м), равному 180 кВ для модели, выполненной в масштабе 1 : 4. Это обстоятельство определяет необходимость предъявления к экранам модели дополнительного (кроме геометрического подобия и проведения исследований в области моделирования) требования: начальные напряжения короны на экранах модели $U_{к.м}$ и исходной системы $U_{к.с}$ должны соответствовать одинаковому значению отношений напряжений на электродах K_U. Это означает, что отношения начального напряжения короны соседнего электрода к соответствующему ему 50 %-ному разрядному напряжению относительно земли в модели и исходной системе должны быть равны:

$$U_{к.м}/U^+_{0,5\,0м} = U_{к.с}/U^+_{0,5\,0с}. \qquad (1)$$

При геометрическом подобии экранов модели и исходной системы условие (1) не выполняется. При этом $U_{к.с}/U^+_{0,5\,0.с} > U_{к.м}/U^+_{0,5\,0м}$. Выполнение условия (1) может быть обеспечено при сохранении формы и геометрического подобия основных размеров путем изменения радиуса трубы, из которой изготовлена модель экрана.

Согласно требованию геометрического подобия основных размеров с учетом условия (1) была изготовлена и испытана модель масштаба 1 : 4 изоляционной системы двух сферических (решетчатых) экранов диаметром 2 м, результаты исследований которой приведены в [1, 2]. Для выполнения условия (1) моделью решетчатой сферы исходной системы служила гладкая сфера. В исследуемом диапазоне K_U отрицательно заряженные

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

электроды модели и исходной системы не коронировали.

Зависимость $U^*=f(K_U)$ для исходной системы, полученная по данным [1] для выбранных значений $S = 12$ м и $K_S = 0{,}8$, при $K_U = 0-0{,}6$ может быть аппроксимирована функцией

$$U^* = 1-0{,}175\,K_U. \qquad (2)$$

Аналогичные зависимости, полученные в результате испытаний моделей с расстояниями между высоковольтными электродами 2,2 и 2,8 м, также могут быть описаны функцией (2), однако лишь до отношения напряжений K_U на электродах, равного 0,18 и 0,42 соответственно. Эти значения в обоих случаях соответствуют границе области моделирования, определяемой по указанным выше признакам. Таким образом, зависимости $U^*=f(K_U)$ для модели и исходной системы согласуются во всем диапазоне изменения отношения K_U, соответствующем области моделирования. Это означает, что по результатам исследований моделей и при наличии зависимостей 50 %-ных разрядных напряжений исходной системы $U^{+}_{0,50}$ (при $K_U = 0$) от длины изоляционного промежутка H между экраном и землей при различных отношениях K_S могут быть оценены 50 %-ные разрядные напряжения исходных систем при различных значениях S, K_S и K_U. Это обстоятельство позволяет значительно упростить необходимые для обоснованного выбора изоляционных расстояний исследования характеристик электрической прочности изоляционных систем подстанций высших классов напряжения и проводить большую часть исследований на моделях. Для исследования электрических характеристик сложных изоляционных систем на натурных образцах достаточно определить лишь разрядные напряжения $U^{+}_{0,50}$ относительно земли при различных S и H и при заземленных соседних электродах. Оценка влияния потенциалов соседних электродов на величину разрядного напряжения относительно земли $U^{-}_{0,5}$ [получение зависимости $U^*=f(K_U)$] может производиться на моделях. Таким образом, исследования изоляционных систем подстанций высших классов напряжения могут быть значительно упрощены и проводиться на стендах с одной крупной испытательной установкой.

Однако получение данных о разрядных напряжениях $U^{+}_{0,50}$ при различных изоляционных расстояниях S и H и их сочетаниях для изоляционных конструкций высших классов напряжения связано со значительными трудностями. Поэтому гораздо проще было бы оценивать разрядные напряжения для таких конструкций только по результатам модельных исследований, используя при их пересчете, например, данные об электрической прочности промежутка «экран моделируемой системы — земля». Для реализации этой возможности в моделях и исходных системах оценивалось снижение разрядного напряжения $U^{+}_{0,50}$ относительно разрядного напряжения промежутка «высоковольтный электрод — земля» в том случае, когда соседние электроды отсутствуют. По результатам исследований моделей определялись отношения 50 %-ных разрядных напряжений модели $U^{+}_{0,50}$ при заземленном соседнем электроде к 50 %-ным разрядным напряжениям $U_{0,5э-з}$ промежутков «экран — земля» с той же формой экрана и длиной промежутка, равной высоте H установки экранов модели над землей:

$$V^*=U^{+}_{0,50}/U_{0,5\,э-з}. \qquad (3)$$

Оказалось, что в моделях масштаба 1 : 4 системы двух решетчатых сферических экранов над землей с расстояниями между высоковольтными электродами 2,2 и 2,8 м при $K_S = 0{,}8$ отношения V^* близки и принимают значения $V^*_{S=2,2\,м} = 1{,}10$ МВ/1,12 МВ $= 0{,}98$ и $V^*_{S=2,8\,м} = 1{,}21$ МВ/1,25 МВ $= 0{,}97$. Величина отношения V^* в исходной системе при отношениях K_S, близких к 0,8, принимает значения, находящиеся в пределах 0,97—0,99. Это означает, что отношения V^* в модели $U^{+}_{0,50м}/U_{0,5\,э-з.\,м}$ и исходной системе $U^{+}_{0,50с}/U_{0,5\,э-з.\,с}$ равны:

$$U^{+}_{0,50м}/U_{0,5\,э-з.\,м}=U^{+}_{0,50с}/U_{0,5\,э-з.\,с}=V^*. \qquad (4)$$

Другими словами, снижения разрядных напряжений $U^{+}_{0,50}$ относительно разрядных напряжений промежутка «экран — земля» $U_{0,5э-з}$, обусловленные наличием соседних заземленных электродов, в моделях и исходных системах одинаковы.

Установленный факт показывает, что оценка разрядных напряжений моделируемых систем может производиться по результатам исследований моделей и зависимостям разрядных напряжений $U_{0,5э-з.с}$ изоляционного промежутка «экран моделируемой системы — земля». Поскольку разрядные напряжения $U_{0,5э-з}$ могут быть определены из литературных источников, исследование электрических характеристик многоэлектродных систем длинных воздушных промежутков может быть сведено к исследованию электрических характеристик моделей.

Используя полученные при испытаниях модели значения U^* и V^* и определенные из литературных источников разрядные напряжения $U_{0,5э-з.с}$ можно рассчитать разрядные напряжения исходной системы по формулам:

$$U^{+}_{0,50с}=V^*U_{0,5\,э-з.с}, \qquad (5)$$

$$U^{+}_{0,5с}=U^*V^*U_{0,5\,э-з.\,с}, \qquad (6)$$

$$U^{-}_{с}=K_UU^*V^*U_{0,5\,э-з.\,с}, \qquad (7)$$

$$U_{0,5\,с}=(1+K_U)U^*V^*U_{0,5\,э-з.\,с}. \qquad (8)$$

Используя равенство (4), можно привести к более удобному для вычислений виду соотношение (1), по которому производится расчет диаметра трубы модели. Перемножив (1) и (4), получим

$$U_{к.м}/U_{0,5\,э-з.\,м}=U_{к.с}/U_{0,5\,э-з.\,с}. \qquad (9)$$

Данные о разрядных напряжениях промежутков «экран — земля» могут быть получены из литературных источников, $U_{к.с}$ просто рассчитывается для заданного класса напряжения моделируемого аппарата [8]. Поэтому расчет $U_{к.м}$ и радиуса трубы экрана модели по (9) несложен.

На рис. 3 приведены разрядные характеристики изоляционной системы «экран — экран — земля», полученные путем экспериментальных исследований и путем пересчета результатов исследований моделей по формулам (5) — (8). Относительные разрядные характеристики этой системы и ее моделей соответствуют формуле (2). Как видно, зависимости разрядных напряжений исходной системы $U_{0,5}=f(U^-)$ и $U^{+}_{0,5}=f(U^-)$, полученные в результате пересчета разрядных харак

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Таблица 2

K_S	S, м	U^-, кВ	$U_{0,5}$, кВ	σ^*, %	n_S^*	$\tau_{p\,0,5}^*$	$q_{m\,0,5}$, мкКл	E_p, кВ/см
0,75	0,78	0	430	2,5	0,98	1,02	—	5,51
	0,98	0	533	2,1	1,00	1,01	—	5,44
	1,25	0	700	3,4	0,92	1,00	—	5,00
	1,50	0	839	5,7	0,72	0,85	—	5,59
	1,77	0	962	4,1	0,58	0,84	—	5,43
	2,10	0	1075	6,6	0,32	0,75	—	5,12
	2,62	0	1239	5,4	0,28	0,76	—	4,73
1,00	0,60	0	318	2,0	—	1,00	—	5,30
	0,80	0	422	2,4	—	1,01	—	5,28
	0,83	0	415	2,2	—	—	25,6	5,00
	1,00	0	500	1,5	—	—	32,2	5,00
	1,02	0	523	4,2	—	0,99	—	5,13
	1,20	0	568	4,8	0,02	1,01	—	4,73
	1,25	0	619	2,8	—	—	45,4	4,95
	1,40	0	683	3,3	0,04	—	51,9	4,88
	1,43	0	674	6,6	0,06	0,93	—	4,71
	1,61	0	772	4,4	0,10	0,93	—	4,79
	1,62	0	779	5,5	0,11	—	59,3	4,81
	1,88	0	869	6,7	0,07	0,88	—	4,62
	2,02	0	913	5,7	—	0,84	—	4,52
1,00	2,00	0	917	5,1	0,04	—	—	4,59
		111	1036	7,1	0,36	—	—	5,18
		146	1028	5,3	0,45	—	—	5,14
		203	1063	4,1	0,72	—	—	5,32
		233	1070	4,2	0,91	—	—	5,35
		246	1083	3,7	0,76	—	—	5,42
		310	1087	3,7	0,97	—	—	5,44
		324	1069	3,6	0,85	—	—	5,35
		338	1061	2,9	1,00	—	—	5,31
		367	1060	2,0	1,00	—	—	5,30

теристик моделей, хорошо согласуются с аналогичными зависимостями, полученными при экспериментальных исследованиях рассматриваемой системы. В широком диапазоне изменения напряжения U^- расхождение в значениях 50 %-ных разрядных напряжений не превышает 2 %, т. е. находится в пределах погрешности их определения. Это означает, что по результатам исследований моделей и с использованием предлагаемой методики пересчета результатов модельных исследований с высокой степенью точности могут быть оценены 50 %-ные разрядные напряжения моделируемой системы.

Хорошо согласуются также значения коэффициентов вариации σ^*, полученные при испытаниях моделей (при условии проведения испытаний в области моделирования) и исходных систем при различных отношениях напряжений на высоковольтных электродах. В соответствии с [1], зависимость σ^* от отношения напряжений на электродах K_U системы двух решетчатых сферических экранов диаметром 2 м может быть описана формулой

$$\sigma^*/\sigma_0^* = 1 - 0{,}27\,K_U, \qquad (10)$$

где $\sigma_0^* = 5{,}4$ — значение коэффициента вариации σ^* при $K_U = 0$. Доверительные интервалы зависимости (10) при надежности 0,95 составляют 10 %.

В соответствии с методикой обработки результатов исследований исходной системы все данные по значениям σ^* для моделей были сгруппированы по интервалам значений K_U. По этим данным для каждого интервала определялось среднее значение $\bar{\sigma}^*$. Установлено, что

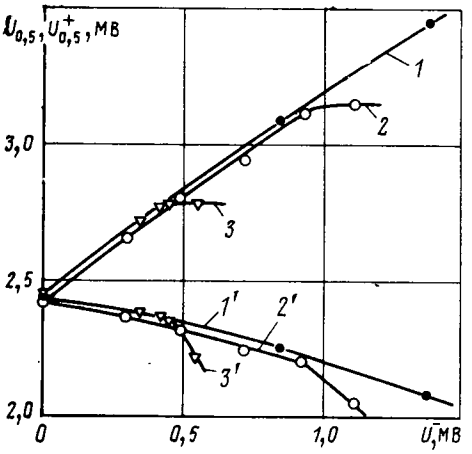


Рис. 3. Зависимости $U_{0,5}=f(U^-)$ и $U_{0,5}^+=f(U^-)$ для изоляционной системы двух решетчатых сферических экранов диаметром 2,0 м над землей при $S=12$ м и $K_S=0{,}8$, полученные по результатам исследований оригинала (*1,1'*, ●) и моделей с расстояниями между высоковольтными электродами 2,8 м (*2,2'*, ○) и 2,2 м (*3,3'*, ▽)

значения коэффициентов вариации $\bar{\sigma}^*$ и значения σ^*, определенные по формуле (10), хорошо согласуются: для всех значений K_U найденные значения $\bar{\sigma}^*$ находятся в пределах доверительных интервалов зависимости (10). Это обстоятельство следует считать чрезвычайно существенным, поскольку оно дает возможность по результатам испытаний модели определить значение напряжения, соответствующего малой вероятности перекрытия (выдерживаемого напряжения)

$$U_{\text{в}} = U_{0,5}(1 - 3\,\sigma^*), \qquad (11)$$

определяющего электрическую прочность подстанции в целом.

Относительная частость перекрытий между высоковольтными электродами моделей n_S^* увеличивается с ростом отношения напряжений на электродах K_U значительно быстрее, чем в исходных системах. Однако значения n_S^*, полученные при испытаниях моделей и исходных систем при $K_U = 0$, хорошо согласуются. Так, отклонение значений n_S^*, полученных при экспериментальных исследованиях моделей от зависимости $n_S^* = f(K_S)$, полученной в результате испытаний исходной системы и аппроксимируемой при $K_S = 0{,}5$—1,0 функцией

$$n_S^* = 4{,}8\,(1{,}1 - K_S)^{3,4}, \qquad (12)$$

не превышает погрешности определения значений n_S.

Полученные данные позволяют утверждать, что по результатам исследований моделей с длиной изоляционных промежутков 2—3 м, построенных по предлагаемой методике, могут быть получены достаточно полные сведения о характеристиках моделируемых систем при существенном упрощении процесса исследований. Однако, как видно из приведенных результатов исследований моделей, при уменьшении длин изоляционных промежутков моделей границы области моделирования по найденным критериям сужаются. Как уже отмечалось, при уменьшении изоляционного расстояния между высоковольтными электродами модели масштаба 1 : 4 системы сферических экранов от 2,8 м до 2,2 м максимальные значения отношений напряжений на электродах K_U, при которых согласуются разрядные характерис-

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

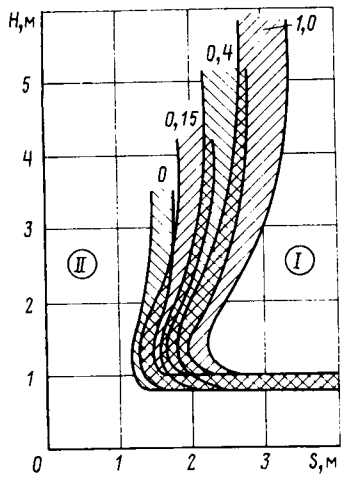


Рис. 4. Границы области моделирования и переходной области в изоляционной системе «экран—экран—земля» при различных значениях K_U:
I — область моделирования;
II — область длин изоляционных промежутков, где моделирование по найденным критериям невозможно

тики модели и исходной системы, уменьшаются от 0,42 до 0,18, и существуют такие длины изоляционных промежутков моделей, при которых моделирование невозможно уже при $K_U = 0$ (рис. 1). Для обоснованного выбора изоляционных расстояний моделей необходимо определить границу области моделирования в характерных для конструкции аппарата изоляционных системах типа «экран — экран — земля» и «экран — подножник на земле».

Приведенные результаты исследований моделей дают основание утверждать, что изоляционные расстояния, определяющие границу области моделирования, составляют 1,5—3,0 м (рис. 1 и 3). Такая длина изоляционных промежутков моделей приблизительно соответствует четырехкратному уменьшению длин изоляционных промежутков аппаратов высших классов напряжения [9]. Поэтому при построении электродов моделей, на которых производилось определение границ области моделирования по найденным критериям, был выбран масштаб 1 : 4. В соответствии с конструкцией высоковольтных аппаратов высших классов напряжения и выбранным масштабом моделирования высоковольтные электроды моделей были выполнены в виде решетчатых сфер диаметром 0,5 м. Размеры подножников системы «экран — подножник на земле» выбирались исходя из принятого масштаба 1 : 4 и в соответствии с размерами подножников реальных аппаратов [9].

Границы области моделирования в указанных системах определялись по изменению их разрядных характеристик (рис. 1). Пример разрядных характеристик на границе области моделирования изоляционной системы «экран — экран — земля» приведен в табл. 2. Как видно из таблицы, изменение характера разрядных напряжений и коэффициентов вариации сопровождается резким изменением полного заряда $q_{m0,5}$ высоковольтного электрода, с которого развивается разряд, предразрядных времен $\tau^*_{p\,0,5}$ и относительной частости перекрытий между высоковольтными электродами n^*_S. Как показали вычисления, если разряд в изоляционных промежутках происходит при средней разрядной напряженности $E_p \approx 5$ кВ/см, полный заряд высоковольтного электрода, с которого развивается разряд, практически определяется его геометрической емкостью. При уменьшении E_p, связанном с увеличением изоляционных промежутков исследуемой системы, происходит резкое увеличение емкости высоковольтного электрода при напряжении, близком к разрядному, свидетельствующее о накоплении вокруг него объемного заряда. При увеличении изоляционных расстояний исследуемой системы на границе области моделирования происходит резкое уменьшение предразрядных времен. В изоляционных промежутках системы, разряд в которых происходит при средней разрядной напряженности примерно 5 кВ/см, перекрытия формируются при предразрядных временах, близких к длине фронта испытательного импульса $\tau_ф \left(\tau^*_{p\,0,5} = \frac{\tau_{p0,5}}{\tau_ф} \approx 1\right)$. Увеличение размеров изоляционных промежутков сопровождается уменьшением $\tau^*_{p\,0,5}$ до значений 0,7—0,8. Полученные результаты дополнительно подтверждают высказанное предположение о том, что граница области моделирования представляет собой границу изменения механизма разряда. Моделирование по найденным критериям возможно лишь в той области изоляционных промежутков и отношений напряжений на электродах моделей, когда перекрытие изоляционных промежутков моделей осуществляется лидерной формой разряда.

Таблица 3

H, м	$h_п$, м	$U_{0,5}$, кВ	σ^*, %	$q_{m0,5}$, мкКл	E_p, кВ/см
2,00	0	945	6,2	—	4,73
	0,24	919	5,8	—	5,22
	0,32	908	5,3	—	5,40
	0,43	867	7,2	—	5,52
	0,56	792	7,4	—	5,50
	0,65	744	5,5	—	5,51
	0,70	724	2,6	—	5,57
	0,75	712	3,2	—	5,69
	0,80	670	2,2	—	5,58
	0,85	646	2,1	—	5,62
	0,90	614	1,8	—	5,58
	0,95	588	1,7	—	5,60
3,00	0	1160	7,3	100	3,87
	0,47	1150	5,6	100	4,54
	0,62	1115	4,9	91	4,68
	0,82	1075	6,5	81	4,93
	1,10	1000	6,5	70	5,26
	1,35	933	4,3	59	5,65
	1,60	795	4,4	40	5,68
	1,80	675	3,3	33	5,63
	2,00	565	3,4	30	5,65

Приведенные результаты исследований систем «экран — экран — земля» указывают на то, что существует некоторая переходная область от области моделирования к области, где моделирование по найденным критериям невозможно.

Из табл. 2 видно, что границы области моделирования и переходной области могут быть определены по большому числу характеристик, что позволяет говорить о возможности достаточно точной оценки этих границ. Данные о границах области моделирования и переходной области для различных размеров изоляционных промежутков, их соотношений и соотношений напряжений на высоковольтных электродах исследуемой системы «экран — экран — земля» приведены на рис. 4 в виде зависимостей $H = f(S)$. При этом переходные области выделены штриховкой, различной для различных отношений K_U, приведенных у кривых в качестве параметра. Область длин изоляционных промежутков S и H свыше верхней границы переходной области при конкретном значении K_U представляет собой область моделирования для указанного K_U. Область длин изоляционных промежутков, меньших нижней границы

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

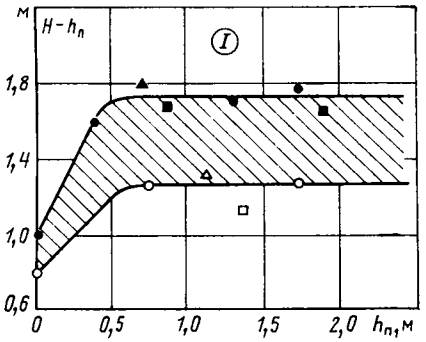


Рис. 5. Область моделирования (I) и переходная область (выделена штриховкой) для изоляционной системы «экран—подножник на земле» при заземленном подножнике ($K_U = 0$)

переходной области при конкретном значении K_U, — область, где моделирование по найденным критериям при указанном K_U невозможно.

Сравнение данных о границе области моделирования в исследуемой системе решетчатых сферических экранов диаметром 0,5 м и в моделях других изоляционных систем, описание и результаты исследований которых приведены выше, показало, что найденная граница области моделирования может быть использована для выбора изоляционных расстояний моделей с различной формой электродов, близких по размерам к электродам сследуемой системы.

При исследовании изоляционных систем «экран — подножник на земле» определялись зависимости разрядных характеристик этой системы от высоты подножника $h_п$ при неизменной высоте H установки высоковольтного электрода над землей (табл. 3). В результате исследований были получены зависимости, аналогичные по характеру приведенным в табл. 2 для системы «экран — экран — земля». При этом границы области моделирования и переходной области определялись по тем же критериям, что и в изоляционной системе «экран — экран — земля». Оказалось, что в исследуемых системах размеры подножника практически не оказывают влияния на размеры области моделирования и переходной области. Это обстоятельство позволило получить обобщенные для всех исследуемых систем данные об изоляционных расстояниях между высоковольтным электродом и подножником $H - h_п$, соответствующих границам области моделирования и переходной области, при различных высотах подножника $h_п$ (рис. 5).

Полученные данные о границах области моделирования в изоляционных системах «экран — экран — земля» и «экран — подножник на земле» позволяют производить выбор изоляционных расстояний моделей высоковольтных аппаратов. Основные изоляционные расстояния (между высоковольтными электродами S и между высоковольтными электродами и землей H) должны выбираться по данным о границе области моделирования в изоляционной системе «экран — экран — земля» (рис. 4). По выбранным изоляционным расстояниям S и H моделей определяется масштаб моделирования и рассчитываются остальные изоляционные расстояния и размеры моделей.

Затем должна быть произведена проверка соответствия выбранных изоляционных расстояний между высоковольтными электродами и заземленными предметами моделей области моделирования в системе «экран — подножник на земле» (рис. 5). При необходимости масштаб моделирования уточняется.

По найденным критериям моделирования и при использовании данных о границе области моделирования в основных изоляционных системах аппарата была построена и испытана модель разъединителя РНВЗ-750П 2000, 4000, испытанного ранее на стенде наружных испытаний ЛПИ. Подробное описание этого разъединителя приведено в [9]. Масштаб моделирования 1 : 2,5 был выбран исходя из необходимости обеспечения возможности модельных исследований (в соответствии с требованиями ГОСТ [10]) при отношении напряжений на контактах, $K_U = 0,—0,15$. Изоляционное расстояние между контактами модели составило 2,44 м. Разрядные характеристики разъединителя, полученные при испытании промышленного образца и при пересчете результатов испытаний модели, приведены на рис. 6 и, как видно, хорошо согласуются в необходимом для исследований диапазоне изменения $U^- = 0—250$ кВ [10]. Так, расхождение в значениях $U_{0,5}$, определенных при испытаниях промышленного образца и его модели, не превышает 3 %, т. е. находится в пределах погрешности определения 50 %-ных разрядных напряжений.

Хорошо согласуются и значения коэффициентов вариации σ^* при различных отношениях напряжений на контактах K_U, полученные в результате испытаний разъединителя и его модели. Это означает, что по результатам исследований моделей может производиться оценка разрядных напряжений моделируемых конструкций, соответствующая любой вероятности перекрытия.

В результате исследований разъединителя и его модели при $K_U = 0$ получены близкие значения относительной частости перекрытий между контактами n_S^*, соответствующей 50 %-ной вероятности перекрытия. Так, среднее значение n_S^*, полученное при испытаниях аппарата, составляет 0,15, а при испытаниях его модели — 0,14.

При рассмотрении применимости предлагаемой методики модельных исследований электрических характеристик высоковольтных конструкций была сделана попытка провести оценку изоляционных расстояний таких конструкций, удовлетворяющих заданному уровню коммутационных перенапряжений, по результатам испытаний моделей. Для этого были проведены испытания модели изоляционной системе двух решетчатых

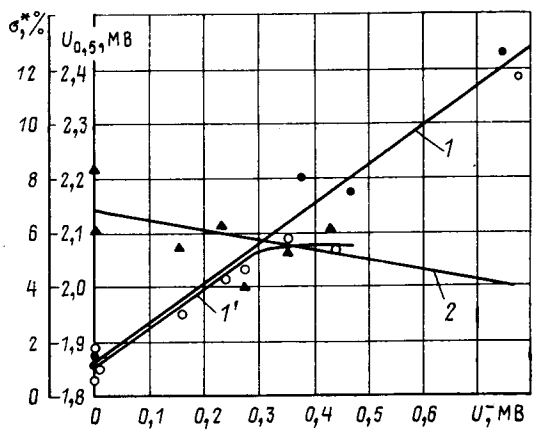


Рис. 6. Данные о 50 %-ных разрядных напряжениях $U_{0,5}$ (*1*, ●; *1'*, ○) и коэффициентах вариации σ^* (*2*, ▼) изоляционной конструкции разъединителя РНВЗ-750П/2000, 4000 при различных напряжениях U^-, полученные по результатам испытаний оригинала (*1*, ●; *2*) и его модели (*1'*, ○; ▼)

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

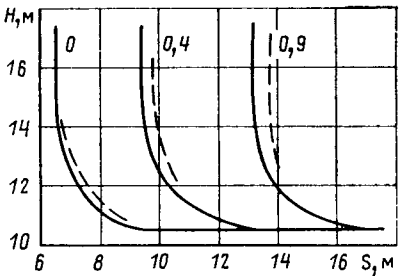


Рис. 7. Необходимые изоляционные расстояния изоляционной системы двух решетчатых сферических экранов диаметром 2,0 м над землей для $U^{+}_{0,5}$=2,20 МВ и различных значений K_U, полученные по результатам испытаний оригинала (— — —) и модели (———)

сферических экранов над землей [1], выполненной в масштабе 1 : 2. По результатам испытаний модели и исходной системы были оценены изоляционные расстояния между электродами и электродами и землей для изоляционных конструкций, работающих в электрической сети с фазным напряжением $U_ф$ = 700 кВ.

Необходимое по условиям надежной работы при коммутационных перенапряжениях 50 %-ное разрядное напряжение относительно земли высоковольтных изоляционных конструкций определяется по формуле [8]

$$U^{*}_{0,5} = \frac{\sqrt{2}\,K_{пр}\,U_ф}{1-3\sigma^{*}}\,\frac{p_0}{p} \qquad (13)$$

и для $U_ф$ = 700 кВ при расчетной кратности перенапряжений $K_{пр}$ = 1,8 и σ^{*} = 0,05 равно $U^{+}_{0,5}$ = 2,2 МВ. Необходимые изоляционные расстояния для $U^{+}_{0,5}$ = 2,2 МВ, полученные при испытаниях исходной системы и в результате пересчета результатов модельных исследований, приведены на рис. 7 в виде зависимостей $H = f(S)$ при различных значениях K_U. Как видно из приведенного рисунка, данные о необходимых изоляционных расстояниях, полученные при испытаниях исходной системы и в результате пересчета результатов модельных исследований, хорошо согласуются. Это означает, что предложенная методика исследований электрической прочности изоляционных конструкций высших классов напряжений на моделях обладает широкими возможностями и позволяет проводить как испытания готовых конструкций, так и выбор изоляционных расстояний этих конструкций по необходимому уровню коммутационных перенапряжений. При этом следует отметить достаточно высокую точность модельных исследований.

Выводы. 1. Отработка изоляционных конструкций аппаратов высших классов напряжения может проводиться на моделях меньших размеров, построенных по следующим критериям:

основные размеры модели и исходной системы должны быть геометрически подобными;

отношения начального напряжения короны с соседних электродов к разрядному напряжению положительно заряженного электрода в модели и исходной системы должны быть равны;

изоляционные расстояния модели должны быть такими, чтобы развитие разряда происходило в лидерной форме.

2. При наличии данных об электрической прочности промежутка «высоковольтный электрод моделируемой системы — земля» по результатам исследований модели могут быть оценены:

разрядные напряжения моделируемых систем, соответствующие различным вероятностям перекрытия;

данные о направлении развития разрядов (для изоляционных систем продольной изоляции);

необходимые для заданного уровня коммутационных перенапряжений изоляционные расстояния аппаратов.

3. Результаты определения границы области моделирования в изоляционных системах «экран — экран — земля» и «экран — подножник на земле» могут быть использованы при проектировании высоковольтных аппаратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Александров Г. Н., Герасимов Ю. А.** Электрическая прочность воздушной изоляции подстанции при коммутационных перенапряжениях. — Электричество, 1979, № 1.

2. **Александров Г. Н., Герасимов Ю. А., Каррара Дж.** Оценка надежности изоляционных систем подстанций СВН. — Электричество, 1979, № 3.

3. **Электрическая** прочность междуфазных воздушных промежутков на подстанциях сверхвысокого напряжения при коммутационных перенапряжениях/Александров Г. Н., Герасимов Ю. А., Редков В. П., Лысков Ю. И. — Электричество, 1972, № 10.

4. **Иванов В. Л., Соколов А. М.** Оценка влияния заземленных предметов на электрическую прочность промежутка экран аппарата — земля. — Изв. вузов. Энергетика, 1979, № 2.

5. **Pre-discharge** phenomena in long air gap under switching impulse conditions/G. N. Aleksandrov, V. L. Ivanov, A. M. Sokolov, A. F. Sorokin. — 5-th international conference on «Gasdischarge». London, 1978.

6. **Александров Г. Н., Иванов В. Л., Кизеветтер В. Е.** Электрическая прочность наружной высоковольтной изоляции. — Л.: Энергия, 1969.

7. **Александров Г. Н., Подпоркин Г. В.** Методика оценки электрической прочности многоэлектродных изоляционных систем по данным испытаний простейших промежутков. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1976, № 4.

8. **Александров Г. Н.** Сверхвысокие напряжения. — Л.: Энергия, 1973.

9. **Афанасьев В. В., Якунин Э. Н.** Разъединители. — Л.: Энергия, 1979.

10. **ГОСТ 20690—75.** Электрооборудование переменного тока на напряжение 750 кВ.

[11.04.84]

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

УДК 621.315.616.9:620.18

Новая высоковольтная конструкция изоляции

ПОНОМАРЕВ Л. Т., доктор техн. наук

Ленинград

В качестве электроизоляционных материалов для конструкций высоковольтной изоляции как в СССР, так и за рубежом до настоящего времени применяют: микаленту, стеклослюдинитовые пропитанные ленты, для конструкций изоляции типа слюдотерм, монотерм, изотенакс, майкапел и других — стеклослюдинитовые ленты с малым содержанием связующего, «сухие» ленты для конструкций изоляции типа монолит, микадур, микапакт и другие, которые следует назвать традиционными. В последнее время в СССР впервые разработана не традиционная лента с регулярным слюдяным барьером — эластонит [1—3]. В таблице приведены характеристики некоторых видов электроизоляционных лент.

Традиционные стеклослюдинитовые ленты представляют собой в технологическом отношении не законченные по циклам обработки полуфабрикаты и требуют при создании конструкции изоляции определенных технологических операций: вакуумирования в котлах, пропитки термореактивным связующим для «сухих» лент, применения нагрева и опрессовки, в том числе гидростатической опрессовки битумом, отверждения под давлением. После отверждения путем гидростатической опрессовки битумной массой требуется последующее удаление защитной ленты вместе с битумной массой. В готовой конструкции кратковременная электрическая прочность не превышает 30 МВ/м. Это объясняется хаотическим слюдобарьером, который состоит из частиц разных размеров с отношением среднего периметра к толщине частиц около 20—30. Толщина слюдинок более 1 мкм, между частицами слюды имеются разрывы, поры и воздушные включения больших размеров. Такой барьер обладает малой стойкостью к механическим воздействиям. Вид структуры изоляции типа слюдотерм, полученный на сканирующем электронном микроскопе с увеличением в 2000 раз, приведен на рис. 1,*а*.

Эластонитовые ленты значительно отличаются от традиционных стеклослюдинитовых лент как по связующим, так и по химико-технологическим приемам изготовления. В качестве основы используют метод создания пространственного полимера на основе функциональных групп. Реакционная способность функциональных внутренних и концевых групп определяется распределением электронных зарядов, характером химических валентностей и их энергии связи, взаимного влияния функциональных групп, передачей этого влияния по пространственной конфигурации. Для решения этих задач применяют тончайшие современные методы исследования: инфракрасную спектроскопию, ядерный магнитный резонанс и др. Управление связями функциональных внутренних и концевых групп позволяет подойти к решению основной задачи химии — созданию пространственной структуры полимерной молекулы с соответствующими компонентами и получением материалов с заранее заданным комплексом свойств. Многообразие функциональных групп четко классифицируется по гомологическим рядам и распределению их в полимерной линейной цепи, что в основном и определяет заданный комплекс свойств материалов и технологию их получения.

Практически задача по синтезу новых эластонитовых материалов с заданным комплексом свойств (технологических, физико-механических, теплофизических и диэлектрических) решается путем подбора таких условий реакции функциональных групп с соответствующими компонентами, при которых получается нужное строение, а следовательно, и свойство. Научное материаловедение особенно важно для новых видов форполимеров и сочетания их с частицами слюды и другими компонентами, что позволит предложить производству новые, более экономичные технологические процессы, новые материалы, новые более компактные и производительные технологические системы.

Во ВНИИэлектромаш разработана стабильная короностойкая композиция из фторлон-эпоксидных и эпоксидно-полибутадиеновых функциональных групп в положении 1—2, цис 1—4 и транс 1—4 и из частиц слюды. При термической обработке с введением некоторых добавок удалось получить стеклоэластонитовые ленты с характеристиками, приведенными ниже:

Температура, °С	20	60	100	155
tg δ, %	0,6	1,0	1,8	2,5
ε_r	2,8	2,8	2,6	2,3
$\rho\times10^{13}$, Ом·м	1,0	0,6	0,2	0,4

Значение $E_{пр}$ = 90 МВ/м; прочность при растяжении составляет 60 МПа.

Структура эластонитовых лент на срезах торца с наклоном под 45° на электронном сканирующем микроскопе с увеличением в 2000 раз приведена на рис. 1, *б*. Слюдяной барьер состоит из плотно уложенных с перекрытием отдельных слюдинок толщиной менее 1 мкм. Слюдинки строго параллельны относительно друг друга, крупные включения отсутствуют. Регулярная структура расположения частиц слюды обеспечивает монолитность и плотность, высокую электрическую прочность, короностойкость, устойчивость к воздействию механических и тепловых градиентов. Оптимальный комплекс диэлектрических свойств эластонитовых лент не может быть научно обоснован только на основе химической технологии. Здесь необходимо обратиться к модели физического поведения вариантов эластонитовой ленты при длительном воздействии электрического поля, т. е. к исследованию срока жизни. Результаты исследования стойкости к электрическому старению различ-

Характеристика	Микалента ЛМЧ—ББ	Монолит	Слюдотерм	Микадур	Эластонит
Толщина ленты, мм	0,15±0,02	0,14±0,02	0,17±0,02	0,16±0,01	0,14±0,01
Содержание, %:					
слюды	45	30	40	55	55
связующих	30	До 5	38	10	24,5
подложки	22	61	20	33	20
летучих, не более	3	0,5	2,0	2,0	0,5
Электрическая прочность, МВ/м	20	18	22	22	60
Разрывное усилие ленты шириной 15 мм, Н	30	50	30	30	40
Класс нагревостойкости	В	В	В	В	В
Горючесть	Горит	Горит	Горит	Горит	Не горит
Срок хранения, год	1	1	1	1	3

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

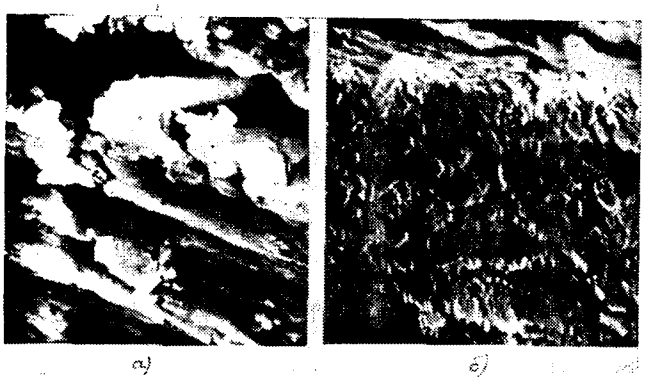


Рис. 1. Структуры изоляции слюдотерм (*а*) и эластонитовой ленты (*б*)

ных однослойных эластонитовых лент толщиной 0,2—0,01 мм в виде кривых жизни представлены на рис. 2. По оси ординат отложены значения напряженности электрического поля E, а по оси абсцисс — значения логарифма времени τ (на второй шкале приведены другие единицы времени). Из анализа данных рис. 2 можно заключить, что при $E = 30$ МВ/м изоляция слюдотерм имеет срок жизни 1 ч, а эластонитовая лента более 50 ч; при $E = 10$ МВ/м путем экстраполяции устанавливаем, что для слюдотерма срок жизни составляет 1 год, а для эластонитовых лент — более 26 лет. Срок жизни различных вариантов изоляции и эластонитовых лент можно описать следующим уравнением:

$$\lg E = A - B \lg \tau, \qquad (1)$$

где E — напряженность электрического поля, МВ/м; τ — время, с; A и B — константы для каждого вида изоляции.

Параллельность хода графиков срока жизни вариантов *1*, *2*, *3*, *4*, имеющих разное связующее и регулярный или нерегулярный слюдяной барьер, можно объяснить воздействием частичных разрядов. Для изоляции слюдотерм (4) с хаотическим барьером воздействие частичных разрядов вызывает более высокую степень разрушения. Благодаря высокой короностойкости регулярный слюдяной барьер в эластонитовых лентах медленнее стареет под воздействием частичных разрядов.

Высокая короностойкость эластонитовой ленты, ее законченная стадия полимеризации связующего позволяют в принципе изменить технологические операции изготовления высоковольтной конструкции изоляции. Традиционные слюдинитовые ленты и технология изготовления на основе их конструкций высоковольтной изоляции характеризуются полувековой давностью и не в полной мере отвечают современным требованиям крупного энергетического машиностроения. Недостатками таких лент являются пористость, хаотическая структура расположения частиц слюды и неполная степень полимеризации связующего.

При создании из таких лент конструкции изоляции приходится применять сложную технологию: после наложения лент до определенной толщины изоляции производят вакуумирование, затем (по необходимости) допропитку связующим, далее уплотнение прессованием или гидростатической опрессовкой, завершают стадию полимеризации термореактивного связующего путем термической обработки, охлаждают конструкцию и снимают защитную технологическую ленту вместе с битумной массой. Следует учитывать, что за один прием невозможно хорошо отвакуумировать и пропитать конструкцию изоляции с толщиной одной стороны более 3 мм. Поэтому для получения конструкции изоляции с толщиной одной стороны более 3 мм приходится указанные выше операции повторять несколько раз, что весьма усложняет и удлиняет время технологического процесса. Однако даже такая сложная технология не обеспечивает получение монолитной структуры, в изоляции остаются поры, в которых возникают частичные разряды.

Со временем происходит разрушение некороностойких органических связующих и изоляция пробивается, т. е. срок ее жизни мал. При воздействии механических сил в изоляции образуются трещины, что снижает ее электрическую прочность. Например, при прогибе изоляции типа слюдотерм электрическая прочность резко снижается, что вызывает определенные технологические трудности при укладке обмоток в пазы статора, особенно катушечных обмоток с отгибом шага. Эластонитовые ленты, как указывалось ранее, представляют монолитную структуру с регулярным слюдяным барьером, связующее полностью переведено в пространственный полимер и не требуются вакуумирование, пропитка и т. д.

При создании конструкции изоляции на основе эластонитовых слюдосодержащих лент с регулярным слюдяным барьером, отличающихся повышенной короностойкостью, эластичностью и электрической прочностью, на них накладывается тонкий липкий слой, который затем путем химико-технологической обработки превращается в пространственный полимер, придавая монолитность слоям конструкции изоляции при их склеивании. Новый химико-технологический прием в создании конструкции изоляции из эластонитовых лент сводится к подбору клеящей композиции, наложению ее на эластонитовые ленты, приданию конструкции соответствующей формы. Такой способ создания конструкции изоляции из липких лент позволяет повысить производительность, упростить технологические операции и оборудование, улучшить условия охраны труда. При этом достигаются оптимальные физико-химические, диэлектрические и физико-механические свойства, снижаются давление и температура обработки, исключается применение растворителей и летучих веществ.

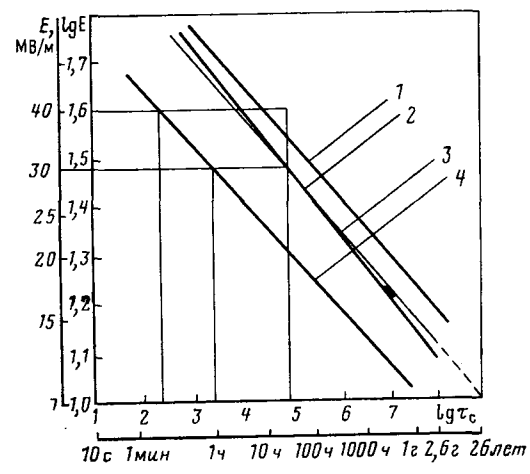


Рис. 2. Кривые жизни эластонитовых лент: *1* — эластонит на полиимидной пленке; *2* — эластонит на лавсановой пленке; *3* — стеклоэластонит лабораторного изготовления; *4* — изоляция слюдотерм (для сравнения)

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

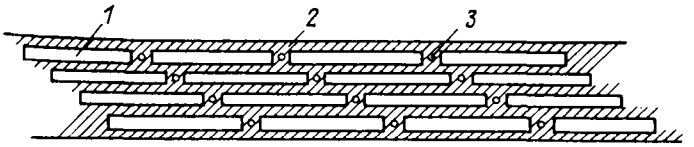


Рис. 3. Схема структуры расположения эластонитовых лент (*1*), скрепляющего состава (*2*), газовых включений (*3*) в новой конструкции изоляции

Создание клеящей композиции состоит в выборе смол: эпоксидной, полиэфирной в виде полимерной основы; форполимеров, олигомеров, полидиенов, жидких каучуков с относительной молекулярной массой от 100 до 10 000, в которой должны содержаться внутренние и концевые функциональные группы. Эти группы способны образовать пространственный полимер и одновременно придать заданную конечную форму конструкции изоляции. За счет введения в конструкцию изоляции специальных соединений она приобретает способность гасить частичные разряды, которые возникают в неплотностях в основном между стыками лент. Технологичность жидкой клейкой системы обеспечивается путем подбора отвердителей, катализаторов, пластификаторов, определяющих направление и скорость реакций образования пространственного полимера, а также установление оптимальных температур и режимов процесса формирования полимерной основы.

Переход полимеризационной основы в пространственный полимер за счет различных функциональных групп связан с выделением меньшего количества тепла, меньшей усадкой, а это предопределяет возможность создания высокопроизводительных процессов, резко упрощается технологическое оформление и снижаются энергозатраты. Наиболее перспективными с точки зрения химической технологии являются полимерные основы с различными компонентами, в которых содержатся функциональные группы: эпоксидные, полиэфирные, карбоксилатные, гидроксильные, нитриловые, винильные, акриловые и другие, которые могут находиться в основной цепи, в боковых ответвлениях, на концах цепи, расположенных хаотически, регулярно или группами.

С точки зрения химической технологии отверждения реакционно способных функциональных групп следует рассматривать только полимеризационно способные группы, которые, отверждаясь, образуют пространственные связи без выделения побочных продуктов. К этой группе следует отнести функциональные группы: олигоэфирэпоксиды, ненредельные олигоэфиры, олигонитрилы, уретанообразующие олигоэфиры и др. Оптимальный комплекс физико-механических, диэлектрических свойств и (что особенно важно) способность к гашению частичных разрядов не могут быть научно обоснованы только на основе химической технологии.

Здесь необходимо обратиться к модели физического поведения пространственных полимерных сеток в конструкции изоляции при воздействии различных факторов, особенно при длительном воздействии электрического поля промышленной частоты с $E = 10$ МВ/м. К настоящему времени исследовано большое количество композиций полимерной основы, которые были применены для конструкции эластонитовой изоляции. При введении в полимерную основу специальных соединений достигался срок жизни конструкции эластонитовой изоляции (при E промышленной частоты, равной 10 МВ/м) 15 000 ч. Без введения в полимеризационную основу этих соединений срок жизни при тех же условиях составлял не более 4000 ч.

Наложение липких эластонитовых лент встык на проводник до заданной толщины позволяет получить достаточно монолитную конструкцию изоляции без применения вакуумирования, пропитки, обжатия, гидростатической опрессовки, исключается также и трудоемкая операция снятия защитной ленты вместе с битумной массой. Для липких эластонитовых лент снимаются ограничения по получению за один прием толщины изоляции в конструкции более 3 мм на одну сторону. Схема конструкции высоковольтной изоляции представлена на рис. 3. В слоях склеивающего состава, в основном на стыке лент, могут образовываться незначительные газовые включения, в которых могут возникать частичные разряды, однако на поверхности газового включения из-за частичных разрядов снижается сопротивление скрепляющего состава, что приводит к затуханию частичных разрядов. Гашение частичных разрядов приводит к повышению срока жизни изоляции для конструкции типа эластонит.

Для случая слюдинитовых лент с нерегулярным слюдяным барьером, например слюдотерма, монотерма, монолита, в которых имеются большие газовые включения и отсутствует сплошной слюдяной барьер, развитие частичных разрядов приводит к закорачиванию слоев изоляции и как следствие этого — к повышению емкости. Эти соображения подтверждаются экспериментальными исследованиями натурных макетов различных вариантов изоляции с толщиной одной стороны 1 мм при $E = 10$ МВ/м, данные экспериментов приведены на рис. 4. По оси абсцисс указано время электрического старения при $E = 10$ МВ/м. У изоляции монотерм (график *1*) первые модели начали пробиваться через 500 ч, десятая модель пробилась через 1800 ч. Емкость этой модели изоляции за 1500 ч работы увеличилась в 4 раза (график *2*). Модели изоляции слюдотерм начали пробиваться через 1500 ч, десятая модель пробилась через 4500 ч (график *3*). Емкость моделей слюдотерм за 4000 ч работы увеличилась в 4 раза (график *4*). Конструкции изоляции эластонит начали пробиваться через 3000 ч, десятая модель пробилась через 10 000 ч. Емкость моделей этой изоляции за 8000 ч увеличилась вдвое.

Анализ экспериментальных данных по электрическому старению доказывает, что наличие сквозных пор в изоляции типа монотерм и слюдотерм приводит к «закорачиванию» воздушных полостей и возрастанию емкости модели. Для новой высоковольтной конструкции изоляции на основе эластонита, в которой имеются не-

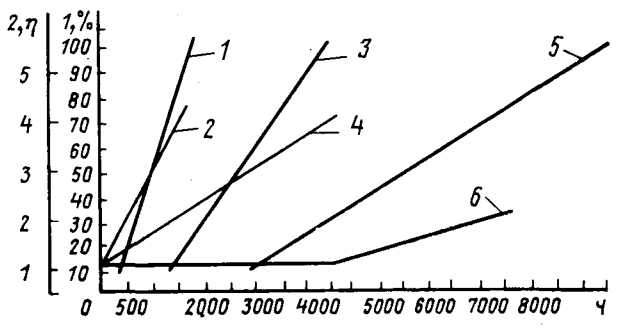


Рис. 4. Характеристики электрического старения моделей конструкций высоковольтной изоляции и изменения ее емкости от времени старения

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

значительные замкнутые поры, процесс «закорачивания» пор значительно замедлен.

Выводы. 1. Разработана новая высоковольтная конструкция изоляции на основе изоляционных лент с регулярным слюдяным барьером и скрепляющим составом, обладающим способностью гасить возникающие в порах частичные разряды; эта изоляция имеет срок жизни, значительно превосходящий этот показатель для традиционных конструкций изоляции, — слюдотерм, монотерм, монолит.

2. Электрическое старение конструкций высоковольтной изоляции при напряженности электрического поля 10 МВ/м связано с развитием частичных разрядов и «закорачиванием» газовых пор, что приводит к значительному повышению емкости.

3. Исследование новых вариантов конструкций высоковольтных изоляций из изоляционных лент с регулярным слюдяным барьером и скрепляющим составом, способным гасить частичные разряды, следует считать перспективным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **А. с. 562010 (СССР).** Способ изготовления электроизоляционного материала/Л. Т. Пономарев, Н. В. Пономарева, Ю. Н. Табунцов. — Опубл. в Б. И., 1977, № 22.

2. **А. с. 482126 (СССР).** Электроизоляционный материал/Л. Т. Пономарев, Н. В. Пономарева, Л. И. Белкина и др.— Опубл. в Б. И., 1976, № 29.

3. **Глебов И. А., Данилевич Я. Б., Пономарев Л. Т.** Новая система изоляции эластонит. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1981, № 2, с. 150—155.

[06.02.85]

УДК 538.311.001.24

Определение электромагнитных сил в нелинейной магнитной системе по натяжениям

ИВАНОВ-СМОЛЕНСКИЙ А. В., доктор техн. наук

Москва

Введение. Электромагнитная сила или момент, действующие на выделенную часть нелинейной системы V_1 (рис. 1), могут быть выражены не только через изменение магнитной энергии системы при малом перемещении, но и непосредственно через объемную плотность электромагнитных сил $\bar{f}$ или через натяжения $\bar{T}_n$ в магнитном поле.

Электромагнитная сила (ЭМС), действующая на выделенную часть системы в объеме V_1, охваченную поверхностью S_{12}, может быть найдена суммированием элементарных сил

$$d\bar{F}=\bar{f}dV \quad \text{или} \quad d\bar{F}=\bar{T}_n\,dS,$$

приложенных к элементам dV объема V_1 или к элементам dS поверхности S_{12}:

$$\bar{F}=\int\limits_{V_1}\bar{f}\,dV=\int\limits_{S_{12}}\bar{T}_n\,dS. \qquad (1)$$

Соответственно электромагнитный момент относительно точки 0 (начала координат) находится путем суммирования элементарных моментов

$$d\bar{N}=[\bar{r}\,\bar{f}]\,dV \quad \text{или} \quad d\bar{N}=[\bar{r}\,\bar{T}_n]\,dS,$$

приложенных к элементам объема V_1 или поверхности S_{12}:

$$\bar{N}=\int\limits_{V_1}[\bar{r}\,\bar{f}]\,dV=\int\limits_{S_{12}}[\bar{r}\,\bar{T}_n]\,dS. \qquad (2)$$

В статье рассматривается определение ЭМС или моментов только по натяжениям $\bar{T}_n$; определению ЭМС или моментов по объемным плотностям этих сил будет посвящена отдельная статья.

Общие свойства натяжений в поле сил. Сила натяжения $d\bar{F}$, действующая извне на элемент dS поверхности (рис. 1), пропорциональна значению dS и зависит не только от положения этого элемента, но и от его ориентации; иными словами, она является не только функцией координат точки (x, y, z), но и функцией направления внешней нормали $\bar{n}$ к элементу dS.

Обозначим поверхностную плотность силы натяжения, называемую натяжением, через $\bar{T}_n$. Будем понимать под натяжением силу натяжения, действующую извне на единицу поверхности, внешняя нормаль к которой направлена по $\bar{n}$:

$$\bar{T}_n=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\bar{F}}{\Delta S}, \qquad (3)$$

где $\bar{n}$ — внешняя нормаль к элементу ΔS.

Вектор натяжения в поле сил может быть выражен через компоненты T_{nx}, T_{ny}, T_{nz} по осям выбранной системы координат:

$$\bar{T}_n=\bar{q}_xT_{nx}+\bar{q}_yT_{ny}+\bar{q}_zT_{nz}. \qquad (4)$$

Значение и направление вектора натяжения $\bar{T}_n$ в данной точке области поля зависят от ориентации площадки dS, на которую он действует. Обозначим через $\bar{T}_x$, $\bar{T}_y$ и $\bar{T}_z$ векторы натяжений на площадках ΔS_x, ΔS_y, ΔS_z, внешние нормали к которым направлены соответственно по $\bar{q}_x$, $\bar{q}_y$ и $\bar{q}_z$. Компоненты вектора $\bar{T}_x$ по осям координат x, y и z обозначим как T_{xx}, T_{yx} и T_{zx}, компоненты вектора $\bar{T}_y$ — T_{xy}, T_{yy} и T_{zy} и т. д., тогда

$$\left.\begin{aligned}\bar{T}_x&=\bar{q}_xT_{xx}+\bar{q}_yT_{yx}+\bar{q}_zT_{zx};\\ \bar{T}_y&=\bar{q}_xT_{xy}+\bar{q}_yT_{yy}+\bar{q}_zT_{zy};\\ \bar{T}_z&=\bar{q}_xT_{xz}+\bar{q}_yT_{yz}+\bar{q}_zT_{zz},\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где, например, T_{yz} является слагающей по оси y вектора натяжения $\bar{T}_z$, действующего на площадку ΔS_z, нормаль к которой $\bar{q}_z$ направлена по оси z.

Исходя из равновесия сил, действующих извне на грани элементарного тетраэдра, основанием которого является элемент ΔS, а боковые грани нормальны к одной из координатных осей, нетрудно получить следующие выражения для компонент вектора $\bar{T}_n$ по (4):

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

$$\left.\begin{aligned}
&T_{nx}=T_{xx}\cos(\bar{n},\bar{q}_x)+T_{xy}\cos(\bar{n},\bar{q}_y)+\\
&+T_{xz}\cos(\bar{n},\bar{q}_z);\\
&T_{ny}=T_{yx}\cos(\bar{n},\bar{q}_x)+T_{yy}\cos(\bar{n},\bar{q}_y)+\\
&+T_{yz}\cos(\bar{n},\bar{q}_z);\\
&T_{nz}=T_{zx}\cos(\bar{n},\bar{q}_x)+T_{zy}\cos(\bar{n},\bar{q}_y)+\\
&T_{zz}\cos(\bar{n},\bar{q}_z).
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Девять величин T_{xx}, T_{xy} и т. д. вполне характеризуют собой систему натяжений в данной точке области поля. Значениями этих величин определяется вектор натяжения, действующий на произвольно ориентированную площадку, нормаль к которой направлена по $\bar{n}$. Таким образом, вектор $\bar{T}_n$ по своей природе является тензором (второго ранга). Величины T_{xx}, T_{xy} и т. д. называются *компонентами тензора натяжений*, а их совокупность — *тензором натяжений*, обозначаемым

$$T_{ik}(k,\ i\in x,\ y,\ z). \quad (7)$$

С помощью (1) и (4) можно найти выражения для отдельных составляющих силы $\bar{F}$ по компонентам T_n и $\bar{f}$. Например, для составляющей силы $\bar{F}$ по оси x получим:

$$F_x=\int\limits_{V_1} f_x dV=\oint\limits_{S_{12}} T_{nx}dS. \quad (8)$$

Как показано в [3], момент $\bar{N}$ правильно выражается через натяжения $\bar{T}_n$ по (3) только при условии, если $T_{xy}=T_{yx}$, $T_{yz}=T_{zy}$, $T_{zx}=T_{xz}$. А в этом случае T_{nx} по (6) можно рассматривать как нормальную составляющую $(\bar{T}_x)_n$ вектора $\bar{T}_x$ по (5), поскольку

$$T_{nx}=T_{xx}\cos(\bar{n},\bar{q}_x)+T_{xy}\cos(\bar{n},\bar{q}_y)+$$
$$+T_{xz}\cos(\bar{n},\bar{q}_z)=T_{xx}\cos(\bar{n},\bar{q}_x)+T_{yx}\cos(\bar{n},\bar{q}_y)+$$
$$+T_{zx}\cos(\bar{n},\bar{q}_z)=(\bar{T}_x)_n=\bar{T}_x\bar{n}.$$

Это в свою очередь позволит применить к интегралу по поверхности S_{12} в (8) теорему Гаусса и заменить его интегралом по объему V_1:

$$F_x=\oint\limits_{S_{12}}(\bar{T}_x)_n\,dS=\oint\limits_{S_{12}}\bar{T}_x d\bar{S}=\int\limits_{V_1}\operatorname{div}\bar{T}_x dV.$$

Сравнивая интегралы по объему V_1 в последнем выражении и в (8), приходим к уравнениям, связывающим составляющие объемной плотности ЭМС с компонентами тензора натяжений:

$$f_x=\operatorname{div}\bar{T}_x=\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{xz}}{\partial z}; \quad (9)$$

аналогично

$$f_y=\operatorname{div}\bar{T}_y=\frac{\partial T_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{yz}}{\partial z}\ \text{и т. д.},$$

поэтому объемная плотность ЭМС

$$\bar{f}=\bar{q}_x f_x+\bar{q}_y f_y+\bar{q}_z f_z$$

выражается через тензор натяжения с помощью операции, называемой дивергенцией тензора натяжений:

$$\bar{f}=\operatorname{div}T_{ik}=\Sigma\,\bar{q}_k\operatorname{div}\bar{T}_k, \quad (10)$$

где

$$k,\ i\in x,\ y,\ z;\ \operatorname{div}T_k\ \text{по (9)}.$$

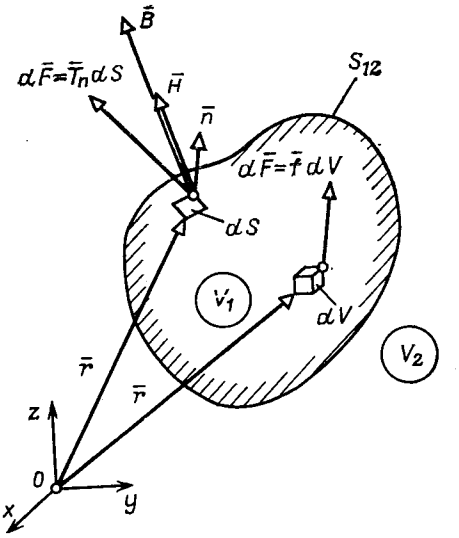


Рис. 1. Определение электромагнитной силы $\bar{F}$, действующей на объем V_1, по объемной плотности ЭМС $\bar{f}$ и по натяжению $\bar{T}_n$

Натяжение в магнитном поле (*состояние вопроса*). Понятие *сила натяжения* впервые было введено в механике применительно к явлениям к деформированных средах. Силами натяжения называются силы упругости, действующие извне на наружную поверхность участка деформированной среды. Поверхностная плотность сил натяжения в механике называется *напряжением*. В механистической теории электромагнитного поля, искавшей причины электрических явлений в упругих деформациях гипотетической среды — эфира, электромагнитные силы, действующие на участок среды, сводились к силам натяжения в деформированном эфире. Причем, поскольку термин напряжение в электротехнике имеет иной смысл, поверхностная плотность сил натяжения была названа натяжением.

Несмотря на то, что механистическая теория поля, использующая понятие эфира, в целом оказалась несостоятельной, выражение электромагнитных сил через силы натяжения всегда возможно и весьма целесообразно. Объясняется это тем, что вычисление поверхностных интегралов в (1) и (2), в которые входят натяжения, во всех случаях много проще, чем объемных.

Впервые натяжение в магнитном поле было выражено через величины этого поля в одной из ранних работ Максвелла [1]. В этой работе [1, с. 117] компоненты тензора натяжений по (7) представляются в современных обозначениях в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}
&T_{xx}=\mu_r\mu_0H_x^2-p_1;\quad T_{yy}=\mu_r\mu_0H_y^2-p_1;\\
&T_{xy}=\mu_r\mu_0H_xH_y;\quad T_{xz}=\mu_r\mu_0H_xH_z.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

При этом смысл слагаемого p_1 самим Максвеллом полностью не разъясняется, но в примечаниях к этой работе [1, с. 205] Больцман [1], исходя из выражения для объемной плотности электромагнитной силы, выведенного Максвеллом, дает следующее значение этого слагаемого:

$$p_1=0.5\,\mu_r\mu_0H^2+\text{const}. \quad (12)$$

[1] Австрийский ученый Л. Больцман (1844—1906 гг.) — один из крупнейших физиков XIX в., автор «Лекций по максвелловской теории электричества и света», изданных в 1891—1893 гг., в которых активно популяризуются учения Фарадея и Максвелла об электричестве и магнетизме.

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

С учетом (12), полагая в нем const = 0, легко получить из (11) [1, с. 647, примечания редактора и переводчика] следующее выражение для тензора натяжения в магнитном поле:

$$T_{ik} = \mu_r\mu_0 (H_i H_k - 0{,}5\, H^2 \delta_{ik}), \qquad (13)$$

где $i, k \in x, y, z$; $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$;

$\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$.

С помощью (4) и (6) можно показать, что тензору натяжения по (13) соответствует вектор натяжения

$$\overline{T}_n = \mu_r\mu_0 (\overline{H} H_n - 0{,}5\, H^2 \overline{n}). \qquad (14)$$

В той же работе [1] Максвелл использует (13) для вывода формулы объемной плотности ЭМС (точнее, ее составляющих f_x и др.). Исходя из (10), он получает для f_x выражение, которое содержит, если учесть (12), как член $[\overline{J}\,\overline{B}]_x$, так и член $-0{,}5\ H^2\, \mu_0 \mathrm{grad}_x \mu_r$, что вполне соответствует современным представлениям об объемных силах в магнетиках [1, с. 648, примечания переводчика и редактора].

Этим была подтверждена правильность выражений для тензора натяжения в магнетике (13) и соответствующего ему вектора натяжения (14), которым присвоено имя гениального ученого.

Однако формула (13) для компонент тензора натяжения была получена Максвеллом на основании рассуждений, опирающихся на аналогию между свойствами «магнитной жидкости» (магнитного поля) и реальной жидкости. Прямое математическое доказательство формулы (13) Максвеллом не было дано, поэтому в дальнейшем к выводу формулы, связывающей тензор натяжения с величинами магнитного поля, обращались многие ученые, причем всеми ими использовался в принципе одинаковый путь. Натяжение определялось в соответствии с (10) как тензор T_{ik}, дивергенция которого ($\mathrm{div}\, T_{ik}$) равна объемной плотности электромагнитной силы $\overline{f}$. Определить тензор T_{ik} таким путем можно, разумеется, только с точностью до тензора R_{ik}, дивергенция которого не отличается от нуля ($\mathrm{div}\, R_{ik} = 0$). Причем результат вывода зависит от того, насколько правильно записано исходное выражение для объемной плотности электромагнитной силы $\overline{f}$. В тех случаях, когда исходное выражение для объемной плотности ЭМС в магнетике $\overline{f}$ в векторной форме было записано правильно, т. е. таким же образом, как и в упомянутой работе Максвелла [1, с. 117—124]:

$$\overline{f} = [\overline{J}\,\overline{B}] - 0{,}5\, H^2\, \mathrm{grad}\, (\mu_r\mu_0), \qquad (15)$$

полученная для тензора натяжения в магнетике формула также полностью совпадала с формулой Максвелла (13). Разумеется, такое же полное совпадение формул для натяжения наблюдалось и в том случае, если натяжение определялось для магнетика с постоянной магнитной проницаемостью $\mu_r = \mathrm{const}$, когда $\mathrm{grad}\, (\mu_r\mu_0) = 0$ и $\overline{f} = [\overline{J}\,\overline{B}]$.

Такие полностью совпадающие с (13) формулы для тензора натяжения приведены, например, в [5—8] *. Наоборот, в тех случаях, когда исходное выражение для объемной плотности ЭМС в магнетике записывается не так, как в (15), найденные для тензора натяжения формулы не совпадают с (13). Такого рода формула для тензора натяжения в магнитном поле получена, к сожалению, в глубоких и безупречных во всем остальном работах Поливанова [9—11], который исходит из справедливой в некоторых частных случаях формулы для объемной плотности ЭМС [9, с. 134, формулы (3.94), (3.96)],

$$\overline{f} = [\overline{J}\,\overline{B}] + \mu_0 \overline{M}\, \mathrm{grad}\, \overline{H}, \qquad (15а)$$

где M — намагниченность, предложенной в более поздней работе Максвелла [2 или 1, с. 514, формула (4)] и совпадающей с формулой Эйнштейна — Лауба [4, 3, с. 126—134].

Объемная плотность ЭМС $\overline{f}$, найденная по (15а), существенно отличается от плотности, найденной по правильной формуле (15), которая получена, как уже говорилось, также Максвеллом, выведена в [5, формула (83.3)] и подтверждена многочисленными экспериментальными данными. В связи с этим и тензор натяжения в магнетике, полученный Поливановым исходя из (15а), отличается от тензора натяжения Максвелла по (13) отсутствием множителя μ_r во втором члене и совпадает с ним только в неполяризуемой среде, т. е. при $\mu_r = 1$.

Завышенное в μ_r раз значение вектора натяжения $\overline{T}_n$ в магнетике (по сравнению с (14) при той же индукции) находит Львов [14, с. 61, формула (19)], [15, формула (11)], используя в этих работах модель магнетика, в которой правильно эквивалентируется только индукция магнитного поля в самом магнетике и в окружающем пространстве и отсутствует эквивалентность в отношении напряженности, энергии магнитного поля, объемных и поверхностных сил внутри магнетика. Поэтому вектор натяжения в магнетике, найденный Львовым, совпадает с вектором натяжения Максвелла только в неполяризованной среде, т. е. при $\mu_r = 1$, где он определяется по [15, формула (29)].

Ошибочные формулы для натяжений в магнетике получены и в статье [22, формулы (5), (6) и др.]. При выводе этих формул не только используется (так же как в [14, 15]) модель магнетика, в которой отсутствует эквивалентность в отношении поверхностных и объемных сил внутри магнетика, но и допускается несколько других ошибок в рассуждениях.

Явно ошибочны формулы для вектора натяжения $\overline{T}_n$ в нелинейном ферромагнетике, полученные в статьях [16, формулы (16), (17), (18), (20)] и [17, формула (8)]. При выводе этих формул допущен ряд неточностей.

Для определения объемной плотности ЭМС в магнетике при $\overline{J} = 0$ используется ошибочная формула из [5, с. 301, формула (66.3)],

$$\overline{f} = \overline{M}\, \nabla \cdot B + [\overline{M}\, \mathrm{rot}\, \overline{B}] = \mathrm{grad}(\overline{M}\,\overline{B}) = \overline{M}\, \mathrm{grad}\, \overline{B},$$

которая существенно отличается как от справедливой в некоторых частных случаях формулы (15а), так и от единственно правильной в общем случае формулы (15) и, очевидно по этой причине, не применяется самим Таммом во всех дальнейших выкладках и в том числе при выводе формулы для натяжений [5, с. 391—394, § 84].

Энергетические соотношения типа [16, формула (13)] вычисляются с учетом нелинейности ферромагнетика без замены его линейной моделью, которая совершенно необходима для получения правильного результата [18, 20].

* При сопоставлении формул для натяжений, приведенных у различных авторов, не учитываются стрикционные составляющие тензора натяжения, которые не оказывают влияния на результирующую силу или момент, действующие на некоторый конечный объем магнетика.

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Обращаясь к работам [12, 13, 14, 18, 19 и др.], в которых вектор натяжения $\overline{T}_n$ практически используется для расчета электромагнитных сил в магнитных системах по (1) или (2), приходится констатировать, что эти работы немногочисленны, а круг задач, рассмотренных в них, весьма ограничен. Почти во всех работах вектор натяжения применяется только для определения силы, действующей на ферромагнитное тело целиком, когда охватывающая это тело поверхность S_{12} располагается в немагнитной среде с $\mu_r=1$, и отмеченное выше различие между формулами для тензора натяжений исчезает. Только в [19] тензор натяжения Максвелла по (13) используется для определения силы, действующей на часть ферромагнитного тела. В этом случае поверхность S_{12}, охватывающая выделенную часть ферромагнитного тела (рис. 1), частично располагается внутри ферромагнетика, где $\mu_r \neq 1$, и правильное значение результирующей силы может быть получено, если определять вектор натяжения, так как это сделано в [19] по (13).

Столь ограниченное распространение в принципе весьма эффективного метода расчета электромагнитных сил по натяжениям объясняется, видимо, двумя причинами. Во-первых, отсутствием единой точки зрения по вопросу вычисления натяжения в магнетиках, о чем уже говорилось, во-вторых, неосторожными высказываниями о возможности вычисления ЭМС с помощью натяжений, которые были сделаны весьма авторитетными учеными. Так, например, в [5, с. 394] утверждается, что «сведение объемных сил к натяжениям позволяет...определить равнодействующую и результирующий момент сил, действующих на ферромагнетики (но не распределение сил по объему ферромагнетика)».

В настоящей статье, написанной с целью облегчения дальнейшего распространения метода расчета сил по натяжениям, приводится новый вывод формул для вектора и тензора натяжения в магнитном поле, основанный на законе сохранения энергии. Этот вывод подтверждает правильность формулы Максвелла (13), (14) и показывает, что по натяжению, если оно найдено по (13), (14), может быть выражена не только ЭМС, действующая на магнитно-нелинейное тело в целом, но и ЭМС, действующая на любую его часть. Этим доказывается несправедливость упомянутого утверждения [5], сдерживающего распространение метода.

Вывод формул для натяжения в магнитном поле. Как следует из (1), электромагнитная сила $\overline{F}$, действующая на объем V_1 в магнитном поле, может быть найдена суммированием элементарных сил натяжения $\overline{T}_n dS$, приложенных к элементам поверхности S, ограничивающей этот объем. Соответственно работа $\overline{F}\Delta\overline{l}$, совершаемая электромагнитной силой $\overline{F}$ при перемещении объема V_1 в магнитном поле на расстояние $\Delta\overline{l}$, может быть представлена в виде суммы работ $\overline{T}_n \Delta\overline{l} dS$, совершаемых элементарными силами натяжения при перемещении элементов поверхности S_{12}:

$$\overline{F}\Delta\overline{l}=\Delta\overline{l}\oint\limits_{S_{12}} \overline{T}_n dS=\oint\limits_{S_{12}} (\overline{T}_n \Delta\overline{l})\, dS. \qquad (16)$$

Предположим, что перемещение объема V_1 происходит вместе с находящимися в нем средами, магнитным полем и токами, и при этом поддерживаются постоянными магнитные потоки во всех трубках магнитного поля системы ($\Phi_т$=const), во всех элементарных ветвях системы ($\Phi_э$=const) и за счет этого во всех ее ветвях (Φ_{BS}=const). При перемещении объема V_1 в этих условиях (Φ_{BS}=const, $\Phi_т$=const) работа электромагнитных сил совершается за счет уменьшения энергии магнитного поля системы [20], которое при этом происходит:

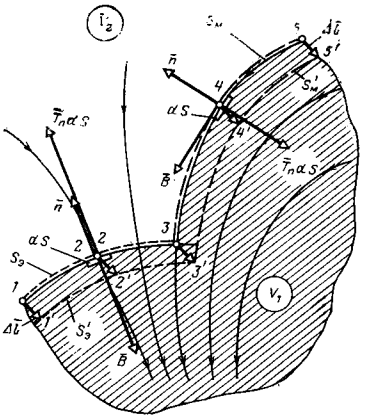


Рис. 2. К выводу формул для вектора натяжения $\overline{T}_n$ на магнитных и эквипотенциальных поверхностях в магнитном поле

$$\overline{F}\Delta\overline{l}=-\Delta W \qquad (17)$$

($\Phi_э$=const).

Как показано в [20], в случае, когда поверхность S_{12}, ограничивающая объем V_1 (рис. 2), нигде не совпадает[2] с поверхностями разрыва магнитной проницаемости (например, с границей ферромагнитного тела) и состоит только из участков магнитных поверхностей ($S_м$) и из участков эквипотенциальных поверхностей ($S_э$), т. е. $S_{12}=S_м+S_э$, изменение энергии ΔW при перемещении $\Delta\overline{l}$ легко выражается по [20] через величины магнитного поля (на рис. 2 участки магнитных и эквипотенциальных поверхностей после перемещения обозначены соответственно $S'_м$ и $S'_э$). Записав упомянутое уравнение [20, уравнение (35)] несколько в иной форме:

$$\Delta W=\int\limits_{S_м} dW_м+\int\limits_{S_э} dW_э \qquad (18)$$

($\Phi_э$=const),

где

$$dW_м=\frac{B^2}{2\mu_0\mu}\overline{n}\Delta\overline{l}dS;$$

$$dW_э=-\frac{B^2}{2\mu_0\mu}\overline{n}\Delta\overline{l}dS,$$

можно утверждать, что в этом случае изменение энергии ΔW при перемещении на $\Delta\overline{l}$ объема V_1 складывается из приращений энергии $dW_м$, связанных с перемещением на $\Delta\overline{l}$ элементов dS участков магнитных поверхностей $S_м$, и из приращений энергии $dW_э$, связанных с перемещением на $\Delta\overline{l}$ элементов dS участков эквипотенциальных поверхностей.

В этом случае и работа электромагнитных сил по (16) может быть представлена в виде суммы работ при перемещении магнитных и эквипотенциальных участков ограничивающей поверхности S_{12}:

$$\overline{F}\Delta\overline{l}=\int\limits_{S_м} (\overline{T}_n\Delta\overline{l})\, dS+\int\limits_{S_э} (\overline{T}_n\Delta\overline{l})\, dS. \qquad (19)$$

[2] Поверхность S_{12} может пересекаться с поверхностью разрыва магнитной проницаемости.

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

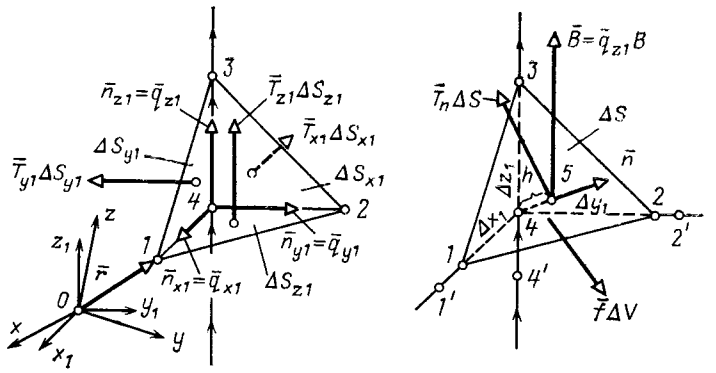


Рис. 3. К выводу формулы для вектора натяжения на произвольно ориентированной в магнитном поле поверхности

Выразив ΔW по (18) и $\bar{F}\Delta\bar{l}$ по (19), можно заметить, что они будут удовлетворять (17) только в том случае, если работа $\bar{T}_n\Delta\bar{l}dS$, совершаемая элементарной силой натяжения $\bar{T}_n dS$ при перемещении элемента dS магнитной или эквипотенциальной поверхности, будет равна взятому со знаком минус приращению энергии ($dW_м$ или $dW_э$), связанному с перемещением этого элемента, т. е. для элемента магнитной поверхности

$$\bar{T}_n\Delta\bar{l}dS = -dW_м$$

и для элемента эквипотенциальной поверхности

$$\bar{T}_n\Delta\bar{q}dS = -dW_э,$$

откуда, выражая $dW_м$ по (18), найдем натяжение $\bar{T}_n$, действующее на элемент dS магнитной поверхности со стороны нормали $\bar{n}$ к этому элементу, и увидим, что при $\bar{n}\perp\bar{B}$ (см. рис. 2) $\bar{T}_n$ направлено в противоположную сторону по отношению к $\bar{n}$:

$$\bar{T}_n = -\frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}\bar{n}. \qquad (20)$$

Соответственно выражая $dW_э$ по (18), найдем натяжение $\bar{T}_n$, действующее на элемент dS эквипотенциальной поверхности со стороны нормали $\bar{n}$ к этому элементу, и убедимся, что при $\bar{n}\,||\,\bar{B}$ (см. рис. 2) $\bar{T}_n$ направлено в сторону этой нормали $\bar{n}$:

$$\bar{T}_n = -\frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}\bar{n}. \qquad (21)$$

Напомним, что мы условились понимать орт $\bar{n}$ как внешнюю нормаль к поверхности S_{12}, направленную в противоположную сторону по отношению к рассматриваемому объему V_1. При таком выборе направления $\bar{n}$, как вытекает из (20) и (21), натяжение, действующее на элемент магнитного участка $S_м$ поверхности S_{12}, всегда направлено в сторону рассматриваемого объема V_1, а натяжение, действующее на элемент эквипотенциального участка $S_э$ поверхности S_{12}, наоборот, всегда направлено в противоположную сторону по отношению к рассматриваемому объему V_1.

На рис. 2 зона рассматриваемого объема V_1, т. е. объема, к которому приложена определяемая сила, заштрихована.

Полученные здесь частные выражения для натяжения (20), (21) пригодны только при определенной ориентации поверхностей в области поля, когда эти поверхности направлены вдоль линии поля или нормальны к ним. От этих выражений можно перейти к общим выражениям для определения натяжений на произвольных поверхностях, элементы которых dS любым образом ориентированы в пространстве.

С этой целью выделим на произвольной поверхности S_{12}, охватывающей объем V_1, элемент ΔS с бесконечно малыми размерами, имеющий форму треугольника *123* (рис. 3). Построим этот элемент в окрестности одной из точек на поверхности S_{12}, например, в окрестности точки *3*, где внешняя (по отношению к охватываемому объему) нормаль к поверхности направлена по орту $\bar{n}$.

Предположим, что магнитное поле в области известно и в точке *3* характеризуется вектором индукции $\bar{B}$. Проведем через точку *3* параллельно $\bar{B}$ линию *34'*, которая представляет собой касательную к линии поля и на участке *34'* располагается внутри охватываемого объема. Через точку *4* на этой линии, расположенную на бесконечно малом расстоянии от точки *3*, проведем две прямые *41'* и *42'*, ортогональные как между собой, так и к линии *34'*. Пересечение этих линий с поверхностью S_{12} в точках *1* и *2* определит положение соответствующих вершин выделенного нами треугольного элемента ΔS (или *321*) на поверхности S_{12}.

Чтобы выразить натяжение на этом произвольно ориентированном элементе ΔS через натяжения на взаимно ортогональных магнитных и эквипотенциальных площадках, рассмотрим равновесие ЭМС, действующих на элементарный тетраэдр *1234*, построенный на рис. 3, основанием которого является элемент ΔS. Рассмотрение проведем в системе координат x_1, y_1, z_1, ось z_1 которой параллельна магнитной индукции $\bar{B}$ (в месте расположения элемента ΔS) и ребру *34* тетраэдра, а оси x_1 и y_1 нормальны соответственно к его граням *234* и *143*. Направления осей x_1, y_1, z_1 выберем таким образом, чтобы их орты совпадали с направлениями внешних нормалей к соответствующим граням тетраэдра: на грани ΔS_{x1} (*234*) $\bar{n}_{x1}=\bar{q}_{x1}$; на грани ΔS_{y1} (*143*) $\bar{n}_{y1}=\bar{q}_{y1}$; на грани ΔS_{z1} (*124*) $\bar{n}_{z1}=\bar{q}_{z1}$. Напомним, что нормали $\bar{n}$, $\bar{n}_{x1}$, $\bar{n}_{y1}$, $\bar{n}_{z1}$ являются внешними нормалями по отношения к объему V_1, охватываемому поверхностью S_{12} и ее элементами. Причем элементы ΔS_{x1}, ΔS_{y1}, ΔS_{z1} со стороны нормалей $\bar{n}_{x1}$, $\bar{n}_{y1}$, $\bar{n}_{z1}$ также могут рассматриваться как элементы охватывающей поверхности, поскольку в совокупности они заменяют собой ее элемент ΔS.

В соответствии с введенными выше обозначениями на внешнюю поверхность элемента ΔS с нормалью $\bar{n}$, являющегося основанием тетраэдра, действует подлежащая определению сила натяжения $\bar{T}_n\Delta S$. Соответственно на поверхности его боковых граней ΔS_{x1}, ΔS_{y1}, ΔS_{z1} со стороны нормалей $\bar{n}_{x1}=\bar{q}_{x1}$, $\bar{n}_{y1}=\bar{q}_{y1}$, $\bar{n}_{z1}=\bar{q}_{z1}$ действуют силы натяжения $\bar{T}_{x1}\Delta S_{x1}$, $\bar{T}_{y1}\Delta S_{y1}$, $\bar{T}_{z1}\Delta S_{z1}$.

Если бы система координат x_1, y_1, z_1 была произвольным образом ориентирована в пространстве, то каждое из натяжений $\bar{T}_{x1}$, $\bar{T}_{y1}$, $\bar{T}_{z1}$, как следует из (5), содержало бы составляющие по ортам $\bar{q}_{x1}$, $\bar{q}_{y1}$, $\bar{q}_{z1}$. При выбранной здесь ориентации системы координат, когда боковые грани тетраэдра ΔS_{x1}, ΔS_{y1} являются магнитными поверхностями, а боковая грань ΔS_{z1}— эквипотенциальной поверхностью, натяжения $\bar{T}_{x1}$, $\bar{T}_{y1}$, $\bar{T}_{z1}$ могут быть найдены с помощью (20), (21) и, как видно из этих уравнений, будут содержать только составляющие, нормаль-

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

ные к соответствующим граням. Для грани $\Delta\overline{S}_{x1}$ с нормалью $\overline{n}_{x1}=\overline{q}_{x1}$ с помощью (20) получим

$$\overline{T}_{x1}=\overline{q}_{x1}T_{xx1}+\overline{q}_{y1}T_{yx1}+\overline{q}_{z1}T_{zx1}=-\frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}\overline{q}_{x1},$$

откуда

$$T_{xx1}=-\frac{B^2}{2\mu_0\mu_r};\qquad T_{yx1}=T_{zx1}=0.$$

Для грани ΔS_{y1} с нормалью $\overline{n}_{y1}=\overline{q}_{y1}$ с помощью того же уравнения получим:

$$\overline{T}_{y1}=\overline{q}_{x1}T_{xy1}+\overline{q}_{y1}T_{yy1}+\overline{q}_{z1}T_{zy1}=-\frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}\overline{q}_{y1},$$

откуда

$$T_{yy1}=-\frac{B^2}{2\mu_0\mu_r};\quad T_{xy1}=T_{zy1}=0.$$

Для грани ΔS_{z1} с нормалью $\overline{n}_{z1}=\overline{q}_{z1}$ с помощью (21) получим:

$$\overline{T}_{z1}=\overline{q}_{x1}T_{xz1}+\overline{q}_{y1}T_{yz1}+\overline{q}_{z1}T_{zz1}=\frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}\overline{q}_{z1},$$

откуда

$$T_{zz1}=\frac{B^2}{2\mu_0\mu_r};\quad T_{xz1}=T_{yz1}=0.$$

Рассматривая грани ΔS_{x1}, ΔS_{y1}, ΔS_{z1} в совокупности как элемент охватывающей поверхности S_{12}, можно утверждать, что сила натяжения $\overline{T}_n\Delta S$, приложенная к основанию тетраэдра ΔS, отличается от силы натяжения, приложенной к его боковым граням: $\overline{T}_{x1}\Delta S_{x1}+\overline{T}_{y1}\Delta S_{y1}+\overline{T}_{z1}\Delta S_{z1}$, на величину объемной силы $\overline{f}\Delta V$, приложенной к внутреннему объему тетраэдра $\Delta V=\frac{1}{3}h\Delta S$, т. е.

$$\overline{T}_n\Delta S=\overline{T}_{x1}\Delta S_{x1}+\overline{T}_{y1}\Delta S_{y1}+\overline{T}_{z1}\Delta S_{z1}+\overline{f}\Delta V.$$

Разделим правую и левую части полученного уравнения на ΔS, учтем, что

$$\frac{\Delta S_{x1}}{\Delta S}=\cos(\overline{n},\overline{q}_{x1});\quad \frac{\Delta S_{y1}}{\Delta S}=\cos(\overline{n},\overline{q}_{y1});$$

$$\frac{\Delta S_{z1}}{\Delta S}=\cos(\overline{n},\overline{q}_{z1});\quad \frac{\Delta V}{\Delta S}=\frac{h}{3},$$

и устремим размеры тетраэдра Δx_1, Δy_1, Δz_1 и его высоту h к нулю. Заметив, что при конечной объемной плотности силы $\overline{f}$ предел $\overline{f}h$ равен нулю:

$$\lim\overline{f}h=0,\quad (h\to 0),$$

и отбросив в связи с этим член $\overline{f}\frac{h}{3}$, получим

$$\overline{T}_n=\overline{T}_{x1}\cos(\overline{n},\overline{q}_{x1})+\overline{T}_{y1}\cos(\overline{n},\overline{q}_{y1})+\overline{T}_{z1}\cos(\overline{n},\overline{q}_{z1}).$$

Выразим теперь натяжения $\overline{T}_{x1}$, $\overline{T}_{y1}$ и $\overline{T}_{z1}$ в этом уравнении через величины магнитного поля с помощью полученных выше уравнений, записав натяжение на эквипотенциальной грани ΔS_{z1} несколько иным образом:

$$\overline{T}_{z1}=\frac{1}{\mu_0\mu_r}(B^2-0{,}5B^2)\,\overline{q}_{z1},$$

после чего уравнение для $\overline{T}_n$ приобретает следующий вид:

$$\overline{T}_n=\frac{1}{\mu_0\mu_r}\{[\overline{q}_{z1}B]\,[B\cos(\overline{n},\overline{q}_{z1})]-0{,}5B^2[\overline{q}_{x1}\cos(\overline{n},\overline{q}_{x1})+$$
$$+\overline{q}_{y1}\cos(\overline{n},\overline{q}_{y1})+\overline{q}_{z1}\cos(\overline{n},\overline{q}_{z1})]\}.$$

Вспомнив, что в выбранной системе координат

$$\overline{B}=\overline{q}_{z1}B;\quad B_n=\overline{n}\overline{B}=B_{z1}\cos(\overline{n},\overline{q}_{z1})=B\cos(\overline{n},\overline{q}_{z1});$$
$$\overline{n}=\overline{q}_{x1}\cos(\overline{n},\overline{q}_{x1})+\overline{q}_{y1}\cos(\overline{n},\overline{q}_{y1})+\overline{q}_{z1}\cos(\overline{n},\overline{q}_{z1}),$$

можно представить выражение для натяжения на произвольно ориентированной в магнитном поле поверхности в векторной форме:

$$\overline{T}_n=\frac{1}{\mu_0\mu_r}(\overline{B}B_n-0{,}5B^2\overline{n}).\qquad(22)$$

Учитывая уравнения, связывающие индукцию с напряженностью поля: $\overline{B}=\mu_0\mu_r\overline{H}$, $B_n=\mu_0\mu_rH_n$, можно заметить, что полученная формула для вектора натяжения полностью совпадает с выражением (14) Максвелла.

Уравнение (22), позволяющее найти вектор натяжения $\overline{T}_n$ на произвольно ориентированной в магнитном поле поверхности и записанное в векторной форме, никак не связано с особой системой координат x_1, y_1, z_1, введенной при его выводе, поэтому компоненты векторов в (22) можно выразить в любой другой прямоугольной системе координат, например, в системе координат x, y, z, показанной на рис. 3.

Пусть в этой системе координат в рассматриваемой точке поверхности с координатами x, y, z вектор индукции

$$\overline{B}=\overline{q}_xB_x+\overline{q}_yB_y+\overline{q}_zB_z;$$

нормальный орт к стороне поверхности S, на которую действует натяжение $\overline{T}_n$,

$$\overline{n}=\overline{q}_x\cos(\overline{n},\overline{q}_x)+\overline{q}_y\cos(\overline{n},\overline{q}_y)+\overline{q}_z\cos(\overline{n},\overline{q}_z);$$

нормальная составляющая вектора индукции

$$B_n=\overline{n}\overline{B}=B_x\cos(\overline{n},\overline{q}_x)+B_y\cos(\overline{n},\overline{q}_y)+B_z\cos(\overline{n},\overline{q}_z).$$

Подставив эти величины в (22)

$$\overline{T}_n=\frac{1}{\mu_0\mu_r}\{[\overline{q}_xB_x+\overline{q}_yB_y+\overline{q}_zB_z]\,[B_x\cos(\overline{n},\overline{q}_x)+$$
$$+B_y\cos(\overline{n},\overline{q}_y)+B_z\cos(\overline{n},\overline{q}_z)]-0{,}5B^2[\overline{q}_x\cos(\overline{n},\overline{q}_x)+$$
$$+q_y\cos(\overline{n},\overline{q}_y)+\overline{q}_z\cos(\overline{n},\overline{q}_z)]\}=\frac{1}{\mu_0\mu_r}\{\overline{q}_x[(B_x^2-$$
$$-0{,}5B^2)\cos(\overline{n},\overline{q}_x)+B_xB_y\cos(\overline{n},\overline{q}_y)+B_xB_z\cos(\overline{n},\overline{q}_z)]+$$
$$+\overline{q}_y[B_yB_x\cos(\overline{n},\overline{q}_x)+(B_y^2-0{,}5B^2)\cos(\overline{n},\overline{q}_y)+$$
$$+B_yB_z\cos(\overline{n},\overline{q}_z)]+\overline{q}_z[B_zB_x\cos(\overline{n},\overline{q}_x)+$$
$$+B_zB_y\cos(\overline{n},\overline{q}_y)+(B_z^2-0{,}5B^2)\cos(\overline{n},\overline{q}_z)]\}$$

и сравнив преобразованное таким образом уравнение (22) с (4), в котором T_{nx}, T_{ny} и T_{nz} выражены по (6), получим следующие выражения для тензора натяжения в магнитном поле:

$$T_{xx}=\frac{1}{\mu_0\mu_r}(B_x^2-0{,}5B^2);\quad T_{xy}=\frac{1}{\mu_0\mu_r}B_xB_y;$$

$$T_{xz}=\frac{1}{\mu_0\mu_r}B_xB_z;\quad T_{yx}=\frac{1}{\mu_0\mu_r}B_yB_x;$$

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

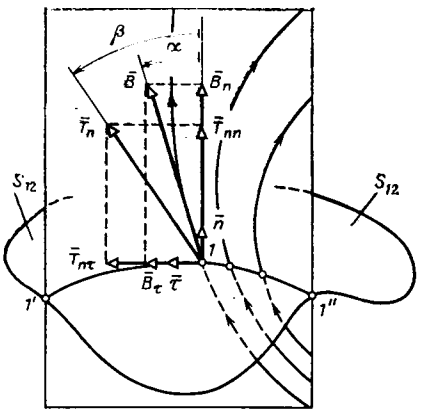


Рис. 4. Разложение вектора натяжения $\bar{T}_n$ по нормальному и тангенциальному направлениям

$$T_{yy}=\frac{1}{\mu_0\mu_r}\left(B_y^2-0{,}5B^2\right);\quad T_{yz}=\frac{1}{\mu_0\mu_r}B_yB_z;$$

$$T_{zx}=\frac{1}{\mu_0\mu_r}B_zB_x;\quad T_{zy}=\frac{1}{\mu_0\mu_r}B_zB_y;$$

$$T_{zz}=\frac{1}{\mu_0\mu_r}\left(B_z^2-0{,}5B^2\right).$$

Представляя полученный тензор натяжения в магнитном поле в более компактной записи

$$T_{ik}=\frac{1}{\mu_r\mu_0}\left(B_iB_k-0{,}5B^2\delta_{ik}\right),\qquad(23)$$

где $i,\ k\in x,\ y,\ z$; $\delta_{ik}=1$ при $i=k$;

$\delta_{ik}=0$ при $i\neq k$; $B=\mu_0\mu_rH$; $B_i=\mu_0\mu_rH_i$,

замечаем, что он полностью совпадает с максвелловским по (13).

Поскольку компоненты тензора натяжения в магнитном поле удовлетворяют равенствам

$$T_{xy}=T_{yx};\quad T_{yz}=T_{zy};\quad T_{zx}=T_{xz},$$

можно, как доказано в [5], использовать тензор натяжения T_{ik} по (13) или (23) и вектор натяжения $\bar{T}_n$ по (14) или (22) не только для определения электромагнитной силы $\bar{F}$ по (1), но и для определения электромагнитного момента сил $\bar{N}$ по (2). Причем, как следует из приведенного вывода, поверхность S_{12}, по которой проводится интегрирование элементарных сил натяжения при определении $\bar{F}$ или N, может охватывать любой объем V_1 в области поля. А это означает, что через натяжения, вопреки мнению И. Е. Тамма [5, с. 394], могут быть выражены электромагнитные силы и моменты, действующие на любой объем в области поля. Этот объем может включать как ферромагнитное или проводящее тело целиком, так и любую его часть.

Формулы для тензора натяжения (23) и вектора натяжения (22) пригодны в тех случаях, когда поверхность S_{12}, охватывающая объем V_1, располагается целиком в магнитно-линейной изотропной безгистерезисной среде. Однако их легко распространить на идеализированные постоянные магниты, если принять для них математическую модель намагничивания [5], в которой постоянный магнит обладает определенной относительной магнитной проницаемостью μ_r, а его постоянная намагниченность $\bar{M}_0$ с заданным пространственным распределением участвует в образовании магнитного поля на тех же правах, что и напряженность магнитного поля H. В рамках такой модели индукция $\bar{B}=\mu_0\mu_r\left(\bar{M}_0+\bar{H}\right)$, что дает возможность моделировать постоянный магнит некоторым магнетиком с той же магнитной проницаемостью $\mu_0\mu_r$, в котором, кроме заданных плотностей токов проводимости $\bar{J}$, имеются дополнительные плотности токов $\bar{J}_V$, воспроизводящие заданную постоянную намагниченность $\bar{M}_0$. Поскольку

$$\bar{J}=\operatorname{rot}\bar{H};\quad \bar{J}_V=\operatorname{rot}\bar{M}_0,$$

сумма этих токов создает некоторую эквивалентную напряженность поля, которая удовлетворяет уравнению

$$\bar{J}+\bar{J}_V=\operatorname{rot}\left(\bar{H}+\bar{M}_0\right)=\operatorname{rot}\bar{H}_э,$$

где

$$\bar{H}_э=\bar{H}+\bar{M}_0.$$

Напряженности $\bar{H}_э$ соответствует прежнее магнитное поле с индукцией

$$\bar{B}=\mu_0\mu_r\bar{H}_э.$$

В случае, если в пределах магнита имеются поверхности разрыва магнитной проницаемости μ_r, на которых и намагниченность $\bar{M}_0$ претерпевает скачкообразные изменения, в модели на этих поверхностях должен быть введен дополнительный поверхностный ток с плотностью $\bar{J}_S=\left[\bar{n}_1\left(\bar{M}_{02}-\bar{M}_{01}\right)\right]$, где $\bar{M}_{01}$ и $\bar{M}_{02}$ — намагниченности в средах *1* и *2*, примыкающих к граничной поверхности; $\bar{n}_1$ — внешняя (по отношению к среде *1*) нормаль к граничной поверхности. Поверхностная плотность тока $\bar{J}_S$ должна быть учтена при расчете поля в граничном условии для тангенциальных составляющих эквивалентной напряженности поля $\left[\bar{n}_1\left(\bar{H}_{э2}-\bar{H}_{э1}\right)\right]=\bar{J}_S$.

В такой модели постоянного магнита правильно эквивалентируются не только индукция магнитного поля, но и напряженность поля, энергия магнитного поля и, следовательно, объемные и поверхностные силы. Поэтому тензор натяжения в таком постоянном магните не отличается от тензора натяжения в его модели и может быть определен по (23). Соответственно вектор натяжения в таком постоянном магните не отличается от вектора натяжения в его модели и может быть определен по (22).

Некоторые свойства вектора натяжения. Вектор натяжения T_n по (22) во многих случаях оказывается удобным представить в виде суммы двух составляющих: нормальной T_{nn} и тангенциальной $\bar{T}_{n\tau}$. Нормальная составляющая натяжения направлена по нормальному орту $\bar{n}$ и равна

$$\bar{T}_{nn}=\bar{n}T_{nn},$$

где $T_{nn}=\bar{n}\bar{T}_n$ — проекция $\bar{T}_n$ на орт $\bar{n}$.

Тангенциальная составляющая направлена по тангенциальному орту $\bar{\tau}$ и равна

$$\bar{T}_{n\tau}=\bar{\tau}T_{n\tau},$$

где $T_{n\tau}=\bar{\tau}T_n$ — проекция $\bar{T}_n$ на орт $\bar{\tau}$.

Направление тангенциального орта $\bar{\tau}$, касательного к поверхности S_{12} в рассматриваемой точке, не может быть выбрано произвольным образом. Орт $\bar{\tau}$ должен лежать в плоскости S_{nB} (рис. 4), включающей векторы

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

$\bar{n}$ и $\bar{B}$, и быть касательным к линии пересечения плоскости S_{nB} с поверхностью S_{12}. В этом случае вектор $\bar{B}$ может быть разложен по направлениям $\bar{n}$ и $\bar{\tau}$ и представлен в виде суммы составляющих по этим направлениям:

$$\bar{B}=\bar{B}_n+\bar{B}_\tau,$$

где $\bar{B}_n=\bar{n}B_n$; $\bar{B}_\tau=\bar{\tau}B_\tau$; $B_n=\bar{n}\bar{B}$; $B_\tau=\bar{\tau}\bar{B}$.

Выражая индукцию в (22) через нормальную и тангенциальную составляющие

$$\bar{T}_n=\frac{1}{\mu\mu_0}\left[(\bar{n}B_n+\bar{\tau}B_\tau)B_n-0{,}5\bar{n}(B_n^2+B_\tau^2)\right],$$

получим разложение натяжения по двум взаимно ортогональным направлениям — нормальному и тангенциальному:

$$\bar{T}_n=\bar{T}_{nn}+\bar{T}_{n\tau}, \tag{24}$$

где

$$\bar{T}_{nn}=T_{nn}\bar{n}=\frac{B_n^2-B_\tau^2}{2\mu\mu_0}\bar{n}$$

— нормальная составляющая натяжения;

$$\bar{T}_{n\tau}=T_{n\tau}\bar{\tau}=\frac{B_nB_\tau}{\mu\mu_0}\bar{\tau}$$

— тангенциальная составляющая натяжения.

Посмотрим теперь, как зависят модуль натяжения $T_n=|\bar{T}_n|$ и угол β между натяжением и нормалью $\bar{n}$ от модуля индукции $|\bar{B}|=B$ и угла α между индукцией $\bar{B}=B(\bar{n}\cos\alpha+\bar{\tau}\sin\alpha)$ и нормалью $\bar{n}$ (рис. 4).

Выражая B_n и B_τ в (24) в виде $B_n=B\cos\alpha$, $B_\tau=B\sin\alpha$ и замечая, что

$$T_{nn}=\frac{B_n^2-B_\tau^2}{2\mu_r\mu_0}=\frac{B^2}{2\mu_r\mu_0}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\frac{B^2\cos 2\alpha}{2\mu_r\mu_0};$$

$$T_{n\tau}=\frac{B_nB_\tau}{\mu_r\mu_0}=\frac{B^2\cos\alpha\sin\alpha}{\mu_r\mu_0}=\frac{B^2\sin 2\alpha}{2\mu_r\mu_0},$$

получаем

$$\bar{T}_n=\frac{B^2}{2\mu_r\mu_0}(\bar{n}\cos\beta+\bar{\tau}\sin\beta), \tag{25}$$

где $|\bar{T}_n|=\frac{B^2}{2\mu_r\mu_0}$ — модуль натяжения; $\beta=2\alpha$ — угол между $\bar{T}$ и $\bar{n}$ в плоскости S_{nB}.

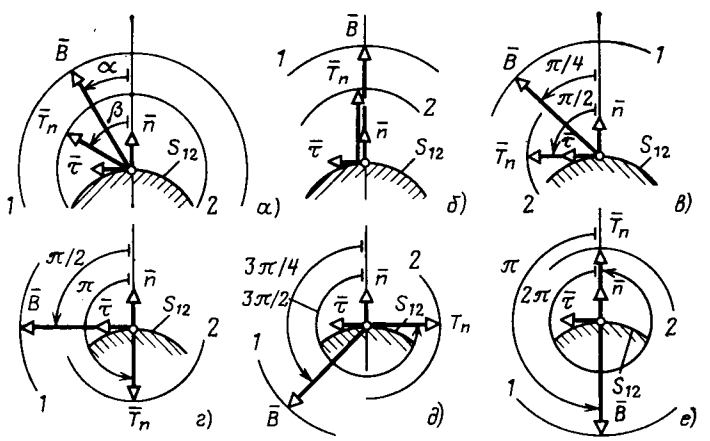


Рис. 5. Геометрическое место вектора натяжения при $\bar{B}$=const

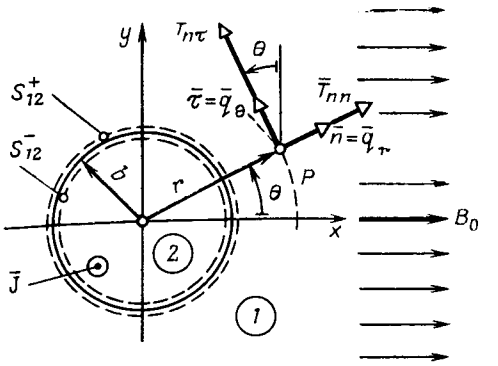


Рис. 6. К расчету электромагнитных сил, действующих на провод с током в равномерном магнитном поле

Из (25) следует, что при сохранении модуля вектора индукции постоянным (B=const) и варьировании лишь угла α, характеризующего направление этого вектора по отношению к нормали $\bar{n}$ в определенной плоскости $\bar{n}\bar{\tau}$ (например, плоскости S_{nB} на рис. 4), модуль вектора натяжения, расположенного в той же плоскости, будет сохраняться постоянным (T_n=const), а изменяться будет лишь угол β, характеризующий направление этого вектора по отношению к нормали.

Это означает, что в условиях B=const, α=var, когда геометрическим местом *1* вектора $\bar{B}$ является окружность с радиусом B, геометрическое место *2* вектора $\bar{T}_n$ также представляет собой окружность с радиусом $T_n=\frac{B^2}{2\mu\mu_0}$, причем положение векторов $\bar{B}$ и $\bar{T}_n$ на своих геометрических местах характеризуется соответственно углами α и $\beta=2\alpha$ (рис. 5,*а*).

Некоторые характерные положения векторов $\bar{B}$ и $\bar{T}_n$ на своих геометрических местах при изменении угла α в пределах от 0 до π и угла $\beta=2\alpha$ от 0 до 2π показаны на рис. 5, *в* — *е*.

При $\alpha=0$ или π (рис. 5, *б* и *е*), когда S_{12} является эквипотенциальной поверхностью, $\beta=0$ или 2π, натяжение направлено в сторону нормали $\bar{n}$ ($\bar{T}_n=\bar{n}T_n$). При $\alpha=\pi/2$ (рис. 5, *г*), когда S_{12} является магнитной поверхностью, $\beta=\pi$, натяжение направлено в противоположную сторону по отношению к нормали $\bar{n}$ ($\bar{T}_n=-\bar{n}T_n$). При $\alpha=\pi/4$ или $\frac{3}{4}\pi$ (рис. 5, *в* и *д*), когда нормальная и тангенциальная составляющие вектора $\bar{B}$ одинаковы по модулю, $\beta=\pi/2$ или $\beta=\frac{3\pi}{2}$, натяжение имеет только тангенциальную составляющую ($\bar{T}_n=\bar{\tau}T_n$ или $\bar{T}_n=-\bar{\tau}T_n$).

Пример. Провод с током во внешнем равномерном магнитном поле. Круглый провод *2* радиуса b, имеющий постоянную магнитную проницаемость μ_{2r}, помещен в среду *1* с магнитной проницаемостью μ_{1r}**. В среде *1* создано внешнее магнитное поле, которое на достаточном удалении от провода делается равномерным и имеет индукцию $B_0=B_{0x}$ (рис. 6). Магнитное поле нормально к оси провода z. По проводу *2* протекает ток i, распределенный по

** В качестве среды *1* при $\mu_{1r}\neq 1$ может быть использована немагнитная жидкость.

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

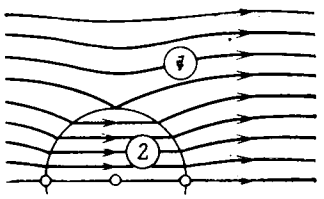


Рис. 7. Искажение равномерного магнитного поля в среде *1* с магнитной проницаемостью μ_{1r} после размещения в ней провода *2* с магнитной проницаемостью μ_{2r} (случай $\mu_{2r}/\mu_{1r}=3$)

сечению провода равномерно с плотностью $\bar{J}=J_z\bar{q}_z$, где $J_z=\frac{i}{\pi b^2}$.

Определяется испытываемая проводом сила F_y и ее составляющие[3].

В силу линейности задачи результирующее поле может быть найдено как сумма внешнего поля, искаженного внесением в него провода *2*, и поля от тока i в проводе.

Внешнее поле после внесения в него провода *2* может быть найдено методом разделения переменных в цилиндрической системе координат r, θ [21]. Решение относительно скалярного магнитного потенциала в средах *1* и *2*:

$$\varphi_1=-\left(c_1r-\frac{d_1}{r}\right)\cos\theta;\qquad \varphi_2=-\left(c_2r-\frac{d_2}{r}\right)\cos\theta,$$

откуда для компонент напряженности магнитного поля имеем:

$$H_{1r}=-\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}=\left(c_1+\frac{d_1}{r^2}\right)\cos\theta;$$

$$H_{1\theta}=-\frac{\partial\varphi_1}{r\partial\theta}=-\left(c_1-\frac{d_1}{r^2}\right)\sin\theta;$$

$$H_{2r}=\left(c_2+\frac{d_2}{r^2}\right)\cos\theta;\quad H_{2\theta}=-\left(c_2-\frac{d_2}{r^2}\right)\sin\theta.$$

Исходя из того, что при $x=\infty$, $y=0$, $r=\infty$ и $\theta=0$ поле становится равномерным ($H_{1x}=H_{1r}=H_0=B_0/\mu_0\mu_{1r}$), заключаем

$$c_1=H_0.$$

Так как при $r=0$ значение φ_2 должно быть конечно, имеем $d_2=0$. Исходя из граничных условий на поверхности $r=b$ для индукции ($B_{1r}=B_{2r}$) и для напряженности магнитного поля ($H_{1\theta}=H_{2\theta}$), находим:

$$d_1=\frac{\mu_{2r}-\mu_{1r}}{\mu_{1r}+\mu_{2r}}b^2H_0;\quad c_2=\frac{2\mu_{1r}}{\mu_{1r}+\mu_{2r}}H_0.$$

Напряженность поля от тока i при $r=b$

$$H_{i\theta}=\frac{i}{2\pi r};\quad H_{ir}=0.$$

Компоненты напряженности и индукции результирующего поля при $r=b$ на поверхности S_{12}^{+} в среде *1*, охватывающей провод *2* целиком,

$$H_{1r\Sigma}=H_0k_2\cos\theta;\quad H_{1\theta\Sigma}=H_{i\theta}-H_0k_1\sin\theta;$$

$$B_{1r\Sigma}=\mu_0\mu_{1r}H_{1r\Sigma};\quad B_{1\theta\Sigma}=\mu_0\mu_{1r}H_{1\theta\Sigma},$$

где

$$k_1=\frac{2\mu_{1r}}{\mu_{1r}+\mu_{2r}};\quad k_2=\frac{2\mu_{2r}}{\mu_{1r}+\mu_{2r}}.$$

Компоненты напряженности и индукции результирующего поля при $r=b$ на поверхности S_{12}^{-} в среде *2*,

[3] В частном случае при $\mu_{1r}=1$ пример совпадает с примером 3.1, с. 136 в [9].

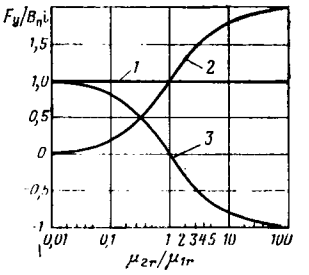


Рис. 8. Зависимость электромагнитных сил, действующих на провод с током i в равномерном поле с индукцией B_0, от магнитных проницаемостей провода μ_{2r} и окружающего пространства μ_{1r} (*1* — результирующая сила; *2* — сила, действующая на ток провода; *3* — сила, действующая на границу между проводом и окружающим пространством).

охватывающей ток провода и не охватывающей границу между средами *1* и *2*:

$$H_{2r\Sigma}=H_0k_1\cos\theta;\quad H_{2\theta\Sigma}=H_{\theta i}-H_0k_1\sin\theta;$$

$$B_{2r\Sigma}=\mu_0\mu_{2r}H_{2r\Sigma};\quad B_{2\theta\Sigma}=\mu_0\mu_{2r}H_{2\theta\Sigma}.$$

Нормальные и тангенциальные составляющие натяжений на поверхности S_{12}^{+} в среде *1*, найденные по (24), (25):

$$T_{nn1}=\frac{\mu_0\mu_{1r}}{2}\left[H_0^2k_2^2\cos^2\theta-\left(H_{\theta i}^2-2H_{\theta i}H_0k_1\sin\theta+H_0^2k_1^2\sin^2\theta\right)\right];$$

$$T_{n\tau1}=\mu_0\mu_{1r}\left(H_{\theta i}H_0k_2\cos\theta-H_0^2k_1k_2\cos\theta\sin\theta\right).$$

Нормальные и тангенциальные составляющие натяжений на поверхности S_{12}^{-} в среде *2*:

$$T_{nn2}=\frac{\mu_0\mu_{2r}}{2}\left[H_0^2k_1^2\cos\theta-\left(H_{\theta i}^2-2H_{\theta i}H_0k_1\sin\theta+H_0^2k_1^2\sin^2\theta\right)\right];$$

$$T_{n\tau2}=\mu_0\mu_{2r}\left(H_{\theta i}H_0k_1\cos\theta-H_0^2k_1^2\cos\theta\sin\theta\right).$$

Как видно из рис. 6, сила в направлении оси y, действующая на элемент цилиндрической поверхности $dS=rd\theta$, выражается через составляющие натяжений следующим образом:

$$dF_y=(T_{nn}\sin\theta+T_{n\tau}\cos\theta)\,rd\theta.$$

Полная сила, действующая на провод с током во внешнем поле, находится путем интегрирования элементарной силы dF_y по поверхности S_{12}^{+} в среде *1*:

$$F_{y1}=2\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}(T_{nn1}\sin\theta+T_{n\tau1}\cos\theta)\,b\,d\theta=B_0i. \qquad (26)$$

Иными словами, сила, действующая на единицу длины провода, определяется произведением тока провода i на индукцию B_0 внешнего равномерного поля на достаточном удалении от провода. Она не зависит ни от магнитной проницаемости самого провода μ_{2r}, ни от магнитной проницаемости среды μ_{1r}, в которую он помещен. Этот результат полностью совпадает с экспериментальными данными.

Сила, действующая непосредственно на ток провода, в случае grad $\mu_{2r}=0$ находится интегрированием элементарной силы dF_y по поверхности S_{12}^{-} в среде *2*:

$$F_{y2}=2\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}(T_{nn2}\sin\theta+T_{n\tau2}\cos\theta)\,bd\theta=\frac{2\mu_{2r}}{\mu_{1r}+\mu_{2r}}B_0i. \qquad (27)$$

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Ту же силу можно выразить через объемную плотность ЭМС, действующей во внешнем магнитном поле на токи $\bar{J}dV$ в элементах объема провода. Нетрудно убедиться в том, что внешнее поле внутри провода равномерно (это видно и на рис. 7) и имеет индукцию

$$B_2=\mu_0\mu_{2r}\sqrt{H_{2r}^2+H_{2\theta}^2}=\frac{2\mu_0\mu_{1r}\mu_{2r}}{\mu_{1r}+\mu_{2r}}H_0=\frac{2\mu_{2r}}{\mu_{1r}+\mu_{2r}}B_0=\text{const}.$$

Плотность тока внутри провода тоже постоянна $J=J_z=\frac{i}{\pi b^2}=\text{const}$, поэтому объемная плотность силы внутри провода равна B_2J, а полная сила, действующая на ток единицы длины провода, пропорциональна его сечению

$$F_{y2}=B_2J(\pi b^2)=\frac{2\mu_{2r}}{\mu_{1r}+\mu_{2r}}B_0i. \qquad (28)$$

Как видно, результат совпадает с (27).

На границу между проводом *2* и средой *1*, где магнитная проницаемость изменяется скачкообразно от μ_{2r} до μ_{1r} действует сила

$$F_{y12}=F_{y1}-F_{y2}=\frac{\mu_{1r}-\mu_{2r}}{\mu_{1r}+\mu_{2r}}B_0i. \qquad (29)$$

При $\mu_{1r}=1$, $\mu_{2r}=\infty$, когда $B_2=2B_0$, имеем: $F_{y2}=2B_0i$, $F_{y12}=-B_0i$, $F_{y1}=F_{y2}+F_{y12}=B_0i$; при $\mu_{1r}=\mu_{2r}=1$, когда $B_2=B_0$, имеем: $F_{y2}=B_0i$, $F_{y12}=0$, $F_{y1}=F_{y2}+F_{y12}=B_0i$; при $\mu_{1r}=\infty$, $\mu_{2r}=1$, когда $B_2=0$, имеем: $F_{y2}=0$, $F_{y12}=B_0i$, $F_{y1}=F_{y2}+F_{y12}=B_0i$.

Зависимость этих сил от соотношения между магнитными проницаемостями μ_{2r} и μ_{1r} представлена в логарифмическом масштабе на рис. 8.

Нетрудно убедиться в том, что расчет сил F_{y1} и F_{y2} по ошибочным формулам для натяжений, которые приводятся в [9], [15], [16], приводит к правильным результатам только в некоторых частных случаях. Например, при использовании формулы (3.84) из [9], которой соответствуют следующие выражения для составляющих вектора натяжения в магнитном поле:

$$T_{nn}=\mu_0\left[(\mu_r-0{,}5)H_n^2-0{,}5H_\tau^2\right];$$
$$T_{n\tau}=\mu_0\mu_rH_\tau H_n,$$

получим такие силы:

$$F_{y1}=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(T_{nn1}\sin\theta+T_{n\tau1}\cos\theta)\,bd\theta=B_0i\frac{1+\mu_{2r}}{\mu_{1r}+\mu_{2r}};$$

$$F_{y2}=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(T_{nn2}\sin\theta+T_{n\tau2}\cos\theta)\,bd\theta=B_0i\frac{1+\mu_{2r}}{\mu_{1r}+\mu_{2r}}.$$

Как видно, сила F_{y1} по (9) превосходит силу F_{y1} по (26) в $(1+\mu_{2r})/(\mu_{1r}+\mu_{2r})$ раз и получается правильной только при $\mu_{1r}=1$. Соответственно сила F_{y2} по (9) превосходит силу F_{y2} по (27) в $(1+\mu_{2r})/2\mu_{2r}$ раз и получается правильной только при $\mu_{2r}=1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Максвелл Дж. К.** Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. — М.: Гостехиздат, 1954.
2. **Maxwell J. C.** A treatise on electricity and magnetism Oxford. Clarendon Press, 1873.
3. **Эйнштейн А.** Собрание научных трудов. — М.: Наука т. 1, 1965.
4. **Эйнштейн А., Лауб И.** О пондермоторных силах, действующих в электромагнитном поле на покоящиеся тела. — В кн. Собрание научных трудов. — М.: Наука, т. 1, 1965, с. 126—134
5. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. — М.: Гостехиздат, 1957.
6. **Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.** Электродинамика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1957.
7. **Стрэттон Дж.** Теория электромагнетизма. — М.: Гостехиздат, 1948.
8. **Шимони К.** Теоретическая электротехника. — М.: Мир, 1964.
9. **Поливанов К. М.** Электродинамика движущихся тел. — М.: Энергоиздат, 1982.
10. **Поливанов К. М.** Максвеллов тензор натяжений в электромагнитном поле и определение пондермоторных сил. — Elektrotechn., Čas., 1983, v. 34, № 10—11, p. 781—800.
11. **Поливанов К. М.** Подъемная сила магнита. — Электричество, 1984, № 6.
12. **Иванов-Смоленский А. В.** Электромагнитные поля и процессы в электрических машинах и их физическое моделирование. — М.: Энергия, 1969.
13. **Carpenter C. J., Ratti U.** Calculation of Mechanical Forces in Electrical Machines by Surface Integration. — L' Energia Elettrica, 1974, v. 51, № 5.
14. **Львов Е. Л.** Связь между различными методами расчета статистических тяговых сил в электромагнитных системах. — Труды МЭИ, 1951, вып. VII.
15. **Львов Е. Л.** Интегральные выражения для пондермоторных сил в магнитном поле. — Электричество, 1984, № 6.
16. **Синельников Е. М., Синельников Д. Е.** Пондермоторная сила, действующая на ферромагнитное тело в магнитном поле. — Изв. вузов. Электромеханика, 1982, № 5.
17. **Синельников Д. Е.** Определение вращающего момента, действующего на изотропный магнитно-мягкий магнетик, через значения поверхностных сил. — Изв. вузов. Электромеханика, 1982, № 10.
18. **Иванов-Смоленский А. В.** Электрические машины. — М.: Энергия, 1980.
19. **Бики М. А., Цуканов А. М.** Расчет электромагнитных сил, действующих на насыщенные элементы магнитной цепи. — Изв. вузов. Электротехника, 1975, № 4.
20. **Иванов-Смоленский А. В.** Определение электромагнитных сил в нелинейных магнитных системах по изменению энергии при малом перемещении. — Электричество, 1985, № 5.
21. **Бинс К., Лауренсон П.** Анализ и расчет электрических и магнитных полей/Пер. с англ. — М.: Энергия, 1970.
22. **Астахов В. И.** К расчету силового воздействия магнитного поля на тела, несущие токи. — Электромеханика, 1984, № 10.

[14.02.85]

УДК 621.025.3.001.24:681.142

Машинный анализ трехфазных схем

МУСТАФА Г. М.

Москва

Наиболее распространенные методы машинного расчета электрических цепей сложились под влиянием потребностей анализа электронных схем [1—4], и в существенной мере они не учитывают особенностей электротехники. В частности, обычная формулировка их никак не использует широко распространенную характеристику схем электротехники — трехфазную симметрию. В этом отношении они менее совершенны, чем традиционные методы, которые позволяют рассчитывать трехфазную схему почти так же просто, как втрое меньшую однофазную [5 и 6].

Непосредственно применить обычные методы при ма-

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

шинном анализе не удается, для этого некоторые стадии их недостаточно формализованы. Наиболее детальная формализованная теория, ориентированная на электротехнику, изложена в [7, 8 и 9]. Последняя работа содержит по существу доведенную до логического завершения теорию анализа по частям, т. е. теорию анализа систем, составленных из многополюсников. Симметрия и другие особенности сильноточных схем существенно используются в аппарате анализа. Наряду с этим характерным является отказ от эквивалентных схем многополюсников и элементарного понятия цепи как системы, составленной из простых ветвей, каждая из которых имеет собственное уравнение, не зависящее от прочих переменных цепи. Многополюсники отображаются полюсными характеристиками, замещающие их ветви могут описываться весьма сложными уравнениями. Обладая целым рядом преимуществ, такой подход все же не всегда оказывается наилучшим. Недостатком его является разнообразие типов замещающих ветвей и еще большее число возможных комбинаций их сечений и контуров, что усложняет алгоритмы.

В настоящей статье исследуется другой путь, позволяющий эффективно использовать симметрию и вместе с тем сохранить формализованные процедуры анализа простых цепей. Основывается он на разложении структурных матриц и графов симметричных схем на независимые компоненты. После этого анализ компонент может вестись как анализ обычных цепей.

Особенности структурных матриц трехфазных схем. Множество вершин трехфазной схемы может быть разбито на подмножества $\{a_i, b_i, c_i\}$, каждое состоящее из трех элементов, и подмножества из одного элемента $\{0_i\}$. Симметрия имеет циклический характер по отношению к перестановкам:

$$Pa_i = b_i;\ Pb_i = c_i;\ Pc_i = a_i;\ P0_i = 0_i. \qquad (1)$$

Если трехфазный граф содержит ветвь x_iy_i, то существует и любая ветвь, получаемая одновременно циклической перестановкой x_i, y_i. Например, из существования ветви a_i, $0_к$ вытекает существование ветвей b_i, 0_k и c_i, 0_k с теми же параметрами и того же типа.

В зависимости от того, содержит ли схема ветви вида 0_i, 0_k, можно различать чисто трехфазные Т-схемы, не содержащие ветвей вида 0_i, 0_k, и смешанные Т-схемы, в которые могут входить ветви вида 0_i, 0_k. Ветви Т-графа также могут быть разбиты на множества — тройки $\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}$, $\{0_i\}$ с правилом циклической перестановки (1). Если некоторое множество ветвей $K = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im})$ — контур Т-графа, то $PK = (Px_{i1}, Px_{i2}, \ldots, Px_{im})$ тоже является контуром. Среди контуров K_i, PK_i, $P^2K_i, \ldots$ не может быть больше трех различных, так как всегда

$$P^3K_i = K_i. \qquad (2)$$

Контур K_i, который при преобразовании P сохраняется ($PK_i = K_i$), можно назвать контуром первой степени. Контуров второй степени Т-граф содержать не может. Действительно, из $PK_i \neq K_i$; $P^2K_i = K_i$ следует $P^3K_i = P(P^2K_i) = PK_i \neq K_i$, что противоречит (2). Таким образом, все контуры Т-графа имеют степень, равную 1 или 3.

Перейдем к рассмотрению контурной матрицы. Строку B_i, соответствующую контуру K_i, разобьем на ячейки размером 1×3:

$$K_i \Leftrightarrow B_i = (\mathbf{b}_{i1}, \mathbf{b}_{i2}, \ldots);\ \mathbf{b}_{ik} = (\mathbf{b}_{ik1}, \mathbf{b}_{ik2}, \mathbf{b}_{ik3}).$$

Вращение PK_i может быть отображено умножением каждой ячейки на матрицу циклической перестановки $\mathbf{s}^t$:

$$PK_i \Leftrightarrow B_i\mathbf{S}^t = (\mathbf{b}_{i1}\mathbf{s}^t,\ \mathbf{b}_{i2}\mathbf{s}^t, \ldots), \qquad (3)$$

где

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix},\quad \mathbf{S} = \mathrm{diag}\,(\mathbf{s}, \mathbf{s}, \ldots). \qquad (4)$$

Матрица $\mathbf{s}$ ортогональна ($\mathbf{ss}^t = \mathbf{E}$), кроме того,

$$\mathbf{s}^2 = \mathbf{s}^t;\ \mathbf{s}^3 = \mathbf{s}. \qquad (5)$$

В двусвязном графе число независимых контуров равно $n-\nu+1$, где n — число ветвей; ν — число вершин [5]. Кроме контурных матриц с $n-\nu+1$ строками, для трехфазных схем целесообразно использовать еще два типа контурных матриц. Матрица порождающих контуров $\bar{\mathbf{B}}$ составляется из минимального множества контуров $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \ldots, \bar{K}_m$, которые после дополнения контурами, полученными вращением порождающих контуров, образует полную систему. Число порождающих контуров меньше числа независимых контуров. Т-симметричная матрица контуров $\mathbf{B}$ составляется из $\{\bar{K}\}$ и всех полученных вращением контуров. Если контуры $\bar{K}_1, \ldots, \bar{K}_{m3}$ имеют третью степень, а контуры $\bar{K}_{m3+1}, \ldots, \bar{K}_m$ — первую степень, то Т-симметричный набор состоит из контуров

$$\{\bar{K}_1,\ P\bar{K}_1,\ P^2\bar{K}_1,\ \bar{K}_2,\ P\bar{K}_2,\ P^2\bar{K}_2, \ldots,$$
$$\bar{K}_{m3},\ P\bar{K}_{m3},\ P^2\bar{K}_{m3},\ \bar{K}_{m3+1}, \ldots, \bar{K}_m\}. \qquad (6)$$

Соответственно Т-симметричная матрица контуров $\mathbf{B}$ имеет вид

	2 (a b c)	2 (a b c)		2 (a b c)
Контуры степени 3	b_{11} $b_{11}s^2$ $b_{11}s$	b_{12} $b_{12}s^2$ $b_{12}s$	...	b_{1n} $b_{1n}s^2$ $b_{1n}s$
	...	...	...	...
Контуры степени 1	$b_{m3+1,1}$	$b_{m3+1,2}$		$b_{m3+1,n}$
	...	...	...	...

Матрица $\mathbf{B}$ может содержать больше чем $n-\nu+1$ строк. Для смешанного Т-графа матрица (6) дополняется столбцами, соответствующими ветвям нулевой степени, которые при вращении PK сохраняются. Таким ветвям в матрице $\mathbf{B}$ будут соответствовать ячейки вида $\mathrm{col}\,(b_{ij}, b_{ij}, b_{ij})$, если i-й контур имеет третью степень, и просто b_{ij}, если i-й контур имеет первую степень. Все изложенное выше без изменений может быть перенесено на матрицы сечений цепи.

Преобразование структурных уравнений при переходе к ортогональным координатам. Структурные матрицы при анализе цепей применяются для формулировки уравнений Кирхгофа:

$$\mathbf{Be} = 0,\ \mathbf{Qi} = 0, \qquad (7)$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{e}$ — векторы токов и напряжений ветвей.

При анализе трехфазных схем в электротехнике используется переход к ортогональным координатам d,

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

q, 0, неподвижным или вращающимся. Такой переход *обеспечивает блочную диагонализацию матриц контурных* сопротивлений или узловых проводимостей [7].

Ниже изучается, как изменяются при таком переходе сами структурные уравнения, причем рассматривается сразу общий случай вращающихся координат. Переход от фазных координат $x=\mathrm{col}\,(x_a, x_b, x_c)$ к ортогональным $\bar{x}=\mathrm{col}\,(x_d, x_q, x_0)$ — преобразование Парка—Горева [11] — с углом поворота ϑ осуществляется с помощью матрицы

$$\chi(\vartheta)=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \left|\begin{array}{c|c|c} \cos\vartheta & \cos\vartheta-\frac{2\pi}{3} & \cos\left(\vartheta+\frac{2\pi}{3}\right) \\ \hline -\sin\vartheta & -\sin\left(\vartheta-\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\vartheta+\frac{2\pi}{3}\right) \\ \hline 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{array}\right| \end{array}\begin{array}{c} d \\ q \\ 0 \end{array} \quad (7a)$$

по формуле

$$\bar{x}=\chi(\vartheta)\,x. \quad (8)$$

Вектор x может быть вектором токов или напряжений тройки ветвей. Матрица χ преобразует координаты одной ячейки; когда преобразуются несколько ячеек, используется составная матрица $\mathrm{diag}\,[\chi(\theta), \chi(\theta), \ldots]$. В обоих случаях далее используется одно и то же обозначение, что подразумевается, следует из контекста. Матрица $\chi(\theta)$ ортогональна:

$$\chi(\vartheta)\,\chi^t(\vartheta)\equiv \mathbf{E}. \quad (8a)$$

При выводе формул удобно использовать каноническое разложение

$$\chi(\vartheta)=\left[\begin{array}{c|c} \lambda(-\vartheta-\pi/6) & \\ \hline & 1 \end{array}\right]\chi(-\pi/6). \quad (9)$$

Входящая в (9) постоянная ортогональная матрица

$$\tau=\chi(-\pi/6)=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Матрицы поворота на плоскости

$$\lambda(\vartheta)=\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad (11)$$

образуют абелеву группу с законом умножения

$$\lambda(\vartheta_1)\,\lambda(\vartheta_2)=\lambda(\vartheta_1+\vartheta_2). \quad (12)$$

Из (12) сразу же следует

$$\lambda^{-1}(\vartheta)=\lambda(-\vartheta)=\lambda^t(\vartheta). \quad (13)$$

В дальнейшем понадобится два тождества с матрицей циклической перестановки s:

$$\tau s\tau^t=\left(\begin{array}{c|c} \lambda(2\pi/3) & \\ \hline & 1 \end{array}\right);\quad \tau s^2\tau^t=\left(\begin{array}{c|c} \lambda(-2\pi/3) & \\ \hline & 1 \end{array}\right). \quad (14)$$

Из (9) следует

$$\chi(\vartheta)\,s\chi^t(\vartheta)=\left(\begin{array}{c|c} \lambda(-\vartheta-\pi/6) & \\ \hline & 1 \end{array}\right)\times$$
$$\times\,\tau s\tau^t\left(\begin{array}{c|c} \lambda(\vartheta+\pi/6) & \\ \hline & 1 \end{array}\right),$$

откуда с помощью (12) и (14) получаем

$$\chi(\vartheta)\,s\chi^t(\vartheta)=\left(\begin{array}{c|c} \lambda(2\pi/3) & \\ \hline & 1 \end{array}\right). \quad (15)$$

Аналогично имеем

$$\chi(\vartheta)\,s^2\chi^t(\vartheta)=\left(\begin{array}{c|c} \lambda(-2\pi/3) & \\ \hline & 1 \end{array}\right). \quad (16)$$

Подставим в уравнение Кирхгофа для напряжений (7а) значение $\mathbf{e}$, выраженное через ортогональные координаты по формуле (8а)

$$\mathbf{B}\chi^t(\vartheta)\,\bar{\mathbf{e}}=0.$$

Это уравнение можно умножить слева на произвольную невырожденную матрицу, так что контурной матрицей в новых координатах будет выражение вида $\eta\mathbf{B}\chi^t(\theta)$. Для контуров третьей степени возьмем множитель η, равный $\chi(\theta)$; для контуров первой степени — единичный множитель. Ячейка размером 3×3 матрицы (6) преобразуется при этом таким образом:

$$\chi(\vartheta)\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{bs}^t \\ \mathbf{bs} \end{pmatrix}\chi^t(\vartheta)=\left(\begin{array}{c|c} \lambda(-\vartheta-\pi/6) & \\ \hline & 1 \end{array}\right)\times$$
$$\times\,\tau\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{bs}^t \\ \mathbf{bs} \end{pmatrix}\tau\left(\begin{array}{c|c} \lambda(\vartheta+\pi/6) & \\ \hline & 1 \end{array}\right). \quad (17)$$

Внутренняя часть этого произведения после подстановки из (14) приводится к блочно-диагональному виду:

$$\tau\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{bs}^t \\ \mathbf{bs} \end{pmatrix}\tau^t=$$
$$=\left[\begin{array}{c|c|c} b_1-\frac{1}{2}(b_2+b_3) & -\frac{\sqrt{3}}{2}(b_2-b_3) & \\ \hline -\sqrt{3}/2\,(b_2-b_3) & b_1-\frac{1}{2}(b_2+b_3) & \\ \hline & & b_1+b_2+b_3 \end{array}\right]. \quad (18)$$

Первый блок из (18) пропорционален матрице поворота и допускает перестановку с любой другой матрицей поворота, так что

$$\chi(\vartheta)\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{bs}^t \\ \mathbf{bs} \end{pmatrix}\chi^t(\vartheta)=\left(\begin{array}{c|c} m\lambda(\varphi) & \\ \hline & g \end{array}\right), \quad (19)$$

где $m=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2-b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3}$; $\varphi=\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}\,(b_3-b_2)}{m}$; $g=b_1+b_2+b_3$.

Контурам первой степени соответствуют ячейки из одной строки, причем для них по определению $\mathbf{bs}=\mathbf{b}$. Это равенство может выполняться только в том случае, если $\mathbf{b}=\pm(1, 1, 1)$ или $\mathbf{b}=(0, 0, 0)$. Такие ячейки при преобразовании умножаются справа на $\chi^t(\theta)$, тогда

$$(1, 1, 1)\,\chi^t(\vartheta)\equiv(0, 0, \sqrt{3}). \quad (20)$$

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Из преобразованных ячеек (19), (20) можно составить всю преобразованную контурную матрицу целиком:

$$\begin{array}{c|c|c|

Выше приведена таблица преобразования ячеек, полученная по формулам (19) и (20).

Алгоритм построения контурной матрицы в осях d, q, 0 или c, 0 состоит из следующих шагов:

записать непосредственно по виду графа или получить известными способами по таблице соединений полную независимую систему контуров;

дополнить ее контурами, получаемыми вращениями исходных, и затем отобрать из нее множество производящих контуров;

заменить каждую ячейку размером 1×3 матрицы производящих контуров матрицей $m\lambda(\varphi)$ или числом $me^{j\varphi}$, причем значения m, φ определяются из таблицы. Результатом замены будет матрица $\mathbf{B}_{dq}$ или $\mathbf{B}_c$;

заменить каждую ячейку матрицы производящих контуров вещественным числом m_0 из таблицы; результатом будет контурная матрица $\mathbf{b}_0$.

Классы эквивалентности структурных матриц и разделение подсистем по осям d, q. Каждая структурная матрица является только представителем своего класса эквивалентности; после умножения ее слева на произвольную неособенную матрицу получается новая контурная матрица, эквивалентная исходной. Множество $\{\mathbf{PB}\}$ еще не исчерпывает всего класса эквивалентности. Кроме строчных операций, существуют еще и некоторые столбцовые, не выводящие из класса эквивалентности. В отличие от строчных операций столбцовые не могут быть описаны для матриц $\mathbf{B}$, $\mathbf{Q}$ отдельно и в отрыве от уравнений ветвей. Очевидно, что допустимой столбцовой операцией является одновременная перестановка столбцов в матрицах $\mathbf{B}$, $\mathbf{Q}$. При этом приходим к классам:

$$\{\mathbf{P}_1\mathbf{BP}\},\ \{\mathbf{P}_2\mathbf{QP}\}. \tag{27}$$

Дальнейшее расширение возможно только за счет изменений уравнений ветвей. Если ввести новые векторы токов $\bar{i}$ и напряжений $\bar{e}$ уравнениями

$$\bar{\mathbf{i}}=\mathbf{D}_2 i,\ \ \bar{\mathbf{e}}=\mathbf{D}_1 e, \tag{28}$$

то от матриц вида (27) перейдем к

$$\mathbf{P}_1\mathbf{BPD}_1^{-1};\ \mathbf{P}_2\mathbf{QPD}_2^{-1}. \tag{29}$$

Класс допустимых матриц $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ выявляется из рассмотрения уравнений ветвей. Рассмотрим, например, подмножество R-ветвей

$$\mathbf{e}_R=\mathbf{R}\mathbf{i}_R. \tag{30}$$

После преобразования (28) эти уравнения перейдут в

$$\bar{\mathbf{e}}_R=\left(\mathbf{D}_{1R}\mathbf{R}\mathbf{D}_{2R}^{-1}\right)\bar{\mathbf{i}}_R. \tag{31}$$

Чтобы преобразованная матрица сопротивлений $\left(\mathbf{D}_{1R}\mathbf{R}\mathbf{D}_{2R}^{-1}\right)$ оставалась диагональной (т. е. чтобы уравнения резисторов остались независимыми) для несимметричной цепи необходимой оказывается диагональность $\mathbf{D}_{1R}$, $\mathbf{D}_{2R}$. Такими же должны быть $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ в целом.

Для симметричных цепей класс допустимых преобразований расширяется. Так, у тройки R-ветвей сопротивления совпадают, так что уравнения их записываются с помощью скалярного множителя r:

$$\mathrm{col}\,(e_a,\ e_b,\ e_c)=r\,\mathrm{col}\,(i_a,\ i_b,\ i_c).$$

Чтобы это уравнение сохранило свой вид после преобразования, достаточно, чтобы соответствующее произведение из (31) совпадало с единичной матрицей размером 3×3:

$$\mathbf{D}_{1k}\mathbf{D}_{2k}^{-1}=\frac{1}{r}\mathbf{E}. \tag{32}$$

Подматрицы $\mathbf{D}$ в (32) могут быть недиагональными.

Опишем теперь допустимые преобразования структурных матриц Т-схем в ортогональных координатах. Подсистема 0 отделена от подсистем d, q. Симметрия уже учтена была при переходе a, b, $c\Rightarrow d$, q, 0, и если дополнительных симметрий схема (0) не имеет, то классы эквивалентности $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{Q}_0$ описываются формулами (29), в которых матрицы $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ должны быть диагональными.

Допустимыми столбцовыми преобразованиями подсистемы d, q являются перестановки пар столбцов, а также умножение справа на некие блочно-диагональные матрицы, составленные из матриц поворота. Рассматривая преобразование вида (31) для пары ветвей (d, q), получаем

$$\bar{e}_R=d_1\lambda(\delta_1)\,rd_2^{-1}\lambda(-\delta_2)\,i_R=(rd_1/d_2)\,\lambda(\delta_1-\delta_2)\,i_R.$$

Чтобы уравнение это по форме совпадало с исходным, достаточно взять $\delta_1-\delta_2=0$, т. е. таким, чтобы аргументы правых множителей в (29) совпадали; модули же их произвольны. При переходе к комплексной форме матрицы поворота переходят в комплексные числа, а блочно-диагональные вещественные матрицы — в диагональные комплексные матрицы с совпадающими аргументами. Класс эквивалентности $\mathbf{B}_c$, $\mathbf{Q}_c$ описывается по-прежнему формулами (29), но уже с комплексными диагональными матрицами $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$.

Класс эквивалентности обычно представляют каким-то его элементом, который имеет наиболее удобную форму. При анализе трехфазных схем принципиальное значение имеет вопрос о существовании такой формы $\mathbf{B}$, $\mathbf{Q}$, в которой переменные по осям d, q отделены друг от друга. Разделение по осям d, q означает возможность рассмотрения трехфазной системы как совокупности трех независимых компонент — d, q, 0. Это свойство равносильно существованию таких $\mathbf{B}_C$, $\mathbf{Q}_C$, все коэффициенты которых вещественны (т. е. означает существование вещественных структурных матриц, связывающих комплексные переменные). И наоборот — существование вещественной формы $\mathbf{B}_C$, $\mathbf{Q}_C$ означает отделимость. Действительно, отделимость равносильна возможности приведения к диагональному виду всех ячеек размера 2×2 матриц $\mathbf{B}_{dq}$, $\mathbf{Q}_{dq}$, для чего необходимо получить в (21) $\varphi=\pi m$. При этом каждая ячейка размера 2×2 принимает вид $m_{iR}\times E$ и при преобразовании к комплексной форме переходит в $\pm m_{ik}$, т. е. в вещественное число.

Пусть вещественная форма $\mathbf{B}_C$, $\mathbf{Q}_C$ существует; без ограничения общности можно принять, что форма эта фундаментальна:

$$\mathbf{B}_{cb}=[\mathbf{ET}_b];\ \ \mathbf{Q}_{cb}=\left[-\mathbf{T}_b^t\mathbf{E}\right]. \tag{33}$$

Возьмем одну из комплексных фундаментальных форм $\mathbf{B}_c$, $\mathbf{Q}_c$:

$$\mathbf{B}_c=[\mathbf{ET}_c];\ \ \mathbf{Q}_c=\left[-\mathbf{T}_c^*\mathbf{E}\right], \tag{34}$$

в силу (29) эти матрицы должны быть связаны уравнениями

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{P}_1\,[\mathbf{ET}_c]\,\mathbf{D}_1^{-1}=[\mathbf{ET}_b];\\&\mathbf{P}_2\left[-\mathbf{T}_c^*\mathbf{E}\right]\mathbf{D}_2^{-1}=\left[-\mathbf{T}_b^t\mathbf{E}\right].\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Далее удобно использовать экспоненциальную форму **D**:

$$\mathbf{D}_1 = \mathrm{diag}(e^{r+ja},\ e^{p+jb});\ \mathbf{D}_2 = \mathrm{diag}(e^{g+ja},\ e^{w+jb}),$$

причем здесь разбиение на блоки соответствует разбиению $\mathbf{B}_c$, $\mathbf{Q}_c$ в (33), (34), а блоки r, a,... являются сами диагональными матрицами:

$$r = \mathrm{diag}(r_1,\ r_2,...);\ a = \mathrm{diag}(a_1,\ a_2,...)...$$

Из (35) сразу же могут быть определены левые множители:

$$\mathbf{P}_1 = e^{r+ja};\ \mathbf{P}_2 = e^{w+jb}, \tag{36}$$

которые также оказываются диагональными матрицами. Оставшаяся часть системы (35) выглядит таким образом:

$$\mathbf{T}_b = e^{r+ja}\mathbf{T}_c e^{-p-jb};\ \mathbf{T}_b^t = e^{w+jb}\mathbf{T}_c^* e^{-g-ja}. \tag{37}$$

Второе из выражений (37) приводится к виду

$$\mathbf{T}_b = e^{-g+ja}\mathbf{T}_c e^{w-jb}. \tag{38}$$

Если существует некоторое решение первого уравнения системы (35), то оно же будет и решением выражения (38), причем из сравнения (37) и (38) следует:

$$g = -r,\ w = -p. \tag{39}$$

Таким образом, достаточно рассматривать первое уравнение (37). Множители в (37) диагональны, поэтому заполненность матриц $\mathbf{T}_c$, $\mathbf{T}_b$ должна совпадать: каждому ненулевому элементу (ННЭ) T_c соответствует ННЭ $\mathbf{T}_b$; нулевым элементам $\mathbf{T}_c$ соответствуют нулевые же элементы $\mathbf{T}_b$. Пусть ННЭ пронумерованы индексом s, а $i(s)$, $k(s)$ означают соответственно номер строки и столбца, на пересечении которых расположен элемент. Тогда матричное уравнение (37) может быть записано в виде набора скалярных уравнений

$$t_{b,s} = t_{c,s} \times \exp(r_{i(s)} + ja_{i(s)}) \times \exp(-p_{k(s)} - jb_{k(s)}), \tag{40}$$

$$s = 1,\ 2,...,\ N_1,\ \text{где } N_1 \text{ — число ННЭ.}$$

Перейдем к экспоненциальной форме комплексного числа $t_{c,s}$ и вещественного числа $t_{b,s}$:

$$t_{c,s} = \exp(\rho_{c,s} + j\varphi_{c,s});\ t_{b,s} = \exp(\rho_{b,s} + j\pi m_s),$$

$$m_s \in (0,\ 1,...). \tag{41}$$

Подставляя (41) в (42), после разделения вещественных и мнимых частей получаем пару вещественных уравнений из каждого комплексного уравнения (40):

$$p_{k(s)} - r_{i(s)} = \rho_{c,s} - \rho_{b,s}; \tag{42}$$

$$b_{k(s)} - a_{i(s)} = \varphi_{c,s} - \pi m_s,\ s = 1,\ 2,...,\ N_1. \tag{43}$$

Каждое из уравнений (42), (43) при изменении s от 1 до N_1 образует систему линейных алгебраических уравнений. Неизвестным в первой системе является вектор $(p,\ r)$, а во второй — вектор $(a,\ b)$. Число неизвестных в каждой системе равно числу ветвей, а число уравнений равно числу ННЭ. В правой части каждой системы кроме известных коэффициентов $\rho_{c,s}$, $\varphi_{c,s}$ содержатся не определенные еще коэффициенты ρ_{bs}, m_s. Последние можно изменять, чтобы обеспечить разрешимость уравнений. Коэффициенты $\rho_{b,s}$ при решении основной задачи о получении вещественной формы могут быть произвольными; если же требуется получить единичные значения $t_{b,s}$, то $\rho_{b.c}$ должны быть нулевыми. Все коэффициенты m_s должны быть целыми.

Пусть при некотором наборе m_s система (43) имеет решение. Если выбрать $\rho_{b,s}$ так, чтобы

$$\rho_c - \rho_b = \varphi_c - \pi m, \tag{44}$$

то система (42) просто совпадет с системой (43). Таким образом, существование вещественной формы определяется разрешимостью системы (43); она существует тогда и только тогда, когда при некотором наборе значений m_c, система (43) является непротиворечивой.

Схемы, имеющие вещественные матрицы $\mathbf{B}_c$, $\mathbf{Q}_c$, далее именуются полностью разделяющимися. Для них структурные матрицы в осях d, q, 0 распадаются на три независимых компоненты:

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c|c|c|c|} & d & q & 0 \\ \hline d & \mathbf{B}_c & & \\ \hline q & & \mathbf{B}_c & \\ \hline 0 & & & \mathbf{B}_0 \\ \hline \end{array};\quad \mathbf{Q} = \begin{array}{c|c|c|c|} & d & q & 0 \\ \hline d & \mathbf{Q}_c & & \\ \hline q & & \mathbf{Q}_c & \\ \hline 0 & & & \mathbf{Q}_0 \\ \hline \end{array}. \tag{45}$$

Разложение трехфазно-симметричных графов на компонентные графы. Для разложения графа схемы требуется выполнение двух условий:

существование среди эквивалентных представлений $\mathbf{B}_c$, ..., $\mathbf{Q}_0$ таких, в которых все элементы имеют значения 0, ± 1;

существование графов, отображающих эти матрицы.

Если такие графы существуют, то их можно рассматривать как разложение исходного Т-графа G на компонентные графы. И обратно — исходный граф может рассматриваться как некоторое произведение компонентных графов:

$$G = G_d \times G_q \times G_0, \tag{45a}$$

причем графы G_d, G_q совпадают:

$$G_d = G_q = G_c.$$

Для каждого конкретного Т-графа проверка первого условия сводится к анализу разрешимости системы (42) при единичных элементах матрицы $\mathbf{T}_b$, т. е. при нулевых параметрах $\rho_{b,s} = \ln|t_{b,s}|$ $s = 1, 2, ..., N_1$.

Проверка второго условия является одной из стандартных задач теории графов. Установлено, что такой граф существует не всегда; множество матриц с элементами 0, ± 1 шире множества направленных графов [10].

Рассмотрим примеры разложения трехфазных графов. Для графа G_6 (рис. 1) число троек ветвей $N=3$, число троек вершин $\nu_3=1$, число нулевых вершин $\nu_0=2$, число независимых контуров $k=3N-3\nu_3-\nu_1+1=5$. Эти величины можно объединить в спецификацию графа G_6:

N	ν_3	ν_0	k
3	1	3	5

Матрица порождающих контуров имеет вид

1			2			3		
a	b	c	a	b	c	a	b	c
1	0	0	−1	1	0			
−1	0	0				−1	1	0

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

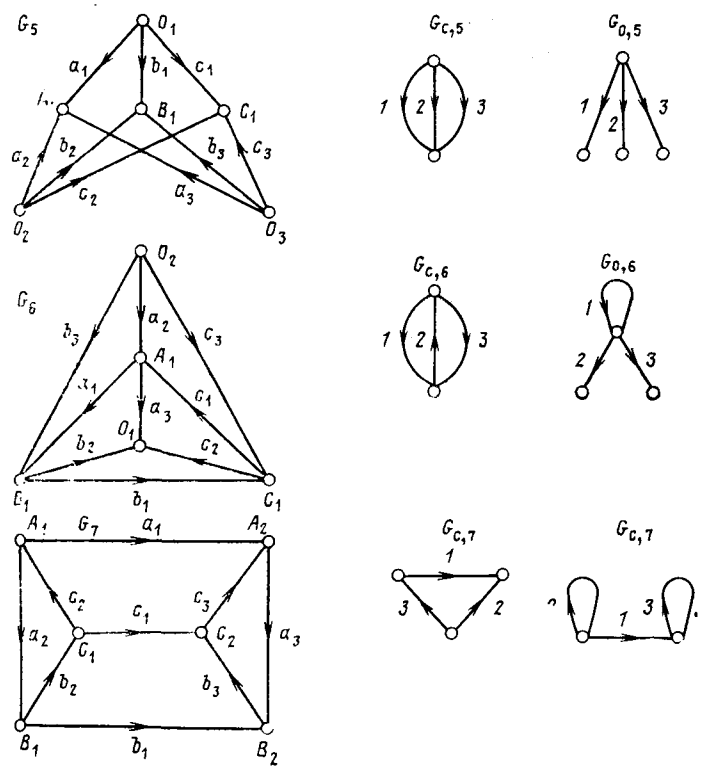


Рис. 1. Факторизация элементарных трехфазно-симметричных графов

из таблицы получаем из нее матрицу $\mathbf{B}_c$:

1	2	3
1	$\sqrt{3}e^{-j\pi/6}$	
-1		$\sqrt{3}e^{-j\pi/6}$

После деления на $\sqrt{3}e^{-j\pi/6}$ обеих строк и перестановки столбцов получаем фундаментальную матрицу контуров:

2	3	1
1		$1/\sqrt{3}\,e^{j\pi/6}$
	1	$-1/\sqrt{3}\,e^{j\pi/6}$

Системы уравнений (42), (43) для этой матрицы таковы:

$$p_1-r_1=1/\sqrt{3};\quad p_1-r_2=1/\sqrt{3};$$
$$b_1-a_1=\pi/6+\pi m_1;\quad b_1-a_2=\pi/6+\pi+\pi m_2.$$

Обе системы имеет бесчисленное множество решений, так что матрица $\mathbf{B}_c$ имеют вещественную форму с коэффициентами 0, ±1, в частности можно взять решение

$$p_1=1/\sqrt{3};\ b_1=\pi/6;\ r_1=r_2=a_1=a_2=0;\ m_1=0;\ m_2=-1,$$

при этом преобразование сводится к изменению масштаба для ветви *1*:

$$1/\sqrt{3}\,e^{j\pi/6}u_{1\,\text{стар}}=u_{1\,\text{нов}};\ \sqrt{3}\,e^{j\pi/6}i_{1\,\text{стар}}=i_{1\,\text{нов}}. \quad (46)$$

Вещественная форма матрицы $\mathbf{B}_c$:

2	3	1
1		1
	1	-1

$$\mathbf{B}_c=\left|\begin{array}{c|c|c} 1 & & 1 \\ \hline & 1 & -1 \end{array}\right|. \quad (47)$$

Матрица $\mathbf{B}_0$ также получается из матрицы порождающих контуров по таблице:

1	2	3
1		

$$\mathbf{B}_0=\left|\begin{array}{c|c|c} 1 & & \end{array}\right|. \quad (48)$$

Обе матрицы $\mathbf{B}_{c6}$, $\mathbf{B}_{06}$ могут отображаться графами, так что граф G_6 является разделяющимся. Компонентные графы G_{c6}, G_{06} показаны на рис. 1. Общее число контуров в разложении $G_6=G_{c6}\times G_{c6}\times G_{06}$, как и следовало ожидать, равно числу независимых контуров $2k_{06}+k_{06}=k_6=5$. Аналогичным образом допускают разложение на компонентные графы, остальные два графа G_5, G_7 на рис. 1. Однако не все Т-графы таковы. Простейший пример обратного дает граф G_{11} (рис. 2). Его спецификация:

N	ν_3	ν_0	k	p
4	2	0	7	5

Матрица порождающих контуров составляется из двух контуров третьей степени и одного контура первой степени:

1	2	3	4
1 0 0	-1 0 0		-1 0 0
	1 0 0	-1 0 0	0 -1 0
			1 1 1

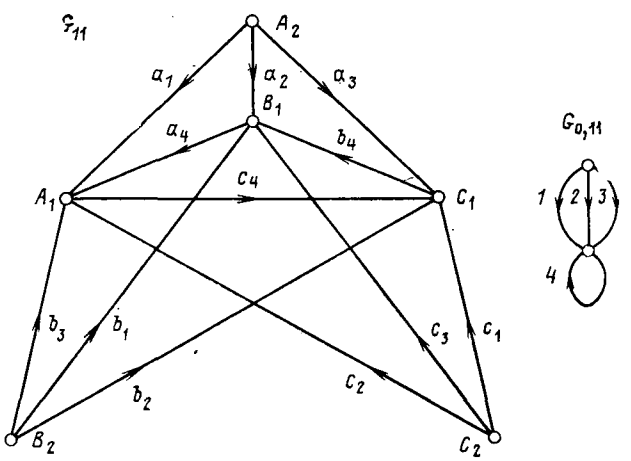


Рис. 2. Неразложимый трехфазно-симметричный граф

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Из таблицы получаем первоначальную форму $\mathbf{B}_c$, $\mathbf{B}_0$:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & -1 & & -1 \\ & 1 & -1 & -1 \\ & & & \sqrt{3} \\ \hline\end{array}; \quad \mathbf{B}_c = \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & -1 & & -1 \\ & 1 & -1 & -e^{-j\pi/3} \\ \hline\end{array}.$$

Приведение к фундаментальной форме дает

$$\mathbf{B}_0 = \begin{array}{|cccc|}\hline 2 & 3 & 4 & 1 \\ \hline 1 & & & -1 \\ & 1 & & -1 \\ & & 1 & \\ \hline\end{array}; \quad \mathbf{B}_c - \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 3 & 2 & 4 \\ \hline 1 & & -1 & -1 \\ & 1 & -1 & e^{-j2\pi/3} \\ \hline\end{array}.$$

Уравнения (43) для аргументов имеют вид

$b_2 - a_1 = \pi - \pi m_1$; $b_4 - a_1 = \pi - \pi m_2$; $b_2 - a_2 = \pi - \pi m_3$; $b_4 - a_2 = -\frac{2\pi}{3} - \pi m_4$.

Из первой пары этих уравнений имеем $b_2 - b_4 = \pi \times (m_2 - m_1)$, а из второй пары — $b_2 - b_4 = \frac{\pi}{3} + \pi\,(m_4 - m_3)$.

При любых целых $m_1, \ldots, m_4$ последние два уравнения несовместны, система (43) для G_{11} решения не имеет и вещественная форма $\mathbf{B}_c$ для него не существует. Разумеется, для G_{11} невозможно и выполнение следующих этапов, т. е. получение целочисленной $\mathbf{B}_c$ и построение компонентных графов. Вопрос о существовании Т-графов, которые имеют вещественную $\mathbf{B}_c$, но не имеют компонентных графов, остается нерешенным. До сих пор не удалось ни найти примеров таких графов, ни доказательства того, что они не существуют.

В следующем примере рассматривается цепь с идеальными трансформаторами (ИТ) — эквивалентная схема 12-пульсного инвертора тока (рис. 3, *а*), в которой коммутаторы заменены источниками тока (рис. 3, *б*). При использовании обычной схемы замещения трехобмоточного трансформатора схема распадается на 4 двусвязных подграфа G_1—G_4, причем G_3 отображает трансформатор. Ветви $a_{m1}, \ldots, a_{m4}$ являются индуктивностями, ветви *7*, *8* — емкостями, ветви *1*, *3* — источниками тока, а ветви *2'*, *2''*; *4'*, *4''*; *5'*, *5''* образуют ИТ. При анализе цепей с ИТ выполняются два преобразования структурных уравнений: ортогонализация и исключение ИТ, описанное в [12]. Удобней начинать с первого. Матрица порождающих контуров подграфа G_1

$$\overline{\mathbf{B}}_1 = \begin{array}{|ccc|ccc|ccc|}\hline & 1 & & & 7 & & & 2' & \\ \hline 1 & -1 & 0 & & & & 1 & 0 & 0 \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline\end{array},$$

из нее получаем:

$$\mathbf{B}_{c1} = \begin{array}{|ccc|ccc|ccc|}\hline & 1 & & & 7 & & & 2' & \\ \hline \sqrt{3}\,e^{j\pi/6} & & & & & & & 1 & \\ \hline & & & & 1 & & & -1 & \\ \hline\end{array}; \quad \mathbf{B}_{01} = \begin{array}{|ccc|ccc|ccc|}\hline & 1 & & & 7 & & & 2' & \\ \hline & & & & & & & 1 & \\ \hline & & & & 1 & & & -1 & \\ \hline\end{array}.$$

Изменение координат ветви *1* приводим $\mathbf{B}_{c1}$ к вещественной форме:

$$\mathbf{B}_{c1} = \begin{array}{|ccc|ccc|ccc|}\hline & 1 & & & 7 & & & 2' & \\ \hline & 1 & & & & & & 1 & \\ \hline & & & & 1 & & & -1 & \\ \hline\end{array}; \quad \mathbf{B}_{01} = \begin{array}{|ccc|ccc|ccc|}\hline & 7 & & & 2' & & & 1 & \\ \hline & 1 & & & & & & & \\ \hline & & & & 1 & & & & \\ \hline\end{array}.$$

Аналогичным образом получаем компонентные контурные матрицы подграфов G_2—G_4. Объединяя их в общую матрицу и добавляя к ней уравнения ИТ, получаем расширенную матрицу $\mathbf{B}_c$:

	1	7	2'	3	8	4'	2''	4''	5''	m1	m2	m3	5'	6
G_1	1		−1											
		1	−1											
G_2				1	1									
					−1	−1								
G_3							1			−1	−1	−1		
								1		−1				
									1	−1	−1			
G_4													1	1
UT_2			−1				$\sqrt{3}$							
UT_4						−1		1						
UT_5									1				−1	

(Здесь приняты коэффициенты трансформации $k_2 = \sqrt{3}$, $k_{4,5} = 1$). После отделения по алгоритму [12] строк, не зависящих от ИТ, получим сокращенную контурную матрицу:

$$\mathbf{B}_c = \begin{array}{|cccccccc|}\hline 1 & 3 & 7 & 8 & m1 & m_2 & m3 & 6 \\ \hline 1 & & 1 & & & & & \\ & & 1 & & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & \\ & 1 & & 1 & & & & \\ & & & -1 & 1 & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ \hline\end{array}$$

Комбинируя строки, а затем изменяя масштаб для ветвей *1* и *7* в $\sqrt{3}$ раз, получаем приведенную фунда-

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

ментальную матрицу

$$\mathbf{B}_c = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & m1 & m2 & m3 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & & & & & & 1 & \\ \hline & 1 & & & & & & 1 \\ \hline & & 1 & & & & & -1 \\ \hline & & & 1 & & 1 & & 1 \\ \hline & & & & 1 & -1 & -1 & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Эта матрица может быть отображена графом G_c (рис. 3, *в*), который в точности соответствует интуитивному представлению о структуре схемы. В ходе получения (49) координаты для ветвей *1*, *7*, *8* были изменены так:

$$u_{1\,\text{нов}} = e^{j\pi/6} u_1;\ u_{7\,\text{нов}} = 1/\sqrt{3}\, u_7;\ u_{8\,\text{нов}} = 1/\sqrt{3}\, e^{-j\pi/6} u_8.$$

Анализ переходных процессов линейных трехфазно-симметричных схем с помощью компонентных структурных матриц. После перехода к вращающимся ортогональным координатам и последующего перехода к комплексной форме уравнения ветвей приобретают вид для емкостей:

$$C u_C' + (g + \dot{\vartheta} C)\, u_C = i_C; \tag{50}$$

для индуктивностей:

$$L i_L' + (R + j\dot{\vartheta} L)\, i_L = u_L, \tag{51}$$

где $\dot{\vartheta}$ — скорость вращения координат.

Уравнения резисторов не изменяются; не изменяются и уравнения RC — ветвей по нулевой оси. Собственные уравнения ветвей по осям c, О не связаны друг с другом, независимы и структурные уравнения, так что остается задача анализа двух независимых схем, суммарный размер которых меньше исходной схемы. При анализе может применяться любой метод: контурных токов (МКТ), узловых потенциалов (МУП) или многоступенчатый алгоритм метода переменных состояния [1]. Отличия от стандартного случая состоят в следующем:

все операции транспонирования структурных матриц должны быть дополнены комплексным сопряжением. В частности, в формулировке МКТ следует брать $\mathbf{BLB}^*$ вместо $\mathbf{BLB}^t$ и т. д.;

процедуры, оперирующие со структурными матрицами (получение фундаментальной формы или приведение к ступенчатой форме), должны быть рассчитаны на операции с комплексными числами.

В результате процедуры формирования системы дифференциальных уравнений (СДУ) получаются две независимые подсистемы. Первая из них является СДУ с комплексными функциями и с комплексными коэффициентами. Вторая (подсистема 0) является СДУ с вещественными коэффициентами относительно вещественных функций.

Для важного класса разделяющихся Т-схем набор дифференциальных уравнений выглядит еще проще. Поскольку $\mathbf{B}_c$, $\mathbf{Q}_c$ для них вещественны, первая СДУ, связывающая комплексные переменные, имеет для них вещественные коэффициенты.

В детальном описании процедуры формирования СДУ нет необходимости, так как она отличается от обычной процедуры, подробно описанной в [1—4], только пере-

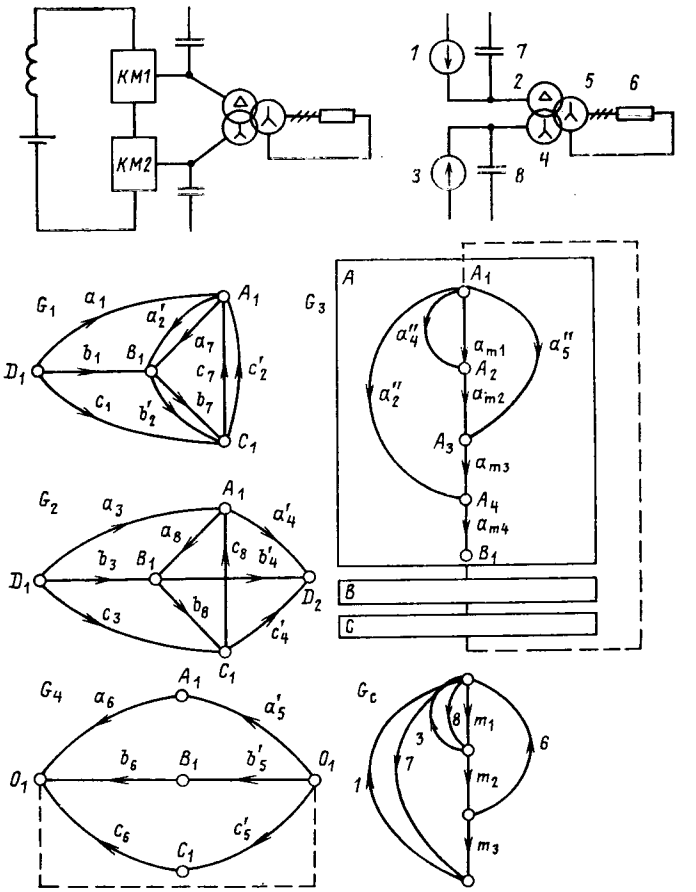


Рис. 3. Преобразование схемы инвертора тока к ортогональным координатам

численными выше тривиальными изменениями. Ограничимся рассмотрением предельно упрощенного примера с графом G_6 (рис. 1), в котором каждая ветвь состоит из последовательно включенных элементов L, R, V, так что уравнения ветвей могут быть записаны в виде

$$Li' + Ri + V = u.$$

(Система координат предполагается неподвижной.) Уравнения Кирхгофа для компоненты c имеют вид

$$\mathbf{B}_c u = 0;\ \mathbf{B}_c^* i_к = i,$$

где $i_к$ — вектор контурных токов.

По формуле контурных токов получаем

$$i_k' = -L_к^{-1}(R_к i_к + V_к), \tag{52}$$

где

$$L_к = \mathbf{B}_c L \mathbf{B}_c^*;\ R_к = \mathbf{B}_c R \mathbf{B}_c^*;\ V_к = \mathbf{B}_c V. \tag{53}$$

Учитывая, что для ветви *1* координаты преобразовывались при получении $\mathbf{B}_c$ по формуле (46), и выполняя подстановки из (47) и (53), получаем

$$L_к = \left[\begin{array}{c|c} L_2 + {}^1/_3 L_1 & -{}^1/_3 L_1 \\ \hline -{}^1/_3 L_1 & L_3 + {}^1/_3 L_1 \end{array}\right];\ R_к = \left[\begin{array}{c|c} R_2 + {}^1/_3 R_1 & -{}^1/_3 R_1 \\ \hline -{}^1/_3 R_1 & R_3 + {}^1/_3 R_1 \end{array}\right]$$

$$V_к = \begin{bmatrix} V_{c2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} e^{j\frac{\pi}{6}} V_{c1} \\ V_{c3} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} e^{j\frac{\pi}{6}} V_{c1} \end{bmatrix}.$$

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

По нулевой оси уравнения тривиальны. Таким образом, вся схема при произвольных значениях коэффициентов L_i, R_i, $i=1, 2, 3$ описывается СДУ второго порядка. При обычном способе машинного анализа формировалась бы СДУ пятого порядка.

Собственные числа к функции системы дифференциальных уравнений обычно бывают комплексными, даже если коэффициенты СДУ действительны. Процедура решения включает в себя как промежуточный этап отыскание комплексного решения, мнимая часть которого затем отбрасывается [13]. Таким образом, при анализе однофазных схем используется всегда только половина получаемого решения. При анализе трехфазных схем решения используются целиком: вещественная составляющая решения есть составляющая по оси d, мнимая — составляющая по оси q.

Число ветвей в каждом графе G_c, G_0 втрое меньше, чем в исходном графе G. Число сечений и контуров по крайней мере вдвое меньше, чем в G, поскольку $2k_c+k_0=k$, $2p_c+p_0=p$, откуда следует $k_c\leqslant k/2$, $p_c\leqslant k/2$. Соответственно и максимальная размерность СДУ при переходе к координатам c, 0 уменьшается по крайней мере вдвое, что уже наблюдалось в примере.

Анализ установившихся режимов Т-схем символическим методом с применением компонентных структурных матриц. Симметричная тройка синусоидальных функций

$$x_\Phi(\nu+\varphi)=\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\,\mathrm{col}\left(\cos(\nu+\varphi);\ \cos\left(\nu+\varphi-\frac{2\pi}{3}\right),\ \cos\left(\nu+\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)\right),\quad \nu=\omega t$$

при преобразовании Парка с углом поворота ν переходит в постоянный вектор

$$\chi(\nu)\,x_\Phi(\nu+\varphi)=x\,\mathrm{col}(\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0).$$

Если угол поворота координат ϑ отличается от ν, то $\chi(\vartheta)\,x_\Phi(\nu+\varphi)=\left(\begin{array}{c|c}\lambda(\vartheta-\varphi) & \\ \hline & 1\end{array}\right)x\,\mathrm{col}(\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0)$.

После перехода к комплексной форме последнее выражение переходит в следующее:

$$x_\Phi(\nu+\varphi)\Rightarrow\vec{x}=(Xe^{j\varphi})\,e^{j(\nu-\vartheta)}=\vec{X}e^{j(\nu-\vartheta)},\tag{54}$$

где $\vec{X}$ — комплексная амплитуда.

Если тройка величин x_Φ несимметрична, ее можно разложить на симметричные составляющие

$$\left.\begin{aligned}&\vec{x}(\nu)=\vec{X}_{\text{пр}}e^{j(\nu-\vartheta)}+\vec{X}_{\text{об}}e^{j(-\nu-\vartheta)};\\&x_0=x_0\cos(\nu+\varphi_0).\end{aligned}\right\}\tag{55}$$

Уравнения Кирхгофа для $\vec{u}$, $\vec{i}$, u_0, i_0 формируются с помощью компонентных структурных матриц:

$$\mathbf{B}_c\vec{u}=0;\quad Q_c\vec{i}\equiv0;\quad B_0u_0\equiv0;\quad Q_0i_0\equiv0.\tag{56}$$

Подставляя $\vec{u}$ из (55) в (56), получаем

$$(\mathbf{B}_c\vec{U}_{\text{пр}})\,e^{j\nu}+(B_c\vec{U}_{\text{об}})\,e^{-j\nu}\equiv0,\quad \nu=\omega t.$$

Для выполнения этого равенства при переменном ν необходимо, чтобы отдельно выполнялись равенства

$$\mathbf{B}_c\vec{U}_{\text{пр}}=0;\quad \mathbf{B}_c\vec{U}_{\text{об}}=0.\tag{57}$$

Аналогично получается

$$\mathbf{Q}_c\vec{I}_{\text{пр}}=0,\quad \mathbf{Q}_c\vec{I}_{\text{об}}=0.\tag{58}$$

Таким образом, матрицы $\mathbf{Q}_c$, $\mathbf{B}_c$ описывают наряду с прочими и уравнения Кирхгофа для комплексных амплитуд прямой и обратной последовательностей. Собственные уравнения ветвей после перехода к комплексным амплитудам оказываются сопряженными:

$\vec{U}_{\text{пр}}=(R+j\nu L)\vec{I}_{\text{пр}}$; $\vec{U}_{\text{об}}=(R-j\nu L)\vec{I}_{\text{об}}$ — для LR-ветвей

$\vec{I}_{\text{пр}}=(g+j\nu C)\vec{U}_{\text{пр}}$, $\vec{I}_{\text{об}}=(g-j\nu C)\vec{U}_{\text{об}}$ — для C_g-ветвей.

В общем случае

$$\vec{U}_{\text{пр}}=z(j\nu)\,\vec{I}_{\text{пр}},\quad \vec{U}_{\text{об}}=z^*(j\nu)\,I_{\text{об}}.\tag{59}$$

Уравнения прямой и обратной последовательностей независимы друг от друга. Для решения можно использовать любой метод анализа. Рассмотрим применение МКТ. Если цепь не содержит источников тока, то отделив z-ветви от источников (V-ветви), получаем

$$\mathbf{B}_c=\boxed{B_z\,|\,B_V}.$$

Контурные токи вводятся уравнением

$$I_{\text{пр}}=B_z^*I_{\text{пр. к}}.$$

Уравнения Кирхгофа для напряжений:

$$B_z\vec{U}_{\text{пр}}=-B_V\vec{V}_{\text{пр}},$$

уравнения z-ветвей

$$\vec{U}_{\text{пр}}=z(j\nu)\,\vec{I}_{\text{пр}}.$$

Комбинируя эти уравнения как обычно, получаем

$$\vec{I}_{\text{пр. к}}=-z_{\text{к}}^{-1}B_V\vec{V}_{\text{пр}},\quad z_{\text{к}}=B_z\mathbf{Z}(j\nu)\,B_z^*.\tag{60}$$

Для обратной последовательности

$$\vec{I}_{\text{об к}}=-(z_{\text{к}}^{-1})^*B_V\vec{V}_{\text{об}}.\tag{61}$$

При расчете трехфазной схемы по (60) и (61) нужно выполнить только одно обращение матрицы, вторая получается сопряжением. Аналогично получаются формулы для анализа по МУП:

$$\vec{U}_{\text{пр}}=-\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Q}_J\vec{J}_{\text{пр}},\quad \vec{U}_{\text{об}}=-(\mathbf{Y}^{-1})^*\mathbf{Q}_J\vec{J}_{\text{об}};\quad \mathbf{Y}=\mathbf{Q}_y y\mathbf{Q}_y^*.\tag{62}$$

Нулевая компонента рассчитывается как обычная однофазная схема. И здесь имеется то существенное отличие между анализом трехфазных и однофазных схем, которое уже отмечалось ранее. При анализе однофазной схемы после вычисления комплексных амплитуд и комплексных мгновенных значений половина решения отбрасывается:

$$x(t)=\mathbf{Re}\,(\vec{x}e^{j\nu(t)}).$$

При анализе трехфазных схем

$$x(t)=\vec{x}_{\text{пр}}e^{j\nu(t)}+\vec{x}_{\text{об}}e^{-j\nu(t)}.$$

Составляющие этой суммы есть переменные по осям d, q:

$$x_d(t)=\mathbf{Re}\,(\vec{X}_{\text{пр}}e^{j\nu(t)}+\vec{X}_{\text{об}}e^{-j\nu(t)});$$

$$x_q(t)=\mathbf{Im}\,(\vec{X}_{\text{пр}}e^{j\nu(t)}+\vec{X}_{\text{об}}e^{-j\nu(t)}).$$

Отбрасываемых членов здесь нет; все найденное решение используется целиком. Именно этим достигается экономия.

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Рассмотрим численный пример с инвертором, представленным на рис. 3. При идеальных трансформаторе и коммутаторах в выходном напряжении интвертора не было бы 5-й гармоники. Однако из-за несимметричного расположения обмоток *2* и *4* относительно стержня схема замещения трансформатора (рис. 3, *в*, граф G_3) не полне симметрична, так что в выходном напряжении появляется 5-я гармоника. Оценим ее при следующих значениях параметров:

$$L_1=10;\ L_2,\ L_3=0{,}1;\ C_7,\ C_8=1;\ R_6=1;\ \dot{\nu}=1;$$

$$i_1(t)=e^{jt}+0{,}2e^{-5jt}+\ldots;\ i_3(t)=e^{j\left(t+\frac{\pi}{6}\right)}+$$
$$+0{,}2e^{-5j\left(t+\frac{\pi}{6}\right)}+\ldots$$

(Пятая гармоника имеет обратную последовательность, поэтому знак минус). В ходе приведения структурных матриц координаты ветви *1* были изменены:

$$i_{1\,\text{нов}}=e^{j\frac{\pi}{6}}i_{1\,\text{стар}},\quad u_{1\,\text{нов}}=e^{j\frac{\pi}{6}}u_{1\,\text{стар}}.$$

В новых координатах

$$i_1=e^{j\left(t+\frac{\pi}{6}\right)}+0{,}2e^{j\left(-5t+\frac{\pi}{6}\right)}+\ldots.$$

Комплексные амплитуды токов

$$\vec{I}_1^{(1)}=\vec{I}_3^{(1)}=e^{j\frac{\pi}{6}},\quad \vec{I}_1^{(5)}=0{,}2e^{j\frac{\pi}{6}},\quad \vec{I}_3^{(5)}=0{,}2e^{-j5\frac{\pi}{6}}.$$

Поскольку цепь возбуждается источником тока, лучше использовать МУП. Матрица сечений имеет вид

$$\mathbf{Q}_c=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}1 & 3 & m_1 & m_2 & m_3 & 6 & 7 & 8\end{array}\\ \left|\begin{array}{c|c||c|c|c|c|c|c}
 & & & -1 & 1 & 1 & & \\ \hline
-1 & & & & 1 & & 1 & \\ \hline
 & -1 & 1 & -1 & & & & 1
\end{array}\right|\end{array}$$

Слева отделен блок $\mathbf{Q}_J$. Уравнение (62) после подстановки $\mathbf{Q}_y$, $\mathbf{Q}_J$ дает

$$\begin{bmatrix}\vec{U}_6\\ \vec{U}_7\\ \vec{U}_8\end{bmatrix}=-\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Q}_J\begin{pmatrix}\vec{I}\\ \vec{I}_3\end{pmatrix}=\mathbf{Y}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \vec{I}_1\\ \vec{I}_3\end{pmatrix}. \qquad (64)$$

Проводимости ветвей по первой гармонике

m_1	m_2	m_3	6	7	8
$-0{,}1j$	$-10j$	$-10j$	1	j	j

Подстановка в (62) дает

$$\mathbf{Y}=\begin{vmatrix}1-20j & -10j & -10j\\ -10j & -9j & 0\\ -10j & 0 & -9{,}1j\end{vmatrix}. \qquad (65)$$

Далее получаем из (64), (65) первые гармоники:

$$\begin{bmatrix}\vec{U}_6\\ \vec{U}_7\\ \vec{U}_8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}9501; & 145{,}46^\circ\\ 0{,}9566; & -31{,}67^\circ\\ 0{,}9460; & -31{,}67^\circ\end{bmatrix}$$

Из-за несимметрии $\vec{U}_7$, $\vec{U}_8$ несколько различаются. Проводимости ветвей для 5-й гармоники

	m_1	m_2	m_3	6	7	8
$y^*=$	0,02	$2j$	$2j$	1	$-5j$	$-5j$

а матрица узловых проводимостей

$$\mathbf{Y}^*=\begin{vmatrix}1+4j & 2j & 2j\\ 2j & -3j & 0\\ 2j & 0 & -2{,}98j\end{vmatrix}.$$

Подстановка $\mathbf{Y}^*$ в (62) определяет комплексные амплитуды 5-й гармоники:

$$\begin{bmatrix}\vec{U}_6\\ \vec{U}_7\\ \vec{U}_8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1{,}3257\times10^{-4}; & 128{,}52^\circ\\ 6{,}6754\times10^{-2}; & 120{,}001^\circ\\ 6{,}7026\times10^{-2}; & -60{,}011^\circ\end{bmatrix}$$

Интересно сравнить их с первой канонической гармоникой (здесь — 11-й). Расчет для нее дает

$$\begin{bmatrix}\vec{U}_6\\ \vec{U}_7\\ \vec{U}_8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7{,}3826\times10^{-3}; & -33{,}2^\circ\\ 8{,}4206\times10^{-3}; & 117{,}96^\circ\\ 8{,}4282\times10^{-3}; & 117{,}96^\circ\end{bmatrix}.$$

Заключение. 1. Эффективное использование при машинном анализе симметрии трехфазных схем достигается переходом к ортогональным координатам непосредственно на уровне структурных уравнений. Матрицы последних распадаются при этом на независимые блоки — компонентные структурные матрицы, каждая из которых описывает отдельную подсистему. Последующий анализ компонент ведется с помощью обычных процедур анализа цепей после незначительного их изменения. Получаемые уравнения в 2—3 раза проще, чем уравнения, формируемые обычными машинными методами без учета симметрии.

2. Для всех Т-схем отделение подсистем (d, q) и (0) достигается уже при переходе к произвольным ортогональным координатам. Существует большой класс Т-схем (полностью разделяющиеся схемы), для которых подбором системы координат можно дополнительно отделить друг от друга подсистемы (d) и (q). Однако не все Т-схемы полностью разделимы.

3. Среди разделяющихся Т-схем имеется особый подкласс, для которого компонентные структурные матрицы могут быть представлены графами. Компонентные графы могут рассматриваться как результат разложения Т-графа и наоборот — исходный Т-граф может рассматриваться как некоторое произведение компонентных графов. Переход к разложениям более высокого урав-

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

нения позволяет вводить дополнительные упрощения в процедуры анализа.

4. Симметрии, отличающиеся от трехфазной, также могут изучаться и использоваться на уровне структурных матриц путем подбора соответствующего преобразования координат. Кроме упрощения численного анализа, на этом пути могут быть получены полезные качественные результаты. В частности, представляет интерес изучение симметрий сложных схем непосредственных преобразователей частоты. Можно ожидать, что при этом удастся получить строгое математическое описание некоторых интуитивно ясных, но трудно формулируемых закономерностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чуа Л. О., Пен-Мин-Лин.** Машинный анализ электронных схем. — М.: Энергия, 1980.
2. **Сигорский В. П., Петренко А. И.** Алгоритмы анализа электронных схем.: М.: Советское радио, 1976.
3. **Анисимов Б. В., Белов Б. И., Норенков И. П.** Машинный расчет элементов ЭВМ. — М.: Высшая школа, 1976.
4. **Петренко А. И., Власов А. И., Тимченко А. П.** Табличные методы моделирования электронных схем на ЭВМ. — Киев, Вища школа, 1977.
5. **Нейман Л. Р., Демирчян К. С.** Теоретические основы электротехники, т. 1.—Л.: Энергия, 1967.
6. **Бессонов Л. А.** Теоретические основы электротехники. — М.: Высшая школа, 1973.
7. **Крон Г.** Применение тензорного анализа в электротехнике. — М.—Л.: Госэнергоиздат, 1955.
8. **Крон Г.** Исследование сложных систем по частям — диакоптика. — М.: Наука, 1972.
9. **Кениг Г., Блекуэлл В.** Теория электрических систем. — М.—Л.: Энергия, 1965.
10. **Сешу С., Рид М. Б.** Линейные графы и электрические цепи.— М.: Высшая школа, 1971.
11. **Ковач К. П., Рац И.** Переходные процессы в машинах переменного тока.— М.—Л.: Госэнергоиздат, 1963.
12. **Мустафа Г. М.** Рациональные структурные матрицы и алгебраизация методов анализа цепей. — Электричество, 1984, № 1.
13. **Понтрягин Л. С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1965.

[29.03.84]

УДК 538.3.001.24

Электромагнитный расчет проводящего диска

АСТАХОВ В. И., канд. физ.-мат. наук

Новочеркасский политехнический институт

Проводящий диск является элементом конструкции многих электротехнических устройств (например счетчиков электрической энергии, тахометров, униполярных машин, электромагнитных тормозов). При проектировании таких устройств важную роль играет расчет электромагнитного процесса, происходящего в диске, позволяющий определить такие характеристики устройств, как мощность потерь энергии и тормозной момент в функции частоты изменения магнитного поля, скорости вращения диска, свойств материала и других параметров элементов конструкции. Представленный ниже материал может служить основой для выполнения подобного расчета.

Интегральное уравнение вихревых токов. Пусть диск радиусом R, толщиной $h \ll R$, проводимостью γ и магнитной проницаемостью μ (h, γ, μ—const) помещен в заданное поперечное магнитное поле сторонних источников индукции $\bar{B}^0(M, t)$. Допустим также, что диск вращается с угловой скоростью ω_α вокруг своей оси, которую совместим с осью Oz системы цилиндрических координат 0, r, α, z. Электромагнитный процесс будем считать квазистационарным, т. е. полагать скорость частиц диска много меньшей скорости света в вакууме, а частоту f изменения магнитного поля во времени достаточно малой, чтобы можно было пренебречь токами смещения и их магнитным полем.

В общем случае возможны два режима — переходный и установившийся, которые целесообразно рассматривать отдельно. Проанализируем сначала гармонический установившийся режим, когда индукция $\bar{B}^0(M, t)$ характеризуется комплексом амплитуды $\dot{\bar{B}}^0(M)$

$$\bar{B}^0(M, t) = \dot{\bar{B}}^0(M)\, e^{j\omega_f t},$$

где $\omega_f = 2\pi f$, $\omega_f \geqslant 0$.

Вихревые токи в наших условиях удобно характеризовать комплексом амплитуды скалярной функции тока $\dot{V}(r, \alpha)$, определенной на срединной плоскости диска $z=0$, равной нулю на границе $r=R$ и связанной с комплексом листовой плотности тока $\dot{\bar{\sigma}}(r, \alpha)$ равенством

$$\dot{\bar{\sigma}} = \bar{e}_r \frac{1}{r} \frac{d\dot{V}}{\partial\alpha} - \bar{e}_\alpha \frac{\partial\dot{V}}{\partial\tilde{r}}, \; r < R.$$

Применяя к рассматривающимся полям преобразование Фурье по координате α, определенное соотношениями

$$\bar{a}_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{\pi} e^{jm\alpha} \bar{a}(\alpha)\, d\alpha, \; \bar{a}(\alpha) = \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{a}_m e^{-jm\alpha},$$

$$m = .., -1, 0, 1, ...,$$

получим задачу по заданному фурье-образу $\dot{\bar{B}}^0_m(r, z)$ комплекса индукции стороннего поля найти фурье-образ $\dot{V}_m(r)$ комплекса функции вихревого тока в диске.

Аналогичная задача для неподвижной оболочки вращения рассматривалась в [1], а для полосы, движущейся в стационарном магнитном поле — в [2]. Следуя [1 и 2], для искомой функции имеем краевую задачу:

$$\Delta\dot{V}_m = j(\omega_j - m\omega_\alpha)\, \gamma \dot{B}_{zm}, \; r < R, \; z = 0; \tag{1}$$

$$\dot{V}_m = 0, \; r = R; \tag{2}$$

$$\dot{B}_{zm} = \dot{B}^0_{zm} + \dot{B}^*_{zm};$$

$$\dot{B}^*_{zm}(r_M) = -\Delta \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^R \dot{V}_m(r_N) \times$$

$$\times \int_0^\pi \frac{\cos m\alpha\, d\alpha\, dr_N}{\sqrt{r_N^2 + r_M^2 - 2r_N r_M \cos\alpha}}, \; z \to 0,$$

где $\Delta\xi = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\xi}{dr}\right) - \frac{m^2}{r^2}\xi$ — фурье-образ двумерного

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

лапласиана функции ξ; $\dot{\gamma}=\frac{2\gamma}{p}\,\mathrm{th}\,\frac{ph}{2}$ — комплексная листовая проводимость диска; $p=\sqrt{j(\omega_f-m_\alpha)\gamma\mu}$; $j=\sqrt{-1}$; $\dot{B}_{zm}$, $\dot{B}^*_{zm}$ — z-компоненты фурье-образа комплексов индукции результирующего магнитного поля и поля вихревых токов диска соответственно.

Интегральное соотношение (4), замыкающее краевую задачу, представляет собой закон Био — Савара для идеализированного (бесконечно тонкого) диска, выраженный через функцию вихревого тока [1]. Неравномерность распределения вихревого тока по толщине реального диска при переходе к идеализированному учитывается комплексной листовой проводимостью $\dot{\gamma}$, соответствующей изменению объемной плотности тока $\bar{\delta}$ вдоль оси координаты z по закону [2]

$$\dot{\bar{\delta}}_m(z)=\dot{\bar{\delta}}_m(0)\,\mathrm{ch}\,pz=\dot{\bar{\sigma}}\frac{p\,\mathrm{ch}\,pz}{2\,\mathrm{sh}\,p\frac{h}{2}}.$$

В отношении идеализации диска уместны следующие замечания. Введение комплексной листовой проводимости $\dot{\gamma}$ базировалось в [2] на выполнении условия $(2\pi/L)^2\ll\omega\gamma\mu/2$, где L — наименьший период вдоль срединной плоскости учитываемых пространственных гармоник вихревого тока, $\omega=|\omega_f-m\omega_\alpha|$. Однако для тонкого проводника ($L\gg\pi h$) роль упомянутого условия снижается, так как его нарушение оказывается возможным в случае малых значений аргумента входящего в определение $\dot{\gamma}$ гиперболического тангенса, когда неточность определения волнового параметра p несущественна. Действительно, в этом случае $\dot{\gamma}=\frac{2\gamma}{p}\,\mathrm{th}\,p\frac{h}{2}\approx\gamma h$. Величина L при использовании для аппроксимации решения координатных функций в конкретных условиях может быть оценена исходя из скорости затухания вклада отдельных функций (с ростом их номера) в рассчитываемый параметр электромагнитного процесса.

Замена диска бесконечно тонким при вычислении магнитной реакции способствует некоторому завышению значения последней, причем в наибольшей степени у края проводника. Кроме того, в приграничной зоне шириной порядка толщины проводника при $\sqrt{2/\omega\gamma\mu_0}<h$ распределение тока является существенно трехмерным и эта зона, строго говоря, должна рассматриваться как массивный элемент. Поскольку токи имеют тенденцию уплотняться у края, при упомянутом условии роль приграничной зоны возрастает. Эту ситуацию в дальнейшем из рассмотрения исключаем, отметив возможность формулирования соответствующей задачи, исходя из краевых условий, предложенных в [3].

Аналогично [1] краевая задача (1) — (4) приводится к уравнению второго рода:

$$\dot{V}_m=-k\mathbf{K}\dot{V}_m+\dot{V}^0_m \tag{5}$$

с интегральным оператором $\mathbf{K}_m$, определяемым равенством

$$\mathbf{K}_m\xi(r_M)=1\cdot3\cdot\cdot(2|m|\mp1)\frac{\pi}{|m|!}\int_0^R\xi(r_N)\sqrt{\frac{r_1r_N}{r_2r_M}}\times$$
$$\times\left(\frac{r_1}{2r_2}\right)^{|m|}F\left(\frac{1}{2},|m|+\frac{1}{2};|m|+1;\right.$$
$$\left.\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)dr_N-A_m\left(\frac{r_m}{R}\right)^{|m|}, \tag{6}$$

где верхний и нижний знаки отвечают соответственно значениям

$$|m|>0,\ m=0;\ r_1=r_N,\ r_2=r_M\ \text{при}\ r_N<r_M;$$
$$r_1=r_M,\ r_2=r_N\ \text{при}\ r_N>r_M;$$

$F(a,b;c;x)=1+\frac{ab}{c1}x+\frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)\,1\cdot2}x^2+\ldots$ — гипергеометрический ряд, а числовой сомножитель A_m совпадает со значением первого (интегрального) слагаемого правой части равенства (6) при $r_M=R$, обеспечивая выполнение условия $\mathbf{K}_m\xi(R)=0$; $k=j\,(\omega_f-m\omega_\alpha)\mu_0\gamma/2\pi$; $\dot{V}^0_m$ — фурье-образ комплекса функции вихревого тока, обусловленного сторонним магнитным полем, является решением краевой задачи

$$\Delta\dot{V}^0_m=j(\omega_f-m\omega_\alpha)\dot{\gamma}\dot{B}^0_{zm},\ r<R, \tag{7}$$
$$\dot{V}^0_m=0,\ r=R, \tag{8}$$

представим его в виде [1]

$$\dot{V}^0_m(r_M)=\frac{-j(\omega_f-m\omega_\alpha)\dot{\gamma}}{2|m|}\int_0^R\dot{B}^0_{zm}(r_N)\cdot r_N\left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{|m|}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{r_Nr_M}{R^2}\right)^{|m|}\right]dr_N,\ |m|>0;$$

$$\dot{V}^0_m(r_N)=j(\omega_f-m\omega_\alpha)\dot{\gamma}\int_0^R\dot{B}^0_{zm}(r_N)\,r_N\ln\frac{r_2}{R}\,dr_N,\ m=0.$$

Свойства интегрального уравнения. На практике, как правило, интерес представляют не сами вихревые токи, а некоторые обусловленные ими интегральные величины: средние за период мощность потерь $\mathbf{P}$, тормозной момент M_z, а также комплексная функция энергии $\psi_э$ вихревых токов в магнитном поле [1]. Перечисленные величины выражаются через фурье-образ комплекса амплитуды функции вихревого тока $\dot{V}_m(r)$ следующим образом:

$$\mathbf{P}=-\delta_f\pi\int_{-\infty}^{\infty}(\omega_f-m\omega_\alpha)\,\mathrm{Im}\int_0^R r\dot{V}_m\check{B}^0_{zm}dr=\sum_{-\infty}^{\infty}\mathbf{P}_m; \tag{9}$$

$$M_z=-\delta_f\pi\sum_{-\infty}^{\infty}m\,\mathrm{Im}\int_0^R r\dot{V}_m\check{B}^0_{zm}\,dr=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{m}{\omega_f-m\omega_\alpha}\mathbf{P}_m, \tag{10}$$

$$\dot{\Psi}_э=\delta_f\pi\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\check{\dot{\gamma}}}{\mathrm{Re}\,\dot{\gamma}}\int_0^R r\dot{V}_mB_{zm}dr=-j\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega_f-m\omega_\alpha}\mathbf{P}_m, \tag{11}$$

где $\delta_f=2$, $\omega_f=0$; $\delta_f=1$, $\omega_f>0$, P_m — мощность потерь, обусловленных отдельной фурье-гармоникой вихревых токов;

$$\mathbf{P}_m=\delta_f\pi\,\mathrm{Re}\frac{1}{\dot{\gamma}}\int_0^R r\left(\frac{m^2}{r^2}|\dot{V}_m|^2+\left|\frac{d\dot{V}_m}{dr}\right|^2\right)dr; \tag{12}$$

знак «$\check{V}$» означает, что рассматривается соответствующая комплексно-сопряженная величина; при получении (9) — (11) учтено, что $\mathrm{Im}\int_0^R r\dot{V}_m\check{B}^*_{zm}\,dr=0$.

[1] Функция $\Psi_э$ имеет смысл суммы взаимной и удвоенной собственной энергий вихревых токов, запасенных в магнитном поле.

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Ориентируясь на использование решения $\dot{V}_m$ в (9)—(12), будем рассматривать уравнение (5) в классе функций со скалярным произведением

$$(\xi, \psi) = \pi \int_0^R r\left(\frac{m^2}{r^2}\xi\check{\psi} + \frac{d\xi}{dr}\frac{d\check{\psi}}{dr}\right)dr \qquad (13)$$

и нормой

$$\|\xi\| = \sqrt{\pi \int_0^R r\left(\frac{m^2}{r^2}|\xi|^2 + \left|\frac{d\xi}{dr}\right|^2\right)dr}, \qquad (14)$$

в терминах которой равенство (12) имеет вид

$$\mathbf{P}_m = \delta_f \,\mathbf{Re}\frac{1}{\dot{\gamma}}\|\dot{V}_m\|^2. \qquad (15)$$

Согласование нормы с процедурами, в которых предполагается использовать решение уравнения, необходимо для корректности задачи в целом. В отношении интегрального уравнения это одновременно упрощает поиск решения, с одной стороны, и ограничивает класс функции, с другой, позволяя интересоваться при оценке погрешности не локальным, а глобальным поведением функции в области.

В нашем случае рассматриваемый класс образуем из всевозможных комплексно-значных функций, имеющих конечную норму (14). На эти функции следовало бы еще наложить краевое условие типа (2), однако последнее может иметь смысл не для всякой выбранной функции. Поэтому вместо (2) потребуем выполнение обобщенного условия

$$\int_0^R r\left(\nabla\xi\check{\nabla}\varphi + \xi\Delta\varphi\right)dr = 0 \qquad (16)$$

при каждой дважды непрерывно дифференцируемой функции φ. Оператор ∇, входящий в (16), понимается в смысле равенства $\nabla\xi = \bar{e}_r\frac{d\xi}{dr} - j\frac{m}{r}\bar{e}_\alpha\xi$. Полученный таким образом класс обозначим $\mathring{W}_2^1$.

Оператор $\mathbf{K}_m$ уравнения (5) является частным случаем ранее изученного оператора [1]. Сформулируем основные свойства $\mathbf{K}_m$ в $\mathring{W}_2^1$, опустив доказательства. Итак, оператор $\mathbf{K}_m$, действуя в $\mathring{W}_2^1$, обладает линейностью, полной непрерывностью, самосопряженностью $[(\mathbf{K}_m\xi, \psi) = (\xi, \mathbf{K}_m\psi)$ для любых $\xi\psi \in \mathring{W}_2^1]$, положительностью $[(\mathbf{K}_m\xi, \xi) > 0$ для любой $\xi \in \mathring{W}_2^1, \|\xi\| \neq 0]$.

В силу первых трех из перечисленных свойств оператору $\mathbf{K}_m$ можно поставить в соответствие систему его вещественных характеристических чисел $\{\lambda_k\}$ и попарно ортогональных нормированных вещественных собственных функций $\{f_k\}$, являющихся решениями уравнения $f_k = \lambda_k\mathbf{K}_m f_k$, $k=1, 2, \ldots$. В силу четвертого свойства все характеристические числа положительны, а упомянутую систему собственных функций можно рассматривать в качестве полного ортонормированного базиса в $\mathring{W}_2^1$.

Имеющаяся информация позволяет сделать вывод о разрешимости и единственности [2] решения уравнения (5) в $\mathring{W}_2^1$. Оно может быть найдено численно на ЭВМ путем сведения уравнения к системе алгебраических, например, методами [4] Крылова — Боголюбова, Галеркина, Ритца (наименьших квадратов) и последующим применением метода исключения Гауса. Выделим ситуацию, когда решение необходимо получить для большого числа вариантов исходных данных, что имеет место, в частности, при оптимизационных расчетах. В этой ситуации целесообразно, во-первых, сузить число параметров, во-вторых, использовать такой метод расчета, основная численная часть которого, выполненная однажды, может использоваться готовой при всяком новом варианте исходных данных.

Первая цель достигается преобразованием уравнения к критериальному виду. Для этого в операторе уравнения (5) сделаем замену переменных, положив $\rho = r/R$. После простых преобразований будем иметь

$$\dot{V}_m = -\lambda\mathbf{K}_m^{(1)}\dot{V}_m + \dot{V}_m^0, \qquad (16)$$

где $\lambda = kR$ — параметр уравнения (безразмерный); $\mathbf{K}_m^{(1)}$ — оператор уравнения, который определяется равенством (6), если в последнем положить $R=1$.

Оператор $\mathbf{K}_m^{(1)}$ не изменяет размерности функции, на которую он действует (безразмерный оператор), поэтому решение уравнения (16) при заданном свободном члене целиком определяется величиной одного комплексного параметра λ, а условие

$$\lambda = \text{idem} \qquad (17)$$

служит критерием подобия электромагнитных процессов в диске при установившемся режиме. Поскольку λ — комплексный параметр, условие (17) может быть переписано в виде двух:

$$R\omega_m\gamma\nu\frac{\operatorname{sh} h/\nu + \sin h/\nu}{\operatorname{ch} h/\nu + \cos h/\nu} = \text{idem}; \qquad (18)$$

$$R\omega_m\gamma\nu\frac{\operatorname{sh} h/\nu - \sin h/\nu}{\operatorname{ch} h/\nu + \cos h/\nu} = \text{idem}, \qquad (19)$$

где $\omega_m = \omega_f - m\omega_\alpha$ — эквивалентная угловая частота; $\nu = \sqrt{\frac{2}{|\omega_m|\gamma\mu}}$ — глубина проникновения электромагнитного поля в проводник.

Если $h \ll \nu$ (скин-эффект пренебрежимо мал), то $\mathrm{Re}\,\dot{\gamma} \approx \gamma h$, $\mathrm{Im}\,\dot{\gamma} \approx 0$ и вместо двух условий (18)—(19) можно рассматривать одно $\omega_m\gamma hR = \text{idem}$, В общем случае условия (18)—(19) обеспечиваются выполнением более простых $\mu\omega_m\gamma h^2 = \text{idem}$, $\mu h/R = \text{idem}$.

Метод собственных функций. Вторая цель, связанная с оптимальным выбором метода решения уравнения, будет достигнута, если, опираясь на отмеченные выше свойства интегрального оператора $\mathbf{K}_m$, искать функцию тока $\dot{V}_m$ в виде ряда по собственным функциям $\{f_k\}$. Представляя $\dot{V}_m$ линейной комбинацией собственных функций и пользуясь самосопряженностью $\mathbf{K}_m$ в $\mathring{W}_2^1$, из уравнения (5) получаем

$$\dot{V}_m(r) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k(\dot{V}_m^0, f_k)}{\lambda_k + k}f_k(r) \qquad (20)$$

или

$$\dot{V}_m(r) = -k\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\dot{V}_m^0, f_k)}{\lambda_k + k}f_k(r) + \dot{V}_m^0. \qquad (21)$$

[2] Единственность решения уравнения, иными словами, тривиальность решения соответствующего однородного уравнения выражает в нашем случае физический факт, исключающий самовозбуждение электромагнитного поля в диске.

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Если собственные функции пронумерованы в порядке возрастания соответствующих характеристических чисел, из примера, рассмотренного в [5] и тех, которые будут следовать ниже, можно заключить, что ряды по собственным функциям в практических задачах сходятся быстро.

Решение, представленное в форме (21), содержит разложение в ряд по собственным функциям только той части вихревых токов, которая обусловлена магнитной реакцией проводника, поэтому эта форма эффективна, если магнитная реакция мала, что имеет место при условии $k'/\lambda_1 \ll 1$. Однако на практике это условие выполняется редко, чаще имеет место неравенство

$$|k|/\lambda \gg 1. \qquad (22)$$

В условиях (22) результат вычислений по норме (14) значительно меньше свободного члена $\dot{V}_m^0$ и первого слагаемого правой части (21), что вызывает неустойчивость численной процедуры и предъявляет повышенные требования к точности нахождения собственных функций и их количеству. Форма представления решения (20) свободна от упомянутой неустойчивости, кроме того после простого преобразования она не требует вычисления функции $\dot{V}_m^0$, что освобождает алгоритм получения решения от дополнительной интегральной операции. Последнее достигается интегрированием по частям:

$$(\dot{V}_m^0, f_k) = \pi \int_0^R r\,\nabla\dot{V}_m^0\,\check{\nabla} f_k dr = -\pi \int_0^R r\,\nabla\dot{V}_m^0 f_k dr =$$

$$= -\pi j\omega_m \dot{\gamma} \int_0^R r\dot{B}_{zm}^0 f_k dr$$

с учетом краевой задачи (7)—(8) для функции $\dot{V}_m^0$. Поэтому вместо (20) удобно использовать формулу

$$\dot{V}_m(r) = -j\pi\omega_m\dot{\gamma} \sum_k \frac{\lambda_k a_k}{\lambda_k + k} f_k(r), \qquad (23)$$

где

$$a_k = \int_0^R r\dot{B}_{zm}^0 f_k dr.$$

Подставляя (23) в (12), будем иметь формулу для мощности потерь на фурье-гармонику тока

$$\mathbf{P}_m = \delta_f \pi^2 \omega_m^2 \operatorname{Re}\dot{\gamma} \sum_k \frac{\lambda_k^2 |a_k|^2}{\left(\lambda_k - \frac{\omega_m\mu_0}{2\pi}\operatorname{Im}\dot{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\omega_m\mu_0}{2\pi}\operatorname{Re}\dot{\gamma}\right)^2}, \qquad (24)$$

через которую выражаются суммарные потери (9), тормозной момент (10) и комплексная функция энергии (11).

Численная часть задачи. Собственные функции $\{f_k^{(1)}\}$ и характеристические числа $\{\lambda_k^{(1)}\}$ могут быть получены численно на ЭВМ с помощью итерационного процесса Келлога, модифицированного в [6]. Суть его состоит в построении последовательностей

$$\xi_k^{(n)} = \frac{\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{K}_m^{(1)}\xi_k^{(n-1)}}{\left\|\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{K}_m^{(1)}\xi_k^{(n-1)}\right\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} f_k^{(1)};$$

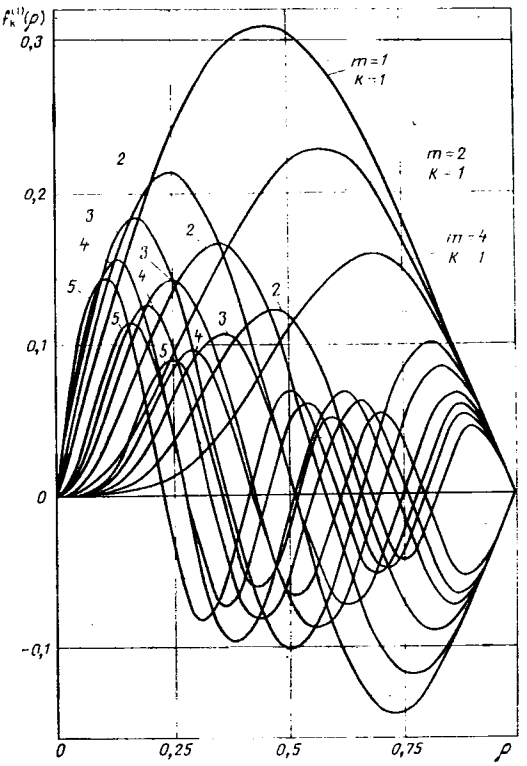


Рис. 1

$$\frac{1}{\left\|\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{K}_m^{(1)}\xi_k^{(n-1)}\right\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} |\lambda_k^1|, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\mathbf{P}_{k-1}$ — оператор ортогонализации к вычисленным собственным функциям, определенный равенством $\mathbf{P}_{k-1}\psi = \psi - (\psi_1 f_1^{(1)}) f_1^{(1)} - \ldots - (\psi f_{k-1}^{(1)}) f_{k-1}^{(1)}$, а скалярное произведение и норма в нашем случае понимаются согласно (13)—(14). Начальным приближением $\xi_k^{(0)}$ может служить любая функция из $\mathring{W}_2^1$.

На рис. 1 изображены графики пяти первых собственных функций операторов $\mathbf{K}_1^{(1)}$, $\mathbf{K}_2^{(1)}$, $\mathbf{K}_4^{(1)}$, а в табл. 1 приведены соответствующие им характеристические числа $\lambda_k^{(1)}$, полученные на ЭВМ ЕС-1022 с помощью программы, составленной на алгоритмическом языке ФОРТРАН. При их получении интегральная операция на отрезке [0, 1] реализовалась квадратурой прямоугольников с 50-ю узлами, а дифференциальная — пятиточечной формулой в конечных разностях [7].

Пример 1. Для диска $R=1$ м, $h=0{,}01$ м, $\gamma=5{,}8\times\times10^7$ 1/Ом·м, $\mu=\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ В·с/А·м, помещенного в магнитное поле, индукция которого $B_z^0(M, t) = B_z^0(t)\cos n\alpha$, $n=1, 2, 4$ найти зависимость мощности потерь, энергии вихревых токов в магнитном поле и тормозного момента от:

а) частоты ω_f при $\omega_\alpha = 0$, $B_z^0(t) = B_z^0 \cos\omega_f t$; б) угловой скорости ω_α при $\omega_f = 0$, $B_z^0(t) = B_z^0$. В обоих случаях комплексы амплитуды z-компоненты индукции совпадают $(\dot{B}_z^0 = jB_z^0 \cos n\alpha)$, но отвечают различным скоростям ω вращения вектора $\dot{B}_z^0$ на комплексной плоскости [случай а) $\omega = \omega_f$, случай б) $\omega = 0$]. Переходя

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Таблица 1

m	Характеристические числа $\lambda_k^{(1)}$ оператора				
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
1	1,32	2,36	3,40	4,45	5,51
2	1,73	2,81	3,87	4,93	6,00
4	2,52	3,67	4,78	5,87	6,95

к фурье-образу, будем иметь

$$\dot{B}_{zm}^0 = j\frac{B_z^0}{2\pi}\int_{\pi-}^{\pi} e^{jm\alpha}\cos n\alpha\, d\alpha = \begin{cases} 0, & |m|\neq n; \\ jB_z^0/2, & m=\pm n. \end{cases} \quad (25)$$

В соответствии с (9) — (11), (24) имеем

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_{-n} = \delta_f \frac{\pi^2}{2}\omega_n^2 R^4\, \mathrm{Re}\,\dot{\gamma}\,(B_z^0)\times$$

$$\times \sum_k \frac{(\lambda_k^{(1)})^2 C_k^2}{\left(\lambda_k^{(1)} - \frac{\mu^0\omega_n R}{2\pi}\mathrm{Im}\,\dot{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0\omega_n R}{2\pi}\mathrm{Re}\,\dot{\gamma}\right)^2}, \quad (26)$$

где

$$\omega_n = \begin{cases} \omega_f \text{ — случай а)}, \\ -n\,\omega_\alpha \text{ — случай б)}; \end{cases} \quad c_k = \int_0^1 r f_k^{(1)} dr; \quad (27)$$

а) $M_z = 0$, $\dot{\Psi} = -j\,\mathbf{P}/\omega_\alpha$; б) $M_z = -\mathbf{P}/\omega_f$, $\dot{\Psi}_э = 0$.

Данные расчета на ЭВМ потерь и тормозного момента приведены на рис. 2. Используемый банк содержал в каждом комплекте по десять собственных функций и характеристических чисел оператора $\mathbf{K}_m^{(1)}$. Скорость затухания вклада собственных функций с ростом номера иллюстрируется таблицей чисел c_k (табл. 2). Располагая данными табл. 1 и 2, а также пользуясь графиками собственных функций (рис. 1), нетрудно получить интересующую информацию для других исходных данных и других режимов электромагнитного процесса.

Как видно из табл. 2 числа c_k с ростом номера быстро затухают. Отметим, что их квадраты, через которые выражаются интегральные характеристики, затухают вдвое быстрее.

Переходный режим. Переходный электромагнитный процесс в диске может возникнуть в результате изменений стороннего магнитного поля при включении или выключении его источников, а также в ходе разгона или торможения, когда меняется скорость вращения $\omega_\alpha(t)$. Избегая громоздких выкладок, расчет этого режима выполним в условиях пренебрежения неравномерностью распределения тока по толщине диска, когда листовая проводимость связана с объемной γ простым соотношением $\dot{\gamma}=\gamma h$. Как и в предыдущих пунктах, будем пользоваться фурье-образами рассматриваемых полей, полагая известными начальное распределение $V_m(r, 0)$ вихревого тока и законы изменения во времени $B_{zm}^0(r, t)$, $\omega_\alpha(t)$.

Действуя аналогично установившемуся режиму, получаем интегродифференциальное уравнение

$$V_m = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mu_0\gamma h}{2\pi}\mathbf{K}_m V_m +$$

$$+\frac{jm\,\omega_\alpha\,\mu_0\,\gamma h}{2\pi}\mathbf{K}_m V_m + V_m^0, \quad r\leqslant R,\ t<0, \quad (28)$$

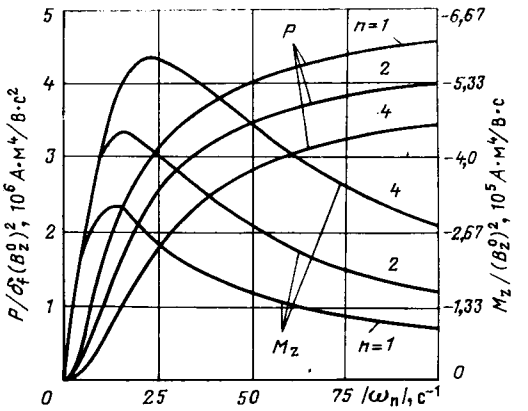


Рис. 2

где V_m^0 удовлетворяет уравнению Пауссона

$$\Delta V_m^0 = \frac{\partial}{\partial t}\gamma h B_{zm}^0 - jm\omega_\alpha\gamma h B_{zm}^0, \quad r<R,\ t>0 \quad (29)$$

и краевому условию

$$V_m^0 = 0,\ r=R,\ t>0. \quad (30)$$

Решение (28) ищем в виде линейной комбинации собственных функций оператора $\mathbf{K}_m$, т. е.

$$V_m(r, t) = \sum_k C_k(t) f_k(r), \quad (31)$$

где $C_k(t)$ — при использовании ортонормированных собственных функций — координаты функции $V_m(r, t)$ в базисе $\{f_k\}$, а именно

$$C_k = (V_m, f_k). \quad (32)$$

Умножая обе части уравнения (28) скалярно на f_k и пользуясь самосопряженностью оператора $\mathbf{K}_m$ в $\mathring{W}_2^1$, получаем

$$C_k(t) = -\frac{\mu_0\gamma h}{2\pi\lambda_k}C_k'(t) +$$

$$+\frac{jm\,\omega_\alpha(t)\,\mu_0\gamma h}{2\pi\lambda_k}C_k(t) + (V_m^0, f_k) \quad (33)$$

или

$$C_k'(t) + p(t)\,C_k(t) = \xi(t),$$

где

$$p(t) = \frac{2\pi\lambda_k}{\mu_0\gamma h} - jm\,\omega_\alpha(t);\quad \xi(t) = \frac{2\pi\lambda_k}{\mu_0\gamma h}(V_m^0, f_k) =$$

$$= \frac{2\pi\lambda_k}{\mu_0\gamma h}\pi\int_0^R r\nabla V_m^0\,\check{\nabla} f_k dr = -\frac{2\pi^2\lambda_k}{\mu_0\gamma h}\int_0^R r\,\Delta V_m^0 f_k dr =$$

$$= -\frac{2\pi^2\lambda_k}{\mu_0}\int_0^R r f_k(r)\left[\frac{\partial B_{zm}^0}{\partial t}(r, t) - jm\,\omega_\alpha(t)\,B_{zm}^0(r, t)\right]dr.$$

Таблица 2

n	Значения чисел C_k					
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
1	$0,907\cdot10^{-1}$	$-0,154\cdot10^{-1}$	$0,150\cdot10^{-1}$	$-0,660\cdot10^{-2}$	$0,655\cdot10^{-2}$	$-0,390\cdot10^{-2}$
2	$0,684\cdot10^{-1}$	$-0,636\cdot10^{-2}$	$0,129\cdot10^{-1}$	$-0,378\cdot10^{-2}$	$0,579\cdot10^{-2}$	$-0,251\cdot10^{-2}$
4	$0,453\cdot10^{-1}$	$-0,4\cdot10^{-3}$	$0,105\cdot10^{-1}$	$-0,100\cdot10^{-2}$	$0,493\cdot10^{-2}$	$-0,100\cdot10^{-2}$

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

В последних преобразованиях при выполнении интегрирования по частям скалярного произведения учтены уравнения (29) и краевое условие (30).

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (33) возможно представить в виде интеграла Дюамеля [8]

$$C_k(t)=C_k(0)\exp\left\{-\int_0^t p(\eta)\,d\eta\right\}+$$
$$+\int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t p(\eta)\,d\eta\right\}\xi(\tau)\,d\tau,$$

где согласно (32) $C_k(0)=(V_m(0), f_k)$ — координата начального распределения вихревого тока. Подставляя результаты в (31), окончательно получаем

$$V_m(r,t)=\sum_k [V_m(0), f_k] f_k(r)\exp\left\{-\varkappa_k t+\right.$$
$$\left.+jm\int_0^t \omega_\alpha(\eta)\,d\eta\right\}-\frac{2\pi^2}{\mu_0}\sum_k f_k(r)\lambda_k\exp\left\{-\varkappa_k t+\right.$$
$$\left.+jm\int_0^t \omega_\alpha(\eta)\,d\eta\right\}\int_0^t \exp\left\{\varkappa_k\tau-jm\int_0^\tau \omega_\alpha(\eta)\,d\eta\right\}*\int_0^R rf_k(r)\times$$
$$\times\left[\frac{\partial B^0_{zm}}{\partial\tau}(r,\tau)-jm\,\omega_\alpha(\tau)\,B^0_{zm}(r,\tau)\right]\times dr\,d\tau, \qquad (34)$$

где

$$\varkappa_k=\frac{2\pi\lambda_k}{\mu_0\gamma h}>0. \qquad (35)$$

Первая сумма правой части (34), очевидно, имеет смысл свободной составляющей — затухающего во времени начального распределения тока. Вторая сумма — принужденная составляющая, обусловленная действием сторонних источников. Согласно (34 при $|m|>0$ движение диска в переходном режиме вызывает гармонические пульсации фурье — гармоник вихревого тока, временная частота которых зависит от ω_α. Однако это не может вызвать устойчивого самовозбуждения электромагнитного поля в диске, поскольку огибающая свободных колебаний экспоненциально затухает с течением времени.

Интегральные характеристики электромагнитного процесса, в частности, мгновенные значения мощности потерь $\mathbf{P}(t)$ и тормозного момента $M_z(t)$ определяются соотношениями

$$\mathbf{P}(t)=\sum_{-8}^{\infty}\frac{2}{\gamma h}\|V_m\|^2=\frac{2}{\gamma h}\|V_0\|^2+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{\gamma h}\|V_m\|^2=$$
$$=\mathbf{P}_0(t)+2\sum_{m-1}^{\infty}\mathbf{P}_m(t), \qquad (36)$$

где

$$\mathbf{P}_m(t)=\frac{2}{\gamma h}\sum_k\exp\{-2\varkappa_k t\}\left|(V_m(0), f_k)-\frac{2\pi^2}{\mu_0}\lambda_k\int_0^t\exp\times\right.$$
$$\left\{\varkappa\tau-jm\int_0^\tau\omega_\alpha(\eta)\,d\eta\right\}*\int_0^R rf_k(r)\left[\frac{\partial B^0_{zm}}{\partial\tau}(r,\tau)-jm\,\omega_\alpha(\tau)\times\right.$$
$$\left.\left.\times B^0_{zm}(r,\tau)\,dr\,d\tau\right|^2=\sum_k\mathbf{P}_{mk}(t);$$

$$M_z(t)=-2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}m\,\mathrm{Im}\int_0^R rV_mB_{zm}\,dr=-2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}m\,\mathrm{Im}\int_0^R rV_m\times$$
$$\times\left[B^0_{zm}+\frac{\mu_0}{2\pi}\Delta\,\mathbf{K}\check{V}_m\right]dr=-2\pi\sum_{-8}^{\infty}m\,\mathrm{Im}\left[\int_0^R rV_m\check{B}^0_{zm}dr-\right.$$
$$\left.-\frac{\mu_0\gamma h}{4\pi^2}\sum_k\lambda_k^{-1}\mathbf{P}_{mk}\right]=-4\pi\sum_{m=1}^{\infty}m\,\mathrm{Im}\int_0^R rV_m\check{B}^0_{zm}dr. \qquad (37)$$

Из (37) следует, в частности, что диск не испытывает и в переходном процессе момента силы со стороны магнитного поля вихревых токов, поэтому при отключении сторонних источников торможение есть результат действия сил механического трения, а вся запасенная в электромагнитном поле энергия расходуется согласно закону Джоуля-Ленца на нагрев диска[3].

Пример 2. Для диска, рассмотренного в примере 1, требуется найти зависимость мощности потерь и тормозного момента от времени, если до момента времени $t=0$ он вращается с угловой скоростью: а) $\omega_\alpha=0$ и б) $\omega_\alpha>0$, а в момент $t=0$ возникло стороннее магнитное поле

$$B^0_z(M,t)=B^0_z\cos n\alpha,\quad n=1,\ 2,\ 4.$$

Соответственно обоим случаям решение (34) принимает вид:

$$\text{а)}\ V_m(r,t)=\sum_k[V_m(0), f_k]f_k(r)\,e^{-\varkappa_k t}; \qquad (38)$$

$$\text{б)}\ V_m(r,t)=\sum_k\left\{[V_m(0), f_k]f_k(r)\,e^{-(\varkappa_k-jm\,\omega_\alpha)t}+\right.$$
$$+j\frac{m\,\omega_\alpha\pi^2B^0_z}{\mu_0}\frac{\lambda_k}{\varkappa_k-jm\,\omega_\alpha}\left(1-e^{-(\varkappa_k-jm\,\omega_\alpha)t}\right)\times$$
$$\left.\times\int_0^R rf_k(r)\,dr\right\},\quad m=\pm n. \qquad (39)$$

Начальное распределение тока следует из закона коммутации $B_{zm}(0_+)=B_{zm}(0_-)$ или, что то же самое, $B^*_{zm}(0_+)-B^*_{zm}(0_-)=-[B^0_{zm}(0_+)-B^0_{zm}(0_-)]$, согласно которому скачок индукции стороннего магнитного поля должен компенсироваться противоположным по знаку, но равным по величине скачком индукции поля вихревых токов диска.

Таким образом, начальное распределение $V_m(0)$ есть решение уравнения[4]

$$\frac{\mu_0}{2\pi}\Delta\,\mathbf{K}_mV_m(0)=B^0_{zm}=\frac{1}{2}B^0_z,$$

откуда

$$V_m(r,0)=-\frac{\pi^2RB^0_z}{\mu_0}\sum_k\lambda_k^{(1)}C_kf_k^{(1)}\left(\frac{r}{R}\right),$$

где значения c_k определены равенством (27) и приведены в табл. 2.

---

[3] В квазистационарном приближении излучением пренебрегаем.

[4] В отличие от фурье-образа комплекса $B^0_z\cos n\alpha$ (см. (25), пример 1) в нашем случае фурье-образ $B^0_z\cos n\alpha$ не содержит сомножителя j.

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

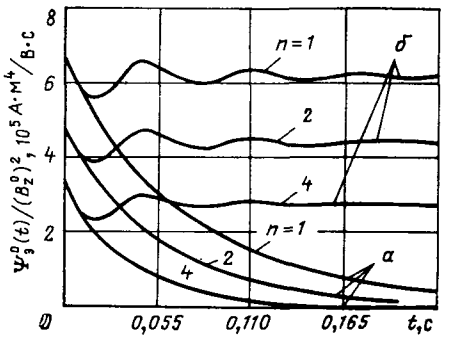


Рис. 3

Подставляя результат в (38) и (39), после преобразований окончательно получаем

$$\text{а)}\ V_m(r,t) = -\frac{\pi^2 R B_z^0}{\mu_0}\sum_k c_k \lambda_k^{(1)} f_k^{(1)}\left(\frac{r}{R}\right) e^{-\varkappa_k t};$$

$$\text{б)}\ V_m(r,t) = -\frac{\pi^2 R B_z^0}{\mu_0}\sum_k c_k \lambda_k^{(1)} f_k^{(1)}\left(\frac{r}{R}\right)\times$$

$$\times\frac{jm\,\omega_\alpha - \varkappa_k e^{-(\varkappa_k - jm\,\omega_\alpha)\,t}}{jm\,\omega_\alpha - \varkappa_k},$$

где

$$\varkappa_k = \frac{2\pi\lambda_k^{(1)}}{\mu_0\,\gamma h R},\quad m = \pm n.$$

Остается воспользоваться соотношением для потерь и момента сил. Согласно (36) — (37) будем иметь

$$\text{а)}\ \mathbf{P}(t) = 2\,\mathbf{P}_n(t) = \frac{4\pi^4 R^2 \left(B_z^0\right)^2}{\mu_0^2 \gamma h}\sum_k C_k^2 \left(\lambda_k^{(1)}\right)^2 e^{-\varkappa_k t},$$

$$M_z(t) = 0;$$

$$\text{б)}\ \mathbf{P}(t) = \frac{4\pi^4 R^2 \left(B_z^0\right)^2}{\mu_0^2 \gamma h}\sum_k C_k^2 \left(\lambda_k^{(1)}\right)^2\times$$

$$\times\frac{n^2\omega_\alpha^2 - 2n\omega_\alpha\varkappa_k e^{-\varkappa_k t}\sin n\omega_\alpha t + \varkappa_k^2 e^{-2\varkappa_k t}}{n^2\omega_\alpha^2 + \varkappa_k^2};$$

$$M_z(t) = -\frac{4\pi^4 R^2 \left(B_z^0\right)^2 n}{\mu_0^2 \gamma h}\sum_k C_k^2 \left(\lambda_k^{(1)}\right)^2\times$$

$$\times\frac{n\,\omega_\alpha - \left(n\,\omega_\alpha \cos n\,\omega_\alpha t + \varkappa_k \sin n\omega_\alpha t\right) e^{-\varkappa_k t}}{n^2\omega_\alpha^2 + \varkappa_k^2}$$

при каждом n.

На практике нередко представляет интерес функция энергии $\Psi_э^0(t)$ вихревого тока в магнитном поле $\bar{B}^0$ сторонних источников. Она определяется равенством

$$\Psi_э^0(t) = 2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^R r V_m(r,t)\,\check{B}_{zm}^0(r,t)\,dr,$$

из которого находим

$$\text{а)}\ \Psi_э^0(t) = -\frac{2\pi^3 R^3 \left(B_z^0\right)^2}{\mu_0}\sum_k C_k^2 \lambda_k^{(1)} e^{-\varkappa_k t};$$

$$\text{б)}\ \Psi_э^0(t) = -\frac{2\pi^3 R^3 \left(B_z^0\right)^2}{\mu_0}\sum_k C_k^2 \lambda_k^{(1)}\times$$

$$\times\frac{n^2\omega_\alpha^2 + e^{-\varkappa_k t}\left(\varkappa_k^2 \cos n\omega_\alpha t - \varkappa_k n\,\omega_\alpha \sin n\,\omega_\alpha t\right)}{n^2\omega_\alpha^2 + \varkappa_k^2}.$$

Рассчитанные на ЭВМ зависимости $\Psi_э^0(t)$ приведены на рис. 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Астахов В. И.** Вихревые токи в оболочках вращения. Изв. вузов. Электромеханика, 1974, № 3, с. 256—264.
2. **Астахов В. И.** Движение проводящей полосы в магнитном поле. — Изв. вузов. Электромеханика, 1977, № 8, с. 846—857.
3. **Жуков С. В.** Граничные условия для переменного магнитного поля шин. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1983, с. 54—58.
4. **Верлань А. Ф., Сизиков В. С.** Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Киев: Наукова думка, 1978 — 262 с.
5. **Методы** ускорения вычислительного процесса задачи о движении проводящей полосы в магнитном поле/В. И. Астахов, Ю. А. Бахвалов, Т. М. Вяльцева, Г. А. Кирсанова.— Изв. вузов. Электромеханика, 1979, № 3, с. 187—196.
6. **Колесников Э. В.** Квазистационарные электромагнитные поля в системах с однонаправленным полем тока. — Изв. вузов. Электромеханика, 1970, № 12, с. 1294—1308.
7. **Демидович Б. П., Марон И. А.** Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1966. — 659 с.
8. **Понтрягин Л. С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974. — 332 с.

[20.07.84]

УДК [621.314.6:621.382].016.3.012.6

Выпрямитель в режиме прерывистого тока

ИСХАКОВ А. С., канд. техн. наук

Введение. Исследование динамики замкнутых систем с выпрямителями в режиме прерывистого тока (далее именуемым прерывистым режимом) при конкретной нагрузке произведено в [1 и 2] для малых отклонений. В [3] рассмотрены динамические свойства замкнутой системы при больших отклонениях для нагрузки произвольного характера. Исследован случай, когда при переходе выпрямителя с участка проводимости на участок непроводящих вентилей происходит уменьшение порядка линейной части нагрузки на единицу. Это приводит к понижению размерности дискретного вектора состояния выпрямителя на единицу по сравнению с порядком линейной части на участке проводимости.

Кроме описанного в [3], возможен случай, когда смена участков не сопровождается изменением размерности линейной части. При такой нагрузке размерность дискретного вектора состояния линейной части совпадает с ее порядком. Следовательно, на динамические свойства выпрямителя оказывает существенное влияние не только порядок линейной части, но и ее структура. Отмеченное явление в известных работах по динамике выпрямителей не рассматривалось.

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

В данной статье, являющейся по существу продолжением [3], изучаются вопросы влияния нагрузки на динамические свойства замкнутой системы с выпрямителем в прерывистом режиме при больших отклонениях. Объясняется, когда возможен один из указанных случаев, и дается математическое описание замкнутой системы для линейной части с неизменным порядком ее на обоих участках на примере линейной части, передаточная функция которой относительно выходного тока выпрямителя представляет собой отношение полиномов одинаковой степени.

Особенности прерывистого режима. На интервале дискретности m-фазного выпрямителя имеются два участка, на первом участке на входе нагрузки действует напряжение выпрямителя u_d и протекает выходной ток i_d, на втором — напряжение u_d и ток i_d равны нулю. Зависимость размерностей математической модели выпрямителя в прерывистом режиме от структуры линейной части является следствием однонаправленной проводимости вентилей. Другими словами, из-за того, что вентиль проводит ток только в одном направлении, он, выключаясь в конце первого участка при спадании тока через него до нуля, отключает на втором участке напряжение питающей сети от нагрузки, при этом размерность линейной части на втором участке или уменьшается на единицу или остается такой же, как и на первом. Для иллюстрации отмеченной зависимости рассмотрим две цепи, изображенные на рис. 1. Порядок цепи на рис. 1, *а* при наличии и отсутствии напряжения на ее входе (вход разомкнут) равен соответственно двум и единице. В [3] рассматривался прерывистый режим выпрямителя с подобными нагрузками. Цепь на рис. 1, *б* независимо от наличия напряжения на ее входе имеет второй порядок, следовательно, при таких нагрузках смена участков на интервале дискретности не сопровождается изменением размерности линейной части.

Возникает вопрос, по какому формальному признаку можно различить один из этих случаев. Задание только передаточной функции линейной части, если ток i_d не является выходной координатой, не решает вопроса, так как она может иметь различную физическую реализацию, которой соответствуют разные законы изменения тока i_d. Необходимо таким образом описать нагрузку, чтобы можно было кроме знания выходной координаты получить информацию о токе i_d, например, с помощью передаточной функции линейной части $W(s)$ относительно тока i_d. Пусть $W(s)$ представляет собой отношение двух полиномов:

$$W(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{b_r s^r+\cdots+b_0}{a_k s^k+\cdots+a_0}, \qquad (1)$$

причем степень полинома числителя r не выше степени полинома k знаменателя. Признаком, по которому можно различать один из указанных случаев, может служить соотношение между k и r. Если $k>r$, то размерность линейной части зависит от наличия воздействия u_d. Такая нагрузка подобна цепи на рис. 1, *а*, ее передаточная функция

$$W(s)=\frac{s+\frac{1}{RC}}{L\left(s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}\right)}. \qquad (2)$$

При $k=r$ размерность линейной части не зависит от наличия воздействия u_d. В таком случае нагрузка подобна цепи на рис. 1, *б*, для которой передаточная

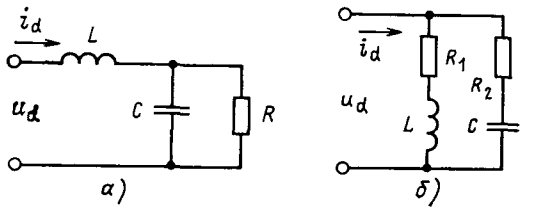


Рис. 1. Схемы цепей: *а* — порядок цепи зависит от наличия сигнала u_d; *б* — порядок цепи не зависит от наличия сигнала u_d

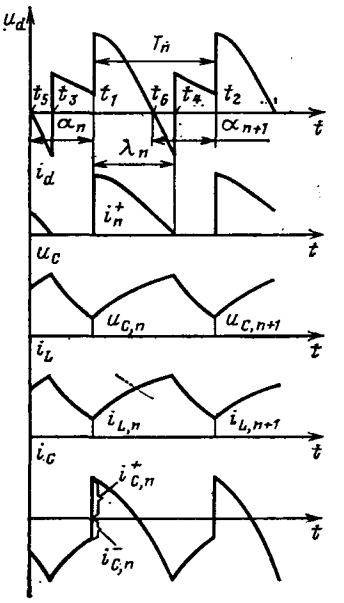


Рис. 2. Диаграммы переменных цепей на рис. 1, *б*

функция

$$W(s)=\frac{s^2+\frac{R_1+R_2}{L}s+\frac{1}{LC}}{R_2\left[s^2+\left(\frac{1}{R_2C}+\frac{R_1}{L}\right)s+\frac{R_1}{LCR_2}\right]}. \qquad (3)$$

Приведем математическое описание системы с выпрямителем в прерывистом режиме при $k=r$.

Дифференциальные уравнения системы выпрямитель—нагрузка. Для наглядности рассуждений на рис. 2 приведены примерные кривые токов и напряжений элементов схемы на рис. 1, *б*. Начальное значение тока i_n^+ в момент отпирания вентиля не равно нулю, в отличие от рассмотренного в [3] случая, где $i_n=0$, а имеет конечное значение, равное i_{Cn}^+ (верхние индексы минус или плюс означают соответственно левое или правое значения функции в момент разрыва).

Одним из эффективных методов исследования динамических систем является описание их в пространстве состояний [4 и 5], согласно которому уравнения линейной части представляют в виде уравнений состояния и выхода. Особенности прерывистого режима требуют, чтобы при описании его в пространстве состояний к этим уравнениям, учитывая то, что ток i_d является фактически второй выходной координатой, было добавлено уравнение относительно тока i_d, такое же по форме как и уравнение выхода. Введение добавочного уравнения объясняется теми же соображениями, что и дополнительное описание линейной части с помощью передаточной функции ее относительно тока i_d. Следует отметить, что ис-

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

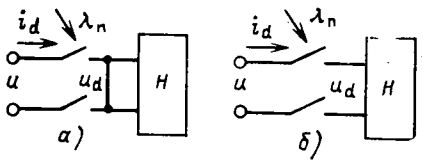


Рис. 3. Схема нагрузки для участка отсутствия сигнала u_d на ее входе: H — нагрузка; u — напряжение сети; *а* — полууправляемый режим; *б* — прерывистый режим

пользование метода передаточных функций при описании прерывистого режима затрудняется тем обстоятельством, что $W(s)$ на непроводящем участке не имеет смысла.

Уравнения линейной части на первом и втором участках имеют различный вид. Вначале запишем уравнения линейной части на первом участке, где $0>t>t_1$, в виде уравнений состояния, выхода и тока соответственно:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=\mathbf{A}_1\mathrm{X}+\mathbf{B}_1\mathbf{U}; \tag{4}$$

$$y=\mathbf{C}_1^{\mathrm{T}}\mathrm{X}+\mathbf{D}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{U}; \tag{5}$$

$$i_d=\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}+\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}, \tag{6}$$

где $\mathbf{X}$ — k-мерный вектор состояния линейной части; $\mathbf{U}=\{u_d, \mathbf{E}\}$ — $(l+1)$-мерный вектор напряжений; $u_d=U_m\cos\left(\omega t+\alpha_n-\frac{\pi}{m}\right)$; ω — круговая частота напряжения сети; α_n — угол отпирания на n-м интервале; $\mathbf{E}$ — l-мерный вектор напряжений источников на стороне постоянного тока; $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{B}_1$ — соответственно $(k\times k)$- и $k\times(l+1)$-матрицы коэффициентов; $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{L}$ — k-мерные векторы; $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{M}$ — $(l+1)$-мерные векторы.

Все элементы вектора M могут равняться нулю, кроме первого, учитывающего воздействие u_d. Если и он равен нулю, тогда $k>r$ [5] — этот случай рассмотрен в [3]. Итак, знание уравнения (6) также позволяет различать один из указанных случаев.

Уравнения (4)—(6) получают на основании физических законов, описывающих процессы в нагрузке. В качестве переменных состояния чаще всего используются переменные, характеризующие накопители энергии (токи индуктивностей, напряжения емкостей, частоты вращающихся машин и др.), они именуются физическими или инерциальными [6]. Например, развернутые уравнения (4)—(6) схемы на рис. 1, *б* в этих переменных при выборе в качестве сигнала y напряжения на емкости u_C имеют вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{di_L}{dt}=-\frac{R_1}{L}i_L+\frac{1}{L}u_d;\\&\frac{du_C}{dt}=-\frac{1}{R_2C}u_C+\frac{1}{R_2C}u_d;\ y+u_C;\ i_d=i_L-\\&\qquad-\frac{1}{R_2}u_C+\frac{1}{R_2}u_d.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Выражения для векторов, матриц и коэффициентов выражений (4)—(6) в данном случае выглядят таким образом:

$$\mathrm{X}=\begin{vmatrix}i_L\\u_C\end{vmatrix};\ \mathbf{U}=u_d;\quad \mathbf{A}_1=\begin{vmatrix}-\frac{R_1}{L}&0\\0&-\frac{1}{R_2C}\end{vmatrix};\quad \mathbf{B}_1=\frac{1}{L};$$

$$\mathbf{C}^{\mathrm{T}}=|0,\ 1|;\ \mathbf{D}_1=0;\ \mathbf{L}^{\mathrm{T}}=\left|1,\ -\frac{1}{R_2}\right|;\ \mathbf{M}=\frac{1}{R_2}.$$

На втором участке ток i_d равен нулю, поэтому в уравнения линейной части входят только уравнения состояния и выхода:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\mathbf{X}}{dt}=\mathbf{A}_2\mathrm{X}+\mathbf{B}_2\mathbf{E};\\&y=\mathbf{C}_2^{\mathrm{T}}\mathrm{X}+\mathbf{D}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{E};\ t_1<t<T_n,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{B}_2$ — соответственно $(k\times k)$- и $(k\times l)$-матрицы; $\mathbf{C}_2$ и $\mathbf{D}_2$ — соответственно k- и l-мерные векторы.

Уравнения (8) отличаются от (4) и (5), причем уравнения (8) нельзя механически получить из (4) и (5), приравнивая u_d нулю. В этом нетрудно убедиться на примере цепи на рис. 1, *б*, сравнивая уравнения (7) с уравнениями этой цепи на втором участке:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{di_L}{dt}=\frac{R_1+R_2}{L}i_L+\frac{1}{C}u_C;\\&\frac{du_C}{dt}=\frac{1}{C}i_L;\ y=u_C.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Матрица $\mathbf{A}_2$ отличается от $\mathbf{A}_1$ и имеет вид

$$\mathbf{A}_2=\begin{vmatrix}-\frac{R_1+R_2}{L}&\frac{1}{C}\\\frac{1}{C}&0\end{vmatrix}.$$

На первый взгляд математическое описание прерывистого режима может быть выполнено подобно полууправляемому [7] выпрямителю в режиме непрерывного тока при $\pi/2-\pi/m<\alpha<\pi/2+\pi/m$, исходя из того, что на обоих участках интервала дискретности размерность вектора состояния линейной части не меняется. Однако это принципиально разные режимы. Физически различие между ними проявляется в том, что на втором участке в полууправляемом режиме вход нагрузки шунтирован проводящим ток обратным вентилем (см. рис. 3, *а*), в прерывистом режиме вход нагрузки отключен от напряжения сети (см. рис. 3, *б*).

Математически эти режимы различаются в следующем. Во-первых, длительность проводящего участка в полууправляемом режиме зависит только от угла α_n, а в прерывистом является функцией параметров выпрямителя и нагрузки. Во-вторых, уравнения на непроводящем участке в полууправляемом режиме можно получить из уравнений на проводящем, положив $u_d=0$, т. е. матрица состояния для обоих участков одинакова, в прерывистом же режиме, как отмечено выше, уравнения двух участков имеют разный вид, т. е. $\mathbf{A}_1\neq\mathbf{A}_2$.

Итак, в прерывистом режиме выпрямитель представляет систему, которая на одном участке описывается одними уравнениями, на другом — другими. Такие системы относятся к классу кусочно-линейных [8]. Одним из этапов исследования систем в пространстве состояний вообще является преобразование исходных уравнений, полученных, как правило, в физических переменных, в более простые уравнения с другими переменными. В качестве переменных преобразованных уравнений чаще всего используются канонические переменные, при этом матрица состояния преобразованного уравнения имеет чисто диагональную форму или каноническую форму Жордана [4 и 5]. Этап преобразования для рассматриваемой нагрузки имеет специфические особенности,

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

обусловленные наличием двух участков и характерные только для прерывистого режима, поясним их.

Исходные уравнения (4) и (8) имеют разные матрицы состояния $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$, поэтому преобразование их к канонической форме также даст различные матрицы состояния. Это приводит к существенному усложнению вывода разностного уравнения по сравнению с полууправляемым режимом, где, как отмечалось, матрица состояния на обоих участках одинакова. Указанное усложнение связано с тем, что вектор состояния преобразованного уравнения на проводящем и непроводящем участках имеет разные координаты, следовательно, продолжать решение преобразованного уравнения через границу между участками придется не из простого условия непрерывности вектора состояния, а из более громоздкого для вычислений условия, подобного условию скачков [8]. Проиллюстрируем изложенное на примере простой цепи, изображенной на рис. 4.

В качестве координат вектора состояния цепи выберем токи i_1 и i_2. Эти переменные на проводящем участке являются каноническими, так как развернутое уравнение состояния (4)

$$\left.\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= -\frac{R_1}{L_1}\, i_1 + \frac{1}{L_1}\, u_d; \\ \frac{di_2}{dt} &= -\frac{R_2}{L_2}\, i_2 + \frac{1}{L_2}\, u_d \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

имеет диагональную матрицу

$$\mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} \end{vmatrix}. \qquad (11)$$

На непроводящем участке токи i_1 и i_2 не являются каноническими переменными, так как в уравнении (8)

$$\left.\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= -\frac{R_1+R}{L}\, i_1 - \frac{R}{L_1}\, i_2; \\ \frac{di_2}{dt} &= -\frac{R}{L_2}\, i_1 - \frac{R_2+R}{L_2}\, i_2 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

матрица состояния не имеет диагонального вида

$$\mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} -\frac{R_1+R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R_2+R}{L_2} \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

Поэтому, если преобразовать последнюю к диагональной, то координатами вектора состояния будут не токи i_1 и i_2, а другие переменные, что приведет к усложнению процедуры продолжения решения через границы участков. Отметим, что в полууправляемом режиме равенство $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$ следует из (13) при $R=0$, физически это означает, что резистор R шунтируется проводящим ток обратным вентилем.

Следовательно, если при выводе разностных уравнений преобразование уравнений линейной части позволяет упростить процесс вычислений, то осуществлять го на обоих участках интервала дискретности не требуется. Достаточно выполнить преобразование на одном участке, при этом на следующем участке надо использовать результаты преобразования на предыдущем.

Изложим вывод разностных уравнений замкнутой системы вначале в общем случае без преобразования ис-

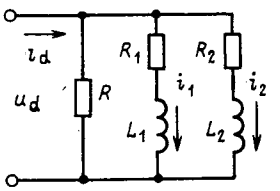


Рис. 4. Схема примера цепи второго порядка

ходных уравнений. Затем для частного, но весьма часто встречающегося на практике случая покажем специфические особенности применения преобразования, характерные только для прерывистого режима с данным типом линейной части и отсутствующие в непрерывном и полууправляемом режимах.

Разностные уравнения замкнутой системы. Полагая, что вектор состояния является непрерывным на границах участков, запишем решение уравнения состояния (4):

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}_1 (t-t_0)}\, \mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}_1 (t-\tau)} \mathbf{B}_1 \mathbf{U}(\tau)\, d\tau. \qquad (14)$$

Обозначив $\mathbf{X}_n = \mathbf{X}(t_0)$ при $t_0 = 0$, из (14) находим значение вектора состояния в момент $\omega t_1 = \lambda_n$, когда ток i_d уменьшается до нуля:

$$\mathbf{X}(\lambda_n) = e^{\mathbf{A}_1 t_1}\, \mathbf{X}_n + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}_1 (t_1-\tau)} \mathbf{B}_1 \mathbf{U}(\tau)\, d\tau. \qquad (15)$$

Подставляя (15) в (6), получаем выражение для неявного вычисления интервала λ_n:

$$i_d(\lambda_n) = \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \mathbf{X}(\lambda_n) + \mathbf{M}^{\mathrm{T}} \mathbf{U}(\lambda_n) = 0, \qquad (16)$$

которое обозначим как

$$E\left(\mathrm{X}_n^{\mathrm{T}},\ \alpha_n,\ \lambda_n\right) = 0. \qquad (17)$$

Условие прерывистого режима в переходном процессе запишем таким образом:

$$t_1 < T_n, \qquad (18)$$

где $\omega T_n = \frac{2\pi}{m} - \alpha_n + \alpha_{n+1}$ — интервал дискретности.

Область прерывистого режима в установившемся процессе определяется при $T_n = T^0 = \frac{2\pi}{m\omega}$ из выражения $i_d(T^0) = 0$:

$$\mathbf{L}^{\mathrm{T}} \mathbf{X}(T^0) + \mathbf{M}^{\mathrm{T}} \mathbf{U}(T^0) = 0, \qquad (19)$$

где вектор $\mathbf{X}(T^0)$ находится из (15) при замене λ_n на $\frac{2\pi}{m}$, t_1 на T^0 и равенствах $\mathbf{X}_n = \mathbf{X}(T^0)$, $\alpha_n = \alpha = \mathrm{const}$, что дает следующее уравнение:

$$\mathbf{X}(T^0) = (\mathbf{I} - e^{\mathbf{A}_1 T^0})^{-1} \int_0^{T^0} e^{\mathbf{A}_1 (T^0-\tau)}\, \mathbf{B}_1 \mathbf{U}(\tau)\, d\tau, \qquad (20)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица размером $k \times k$.

Решение уравнения (8)

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}_2 (t-t_1)}\, \mathbf{X}(\lambda_n) + \int_{t_1}^{t} e^{\mathbf{A}_2 (t-\tau)}\, \mathbf{B}_2 \mathbf{E}(\tau)\, d\tau$$

в момент $t = T_n$ в силу непрерывности вектора $\mathbf{X}$ определяет следующее значение вектора состояния:

$$\mathbf{X}_{n+1} = e^{\mathbf{A}_2 (T_n - t_1)}\, \mathbf{X}(\lambda_n) + \int_{t_1}^{T_n} e^{\mathbf{A}_2 (T_n-\tau)}\, \mathbf{B}_2 \mathbf{E}(\tau)\, d\tau. \qquad (21)$$

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

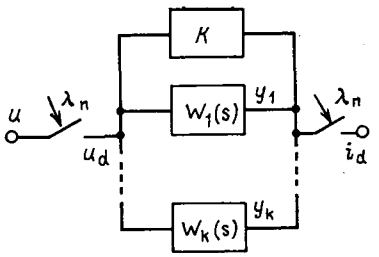


Рис. 5. Разложение передаточной функции линейной части нагрузки относительно выходного тока

Подставляя $\mathbf{X}(\lambda_n)$ из (15) в (21), получаем

$$\mathbf{X}_{n+1}=e^{\mathbf{A}_2(T_n-t_1)}\left[e^{\mathbf{A}_1 t_1}\mathbf{X}_n+\int_0^{t_1}e^{\mathbf{A}_1(t_1-\tau)}\mathbf{B}_1\mathbf{U}(\tau)\,d\tau\right]+$$
$$+\int_{t_1}^{T_n}e^{\mathbf{A}_2(T_n-\tau)}\mathbf{B}_2\mathbf{E}(\tau)\,d\tau. \qquad (22)$$

Последнее выражение представляет собой разностное уравнение вида

$$\mathbf{X}_{n+1}=\mathbf{F}(\mathbf{X}_n,\ \alpha_{n+1},\ \alpha_n,\ \lambda_n) \qquad (23)$$

и является математической моделью выпрямителя в прерывистом режиме при конечных отклонениях. Для вычисления $\mathbf{X}_{n+1}$ по значениям α_{n+1}, $\mathbf{X}_n$, α_n и λ_n предварительно определяется λ_n из (17).

Особенность прерывистого режима выпрямителя с данным типом линейной части, т. е. с равными степенями полиномов числителя и знаменателя передаточной функции линейной части относительно тока выпрямителя заключается в том, что размерность вектора состояния линейной части на проводящем и непроводящем участках одинакова. Следовательно, размерность дискретного вектора $\mathbf{X}_n$ равна порядку линейной части, тогда как для рассмотренного в [3] вида передаточной функции, где степень полинома числителя меньше чем знаменателя, размерность $\mathbf{X}_n$ на единицу меньше k.

Рассмотрим частный случай нагрузки, когда $l=0$, т. е. на стороне постоянного тока отсутствуют источники, и корни знаменателя s_i, где $i=1, \ldots, k$, передаточной функции $W(s)$ в (1) при $r=k$ простые и не кратные. Разделив числитель на знаменатель, запишем $W(s)$ в виде суммы двух передаточных функций, первая из них является пропорциональным звеном, вторая представляет отношение полиномов, где степень числителя на единицу меньше степени знаменателя:

$$W(s)=K+\frac{R(s)}{Q(s)}, \qquad (24)$$

где $K=a_k/b_k$; $R(s)=\sum_{j=0}^{k-1}(a_j-Kb_j)s^j$.

Разложим $R(s)/Q(s)$ на сумму дробей:

$$\frac{R(s)}{Q(s)}=\sum_{i=1}^{k}\frac{g_i}{s-s_j};\quad g_i=\frac{R(s_i)}{Q'(s_i)};\quad Q'(s_i)=\frac{dQ(s)}{ds}\bigg|_{s=s_i}. \qquad (25)$$

В итоге представим $W(s)$ в виде параллельного соединения пропорционального звена и k элементарных апериодических звеньев (см. рис. 5). Эта операция позволяет диагонализировать матрицу $\mathbf{A}_1$ более просто, чем при использовании матричных преобразований. Выбирая выходные координаты звеньев y_i в качестве переменных вектора состояния преобразованной системы $\mathbf{Y}$, запишем ее уравнение:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt}=\mathbf{S}_1\mathbf{Y}+\mathbf{G}u_d, \qquad (26)$$

где

$$\mathbf{S}_1=\begin{vmatrix} s_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & s_k \end{vmatrix};\quad \mathbf{G}=\begin{vmatrix} g_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & g_k \end{vmatrix}.$$

Система (26) распадается на k независимых относительно y_i уравнений:

$$\frac{dy_i}{d_t}=s_iy_i+g_iu_d. \qquad (27)$$

Решение (27) при $y_i(0)=y_{in}$ —

$$y_i(t)=Y_{mi}\cos\left(\omega t+\alpha_n-\frac{\pi}{m}-\varphi_i\right)+C_{ni}e^{s_it}, \qquad (28)$$

где $Y_{mi}=U_mg_i(s_i^2+\omega^2)^{-1/2}$; $\operatorname{tg}\varphi_i=-\frac{\omega}{s_i}$; $C_{ni}=y_{in}-$ $-Y_{mi}\cos\left(\alpha_n-\frac{\pi}{m}-\varphi_i\right)$, — в момент $t=t_1$ позволяет найти $y_i(\lambda_n)$

$$y_i(\lambda_n)=Y_{mi}\cos\left(\lambda_n+\alpha_n-\frac{\pi}{m}-\varphi_i\right)+C_{ni}e^{s_it_1}. \qquad (29)$$

Ток i_d равен сумме выходных координат всех звеньев включая и пропорциональное, поэтому из равенства $i_d(\lambda_n)=0$ получаем уравнение для вычисления λ_n, аналогичное выражению (17):

$$\sum_{i=1}^{k}y_i(\lambda_n)+KU_m\cos\left(\lambda_n+\alpha_n-\frac{\pi}{m}\right)=0. \qquad (30)$$

Уравнение поверхности, разделяющей прерывистый и непрерывный режимы в пространстве параметров системы, имеет вид

$$i_d(T^0)=\sum_{i=1}^{k}y_i(T^0)+Ku_d(T^0)=0. \qquad (31)$$

Значение $y_i(T^0)$ определяется из (29) при тех же условиях, что и вектор $\mathbf{X}(T^0)$ в выражении (20)

$$y_i(T^0)=Y_{mi}\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{m}-\varphi_i\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{m}-\varphi_i\right)d_i}{1-d_i}, \qquad (32)$$

где $d_i=\exp(s_iT^0)$.

Окончательное выражение для вычисления граничной поверхности находится после подстановки (32) в (31) и имеет вид

$$\sum_{i=1}^{k}Y_{mi}\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{m}-\varphi_i\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{m}-\varphi_i\right)d_i}{1-d_i}+$$
$$+KU_m\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{m}\right)=0. \qquad (33)$$

На непроводящем участке, как видно из рис. 5, источник u_d отключен от линейной части, поэтому здесь уравнение состояния выглядит таким образом:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt}=\mathbf{S}_2\mathbf{Y}, \qquad (34)$$

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

где

$$\mathbf{S}_2=\begin{vmatrix} s_1-Kg_1 & -Kg_1 & \dots & -Kg_1 \\ -Kg_2 & s_2-Kg_2 & \dots & -Kg_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -Kg_k & -Kg_k & \dots & s_k-Kg_k \end{vmatrix}.$$

Так как матрица $\mathbf{S}_2$ не диагональна, то последнее уравнение не распадается как (26) на уравнения типа (27), поэтому запишем его решение в общей форме:

$$\mathbf{Y}(t)=e^{\mathbf{A}_2(t-t_1)}\mathbf{Y}(\lambda_n), \tag{35}$$

где $\mathbf{Y}_n(\lambda_n)$ — вектор с компонентами $y_i(\lambda_n)$.

Произведя в (35) подстановку $t=T_n$, находим искомое разностное уравнение выпрямителя, являющееся частным случаем уравнения (23):

$$\mathbf{Y}_{n+1}=e^{\mathbf{S}_2(T_n-t_1)}\mathbf{Y}(\lambda_n). \tag{36}$$

Уравнения (23) и (36) описывают переходный процесс в системе выпрямитель — нагрузка без учета схемы импульсно-фазового управления вентилями (СИФУ). При исследовании свойств замкнутой системы следует описать СИФУ разностным уравнением, аргументами которого служат аргументы уравнения (23) — $\mathbf{X}_n$ и α_n. С этой целью используется закон, по которому СИФУ осуществляет преобразование аналогового сигнала в дискретный. Например, законы преобразования широко применяемых СИФУ синхронного и асинхронного типов имеют следующие виды:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_n-\alpha+K_1(K_2-y)=0; \\ &K_1-\int\limits_0^{T_n}(K_2-y)\,dt=0, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

где K_1 и K_2 — сигналы задания.

Подставляя в (37) из (5) и (8) выражение для y, получаем разностное уравнение соответственно при синхронной и асинхронной СИФУ в функциональной форме:

$$\left.\begin{aligned} &R_1(\mathbf{X}_n^{\mathrm{T}},\ \alpha_n,\ \lambda_n,\ K_1,\ K_2)=0; \\ &R_2(\alpha_{n+1},\ \mathbf{X}_n^{\mathrm{T}},\ \alpha_n,\ \lambda_n,\ K_1,\ K_2)=0. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Так как переменная α_{n+1} входит только во второе уравнение (38), то вектор состояния замкнутой системы $\mathbf{Z}_n$, координатами которого являются вектор $\mathbf{X}_n$ и угол α_n, при синхронной и асинхронной СИФУ имеет размерность соответственно k и $k+1$.

Анализ динамических свойств линейной модели, связанный с линеаризацией уравнений (17), (23) и (38) в окрестности точки равновесия, выполняется так же, как в [3]. Как отмечено в [9], трудоемкость вычислений условий устойчивости зависит от выбора моментов квантования вектора состояния линейной части. Для непрерывного и полууправляемого режимов в [9] рекомендуется моменты квантования сместить влево относительно моментов отпирания вентилей. Эта рекомендация в прерывистом режиме не дает должного эффекта из-за усложнения процедуры вывода разностных уравнений, поясним сказанное. Если совместить моменты квантования с моментами уменьшения тока i_d до нуля (на рис. 1, *в* они отмечены точками t_3 и t_4), то на интервале повторяемости будут располагаться два участка, но потребуется дополнительное вычисление интервала $T_{n-1}-\lambda_{n-1}$. При всех других моментах квантования, например в точках естественной коммутации (моменты t_5 и t_6 на рис. 1, *в*), интервал повторяемости будет состоять не из двух участков, а из трех, в связи с чем продолжать решение уравнения состояния придется не через одну границу, а через две. Отмеченные обстоятельства объясняют выбор моментов квантования в данной статье в точках отпирания вентилей, отмеченных на рис. 1, *а* точками t_1 и t_2.

Пример. Рассмотрим выпрямитель с асинхронной СИФУ, нагруженный на цепь, изображенную на рис. 4 без ветви R_2L_2, выходным сигналом считается ток в индуктивности i, который является и переменной состояния. Уравнение относительно i имеет вид

$$\frac{di}{dt}=\begin{cases} s_1i+gu_d & \text{при } 0<t<t_1; \\ s_2i & \text{при } t_1<t<T_n, \end{cases} \tag{39}$$

где $s_1=-\frac{R_1}{L_1}$; $g=\frac{1}{L_1}$; $s_2=-\frac{R_1+R}{L_1}$.

Решение (39) запишем в виде

$$i=\begin{cases} I_m\cos\left(\omega t+\alpha_n-\frac{\pi}{m}-\varphi\right)+C_ne^{s_1t} & \text{при } 0<t<t_1; \\ i(\lambda_n)\,e^{s_2t} & \text{при } t_1<t<T_n, \end{cases} \tag{40}$$

где $I_m=U_m\left(R_1^2+\omega^2L_1^2\right)^{-1/2}$; $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\omega L}{R_1}$; $C_n=i_n-I_m\times$ $\times\cos\left(\alpha_n-\frac{\pi}{m}-\varphi\right)$; $i_n=i(0)$.

Выражение для вычисления λ_n вида (17) находим в соответствии с (30):

$$I_m\cos\left(\lambda_n+\alpha_n-\frac{\pi}{m}-\varphi\right)+C_ne^{s_1t_1}+\frac{U_m}{R}\times$$
$$\times\cos\left(\lambda_n+\alpha_n-\frac{\pi}{m}\right)=0. \tag{41}$$

В соответствии с (29) определяем $i(\lambda_n)$:

$$i(\lambda_n)=I_m\cos\left(\lambda_n+\alpha_n-\frac{\pi}{m}-\varphi\right)+C_ne^{s_1t_1}. \tag{42}$$

Уравнение границы (33) примет вид:

$$I_m\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{m}-\varphi\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{m}-\varphi\right)d}{1-d}+\frac{U_m}{R}\times$$
$$\times\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{m}\right)=0;\ d=\exp\left(-\frac{2\pi R_1}{m\omega L_1}\right). \tag{43}$$

В частном случае при $m=2$ выражение (43) преобретает компактный вид:

$$\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{R_1^2+\omega^2L_1^2}}{R}. \tag{44}$$

Разностное уравнение (36) запишем как

$$i_{n+1}=e^{s_2(T_n-t_1)}\,i(\lambda_n). \tag{45}$$

Подставляя i из (40) во второе уравнение (37), получаем

$$R_2(\alpha_{n+1},\ i_n,\ \alpha_n,\ \lambda_n,\ K_1,\ K_2)=K_1\omega-K_2\omega T_n+$$
$$+I_m\left[\sin\left(\lambda_n+\alpha_n-\frac{\pi}{m}-\varphi\right)+\sin\left(\alpha_n-\frac{\pi}{m}-\varphi\right)\right]+$$
$$+\frac{\omega}{s_1}(e^{s_1t_1}-1)\left[i_n-I_m\cos\left(\alpha_n-\frac{\pi}{m}-\varphi\right)\right]+$$
$$+\frac{\omega}{s_2}i(\lambda_n)(e^{s_2T_n}-e^{s_2t_1})=0. \tag{46}$$

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

В итоге математическая модель рассматриваемой схемы описывается двумя разностными уравнениями (45) и (46), т. е. имеет второй порядок, тогда как в [3] схема с нагрузкой первого порядка описывается одним уравнением, т. е. имеет первый порядок.

Выводы. 1. Режим прерывистого тока выпрямителя является особым режимом, особенность которого состоит в том, что порядок как дифференциальных, так и разностных уравнений, описывающих систему выпрямитель — нагрузка, зависит не только от порядка линейной части нагрузки, но и от ее структуры.

2. Это нелинейное свойство не имеет аналога среди известных звеньев систем автоматического регулирования и обусловлено односторонней проводимостью вентилей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Поздеев А. Д., Иванов А. Г.** Устойчивость замкнутых систем с вентильными преобразователями в режиме прерывистых токов. — Электричество, 1973, № 12.

2. **Шипилло В. П., Зинин Ю. С.** Устойчивость системы автоматического регулирования с вентильным преобразователем в режиме прерывистых токов. — ЭП. Электропривод, 1974, вып. 1.

3. **Исхаков А. С.** Динамические свойства выпрямителя в режиме прерывистого тока. — Электричество, 1982, № 12.

4. **Воронов А. А.** Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. — М.: Наука, 1979.

5. **Заде Л., Дезоер Ч.** Теория линейных систем. Метод пространства состояний. — М.: Наука 1970.

6. **Толстов Ю. Г., Придатков А. Г.** Переходные процессы в автономных инверторах с независимым управлением. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1967, № 2.

7. **Исхаков А. С.** Выпрямитель в полууправляемом режиме. — Электричество, 1981, № 6.

8. **Розенвассер Е. Н.** Колебания нелинейных систем. — М.: Наука, 1969.

9. **Исхаков А. С.** Выбор дискретных переменных при анализе устойчивости выпрямителей. — Электричество, 1983, № 4.

[12.12.84]

УДК [621.314.6:621.382]—52.016.35

Устойчивость в целом замкнутой системы регулирования с широтно-импульсным преобразователем

БЕРКОВИЧ Е. И., канд. техн. наук

Таллин

Исследованию устойчивости замкнутых систем с широтно-импульсными преобразователями (ШИП), которые являются весьма распространенными устройствами в технике преобразования параметров электрической энергии и в автоматике, посвящены многие работы. Наиболее значительные из них можно подразделить на два направления.

В работах первого направления ШИП, представляющий собой, строго говоря, нелинейную дискретную систему, анализируется при бесконечно малых возмущениях, что дает возможность свести анализ к исследованию линейной импульсной модели [1]. Это, в свою очередь, позволило разработать общую методику исследования систем с ШИП на устойчивость к автоколебаниям на основной субгармонике на базе аппарата модифицированного z-преобразования. Введением в импульсную модель звена с запаздыванием учитывается также режим прерывистого тока тиристорного ШИП [2].

В работах второго направления ШИП рассматривается как нелинейный объект, а для анализа устойчивости применяется в тех или иных формах прямой метод Ляпунова и метод априорных интегральных оценок [3—5]. В [3] для исследования устойчивости используется прямой метод Ляпунова применительно к нелинейным разностным уравнениям, описывающим ШИП, однако такой подход не дает возможности исследовать ШИП второго рода. В [4 и 5] приведены общие и строгие условия абсолютной устойчивости нелинейных импульсных систем с широтной и временной модуляцией, вместе с тем из них непосредственно не следуют условия устойчивости ШИП в режиме прерывистого тока. Кроме того, поскольку найденные достаточные условия устойчивости зависят от вида функции Ляпунова или выбора интегральной оценки, всегда представляет интерес сравнение полученных различными путями областей устойчивости, а также упрощение вычислений для их определения.

В предлагаемой статье для *ШИП*, рассматриваемого как нелинейный объект системы автоматического регулирования, с помощью прямого метода Ляпунова получены простые условия устойчивости в целом в режимах непрерывного и прерывистого тока.

В дальнейшем будем рассматривать *ШИП*, получающий питание от источника постоянного напряжения U и выполненный на идеальном полностью управляемом тиристоре V (рис. 1, *а*). Тиристор включается последовательностью импульсов с периодом T (рис. 2, *а*), а выключается импульсами, формируемыми в моменты пересечения кривой напряжения управления σ с опорным пилообразным напряжением θ (рис. 2, *б* и *в*). График выходного напряжения *ШИП* (между точками *а* и *в*) при напряжении управления σ_0 показан на рис. 2, *г*. Поскольку напряжение u_{ab} имеет импульсный характер, на выходе ШИП включают индуктивный или индуктивно-емкостный фильтр, благодаря которому напряжение на нагрузке сглажено и содержит значительно меньший уровень пульсаций (рис. 2, *д*), причем среднее значение напряжения на нагрузке $u_н=\gamma U$, где γ — угол управления *ШИП*, представляющий собой фазовый сдвиг между включающей и выключающей тиристор V последовательностями импульсов. При выключенном состоянии тиристора ток реактора фильтра замыкается через диод $V2$.

Далее будем рассматривать общий случай схемы линейной нагрузки и регулятора, представляющие совместно непрерывную линейную часть схемы (НЛЧ). Схему на рис. 1, *а* можно представить в виде схемы рис. 1, *б*, в которой работа ключа определяется единичной коммутационной функцией F, совпадающей с формой кривой напряжения u_{ab}. Обозначив потенциал точки *а* через φ (потенциал «минуса» принимаем равным нулю), для интервалов γT, когда ключ замкнут, запишем (рис. 1, *б*, 2, *г*):

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

$u_{V1}=U-\varphi;\ u_{V2}=\varphi$

или, поскольку речь идет о напряжениях на диодах, $\varphi-U\geqslant 0;\ \varphi\geqslant 0$.

Так как $U>0$, то эти неравенства можно объединить в одно: $\varphi-U\geqslant 0$. На интервалах $(1-\gamma)T$, когда ключ разомкнут, $\varphi\geqslant 0$. Последние два неравенства представим одним:

$\varphi-UF\geqslant 0$.

Токи диодов $V1$ и $V2$ $i_{V1}\geqslant 0$, $i_{V2}\geqslant 0$, и поскольку они одновременно не протекают, эти неравенства заменяем одним: $i_{V1}+i_{V2}\geqslant 0$.

Неравенства $\varphi-UF\geqslant 0$ и $i_{V1}+i_{V2}\geqslant 0$ можно рассматривать как условия, записанные для некоторого диода с током $i_{V1}+i_{V2}$ и напряжением $-\varphi+UF$.

Таким образом, эквивалентная схема *ШИП* будет иметь вид, представленный на рис. 1, *в*.

Структурная схема замкнутой системы регулирования по некоторой векторной величине u при задающем воздействии $u_з$ включает собственно *ШИП*, диод V, *НЛЧ* схемы (рис. 1, *г*). Схема описывается следующей системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{du}{dt}=Au+b\,[F(\sigma)-u_V];\\&\sigma=c'u,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

где u — вектор состояния *НЛЧ*, отнесенный к величине входного напряжения U; A — квадратная матрица $m\times\times m$ *НЛЧ*, не изменяющая своих элементов на интервалах периода; b, c—m-мерные матрицы-столбцы (знак штриха означает транспонирование матрицы); σ — напряжение на входе *ШИП*; $F(\sigma)=F$ — коммутационная функция напряжения на выходе *ШИП*;

$$F(\sigma)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{|\theta-\sigma|}{\theta-\sigma}\right);$$

u_V — напряжение на диоде V (рис. 1, *в*), отнесенное к величине входного напряжения U.

Предварительно рассмотрим режим непрерывного тока через реактор, т. е. случай, когда $u_V=0$.

Уравнение для нулевого решения системы (1) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\bar u}{dt}=A\bar u+b\,[F(\sigma)-F(\sigma_0)];\\&\bar\sigma=c'\bar u,\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

где $\bar u=u-u_0;\ \bar\sigma=\sigma-\sigma_0$,

причем u_0, σ_0 — величины, характеризующие некоторый режим работы *ШИП*, в качестве которого будем принимать установившийся режим при угле управления γ_0; u, σ — величины, характеризующие исследуемый переходный процесс; $F(\sigma_0)$, $F(\sigma)$ — соответствующие этим режимам коммутационные функции выходных напряжений *ШИП*.

Диаграммы, поясняющие эти обозначения, и разность коммутационных функций

$$F(\sigma)-F(\sigma_0)=\frac{1}{2}\left[\frac{|\theta-\sigma_0|}{\theta-\sigma_0}-\frac{|\theta-\sigma|}{\theta-\sigma}\right]=F(\bar\sigma)$$

показаны на рис. 2, *е*, *ж* и *з*.

Исследование устойчивости нулевого решения системы (2) будем вести с помощью прямого метода Ляпунова для дифференциальных уравнений с разрывной

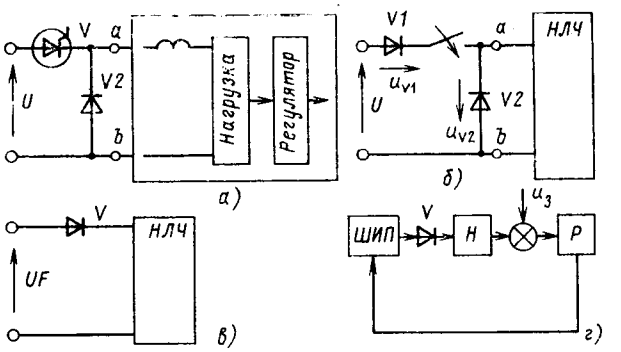


Рис. 1. Схемы замкнутой системы автоматического регулирования в *ШИП*

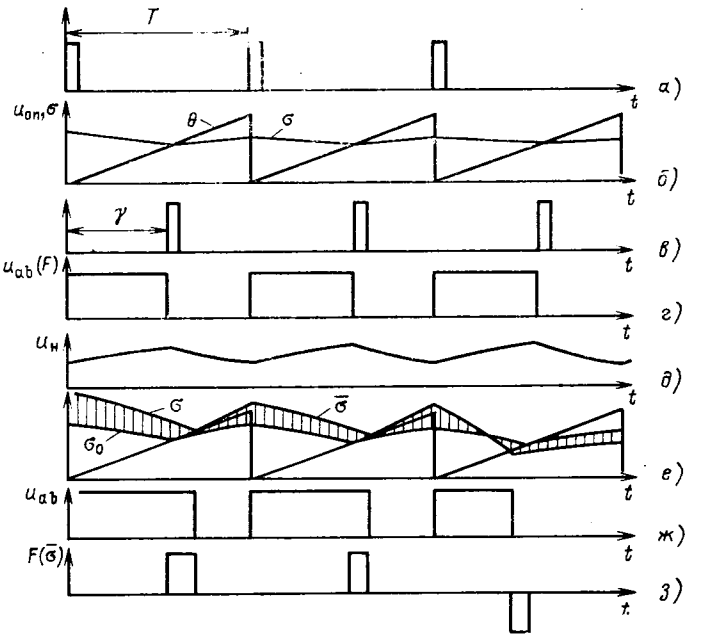


Рис. 2. Диаграммы работы *ШИП*

правой частью. Функцию Ляпунова зададим в виде суммы «квадратичной формы и интеграла от нелинейности»

$$V=\bar u'B\bar u+\beta\int_0^{\bar\sigma}F(\bar\sigma)\,d\bar\sigma,\qquad(3)$$

где B — некоторая положительно определенная матрица порядка m; β — параметр; $\beta>0$;

$$F(\bar\sigma)\,\bar\sigma>0.\qquad(3а)$$

Последнее неравенство должно выполняться для обеспечения определенной положительности функции V. Условие его соблюдения, как видно будет из дальнейшего изложения, является в нашем случае главным условием устойчивости замкнутой системы.

Действительно, при соблюдении неравенства (3а) задача сводится к исследованию абсолютной устойчивости системы, т. е. определению условий асимптотической устойчивости при любых начальных возмущениях и любом выборе функции $F(\sigma)$. Указанная проблема достаточно освещена в литературе и в общем виде представляется следующим образом [7].

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

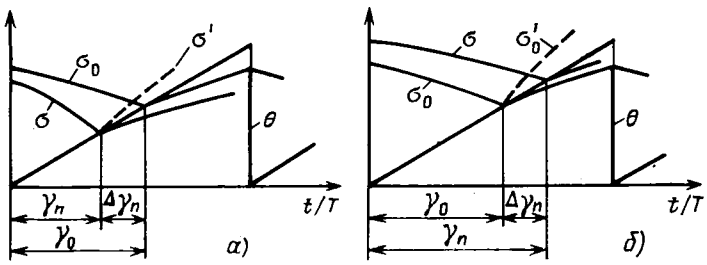


Рис. 3. К выводу условия устойчивости

Задаются симметричной матрицей C, все собственные числа которой положительны, и из уравнения

$$A'B+BA=-C$$

находят положительно определенную матрицу B. При этом матрица C и параметр β должны быть такими, чтобы обеспечивалась определенная отрицательность производной от функции Ляпунова V, найденной из системы (2)

$$\frac{dV}{dt}=-\bar{u}'C\bar{u}+2d'\bar{u}F(\bar{\sigma})+\beta c'bF^2(\bar{\sigma}),$$

где $d=Bb+\frac{1}{2}\beta A'c$.

Условие $c'b\leqslant 0$ является необходимым условием отрицательности знака производной $\frac{dV}{dt}$.

Если можно подобрать положительное число β и положительную матрицу C, так что выполняется неравенство

$$-\beta c'b>\left(d+\frac{c}{2}\right)'C^{-1}\left(d+\frac{c}{2}\right),$$

то нулевое решение системы (3) абсолютно устойчиво.

Если матрица линейной части системы (1) имеет одно нулевое характеристическое число, то при замене переменных система записывается в следующем виде [7]:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{du}{dt}=Au+bF(\sigma);\\&\frac{dw}{dt}=F(\sigma);\\&\sigma=c'u+\xi w,\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

причем в случае абсолютной устойчивости выполняется неравенство $\xi<0$.

Достаточное условие абсолютной устойчивости запишется следующим образом:

$$-\xi-c'b>d'C^{-1}d.$$

Вышеуказанные соотношения рассмотрены на простейших примерах.

Остановимся далее на условиях соблюдения неравенства (3а). Рис. 3, *а* и *б* иллюстрируют взаимное расположение кривых σ_0 и σ на некотором n-м периоде переходного процесса соответственно при $\gamma_nT<\gamma_0T$ и $\gamma_nT>\gamma_0T$. В первом случае, при $\gamma_nT<\gamma_0T$, неравенство (3а) будет выполнено, если на участке $\Delta\gamma_nT$ разность $\sigma-\sigma_0=\bar{\sigma}$ будет отрицательной. Действительно, на этом участке $F(\bar{\sigma})=-1$, а вне его $F(\bar{\sigma})=0$.

В качестве критерия, обеспечивающего на интервале $\Delta\gamma_nT$ неравенство $\bar{\sigma}<0$, положим условие

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{\max}\leqslant\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{\min},\quad \gamma_nT\leqslant t\leqslant\gamma_0T,\qquad(5а)$$

следующее непосредственно из геометрического построения рис. 3,*а*.

Аналогично, для обеспечения неравенства (3а) во втором случае ($\gamma_nT\geqslant\gamma_0T$), когда $F(\bar{\sigma})=F(\sigma)-F(\sigma_0)=-1$, достаточно, чтобы

$$\left(\frac{d\sigma_0}{dt}\right)_{\max}\leqslant\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{\min},\quad \gamma_0T\leqslant t\leqslant\gamma_nT.\qquad(5б)$$

Если опорное напряжение представляет собой линейно изменяющееся пилообразное напряжение, то условия (5а) и (5б) запишутся как

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{\max}\leqslant\frac{\theta_0}{T}$$

при $\gamma_nT<\gamma_0T$ и при $\gamma_nT>\gamma_0T$

$$\left(\frac{d\sigma_0}{dt}\right)_{\max}\leqslant\frac{\theta_0}{T},$$

где θ_0 — амплитуда пилообразного напряжения.

Определим значения σ и σ_0. Первую из этих величин можно записать как решение системы уравнений, описывающей *ШИП* на интервале $\gamma_зT<t<T$. На этом интервале $F(\sigma)=0$ и протекание процесса определяется *НЛЧ* схемы, начальными условиями $u_{n\gamma}$ вектора состояния u и векторным задающим воздействием $u_з$. Таким образом,

$$\sigma=c'(e^{At}u_{n\gamma}+u_{р.з}),\quad \gamma_nT<t<T,$$

где $u_{р.з}$ — реакция *НЛЧ* на воздействие вектора задания $u_з$;

$$u_{р.з}=\int_0^{\tau}e^{A(t-\tau)}u_з(\tau)\,d\tau.$$

Вторая величина σ_0 определяется точно так же, но в этом случае матрица начальных условий равна значениям величин установившегося режима в момент γ_0T. Очевидно, определение σ как зависимости от $u_{n\gamma}$ и $u_з$ не представляет особого труда.

С учетом сказанного условия устойчивости будут выглядеть следующим образом:

$$\left[\frac{dc'(e^{At}u_{n\gamma}+u_{р.з})}{dt}\right]_{\max}\leqslant\frac{\theta_0}{T};\qquad(5в)$$

$$\left[\frac{dc'(e^{At}u_{\gamma 0}+u_{р.з})}{dt}\right]_{\max}\leqslant\frac{\theta_0}{T}.\qquad(5г)$$

Поскольку параметры схемы *ШИП* всегда выбираются так, что $u_{n\gamma}\geqslant 0$ и $u_{\gamma 0}\geqslant 0$, а вещественные части собственных чисел матрицы A отрицательны, то производные в левых частях неравенств (5в) и (5г) будут максимальными при $u_{n\gamma}=0$ и $u_{\gamma 0}=0$. Условие

$$\frac{dc'u_{р.з}}{dt}\leqslant\frac{\theta_0}{T}\qquad(6)$$

и будет первым достаточным условием устойчивости замкнутой системы регулирования с *ШИП*. Однако такое условие, являясь достаточным, может в ряде случаев оказаться избыточным. Действительно, в реальных системах трудно ожидать равенства нулю всех величин напряжений и токов в момент $t=\gamma_nT$ или $t=\gamma_0T$.

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

В установившемся режиме эти величины известны, выражение

$\frac{dc' e^{At} u_{\gamma 0}}{dt}$ может быть аппроксимировано некоторой экспонентой $U_{\gamma 0} e^{-t/T_0}$ так, чтобы на всем интервале

$$\frac{dc' e^{At} u_{\gamma 0}}{dt} > U_{\gamma 0} e^{-t/T_0}.$$

Так как минимальное значение аппроксимирующей экспоненты будет, очевидно, при $t=(1-\gamma_0)T$ (рассматриваем случай $\gamma_n T > \gamma_0 T$), то условие (6) в менее категорической форме будет иметь вид

$$\frac{dc' u_{\text{р.э}}}{dt} - U_{\gamma 0} e^{-(1-\gamma_0)\frac{T}{T_0}} < \frac{\theta_0}{T}. \qquad (7)$$

Принимая аппроксимирующую экспоненту действительной и для режима $\gamma_n T < \gamma_0 T$, можем распространить условие (7) и на этот случай.

Рассмотрим особенности определения условий устойчивости в режиме прерывистого тока *ШИП*. Система уравнений (2) будем иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= A\bar{u} + b\left[F(\sigma) - F(\sigma_0) + \bar{u}_V\right]; \\ \bar{\sigma} &= c'\bar{u}, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

где $\bar{u}_V = u_V - u_{V0}$.

Обратим внимание на то, что в режиме возмущенного движения, описываемого системой (8), произведение разности напряжений на вентиле $\bar{u}_V$ на разность тока вентиля $\bar{i}_V = i_V - i_{V0}$ всегда положительно. Действительно,

$$\bar{u}_V \bar{i}_V = (u_V - u_{V0})(i_V - i_{V0}) = -u_{V0} i_V - u_V i_{V0} \geqslant 0, \qquad (8a)$$

так как $u_V i_V = 0$; $u_{V0} i_{V0} = 0$; $u_V \leqslant 0$; $u_{V0} \leqslant 0$; $i_V \geqslant 0$; $i_{V0} \geqslant 0$. При этом, если $\bar{i}_V = 0$, то и $\bar{u}_V = 0$.

Неравенство (8а) позволяет функцию Ляпунова для системы (8) записать как

$$V = \bar{u}' B \bar{u} + \beta \int_0^{\bar{\sigma}} F(\bar{\sigma})\, d\bar{\sigma} + \lambda \int_0^{\bar{i}_V} \bar{u}_V d\bar{i}_V.$$

Производная этой функции, определенная согласно (8), будет иметь вид

$$\frac{dV}{dt} = -\bar{u}' C \bar{u} + 2d' \bar{u} F(\bar{\sigma}) + \beta c' b F^2(\bar{\sigma}) + 2f' \bar{u} \bar{u}_V' + \\ + \lambda e' b \bar{u}_V^2,$$

и условия ее отрицательной определенности для данной схемы и будут являться условиями устойчивости системы. При этом, однако, по-прежнему должно выполняться неравенство (3а), т. е. должно соблюдаться условие (7).

Рассмотрим применение изложенного подхода на примере *ШИП* с *LR*-нагрузкой ($L/R = T_2$) и интегральным регулятором с постоянной времени T_1. Для непрерывного режима справедлива следующая система уравнений (в относительных единицах):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_1}{dt} &= -\bar{u}_1 \frac{R}{L} + \frac{R}{L} F(\bar{\sigma}) \\ \frac{d\bar{u}_2}{dt} &= -\frac{1}{T_1} \bar{u}_1; \\ \bar{\sigma} &= \bar{u}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Функцию Ляпунова принимаем в виде ($k > 0$)

$$V = k\bar{u}_1^2 + \frac{R}{L} \int_0^{\bar{\sigma}} F(\bar{\sigma})\, d\bar{\sigma},$$

ее производная согласно (9)

$$\frac{dV}{dt} = -2k\bar{u}_1^2 \frac{R}{L} + 2k\bar{u}_1 \frac{R}{L} F(\bar{\sigma}) - \frac{R}{LT_1} \bar{u}_1 F(\bar{\sigma}).$$

Положительный знак производной $-\frac{dV}{dt}$ будет обеспечиваться при $k = \frac{1}{2}\frac{1}{T_1} > 0$. В соответствии с [7] это достаточно для обеспечения устойчивости без требования определенности знака производной.

Определим далее условия, при которых выполняется неравенство (3а). На интервале $(1-\gamma_n)T$ в переходном процессе (все переменные безразмерные, $\theta_0 = 1$)

$$\sigma = u_2 = \gamma_n + \frac{T}{T_1} \gamma_0 t - I_{0\gamma n} \frac{T_2}{T_1}\left(1 - e^{-t\frac{T}{T_2}}\right);$$

а в установившемся режиме

$$\sigma_0 = u_2 = \gamma_0 + \frac{T}{T_1} \gamma_0 t - I_{0\gamma} \frac{T_2}{T_1}\left(1 - e^{-t\frac{T}{T_2}}\right),$$

где $I_{0\gamma n}$ и $I_{0\gamma}$ — значения тока нагрузки при $t = \gamma_n$ и $t = \gamma_0$, причем

$$I_{0\gamma} = \frac{1 - e^{-\gamma_0 \frac{T}{T_2}}}{1 - e^{-T/T_2}}.$$

Первое достаточное условие (6) запишется как

$$\frac{T}{T_1} \leqslant \frac{1}{\gamma_0},$$

а условие устойчивости, вытекающее из неравенства (7) (вместо $U_{\gamma 0}$ подставляем I_0, $T_0 = T_2$), будет иметь вид

$$\frac{T}{T_1} \leqslant \frac{1}{\gamma_0 - I_0 e^{-\Delta\gamma_{\max} \frac{T}{T_2}}}, \qquad (10)$$

где I_0 — значение тока установившегося режима при $t = nT$, $I_0 < I_{0\gamma}$;

$$I_0 = \frac{e^{-T/T_2}}{1 - e^{-T/T_2}} \frac{1 - e^{-\gamma_0 \frac{T}{T_2}}}{e^{-\gamma_0 \frac{T}{T_2}}};$$

$\Delta\gamma_{\max} = \gamma_0$, если $\gamma_0 > 0{,}5$ и $\Delta\gamma_{\max} = 1 - \gamma_0$, если $\gamma_0 < 0{,}5$.

На рис. 4 сплошными линиями показаны границы зон устойчивости, определенные в соответствии с последним неравенством при различных γ_0 и T_2/T. Принятие в качестве начального значения в неравенстве (7) величины I_0 создает дополнительный запас для случаев, когда $\gamma_n > \gamma_0$, и не вносит существенной погрешности, если $\gamma_n < \gamma_0$, причем эта погрешность тем меньше, чем больше постоянная времени нагрузки T_2. На том же рис. 4 пунктиром показаны аналогичные кривые, полученные в [1], и штрих-пунктиром — кривая, вычисленная по [6].

Рассмотрим далее *ШИП* с интегральным регулятором и коррекцией по входному току в прерывистом режиме, работающий на нагрузку, представляющую собой Г-образный *LC*-фильтр и включенный параллельно конденсатору фильтра резистор *R*. Система дифференциаль-

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

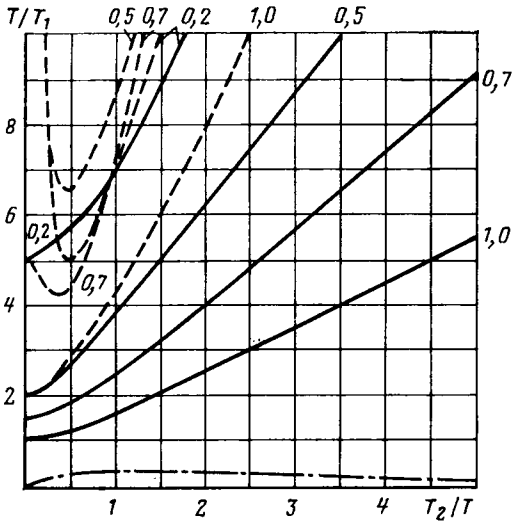


Рис. 4. Границы зон устойчивости при работе *ШИП* с интегральным регулятором на активно-индуктивную нагрузку

ных уравнений в этом случае следующая:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_1}{dt} &= -\frac{1}{T_3}\bar{u}_2+\frac{1}{T_3}F(\bar{\sigma})-\frac{1}{T_3}\bar{u}_V;\\ \frac{d\bar{u}_2}{dt} &= \frac{1}{T_2}\bar{u}_1-\frac{1}{T_2}\bar{u}_2;\\ \frac{d\bar{\sigma}}{dt} &= \left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T_1}\right)\bar{u}_2-\frac{1}{T_0}F(\bar{\sigma})+\frac{1}{T_0}\bar{u}_V, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

где $\bar{u}_1=\bar{i}R$; $\bar{i}$ — входной ток *ШИП*; $\bar{u}_2$ — напряжение на нагрузке R; $\bar{\sigma}$ — напряжение на выходе регулятора; $\bar{u}_V$ — напряжение на последовательном диоде V рис. 1, *г*; T_1 — постоянная времени интегрального регулятора; $T_2=RC$; $T_3=L/R$; $T_0=\frac{R}{r}T_3$; $r=\bar{u}_к/i$, причем $\bar{u}_к$ — напряжение коррекции по току.

Функцию Ляпунова запишем в виде суммы «квадратичной формы и двух интегралов от нелинейностей». В матричной форме [полагая $F(\sigma)\sigma>0$]

$$V=\bar{u}'B\bar{u}+\beta_1\int_0^{\sigma}F(\bar{\sigma})\,d\bar{\sigma}+\beta_2\int_0^{\bar{u}_1}\bar{u}_V d\bar{u}_1,$$

где

$$u=\begin{vmatrix} u_1\\ u_2\end{vmatrix};\quad B=\begin{vmatrix} 2(T_2+T_3) & =2T_2\\ -2T_2 & T_2\left(1-2\frac{T_2}{T_3}\right)\end{vmatrix};$$

$$\beta_1=\frac{4T_0T_1}{T_0-T_1};\quad \beta_2=4T_3.$$

Производная V согласно (11) имеет вид

$$\frac{dV}{dt}=-\bar{u}'C\bar{u}+2e_1'\bar{u}F(\sigma)+2e_2'\bar{u}\,\bar{u}_V+\frac{4T_0}{T_0-T_1}\bar{u}_VF(\bar{\sigma})-$$

$$-\frac{4T_1}{T_0-T_1}F^2(\bar{\sigma})-4\bar{u}_V^2,$$

где

$$C=\begin{vmatrix} 4 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix};\quad e_1=\begin{vmatrix} 2(1+T_2/T_3)\\ 2(1+T_2/T_3)\end{vmatrix};$$

$$e_2=\begin{vmatrix} -2(1+T_2/T_3)\\ -2(1-T_2/T_3)\end{vmatrix}.$$

Определенная отрицательность производной $\frac{dV}{dt}$ будет обеспечиваться по условиям Сильвестра при выполнении неравенств [7]:

$$C>0;\quad \begin{vmatrix} C & -e_1\\ -e_1' & \frac{4T_1}{T_0-T_1}\end{vmatrix}>0;\quad \begin{vmatrix} C & -e_1 & -e_2\\ -e_1' & \frac{4T_1}{T_0-T_1} & -\frac{2T_0}{T_0-T_1}\\ -e_2' & -\frac{2T_0}{T_0-T_1} & 4\end{vmatrix}>0.$$

Первое неравенство обеспечивается, второе неравенство приводит к условию

$$\frac{T_1}{T_0-T_1}>2\left(1+\frac{T_2}{T_3}\right)^2,$$

а третье неравенство в развернутом виде запишется как

$$\left(3-\frac{T_2^2}{T_3^2}\right)\left[\frac{2T_1}{T_0-T_1}-\left(1+\frac{T_2}{T_3}\right)^2\right]>\left[2\left(1-\frac{T_2}{T_3}\right)^2\times\right.$$

$$\left.\times\frac{T_1}{T_0-T_1}+\left(1-\frac{T_2^2}{T_3^2}\right)\frac{T_0}{T_0-T_1}+\frac{T_0^2}{T_0^2-T_1^2}\right].$$

Окончательно условия устойчивости будут определяться по-прежнему неравенствами (5), при этом значение σ в прерывистом режиме будет, естественно, другим, чем в непрерывном режиме, следовательно, отличающимися будут и условия соблюдения неравенств (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шипилло В. П., Чикотило И. И.** Устойчивость замкнутой системы с широтно-импульсным преобразователем. — Электричество, 1978, № 1.
2. **Шипилло В. П., Чикотило И. И.** Устойчивость замкнутой системы с тиристорным широтно-импульсным преобразователем в режиме прерывистого тока. — Электричество, 1986, № 12.
3. **Кунцевич В. М., Чеховой Ю. Н.** Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией. — Киев: Техника, 1970.
4. **Методы** исследования нелинейных систем автоматического управления/Под ред. Р. А. Нелепина. — М.: Наука, 1975.
5. **Гелиг А. Х.** Динамика импульсных систем и нейронных сетей. — Л.: Изд. ЛГУ, 1982.
6. **Морговский Ю. Я.** Импульсные системы управляемой структуры с тиристорными преобразователями. — М.: Энергия, 1976.
7. **Барбашин Е. А.** Функция Ляпунова. — М.: Наука, 1970.

[29.12.84]

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Сообщения

УДК 621.311.018.782.3.001.24

Повышение эффективности двухступенчатого противоаварийного управления энергосистем

КОЛОНСКИЙ Т. В., канд. техн. наук

Киев

Целью работы является рассмотрение возможностей повышения эффективности двухступенчатого противоаварийного управления (ПУ), обеспечивающего сохранение устойчивости параллельной работы энергосистем, соединенных «слабой» связью, при аварийном небалансе активной мощности или ослаблении связи. Такое управление заключается в разгрузке связи от основных средств (первая ступень ПУ) за счет, например, отключения части генераторов (ОГ) и части нагрузки (ОН) и резервного деления с выделением на связь части генераторов отправной системы (вторая ступень ПУ) в случае отказа основных средств [1].

Повышение эффективности и согласование ступеней управления рассматривается с помощью фазовых траекторий.

Как известно, при протекании переходного электромеханического процесса «слабая» связь позволяет практически не учитывать короткие замыкания, ликвидируемые быстродействующей релейной защитой, и изменение пропускной способности связи при аварийных небалансах активной мощности [1]. Такую связь можно заменить эквивалентной схемой «генератор — шины», для которой уравнение фазовой траектории, как первый интеграл уравнения движения генератора при учете э. д. с. или напряжения генератора в виде постоянной величины, имеет вид [2, 3]:

$$S_{\text{кон}}^2 - S_{\text{нач}}^2 = 2\omega_0 \frac{N^{\text{к}}}{T_{\text{э}}^{\text{к}}} \left[\frac{T^{\text{к}}}{N^{\text{к}}} (\delta_{\text{кон}} - \delta_{\text{нач}}) + (\cos\delta_{\text{кон}} - \cos\delta_{\text{нач}}) \right], \quad (1)$$

где $\delta_{\text{нач}}$, $S_{\text{нач}}$, $\delta_{\text{кон}}$, $S_{\text{кон}}$—угол и скольжение в начале ($t=0$) и конце переходного электромеханического процесса изменения угла δ; $N^{\text{к}}$, $T_{j\text{э}}^{\text{к}}$, $T^{\text{к}}$ — соответственно предел статической устойчивости связи, эквивалентная механическая постоянная инерции и мощность эквивалентной турбины при $k=\text{I}$ — в исходном режиме; $k=\text{II}$ — при аварийных возбуждениях в виде аварийных небалансов активной мощности или ослабления связи (отключении отдельных линий); $k=\text{III}$ — при выполнении мероприятия по разгрузке связи с помощью ОГ и ОН в виде первой ступени ПУ или с помощью резервного деления связи с выделением части генераторов на связь в виде второй ступени ПУ; ω_0 — угловая частота.

При известных допущениях для «слабой» связи, в том числе при равенстве нулю активного сопротивления связи [2, 3], в эквивалентной схеме имеет место равенство эквивалентного угла δ и мощности эквивалентной турбины $T^{\text{к}}$ соответственно взаимному углу и передаваемой активной мощности в двухмашинной схеме сети [3].

Первая ступень ПУ. Целесообразно рассмотреть возможность выполнения управляющих воздействий, зависящих от величины аварийного небаланса, и получить при этом выражения для определения величины разгрузки связи по условию сохранения динамической устойчивости, а также для построения фазовых траекторий при действии первой ступени ПУ.

При $t=0$ динамическая перегрузка, вызываемая аварийным небалансом, характеризуется величинами $\delta_{\text{нач}} = \delta_{\text{н}}$, $S_{\text{нач}} = 0$, $T^{\text{I}} = \sin\delta_{\text{н}}$, $N^{\text{I}} = 1$.

В указанных условиях для «слабой» связи можно принять:

$$N^{\text{I}} = N^{\text{II}} = N^{\text{III}} = 1; \; T_{j\text{э}}^{\text{I}} = T_{j\text{э}}^{\text{II}} = T_{j\text{э}}^{\text{III}}, \quad (2)$$

и выражение (1) в текущих координатах S, δ будет иметь вид:

$$S\sqrt{\frac{T_{j\text{э}}^{\text{I}}}{N^{\text{I}}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{2\omega_0\left[\frac{T^{\text{II}}}{N^{\text{I}}}(\delta - \delta_{\text{н}}) + (\cos\delta - \cos\delta_{\text{н}})\right]}, \quad (3)$$

где δ — в радианах, S — в герцах.

Рассчитанные по (3) зависимости $S\sqrt{\frac{T_{j\text{э}}^{\text{т}}}{N^{\text{I}}}}$ от δ при различных значениях T^{II} приведены на рис. 1 (кривые 1—1*в* и 2) [3].

Из (3) следует, что при известном значении N^{I} на траектории с определенной T^{II} каждому заданному фиксированному значению угла $\delta=\delta_{\text{ф}}$ ($\delta_{\text{ф}} > \delta_{\text{н}}$) однозначно соответствует определенное значение скольжения $S=S_{\text{ф}}$, и можно определить T^{II}:

$$T^{\text{II}} = \frac{2\pi^2 T_{j\text{э}}^{\text{I}} S_{\text{ф}}^2 - \omega_0 N^{\text{I}}\left(\cos\delta_{\text{ф}} - \cos\delta_{\text{н}}\right)}{\omega_0(\delta_{\text{ф}} - \delta_{\text{н}})}. \quad (4)$$

Используя T^{II}, получаем

$$\Delta T = T^{\text{II}} - T^{\text{I}}. \quad (5)$$

По ΔT можно определить величину аварийного дефицита в приемной системе двухмашинной схемы в соответствии с известными выражениями, учитывающими соотношение механических постоянных инерций отправной и приемной систем. В частности, при равенстве собственных механических постоянных инерций приемной (пр) и отправной (от) систем мощностью $P_{\text{пр}}$ и $P_{\text{от}}$ для «слабой» связи величина аварийного дефицита в приемной системе с учетом известных допущений определяется по выражению:

$$P_{\text{д}} = \Delta T \frac{P_{\text{от}} + P_{\text{пр}}}{P_{\text{от}}}. \quad (6)$$

В общем случае можно определить необходимую величину разгрузки связи, обеспечиваемую управляющим воздействием противоаварийной автоматики для сохранения динамической устойчивости:

$$\Delta T_{\text{мк}} = T^{\text{II}} - T_{\text{мк}}^{\text{III}}, \quad (7)$$

где $T_{\text{мк}}^{\text{III}}$ — предельная величина, до которой следует снизить мощность эквивалентной турбины или передаваемую мощность по условию сохранения динамической устойчивости с максимальным критическим углом $\delta_{\text{мк}}$ [1].

Величина $T_{\text{мк}}^{\text{III}}$ определяется с учетом угла $\Delta\delta$ от момента возникновения возмущения при $t=0$ до момента реализации управляющего воздействия средством противоаварийной автоматики при значениях скольжения $S_{\text{а}}$ и угла $\delta_{\text{а}}$ [4].

Как указывалось в [1], в случае отказа или недостаточной эффективности первой ступени ПУ резервное деление в качестве второй ступени может выполняться при угле деления $\delta_{\text{д}}$, превышающем угол $\delta_{\text{мк}}$. Однако согласование ступеней обеспечивается лучше, если максимальный угол δ после действия первой ступени равен критическому углу $\delta_{\text{к}}$ [1] при предельном (критическом) значении $T_{\text{к}}^{\text{II}}$, которое с некоторым приближением определяется выражением [3]:

$$T_{\text{к}}^{\text{II}} = 0{,}75 + 0{,}25 I^{\text{I}}. \quad (8)$$

[1] Рассмотрение ведется для двухмашинной схемы сети.

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

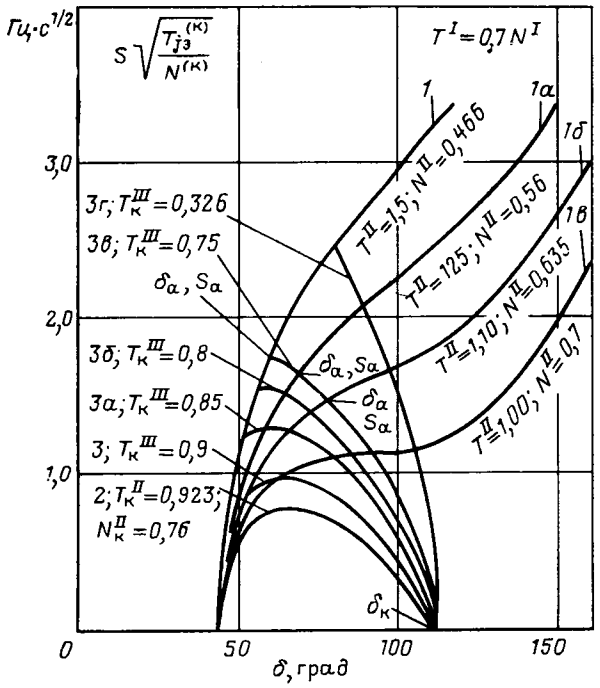


Рис. 1. Фазовые траектории в условиях нарушения устойчивости (1, 1*а*, 1*б*, 1*в*), граничного сохранения устойчивости (2) и сохранения устойчивости в результате разгрузки связи (3, 3*а*, 3*б*, 3*в*, 3*г*).

Значение $\delta_к$ в каждом исходном режиме с углом $\delta_н$ можно определить по выражению [1]:

$$\delta_к = 180° - \arcsin(0,75 + 0,25\sin\delta_н). \quad (9)$$

При сравнительно высоком быстродействии основных средств ПУ угол $\Delta\delta \approx 0$, и в указанных условиях $\delta_к \approx \delta_{мк}$, а также по (7) $T_к^{III} \approx T_{мк}^{III}$ и $\Delta T_к = \Delta T_{мк}$ [4].

Если же $\Delta\delta > 0$, то $\delta_к < \delta_{мк}$, и с помощью управляющего воздействия, обусловливающего значение $\Delta T_к$, большее, чем $\Delta T_{мк}$ по (7), можно разгрузить связь до значения $T_к^{III}$, меньшего, чем $T_{мк}^{III}$, при максимальном угле, равном $\delta_к$ по (9) [4]. Значение $T_к^{III}$ можно непосредственно получить из (1) при $S_{нач} = S_а \delta_{нач} = \delta_а$, $S_{кон} = 0$, $\delta_{кон} = \delta_к$.

При этом (7) имеет вид

$$\Delta T_к = T^{II} - T_к^{III}. \quad (10)$$

Используя полученные значения $T_к^{III}$, обеспечиваемые управляющим воздействием, для каждой фазовой траектории $1 \div 1в$ (рис. 1) можно получить фазовые траектории $3 \div 3г$ в соответствии с выражением:

$$S\sqrt{\frac{T_{jэ}^{I}}{N^{I}}} = \frac{1}{2\pi} \times$$

$$\times\sqrt{S_а^2 \frac{T_{jэ}^{I}}{N^{I}} 4\pi^2 + 2\omega_0 \left[\frac{T_к^{III}}{N^{I}}(\delta - \delta_а) + (\cos\delta - \cos\delta_а)\right]}. \quad (11)$$

На основании (10) для сохранения динамической устойчивости может выполняться разгрузка связи с помощью управляющего воздействия, зависящего от величины T^{II}, определяемой по (4).

При отключении части линий и ослаблении связи до значения N^{II}, когда в (1) при $t=0$ $\delta_{нач}=\delta_н$, $S_{нач}=0$, для «слабой» связи можно получить:

$$T^{I} = T^{II} = \sin\delta_н;\ T_{jэ}^{I} = T_{jэ}^{II} = T_{jэ}^{III}. \quad (12)$$

С учетом (12) выражение (1) примет вид (3) при подстановке N^{II} вместо N^{I}, и будут получены траектории 1—1*в* и 2 при различных N^{II} на рис. 1.

При ослаблении связи значение N^{II} может определяться путем фиксации состава схемы сети и отключаемой линии [3]. Такая фиксация позволяет, как известно, выполнять управляющие воздействия первой ступени ОГ, ОН по возмущению, что характеризуется высоким быстродействием ОГ, ОН и низкими значениями $\delta_а$, $S_а$ (и $\Delta\delta$) на траекториях 1—1*в* (рис. 1), а также приближенным равенством $\delta_к$ и $\delta_{мк}$.

Однако целесообразно обратить внимание на возможность фиксации N^{II} по параметрам переходного процесса. В частности, из (3) при подстановке N^{II} вместо N^{I} видно, что в данном исходном режиме с углом $\delta_н$ каждому заданному фиксированному значению угла $\delta=\delta_ф$ ($\delta_ф>\delta_н$) однозначно соответствует на каждой траектории с различными N^{II} определенное значение скольжения $S=S_ф$. Поэтому фиксация факта отключения данной линии и фиксация скольжения $S^ф$ при угле $\delta_ф$ однозначно определяют послеаварийное значение N^{II}:

$$N^{II} = \frac{2\pi^2 T_{jэ}^{I} S_ф^2 - \omega_0(\delta_ф - \delta_н)\sin\delta_н}{\omega_0(\cos\delta_ф - \cos\delta_н)}.$$

С учетом вышеизложенного угол $\delta_к$ при ослаблении связи в каждом исходном режиме можно найти по (9), используя значение $N_к^{II}$, определяемое с некоторым приближением по выражению [3]:

$$N_к^{II} = \frac{T^{I}}{0,75 + 0,25T^{I}}. \quad (13)$$

С помощью управляющего воздействия можно разгрузить связь до значения $T_{кл}^{III}$ при максимальном угле, равном $\delta_к$ по (9). С учетом (12) значение $T_{кл}^{III}$ определяется из (1) при $S_{нач} = S_а$, $\delta_{нач} = \delta_а$, $S_{кон} = 0$, $\delta_{кон} = \delta_к$. Величина разгрузки связи $\Delta T_{кл}$ определяется по выражению, аналогичному (10), при подстановке T^{I} и $T_{кл}^{III}$ вместо T^{II} и $T_к^{III}$ соответственно. С помощью полученных значений $T_{кл}^{III}$ можно построить фазовые траектории на основании (11) с учетом (12) при подстановке N^{II} и $T_{кл}^{III}$ вместо N^{I} и $T_к^{III}$. Эти траектории будут иметь вид, аналогичный траекториям 3—3*г* (рис. 1).

Вторая ступень ПУ. Обоснование эффективности резервного деления энергосистемы (в случае отказа основных мероприятий ОГ, ОН по разгрузке связи) путем выделения генераторов на приемную систему при фиксации большого угла $\delta_д>\delta_к$ приведено в [1]. Однако при фиксации угла δ и скольжения S (на фазовых траекториях 1—1*в*, рис. 1) имеется возможность повысить эффективность резервного деления за счет выделения существенно большей мощности генераторов на приемную систему, чем при фиксации только угла $\delta_д$. Предельные наибольшие значения угла $\delta_{д.п}$ и скольжения $S_{д.п}$, при которых рассматриваемое резервное деление допустимо по условию сохранения динамической устойчивости выделенных на приемную систему генераторов мощностью $P_г$, равной мощности эквивалентной турбины T^{III}, определяются путем совместного решения двух уравнений. Первое уравнение по (3) с T^{II}, $T_{jэ}^{I}$, N^{I} при динамической перегрузке или с N^{II}, $T_{jэ}^{I}$, T^{I} при ослаблении связи описывает переходный процесс до момента деления при $\delta=\delta_{д.п}$, $S=S_{д.п}$ (траектория 1 на рис. 1 и 2). Второе уравнение по (1) с N^{III}, T^{III}, $T_{jэ}^{III}$ описывает переходный процесс выделенных генераторов относительно приемной системы после выполнения деления и имеет вид:

$$S\sqrt{\frac{T_{jэ}^{III}}{N^{III}}} = \frac{1}{2\pi} \times$$

$$\times\sqrt{S_{д.п}^2 \frac{T_{jэ}^{III}}{N^{III}} 4\pi^2 + 2\omega_0 \left[\frac{P_г}{N^{III}}(\delta - \delta_{д.п}) + (\cos\delta - \cos\delta_{д.п})\right]}. \quad (14)$$

Для упрощения рассмотрения принимается $N^{I} = N^{III}$ при динамической перегрузке и $N^{II} = N^{III}$ при ослаблении связи с учетом АРВ сильного действия выделенных генераторов.

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

В (14) при $S=0$ $\delta=\delta_{г.к}$, где [1]

$$\delta_{г.к}=180^\circ-\arcsin\frac{P_г}{N^{III}} \qquad (15)$$

является критическим углом по условию сохранения динамической устойчивости выделенных генераторов относительно приемной системы после деления.

Для рассмотрения указанных двух уравнений фазовых траекторий в единой размерности по оси ординат на рис. 2 необходимо левую и правую часть (14) умножить на

$\sqrt{\frac{T^{I}_{jэ}N^{III}}{N^{I}T^{III}_{jэ}}}$ при динамической перегрузке и на $\sqrt{\frac{T^{I}_{jэ}N^{III}}{N^{II}T^{III}_{jэ}}}$

при ослаблении связи.

С учетом решения этих двух уравнений и полученных предельных значений $\delta_{д.п}$, $S_{д.п}$ для принятого наибольшего значения $T^{II}(T^{II}=1{,}5$, траектория *1*) в соответствии с (14) на рис. 2 приведены предельные фазовые траектории *4*, которые, например, для динамической перегрузки определяются выражением:

$$S\sqrt{\frac{T^{I}_{jэ}}{N^{I}}}=\frac{1}{2\pi}\times$$

$$\times\sqrt{S^2_{д.п}\frac{T^{I}_{jэ}}{N^{I}}4\pi^2+2\omega_0K_j\left[\frac{P_г}{N^{I}}(\delta-\delta_{д.п})+(\cos\delta-\cos\delta_{д.п})\right]},\ (16)$$

где в эквивалентной схеме [1]:

$$K_j=\frac{T^{I}_{jэ}}{T^{III}_{jэ}}. \qquad (17)$$

С учетом допущений, принятых при определении (6), выражение для K_j применительно к двухмашинной схеме сети принимает вид:

$$K_j=\frac{P_{от}P_{пр}}{P_{от}+P_{пр}}\Big/\frac{P_гP_{пр}}{P_г+P_{пр}}=\frac{P_{от}(P_г+P_{пр})}{P_г(P_{от}+P_{пр})}. \qquad (18)$$

Чем меньше допустимое значение K_j, тем выше эффективность деления. По (18) при $P_{от}=200$ млн. кВт, $P_{пр}=100$ млн. кВт значение $K_j=20$ соответствует $P_г=3{,}45$ млн. кВт, а значение $K_j=5$ соответствует $P_г=15{,}4$ млн. кВт.

На рис. 2 приведены также показанные на рис. 1 фазовые траектории 1*в*, 2, 3*в* (траектория 3*в* характеризует действие первой ступени ПУ). Из рис. 2 видны преимущества деления при использовании наклонной характеристики деления (кривая *5*) $\delta_д=f(S_д)$ по сравнению с вертикальной характеристикой деления (кривая *6*) $\delta_д=\text{const}$, удовлетворяющей по [1] условию:

$$\delta_к<\delta_д<\delta_{д.п}. \qquad (19)$$

В частности, при использовании вертикальной характеристики деления (кривая *6*) в условиях интенсивного переходного процесса (например, при $T^{II}=1{,}5$ для траектории *1* на рис. 1 и 2) в точке пересечения характеристики деления 6 и траектории *1* при $K_j\geqslant20$ допустимо выделение сравнительно небольшой мощности генераторов, соответствующей мощности промежуточной электростанции [1]. Значительную мощность генераторов при $K_j=5$, 10 можно выделить только при меньшей интенсивности переходного процесса (например, при $T^{II}=1$ для траектории 1*в* на рис. 2).

При использовании наклонной характеристики деления 5, отстроенной от фазовой траектории 3*в* (при которой сохраняется динамическая устойчивость с помощью основного мероприятия ОГ, ОН) и от предельной траектории после деления 4, например, при $K_j=5$, имеется возможность выделения в точке $S_д$, $\delta_д$ гораздо большей мощности генераторов (при низких K_j) в условиях больших ($T^{II}=1{,}5$) интенсивностей переходного процесса. Указанное достигнуто благодаря тому, что с помощью наклонной характеристики 5 обеспечивается выделение генераторов в условиях небольших интенсивностей переходного

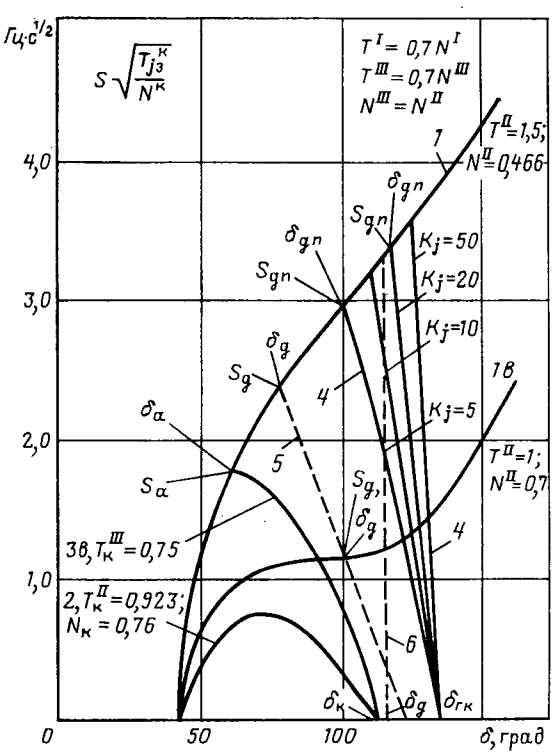


Рис. 2. Фазовые траектории 1, 1*в*, 2, 3*в*, идентичные траекториям на рис. 1, фазовые траектории *4* предельного сохранения устойчивости выделенных после деления генераторов, наклонная *5* и вертикальная *6* характеристики деления.

процесса ($T^{II}=1$ на рис. 2) при низких скольжениях $S_д$ и больших углах $\delta_д$, а в условиях больших интенсивностей переходного процесса ($T^{II}=1{,}5$ на рис. 2) — при высоких скольжениях $S_д$ и малых углах $\delta_д$. Характеристика деления 5 может быть реализована на основе комбинированного органа, фиксирующего δ, S [3].

Вывод. Использование фазовых траекторий позволило выявить возможности повышения эффективности двухступенчатого противоаварийного управления путем использования наклонной характеристики деления. Такая характеристика позволяет выделять генераторы значительной мощности на приемную энергосистему практически независимо от интенсивности переходного электромеханического процесса.

Деление с помощью такой характеристики может использоваться не только в качестве резервного мероприятия (второй ступени) в случае отказа первой ступени ОГ, ОН, но и в качестве основного мероприятия в условиях, когда ОГ, ОН не используются. При этом в отличие от деления, выполняемого практически сразу после возмущения, полностью используется пропускная способность связи по устойчивости до выполнения рассматриваемого деления, и деление выполняется только в том случае, когда с помощью наклонной характеристики фиксируется неустойчивый переходный электромеханический процесс.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Колонский Т. В.** Повышение устойчивости энергосистем с промежуточными электростанциями на линиях межсистемной связи. — Электричество, 1978, № 12.

2. **Веников В. А.** Переходные электромеханические процессы в энергосистемах. — М.: Энергия, 1978.

3. **Иофьев Б. И.** Автоматическое аварийное управление мощностью энергосистем. — М.: Энергия, 1974.

4. **Колонский Т. В.** О критериях управления переходными электромеханическими процессами на линиях межсистемной «слабой» связи. — Электричество, 1981, № 5.

[29.09.81]

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

УДК 621.316.925:681.142-523.8

Синтез логической части устройств релейной защиты и автоматики

ПОЛЯКОВ В. Е., доктор техн. наук, ТРОЦЕНКО А. А., канд. техн. наук

В настоящее время при построении устройств релейной защиты и автоматики (РЗА) используют такие индивидуальные устройства, как реле времени, RC — цепи и т. п. Анализ существующих устройств РЗА показывает, что чаще всего последовательность их срабатываний по времени неодинакова. Поэтому представляет интерес построение устройств РЗА с использованием одного устройства, реализующего любые временные булевы функции (ВБФ), соответствующие возможным срабатываниям РЗА с учетом их временной последовательности.

Пусть интервалу времени ОК можно поставить в соответствие единичное значение какого-либо сигнала z. Будем считать, что отсчет времени (точка «О») начинается с момента появления единичного значения булевой функции f_0 и продолжается до тех пор, пока имеется сигнал z и не появится единичное значение булевой функции f_k (точка «К»). Тогда

$$z = f_0 + \bar{f}_k z. \qquad (1)$$

Выражение (1) представляет собой булеву функцию, которая в общем случае описывает любой сигнал, принимающий единичное значение на заданном интервале времени ОК.

Интервал ОК можно разбить на $(n+1)$ подынтервалов[1] с порогами времени $T_1, T_2, \ldots, T_n$, с которыми связаны временные булевы переменные $t_1, t_2, \ldots, t_n$ [1]. Тогда любому из подынтервалов или их сумме может быть поставлена в соответствие ВБФ вида:

$$y = f(z, t_1, t_2, \ldots, t_n). \qquad (2)$$

Функцию (2) можно реализовать с помощью RC — цепей или счетчика. В последнем случае пуск счетчика осуществляется из условия $l = zq$, где q — выходной сигнал генератора тактовых импульсов. Реализация (2) с использованием счетчика является более предпочтительной, так как применение в качестве генератора тактовых импульсов трансформаторов тока позволяет синхронизировать работу временных устройств РЗА не только одной подстанции, но и всех подстанций энергосистемы. Таким образом, интервал ОК с порогами времени $T_1, T_2, \ldots, T_n$ (рис. 1, *а*) может быть реализован схемой рис. 1, *б*, где СТ — трансформатор тока; $\bar{z}$ — сигнал на останов и сброс счетчика; $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ — логические отрицания временных булевых переменных.

Применительно к релейной защите началом отсчета времени (точка «О» на оси) является момент возникновения короткого замыкания (к. з.), который фиксируется срабатыванием измерительных органов релейной защиты или пусковых органов аварийных осциллографов и характеризуется появлением единичного значения булевой функции f_0. Концом отсчета времени (точка «К» на оси) является момент ликвидации аварийной ситуации, который фиксируется при появлении единичного значения функции f_k.

Пороги времени $T_1, T_2, \ldots, T_n$ — это моменты времени, при которых происходят срабатывания защит или коммутация (включение или отключение) выключателей. После срабатывания измерительного органа защиты можно выделить следующие последовательные моменты времени: T_1 — срабатывание защиты (срабатывание выходного реле защиты); T_2 — отключение выключателя; T_3 — срабатывание (выдержка времени) автоматического повторного включения (АПВ), T_4 — включение выключателя от АПВ; T_5 — срабатывание защиты при неуспешном АПВ; T_6 — отключение выключателя от защиты при неуспешном АПВ; T_7 — отключение смежного выключателя с устройства резервирования отказа выключателя (УРОВ).

Проведем синтез устройства РЗА и управления для одиночного присоединения, имеющего одну защиту и один выключатель. Обозначим условие срабатывания измерительного органа защиты логической переменной «*a*», включенное положение выключателя — переменной «*в*», команды оператора «Включить выключатель» и «Отключить выключатель» — соответственно «с» и «d». Действие устройства на отключение выключателя данного присоединения обозначим через y_1, а на включение — y_2. Команду на отключение смежного выключателя от УРОВ обозначим через y_3. Возможные варианты развития событий на защищаемом присоединении после срабывания измерительного органа защиты или команды оператора приведены в таблице. Прочерки в таблице означают, что выходные переменные не зависят от входных переменных, у которых имеется прочерк.

В таблице линиями со стрелкой показаны разрешенные переходы от одной комбинации входных логических переменных к другой. Запоминание разрешенных переходов осуществляется внутренними логическими переменными z_1 и z_2. В общем виде эти внутренние переменные описываются выражением (1). Между выражением (1) и линией со стрелкой, приводимой в таблице, существует однозначное соответствие, причем началу стрелки соответствует левая часть (1), а концу — правая. В таблице около стрелки указана внутренняя переменная, которая ставится в соответствие стрелке.

Таким образом, внутренние переменные z_1 и z_2 равны:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= f_{01} + \bar{f}_{k1} z_1 = \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + (l\bar{t}_1 + \bar{a}blt_1\bar{t}_2)\, z_1; \\ z_2 &= f_{02} + \bar{f}_{k2} z_2 = ab + (l\bar{t}_1 + \bar{a}blt_1\bar{t}_2)\, z_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Как следует из таблицы, функция f_0 равна единице только в промежутке времени от 0 до T_1, поэтому

$$f_0 = (ab + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d)\, l\bar{t}_1, \qquad (4)$$

где t_1 — временная булева переменная, связанная с порогом времени T_1. Команда на отключение выключателя «В» согласно таблице будет описываться ВБФ:

$$y_1 = (ab + \bar{a}bz_1)\, lt_1\bar{t}_2 + ablt_5\bar{t}_6. \qquad (5)$$

Включение выключателя от АПВ или оператором происходит в промежутке времени $T_3 \div T_4$ при отключенном выключателе и не сработавшем измерительном органе защиты:

$$y_2 = \bar{a}\bar{b}lt_3\bar{t}_4. \qquad (6)$$

Подача команды на отключение смежного выключателя производится в промежутки времени $T_2 \div T_3$ и $T_6 \div T_7$,

$$y_3 = abl\,(t_2\bar{t}_3 + t_6\bar{t}_7). \qquad (7)$$

Аналогично могут быть определены ВБФ для выходных переменных с действием на сигнал. Конец отсчета времени осуществляется, когда

$$f_k = \bar{a}bz_2lt_1\bar{t}_2 + (\bar{a}b + a\bar{b})\, lt_3\bar{t}_3 + \bar{a}blt_3\bar{t}_4 + (\bar{a}\bar{b} + \bar{a}b\bar{c})\, lt_4\bar{t}_5 + \bar{a}b\bar{c}lt_5\bar{t}_6 + (b\bar{c} + \bar{a}b\bar{c})\, lt_6\bar{t}_7 + (\bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c})\, lt_7. \qquad (8)$$

Если присоединение имеет трехступенчатую защиту, то время действия каждой ступени различно, и поэтому необходимо установить дополнительные временные элементы или подать

[1] Поляков Е. В., Троценко А. А. Использование временных булевых функций при анализе и синтезе логических схем релейной защиты. — Электричество, 1978, № 12.

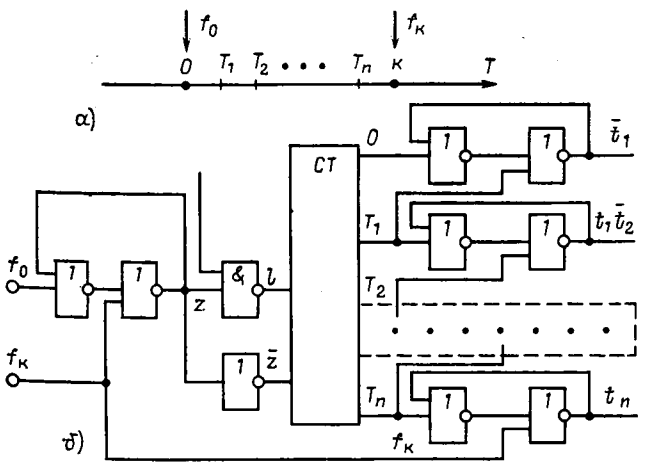


Рис. 1

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Наименование	Информация, которую несут логические переменные	Условное обозначение	Значения логических переменных в различные моменты времени							
			T_1	z_1 z_2	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
Входные переменные	Сработал измерительный орган защиты	a	100	001	011	00	000	100	0 101 010	100
	Выключатель включен	b	101	111	101	01	011	111	0 011 001	010
	Оператор «Включить выключатель»	c	—10	—	—	—	—01	—01	000—111	000
	Оператор «Отключить выключатель»	d	—01	—	—	—	—	—	—	—
Выходные переменные с действием на выключатель	Отключить выключатель «В»	y_1	000	101	000	00	000	100	0 000 000	000
	Включить выключатель «В»	y_2	000	000	000	10	000	000	0 000 000	000
	Отключить смежный выключатель	y_3	000	000	001	00	000	000	0 001 000	000
Входные переменные с действием на сигнал	Неисправность измерительного органа	x_1	000	000	010	00	000	000	0 100 010	100
	Отказ «В» при включении	x_2	000	000	000	00	100	000	0 000 000	000
	Отказ «В» при отключении	x_3	000	000	000	01	000	000	0 000 000	010
	АПВ или включение «В» успешно	x_4	000	000	000	00	011	001	0 000 000	000
	АПВ неуспешно	x_5	000	000	000	00	000	000	1 000 000	000
	Блокировка от многократного включения на к. з.	x_6	000	000	000	00	000	000	0 000 100	000
	Оператору снять команду на включение «В»	x_7	000	000	000	00	001	001	0 000 011	000
Фиксация интервала времени	Начало отсчета	f_0	111	000	000	00	000	000	0 000 000	000
	Конец отсчета	f_k	000	010	110	01	110	010	1 110 000	111

импульсы на счетчик через делители импульсов. В последнем случае представляется возможным использовать один счетчик, который в пределах времени от 0 до T_1 может получать импульсы с частотой генератора тактовых импульсов или с меньшей частотой, определяемой делителями импульсов. Если время превысит T_1, то счетчик получает импульсы только с частотой тактового генератора импульсов. Для этих целей можно использовать специальную схему формирования входных воздействий (рис. 2). На этой схеме через i_1, i_2 и i_3 обозначены выходные сигналы измерительных органов защиты соответственно первой, второй и третьей ступеней. Через h обозначен сигнал, поступающий от генератора тактовых импульсов, в качестве которого может быть использован трансформатор тока одной из фаз защищаемого присоединения. Тогда сигнал a, определяющий условия срабатывания хотя бы одного из измерительных органов защиты, будет равен: $a=i_1+i_2+i_3$. Если через s_2 и s_3 обозначить сигналы на выходе делителей соответственно второй и третьей ступеней, а через s_1 — сигнал, поступающий помимо делителей, то тактовые импульсы, поступающие на следующий блок, определяется функцией: $q=s_1+s_2+s_3$. Импульсы без де-

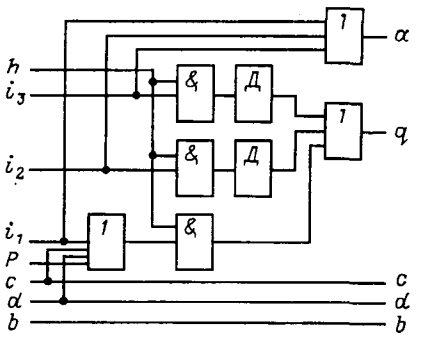


Рис. 2

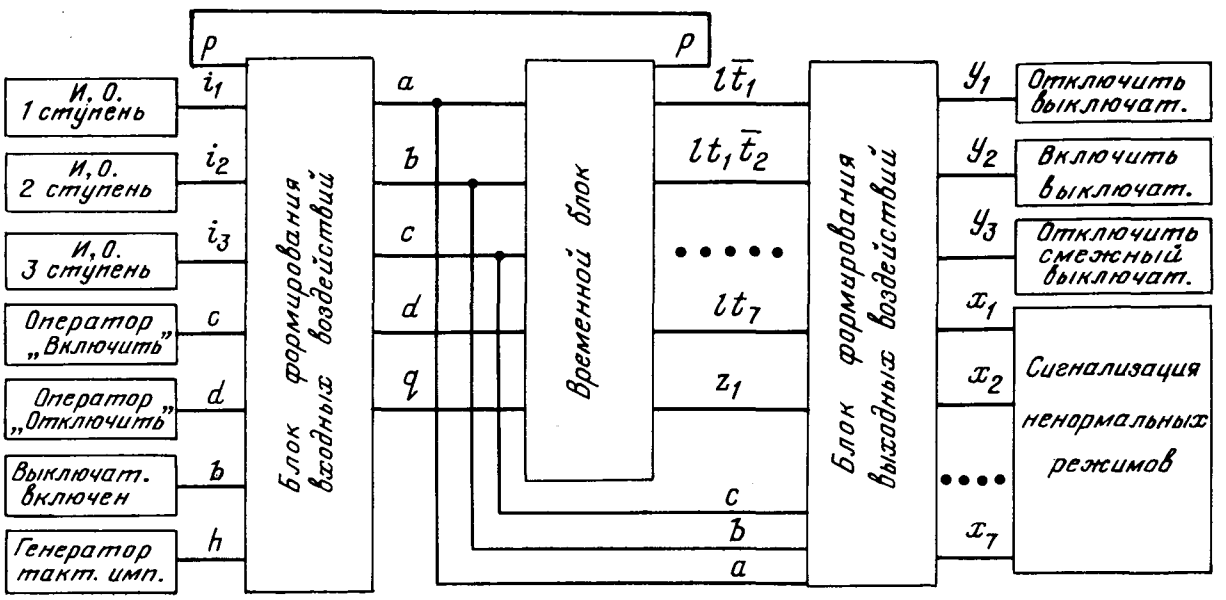


Рис. 3

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

лителя напряжения s_1 будут поступать в том случае, если сработал измерительный орган защиты первой ступени ($i_1=1$), (или оператором поданы команды «Включить выключатель $c=1$) или «Отключить выключатель» ($d=1$), или при наличии пигнала p от временного блока, т. е. $s_1=i_1+c+d+p$. Сигнал p появляется тогда, когда время при работе счетчика превысит T_1, и остается до тех пор, пока не появится сигнал остановки счетчика f_k, т. е.

$$p = lt_1 + \bar{f}_k p. \quad (9)$$

Так как время T_1 в защитах обычно не превышает 0,5 с, то считается, что время длительности подачи командного импульса оператором всегда больше T_1, и поэтому не требуется выполнение схемного запоминания командного импульса оператором. Принципиально такое запоминание может быть предусмотрено.

Блочная схема защиты, автоматики и управления присоединения с трехступенчатой защитой приведена на рис. 3. В этой схеме временной блок включает в себя счетчик по рис. 1, *б*, а также реализует логические функции (3), (4), (8) и (9). Блок формирования выходных воздействий реализует логические функции (5) — (7). Схема блока формирования входных воздействий приведена на рис. 2.

Рассмотрим интервалы времени. Интервал времени от 0 до T_1 определяет время срабатывания каждой из ступеней защиты. Интервал T_1 — T_2 выбирается большим или равным максимально возможному собственному времени отключения выключателя. Выдержка времени АПВ определяется интервалом времени $T_2 \div T_3$. Максимально возможное время включения выключателя определяется интервалом времени $T_3 \div T_4$. В случае включения выключателя на к. з. необходимая выдержка времени защиты определяется временным интервалом $T_4 \div T_5$. Интервал $T_5 \div T_6$ равен интервалу $T_1 \div T_2$ и определяет максимально возможное собственное время отключения выключателя в случае его включения на к. з. от АПВ или оператором. Время, необходимое для работы УРОВ и отключения смежного выключателя, определяется интервалом $T_6 \div T_7$. На интервале времени $T_7 \div K$ подается команда на останов и сброс счетчика при выполнении заданных условий.

Таким образом, учет последовательности срабатываний различных устройств РЗА во времени позволяет синтезировать такую схему, которая в зависимости от поступающей на ее входы информации обеспечивает работу логической части релейной защиты, АПВ, УРОВ и других видов автоматики, а также обеспечивает выполнение команд оператора по включению и отключению выключателей. Синтез устройств РЗА и управления подстанции по рассмотренному принципу позволяет представить их в виде конечного автомата с n-входами и m-выходами и обеспечивает при аппаратной реализации упрощение схемы за счет совмещения функций защиты и автоматики, а при программной реализации — преимущества применения ЭВМ со сравнительно простым алгоритмом работы, в котором учтена последовательность срабатываний защиты и автоматики.

[25.01.85]

УДК 621.316.14.001.24:622.2

Расчет токов утечки в трехфазной сети, питающей нагрузку через выпрямитель

КОЛОСЮК В. П., МИЦ В. Н., РЕСЬЯН А. К.

МакНИИ

В случае питания машин с электродвигателями постоянного тока от электрической сети, содержащей трансформаторы с изолированной нейтралью и преобразователи переменного тока в постоянный, образуется так называемая комбинированная электрическая сеть, имеющая трехфазный участок переменного тока и гальванически соединенный с ним через выпрямитель двухфазный (двухпроводный) участок постоянного тока. Такие сети находят применение в отраслях горнодобывающей промышленности для питания машин с регулируемым приводом на основе двигателей постоянного тока, угольных комбайнов, самоходных вагонов и других средств самоходного транспорта. По требованиям безопасности сети с изолированной нейтралью должны оснащаться аппаратурой контроля изоляции и защитного отключения, параметры которой выбираются в зависимости от ожидаемого тока утечки (замыкания) на землю. Однако расчет токов утечки в комбинированных сетях представляет определенные трудности.

В [1] комбинированная сеть с питанием нагрузки постоянным током была упрощенно представлена в виде схемы, где векторы OA, OB, OC — фазные напряжения симметричной трехфазной сети (рис. 1). Были определены формулы для расчета действующего значения тока утечки через тело человека, прикоснувшегося к фазе сети переменного тока или к одному из полюсов участка сети постоянного тока, в зависимости от отдельных значений параметров комбинированной сети, но при этом рассматривались только значения постоянной и первой гармонической (50 Гц) составляющих тока утечки.

Целью настоящей статьи является дальнейшее развитие положений [1] для создания аппарата расчета действующего значения тока утечки в комбинированной сети с учетом высших гармоник. При этом рассмотрены случаи, когда утечка тока возникает через повреждение изоляции или случайно прикоснувшегося к токоведущей части человека (проводимость $G_{\text{ут}}$) с одной из фаз на участке переменного тока, либо с одного из полюсов на участке постоянного тока). Приняты следующие допущения: трехфазный источник питания сети является симметричным; изоляция фаз и проводов относительно земли характеризуется сосредоточенными проводимостями G_A, G_B, G_C, G_+, G_- и емкостями C_A, C_B, C_C, C_+, C_-; выпрямитель собран на неуправляемых вентилях $Д_1$ — $Д_6$ или тиристорах, которые полностью открыты, что соответствует наибольшему выпрямленному напряжению на его выходе, и следовательно, максимально возможным токам утечки; нагрузка выпрямителя имеет активную проводимость $G_{\text{н}}$. Проводимость электродвигателя имеет активно-индуктивный характер, но так как в системах регулируемого привода горных машин электродвигатель шунтируется вентилем, включенным встречно рабочему току сети, его можно рассматривать как чисто активную нагрузку.

Пользуясь идеализированной вольт-амперной характеристикой вентилей $Д_1$ — $Д_6$, представим схему замещения комбинированной сети с питанием нагрузки постоянным током в виде, изображенном на рис. 2. Мгновенные значения фазных напряжений симметричной трехфазной сети выражаются известными формулами [2]:

$$U_A = U_m \sin \omega t;\ U_B = U_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$U_C = U_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right), \quad (1)$$

где U_m = амплитуда фазного напряжения; $\omega = 2\pi f$; f — частота переменного тока; t — время. Мгновенные значения напряжений $U_D = f_1(\omega t)$ и $U_E = f_2(\omega t)$, как показывает анализ работы схемы выпрямления, могут быть представлены разложениями в ряд Фурье; разложение для $f_1(\omega t)$ имеет вид

$$U_D = f_1(\omega t) = \frac{3\sqrt{3}\,U_m}{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{(3s^2)-1} \sin\left[3\omega s t + \frac{(s+1)\pi}{2}\right]\right\}, \quad (2)$$

а разложение для $f_2(\omega t)$ отличается от (2) знаками минус у постоянной составляющей и у второго слагаемого аргумента функции синус.

Схему замещения, представленную на рис. 2, можно упростить если помимо условий (1) выполняются условия:

$$\left.\begin{aligned} C_A = C_B = C_C = \frac{1}{3}C; \\ G_A = G_B = G_C = \frac{1}{3}G. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

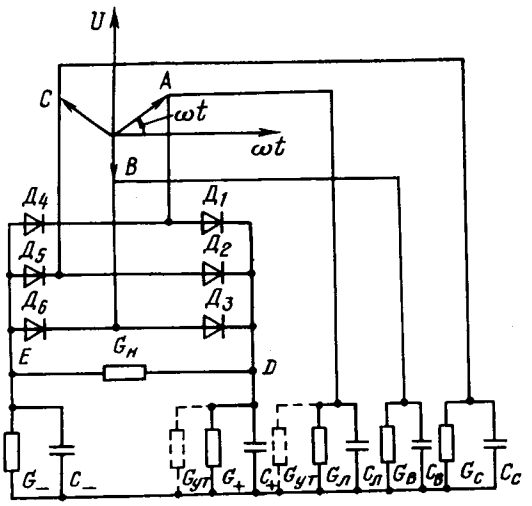


Рис. 1

В этом случае участок цепи OF, содержащий три параллельные ветви (G_A, C_A; G_B, C_B; G_C, C_C) с источниками э. д. с. U_A, U_B и U_C, может быть заменен одной ветвью с источником э. д. с. эквивалентного генератора $U_{эг}=0$ в упрощенной схеме замещения комбинированной сети (рис. 3).

Если утечка возникает на участке переменного тока проводимость $\widetilde{G}_{ут}$ (рис. 3), то в общем случае проводимости ветвей в комплексной форме для k-й (k=0, 1, 2, 3, ...) гармонической составляющей тока:

$$Y_-^к = G_- + j\omega k C_-;$$

$$Y_A^к = \widetilde{G}_{ут};$$

$$Y^к = G + j\omega k C;$$

$$Y_+^к = G_+ + j\omega k C_+.$$

Согласно методу двух узлов значение k-й гармонической составляющей тока утечки в комплексной форме

$$\dot{\widetilde{I}}_{ут}^к = \widetilde{G}_{ут}\frac{\dot{U}_A^к\left(Y_-^к + Y^к + Y_+^к\right) - \left(\dot{U}_E^к Y_-^к + \dot{U}_D^к Y_+^к\right)}{Y_-^к + Y_A^к + Y^к + Y_+^к}. \quad (4)$$

Выполнив вычисления для каждой, отдельно взятой, гармонической составляющей тока утечки для случая, когда фазные напряжения описываются выражением (1), а мгновенные значения U_D и U_E — выражением (2), находим:

$$\left|\dot{\widetilde{I}}_{ут}^0\right| = \frac{3\sqrt{3}\,U_m\widetilde{G}_{ут}}{2\pi}\,\frac{G_- - G_+}{G_- + \widetilde{G}_{ут} + G + G_+};$$

$$\left|\dot{\widetilde{I}}_{ут}^1\right| = \frac{U_m\widetilde{G}_{ут}}{\sqrt{2}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{(G_- + G + G_+)^2 + \omega^2(C_- + C + C_+)^2}{(G_- + \widetilde{G}_{ут} + G + G_+)^2 + \omega^2(C_- + C + C_+)^2}};$$

$$\left|\dot{\widetilde{I}}_{ут}^{3s}\right| = \frac{3\sqrt{3}\,U_m\widetilde{G}_{ут}}{\pi\sqrt{2}\,[(3s)^2-1]}\times$$

$$\times\frac{G_-^2 + G_+^2 + 9\omega^2 s^2\left(C_-^2 + C_+^2\right) + 2(-1)^{s+1}\left(G_- G_+ + 9\omega^2 s^2 C_- C_+\right)}{(G_- + \widetilde{G}_{ут} + G + G_+)^2 + 9\omega^2 s^2(C_- + C + C_+)^2}$$

для $k=3s$, где $s=1, 2, 3, \ldots$.

Воспользовавшись известным выражением

$$\left|\widetilde{I}_{ут}\right| = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left|\dot{\widetilde{I}}_{ут}^к\right|^2},$$

получим формулу для действующего значения тока утечки на участке переменного тока:

$$\left|\widetilde{I}_{ут}\right| = \frac{3U_л\widetilde{G}_{ут}}{\pi}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{(G_- - G_+)^2}{(G_- + \widetilde{G}_{ут} + G + G_+)^2} + \frac{\pi_2}{27}\,\frac{(G_- + G + G_+)^2 + \omega^2(C_- + C + C_+)^2}{(G_- + \widetilde{G}_{ут} + G + G_+)^2 + \omega^2(C_- + C + C_+)^2} +}$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{[(3s)^2-1]^2}\,\frac{G_-^2 + G_+^2 + 9\omega^2 s^2\left(C_-^2 + C_+^2\right) + 2(-1)^{s+1}\left(G_- G_+ + 9\omega^2 s^2 C_- C_+\right)}{(G_- + \widetilde{G} + G + G_+)^2 + 9\omega^2 s^2(C_- + C + C_+)^2}}, \quad (5)$$

где $U_л = \dfrac{\sqrt{3}\,U_m}{\sqrt{2}}$ — линейное напряжение трехфазной сети.

Если комбинированная сеть симметрична не только на участке переменного тока, но и на участке постоянного тока (т. е. $G_- = G_+$ и $C_- = C_+$), то из формулы (5) после замены четных значений s на $2n$ и нечетных — на $2n-1$ получим

$$\left|\widetilde{I}_{ут}\right| = \frac{U_л\widetilde{G}_{ут}}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{(G + G_п)^2 + \omega^2(C + C_п)^2}{(G + G_п + \widetilde{G}_{ут})^2 + \omega^2(C + C_п)^2} + \frac{27}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\{[3(2n-1)]^2 - 1\}^2}\times}$$

$$\times\frac{G_п^2 + 9\omega^2(2n-1)^2 C_п^2}{(G + G_п + \widetilde{G}_{ут})^2 + 9\omega^2(2n-1)(C + C_п)^2}. \quad (6)$$

Когда утечка через проводимость $G_{ут}$ возникает с одного из полюсов (например, положительного) участка постоянного тока (рис. 3), в общем случае проводимости ветвей для k-й (k=0, 1, 2, 3, ...) гармонической составляющей тока получаем в виде

$$Y_-^к = G_- + j\omega k C_-;$$

$$Y^к = G + j\omega k C;$$

$$Y_+^к = \left(G_{ут} + G_+\right) + j\omega k C_+.$$

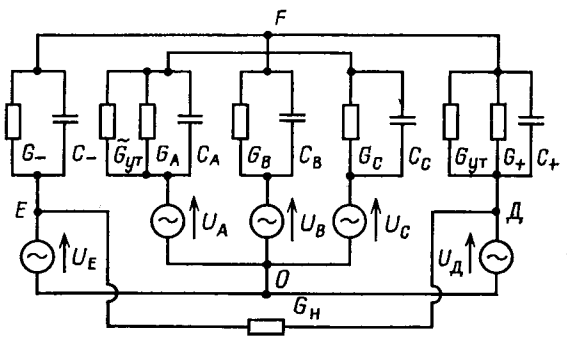


Рис. 2

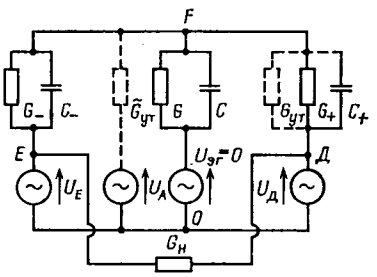


Рис. 3

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Значение k-й гармонической составляющей тока утечки в комплексной форме

$$\dot{I}^{\kappa} = G_{\text{ут}} \frac{\left(\dot{U}_D^{\kappa} - \dot{U}_E^{\kappa}\right) Y_-^{\kappa} + \dot{U}_D^{\kappa} Y^{\kappa}}{Y_-^{\kappa} + Y^{\kappa} + Y_+^{\kappa}}. \qquad (7)$$

Для случая, когда U_D и U_E описываются выражением (2), значения постоянной составляющей $\left|I_{\text{ут}}^0\right|$ и гармонических составляющих $\left|I_{\text{ут}}^{3s}\right|$ тока утечки:

$$\left|\dot{I}_{\text{ут}}^0\right| = \frac{3\sqrt{3}\,U_m G_{\text{ут}}}{2\pi} \frac{2G_- + G}{G_- + G + G_{\text{ут}} + G_+};$$

$$\left|\dot{I}_{\text{ут}}^{3s}\right| = \frac{3\sqrt{3}\,U_m G_{\text{ут}}}{\pi\sqrt{2}\,[(3s)^2 - 1]} \times$$

$$\times \frac{2\,[1 + (-1)^s]\,[G_-(G_- + G) + 9\omega^2 s^2 C_-(C_- + C)] + G^2 + 9\omega^2 s^2 C^2}{(G_- + G + G_+ + G_{\text{ут}})^2 + 9\omega^2 s^2 (C_- + C + C_+)^2}$$

для $k = 3s$, где $s = 1, 2, 3, \ldots$.

Аналогично (5) общее выражение для действующего значения тока утечки, возникающего с положительного полюса

$$|I_{\text{ут}}|_+ = \frac{3U_{\text{л}} G_{\text{ут}}}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{2G_- + G}{G_- + G + G_+ + G_{\text{ут}}}\right)^2 + \frac{2\,[1 + (-1)^s]\,[G_-(G_- + G) + 9\omega^2 s^2 C_-(C_- + C)] + G^2 + 9\omega^2 s^2 C^2}{[(3s)^2 - 1]^2\,[(G_- + G + G_+ + G_{\text{ут}})^2 + 9\omega^2 s^2 (C_- + C + C_+)^2]}}. \qquad (8)$$

Полученные формулы справедливы для комбинированных сетей с неуправляемыми преобразователями и управляемыми при угле управления $\alpha = 0°$ и позволяют рассчитать при заданных значениях проводимости и емкости сети значения токов утечки для анализа вопросов безопасности и выбора уставок тока срабатывания и быстродействия аппаратуры защитного отключения комбинированных электрических сетей.

Сравнение расчетных данных, полученных по (5) и (8) для различных значений параметров комбинированной сети, с экспериментальными показало, что расчетные значения токов утечки превышают измеренные не более чем на 5 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Колосюк В. П.** Защитное отключение рудничных электроустановок. — М.: Недра, 1980.
2. **Бессонов Л. А.** Теоретические основы электротехники. — М.: Высшая школа, 1973.

[25.09.84]

УДК 621.314.235:621.3.014.12

Влияние скин-эффекта на энергетические показатели импульсного безжелезного трансформатора

ПОДОЛЬЦЕВ А. Д., канд. техн. наук, **ПИГНАСТИЙ С. С.**, канд. техн. наук

Безжелезные трансформаторы применяются в различных импульсных установках для проведения физических исследований [1, 2], при согласовании параметров магнитокумулятивного генератора с нагрузкой [3] и в ряде устройств — для преобразования параметров импульса. По сравнению с трансформаторами, содержащими ферромагнитный сердечник, они характеризуются более низким к. п. д., однако могут иметь лучшие весогабаритные показатели.

Среди различных конструктивных исполнений безжелезных импульсных трансформаторов определенными преимуществами обладает трансформатор, в котором в качестве обмоток используется внутренняя жила и проводящая оболочка кабеля [2]. Одним из основных преимуществ такого кабельного трансформатора является низкая индуктивность рассеяния, которая определяется индуктивностью кабеля.

Рассмотрим кабельный повышающий трансформатор с большим коэффициентом трансформации, первичная обмотка которого содержит один виток, образованный соединенными параллельно внешними проводящими оболочками коаксиального кабеля, а вторичная многовитковая обмотка образована внутренней жилой кабеля. Первичная обмотка такого трансформатора состоит из большого числа параллельных ветвей, распределенных среди витков вторичной обмотки. Для расчета токов в проводниках первичной обмотки они могут приближенно рассматриваться в виде однородного массивного витка с эквивалентной проводимостью. В случае протекания по нему импульсного тока будет наблюдаться вытеснение тока к границе витка — явление скин-эффекта. В некоторых работах по расчету переходных процессов в импульсных трансформаторах [3, 4] это явление не учитывалось.

Целью данной работы является исследование влияния скин-эффекта на энергетические характеристики импульсного трансформатора. Расчет электромагнитного переходного процесса в импульсном трансформаторе при этом выполняется методом интегральных уравнений, использованном ранее для расчета нестационарных электромагнитных полей в импульсных устройствах [5, 6, 7].

Расчетная модель импульсного трансформатора состоит из двух совмещенных в пространстве круговых катушек прямоугольного сечения с одинаковыми геометрическими размерами. Высота катушек равна h, толщина — a, средний диаметр — d (рис. 1). Одна из катушек соответствует первичной обмотке импульсного трансформатора и представляет собой один массивный виток ($w_1 = 1$) с электропроводностью $\sigma_э = \sigma S/(ha)$, где σ — электропроводность материала параллельных ветвей трансформатора, а S — суммарное сечение всех параллельных ветвей первичной обмотки. Другая катушка соответствует вторичной многовитковой обмотке трансформатора с числом витков w_2, омическим сопротивлением R_2 и индуктивностью L_2. Плотность тока по сечению витка вторичной обмотки считается равномерной.

Первичная обмотка трансформатора через передающую линию с параметрами $R_{\text{л}1}$ и $L_{\text{л}2}$ подключается к источнику напряжения $u_0(t)$, а вторичная обмотка через передающую линию с параметрами $R_{\text{л}2}$ и $L_{\text{л}2}$ подключена к омической нагрузке $R_{\text{н}}$.

Если пренебречь шагом спирали витков катушек, то плотность тока в проводниках имеет только угловую составляющую: $\vec{j}_{1,2}(Q, t) = \vec{e}_\varphi j_{1,2}(Q, t)$, где $j_{1,2}(Q, t)$ — соответственно плотность тока в проводниках первичной и вторичной обмоток трансформатора в произвольной точке $Q(r_Q, z_Q)$. В силу принятого ранее допущения о постоянстве плотности тока по сечению вторичной обмотки $j_2(Q, t) \equiv j_2(t)$. Напряжение $u_1(t)$, приложенное к массивному первичному витку трансформатора в точке Q, уравновешивается падением напряжения на омическом сопротивлении токового витка в точке Q и э. д. с. само- и взаимоиндукции:

$$\frac{2\pi r_Q j_1(Q, t)}{\sigma_э} + \frac{d\Phi(Q, t)}{dt} = U_1(t), \quad Q \in S_1, \qquad (1)$$

где S_1 — поперечное сечение первичной обмотки трансформатора. В этом равенстве магнитный поток $\Phi(Q, t)$ определяется следующим известным выражением [8]:

$$\Phi(Q, t) = 2\pi r_Q A(Q, t) = 2\pi r_Q \int_{S_1} K(Q, M)\, j_1(M, t)\, dS_M + 2\pi r_Q \frac{i_2 w_2}{S_2} \int_{S_2} K(Q, P)\, dS_P, \qquad (2)$$

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

где i_2, w_2, S_2 — соответственно ток, число витков и поперечное сечение вторичной обмотки, а ядро интегрального выражения $K(Q, M) = \left(\frac{2}{k} - k\right) K(k) - \frac{2}{k} E(k)$. Здесь $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода модуля

$$k = 4\sqrt{r_Q r_M} / \sqrt{(r_Q + r_M)^2 + (z_Q - z_M)^2}.$$

С другой стороны, напряжение $u_1(t)$ удовлетворяет следующему равенству:

$$R_{л1} i_1 + L_{л1} \frac{di_1}{dt} + u_1(t) = u_0(t), \tag{3}$$

где $u_0(t)$ — известное напряжение на зажимах импульсного источника электроэнергии. Плотность тока в первичной обмотке трансформатора удовлетворяет следующему интегральному соотношению:

$$\int_{S_1} j_1(Q, t)\, dS_1 = i_1. \tag{4}$$

Баланс напряжения во вторичной многовитковой обмотке трансформатора записывается в виде

$$(R_2 + R_{л2} + R_н)\, i_2 + (L_2 + L_{л2}) \frac{di_2}{dt} + \frac{w_2}{S_2} \int_{S_1} 2\pi r_P dS_P \times$$
$$\times \int_{S_2} K(P, M) \frac{\partial j_1(M, t)}{\partial t} dS_M = 0. \tag{5}$$

Интеграл в равенстве (5) представляет собой э. д. с. взаимоиндукции вторичной обмотки трансформатора с распределенной первичной обмоткой.

Система интегро-дифференциальных уравнений (1) — (5) с начальными условиями $j_1(Q, 0)=0$, $i_2(0)=0$ представляет собой математическую модель расчета электромагнитного переходного процесса в импульсном трансформаторе с массивной первичной обмоткой.

Для решения сформулированной задачи использовался проекционно-сеточный метод Бубнова — Галеркина с кусочно-постоянными базисными функциями [9]. Принято, что поперечные сечения вторичной и первичной обмоток трансформатора равны, т. е. $S_2=S_1$. Введем в области S_1 для каждой из переменных равномерную сетку с шагом $h_r=a/N_r$ по переменной r и с шагом $h_z=h/N_z$ — по z и представим область S_1 в виде совокупности прямоугольных областей $S_1=s_1 \cup \ldots \cup s_N$, $N=N_r N_z$. Иными словами, представим обе катушки в виде совокупности контуров, в данном случае — прямоугольного сечения. Каждой области s_i, $i=1, \ldots, N$ поставим в соответствие базисную функцию

$$\varphi_i(Q) = \begin{cases} 1, & Q \in s_i; \\ 0, & Q \notin s_i, \end{cases} \tag{6}$$

и будем искать приближенное решение для $j_1(Q, t)$ в виде

$$j_1(Q, t) = \sum_{к=1}^{N} j_1^{(к)}(t)\, \varphi_к. \tag{7}$$

Подставим это значение j_1 в уравнение (1) и умножим все члены этого уравнения на φ_j. Интегрируя затем все члены полученного уравнения по поверхности S_1, получим систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных значений плотности тока в следующем виде:

$$\frac{2\pi r_j j_1^{(j)}(t)\, s_j}{\sigma_э s_j} + \sum_{к=1}^{N} \frac{d\left(j_1^{(к)} s_к\right)}{dt} \frac{1}{s_к s_j} \int_{s_j} \int_{s_к} \widetilde{K}(Q, M)\, ds_к ds_j +$$
$$+ \frac{di_2}{dt} w_2 \sum_{к=1}^{N} \frac{1}{S_2 s_j} \int_{s_j} \int_{s_к} \widetilde{K}(Q, M)\, ds_к\, dS_j = u_0(t) -$$
$$- R_{л1} \sum_{к=1}^{N} i_1^{(к)} - L_{л1} \sum_{к=1}^{N} \frac{di_1^{(к)}}{dt}, \tag{8}$$

где $j=1, \ldots, N$; $r_j = \int_{s_j} r ds_j / s_j$ — средний радиус j-го контура, $\widetilde{K}(Q, M) = 2\pi r_Q K(Q, M)$. Величина $j_1^{(j)} s_j = i_1^{(j)}$ является током в j-м контуре. Правая часть уравнения (8) записана с учетом (3) и (4). Выбирая согласно (6) в качестве базисных

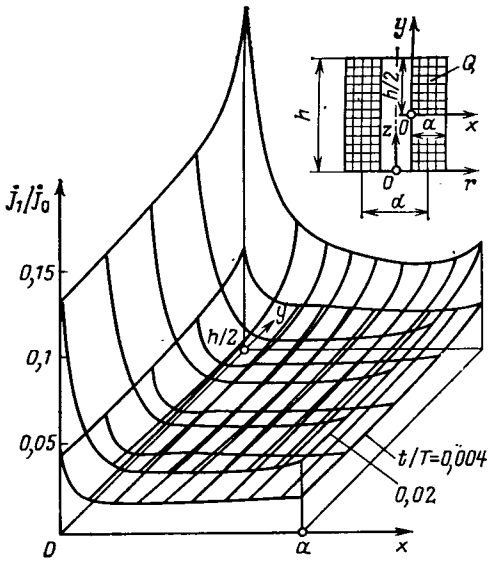


Рис. 1

функций кусочно-постоянные функции, а не функции более сложной формы [9], мы по существу принимаем, что плотность тока постоянна по сечению каждого элементарного k-го контура и затем выполняем операцию почленного интегрирования в уравнении (1) по сечению j-го контура.

Подставляя (7) в (5), получим дифференциальное уравнение для тока во вторичной обмотке трансформатора:

$$(R_2 + R_{л2} + R_н)\, i_2 + (L_2 + L_{л2}) \frac{di_2}{dt} +$$
$$+ w_2 \sum_{к=1}^{N} \frac{d\left(j_1^{(к)} s_к\right)}{dt} \frac{1}{S_2 s_к} \int_{s_к} \int_{S_2} \widetilde{K}(Q, M)\, dS_к dS_2 = 0. \tag{9}$$

Система уравнений (8) и (9) является замкнутой системой линейных дифференциальных уравнений относительно тока в контурах первичной обмотки трансформатора $j_1^{(к)} s_к = i_1^{(к)}$ и тока во вторичной обмотке i_2, которая должна быть дополнена начальными условиями $i_1^{к}(0)=0$ ($k=1, \ldots, N$) и $i_2(0)=0$. Интегрирование системы осуществлялось А-устойчивым неявным методом Эйлера, согласно которому для произвольной системы дифференциальных уравнений вида

$$A \frac{dy}{dt} + By = C(t) \tag{10}$$

вводится разностная аппроксимация вида

$$A \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} + By_{n+1} = C(t_{n+1}). \tag{11}$$

Для системы линейных дифференциальных уравнений (8), 9) могут быть записаны рекуррентные соотношения вида (11), позволяющие определить последующие значения y_{n+1} по известным предыдущим y_n. Используемые соотношения подробно не приведены ввиду их громоздкости. Интегрируемая система дифференциальных уравнений содержала 101 уравнение ($N_r=N_z=10$). Для контроля правильности расчета на ЭВМ вычислялся баланс энергии, который совпадал с точностью до нескольких процентов, а также выполнялось сгущение пространственной и временной сетки.

Одним из трудоемких этапов численной реализации математической модели является вычисление интегралов вида

$$J_{jк} = \frac{1}{s_к s_j} \int_{s_j} \int_{s_к} \widetilde{K}(Q, M)\, ds_к ds_j, \tag{12}$$

которые при $j=к$ вычислялись согласно известному выражению для индуктивности кругового контура малого сечения [8], а при $j \neq к$ — по квадратурной четырехточечной формуле Гаусса [10].

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

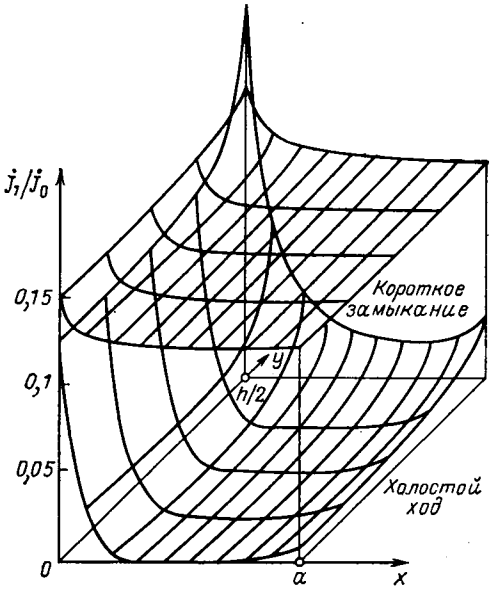


Рис. 2

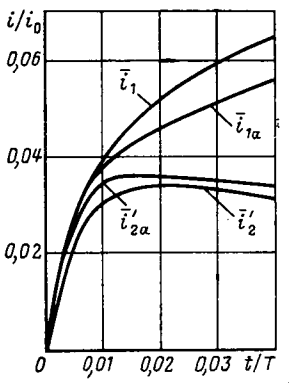


Рис. 3

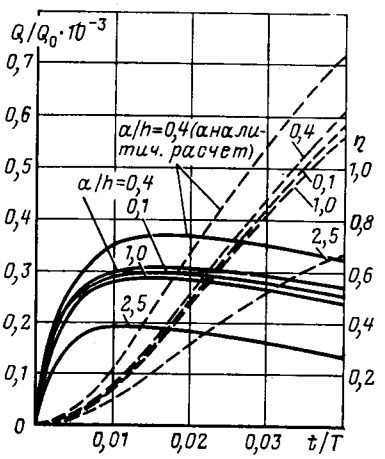


Рис. 4

Анализ результатов расчета. Рассчитывались распределения плотности тока в первичной обмотке, значения токов в первичной и вторичной обмотках, энергии, выделяемой в нагрузке, потерь энергии, выделяемой в сопротивлениях трансформатора и запасаемой в виде энергии магнитного поля в индуктивностях трансформатора, а также к. п. д. трансформатора.

Расчеты проведены при различных геометрических размерах соленоида a, h, d и различных значениях омической нагрузки $R_н$. Принималось, что первичная обмотка трансформатора подключается к источнику с постоянным напряжением u_0.

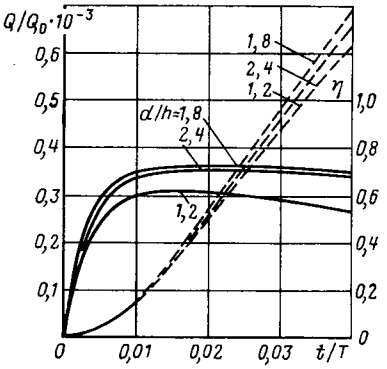


Рис. 5

На рис. 1 представлены результаты расчета распределения относительной плотности тока j_1/j_0 в витке первичной обмотки трансформатора, имеющего вид соленоида со следующими соотношениями геометрических параметров: $a/h=0{,}4$; $d/h=1$, 2; $k_н=R_н/(R_н+R_т)$, где $R_т=R_1+R'_2$; R_1 — сопротивление первичной обмотки при равномерном распределении тока, R'_2 — сопротивление вторичной обмотки, приведенное к числу витков первичной обмотки. В проведенных расчетах принималось $R_1=R'_2=\pi\, d/(\sigma_э ah)$. Распределение плотности тока в $^1/_4$ сечения трансформатора представлено на рис. 1 для двух произвольных моментов времени $t/T=0{,}004$ и 0,02, где $T=L_1/R_1$ — постоянная времени первичной обмотки трансформатора с равномерным распределением тока. В качестве базисной плотности тока j_0 принята плотность тока в первичной обмотке трансформатора в установившемся режиме: $j_0=\sigma_э u_0/(\pi\, d)$.

Как видно из рис. 1 в рассматриваемые моменты времени скин-эффект проявляется достаточно сильно, причем в момент времени $t/T=0{,}02$ к. п. д. максимален. Плотность тока увеличивается в основном на внутренней стороне и торцах трансформатора, что характерно для распределения токов в одновитковом соленоиде. При этом неравномерность распределения плотности тока по сечению обмотки трансформатора тем больше, чем больше ток намагничивания, равный разности первичного и приведенного к числу витков первичной обмотки вторичного тока $i_\mu=i_1-i'_2$.

На рис. 2 приведены распределения плотностей тока для двух крайних случаев, соответствующих холостому ходу ($k_н=1$) и короткому замыканию ($k_н=0$) трансформатора той же геометрии для момента времени $t/T=0{,}02$. В режиме холостого хода ток нарастает только в одновитковом массивном соленоиде; наблюдается ярко выраженный скин-эффект. При коротком замыкании трансформатора токи в соленоиде распределяются относительно равномерно.

На рис. 3 представлены зависимости от времени тока в первичной обмотке i_1 и приведенного к числу витков первичной обмотки тока вторичной обмотки i'_2, отнесенных к току установившегося режима в первичной цепи трансформатора i_0, $\bar{i}_1=i_1/i_0$ и $\bar{i}'_2=i'_2/i_0$, где $i_0=j_0ah=u_0\sigma_э ah/(\pi d)$. Коэффициент омической нагрузки здесь равен $k_н=0{,}9$.

Для сравнения на рис. 3 приведены зависимости токов $\bar{i}_{1a}=i_{1a}/i_0$ и $\bar{i}_{2a}=i'_{2a}/i_0$, полученные при расчетах переходного процесса в безжелезном трансформаторе в эквивалентной схеме с сосредоточенными обмотками, т. е. при отсутствии скин-эффекта, по известным выражениям [11]. Расчетная величина взаимной индуктивности в этом случае принималась равной величине индуктивности соленоида, имеющего размеры трансформатора. Как видно из рис. 3, при учете скин-эффекта ток первичной цепи возрастает, а вторичной — снижается. Увеличение тока первичной цепи обусловлено, в основном, смещением плотности токов ко внутренней поверхности трансформатора; при этом уменьшается эквивалентная индуктивность соленоида, а также ослабляется магнитная связь между первичной и вторичной обмотками и уменьшается ток во вторичной цепи. На рис. 4 и 5 представлены энергетические характеристики безжелезного трансформатора для различных соотношений геометрических параметров трансформатора при $k=0{,}9$. Пунктиром показаны

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

графики энергии $Q=\int_0^t i_2^2 R_н dt$, выделяемой на сопротивлении нагрузки и отнесенной к базисной величине энергии $Q_0=u_0 i_0 T$. Сплошными линиями показаны графики к. п. д. $\eta=Q/N$, где N — энергия, подводимая к трансформатору от источника: $N=\int_0^t u_0 i_1 dt$.

На рис. 4 приведены зависимости Q/Q_0 и η от текущего времени t/T для различных соотношений геометрических параметров a/h и при неизменном среднем диаметре соленоида. Там же показаны характеристики, полученные для $a/h=4$ аналитически по схеме с сосредоточенными обмотками, т. е. без учета скин-эффекта.

Как показали результаты расчетов, в трансформаторах с соотношениями $a/h>1$ (относительно плоские катушки) скин-эффект выражен сильнее и обусловливает более низкие энергетические показатели по сравнению с трансформаторами, у которых соотношение сторон $a/h<1$.

Зависимости энергетических характеристик от текущего времени при различных значениях среднего диаметра соленоида и для $a/h=0{,}4$ показаны на рис. 5. Сопротивление нагрузки не изменялось, коэффициент нагрузки составлял $k_н=0{,}9$ при $d/h=1{,}2$. Как показали результаты расчетов, с увеличением среднего диаметра, с одной стороны, ослабляется скин-эффект и уменьшаются связанные с этим потери энергии в обмотке, а с другой — уменьшается величина запасаемой магнитной энергии в магнитном поле обмоток трансформатора, однако увеличивается омическое сопротивление обмоток трансформатора и связанные с этим потери энергии. Оптимальное соотношение d/h по максимуму к. п. д. лежит в пределах $d/h=1{,}5$—$2{,}4$ для заданных параметров трансформатора и нагрузки.

Выводы. 1. Установлено, что скин-эффект в импульсном безжелезном трансформаторе снижает энергетические показатели — к. п. д. и уровень энергии, передаваемой в нагрузку. Во временных режимах, соответствующих максимальному к. п. д. передачи электроэнергии, эти показатели снижаются на 5—30 % в зависимости от соотношения геометрических размеров трансформатора.

2. Влияние скин-эффекта проявляется наиболее сильно в трансформаторах, выполненных в виде плоских катушек ($a/h>1$). В трансформаторах, выполненных в виде соленоидов с относительно тонкими и высокими стенками ($a/h<1$), влияние скин-эффекта на электрические характеристики трансформатора невелико.

3. Разработанная программа расчета может быть положена в основу проведения оптимизационных расчетов безжелезных импульсных трансформаторов с учетом скин-эффекта в витках его обмоток.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Техника** больших импульсных токов и магнитных полей/П. Н. Дашук, С. Л. Зайенц, В. С. Комельков — М.: Атомиздат, 1970.
2. **Гаазе В. Б., Шнеерсон Г. А.** Высоковольтный кабельный трансформатор для получения сильных импульсных токов. — Приборы и техника эксперимента, 1965, № 6.
3. **Питание** индуктивных и омических нагрузок магнитокумулятивных генераторов с помощью трансформаторов/ А. С. Кравченко, Р. З. Людаев, А. И. Павловский и др. Журн. прикл. механики и технической физики, 1981, № 5.
4. **Пигнастий С. С.** Анализ приближенной математической модели линейного кондукционного поршневого генератора импульсов электроэнергии с трансформатором. — Техн. электродинамика, 1980, № 1.
5. **Петрушенко Е. И.** К расчету вихревых токов в проводниках сложной формы. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1969, № 1.
6. **Балтаханов А. М., Бондалетов В. Н.** Расчет электромагнитных и электромеханических переходных процессов в индукционно-динамических системах. — Электричество, 1981, № 2.
7. **Михайлов В. М.** Поверхностный эффект в массивном соленоиде при получении сильного импульсного магнитного поля. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1975, № 3.
8. **Нейман Л. Р., Калантаров П. Л.** Теория электромагнитного поля. — М.: Энергия, 1959.
9. **Марчук Г. И., Агошков В. И.** Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981.
10. **Справочник** по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовича, И. Стигана. — М.: Наука, 1979.
11. **Постников И. М.** Обобщенная теория и переходные процессы электрических машин. — М.: Высшая школа, 1975.

[23.10.84]

УДК 621.311.1.017

Оценка предельных значений потерь электроэнергии в магистральных сетях

ГОРДЕЕВ В. И., ДЕМУРА А. В.

Как известно, для расчета потерь электроэнергии на участке электрической сети сопротивлением R за время T по формуле

$$\Delta W=3I_э^2RT \qquad (1)$$

требуется знание эффективного (среднеквадратичного) значения тока $I_э$. В настоящей работе приводятся результаты анализа влияния распределения электроприемников (ЭП) вдоль магистрали и взаимной коррелированности графиков изменения их нагрузок на величину ΔW, а также влияния соотношения между T и продолжительностью циклов работы ЭП на погрешность расчета ΔW.

Рассмотрим магистраль промышленной электрической сети, к которой подключены N ЭП. Эффективное значение тока группы из n ЭП[1], протекающего на участке магистрали сопротивлением $R_{n,n+1}$ между точками подключения n-го и $(n+1)$-го ЭП равно:

$$I_{э\,n,\,n+1}^2=\sum_{j=1}^{n} i_{э\,j}^2+2\sum_{\substack{s=1\\ r<s}}^{n}\left(K_{rs}+i_{r\,c}i_{s\,c}\right),$$

где $i_{э\,j}$ — эффективное значение тока j-го ЭП; K_{rs} — взаимно корреляционный момент (ВКМ) графиков изменения тока r-го и s-го ЭП; $i_{r\,c}$ и $i_{s\,c}$ — средние за время T значения токов этих ЭП.

Тогда потери электроэнергии во всей магистрали

$$\Delta W=3\sum_{n=1}^{N} I_{э\,n,\,n+1}^2R_{n,\,n+1}T=$$

$$=3\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{n} i_{э\,j}^2+2\sum_{\substack{s=1\\ r<s}}^{n}\left(K_{rs}+i_{r\,c}i_{s\,c}\right)\right)R_{n,\,n+1}T.$$

Для оценки величины ΔW и, главное, влияния на нее ВКМ рассмотрим случай равномерного распределения вдоль магистрали сопротивлением R_Σ одинаковых ЭП, работающих в режиме корреляционного резонанса[2] [1]:

$$\Delta W=3\sum_{n=1}^{N} n^2 i_э^2\frac{R_\Sigma}{N}T=\frac{i_э^2}{2}(N+1)(2N+1)R_\Sigma T.$$

Потери электроэнергии, рассчитанные без учета ВКМ (которые в данном режиме одинаковы и равны $K_{rs}=i_c^2\left(k_ф^2-1\right)=Di$, где $k_ф$, D_i — коэффициент формы и дисперсия графика нагрузки), определяются выражением

$$\Delta W_1=3\sum_{n=1}^{N}\left[n^2i_c^2+ni_c^2\left(k_ф^2-1\right)\right]\frac{R_\Sigma}{N}T.$$

[1] Нумерация электроприемников начинается с наиболее удаленного от источника питания ЭП.

[2] Режимом корреляционного резонанса (антирезонанса) называется режим наложения графиков, приводящий к максимуму (минимуму) их ВКМ.

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

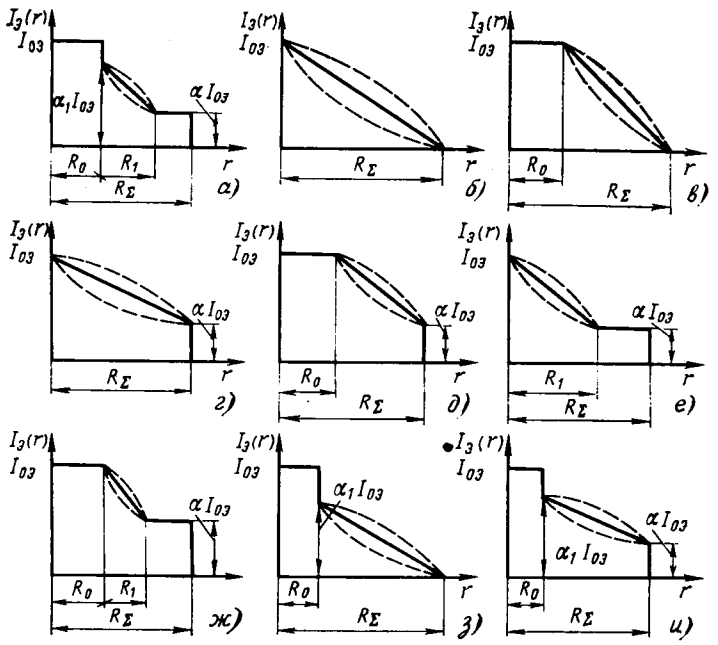


Рис. 1

Погрешность, обусловленная неучетом ВКМ, равна:

$$\frac{\Delta W - \Delta W'}{\Delta W} = \frac{(N-1)\left(k_ф^2 - 1\right)}{(N+1)\,k_ф^2},$$

т. е. зависит от числа подключенных к магистрали ЭП.

Если нагрузкой магистрали являются N одинаковых ЭП, периодические графики тока которых описываются двухступенчатыми моделями с длительностью периода (цикла) $t_ц$, в случае корреляционного резонанса эффективное значение суммарного тока магистрали равно:

$$I_{0э}^2 = N i_э^2 + N(N-1)\left(Di + i_c^2\right) = N^2 i_э^2 = N^2 i_c^2 + N^2 Di.$$

Если групповой график нагрузки N ЭП формируется таким образом, что максимально возможное число $\overline{N} = \frac{N^2}{4}$ пар ЭП работают в режиме корреляционного антирезонанса, а $\overset{+}{N} = \frac{N(N-2)}{4}$ пар ЭП — в режиме корреляционного резонанса [1], то при четном N

$$I_{0э}^2 = N i_э^2 + 2\left[\frac{N(N-2)}{4} Di - \frac{N^2}{4} Di + \frac{N(N-1)}{2} i_c^2\right] = N^2 i_c^2,$$

а при нечетном —

$$I_{0э}^2 = N^2 i_c^2 + Di.$$

При одном и том же значении $I_{0э}^2 = N^2 i_c^2$ потери электроэнергии зависят от того, какие именно ЭП работают в режиме корреляционного резонанса, а какие — в режиме корреляционного антирезонанса. Рассмотрим, например, три случая подключения к магистрали (через одинаковые расстояния) 6 одинаковых ЭП с двухступенчатыми графиками нагрузки.

1) Все ЭП работают в режиме корреляционного резонанса. Потери в магистрали равны:

$$\Delta W = 3\sum_{n=1}^{6} n^2\left(i_c^2 + Di\right)\frac{R_\Sigma}{6}T = 3\left(91 i_c^2 + 91 Di\right)\frac{R_\Sigma}{6}T.$$

2) Первые три ЭП работают со сдвигами во времени между началами циклов $t_{12} = t_{13} = 0$, т. е. в режиме корреляционного резонанса, а три последующие — со сдвигами $t_{14} = t_{15} = t_{16} = 0{,}5\,t_ц$, т. е. в режиме корреляционного антирезонанса с ЭП первой группы. В этом случае имеет место следующее распределение эффективных значений тока по участкам магистрали:

$$I_{э12}^2 = i_c^2 + Di,\quad I_{э23}^2 = 4i_c^2 + 4Di,\quad I_{э34}^2 = 9i_c^2 + 9Di,$$

$$I_{э45}^2 = 16 i_c^2 + 4Di,\quad I_{э56}^2 = 25 i_c^2 + Di,\quad I_{э67}^2 = I_{0э}^2 = 36 i_c^2.$$

Потери электроэнергии равны:

$$\Delta W = 3\left(91 i_c^2 + 19 Di\right)\frac{R_\Sigma}{6}T.$$

3) Первый, третий и пятый ЭП работают в режиме $t_{13} = t_{15} = 0$, а второй, четвертый и шестой — в режиме $t_{12} = t_{14} = t_{16} = 0{,}5 t_ц$. Тогда $I_{э12}^2 = i_c^2 + Di$, $I_{э23}^2 = 4i_c^2$, $I_{э34}^2 = 9i_c^2 + Di$, $I_{э45}^2 = 16 i_c^2$, $I_{э56}^2 = 25 i_c^2 + Di$, $I_{э67}^2 = I_{0э}^2 = 36 i_c^2$.

$$\Delta W = 3\left(91 i_c^2 + 3Di\right)\frac{R_\Sigma}{6}T.$$

Таким образом, при двухступенчатых моделях графиков нагрузки потери максимальны в режиме корреляционного резонанса всех ЭП

$$\Delta W = 3\sum_{n=1}^{N} n^2\left(i_c^2 + Di\right)\frac{R_\Sigma}{N}T,$$

а минимум потерь достигается, когда часть ЭП работает в режиме корреляционного резонанса, а часть — в режиме корреляционного антирезонанса, причем с одинаковыми сдвигами $t_{rs} = 0$ должны работать четные ЭП, а со сдвигами $t_{rs} = 0{,}5\,t_ц$ — нечетные, или наоборот. В этом случае потери при четном N равны:

$$\Delta W = 3\left(\sum_{n=1}^{N} n^2 i_c^2 + \frac{N}{2} Di\right)\frac{R_\Sigma}{N}T,$$

а при нечетном N —

$$\Delta W = 3\left(\sum_{n=1}^{N} n^2 i_c^2 + \frac{N+1}{2} Di\right)\frac{R_\Sigma}{N}T.$$

В настоящее время существуют различные способы учета распределения нагрузки по длине магистрали при расчете потерь электроэнергии [2, 3]. Более точно учесть характер распределения эффективных нагрузок вдоль магистрали позволяет модель диаграммы распределения, которая в общем случае имеет вид (рис. 1, *а*)

$$I_э(r) = \begin{cases} I_{0э}, & r \leqslant \beta R_\Sigma; \\ \alpha_1 I_{0э} - (\alpha_1 - \alpha)\, I_{0э}\left(\dfrac{r - \beta R_\Sigma}{\beta_1 R_\Sigma}\right)^\lambda, & \beta R_\Sigma \leqslant r \leqslant (\beta + \beta_1) R_\Sigma; \\ \alpha I_{0э}, & (\beta + \beta_1) R_\Sigma \leqslant r \leqslant R_\Sigma, \end{cases} \qquad (2)$$

где $\beta = R_0/R_\Sigma$ (R_0 — сопротивление участка от начала магистрали до точки подключения N-го ЭП); $\beta_1 = R_1/R_\Sigma$ (R_1 — сопротивление участка магистрали с распределенной нагрузкой); α — отношение нагрузки на конечном участке магистрали сопротивлением $(1 - \beta - \beta_1) R_\Sigma$ к суммарной нагрузке $I_{0э}$; $\alpha_1 = (I_{0э} - i_N)/I_{0э}$ (i_N — ток N-го ЭП); λ — показатель степени.

Потери электроэнергии для модели (2) определяются выражением

$$\Delta W = 3 I_{0э}^2 R_\Sigma T\left[\beta + \alpha_1^2\beta_1 + \alpha_2\left(1 - \beta - \beta_1\right) - \left(\alpha_1 - \alpha\right)\beta_1 \times \left(\frac{2\alpha_1}{\lambda + 1} - \frac{\alpha_1 - \alpha}{2\lambda + 1}\right)\right] = 3 I_{0э}^2 R_\Sigma T K.$$

Коэффициент K учитывает характер распределения нагрузок вдоль магистрали.

При различных α, α_1, β, β_1 частные случаи моделей диаграмм распределения эффективных значений тока изображены на рис. 1, *б* — *и*.

Приведенное выше выражение для оценки $I_э$, очевидно, справедливо и применимо для участков с равномерно распределенной нагрузкой. В случае линейного распределения нагрузок вдоль магистрали ($\lambda = 1$) потери электроэнергии рассчитываются по формуле

$$\Delta W = 3 I_{0э}^2 R_\Sigma T\left[\beta + \alpha^2(1 - \beta) - \frac{1}{3}\beta_1 \times \left(2\alpha^2 - \alpha_1^2 - \alpha_1\alpha\right)\right]. \qquad (3)$$

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

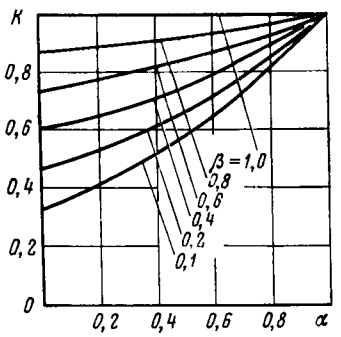


Рис. 2

Наиболее часто встречающиеся модели показаны на рис. 1, *б* — *д*, причем модель на рис. 1, *д* является общим случаем для трех предыдущих. Потери электроэнергии для этой модели (при $\lambda=1$) можно рассчитать по формуле, полученной из (3) подстановкой в нее α, α_1, β, β_1, соответствующих рис. 1, *д*:

$$\Delta W = 3I_{0э}^2 R_\Sigma T\left[1-\frac{1}{3}(1-\beta)\left(2-\alpha-\alpha^2\right)\right].$$

На рис. 2 для модели рис. 1, *д* приведены зависимости коэффициента K от величины α при $\lambda=1$ и различных β.

В частном случае, при $\alpha=0$, $\beta=0$ (треугольная модель, рис. 1, *б*) потери равны:

$$\Delta W = I_{0э}^2 R_\Sigma T,$$

е. в 3 раза меньше потерь в линии с той же нагрузкой, сосредоточенной на ее конце [3].

Если при расчете потерь электроэнергии по формуле (1) время T больше длительности цикла $t_ц$ периодического графика нагрузки, то, очевидно, использование значения $i_э$, определенного за время $t_ц$ [4], для расчета потерь за время T может привести к погрешности.

Определим влияние продолжительности реализации графика на точность расчета среднеквадратичного значения тока на примере трехступенчатых моделей графиков вида

$$i(t)=\begin{cases} i_1, & 0\leqslant t\leqslant \frac{t_ц}{3};\\ ai_1, & \frac{t_ц}{3}\leqslant t\leqslant\frac{2t_ц}{3};\\ bi_1, & \frac{2t_ц}{3}\leqslant t\leqslant t_ц,\end{cases} \qquad (4)$$

где $0\leqslant a\leqslant 1$; $0\leqslant b\leqslant 1$.

Эффективное значение тока за время, кратное длительности цикла $t_ц$ графика, равно $i_э^2=\frac{i_1^2}{3}\left(1+a^2+b^2\right)$. Эффективное значение тока, найденное:

1) за время $t_1=\frac{t_ц}{3}+lt_ц$ ($l=0, 1, 2, 3,\ldots$), т. е. для числа ступеней $m_1=1+3l$

$$i_{э\,m}^2=\frac{i_э^2\left(m_1-1\right)+i_1^2}{m_1};$$

2) за время $t_2=\frac{2t_ц}{3}+lt_ц$, т. е. для $m_2=2+3l$

$$i_{э\,m}^2=\frac{i_э^2\left(m_2-2\right)+i_1^2+a^2i_1^2}{m_2}.$$

Определим погрешность расчета квадрата эффективного значения тока:

$$\delta=\frac{i_{э\,m}^2-i_э^2}{i_э^2}.$$

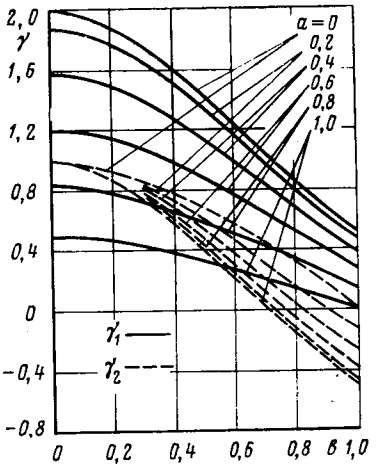


Рис. 3

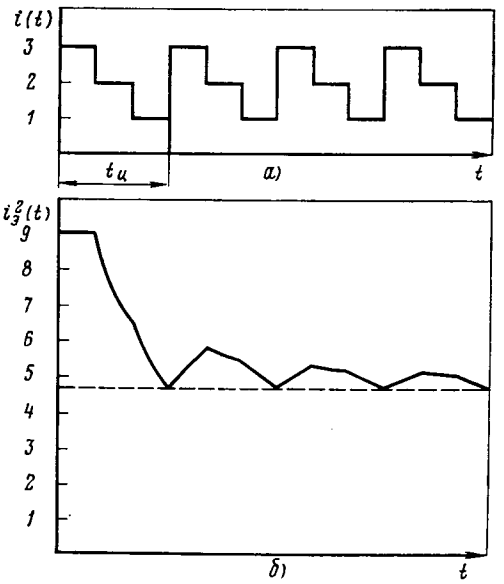


Рис. 4

В первом случае (для $m_1=1, 4, 7, 10,\ldots$)

$$\delta=\frac{2-a^2-b^2}{(1+a^2+b^2)\,m_1}=\frac{\gamma_1}{m_1}; \qquad (5)$$

во втором случае (для $m_2=2, 5, 8,\ldots$)

$$\delta=\frac{1+a^2-2b^2}{(1+a^2+b^2)\,m_2}=\frac{\gamma_2}{m_2}. \qquad (6)$$

Зависимости γ_1 и γ_2 от a и b приведены на рис. 3, они позволяют определить погрешность расчета $i_э$ за время, не кратное $t_ц$, или, наоборот, определить продолжительность реализации графика, при которой погрешность не превысит заданное значение.

Изложенное выше иллюстрируется графиками рис. 4, из которых, в частности, следует, что использование значения $i_э$, найденного за время $t_ц$, для расчета потерь за время T приводит к погрешности, за исключением случаев, когда T кратно $t_ц$. Указанная погрешность может быть равна нулю также при соотношениях $a^2+b^2=2$ ($m_1=1, 4, 7, \ldots$) и $a^2=2b^2-1$ ($m_2=2, 5, 8, \ldots$).

Возможность использования приведенных на рис. 3 зависимостей или выражений, вытекающих из (5) и (6), т. е. $m_1\geqslant|\gamma_1|/\delta$; $m_2\geqslant|\gamma_2|/\delta$, можно показать на нижеследующем примере.

Пример. График нагрузки задан моделью вида (4) с параметрами $a=0{,}6$, $b=0{,}4$. Найти минимальную продолжительность реализации, не кратную $t_ц$ для расчета $I_э^2$, исходя из допустимой погрешности $\delta=0{,}1$.

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

По графику рис. 3 $a=0{,}6$, $b=0{,}4$ находим: $\gamma_1=0{,}97$, $\gamma_2=0{,}68$, откуда $m_1\geqslant 0{,}97/0{,}1$, т. е. $m_1=10, 13, \ldots$; $m_2\geqslant 0{,}68/0{,}1$, т. е. $m_2=8, 11, \ldots$.

Из полученных значений выбираем $m\geqslant 8$. Указанный результат означает, что с погрешностью, не превышающей $\delta=0{,}1$, можно по значению $i_э$ рассчитывать потери за время $T\geqslant 8t_ц/3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гордеев В. И.** Корреляционно-резонансный метод выравнивания групповых графиков нагрузки. — Изв. вузов СССР. Электромеханика, 1981, № 2.

2. **Справочник** по электроснабжению промышленных предприятий: Электрооборудование и автоматизация/Под общ. ред. А. А. Федорова, Г. В. Сербиновского. — М.: Энергоиздат, 1981.

3. **Потери** мощности в энергии в электрических сетях/Под ред. Г. Е. Поспелова. — М.: Энергоиздат, 1981.

4. **Гордеев В. И., Демура А. В.** Учет информации об электрических нагрузках при расчете потерь электроэнергии. — Электричество, 1984, № 7.

[24.04.84]

УДК [621.313.13:62-83].001.24

Исследование параметров линейного асинхронного двигателя методом проводимостей зубцовых контуров

БЕСПАЛОВ В. Я., канд. техн. наук, **КУЗНЕЦОВ В. В.**, канд. техн. наук, **СОКОЛОВА Е. М.**, канд. техн. наук, **СОРОКИН Л. К.**, канд. техн. наук

Москва

Одной из перспективных областей применения линейных асинхронных двигателей (ЛАД) являются транспортные системы различного назначения. Для определения оптимальных законов регулирования этих машин необходимо решить ряд научных вопросов, таких как исследование динамики двигателей.

Наиболее быстро и с минимальными затратами информацию о динамических режимах можно получить различными методами моделирования. В свою очередь, адекватность математической модели в решающей степени зависит от точности определения параметров электрической машины.

Поскольку немагнитный зазор ЛАД относительно велик, необходимо более точно учитывать взаимную индуктивность, ошибки в определении которой могут привести к существенным погрешностям при расчете характеристик ЛАД в установившихся и переходных режимах.

Рассматривается ЛАД, у которого индуктор размещен в путевом полотне (рис. 1). Катушка в пазу укрепляется немагнитными клиньями. Вторичный элемент состоит из короткозамкнутой алюминиевой обмотки, охватывающей зубцы из магнитно-мягкого материала. Конфигурация и размеры пазов индуктора влияют на взаимную индуктивность фаз.

Зубчатость воздушного зазора и дискретное распределение обмоток электрических машин приводит к сложному распределению магнитного поля в зазоре. Приходится учитывать также непостоянство картины поля, если требуется рассчитать изменение проводимости воздушного зазора при перемещении экипажа относительно статора (индуктора). Задачи такого рода обычно решаются на основе полуэмпирических методов, наиболее распространенным из которых является метод А. И. Вольдека.

В статье для расчета поля в зазоре ЛАД использовался метод проводимостей зубцовых контуров (МПЗК) [1, 2]. Магнитное поле машины рассматривается как совокупность полей, образованных токами зубцовых контуров. Под зубцовым контуром понимается зубец статора или ротора, как бы охваченный витком с током, равным разности токов в реальных проводах обмоток, лежащих в пазах по обе стороны от этого зубца. Провода обмоток могут произвольно размещаться в пазах.

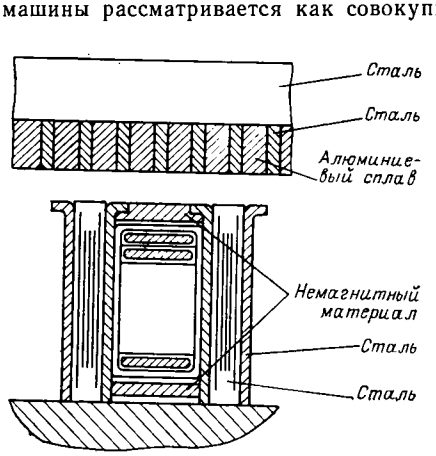


Рис. 1. Поперечное сечение индуктора и вторичного элемента

В статье рассматривается достаточно длинный ротор (экипаж) с короткозамкнутой обмоткой типа «беличья клетка» при его перемещении с постоянной невысокой скоростью порядка 10—12 м/с. Экипаж одновременно находится над шестью индукторами, причем на всем протяжении рассматриваемого отрезка пути магнитное поле каждого из индукторов полностью сцеплено с полем ротора. Поэтому пренебрежение краевыми эффектами не приводит к значительным погрешностям расчета. При необходимости краевой эффект можно учесть введением дополнительных контуров [4].

Определение взаимных индуктивностей между фазой статора и зубцовым контуром вторичного элемента, между контурами статора (вторичного элемента) методом проводимостей зубцовых контуров можно подразделить на несколько этапов расчета: определение магнитного поля зубцового контура при особых граничных условиях [1, 2] при различных положениях статора и ротора; расчет зависимостей магнитных проводимостей зубцовых контуров статора и ротора от угла их взаимного положения; расчет индуктивностей обмоток статора и ротора.

Магнитное поле воздушного зазора можно рассматривать как совокупность полей, образованных токами зубцовых контуров. Пусть известны токи пазов, в которых размещаются провода обмоток статора и ротора. Токи в пазах $i_п$ можно представить через контурные токи $i_к$, охватывающие зубцы:

$$i_{1п}=i_{к1}-i_{к\,z};\quad i_{2п}=i_{к2}-i_{к1},\ldots;\quad i_{z\,п}=i_{к\,z}-i_{к,\,z-1},\qquad (1)$$

где z — число пазов.

Для однозначного определения контурных токов к этой системе уравнений надо добавить условие непрерывности магнитного потока всей совокупности контуров, которое при двухсторонней зубчатости сердечников статора и вторичного элемента будет:

$$\sum_{k=1}^{z}\Phi_k=\mu_0 l_\delta\sum_{k=1}^{z}\lambda_k i_к=0,\qquad (2)$$

где Φ_k — поток k-го контура; l_δ — осевая длина машины; λ_k — магнитная проводимость для потока k-го контура.

Совместное решение уравнений (1) и (2) дает возможность определить контурные токи статора и ротора. Контурный ток i_k можно определить как сумму:

$$i_k=i_k'+\Delta i.\qquad (3)$$

Ток i_k' находится путем совместного решения системы (1) и уравнения для суммы контурных токов

$$\sum_{k=1}^{z}i_k'=0.\qquad (4)$$

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Дополнительный контурный ток Δi одинаков для всех контуров. Учитывая (2), получим

$$\Delta i = \frac{\sum_{k=1}^{z} i'_k \lambda_k}{\sum_{k=1}^{z} \lambda_k}. \qquad (5)$$

В большинстве случаев дополнительный контурный ток невелик. Он обращается в нуль в симметричных машинах, если при смещении на полупериод поля токи в проводах повторяются с обратным знаком [2]. При этом период дискретных структур сердечников и проводов должен укладываться в полупериоде поля целое число раз. Это условие может быть выполнено в ЛАД с целым числом пазов статора (индуктора) на полюс и фазу и четным числом пазов вторичного элемента на пару полюсов.

Использование МПЗК начинается с расчета магнитной проводимости между зубцовыми контурами статора и вторичного элемента при изменении их взаимного положения и униполярном возбуждении одного из упомянутых контуров. Наиболее простым способом определения проводимости является моделирование поля зубцового контура на проводящей бумаге, однако более точные результаты получаются при расчетах на ЦВМ.

На рис. 2 приводятся результаты расчетов взаимных проводимостей зубцовых контуров, выполненных этими двумя методами. Исследования проводились для нескольких вариантов паза вторичного элемента. В двух вариантах рассмотрены обычные прямоугольные пазы, отличающиеся размером площади поперечного сечения; они называются большим и малым пазом. Два другие варианта предполагают наличие скоб у большого и малого пазов. Эти скобы уменьшают раскрытие пазов, влияют на характер поля в зазоре ЛАД.

При расчете индуктивностей ЛАД с помощью МПЗК были приняты следующие допущения: магнитная проницаемость стали бесконечно велика; магнитное поле в пределах расчетной длины машины плоскопараллельное; вихревые токи в стали пренебрежимо малы; токи равномерно распределены по сечениям проводов обмоток; потоки рассеяния лобовых частей обмоток не зависят от перемещения экипажа; потоки пазового рассеяния индуктора и вторичного элемента не зависят от перемещения последнего до тех пор, пока поле индуктора полностью сцеплено с полем экипажа.

На основании первого допущения индуктивности контуров не зависят от токов контуров, что позволяет рассчитывать их при любых, в частности, единичных токах контуров. Два последние допущения справедливы, поскольку при перемещении экипажа, с момента полного сцепления поля статора с вторичным элементом и до начала выхода статора из-под экипажа индуктивности рассеяния обоих элементов изменяются незначительно по отношению к их средней величине, и в первом приближении этими изменениями можно пренебречь.

Расчет индуктивностей ЛАД поясняется схемой замещения (рис. 3), составленной с учетом принятых допущений. Потенциалы ярем статора и экипажа приняты равными нулю. Зубцы охвачены контурными токами и имеют потенциалы (м. д. с.), численно равные контурным токам одновитковых зубцовых контуров. Между узлами первичного и вторичного элементов включены удельные магнитные проводимости воздушного зазора на единицу расчетной длины машины, равные $\mu_0 l_l^k$, где $k = 1 \div z_s$, $l = 1 \div z_R$, z_s число пазов статора; z_R — число пазов вторичного элемента. Между узлами вторичного элемента включены проводимости рассеяния пазового и по коронкам зубцов $\mu_0 \lambda_l^r$, где $r = l-1$, $l+1$. Между узлами статора включены однотипные проводимости для потоков рассеяния пазового и по коронкам зубцов $\mu_0 \lambda_k^s$ где $s = k-1$, $k+1$.

С использованием этой схемы замещения были рассчитаны потокосцепления всех контуров и магнитные потоки в отдельных зубцах. При определении потокосцеплений контуров вторичного элемента, обусловленных полем фазы статора, полагаем, что потенциалы этих зубцов и их контурные токи равны нулю. Взаимная индуктивность между фазой A статора и принятым за первый зубцовым контуром вторичного элемента равна потокосцеплению контура при некотором значении тока фазы A. Решая линейную задачу, в которой индуктивности от токов не зависят, принимаем, что по фазе протекает единичный

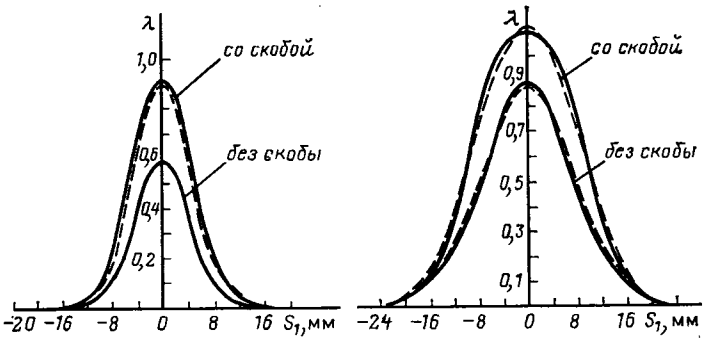


Рис. 2. Взаимные проводимости зубцовых контуров: *а* — малого паза; *б* — большого паза; ——— — моделирование; ——— — расчет

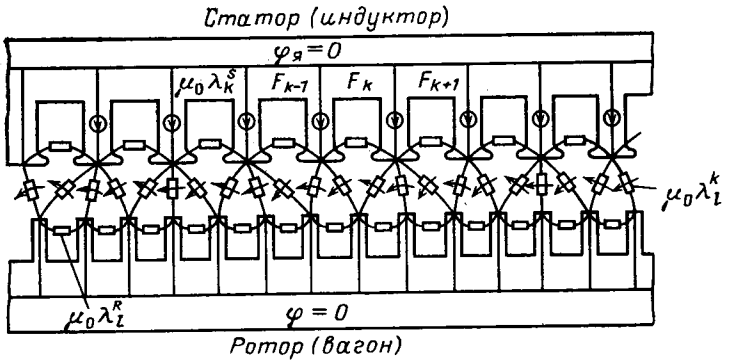


Рис. 3. Схема замещения магнитной цепи ЛАД

ток, Тогда индуктивность фазы

$$L_{A1} \equiv \psi_{A1}.$$

Потокосцепление l-го контура вторичного элемента определится как сумма потокосцеплений от токов i_k всех контуров статора, образующих фазу A:

$$\psi_{Al} = \sum_{k=1}^{z_s} c_k \psi_k = \sum_{k=1}^{z_s} L_l^k c_k i_k, \qquad (6)$$

где c_k — коэффициент кратности для потокосцеплений, определяемый по схеме обмотки фазы A.

Коэффициенты кратности отражает тот факт, что в общем случае различные зубцы охвачены разным числом витков фазы. Коэффициент c_k фаз A, B, C для одного и того же зубцового контура различны. Их можно определить, построив схему пространственного распределения м. д. с. всей обмотки.

Примем $i_k = i_A = 1$. Имея в виду, что число витков обмотки фазы A статора равно w_A, т. е. число витков каждого зубцового контура статора равно $c_k w_A$ и что контур короткозамкнутого вторичного элемента одновитковый ($w_l = 1$), можно записать:

$$L_l^k = w_A w_l \cdot \mu_0 l_\delta c_k \lambda_l^k = w_A \mu_0 l_\delta c_k \lambda_l^k, \qquad (7)$$

где λ_l^k — проводимость для потока воздушного зазора k-го контура статора, сцепленного с l-м контуром вторичного элемента (рис. 3). $\lambda_l^k = \lambda_l^k(S_l^k)$; l_δ — расчетная длина воздушного зазора в вертикальном направлении (вдоль зубца индуктора).

Сдвиг S_l^k между контурами в направлении движения экипажа определяется по формуле:

$$S_l^k = S_0 + (l-1)\, t_{zR} - (k-1)\, t_{zS} - S, \qquad (8)$$

где S_0 — начальное смещение между осями контуров, S — перемещение ЛАД, t_z — зубцовые деления.

В силу справедливости принципа взаимности: $\lambda_l^k = \lambda_k^l$, $L_l^k = L_k^l$. Верхний индекс соответствует возбужденному контуру, нижний — контуру, с которым сцеплено поле.

При перемещении первого контура вторичного элемента относительно статора получим для каждого нового его положе-

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

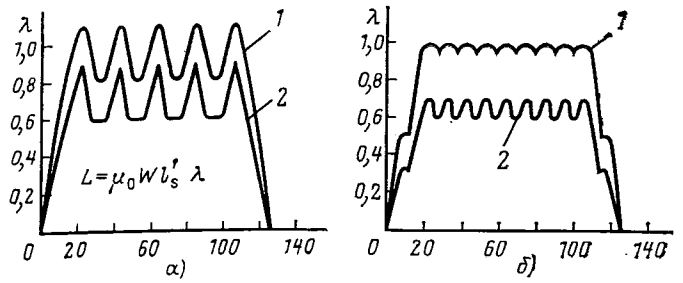


Рис. 4. Взаимные проводимости зубцового контура ротора и фазы статора: *а* — для большого статора; *б* — для малого паза; *1* — со скобой; *2* — без скобы

ния проводимость вида λ_l^k (рис. 2), индуктивность L_l^k и соответствующее им потокосцепление ψ_l^k, и, следовательно, $\psi_{Al} = \psi_{lA}$.

Тогда взаимная индуктивность l-го контура вторичного элемента с фазой A статора определится выражением:

$$L_{Al} \equiv \psi_{Al} = \sum_{k=1}^{z_s} c_k^A \psi_l^k = w_A \mu_0 l_\delta \sum_{k=1}^{z_s} c_k^A \lambda_l^k i_k. \quad (9)$$

При перемещении вторичного контура его взаимная индуктивность с фазой статора меняется в зависимости от относительного положения их осей согласно рис. 4.

Для определения собственных индуктивностей зубцовых контуров вторичного элемента также использовалась схема замещения (рис. 3). Допустим, что теперь возбужден единичным током первый его зубцовый контур, а потенциалы всех остальных зубцов машины (узлов схемы замещения) равны нулю. Тогда полное потокосцепление рассматриваемого контура равно:

$$\psi_{11} = \psi_{12} + \psi_{1,\,z_R} + \psi_1^{z_s}. \quad (10)$$

Здесь ψ_{12} — потокосцепление первого зубцового контура вторичного элемента с полем его z_R-го зубцового контура; $\psi_{1,\,z_R}$ — потокосцепление первого зубцового контура вторичного элемента с полем его z_R-го зубцового контура; $\psi_1^{z_s}$ — потокосцепление первого зубцового контура вторичного элемента с потоком, проходящим в статор:

$$\psi_1^{z_s} = \sum_{k=1}^{z_s} L_1^k i_1, \quad (11)$$

следовательно,

$$L_{11} = \frac{\psi_{11}}{i_1} = \psi_{11}, \quad (12)$$

где

$$\psi_{11} = L_{12} i_1 + L_{1,\,z_R} i_1 + \sum_{k=1}^{z_s} L_1^k i_1 + L_{\text{л}l} i_1. \quad (13)$$

Можно записать

$$L_{11} = L_{12} + L_{1,\,z_R} + \sum_{k=1}^{z_s} L_1^k + L_{\text{л}l} = \mu_0 l_\delta \left(\lambda_{12} + \lambda_{1,\,z_R} + \sum_{k=1}^{z_s} \lambda_1^k + \lambda_{\text{л}l}\right), \quad (14)$$

где λ_{12}, $\lambda_{1,\,z_R}$ — магнитные проводимости между первым и вторым, а также между первым и z_R-м контурами вторичного элемента; λ_1^k — проводимость между первым контуром вторичного элемента и k-м контуром статора; $\lambda_{\text{л}l}$ — проводимость лобового рассеяния контура (рассчитывалась по приближенной методике).

В симметричных машинах с целым числом пазов на полюс и фазу, когда в любой момент времени картина поля, создаваемого фазой под одной ее половиной, аналогична и противоположна по знаку картине поля под другой, индуктивность всей фазы определяется собственной индуктивностью половины

Паз	Индуктивность фаз (на одну сторону индуктора)					
	собственная			взаимная		
	средняя	полезная	рассеяние	средняя	полезная	рассеяние
Большой						
без скобы	1,376	1,0	0,3764	1,375	1,0	0,375
со скобой	1,4878	1,0	0,4878	1,400	1,0	0,400
Малый						
без скобы	1,674	1,0	0,6737	1,677	1,0	0,4038
со скобой	1,809	1,0	0,8095	1,794	1,0	0,794

фазы, которую можно рассчитать, суммируя потокосцепления всех охваченных ею зубцовых контуров статора и деля эту сумму на единичный ток фазы (при любом смещении экипажа относительно статора). Собственное потокосцепление контура статора определяется по формуле (13):

$$\psi_{kk} = L_{k,\,k+1} i_k + L_{k,\,k-1} i_k + \sum_{l=1}^{z_R} L_l^k i_k + L_{\text{л}k} i_k, \quad (15)$$

где взаимная индуктивность зубцовых контуров статора

$$L_{k,\,k+1} = w_\text{ф}^2 \mu_0 l_\delta \lambda_{k,\,k+1} \quad (16)$$

и взаимная индуктивность контура статора с некоторым контуром вторичного элемента

$$L_l^k = w_\text{ф} w_l \mu_0 l_\delta \lambda_l^k. \quad (17)$$

Собственную индуктивность половины фазы статора можно выразить как

$$L_{AA} = \frac{\psi_A}{i_A} = \psi_A = w_A^2 \mu_0 l_\delta \sum_{k=1}^{1/2 z_s} C_k^A \left(\sum_{l=1}^{z_R} \lambda_l^k + \lambda_{k,\,k+1} + \lambda_{k,\,k-1} + \lambda_{\text{л}k}\right). \quad (18)$$

Взаимная индуктивность фаз A и B статора определяется по формуле:

$$L_{AB} = \frac{\psi_B}{i_A} = w_A w_B \mu_0 l_\delta \sum_{k=1}^{z_s} c_k^A c_k^B \left(\sum_{l=1}^{z_R} \lambda_l^k + \lambda_{k,\,k+1} + \lambda_{k,\,k-1} + \lambda_{\text{л}k}\right). \quad (19)$$

Изложенным методом были рассчитаны индуктивности для ЛАД с конструкцией паза индуктора, представленного на рис. 1. Результаты расчета в относительных единицах (см. таблицу) показывают, что при соотношении $\delta/\tau = 0{,}1$ индуктивности рассеяния могут составлять до 80 %, что является характерной особенностью конструкций многополюсных ЛАД.

Физический смысл собственных и взаимных индуктивностей связан с сущностью метода проводимостей зубцовых контуров [1, 2].

Выводы. 1. Метод проводимостей зубцовых контуров позволяет рассчитать поле в рабочем воздушном зазоре ЛАД, оценить влияние дискретности обмоток, зубчатости сердечников статора и вторичного элемента на величину и зависимость основных индуктивных параметров от перемещения экипажа.

2. Индуктивности фаз индуктора и контуров вторичного элемента слегка изменяются при перемещении экипажа, причем изменения больше проявляются при открытых нескошенных пазах (рис. 4). Указанные зубцовые пульсации индуктивностей могут вызвать значительные вплоть до недопустимых пульсации токов, наведенных в короткозамкнутой вторичной обмотке ЛАД. Пульсации можно уменьшить, применяя скос пазов.

3. В результате исследования были получены значительные составляющие рассеяния по сравнению с полезной составляющей собственных индуктивностей фаз статора и контуров вторичного элемента.

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иванов-Смоленский А. В.** Анализ магнитного поля контура в электрических машинах с двухсторонней зубчатостью сердечников. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1976, № 4.

2. **Иванов-Смоленский А. В.** Метод проводимостей зубцовых контуров и его применение к электромагнитному расчету ненасыщенной электрической машины с двухсторонней зубчатостью сердечников. Электричество, 1976, № 9.

3. **Власов А. И., Иванов-Смоленский А. В.** Применение метода проводимостей зубцовых контуров к расчету переходных процессов в ненасыщенных электрических машинах. — Электричество, 1979, № 8.

4. **Хачатрян Н. Р., Арутунян М. П., Гаспарян В. Р.** Применение метода проводимостей зубцовых контуров к расчету линейных асинхронных двигателей. — Труды ВНИИКЭ, 1983, № 13.

[08.02.85]

УДК [621.314.6:621.382].018.3

Гармоники тока нулевой последовательности в цепях с вентильными преобразователями

ЕМЕЛЬЯНОВ В. И., КРАЙЧИК Ю. С., МИНИН В. Т.

Ленинград

При оценках несинусоидальности токов и напряжений в электрических сетях и других трехфазных цепях, примыкающих к вентильным преобразователям, выделяют и особо учитывают гармоники тока нулевой последовательности. Они имеют отличные от гармоник прямой и обратной последовательностей характеристики распространения и обуславливают ряд специфических неблагоприятных последствий, в частности, ухудшают условия работы земляных защит и оказывают сильное негативное влияние на линии связи. Последнее заставляет нормировать гармоники тока нулевой последовательности в электрических сетях жестче, чем прямой и обратной.

Принято считать, что гармоники тока нулевой последовательности создаются преобразователями с нулевыми выводами и не генерируются мостовыми преобразователями. Однако это не вполне верно. Хотя в фазах мостовых преобразователей нет гармоник тока нулевой последовательности, но из-за несимметрии примыкающих цепей гармоники тока в этих цепях переходят из одной последовательности в другую, в том числе в нулевую.

Если на преобразовательной подстанции имеются узкополосные резонансные фильтры, то именно в них осуществляется такой переход. Это объясняется большими значениями гармоник тока в указанных фильтрах и тем, что даже незначительная их расстройка, разная в разных фазах, приводит к резко выраженной несимметрии параметров на частотах фильтруемых гармоник. Далее будем считать, что каждый узкополосный фильтр является единственным источником несимметрии на частоте фильтруемой им гармоники. В схему замещения для токов нулевой последовательности такой фильтр может вводиться в виде квивалентного источника, имеющего э. д. с.

$$\dot{E}_0 = \dot{I}_1 Z_2 + \dot{I}_2 Z_1 \tag{1}$$

и внутреннее сопротивление

$$Z_{\text{вн}} = Z_0, \tag{2}$$

Здесь $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ — гармоники тока прямой и обратной последовательностей, протекающие через данный фильтр; E_s ($S = 0, 1, 2$) — симметричные составляющие сопротивления фильтра, выражающиеся через сопротивления его фаз:

$$Z_S = \frac{1}{3}\left(Z_A + Z_B \varepsilon^{j\frac{2\pi S}{3}} + Z_C \varepsilon^{-j\frac{2\pi S}{3}}\right). \tag{3}$$

Создаваемые m-фазным симметричным преобразователем гармоники тока ν-го порядка образуют систему прямой последовательности при $\nu = pm + 1$, и обратной при $\nu = pm - 1$ ($p = 1, 2, \ldots$). В первом случае $I_1 \gg I_2$, а во втором $I_2 \gg I_1$, соответственно чему в формуле (1) можно учитывать либо одно первое, либо одно второе слагаемое. Такое упрощение (1) позволяет дать ей наглядную интерпретацию на комплексной плоскости. При этом будем исходить из следующих, достаточно близких к реальным условиям, дополнительных допущений:

а) вследствие расстройки узкополосных фильтров их реактивные сопротивления на частотах фильтруемых гармоник в разных фазах могут независимо друг от друга принимать любые значения в некоторых фиксированных пределах:

$$-\Delta x \leqslant x_A,\ x_B,\ x_C \leqslant \Delta x; \tag{4а}$$

б) активные сопротивления фильтров от их расстройки не зависят и можно считать их равными во всех фазах:

$$r_A = r_B = r_C = r. \tag{4б}$$

В силу допущения (4б) Z_1 и Z_2 теряют зависимость от активных сопротивлений фильтров и остаются зависящими лишь от их реактивных сопротивлений x_A, x_B и x_C. В силу допущения (4а) наибольшие по модулю значения Z_1 и Z_2 имеют вид $\frac{2}{3}\Delta x \varepsilon^{\frac{j\pi k}{3}}$ ($k = 1, \ldots, 6$). Отвечающие им точки на комплексной плоскости располагаются на окружности радиуса $\frac{2}{3}\Delta x$, деля ее на шесть равных частей. Изложенное позволяет заключить, что значения э. д. с. гармоник нулевой последовательности ограничены на комплексной плоскости правильным шестиугольником ABCDEF (рис. 1), вписанным в круг радиуса $\frac{2}{3} I \Delta x$, где I — гармоника тока прямой или обратной последовательности, протекающая через данный фильтр. Вершины граничного шестиугольника соответствуют наиболее неблагоприятным случаям расстройки фильтра, а именно — расстройкам, при которых реактивные сопротивления в двух фазах фильтра имеют максимальные значения одного знака, а в третьей — максимальное значение противоположного знака.

Представляет интерес сравнить значения э. д. с. гармоник нулевой последовательности E_0 с величинами э. д. с. гармоник прямой E_1 и обратной E_2 последовательностей. Последние используются при расчетах гармоник тока и напряжения прямой и обратной последовательностей во внешних (относительно преобразователей и фильтров) цепях. Комплексы этих э. д. с. определяются по формулам

$$\dot{E}_1 = \dot{I}_1 Z_0,\quad \dot{E}_2 = I_2 Z_0, \tag{5}$$

где согласно (4б)

$$Z_0 = r + \frac{j}{3}(x_A + x_B + x_C).$$

Наибольшие по модулю значения Z_0 имеют вид $r \pm j\Delta x$, а область возможных значений э. д. с. $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$ выражается на комплексной плоскости отрезком GH, расположенным на расстоянии Ir от оси мнимых величин и имеющим длину $2I\Delta x$. Взаимное расположение областей ABCDEF и GH и удаление их граничных точек от начала координат показывает, что э. д. с. гармоник нулевой последовательности на выходе фильтра нельзя считать пренебрежимо малыми по сравнению с учитываемыми ныне э. д. с. гармоник прямой и обратной последовательностей. Во многих случаях э. д. с. гармоник нулевой последовательности может даже превзойти э. д. с. гармоник прямой и обратной последовательностей.

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

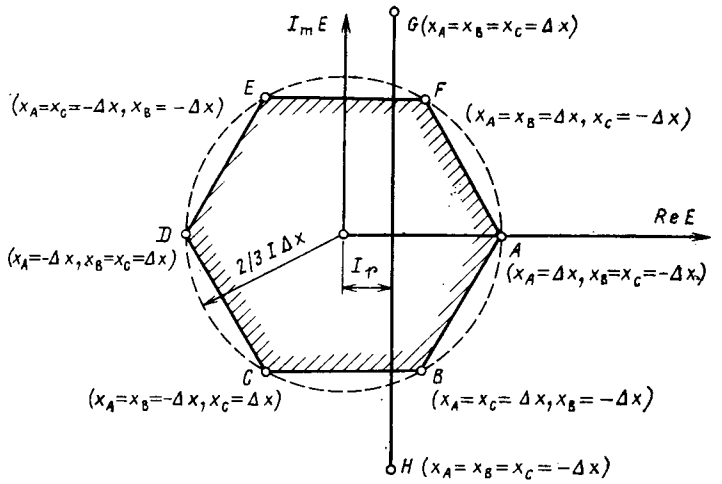


Рис. 1. Области возможных значений э. д. с. гармоник нулевой последовательности (ABCDEF), прямой и обратной последовательностей (GH)

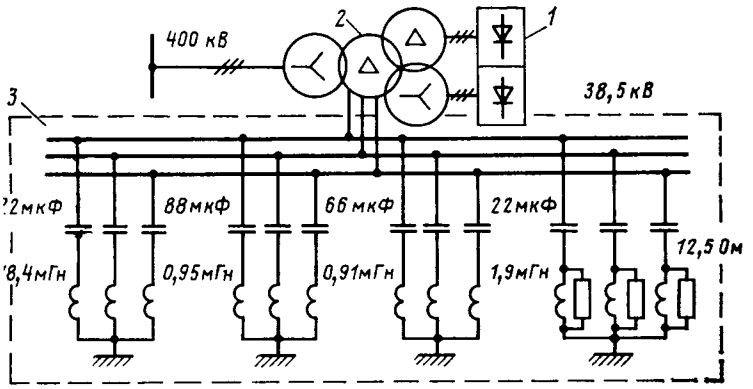


Рис. 2. Схема преобразовательной подстанции, в фильтровых цепях которой наблюдались гармоники тока нулевой последовательности: *1* — двухмостовой 12-фазный преобразователь; *2* — преобразовательные трансформаторы; *3* — комплект фильтров

Гармоники тока нулевой последовательности зависят от того имеются ли контуры для их протекания и какими сопротивлениями они обладают. В этом отношении определяющую роль играет схема фильтров, способ заземления их нейтрали и место включения фильтров в схему подстанции.

Если фильтры соединены в звезду с глухо заземленной нейтралью и включены на общие сборные шины подстанции, то гармоники тока нулевой последовательности, появляющиеся вследствие несимметрии фильтров, замыкаются через эти фильтры и внешние ветви, одну из которых составляют отходящие от подстанции линии, а другую — сетевые обмотки преобразовательных трансформаторов (предполагается, что нейтрали в сети и у преобразовательных трансформаторов заземлены).

Если фильтры собраны в треугольник или звезду с незаземленной нейтралью, то гармоники тока нулевой последовательности локализованы цепями фильтров и не выходят за пределы подстанции. Такая же внутренняя локализация гармоник тока нулевой последовательности происходит и при включении фильтров на стороне собранных в треугольник третичных обмоток преобразовательных трансформаторов. Благодаря тому, что во всех этих случаях гармоники тока нулевой последовательности не попадают в ЛЭП, отходящие от преобразовательных подстанций, удается избежать повышенного влияния этих ЛЭП на линии связи. Указанные особенности следует учитывать при сравнении различных вариантов выполнения фильтров.

В случае параллельной работы нескольких фильтров гармоники тока нулевой последовательности, возникающие в одном из фильтров, могут замыкаться через другие. Нередко на преобразовательных подстанциях параллельно включаются фильтры, настроенные на соседние гармоники в спектре тока преобразователя (например, на пятую и седьмую или на одиннадцатую и тринадцатую). В контурах, образуемых такими фильтрами, происходит сложение гармоник тока нулевой последовательности, возникающих в каждом из них, причем из-за близости частот кривые результирующих нулевых токов имеют форму биений.

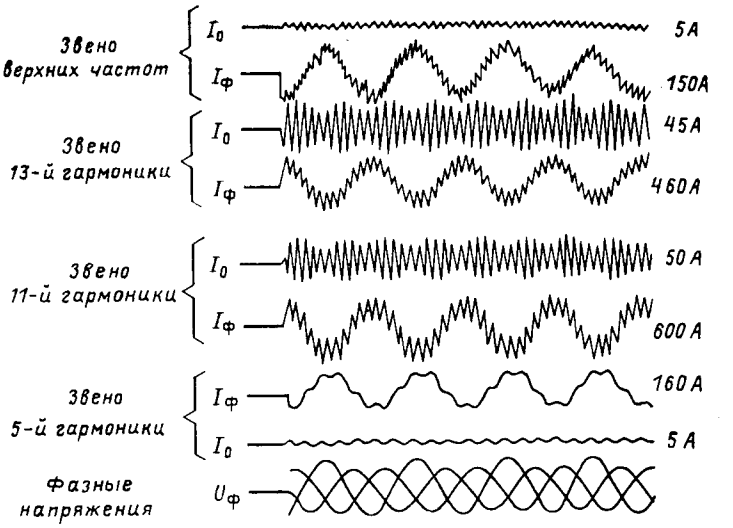


Рис. 3. Осциллограммы токов в фазах и нулевых проводах фильтровых звеньев на преобразовательной подстанции рис. 2 (числовыми отметками обозначены действующие значения токов, определяемые по амперметрам)

Описанные явления наблюдались на мощной преобразовательной подстанции, служащей для асинхронной связи энергосистем. Преобразователи на этой подстанции, выполненные по двухмостовым 12-фазным схемам, получали питание от трансформаторов, к третичным обмоткам которых был присоединен комплект фильтров, состоящий из узкополосных звеньев 5-, 11- и 13-й гармоник и широкополосного звена верхних частот (рис. 2).

Во время измерений преобразователи работали с мощностью около 300 МВт. Измерения показали (рис. 3), что в узкополосных фильтровых звеньях возникают гармоники тока нулевой последовательности, которые замыкаются через параллельно включенные звенья. Наибольшие гармоники тока нулевой последовательности — до 20 % фазных значений возникали в звене 11-й гармоники (замыкались через звено 13-й гармоники) и в звене 13-й гармоники (замыкались через звено 11-й гармоники). В нулевых проводах обоих звеньев кривая тока имела форму биений и этот ток превышал в некоторых режимах уставки земляной защиты фильтровых конденсаторных батарей. Для отстройки защиты ее реле были зашунтированы конденсаторами, имеющими на частотах 11- и 13-й гармоник сопротивление в несколько раз меньше, чем сопротивление самих реле. Условия срабатывания защиты на частоте 50 Гц от этого практически не изменились, а ложные срабатывания от высших гармоник тока нулевой последовательности прекратились.

Выводы. 1. При некоторых видах несимметрии трехфазных цепей, примыкающих к вентильным преобразователям, высшие гармоники тока преобразователей в этих цепях переходят из прямой и обратной последовательностей в нулевую.

2. Если на преобразовательной подстанции имеются узкополосные резонансные фильтры, то неидентичность их настройки в разных фазах при наличии цепи для токов нулевой последовательности может быть основной причиной такого перехода.

3. Возможность возникновения высших гармоник тока нулевой последовательности надлежит учитывать при выборе схемы фильтров, места их присоединения, характера заземления нейтрали и способа настройки. Учет этих гармоник необходим также при разработке земляной защиты фильтрового оборудования и защиты линий связи от мешающего влияния со стороны ЛЭП связанных с преобразовательными подстанциями.

[05.02.85]

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

УДК 537.212.001.24

Применение внешних конечных элементов при расчете плоскопараллельных потенциальных полей

КИРЬЯКОВ А. М., канд. техн. наук

Новочеркасский политехнический институт

При расчете электро- и магнитостатических полей методом конечных элементов (МКЭ) часто встречаются задачи, в которых необходимо производить вычисления вблизи острых кромок электродов или в неограниченной области [1]. Схема решения этих задач следующая [2]: 1) заданная область разбивается на внешние конечные элементы (ВКЭ)[1] и треугольники, внутри которых задается аппроксимация функции u_i (x, y) в виде полинома; 2) для всех элементов определяется функционал вариационной задачи, из которого получают линейную систему алгебраических уравнений МКЭ относительно значений искомой функции (потенциала u_i) в узлах.

Функция, аппроксимирующая точное решение, должна быть согласована [2]. Чтобы согласовать решение в ВКЭ и в треугольниках, граничащих с ВКЭ, в [1] вводится определение «линейчатых треугольников» (ЛТ), внутри которых функция u_j (x, y) выражена через значения решения во внешнем элементе. При таком согласовании коэффициенты системы уравнений МКЭ могут быть определены только численно, что значительно усложняет алгоритм решения и увеличивает вычислительные погрешности. Кроме того, в [1] не дано решение для прямоугольной границы ВКЭ, которая является наиболее удобной при составлении численных алгоритмов.

Целями предлагаемой статьи являются: 1) такое согласование ВКЭ и ЛТ, при котором коэффициенты квадратичной формы функционала вариационной задачи, а следовательно и системы уравнений МКЭ, вычислялись аналитически; 2) решение задачи только для круглых, но и прямоугольных границ ВКЭ.

Напомним постановку задачи для сектора [1]: ищем решение уравнения Лапласа $\Delta u=0$. Область задана между двумя полубесконечными плоскостями, расположенными под углом θ_k и имеющими потенциал $u(\rho, 0)=u(\rho, \theta_k)=0$ (рис. 1). Радиус границы выбран так, чтобы внутри ВКЭ отсутствовали источники поля, а среда была однородной. Внутренняя область разбивается на конечные элементы — треугольники. Внутри каждого треугольника аппроксимирующая функция имеет вид:

$$u^{N_i}(x, y) = \gamma_{1i} + \gamma_{2i}x + \gamma_{3i}y, \tag{1}$$

где

$$\gamma_{1i} = \frac{1}{2\Delta_i}\left(a_{i-1}u_{i-1} + a_i^* u_i + a_i^N u_i^N\right); \quad \gamma_{2i} = \frac{1}{2\Delta_i}\left(b_{i-1}u_{i-1} + b_i^* u_i + b_i^N u_i^N\right); \quad \gamma_{3i} = \frac{1}{2\Delta_i}\left(c_{i-1}u_{i-1} + c_i^* u_i + c_i^N u_i^N\right)$$

u_i — значения потенциала в граничных узлах; u_i^N — значения потенциала во внутренних узлах; Δ_i, a_i, b_i, c_i, ... — константы, зависящие от координат узлов треугольного элемента N_i [2].

Так как в цилиндрической системе координат (рис. 2) $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, то

$$u^{N_i}(\rho, \theta) = \gamma_{1i} + \gamma_{2i}\rho\cos\theta + \gamma_{3i}\rho\sin\theta. \tag{2}$$

Решение для внешней области имеет вид [1 и 3]:

$$u(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n t^{\lambda n}\sin\lambda n\theta, \tag{3}$$

где $t = R/\rho$; $\lambda = \pi/\theta_к$;

$$f_n = \frac{2}{\theta_к}\int_0^{\theta_k} u(R, \theta)\sin\lambda n\theta d\theta. \tag{4}$$

Разбиение границы на участки зависит от разбиения внутренней области на треугольники и поэтому необязательно узлы на дуге окружности являются равноотстоящими. Если к границе примыкают k треугольников, то (4) можно записать в виде;

$$f_n = \frac{2}{\theta_k}\sum_{i=1}^{k}\int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i}\left(\gamma_{1i} + \gamma_{2i}R\cos\theta + \gamma_{3i}R\sin\theta\right)\sin\lambda n\theta d\theta = \sum_{i=0}^{k}\left(P_{in}u_i - D_{in}^N u_i^N\right), \tag{5}$$

где $P_{in} = A_{in} + B_{in}$;

$$2\Delta_{i+1}A_{in} = \begin{cases} a_i G_{1(i+1)n} + b_i G_{2(i+1)n} + c_i G_{3(i+1)n}; & i=0,1,\ldots,k-1 \\ 0; & i=k; \end{cases}$$

$$2\Delta_i B_{in} = \begin{cases} a_i^* G_{1.n} + b_i^* G_{2in} + c_i^* G_{3in}; & i=1,2,\ldots,k \\ 0, & i=0; \end{cases}$$

$$2\Delta_i D_{in}^N = \begin{cases} a_i^N G_{1in} + b_i^N G_{2in} + c_i^N G_{3in}; & i=1,2,\ldots,k; \\ 0; & i=0; \end{cases}$$

$$\frac{\theta_k}{2}G_{1in} = \frac{-\cos\lambda n\theta_i + \cos\lambda n\theta_{i-1}}{\lambda n};$$

$$\frac{\theta_k}{2}G_{2in} = \begin{cases} \dfrac{-\cos(\lambda n+1)\theta_i + \cos(\lambda n+1)\theta_{i-1}}{2(\lambda n+1)} + \\ + \dfrac{-\cos(\lambda n-1)\theta_i + \cos(\lambda n-1)\theta_{i-1}}{2(\lambda n-1)}; & \lambda n \neq 1; \\ 0{,}25(-\cos 2\theta_i + \cos 2\theta_{i-1}); & \lambda n = 1; \end{cases}$$

$$\frac{\theta_k}{2}G_{3in} = \begin{cases} \dfrac{\sin(\lambda n-1)\theta_i - \sin(\lambda n-1)\theta_{i-1}}{2(\lambda n-1)} - \\ - \dfrac{\sin(\lambda n+1)\theta_i - \sin(\lambda n+1)\theta_{i-1}}{2(\lambda n+1)}; & \lambda n \neq 1; \\ 0{,}5(\theta_i - \theta_{i-1}) - 0{,}25(\sin 2\theta_i - \sin 2\theta_{i-1}); & \lambda n = 1. \end{cases}$$

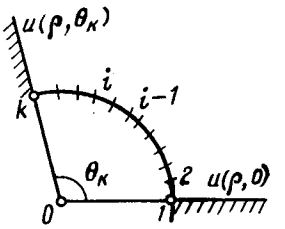
Тогда

$$u(\rho, \theta) = \sum_{i=0}^{k}\left(u_i\alpha_i + u_i^N\alpha_i^N\right); \tag{6}$$

где

$$\alpha_i = \alpha_i(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{in}t^{\lambda n}\sin\lambda n\theta; \tag{7}$$

$$\alpha_i^N = \alpha_i^N(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{in}^N t^{\lambda n}\sin\lambda n\theta. \tag{8}$$



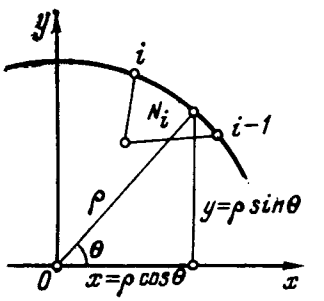


Рис. 1. Область задания — сектор

Рис. 2. Треугольный элемент N_i, примыкающий к дуге граничной линии с ВКЭ, в декартовой системе координат, совмещенной с полярной

[1] ВКЭ — часть заданной области, в которой решение задачи Дирихле получено в аналитической форме, хотя термин конечный не совсем удачный, так как область может быть и бесконечной.

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

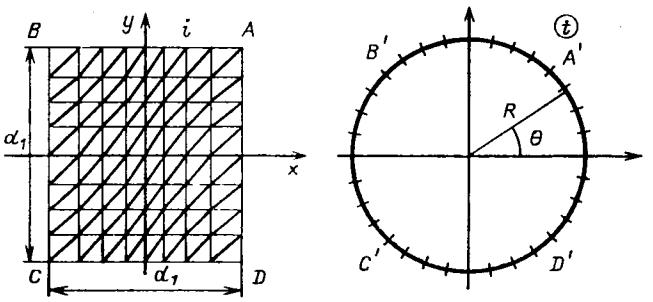


Рис. 3. Соответствие узлов разбиения границы при конформном отображении внешней области прямоугольника на внешнюю область круга

Интеграл Дирихле для ВКЭ имеет вид

$$\chi^e = \int_R^\infty \int_0^{\theta_k} \left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2\right] d\theta d\rho = \frac{\pi}{2}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} \times$$

$$\times \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} aP_{in}P_{jn}\right) u_i u_j + \left(\sum_{n=1}^{\infty} nD_{in}^N P_{jn}\right) u_i^N u_j + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{n=1}^{\infty} nP_{in}D_{jn}^N\right) u_i u_j^N + \left(\sum_{n=1}^{\infty} nD_{in}^N D_{jn}^N\right) u_i^N u_j^N\right]. \quad (9)$$

Коэффициенты в круглых скобках вычисляются для заданного разбиения границы отдельно от программы расчета поля.

Интеграл Дирихле для треугольников, примыкающих к границе,

$$\chi_i^N = \iint_{S_i^N} \left(\gamma_{2i}^2 + \gamma_{3i}^2\right) dxdy = \left(\gamma_{2i}^2 + \gamma_{3i}^2\right) S_i^N,$$

где S_i^N — площадь треугольника.

Полный функционал

$$\chi = \chi^e + \sum_{i=1}^{k} \chi_i^N + \sum_{j=1}^{m} \chi_j^N,$$

где m — число треугольников, которые не примыкают к границе ВКЭ.

Итак, решение задачи, предложенное здесь, отличается от того же решения в [1] тем, что в (4) значение $u(R, \theta)$ представлено в виде (3). Согласование внешнего и внутренних элементов выполняется автоматически, и значительно упрощаются последующие преобразования. Погрешность решения при этом не увеличивается. Аналогичные выражения получаются при решении любой из рассмотренных в [1 и 4] задач.

В случае, когда граница ВКЭ выбрана в виде прямоугольника (рис. 3), можно использовать конформное отображение, так как при конформном преобразовании области значение интеграла Дирихле не изменяется [5]. Воспользуемся приближенной формулой конформного преобразования внешности круга на внешность прямоугольника [6]. Так, для случая квадратного контура границы отображение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x &= C\left(\rho\cos\theta - \frac{\rho^{-3}}{6}\cos 3\theta + \frac{\rho^{-7}}{56}\cos 7\theta - \ldots\right); \\ y &= C\left(\rho\sin\theta + \frac{\rho^{-3}}{6}\sin 3\theta - \frac{\rho^{-7}}{56}\sin 7\theta + \ldots\right), \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

где C определяется из условия $x = d_1/2$ при $\theta = 0$ и $\rho = R$.

В [6] определены оценки точности отображения при ограничении рядов (10). Можно ограничиться тремя первыми членами, хотя выбор большого числа слагаемых не вызывает принципиальных затруднений. Предположим $\theta_k = 2\pi$. Прямоугольник разбивается на элементы (рис. 3). На границе имеем $k+1$ узел. Внутри треугольников решение кусочно-линейное (1). Из (10) определяется соответствие между координатами узлов на прямоугольнике x_i, y_i и на окружности θ_i. Если заменить в (1) x и y по формулам преобразования (10), то будет выполняться согласование функции u внутри треугольников, примыкающих к прямоугольной границе, и внешнего элемента на отображенной плоскости t. Дальнейшие рассуждения ничем не отличаются от предыдущих.

Базисные функции (7), (8) и интеграл Дирихле (9) будут иметь тот же вид с точностью до коэффициентов, при вычислении которых, как и в (5), все интегралы можно взять. Итак, при выбранном соответствии между функцией $u(x, y)$ на границе прямоугольника и $u(R, \theta)$ на окружности интеграл Дирихле имеет одно и то же значение и для внешности круга, и для внешности прямоугольника. Добавляя к нему интеграл Дирихле по внутренним треугольникам, получаем функционал вариационной задачи. Согласование внешнего и внутренних элементов очевидно.

Неизменность интеграла Дирихле при конформном отображении можно использовать для решения задачи с угловыми электродами [4]. При отображении внешности сектора на его внутреннюю область [6] на границе точки не смещаются и выражение (9) остается без изменений.

Вариационная постановка задачи может быть осуществлена проще — без введения такого понятия, как внешний элемент. Так как (3) уже является решением для внешней области, то достаточно записать функционал для внутренней задачи [2]:

$$\chi = \frac{1}{2}\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dxdy - \int_l u\frac{\partial u}{\partial n}\, dl, \quad (11)$$

где S — внутренняя область, разбитая на треугольники; l — граница этой области.

Значения $u(R, \theta)$ и $\frac{\partial u}{\partial \rho}(R, \theta)$ определяются выражением (3). Например, при $\theta_k = 2\pi$ (l — полная окружность) и $\rho = R$

$$-\int_l u\frac{\partial u}{\partial n}\, dl = -\int_0^{2\pi} u(R, \theta)\frac{\partial u}{\partial \rho}(R, \theta)\, Rd\theta = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} nf_n^2. \quad (12)$$

После подстановки в (12) значения f_n из (5) получается выражение (9).

Решение задач численными методами связано с известными трудностями при оценке погрешности [2]. В данной статье не ставилась задача получения таких оценок. Тем не менее, отметим возможность определения критерия погрешности, вносимой в алгоритм расчета внешним элементом. Для ВКЭ в рассмотренном выше примере решение представляет собой бесконечный ряд (3), который при численной реализации должен быть ограничен. Для фиксированного радиуса выражение (3) представляет собой разложение функции в ряд Фурье. Очевидно, чем больше ρ, тем быстрее сходимость этого ряда. Следовательно, наибольшая погрешность решения определяется погрешностью разложения функции при $\rho = R$, т. е. на границе области. На каждой итерации решения системы уравнений МКЭ по (2) определяется функция $u(R, \theta)$. Критерием оценки погрешности может служить норма разности $\delta_m = \left\| u(R, \theta) - \sum_{n=1}^{m} f_n \sin \lambda n\theta \right\|$. Из этого условия определяется количество членов ряда в решении (3) на каждой итерации.

Выводы. 1. Выбрано такое согласование ВКЭ с элементами внутренней области, которое значительно упрощает постановку и алгоритм решения вариационной задачи при расчете плоскопараллельных потенциальных полей МКЭ, а также позволяет вычислить коэффициенты системы уравнений МКЭ, не прибегая к численному интегрированию, что является основным недостатком предложенных алгоритмов подобных задач в [1 и 4]. Замена численного интегрирования аналитическими выражениями не только упрощает алгоритм и сокращает время решения задачи на ЭВМ, но и повышает точность расчетов.

2. Решение, полученное для задач с круглыми границами, используется при выборе границы в виде прямоугольника. При составлении алгоритмов для ЭВМ прямоугольная граница ВКЭ позволяет упростить алгоритм решения.

3. Введен критерий оценки погрешности, вносимый в расчеты внешним элементом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бахвалов Ю. А., Бондаренко А. И.** Решение внешних краевых задач при расчете электромагнитных полей методом конечных элементов. — Электромеханика, 1983, № 6, с. 5—10

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

2. **Норри Д., Фриз Ж. де.** Введение в метод конечных элементов. — М.: Мир, 1981. — 301 с.
3. **Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.** Сборник задач по математической физике. — М.: Наука, 1972.— 687 с.
4. **Бахвалов Ю. А., Бондаренко А. И.** Учет особенностей окрестности угловых точек при расчете электростатических полей методом конечных элементов. — Электромеханика, 1982, № 10, с. 1139—1146.
5. **Курант Р.** Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. — М.: Иностранная литература, 1953. — 310 с.
6. **Методы** расчета электростатических полей/Н. Н. Миролюбов, М. В. Костенко, М. Л. Лейнштейн, Н. Н. Тиходеев.— М.: Высшая школа, 1963.—415 с.

[06.06.84]

УДК 537.212.001.24:621.315.61

Расчет электрических полей в несовершенных диэлектриках

ФИЛИППОВ А. А., канд. техн. наук

Москва

Одним из этапов разработки высоковольтных аппаратов является расчет электрического поля и оптимизация на его основе элементов конструкции. Широкое распространение вычислительной техники и развитие численных методов сделали такие расчеты достаточно оперативными и экономичными.

Для ряда электротехнических материалов удельная объемная проводимость $\gamma_V=(10^{-10}\div 10^{-8})$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$. В таких средах при промышленной частоте приложенного напряжения ток смещения будет близок к току проводимости. Эти среды получили название несовершенные. Учет несовершенства среды может потребоваться при расчете поля как в рабочем режиме, так и при различных переходных процессах. Из технических задач, требующих проведения таких расчетов, следует выделить расчет полей делителей напряжения, ограничителей перенапряжений и т. п.

Ни один из существующих численных методов расчета электрических полей в своей канонической форме не дает возможности одновременно учитывать ток смещения и ток проводимости. В настоящей статье предложена модификация метода интегральных уравнений [1], позволяющая рассчитывать поля в несовершенных средах. Использование этого метода представляется более эффективным, чем метод эквивалентных зарядов [2].

Метод интегральных уравнений основан на идее Г. А. Гринберга [3] о замене тел, образующих поле, системой зарядов, распределенных по поверхности. При этом среда заменяется однородной, и ставится задача отыскания простых слоев зарядов, удовлетворяющих граничным условиям. Выполнение граничных условий обеспечивается формированием интегральных уравнений. Рассмотрим различные типы граничных условий и их интегральные представления.

Очевидно, что на границе раздела двух любых сред должно выполняться условие непрерывности потенциала. Выполнение этого условия обеспечивается применением простого слоя зарядов, при переходе через который потенциал не меняется. На поверхности проводников должно выполняться граничное условие первого рода, т. е. условие эквипотенциальности

$$V\big|_{S_i}=V_i, \tag{1}$$

где S_i — поверхность i-го проводника; V_i — его потенциал.

После замены поверхностей тел, образующих поле, простыми слоями зарядов условие (1) примет вид интегрального уравнения Фредгольма первого рода:

$$\sum_j \int_{S_j} \frac{\sigma(s)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{Ms}}\,ds + V_{\text{вш}\,M}=V_i, \tag{2}$$

где $\sigma(s)$ — искомое распределение поверхностной плотности зарядов по j-му телу; r_{Ms} — расстояние от точки M на i-м теле до текущей точки с поверхностной плотностью зарядов $\sigma(s)$; $V_{\text{вш}\,M}$ — потенциал внешнего по отношению к данной системе тел поля в точке M.

На границе раздела двух идеальных диэлектриков должно выполняться условие сопряжения, т. е. условие непрерывности нормальной составляющей вектора электрического смещения;

$$-\varepsilon_1\frac{\partial V_1}{\partial n}\bigg|_{S_j}=-\varepsilon_2\frac{\partial V_2}{\partial n}\bigg|_{S_j}, \tag{3}$$

где ε_1 и ε_2 — диэлектрические проницаемости сред по разные стороны границы S_j; V_1 и V_2 — потенциалы в этих средах; n — внешняя нормаль к границе (для определенности направим ее из среды с проницаемостью ε_1 в среду с проницаемостью ε_2).

Переходя к интегральному представлению, после элементарных преобразований получаем уравнение Фредгольма второго рода [3]:

$$\frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0}-2\lambda_\infty\sum_j\int_{S_j}\frac{\sigma(s)}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{Ms}}\right)ds=-2\lambda_\infty\frac{dV_{\text{вш}M}}{\partial n}, \tag{4}$$

где $\lambda_\infty=\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$.

Расчет поля методом интегральных уравнений сводится, таким образом, к решению системы уравнений вида (2) и (4). Для приближенного решения интегральных уравнений наиболее часто используется метод простой алгебраизации [1]. Он заключается в формировании системы линейных алгебраических уравнений и последующем ее решении. В силу известной аналогии между токами смещения и токами проводимости метод интегральных уравнений применим и для расчетов стационарных электрических полей. На границе раздела сред в этом случае должно выполняться условие непрерывности нормальной составляющей плотности тока проводимости:

$$-\gamma_1\frac{\partial V_1}{\partial n}\bigg|_{S_j}=-\gamma_2\frac{\partial V_2}{\partial n}\bigg|_{S_j}, \tag{5}$$

где γ_1 и γ_2 — удельные объемные проводимости сред.

Таким образом, при расчете стационарных электрических полей параметр λ_0 в (4) станет равен:

$$\lambda_0=\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}. \tag{6}$$

В остальном весь математический аппарат останется без изменений, что и определяет возможность применения для расчетов по постоянному току тех же методик и программ, что и для расчетов поля в идеальных диэлектриках.

В несовершенном диэлектрике при переменном напряжении необходим одновременный учет как тока смещения, так и тока проводимости. Следовательно, при расчете полей в несовершенных средах необходимо оперировать с комплексными значениями потенциала, напряженности поля, плотности зарядов.

Вектор плотности полного тока равен сумме плотностей тока проводимости и смещения в несовершенной среде:

$$\dot{\vec{J}}=\dot{\vec{J}}_{\text{п}}+\dot{\vec{J}}_{\text{см}}=\gamma\dot{\vec{E}}+\varepsilon_0\varepsilon'\frac{\partial\dot{\vec{E}}}{\partial t}=\gamma\dot{\vec{E}}+j\omega\varepsilon_0\varepsilon'\dot{\vec{E}}. \tag{7}$$

В электротехнике при исследовании электромагнитных процессов в диэлектриках, в которых происходят потери энергии при изменении поляризации и тока проводимости, вводится понятие комплексной диэлектрической проницаемости [4]:

$$\dot{\varepsilon}=\varepsilon'-j\varepsilon''-j\frac{\gamma}{\omega\varepsilon_0}.$$

При отсутствии потерь на поляризацию

$$\dot{\varepsilon}=\varepsilon'-j\frac{\gamma}{\omega\varepsilon_0}. \tag{8}$$

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Тогда плотность общего тока может быть записана как

$$\vec{J} = (\gamma + j\omega\varepsilon_0\varepsilon')\vec{E} = j\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}\vec{E}. \quad (9)$$

При переходе к расчету поля в несовершенных средах граничное условие первого рода (1) и его интегральное представление (2) сохраняется с точностью до появления комплексных величин потенциала и плотности зарядов. Граничным условием на поверхности раздела двух сред, из которых хотя бы одна несовершенна при заданной частоте приложенного напряжения, будет непрерывность нормальной составляющей вектора полного тока:

$$-j\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}_1\frac{\partial\dot{V}_1}{\partial n}\Big|_{S_j} = -j\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}_2\frac{\partial\dot{V}_2}{\partial n}\Big|_{S_j}. \quad (10)$$

Аналогичность выражений (3) и (10) показывает, что переход к расчету поля в несовершенных средах приведет к изменению лишь параметра $\dot{\lambda}$ в интегральном уравнении второго рода (4) и появлению комплексных величин. Теперь указанный параметр

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2} = \frac{(\gamma_1 - \gamma_2) + j\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1' - \varepsilon_2')}{(\gamma_1 + \gamma_2) + j\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1' + \varepsilon_2')}. \quad (11)$$

В остальном методика расчета сохраняется.

Переход к комплексным величинам при решении интегрального уравнения приводит к практическому удвоению требуемого объема памяти используемой ЭВМ. Как правило, при этом приходится использовать внешнюю память, что значительно увеличивает время счета. В связи с этим необходимы критерии, позволяющие определить, следует ли при данной частоте учитывать несовершенство среды.

Для задания таких критериев рассмотрим исходное интегральное уравнение второго рода (4). При изменении частоты в нем будет меняться лишь параметр $\dot{\lambda}$, задаваемый выражением (11). Обозначим предельные значения этого параметра λ_0 и λ_∞ — при постоянном напряжении и без учета токов проводимости соответственно [см. (4) и (6)]. Для оценок предположим, что изменение решения при изменении частоты того же порядка, что и изменение параметра $\dot{\lambda}$. Анализ исходного интегрального уравнения второго рода и получающейся в процессе его решения системы линейных алгебраических уравнений показывает, что при малых изменениях $\dot{\lambda}$ такая гипотеза вполне приемлима. С другой стороны, она позволяет достаточно точно определить диапазон частот, в котором необходим одновременный учет как тока проводимости, так и тока смещения. В самом деле, достаточно рассмотреть поведение параметра $\dot{\lambda}$ при изменении частоты и определить частоты ω_0 и ω_∞, при которых он будет отличаться от своих граничных значений на заданную величину δ (например, 1 %). Учитывая комплексный характер $\dot{\lambda}$, эти изменения будем оценивать по модулю.

Перепишем выражение (11) в следующем виде:

$$\dot{\lambda} = \frac{\lambda_0}{1 + j\lambda_0\dfrac{\omega}{\omega_1}} + \frac{\lambda_\infty}{1 - j\lambda_\infty\dfrac{\omega_2}{\omega}}, \quad (12)$$

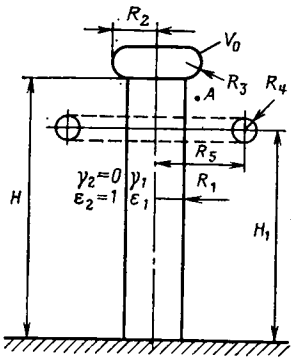


Рис. 1. Расчетные модели с несовершенной средой: $H/R_1=10$; $R_2/R_1=1{,}5$; $R_3/R_1=0{,}5$; $H_1/R_1=8$; $R_4/R_1=0{,}25$; $R_5/R_1=3$; $\varepsilon_1=4$; $\gamma_1=3{,}5\cdot10^{-11}$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$

где $\omega_1 = \dfrac{\gamma_1 - \gamma_2}{\varepsilon_0(\varepsilon_1' + \varepsilon_2')}$; $\omega_2 = \dfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{\varepsilon_0(\varepsilon_1' - \varepsilon_2')}$.

Такая запись позволяет при малых частотах представить $\dot{\lambda}$ в виде ряда

$$\dot{\lambda} \approx \lambda_0 + j\omega\left\{\frac{1}{\omega_2} - \frac{\lambda_0^2}{\omega_1}\right\} + \cdots \quad (13)$$

и по условию

$$\left|\frac{\dot{\lambda} - \lambda_0}{\lambda_0}\right| = \delta \quad (14)$$

оценить нижнюю граничную частоту

$$\omega_0 = \frac{\delta\lambda_0}{\left|\dfrac{1}{\omega_2} - \dfrac{\lambda_0^2}{\omega_1}\right|}. \quad (15)$$

Аналогичное разложение при высоких частотах

$$\dot{\lambda} \approx \lambda_\infty + j\frac{1}{\omega}\{\lambda_\infty^2\omega_2 - \omega_1\} + \ldots \quad (16)$$

дает возможность по условию

$$\left|\frac{\dot{\lambda} - \lambda_\infty}{\lambda_\infty}\right| = \delta \quad (17)$$

определить оценку верхней граничной частоты:

$$\omega_\infty = \frac{|\omega_2\lambda_\infty^2 - \omega_1|}{\delta\lambda_\infty}. \quad (1$$

Таким образом, имеется возможность до проведения расчетов определить, какими методиками следует пользоваться в каждом конкретном случае. Для этого, задавшись оценкой допустимой погрешности, необходимо для каждой границы раздела сред определить частоты ω_0 и ω_∞. Далее сравниваем их с частотой приложенного напряжения ω. Если хотя бы для одной границы она окажется в пределах $\omega_0<\omega<\omega_\infty$, расчет следует проводить с учетом несовершенства среды. Возможен вариант, когда при расчете поля для одной границы окажется; $\omega<\omega_0$, а для другой $\omega_\infty<\omega$. Формально в этом случае для одной границы можно задать условие (5), а для второй — (3). Однако и в этом случае расчет следует производить в комплексах, так как заряды на этих двух границах будут находиться в разных фазах.

Принципиально возможен также случай, когда для всех границ $\lambda_0=\lambda_\infty$. При этом параметр $\dot{\lambda}$ будет действительной величиной, не зависящей от частоты. Следовательно, не будет зависеть от частоты и решение.

В качестве примера оценим при каких частотах фарфор в воздухе будет несовершенным диэлектриком. Примем $\gamma_\Phi=10^{-12}$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$, $\varepsilon_\Phi=6$.

Из (15) и (18) для $\delta=0{,}01$ следует $\omega_0=10^{-3}$ с$^{-1}$, $\omega_\infty=1$ с$^{-1}$. При меньших значениях проводимости эти частоты снижаются. Таким образом, при промышленной частоте приложенного напряжения $\omega=314$ с$^{-1}$ проводимость фарфора учитывать не следует. Можно также оценить вносимую таким упрощением погрешность. По разложению (16) легко определить, что при этой частоте параметр $\dot{\lambda}$ будет отличаться от своего предельного значения λ_∞ приблизительно на 0,03 %. В соответствии с принятой ранее гипотезой такова будет оценка погрешности решения.

Предлагаемая методика была реализована на ЭВМ БЭСМ-6 в программе «СРЕДА», разработанной на базе программы «АКСИАЛ» [1]. Основное отличие новой программы заключается в использовании комплексных значений электрических величин.

Для иллюстрации предлагаемой методики были проведены расчеты поля двух моделей. В качестве первой модели была взята цилиндрическая колонна с отношением высоты к радиусу $H/R=10$ и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon'_1=4$, расположенная на заземленной плоскости. Проводимость среды в колонне γ_1 была принята равной $3{,}5\cdot10^{-11}$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$, с тем, чтобы критическая частота $\omega_к=\gamma_1/\varepsilon_0\varepsilon_1=1$ с$^{-1}$. Внешняя среда — идеальный газ. В верхней части колонны располагался экран, потенциал которого принимался единичным (рис. 1). Вторая модель отличалась от первой наличием экранного кольца (на рис. 1 изображено пунктиром), имеющего также единичный потенциал

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

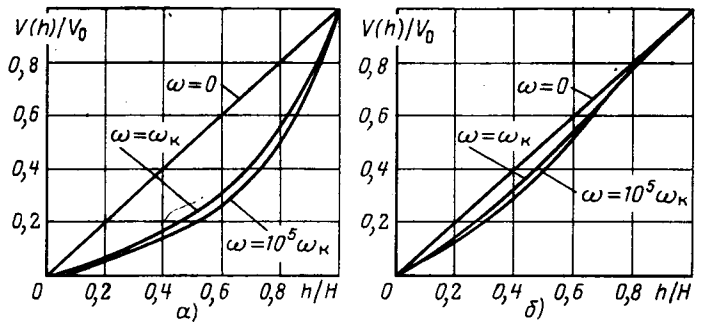


Рис. 2. Распределение потенциала по оси колонны в первой (*а*) и второй (*б*) расчетных моделях

По результатам расчета поля для первой модели было построено распределение потенциала по оси колонны для постоянного тока, критической частоты приложенного напряжения и частоты много больше критической (рис. 2, *а*). Как и следовало ожидать, при постоянном напряжении потенциал распределился по высоте колонны равномерно, а на повышенных частотах распределение существенно отличается от равномерного. Изменение частоты от нулевой до $\omega=10\ \omega_к$ привело в этой модели к изменению максимальной напряженности в несовершенной среде более чем в 3 раза. Это показывает, насколько важно в таких конструкциях производить расчеты поля с учетом как проницаемости, так и проводимости.

При повышенной частоте в первой расчетной модели наиболее нагруженной оказалась верхняя часть колонны. Такое распределение потенциала определяется соответствующими частичными емкостями элементов модели. Для улучшения емкостного распределения потенциала в аналогичных конструкциях (омические делители, ограничители перенапряжений и т. п.) применяется установка дополнительных экранных колец. Для оценки влияния таких колец на характеристики поля были проведены расчеты для второй модели, имеющей кольцо, расположенное ниже верхнего экрана, находящееся под тем же потенциалом. Распределение потенциала по оси колонны в этом случае приведено на рис. 2, *б* для тех же частот, что и в первой модели. Как и следовало ожидать, наличие кольца не повлияло на распределение потенциала при постоянном напряжении. При повышенной же частоте максимальная напряженность снизилась по сравнению с первой моделью более чем в 2 раза и превышает среднюю менее чем на 40 %.

Наиболее наглядно влияние дополнительного экранного кольца видно на приведенных на рис. 3 частотных характеристиках обеих моделей. Снижение максимальной напряженности на повышенных частотах за счет использования дополнительного экрана привело к выравниванию частотной характеристики. Это важно для различных делителей напряжения, так как дает принципиальную возможность исключить зависимость распределения потенциала от частоты даже при $\lambda_0 \neq \lambda_\infty$.

Оценки частотных границ несовершенства среды для рассчитанных моделей по (15) и (18) дали при $\delta=0{,}01$ $\omega_0=0{,}02$ с$^{-1}$, $\omega_\infty=53$ с$^{-1}$, что хорошо согласуется с приведенными характеристиками и подтверждает правомерность таких оценок.

Из других полученных при расчетах модельных полей результатов интересно отметить следующий факт. Если в произвольной точке представить напряженность поля в виде суммы радиальной и аксиальной составляющих, эти составляющие могут при несовершестве среды иметь разные фазы. В частности, при расчете поля первой модели в точке *A*, отмеченной на рис. 1. были получены следующие значения этих составляющих:

$$\dot{E}_r = 0{,}130 \sin(\omega t - 27{,}71°);$$

$$\dot{E}_z = 0{,}133 \sin(\omega t + 179°).$$

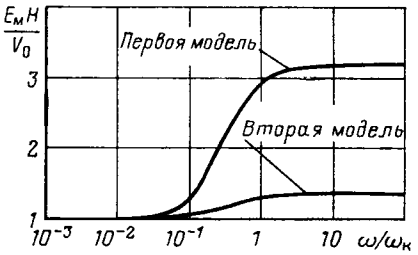


Рис. 3. Зависимость максимальной напряженности поля по оси колонны от частоты приложенного напряжения

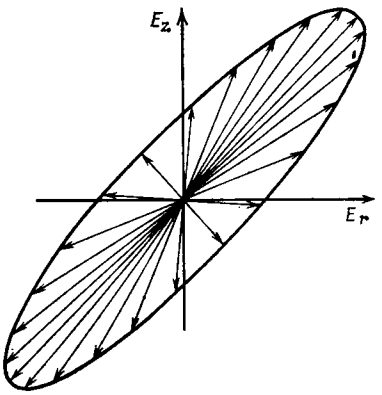


Рис. 4. Эпюра изменения во времени вектора напряженности электрического поля в точке *A* (см. рис. 1) в первой расчетной модели

Такая разность фаз приводит к тому, что суммарная напряженность будет во времени изменять не только свое значение, но и направление, причем модуль ее не будет равен нулю. Таким образом, получаем вращающееся электрическое поле при одном его первичном источнике. Эпюра изменения во времени вектора суммарной напряженности в точке *A* приведена на рис. 4. Возможность существования вращающегося электрического поля при одной фазе приложенного напряжения объясняется наличием на поверхности несовершенной среды одновременно свободного и связанного зарядов, находящихся в разных фазах. Это явление имеет место только при частотах, близких к критической.

Таким образом, предложенная методика дает возможность рассчитывать поле при одновременном учете токов проводимости и токов проницаемости. Она позволяет также определять частотные характеристики высоковольтных аппаратов. Кроме того, ее же можно использовать при расчетах различных переходных процессов, если разложить приложенное напряжение в ряд Фурье и провести расчет отдельно для каждого члена ряда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Колечицкий Е. С.** Расчет электрических полей устройств высокого напряжения. — М.: Энергоатомиздат, 1983.

2. **Takashima T., Nakae T., Ishibashi R.** Calculation of complex fields in conducting media. — IEEE Trans., 1980, № 81, vol. EI-15.

3. **Гринберг Г. А.** Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. — М.: Изд-во АН СССР, 1948.

4. **Калантаров П. Л., Нейман Л. Р.** Теоретические основы электротехники. — Л.: Госэнергоиздат, 1951.

[20.11.84]

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

УДК 551.594.21:551.507.352

Определение поражаемости объекта молнией

ЛАРИОНОВ В. П., КОКУРКИН М. П., МОСОЛОВ А. Е.,
ПРОХОРОВ Е. Н., СЕРГИЕВСКАЯ И. М.

Московский энергетический институт

При разработке молниезащиты самолетов исходными данными являются зоны прямых ударов молнии и зоны смещения канала разряда по поверхности самолета [1], которые различаются тяжестью воздействия молнии на конструктивные элементы самолета. При этом для создания оптимальной защиты необходимо знать вероятности поражения отдельных участков поверхности самолета [2]. Определение точек «входа» и «выхода» молнии позволяет также установить наиболее вероятные пути прохождения тока молнии по самолету, что существенно для оценки электромагнитного влияния на его бортовые системы [3].

Как известно, внесение металлического тела в электрическое поле приводит к значительному увеличению напряженности поля на его поверхности по сравнению с напряженностью поля в этой области без металлического тела. Аналогичная картина характерна и для самолета, когда он оказывается в электрическом поле между грозовым облаком (или лидером молнии) и землей. В этом случае вследствие значительного повышения напряженности поля с элементов самолета, имеющих большую кривизну поверхности, развиваются электрические разряды. Они-то и определяют возможные точки поражения самолета молнией (т. е. точки «входа» и «выхода» молнии).

Исследование поражаемости отдельных частей самолета производится обычно путем трудоемких лабораторных экспериментов на маломасштабных моделях с использованием в качестве аналога молнии искровых разрядов, создаваемых с помощью генератора импульсных напряжений. Значительное сокращение затрат труда и времени на проведение экспериментов может быть достигнуто при использовании высокого напряжения повышенной частоты (10—100 кГц), подаваемого на модель самолета. Коронный разряд при указанных частотах можно наблюдать визуально даже в незатемненном помещении. Напряжение плавно повышается, при этом визуально наблюдаются зоны коронирования и фиксируются значения напряжений, при которых корона последовательно появляется на различных элементах модели. При значении напряжения, в 1,5—2 раза превышающем напряжение начала короны на первом коронирующем элементе модели, определяются практически все зоны, подверженные поражениям молнией, и эксперимент завершается.

Предполагая, что вероятность поражения каких-либо элементов модели обратно пропорциональна напряжению, при котором начинается их коронирование, и прямо пропорциональна числу таких элементов, получаем

$$P_k = \frac{a_k}{U_k} \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{U_i},$$

где P_k — вероятность поражения; a_k — число элементов модели с напряжением начала короны U_k; $i=1, 2, 3, \ldots, k, \ldots, n$ — порядковый номер элементов с напряжением начала короны U_i; a_i — число элементов с напряжением начала короны U_i.

Вероятности поражения элементов, относящиеся к отдельным частям модели самолета, могут быть суммированы. В таблице приведены распределения вероятностей поражения частей модели, полученные высокочастотным методом и по обычной методике с использованием искрового разряда. В последнем случае модель самолета с наибольшим линейным размером 30 см помещалась в середине воздушного промежутка стержень — плоскость длиной 150 см. На стержень подавались импульсы положительной полярности 200/2000 мкс. Равновероятность положения модели по отношению к высоковольтному электроду обеспечивалась поворотом модели в трех плоскостях через каждые 30°.

Часть модели самолета	Вероятность поражения, %, определенная		
	высокочастотным методом	искровым методом	по литературным данным (усредненные значения)
Носовой обтекатель	22	30	33
Фюзеляж	4	3	9,3
Законцовки и кромки крыла	34	32,5	32
Киль	18	16,5	11,3
Горизонтальный стабилизатор	22	18	14,4

Испытания высокочастотным и искровым методами показали, что при общем удовлетворительном совпадении результатов, первый метод дает более высокую вероятность поражения наиболее заостренных частей модели — киля, стабилизатора, законцовок и кромок крыла — и более низкую, чем искровой метод — частей, имеющих большие радиусы кривизны (обтекатель).

Данные, получаемые с помощью маломасштабных моделей, являются в значительной мере условными, поскольку схема проведения опытов далека от действительности, хотя бы потому, что из-за малого масштаба модель имеет гораздо больше, чем самолет, элементов с высокой кривизной поверхности и соответственно с повышенной вероятностью возникновения с них электрического разряда.

Судить о достоинствах той или иной методики определения вероятностного распределения точек удара молнии на поверхности самолета можно было бы только на основании сопоставления лабораторных данных с опытом эксплуатации. Однако достоверные эксплуатационные сведения отсутствуют. В таблице приведены усредненные вероятности поражения частей самолетов современных форм по опубликованным данным эксплуатации и лабораторных опытов [2]. Они близки к результатам, полученным искровыми и высокочастотным методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Перемещение** канала разряда по поверхности движущегося электрода/М. А. Аронов, М. П. Кокуркин, В. П. Ларионов, Т. Н. Тарасова, И. А. Тудоран — Электричество, 1984, № 6, с. 10—14.

2. **Агапов В. Г., Ларионов В. П., Сергиевская И. М.** Оценка надежности и условия испытаний молниезащитных устройств самолета. — Электричество, 1979, № 7, с. 72, 73.

3. **Бабинов М. Б., Базелян Э. М.** Перенапряжения во внутренних цепях объекта при распространении тока молнии по его обшивке. — Электричество, 1983, № 6, с. 44—46.

[28.12.84]

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Андроник Гевондович Иосифьян

(К 80-летию со дня рождения)

21 июля 1985 г. исполняется 80 лет Герою Социалистического Труда, выдающемуся советскому ученому, крупнейшему специалисту и организатору электротехнической науки и промышленности, заместителю директора ВНИИЭМ, первому вице-президенту Академии наук Армянской ССР, доктору технических наук, профессору Андронику Гевондовичу Иосифьяну.

После окончания в 1930 г. Азербайджанского политехнического института А. Г. Иосифьян работал на кафедре теоретической электротехники, а в 1931 г. был направлен во Всесоюзный электротехнический институт им. В. И. Ленина.

Широк и разнообразен круг научных вопросов, в решении которых Андронику Гевандовичу принадлежит заметная роль. В 1931—1935 гг. им разработана теория и конструкция линейного двигателя переменного тока. Действующий образец двигателя на основе этих принципов, созданный впервые в мировой технике, экспонировался на Всемирной выставке в Нью-Йорке в 1939 г. В эти же годы А. Г. Иосифьяном предложена конструкция синхронной машины с внешнезамкнутым магнитным потоком — бесконтактного сельсина, им же разработаны теоретические основы синхронно-следящих систем.

А. Г. Иосифьяну принадлежат новаторские работы не только по электромашинному следящему приводу, но и по приводу с использованием ионных и электронных преобразователей. Выполненные им обстоятельные исследования физики процессов, разработка теории и методов расчета позволили создать различные конструктивные формы электрических машин, в частности, бесконтактные торцевые синхронные машины, явившиеся результатом дальнейшего развития машин с внешнезамкнутым потоком.

Во время Великой Отечественной войны А. Г. Иосифьян участвует в разработке электротехнических изделий для армии и партизанских отрядов и в решении перспективных научных задач. Еще до окончания войны под его руководством были начаты работы по созданию электрических машин для народного хозяйства — электродвигателей общепромышленного применения, электрогенераторов для сельских электростанций, бензо-электрических агрегатов, сыгравших исключительно важную роль при восстановлении народного хозяйства в освобожденных от врага районах страны. Андроник Гевондович является одним из создателей двухкаскадного электромашинного усилителя — амплидина, нашедшего наряду с сельсинно-следящими системами широкое применение в системах автоматизированного электропривода во многих отраслях промышленности.

Разработанные под руководством А. Г. Иосифьяна единые общесоюзные серии асинхронных электродвигателей, синхронных генераторов, машин постоянного тока, коммутационной аппаратуры, передвижных источников питания электроустановок выпускаются на заводах отечественной электротехнической промышленности и используются во всех отраслях народного хозяйства страны.

Обширные исследования, проведенные под руководством и при непосредственном участии А. Г. Иосифьяна, способствовали формированию электромеханики как науки, ставшей необходимой спутницей многих важных направлений современного этапа научно-технического прогресса, и в первую очередь, атомной энергетики. И в настоящее время А. Г. Иосифьян продолжает интенсивную работу в области теоретических основ электромеханики.

В 1955—1960 гг. под научным руководством А. Г. Иосифьяна проведены широкие теоретические и экспериментальные исследования и разработан комплекс электрооборудования на повышенную частоту питания, сыгравший важную роль в улучшении характеристик многих технических устройств.

С начала 60-х годов А. Г. Иосифьян возглавляет научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы по созданию космических аппаратов метеорологического назнач ния, он — Главный конструктор м теорологических искусственных спу ников Земли серии «Метеор». Под е руководством проведены летные исп тания и сдана в постоянную эксплу тацию космическая метеорологическ система «Метеор», созданы более с вершенные космические аппараты «М теор — 2», «Метеор — Природа», ос ществлен проект «Интеркосмос Болгария 1300». Созданные для апп ратов «Метеор» и «Метеор — 2» элек ромеханические комплексы получи широкое применение в космическ технике.

Еще в начале 60-х годов А. Иосифьян сформулировал необход мость поставки для многих отрасл промышленности электрических маш в комплекте с системами управлен Эта концепция слияния в единую с стему силового электрооборудован и управляющей электроники успеш реализована в разработанных под е руководством системах электрод жения атомных ледоколов «Л. Брежнев» и «Сибирь», в автомати рованных электроприводах ряда п катных станов, в системах управлен и защиты ядерных реакторов атомн электростанций, в том числе постро ных при помощи СССР в ряде зарубе ных стран.

Андроник Гевондович — один первых энтузиастов автоматиза проектирования электротехнич изделий. Использование вычислите ных средств при проектировании его научным руководством един серий асинхронных электродвигате А2—АО2 и 4А дало основополагаю принципы создания системы автома зированного проектирования ас хронных двигателей (САПР—АД) других САПР, все шире внедряющи в практику конструирования.

Немаловажен вклад А. Г. Иосиф на в развитие международных на но-технических связей СССР. Под научным руководством создавал серия электродвигателей 4А совм ными усилиями специалистов СС ГДР и ЧССР. Он является науч руководителем с советской стор советско-болгарской программы мических исследований «Интер мос—Болгария 1300». В этих раб ярко и плодотворно проявились сущие Андронику Гевондовичу чества коммуниста — интернаци листа.

Многогранная деятельность А Иосифьяна характеризуется г дарственным подходом к постан и решению научных и производст ных задач органическим сочетан ее с партийной и общественной

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

:льностью. Он много раз избирался ıеном Куйбышевского и Бауман-ıого районных комитетов КПСС осквы, был делегатом XXII и XXIII ъездов КПСС, в настоящее время явля-ся депутатом Верховного Совета рмянской ССР.

Большую работу по развитию науки новой техники Андроник Гевондо-ıч выполнял, будучи в разные годы ıеном Государственного Комитета ССР по науке и технике, Госкомитета электротехнике, главным редактором урнала «Электротехника». Многие ды он активно участвует в работе ıеных советов ВНИИЭМ, ВЭИ им. енина, МЭИ, в настоящее время явля-ся председателем Научного Совета космической электротехнике, радио-хнике и электронике при Президиу-Академии наук СССР. А. Г. Иосифь-ı — основатель Всесоюзного научно-следовательского института электро-ханики (ВНИИЭМ) — одного из ве-щих научно-технических центров ектротехнической промышленности. инициативе Андроника Гевондо-ıча и при его непосредственном участии системе Минэлектротехпрома был здан ряд НИИ.

Во всех направлениях своей работы А. Г. Иосифьян уделяет большое внимание экономическому аспекту. Он внес огромный вклад в организацию ряда научно-исследовательских институтов и заводов Армении, в становление и развитие комплексной энергетики и электротехнической промышленности — ведущих отраслей промышленности республик. С 40-х годов активно занимается проблемами электрификации сельского хозяйства. В настоящее время в свете реализации Продовольственной программы в Армении по инициативе и под руководством А. Г. Иосифьяна создается экспериментальный мелиоративно-животноводческий комплекс с высокой эффективностью отдачи на базе комплексной электрификации технологических процессов, автоматизации их с использованием современной вычислительной техники, с применением новейших достижений сельскохозяйственных и биологических наук.

Много сил и энергии отдает Андроник Гевондович подготовке научных кадров, воспитанию молодежи. В числе его учеников и последователей видные советские ученые, доктора и кандидаты наук, организаторы науки и производства.

Основой успешной деятельности А. Г. Иосифьяна по столь обширному диапазону направлений являются энциклопедическая широта его научной эрудиции, талант исследователя, обладающего глубиной знаний, остротой и нестандартностью мышления теоретика в сочетании с удивительной интуицией экспериментатора, прекрасно владеющего математическим аппаратом. Ему в полной мере присущ дар научного предвидения, свойственный большому ученому. Комсомолец 20-х годов, ветеран партии — коммунист с более чем полувековым стажем, Андроник Гевондович и сегодня энергичен, бодр, полон творческих планов, его трудолюбие и работоспособность достойны подражания.

За заслуги в развитии советской науки и техники А. Г. Иосифьяну присвоено звание Героя Социалистического труда, он награжден четырьмя орденами Ленина, двумя орденами Трудового Красного Знамени и многими медалями. А. Г. Иосифьян — лауреат Ленинской премии и дважды Государственной премии СССР, заслуженный деятель науки и техники РСФСР и Армянской ССР.

Группа товарищей

Вниманию читателей!

Ленинградский книжный магазин «Энергия» — опорный пункт Энергоатомиздата. Здесь самый широкий ассортимент научной, справочной, учебной и производственной литературы по всем разделам энергетики:
теплотехнике и теплоэнергетике;
гидротехнике и гидроэнергетике;
электротехнике и промышленной электронике;
электроэнергетике и промышленной энергетике;
автоматике и информационно-измерительной технике;
ядерной энергетике, технике, технологии и физике.

В настоящее время с ростом объема книжной продукции специалистам легко пропустить нужную книгу. На помощь им приходит реклама. Магазин выпускает около 100 видов печатной рекламы: каталоги, листовки, буклеты, закладки и т. п. — по всем разделам энергетики. Кроме обычных рекламных материалов магазин выпускает авторские буклеты «Новая книга», где автор рассказывает об актуальности, новизне и специфике выбранной им темы, обрисовывает круг затронутых им вопросов и проблем. Текст сопровождается фотографиями, графиками и таблицами, которые впоследствии войдут в книгу.

В течение всего года магазин принимает предварительные заказы на книги, включенные в план выпуска литературы Энергоатомиздата на следующий год.

В магазине работает отдел «Книга — почтой», услугами которого могут воспользоваться иногородние покупатели. Указав свой адрес или адрес организации, Вы будете систематически получать информацию о книгах и бланки для заказа изданий, имеющихся в наличии и намеченных к выпуску. На рекламных бланках имеют право оформить заказ как организации, так и частные лица. Заказанная литература высылается наложенным платежом без задатка.

Указав интересующие Вас разделы литературы, Вы будете получать рекламные проспекты только по интересующей Вас тематике.

Адрес магазина «Энергия»: 196066, Ленинград, Московский пр., 189.
Пользуйтесь услугами магазина — опорного пункта Энергоатомиздата!

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Алексей Алексеевич Булгаков

(К 75-летию со дня рождения)

В марте с. г. исполнилось 75 лет со дня рождения доктора технических наук, старшего научного сотрудника Института проблем управления АН СССР, ветерана Великой Отечественной войны Алексея Алексеевича Булгакова.

А. А. Булгаков в 1937 г. с отличием окончил вечернее отделение МЭИ. Работал инженером электроцеха на заводе «Серп и молот», в 1939 г. вернулся в ВЭИ, в котором начинал лаборантом в 1931 г. С 1941 по 1945 г. — офицер Советской Армии. По демобилизации поступил в Институт автоматики и телемеханики АН СССР (теперь Институт проблем управления), где и работает по настоящее время. С 1956 по 1965 г. по совместительству —доцент ВЗПИ. В 1966 г. защитил докторскую диссертацию. Руководил подготовкой аспирантов, ставших впоследствии крупными учеными.

Основные направления работ А. А. Булгакова опубликованы в статьях и монографиях у нас и за рубежом, в частности: «Частотное управление асинхронными двигателями», «Электронные устройства автоматического управления», «Исследование квазинепрерывных систем», «Программное управление станками».

Теоретические результаты А. А. Булгакова подтверждены опытно-конструкторскими разработками, поставленными промышленностью на крупносерийное производство. Им были разработаны первое в мире электронное устройство автоматического управления электроприводом 240 кВт для прокатного стана, создана теория регулирования переменного тока включенными встречно-параллельно управляемыми вентилями, предложен способ их использования для регулирования скорости асинхронных двигателей, получивший промышленное применение в СССР и за рубежом. Разработанный им статический фазорегулятор, защищенный авторским свидетельством, решил проблему автоматического регулирования ртутных выпрямителей. Все установки с ртутными выпрямителями для электроприводов и возбуждения синхронных генераторов энергосистем оснащались этими фазорегуляторами. Предложенный А. А. Булгаковым с соб автоматического регулирова преобразователей частоты, также щищенный авторским свидетельств используется в крупносерийном пр водстве СССР и зарубежных стр

Выполнение под его руководст разработки по созданию систем п граммного управления станками автоматами, отмечены золотой и ребрянной медалями ВДНХ. В 198 А. А. Булгаковым опубликован питальный труд — монография «П граммное управление системами шин», в котором изложил принц построения и прогноз развития си полной автоматизации машиност тельных производств, получивши настоящее время название «гиб систем.

А. А. Булгаковым заложены о вы общей теории вентильных си («Основы динамики вентильных сист «Новая теория управляемых вы мителей»), над развитием которой продолжает работать. Новейшим правлением работы А. А. Булга в последние годы, начало котор было положено еще в 1956 г., явля оптимальное управление электро водами технологических машин критериям минимума потерь эне и максимума производительности.

Кроме двадцати монографий, стично переведенных на пять ин ранных языков, А. А. Булгаков я ется автором свыше ста статей и ав ских свидетельств на изобретен

Плодотворный труд Алексея А сеевича Булгакова отмечен правит ственными наградами.

Группа товар

Вниманию читателей!

Магазин № 200 Москниги имеет в наличии и высылает наложенным платежом следующие книги:

Белоус Б. П. Средства связи диспетчерского и технологического управления энергосистем: Учебное пособие для вузов по спец. «Автоматизация производства и распределения электроэнергии».— Энергия, 1978.— 296 с.— (В пер.): 1 р. 10 к.

Комский Д. М., Игошев Б. М. Электронные автоматы и игры.— Энергоатомиздат, 1981.— 168 с.— 65 к.

Заказы направляйте по адресу: 121019, г. Москва, пр-т Калинина, 26. Магазин № 200 Москниги.

Имеется в продаже и высылается наложенным платежом книга:

Смолов В. Б. Функциональные преобразователи информации.— Энергоатомиздат, 1981.— (В пер.): 1 р. 20 к.

Заказы направляйте по адресу: 232000, г. Вильнюс, пр-т Ленина, 29. Книжный магазин «Техническая книга».

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Сергей Дмитриевич Лизунов

(К 60-летию со дня рождения)

Сергей Дмитриевич Лизунов ро-ся в 1925 г., трудовую деятель-сть начал в 1942 г. После службы Советской Армии (1943—1946 гг.) ступил на электроэнергетический фа-льтет МЭИ, который окончил в 53 г.

Придя на МосПО «Электрозавод» ени В. В. Куйбышева по направле-ю после окончания института, Д. Лизунов работал в конструктор-о-исследовательском отделе завода женером, руководителем группы, с 1962 г. — начальником отдела. 1975 г. С. Д. Лизунов работает глав-м инженером объединения.

В 1962 г. С. Д. Лизунов защитил ндидатскую диссертацию. Основные правления его инженерной и науч-й деятельности — импульсные пере-пряжения в трансформаторах и ав-трансформаторах; исследования ектрической прочности. Продольной лавной изоляции силовых и измери-льных трансформаторов напряжения, мовакуумной обработки изоляции; исследование переходных процессов в трансформаторах с применением электромагнитных моделей. С. Д. Лизунов является автором двух книг и большого числа статей по вопросам трансформаторостроения.

В 1978 г. за участие в создании и внедрении в энергетику комплексов мощных силовых высоковольтных автотрансформаторов С. Д. Лизунову была присуждена Государственная премия СССР. За заслуги в развитии отечественного трансформаторостроения он награжден орденом Трудового Красного Знамени.

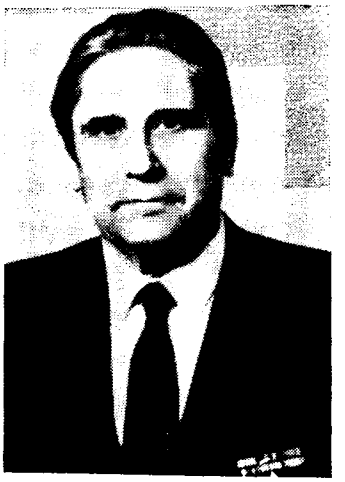
С. Д. Лизунов принимает активное участие в международных организациях электротехников и энергетиков — СИГРЭ и МЭК. Он является членом редколлегии журнала «Электричество», председателем редколлегии серии книг «Трансформаторы» Энергоатомиздата, а также председателем первичной заводской организации общества «Знание».

Желаем Сергею Дмитриевичу Лизунову дальнейшей плодотворной деятельности и больших творческих успехов.

Группа товарищей

Владимир Иванович Ключев

(К 60-летию со дня рождения)



В августе 1985 г. исполняется 60 лет дня рождения Владимира Ивановича ючева, известного ученого, доктора нических наук, профессора кафед- автоматизированного электропри-ца Московского энергетического ститута.

В. И. Ключев поступил в МЭИ 1945 г. после окончания Великой ечественной войны, в которой он, довой пехотинец, с боями прошел Кавказа до Германии. В 1952 г. он стяще окончил факультет электри-кации и автоматизации промышлен-сти и транспорта.

В научных кругах В. И. Ключев естен как один из ведущих специа-стов в области динамики сложных ктромеханических систем с упруги- механическими связями, а также теоретик и практик создания авто-изированного электропривода од-ковшовых горнодобывающих экска-оров.

Он разработчик методов проекти-ания электроприводов, обеспечи-щих минимизацию динамических рузок механического оборудования. новные результаты этих исследова-й изложены в его монографии «Огра-ение динамических нагрузок элект-привода».

По разработанной В. И. Ключе-м более 20 лет назад оптимальной уктуре экскаваторного электропри-а до настоящего времени в стране пускается большинство электропри-ов экскаваторов средней и боль-й производительности.

Опытный практик, отлично понима-ий потребности инженеров эксплуа-тационников, он был инициатором и активнейшим автором монографии «Наладка электроприводов экскаваторов», вот уже много лет являющейся настольной книгой специалистов по электроприводу и автоматизации горнодобывающих предприятий.

Активно занимаясь научным поиском, изобретательской, конструкторской и организационной работой, В. И. Ключев разработал систему комплектных регулируемых электроприводов постоянно-переменного тока с вентильными преобразователями на базе современной техники управления для экскаваторных и подобных им электроприводов, работающих в особо тяжелых условиях эксплуатации. Эти разработки находятся на стадии широкого промышленного эксперимента и перехода к внедрению в серийное производство. Оригинальность заложенных в систему технических решений подтверждена более чем 20 авторскими свидетельствами на изобретения.

Проф. В. И. Ключев — прекрасный лектор и педагог. Его богатый научный и педагогический опыт нашел свое отражение в ряде учебных пособий; новейшие концепции дисциплины положены в основу написанного им учебника «Теория автоматизированного электропривода». Всего же список публикаций В. И. Ключева насчитывает около 100 работ.

Проф. В. И. Ключевым подготовлено 18 кандидатов технических наук. В течение 7 лет он является заместителем председателя Научно-методического Совета Минвуза СССР по автоматизации и председателем Научно-методической комиссии по специальности электропривод и автоматизация промышленных установок. По его инициативе и при его непосредственном участии была проведена коренная перестройка учебных планов по специальности, пересмотрены концепции специальных дисциплин, подготовлены их новые программы. В. И. Ключев принимает активное участие в работе двух советов по присуждению ученых степеней, является членом редколлегии журнала «Изв. вузов. Электромеханика».

За боевые заслуги, плодотворную научную и педагогическую деятельность В. И. Ключев награжден правительственными наградами, «Почетной грамотой Президиума Верховного Совета РСФСР».

Группа товарищей

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Евгений Львович Эттингер

На 77-м году жизни скончался один из основоположников вентильного электропривода, лауреат Государственной премии СССР, доктор технических наук, профессор Евгений Львович Эттингер.

Е. Л. Эттингер в 1930 г. окончил Московский энергетический институт по специальности электромашино- и электроаппаратостроение. Начало его трудовой деятельности было связано с заводами «Электросила», Ижорским и Каширским электровозным.

В 1935 г. Е. Л. Эттингер поступил во Всесоюзный электротехнический институт им. В. И. Ленина, где возглавил лабораторию и начал работы по применению вентильных преобразователей в системах электропривода. Результаты этих работ были отражены в кандидатской диссертации «Применение управляемых ртутных вентилей для электропривода реверсивных прокатных станов», которую Е. Л. Эттингер защитил в 1940 г.

С 1948 г. Евгений Львович продолжил работы по созданию научных основ и разработке электроприводов на новой элементной основе в тресте «Электропривод» (ныне ВНИИэлектропривод). Здесь же им были развернуты научные и опытно-конструкторские работы по быстродействующему вентильному возбуждению крупных гидро- и турбогенераторов, работающих на длинные линии электропередачи. В 1957 г. Е. Л. Эттингер с группой сотрудников был переведен в отраслевой научно-исследовательский институт. В 1969 г. он защитил докторскую диссертацию, а в 1973 г. ему было присвоено звание профессора.

В последние годы научная и инженерная деятельность Е. Л. Эттингера была направлена на разработку перспективных систем электродвижения мощных ледоколов.

Е. Л. Эттингер был одним из основоположников вентильного электропривода и силовой преобразовательной техники в СССР. Им были предложены и исследованы оригинальные машинно-вентильные системы, разработаны основы теории вентильного электропривода и вентильного возбуждения. Они нашли отражение в написанной им с местно, с Ф. И. Бутаевым монограф «Вентильный электропривод», выш шей в 1951 г. и ставшей настольн книгой работников проектных и исс довательских институтов.

Много сил отдавал Евгений Ль вич реализации своих разработок. I его руководством и при его непосре венном участии в нашей стране бі впервые введены на ряде электрос ций быстродействующие системы і тильного возбуждения. За эти раб Е. Л. Эттингер был награжден о ном «Знак Почета», а в 1968 г. была присуждена Государственная і мия СССР.

Научная и инженерная деят ность Е. Л. Эттингера нашла отра ние в более чем 90 печатных труда изобретениях. Он воспитал много циалистов по вентильному электро воду и по существу создал школ этой области. Под его руководст выполнен ряд кандидатских диссе ций.

Е. Л. Эттингер был членом р научных советов министерств и в мств, членом редакционного совет электротехнике Энергоатомизд

От нас ушел человек большой к туры, отличающийся умением нахо оптимальный путь при решении с ных научно-технических пробле

Евгений Львович был и остан примером крупного инженера и ного, доброжелательного и в то время принципиального человека. С лая память о нем сохранится в на сердцах.

Группа товар

Вниманию читателей!

Магазин № 170 Москниги имеет в продаже и высылает наложенным платежом следующие книги:

Артюхов В. П. и др. Настраиваемые модули для управляющих логических устройств.— Энергоиздат, 1981.— 165 с.— 60 к.

Дворников А. А., Уткин Г. М. Фазированные автогенераторы радиопередающих устройств.— Энергия, 1980,— 176 с.— (Б-ка по радиоэлектронике; Вып. 68).— 50 к.

Ильин В. А. Телеуправление и телеизмерение: Учеб. пособие для студентов вузов, изучающих курс «Телемеханика».— Энергоиздат, 1982.— 560 с.— (В пер.): 1 р. 30 к.

Комский Д. М., Игошев Б. М. Электронные автоматы и игры.— Энергоатомиздат, 1981.— 168 с.— 65 к.

Левин В. И. Динамика логических устройств и систем.— Энергия,— 224 с.— 65 к.

Заказы направляйте по адресу: 121096, г. Москва, ул. В. Кожиной, 10. Магазин № 170 Москниги.

Карагандинский Облкнигторг имеет в продаже и высылает наложенным платежом книгу Энергоатомиздата, 1982 г. **«Бальян Р. Х., Сиверс М. Х.** Тиристорные генераторы и инверторы».— 223 с.: ил.— (В пер.): 1 р.

Заказы направляйте по адресу: 470038, г. Караганда, ул. Сатпаева, 15. Облкниготорг.

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Илья Владимирович Антик

Скончался старейший редактор ергоатомиздата Илья Владимиро-ч Антик.

И. В. Антик родился 15 сентября 11 г. в Москве. В 1937 г. он окончил осковский энергетический институт был направлен на Баранчинский ектромеханический завод имени И. Калинина, где прошел путь от стера до начальника цеха. С 1940 г. работал инженером-электриком во есоюзном электротехническом инсти-те в Москве.

С 1947 г. И. В. Антик начинает ботать редактором в Госэнергоизд-те. этого момента и до последнего часа о творческая жизнь связана с из-нием научно-технической литера-ры.

Глубокие инженерные знания, не-урядный литературный талант, ромная работоспособность быстро двинули И. В. Антика в число веду-их работников издательства. Он воз-авил редакцию электротехнической тературы; в течение длительного пе-ода исполнял обязанности главного дактора издательства. Им были орга-зованы научные монографии, фунда-нтальные учебники по теоретическим новам электротехники, электриче-им машинам, преобразовательной нике, аппаратам и другим дисцип-нам, а также многие справочники — средствам автоматики, автоматизи-ванному электроприводу, электро-мическому оборудованию, электро-ническим материалам. Его творче-й вклад в создание этих книг обес-ил их высокий научно-технический, ретический и идейный уровень. и издания стали настольными книга-инженеров и ученых.

По инициативе И. В. Антика были созданы ныне широко известные серии: «Библиотека по автоматике», «Библиотека электротермиста», «Электроизмерительная техника», «Трансформаторы», «Применение вычислительных машин в исследованиях и управлении производством», которые пользуются заслуженной популярностью у специалистов. К работе над этими сериями привлекались, как правило, молодые авторы, для которых общение с таким высококвалифицированным специалистом и доброжелательным редактором, каким был И. В. Антик, являлось отличной школой.

И. В. Антик сделал чрезвычайно много для пропаганды достижений науки и техники, работая в отделах электротехники, автоматики и радиотехники ВИНИТИ, выступая в научно-технических журналах.

И. В. Антик многие годы поддерживал тесные творческие связи с научными, исследовательскими, учебными и производственными организациями. Научно-техническая общественность высоко ценила его как крупного специалиста, консультанта, рецензента, его постоянно привлекали к работе в комиссии по разработке и обсуждению терминологических ГОСТов по различным направлениям электротехники.

Редактор не только по профессии — по призванию, человек, обладающий энциклопедическими знаниями, высокой культурой, блестящими организаторскими способностями и большой принципиальностью,— Илья Владимирович Антик был и будет образцом преданного служения своему делу. Не одно поколение авторов и редакторов называло и будет называть его своим Учителем.

Плодотворная издательская деятельность И. В. Антика отмечена правительственными наградами, грамотами министерств, медалями ВДНХ. Он награжден орденом «Знак Почета», медалью «За доблестный труд», «За оборону Москвы», «Ветеран труда», «40 лет Победы».

Светлая память об Илье Владимировиче Антике навсегда останется в сердцах его учеников и товарищей по работе.

Товарищи, коллеги, ученики

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

отинов А. И., Будзко И. А., Веников В. А., Глебов И. А., Евсеев Б. Н. (зам. главного редактора), **Ефремов И. С., Иванов-оленский А. В., Ильинский Н. Ф., Комельков В. С., Костенко М. В., Лабунцов В. А., Ларионов В. П., Лидоренко Н. С., Лизу-в С. Д., Мамиконянц Л. Г.** (главный редактор), **Меерович Э. А., Мучник Г. Ф., Нетушил А. В., Сабинин Ю. А., Слежановский О. В., валов С. А., Тареев Б. М., Тиходеев Н. Н., Толстов Ю. Г., Федосеев А. М., Шакарян Ю. Г., Шаталов А. С., Шилин Н. В.**

Научные редакторы: Б. Д. Макаршин, А. Л. Прилуцкий

Адреса редакции: 103012, Москва, К-12, Б. Черкасский пер., 2/10, Телефон 924-24-80
101000, Москва, Главный почтамт, абонентный ящик № 648
Адрес для телеграмм: Москва, 12, Электричество

Технический редактор Н. Н. Хотулева

ано в набор 17.05.85 | Подписано в печать 05.07.85 | Т-12338 | Формат 60×90 1/8 | Печать высокая
. печ. л. 10 | Усл. кр.-отт. 10,5 | Уч.-изд. л. 12,39 | Тираж 5640 экз. | Заказ 1352

Энергоатомиздат, 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

рдена Трудового Красного Знамени Чеховский полиграфический комбинат ВО «Союзполиграфпром» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 142300, г. Чехов Московской области

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Александров Г. Н., Коротков В. В. Исследования на моделях электрической прочности многоэлектродных изоляционных систем подстанций при коммутационных перенапряжениях 1
Пономарев Л. Т. Новая высоковольтная конструкция изоляции 9
Иванов-Смоленский А. В. Определение электромагнитных сил в нелинейной магнитной системе по натяжениям 12
Мустафа Г. М. Машинный анализ трехфазных схем . . . 21
Астахов В. И. Электромагнитный расчет проводящего диска 32
Исхаков А. С. Выпрямитель в режиме прерывистого тока 38
Беркович Е. И. Устойчивость в целом замкнутой системы регулирования с широтно-импульсным преобразователем 44

СООБЩЕНИЯ

Колонский Т. В. Повышение эффективности двухступенчатого противоаварийного управления энергосистем 49
Поляков В. Е., Троценко А. А. Синтез логической части устройств релейной защиты и автоматики 52
Колосюк В. П., Миц В. Н., Ресьян А. К. Расчет токов утечки в трехфазной сети, питающей нагрузку через выпрямитель 54
Подольцев А. Д., Пигнастий С. С. Влияние скин-эффекта на энергетические показатели импульсного безжелезного трансформатора 59
Гордеев В. И., Демура А. В. Оценка предельных значений потерь электроэнергии в магистральных сетях 62
Беспалов В. Я., Кузнецов В. В., Соколова Е. М., Сорокин Л. К. Исследование параметров линейного асинхронного двигателя методом проводимостей зубцовых контуров 72
Емельянов В. И., Крайчик Ю. С., Минин В. Т. Гармоники тока нулевой последовательности в цепях с вентильными преобразователями 77
Кирьяков А. М. Применение внешних конечных элементов при расчете плоскопараллельных потенциальных полей 84
Филиппов А. А. Расчет электрических полей в несовершенных диэлектриках 89
Ларионов В. П., Кокуркин М. П., Мосолов А. Е., Прохоров Е. Н., Сергиевская И. М. Определение поражаемости объекта молнией 94
ХРОНИКА 98

CONTENTS

Alexandrov G. N., Korotkov V. V. — Model System Studies of the Electrical Withstand Strength of Multi-Electrode Insulating Systems at Substations Subjected to Switching surges 1
Ponomarev L. T. — A New Design for HV Insulation . . 9
Ivanov-Smolenski A. V. — Finding Electromagnetic Forces in a Non-Linear Magnetic System on the Basis of Tensions 12
Mustapha G. M. — Computer-Based Analysis of Three-Phase Circuits 21
Astakhov V. I. — Electromagnetic Analysis of a Conducting Disc 32
Iskhakov A. S. — Intermittent Current Duty of a Rectifier 38
Berkovitch E. I. — Overall Stability of a Closed-Loop Control System Having a Pulse-Width Converter . . . 44

REPORTS

Kolonski T. V. — Improvement of the Effectiveness of Two-Stage Emergency Control for Power Systems . . . 49
Polyakov V. E., Trotsenko A. A. — Synthesis of the Logic in Devices for Relay Protection and Automation . . 52
Kolosiuk V. P., Mitz V. N., Resian A. K. — Calculation of Leakage Currents in a Three-Phase Network Feeding the Load Through a Rectifier 54
Podoltsev A. D., Pignasty S. S. — How Skin-Effect Influences the Energy Characteristics of an Air-Core Pulsing Transformer 59
Gordeyev V. I., Demura A. V. — An Estimate of Ultimate Energy Losses in Main Networks 62
Bespalov V. J., Kuznetsov V. V., Sokolova E. M., Sorokin L. K. — A Study of the Parameters of a Linear Induction Motor By the Method of Tooth Circuit Admittances 72
Yemelyanov V. I., Kraichik U. S., Minin V. T. — Zero Sequence Current Harmonics in Circuits With Valve-Type Converters 77
Kiryakov A. M. — Application of External Finite Elements in the Computation of Plane-Parallel Potential Fields 84
Philippov A. A. — Computation of Electric Fields in Imperfect Dielectrics 89
Larionov V. P., Kokurkin M. P., Mosolov A. E., Prokhorov E. N., Sergievskaya I. M. — Determining the Frequency of Occurrence of Lightning Strokes to an Installation 94
CHRONICLE 98

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru

Рефераты публикуемых статей

УДК 537.523:621.3.027.89

Исследования на моделях электрической прочности многоэлектродных изоляционных систем подстанций при коммутационных перенапряжениях. Александров Г. Н., Коротков В. В. — «Электричество», 1985, № 7

Экспериментально подтверждена возможность моделирования разрядных процессов в многоэлектродных системах, характерных для подстанций высших классов напряжения. Определены минимально допустимые размеры моделей, а также критерии моделирования. Показано, что кроме геометрического подобия модели и оригинала, необходимо обеспечение равенства отношения разрядных напряжений и начального напряжения короны в оригинале и модели. При указанных условиях все процессы в оригинале и модели подобны. Библ. 10.

УДК 621.315.616.9:620.18

Новая высоковольтная конструкция изоляции. Поиомарев Л. Т. — «Электричество», 1985, № 7

Разработана новая высоковольтная конструкция изоляции на основе изоляционных лент с регулярным слюдяным барьером и скрепляющим составом, обладающим способностью гасить возникающие в порах частичные разряды; конструкция имеет срок жизни, значительно превосходящий сроки жизни изоляции типа слюдотерм, монотерм, монолит. Электрическое старение конструкций высоковольтной изоляции при 10 МВ/м связано с развитием частичных разрядов и «закарачиванием» газовых пор, что приводит к значительному повышению емкости. Библ. 3.

УДК 538.311.001.24

Определение электромагнитных сил в нелинейной магнитной системе по натяжениям. Иванов-Смоленский А. В. — «Электричество», 1985, № 7

Исходя из приращения магнитной энергии при малом перемещении выделенной части нелинейной магнитной системы, получены формулы тензора и вектора натяжений в магнитном поле. Эти формулы совпадают с формулой для натяжения, полученной в одной из ранних работ Максвелла, которой присвоено его имя.

Показано, что, вопреки мнению некоторых ученых, через натяжения Максвелла может быть выражена не только электромагнитная сила (ЭМС), действующая на магнитно-нелинейное тело в целом, но и ЭМС, действующая на любую его часть.

На основе анализа других формул для натяжения в магнитном поле, отличающихся от формулы Максвелла, выявлено, что некоторые из них пригодны только для неполяризованной среды, т. е. при магнитной проницаемости $\mu_r = 1$, когда они совпадают с формулой Максвелла. Отмечено, что формулы Максвелла для натяжений могут быть распространены на идеализированные постоянные магниты. Дан пример расчета ЭМС через натяжения. Библ. 22.

УДК 621.025.3.001.24:681.142

Машинный анализ трехфазных схем. Мустафа Г. М. — «Электричество», 1985, № 7

Изучена возможность использования симметрии для упрощения машинного анализа трехфазных схем. Для этого использовано ортогональное преобразование непосредственно самих структурных матриц, в результате которого последние распадаются на независимые блоки — компонентные структурные матрицы. После этого анализ отдельных компонент ведется обычными методами анализа цепей. Сформулирован алгоритм получения компонентных матриц, изучены различные уровни разложения структурных матриц и самих трехфазных графов. Рассмотрены особенности процедур формирования дифференциальных уравнений переходных процессов и алгебраических уравнений установившихся режимов. Библ. 14.

УДК 538.3.001.24

Электромагнитный расчет проводящего диска. Астахов В. И. — «Электричество», 1985, № 7

Для проводящего диска, перемещающегося в переменном или стационарном магнитном поле, предложено, исследовано и решено одномерное скалярное интегральное уравнение относительно функции вихревого тока в установившемся и переходных режимах. Основные параметры электромагнитного процесса выражены через собственные значения интегрального оператора. Приведены результаты численного расчета для различных пространственных гармоник первичного магнитного поля. Библ. 8.

УДК [621.314.6:621.382].016.3.012.6

Выпрямитель в режиме прерывистого тока. Исхаков А. С. — «Электричество», 1985, № 7

Исследованы вопросы влияния нагрузки на динамические свойства замкнутой системы с выпрямителем в прерывистом режиме при больших отклонениях. В этом режиме проявляются особые нелинейные свойства выпрямителя, обусловленные односторонней проводимостью вентилей и заключающиеся в том, что на участках проводящих и непроводящих вентилей порядок линейной части в зависимости от ее структуры может быть одинаковым или отличаться на единицу. Представление линейной части только передаточной функцией, если выходной координатой не является ток выпрямителя, не позволяет различить один из указанных случаев. Это можно сделать, если в описательной части нагрузки заключена информация о токе выпрямителя. Приведены формальные признаки, позволяющие различить эти случаи. Получена математическая модель замкнутой системы в виде векторного разностного уравнения и дан пример для случая, когда порядок линейной части на обоих участках интервала дискретности выпрямителя одинаков. Библ. 9.

УДК [621.314.6:621.382]-52.016.35

Устойчивость в целом замкнутой системы регулирования с широтно-импульсным преобразователем. Беркович Е. И. — «Электричество», 1985, № 7

Рассмотрены условия асимптотической устойчивости замкнутой системы автоматического регулирования с широтно-импульсным преобразователем (ШИП) постоянного тока в качестве исполнительного органа. Анализ проведен для ШИП второго рода с системой управления, построенный по принципу вертикального управления с пилообразным опорным напряжением. Замкнутая система регулирования с ШИП рассматривается как нелинейная, в режиме непрерывного тока она содержит одну операторную нелинейность (собственно ШИП), а в режиме прерывистого и другую нелинейность (диод). Анализ выполнен с помощью прямого метода Ляпунова, что позволило получить в аналитической форме достаточные условия асимптотической устойчивости в целом для общего случая нагрузки. Рассмотрен частный случай работы на активно-индуктивную нагрузку. Библ. 7.

УДК 621.311.018.782.3.001.24

Повышение эффективности двухступенчатого противоаварийного управления энергосистем. Колонский Т. В. — «Электричество», 1985, № 7

С помощью фазовых траекторий рассматриваются возможности повышения эффективности двухступенчатого противоаварийного управления энергосистем, соединенных слабой связью, при наиболее распространенных аварийных возмущениях. Библ. 4.

УДК 621.316.925.681.142-523.8

Синтез логической части устройств релейной защиты и автоматики. Поляков В. Е., Троценко А. А. — «Электричество», 1985, № 7

Рассмотрены вопросы синтеза устройств защит и автоматики с учетом последовательности их работы во времени. За счет функционального совмещения получены устройства с более простой аппаратной реализацией по сравнению с существующими. Разработки алгоритмы, удобные для программной реализации на ЭВМ.

УДК 621.316.14.001.24:622.2

Расчет токов утечки в трехфазной сети, питающей нагрузку через выпрямитель. Колосюк В. П., Миц В. Н., Ресьян А. К. — «Электричество», 1985, № 7

Предложены схема замещения и математическая модель для расчета действующего значения тока утечки в комбинированной сети с неуправляемыми преобразователями и управляемыми при угле управления $\alpha = 0°$ с учетом влияния высших гармоник. Рассмотрены случаи, когда утечка тока возникает с одной из фаз на участке переменного тока либо с одного из полюсов на участке постоянного тока через повреждение изоляции или случайно прикоснувшегося к токоведущей части человека. В результате проверки метода расчета установлено, что расчетные значения токов утечки превышают экспериментальные данные не более чем на 5 %. Библ. 2.

УДК 621.314.235:621.3.014.12

Влияние скин-эффекта на энергетические показатели импульсного безжелезного трансформатора. Подольцев А. Д., Пигнастий С. С. — «Электричество», 1985, № 7

Рассчитаны распределения плотности тока в безжелезном импульсном трансформаторе кабельного типа с одновитковой первичной и многовитковой вторичной обмотками. Исследовано влияние скин-эффекта в витке первичной обмотки трансформатора на его энергетические показатели в зависимости от соотношения геометрических размеров трансформатора. Библ. 11.

УДК 621.311.1.017

Оценка предельных значений потерь электроэнергии в магистральных сетях. — Гордеев В. И., Демура А. В. — «Электричество», 1985, № 7

Производится оценка максимального и минимального значений потерь электроэнергии в магистральной линии с учетом взаимно корреляционных связей графиков тока подключенных к магистрали электроприемников. Предлагается учет характера распределения нагрузок вдоль магистрали с помощью моделей диаграмм распределения для повышения точности расчета потерь электроэнергии. Библ. 4.

УДК [621.313.13:62-83].001.24

Исследование параметров линейного асинхронного двигателя методом проводимостей зубцовых контуров. Беспалов В. Я., Кузнецов В. В., Соколова Е. М., Сорокин Л. К. — «Электричество», 1985, № 7

Приводятся результаты исследования поля в рабочем зазоре линейного асинхронного двигателя. Разработана модификация метода проводимостей зубцовых контуров применительно к линейным двигателям. Рассчитано поле рассеяния в рабочем зазоре, оценено влияние дискретности обмоток и зубчатости сердечников статора (индуктора) и вторичного элемента (экипажа) на значение и вид основных индуктивных параметров в зависимости от перемещения. Библ. 4.

УДК [621.314.6:621.382].018.3

Гармоники тока нулевой последовательности в цепях с вентильными преобразователями. Емельянов В. И., Крайчик Ю. С., Минин В. Т. — «Электричество», 1985, № 7

Теоретически показано и подтверждено натурными наблюдениями, что вентильные преобразователи могут вызывать в примыкающей к ним трехфазной цепи гармоники тока нулевой последовательности даже при отсутствии таких гармоник в фазах самих преобразователей, например, при выполнении их по мостовым схемам. Причиной возникновения гармоник тока нулевой последовательности является несимметрия каких-либо элементов цепи вблизи от преобразователей, в частности, несимметрия узкополосных фильтров на частотах фильтруемых ими гармоник. Предложена методика расчета гармоник тока нулевой последовательности, основанная на представлении несимметричного элемента источником э. д. с. нулевой последовательности. Определены область возможных значений этой э. д. с. для случаев, когда несимметричным элементом являются узкополосные фильтры.

УДК 537.212.001.24

Применение внешних конечных элементов при расчете плоскопараллельных потенциальных полей. Кирьяков А. М. — «Электричество», 1985, № 7

Получены аналитические выражения для коэффициентов квадратичной формы функционала вариационной задачи расчета статических полей методом конечных элементов при использовании внешних конечных элементов с круглыми и прямоугольными границами. Библ. 6.

УДК 551.594.21:551.507.352

Определение поражаемости объекта молнией. Ларионов В. П., Кокуркин М. П., Мосолов А. Е., Прохоров Е. Н., Сергиевская И. М. — «Электричество», 1985, № 7

Приведена методика определения вероятностного распределения точек удара молнии на поверхности самолета. Использование высокого напряжения повышенной частоты (10—100 кГц) позволяет значительно снизить затраты труда и времени на эксперименты. Проведено сравнение высокочастотного и искрового методов. Библ. 3.

Вологодская областная универсальная научная библиотека
www.booksite.ru