М. К. ПОТАПОВ
В. В. АЛЕКСАНДРОВ
П. И. ПАСИЧЕНКО

АЛГЕБРА И АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

М. К. ПОТАПОВ
В. В. АЛЕКСАНДРОВ
П. И. ПАСИЧЕНКО

АЛГЕБРА И АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для слушателей подготовительных отделений высших учебных заведений

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1981

22.141
П 64
УДК 512

Михаил Константинович Потапов
Владимир Васильевич Александров
Петр Иванович Пасиченко

АЛГЕБРА И АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

М., 1981 г., 560 стр. с илл.

Редакторы *Б. В. Куксенко, Т. А. Панькова.*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр.*

Корректор *Л. Н. Боровина.*

ИБ № 11598

Печать с матриц. Подписано к печати 19.12.80. Бумага 60×90 1/16. Тип. № 2.
Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 35. Уч.-изд. л. 37,78.
Допечатка тиража 100000 экз. Заказ № 2381. Цена книги 1 р. 40 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28

$П\frac{20202-013}{053(02)-81}$ 26-80. 1702030000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

С 1969 года при высших учебных заведениях в соответствии с Постановлением ЦК КПСС и Совета Министров СССР открыты подготовительные отделения для рабочей и сельской молодежи. Перед этими отделениями поставлена ответственная задача — обеспечить повышение уровня общеобразовательной подготовки молодых рабочих, колхозников, лиц, демобилизованных из рядов Советской Армии, создать у них прочный фундамент знаний для дальнейшего успешного обучения в вузе.

Изучение математики на подготовительных отделениях существенно отличается от изучения математики в средней школе. Отличие это состоит прежде всего в том, что на подготовительном отделении происходит обучение лиц с законченным средним образованием, имеющих перерыв в учебе. Обучение математике на подготовительных отделениях заключается в комплексном повторении школьного курса, в воспитании активных знаний и творческого усвоения навыков оперирования с математическими объектами. Основной упор при этом делается на те вопросы, глубокое и полное понимание которых является особенно важным при изучении высшей математики. Все эти особенности изучения курса математики на подготовительном отделении были учтены при создании данного пособия. Оно написано на основе лекций, которые читались авторами в течение ряда лет на подготовительном отделении Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Первые четыре главы пособия «Действительные числа», «Алгебраические выражения», «Алгебраические уравнения и неравенства» и «Степени и логарифмы» содержат материал, изучаемый на подготовительном отделении в первом семестре. Материал следующих пяти глав: «Тригонометрия», «Функции и их графики», «Уравнения с одним неизвестным», «Неравенства с одним неизвестным» и «Предел последовательности и предел функции» изучается во втором семестре.

Последние две главы являются дополнительными. Они полезны для будущей специализации, например, системы линейных уравнений — для будущих экономистов; комплексные числа — для будущих студентов технических вузов; поля, группы, кольца — для будущих математиков.

В пособии уделено большое внимание теоретическому материалу, приводятся некоторые понятия и определения, отсутствующие в школьных учебниках, но необходимые при изучении высшей математики. Поэтому пункты и разделы, показавшиеся трудными читателю при первом знакомстве с книгой, можно опустить с тем, чтобы вернуться к ним в дальнейшем.

§ 1. Натуральные числа

Ряд натуральных чисел. Понятие натуральных чисел возникло из потребностей счета. Натуральные числа можно сравнивать между собой, при этом ясно, какое из двух чисел больше. Все натуральные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют ряд натуральных чисел: первое число — единица, второе — два, третье — три и т. д. У каждого натурального числа есть свое место в этом ряду. В дальнейшем ряд натуральных чисел будем обозначать буквой N.

Чтобы обозначить, что число m *больше* числа n, употребляется запись $m > n$. Для обозначения того, что число m *меньше* числа n, употребляется запись $m < n$. Называют эти записи *неравенствами* натуральных чисел. Чтобы обозначить, что число m и число n — *одно и то же число*, употребляют запись $m = n$ и называют ее *равенством* натуральных чисел.

Сложение натуральных чисел можно определить, используя ряд натуральных чисел, следующим образом.

Сложить два натуральных числа m и n — значит найти в ряду натуральных чисел число $p\,(p > m)$, находящееся на n-м месте от числа m, причем счет начинается с числа $m+1$. Это число p называется *суммой* чисел m и n и обозначается $m+n$, а числа m и n называются *слагаемыми*. Например, $m+3$ — число, стоящее после числа m на третьем месте. Чтобы сложить несколько натуральных чисел, надо сложить сначала первые два, затем к полученной сумме прибавить следующее натуральное число и т. д.

Умножить натуральное число m на натуральное число n — значит найти натуральное число q, равное: а) n, если $m = 1$; б) сумме m чисел, каждое из которых есть n, если $m > 1$. Это число q называется *произведением* чисел m и n и обозначается mn, а числа m и n называются *сомножителями*. Например, умножить натуральное число 2 на число n — значит найти натуральное число q, равное сумме двух чисел, каждое из которых есть число n. Это число обозначается $2n$, т. е. $q = 2n$. Чтобы перемножить несколько натуральных чисел, надо сначала перемножить первые два, затем полученное натуральное число умножить на следующее натуральное число и т. д.

Приведем основные законы сложения и умножения натуральных чисел:

а) $m+n=n+m$ (коммутативность сложения);

б) $(l+m)+n=l+(m+n)$ (ассоциативность сложения);

в) $mn=nm$ (коммутативность умножения);

г) $(lm)n=l(mn)$ (ассоциативность умножения);

д) $(l+m)n=ln+mn$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

Если число m взято сомножителем k раз (k — натуральное число, большее единицы), то произведение

$$\underbrace{m\,m\,\ldots\,m}_{k \text{ раз}}$$

называют *k-й степенью числа m* и обозначают m^k, т. е. по определению

$$m^k=\underbrace{m\,m\,\ldots\,m}_{k \text{ раз}}.$$

Кроме того, по определению

$$m^1=m.$$

Справедливы следующие свойства степеней:

а) $m^k m^n=m^{k+n}$;

б) $(m^k)^n=m^{kn}$;

в) $m^k l^k=(ml)^k$.

Эти свойства доказываются с помощью основных законов сложения и умножения натуральных чисел.

Определим действия, обратные сложению и умножению натуральных чисел, — действия вычитания и деления для натуральных чисел.

Вычесть из натурального числа n натуральное число m — значит найти натуральное число p такое, что

$$m+p=n. \tag{1}$$

Не для любых натуральных чисел n и m существует такое натуральное число p, что выполняется равенство (1). Если $n>m$, то такое число существует и единственно. Оно называется *разностью* чисел n и m и обозначается $n-m$, число n называется *уменьшаемым*, а число m — *вычитаемым*.

Разделить натуральное число n на натуральное число m — значит найти натуральное число q такое, что

$$mq=n. \tag{2}$$

Не для любых натуральных чисел n и m существует такое натуральное число q, что выполняется равенство (2). Если такое число существует, то числа m и q называются *делителями* числа n и обозначаются

$$q=n:m; \quad m=n:q.$$

Опираясь на основные законы сложения и умножения натуральных чисел и определения действий вычитания и деления, можно доказать следующие утверждения или, другими словами, теоремы.

Теорема 1. *Если число m есть делитель чисел n_1 и n_2, то m есть делитель суммы n_1+n_2.*

Доказательство. Поскольку m есть делитель числа n_1, то $n_1=mq_1$. Аналогично $n_2=mq_2$. Применяя закон дистрибутивности сложения относительно умножения натуральных чисел, имеем $n_1+n_2=mq_1+mq_2=m(q_1+q_2)$. Следовательно, число n_1+n_2 делится на число m.

Теорема 2. *Если число m есть делитель чисел n_1 и n_2 и $n_1>n_2$, то число m есть делитель разности n_1-n_2.*

Справедливость этого утверждения доказывается аналогично.

Отметим еще несколько очевидных свойств равенств натуральных чисел:

а) если $m=n$, то $m+k=n+k$ для любого натурального числа k;

б) если $m=n$, то $m-l=n-l$ для любого натурального числа l такого, что $m>l$;

в) если $m=n$, то $mp=np$ для любого натурального числа p;

г) если $m=n$, то $m:q=n:q$ для любого натурального числа q, являющегося делителем числа m.

Расширенный ряд натуральных чисел. Рассмотрим новое число — число нуль. Для его обозначения употребляется символ 0. *Нуль* не является натуральным числом и считается числом, предшествующим всем натуральным числам. Ряд натуральных чисел вместе с числом нуль называется *расширенным натуральным рядом*. Расширенный натуральный ряд будем обозначать буквой Z_0.

В расширенном натуральном ряду можно определить действия сложения и умножения; для этого к определениям сложения и умножения натуральных чисел достаточно добавить определения сложения и умножения, в которых участвует число нуль:

а) $0+n=n+0=n$;

б) $0+0=0$;

в) $0\cdot n=n\cdot 0=0$;

г) $0\cdot 0=0$.

По определению нулевая степень любого натурального числа m есть единица, т. е. $m^0=1$.

Деление на нуль и возведение нуля в нулевую степень являются запрещенными действиями.

Чтобы производить действия над числами из расширенного натурального ряда, надо уметь их записывать. Запись одного и того же натурального числа зависит от системы счисления.

В основе всякой системы счисления лежит следующий принцип: некоторое количество единиц составляет новую единицу следующего высшего разряда. Это число называется *основанием системы счисления*. Если за основание системы принято число два, то система счисления называется *двоичной*, если за основание принято число двенадцать — система называется *двенадцатеричной* и т. д.

Дальше будем рассматривать только *десятичную* систему счисления. В этой системе вводится десять знаков, называемых цифрами; для обозначения первых девяти натуральных чисел — знаки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а для числа нуль — знак 0. В этой системе счисления число десять обозначается символом 10, а каждое натуральное число p представляется в виде

$$p = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0, \tag{3}$$

где n — число из расширенного натурального ряда, a_n — одно из чисел 1, 2, 3, ..., 9, каждое из a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1} — одно из чисел 0, 1, 2, 3, ..., 9. Заметим, что если число n будет больше, чем число девять, то оно само должно быть записано в виде (3).

Для записи числа p обычно употребляется другая форма записи, основанная на принципе *позиционного значения цифр*. Суть этого принципа заключена в том, что каждая цифра, кроме своего значения в зависимости от начертания, получает еще и так называемое позиционное значение. Например, цифра 5 может иметь значения: пять единиц, если стоит в изображении числа p на первом месте справа; пять десятков, если стоит в изображении числа p на втором месте справа, и т. д. На этом принципе и основана обычная запись натуральных чисел. Запись 2705 означает, что число состоит из двух тысяч, семи сотен, нуля десятков и пяти единиц, т. е.

$$2705 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 5.$$

Если взять число p, представленное в виде (3), то его запись, основанная на позиционном принципе, будет такая:

$$p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$$

(черта сверху ставится для того, чтобы отличать это число от произведения $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$). В дальнейшем будут употребляться две формы записи натурального числа p:

а) $p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$,

б) $p = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$,

т. е. дальше будем пользоваться равенством

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0. \tag{4}$$

Признаки делимости. Ранее уже отмечалось, что не всегда одно натуральное число делится на другое. Поэтому представляет интерес выделение тех случаев, когда деление возможно. Выделению этих случаев весьма помогают так называемые признаки делимости. Приведем некоторые из них. Заметим предварительно, что из вышеизложенного вытекает, что:

а) нуль делится на любое натуральное число,

б) любое натуральное число делится на единицу.

Теорема 3. *Чтобы натуральное число* $p=\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ *делилось на* 2, *необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра* a_0 *этого числа делилась на* 2.

Доказательство. Докажем, что если число a_0 делится на 2, то число p также делится на 2. Запишем число p в виде

$$p=\alpha+\beta, \tag{5}$$

где

$$\alpha=(a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_2\cdot 10+a_1)\cdot 10,$$
$$\beta=a_0.$$

Каждое слагаемое в правой части равенства (5) делится на 2, следовательно, и вся сумма делится на 2, т. е. число p делится на 2.

Докажем обратное утверждение. Если число p делится на 2, то число a_0 также делится на 2. По свойству б) равенств из равенства (5) вытекает, что

$$a_0=p-(a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_2\cdot 10+a_1)\cdot 10.$$

Каждый член разности правой части равенства делится на 2, следовательно, вся разность делится на 2, т. е. число a_0 делится на 2. Теорема доказана.

Натуральные числа, делящиеся на два, и число нуль называются *четными числами*. Все остальные натуральные числа называются *нечетными*. Теорему 3 можно переформулировать так: для четности любого натурального числа $p=\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра a_0 этого числа была бы числом четным.

Рассмотрим характерные черты доказательства теоремы 3. В самой теореме сформулированы, а затем и доказаны два утверждения: а) из делимости числа a_0 на 2 следует делимость на 2 числа p (*достаточное условие* делимости числа p на 2); б) из делимости числа p на 2 следует делимость на 2 числа a_0 (*необходимое условие* делимости числа p на 2). Если свойство делимости числа a_0 на 2 обозначим буквой A, а свойство делимости числа p на 2 обозначим буквой B, то первое утверждение можно кратко сформулировать так: из A следует B ($A \Rightarrow B$), а второе утверждение — из B следует A ($A \Leftarrow B$). Теорему с помощью введенных символов можно записать так: $A \Leftrightarrow B$.

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает также, что свойство A, более простое и легко проверяемое, является необходимым и достаточным условием для выполнения более сложного свойства B.

Так как свойство A является достаточным условием для свойства B ($A \Rightarrow B$), то на практике, убедившись в том, что последняя цифра является четной, можно быть уверенным, что и все число делится на 2. Так как свойство A является необходимым условием для свойства B ($A \Leftarrow B$), то, установив, что число a_0 не делится на 2, можно утверждать, что и число p не делится на 2, т. е. теорему 3 можно сформулировать так: если последняя цифра числа p делится на 2, то число p делится на 2, если она не делится на 2, то число p не делится на 2.

Отметим, что если некоторое свойство C является достаточным условием для свойства D, то это еще не означает, что нет чисел, обладающих свойством D, но не обладающих свойством C. Например, достаточным условием делимости числа p на 4 является условие $a_1 = a_0 = 0$. Справедливость последнего утверждения следует из представления числа p в виде

$$p = (a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \ldots + a_3 \cdot 10 + a_2) \cdot 10^2$$

и делимости числа 100 на 4. В то же время, например, число 252 делится на 4, хотя две последние его цифры не нули.

Если доказано, что некоторое свойство E является необходимым условием для свойства D, то это еще не означает, что нет чисел, обладающих свойством E, но не обладающих свойством D. Например, необходимым условием делимости числа p на 4 является четность числа p. Справедливость последнего утверждения очевидна, ибо если число p делится на 4, то тем более оно делится на 2. В то же время, например, число 1222 не делится на 4, хотя оно четное.

Если же доказано, что свойство S является необходимым и достаточным условием для свойства Q, а свойство S легко проверяется для любого числа p, то, найдя все числа, обладающие свойством S, можно сказать, что найдены все числа, обладающие более сложным свойством Q.

В дальнейшем для краткости будем часто пользоваться символами $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ в следующем смысле: запись $M \Rightarrow L$ будет означать, что из утверждения M, стоящего слева от символа $\Rightarrow$, следует утверждение L, стоящее справа. Запись $Q \Leftarrow S$ будет означать, что из утверждения S, стоящего справа от символа $\Leftarrow$, следует утверждение Q, стоящее слева. Запись $E \Leftrightarrow F$ будет означать, что утверждения, стоящие слева и справа от символа $\Leftrightarrow$, равносильны, т. е. одновременно и из утверждения F, стоящего справа от символа $\Leftrightarrow$, вытекает утверждение E, стоящее слева, и из утверждения E, стоящего слева от символа $\Leftrightarrow$, вытекает утверждение F, стоящее справа.

Сформулируем и докажем еще признаки делимости натуральных чисел на 4 и на 9.

Теорема 4. *Для того чтобы натуральное число* $p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ *делилось на* 4, *необходимо и достаточно, чтобы число* $\overline{a_1 a_0}$ *делилось на* 4.

Доказательство. Достаточность. Пусть число $\overline{a_1 a_0}$ делится на 4. Запишем число p в виде

$$p = \varphi + \psi, \tag{6}$$

где

$$\varphi=(a_n\cdot 10^{n-2}+a_{n-1}\cdot 10^{n-3}+\ldots+a_3\cdot 10+a_2)\cdot 10^2,$$
$$\psi=\overline{a_1a_0}.$$

Каждое слагаемое в правой части равенства (6) делится на 4, следовательно, и вся сумма делится на 4, т. е. число p делится на 4.

Необходимость. Пусть число p делится на 4. По свойству б) равенств из равенства (6) вытекает, что

$$\overline{a_1a_0}=p-(a_n\cdot 10^{n-2}+a_{n-1}\cdot 10^{n-3}+\ldots+a_3\cdot 10+a_2)\cdot 10^2.$$

Каждый член разности правой части равенства делится на 4, следовательно, вся разность делится на 4, т. е. число $\overline{a_1a_0}$ делится на 4. Теорема доказана.

Например, число 1232 делится на 4, так как число 32 делится на 4, а число 15126 не делится на 4, так как число 26 не делится на 4.

Теорема 5. *Для того чтобы натуральное число* $p=\overline{a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0}$ *делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма всех цифр данного числа делилась на 9.*

Доказательство. Достаточность. Пусть сумма цифр данного числа делится на 9. Запишем число p в виде

$$p=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0.$$

Легко видеть, что справедливо равенство

$$10^k=\underbrace{\overline{99\ldots 999}}_{k\text{ раз}}+1.$$

Пользуясь этим равенством, перепишем p в виде

$$p=\gamma+\lambda, \tag{7}$$

где

$$\gamma=(a_n\cdot\underbrace{\overline{99\ldots 9}}_{n\text{ раз}}+a_{n-1}\cdot\underbrace{\overline{99\ldots 9}}_{(n-1)\text{раз}}+\ldots+a_2\cdot\overline{99}+a_1\cdot 9),$$
$$\lambda=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0.$$

Каждое слагаемое в правой части равенства (7) делится на 9, следовательно, и вся сумма делится на 9, т. е. число p делится на 9.

Необходимость. Пусть число p делится на 9. По свойству б) равенств из равенства (7) вытекает, что

$$(a_0+a_1+\ldots+a_n)=$$
$$=p-(a_n\cdot\underbrace{\overline{99\ldots 9}}_{n\text{ раз}}+a_{n-1}\cdot\underbrace{\overline{99\ldots 9}}_{(n-1)\text{раз}}+\ldots+a_2\cdot\overline{99}+a_1\cdot 9).$$

Каждый член разности правой части равенства делится на 9, следовательно, вся разность делится на 9, т. е. число $(a_0+a_1+ +\ldots+a_n)$ делится на 9. Теорема доказана.

Например, число 1215 делится на 9, так как $1+2+1+5=9$, а число 4232 не делится на 9, так как $4+2+3+2=11$, и 11 не делится на 9.

Простые и составные числа. Множество натуральных чисел состоит из единицы, простых и составных чисел. Натуральное число, большее единицы, называется *простым*, если оно не имеет делителей, кроме единицы и самого себя. Натуральное число, большее единицы, называется *составным*, если оно имеет хотя бы один делитель, отличный от единицы и самого себя.

Пользуясь этим определением можно показать, что любое составное число имеет хотя бы один делитель, который является простым числом.

Теорема 6. *Простых чисел бесконечно много.*

Доказательство. Допустим, что существует лишь конечное число простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда каждое натуральное число, большее 1 и не совпадающее ни с одним из этих чисел, будет составным. Число $p=p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n+1$ не совпадает ни с одним из чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, так как оно больше каждого из них. По нашему предположению, простых чисел, кроме $p_1, p_2, \ldots, p_n$, нет. Следовательно, число p составное и поэтому делится хотя бы на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

С другой стороны, число p не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, поскольку произведение $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ делится на каждое из этих чисел, а число 1 ни на одно из них не делится.

Таким образом, предположив, что существует лишь конечное число простых чисел, приходим к противоречию. Следовательно, множество простых чисел бесконечно.

Теорема 6 доказана способом от противного. Этот способ заключается в следующем: строится отрицание утверждения, сформулированного в теореме. Затем на основании построенного отрицания приходим к выводу, который либо неверен, либо противоречит сделанному отрицанию. Тем самым из двух логически возможных ситуаций (либо верно данное утверждение, либо его отрицание) остается только одна — верно данное утверждение.

Всякое составное число p можно записать в виде произведения простых чисел: так, например, $221=13 \cdot 17$. В этом случае говорят, что число p разложено на простые множители.

При разложении числа на простые множители некоторые из них могут встретиться в разложении не один раз. Принято писать этот простой множитель в степени, показывающей, сколько раз он является сомножителем, например $360=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$.

Любое натуральное число p можно записать в виде

$$p=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}, \tag{8}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые делители числа p, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — число их повторений в разложении числа p. Разложение (8) натурального числа p на простые множители единственно, т. е. не существует других простых чисел, являющихся делителями числа p, и степени $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ не могут быть заменены другими степенями. Итак, справедлива следующая теорема, принимаемая здесь без доказательства.

Теорема 7 (основная теорема арифметики). *Для каждого натурального числа $p > 1$ существует единственное его разложение на простые множители.*

Если натуральные числа p_1 и p_2 делятся на одно и то же натуральное число p, то число p называется *общим делителем* чисел p_1 и p_2. Наибольшее натуральное число, на которое делятся p_1 и p_2, называется *наибольшим общим делителем* этих чисел (НОД). Например, НОД чисел $p_1 = 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$ и $p_2 = 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ равен $2 \cdot 3 = 6$.

Если НОД двух чисел равен 1, то они называются *взаимно простыми*. Взаимно простыми являются, например, числа $33 = 3 \cdot 11$ и $35 = 5 \cdot 7$.

Теорема 8. *Если натуральные числа p_1 и p_2 взаимно простые, а натуральное число p делится и на p_1 и на p_2, то p делится на произведение $p_1 p_2$.*

Доказательство теоремы опустим.

Заметим, что если числа p_1 и p_2 не являются взаимно простыми, то утверждение теоремы не всегда верно. Например, натуральное число 180 делится на 4 и на 6, но не делится на их произведение — на 24.

Наименьшим общим кратным (НОК) двух натуральных чисел p_1, p_2 называется наименьшее натуральное число, которое делится и на p_1 и на p_2. Например, НОК чисел 132 и 90 есть число $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 1980$.

Деление с остатком. Если в результате деления натурального числа p на натуральное число m получилось натуральное число q такое, что $p = mq$, то говорят, что p делится на m. Как следует из вышеизложенного, не всегда в результате деления получается такое число q. Однако всегда возможно деление с остатком.

Разделить натуральное число p на натуральное число m с остатком — это значит найти два числа q и r из расширенного натурального ряда такие, что справедливо равенство $p = mq + r$, причем r удовлетворяет условию $0 \leqslant r < m$. Число q называется *частным*, а число r — *остатком*. Если $r = 0$, то говорят, что натуральное число p делится на натуральное число m *без остатка*.

Теорема 9. *Пусть p и m — любые натуральные числа. Тогда существует единственная пара чисел q и r из расширенного натурального ряда, удовлетворяющая условиям: $p = mq + r$ и $0 \leqslant r < m$.*

Доказательство. Если $p < m$, то пара чисел $q = 0$, $r = p$ удовлетворяет условиям теоремы.

Если $p=m$, то пара чисел $q=1$, $r=0$ удовлетворяет условиям теоремы.

Если $p>m$ и p делится на m, то существует натуральное число q_1 такое, что $p=mq_1$, тогда пара чисел $q=q_1$ и $r=0$ удовлетворяет условиям теоремы.

Если $p>m$ и p не делится на m, то пара чисел $q_1=1$ и $r_1=p-m$ будет удовлетворять условиям

$$p=m\cdot 1+r_1, \qquad r_1>0.$$

Поскольку p не делится на m, то $r_1\neq m$. Значит, либо $r_1<m$, либо $r_1>m$. Если $r_1<m$, то пара чисел $q=1$ и $r=r_1$ удовлетворяет условиям теоремы.

Если $r_1>m$, то число $r_2=r_1-m$ таково, что $r_1=m+r_2$ и $0<r_2<r_1$. А потому справедливо равенство

$$p=m\cdot 2+r_2.$$

Так как p не делится на m, то $r_2\neq m$. Значит, либо $r_2<m$, либо $r_2>m$. Если $r_2<m$, то пара чисел $q=2$ и $r=r_2$ удовлетворяет условиям теоремы.

Если же $r_2>m$, то повторяем этот процесс до тех пор, пока на каком-то k-м шаге окажется, что

$$p=mk+r_k, \qquad 0<r_k<m.$$

А это означает, что пара чисел $q=k$ и $r=r_k$ удовлетворяет условиям теоремы. Существование такого k-го шага вытекает из следующей аксиомы для натуральных чисел: *для любых натуральных чисел p и m таких, что $p>m$, найдется натуральное число l такое, что $p<ml$.*

Итак, доказано существование пары чисел q и r, удовлетворяющих условиям теоремы.

Теперь докажем единственность такой пары чисел. Предположим, что есть две пары чисел q, r и q_0, r_0, удовлетворяющие условиям теоремы, т. е. такие, что

$$p=mq+r \quad \text{и} \quad 0\leqslant r<m,$$
$$p=mq_0+r_0 \quad \text{и} \quad 0\leqslant r_0<m.$$

Следовательно, $mq+r=mq_0+r_0$.

Предположим для определенности, что $r_0>r$, тогда $0<r_0-r<m$ и $q-q_0>0$ и $m(q-q_0)=r_0-r$. В этом случае в последнем равенстве в правой части стоит натуральное число, меньшее чем m, а в левой части — большее чем m или равное ему, и, следовательно, равенство $m(q-q_0)=r_0-r$ является неверным. Аналогично, рассматривая случай $r_0<r$, приходим к противоречию. Следовательно, $r=r_0$. Тогда из равенства $m(q-q_0)=r_0-r=0$ следует равенство $q=q_0$, т. е. пара чисел q и r, удовлетворяющая условиям теоремы, единственна. Теорема доказана.

Приведем пример применения теоремы 9.

Докажем, что если p — простое число, большее трех, то одно из двух чисел $(p-1)$ или $(p+1)$ делится на три. Действительно, число p не делится на три без остатка, так как оно простое и больше трех. Следовательно, остаток при делении на 3 может быть 1 или 2. Если остаток равен единице, т. е. если $p=3q_1+1$, то ясно, что число $p-1$ делится на 3. Если остаток равен двум, т. е. если $p=3q_2+2$, то ясно, что число $p+1$ делится на 3.

Доказанная теорема дает способ нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух чисел. Возьмем два числа p и m из расширенного натурального ряда и пусть, для определенности, $p>m$. Если $m=0$, то НОД $(p;\ 0)=p$. Если $m\neq 0$, то $p=mq+r$, причем, либо p делится на m без остатка, т. е. $r=0$, либо p делится на m с остатком r, где $0<r<m$. В первом случае НОД $(p;\ m)=m$, но НОД $(m;\ 0)=m$, т. е. справедливо равенство НОД $(p;\ m)=$ НОД $(m;\ r)$. Оказывается, что аналогичное равенство

$$\text{НОД}(p;\ m)=\text{НОД}(m;\ r) \tag{9}$$

имеет место и в случае $0<r<m$.

Действительно, пусть l — общий делитель чисел p и m, т. е. пусть $p=lk$ и $m=ln$, где k, l и n — натуральные числа. Так как $p=mq+r$ и $r>0$, то $lk-lnq>0$, т. е. $l(k-nq)>0$. Но тогда $k-nq>0$ и $r=ls$, где $s=k-nq$ — натуральное число, т. е. l является делителем числа r.

Значит, каждый общий делитель чисел p и m является общим делителем чисел m и r. Рассуждая аналогично, получим и обратное утверждение: каждый общий делитель чисел m и r является общим делителем чисел p и m. Отсюда следует, что совпадают и наибольшие общие делители этих пар, т. е. что верно равенство (9). Так как $m<p$ и $r<m$, то задача нахождения НОД $(m;\ r)$ является более простой, чем задача нахождения НОД $(p;\ m)$.

Рассмотрим следующий пример. Найти НОД (1428; 420).

Так как $1428=420\cdot 3+168$, то НОД (1428; 420) = НОД (420; 168).

Так как $420=168\cdot 2+84$, то НОД (420; 168) = НОД (168; 84).

Так как $168=84\cdot 2$, то НОД (168; 84) = НОД (84; 0) = 84, т. е. НОД (1428; 420) = 84.

Таким образом, способ нахождения НОД $(p;\ m)$ заключается в применении равенства (9).

После нахождения НОД $(p;\ m)$ оказывается возможным найти и наименьшее общее кратное этих чисел: НОК $(p;\ m)$. Для этого надо воспользоваться теоремой 10, доказательство которой опустим.

Теорема 10. НОД $(p;\ m)\cdot$НОК $(p;\ m)=p\cdot m$.

Например, найдем НОК (1428; 420). Из предыдущего примера следует, что НОД (1428; 420) = 84. Следовательно, НОК $(1428;\ 420)=\frac{1428\cdot 420}{84}=7140$.

§ 2. Дроби

Выше отмечалось, что деление не всегда выполнимо в множестве натуральных чисел. Например, в множестве натуральных чисел нельзя 5 разделить на 4. Чтобы деление было выполнимо всегда, приходится рассматривать новые числа — части натуральных чисел, или дроби.

Обыкновенные дроби. Число, равное k-й части числа единица (k — натуральное число, большее единицы), обозначают $\frac{1}{k}$. Если эта часть берется m раз (m — натуральное число), то получаемое в результате этого новое число обозначают $\frac{m}{k}$. Число, определяемое по этому правилу при помощи двух натуральных чисел p и q ($q>1$) и записываемое как $\frac{p}{q}$, называют *дробью* или *частным* натуральных чисел p и q, при этом p называют *числителем* этой дроби, а число q — *знаменателем.*

Всякое натуральное число можно считать *дробью со знаменателем единица,* т. е. любое натуральное число n можно записать как дробь $\frac{n}{1}$. Поэтому дальше ограничение $q>1$ на знаменатель дроби снимается и говорят, что частное двух любых натуральных чисел p и q есть дробь $\frac{p}{q}$ и при этом множество всех дробей содержит в себе множество всех натуральных чисел.

Две дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{m}{k}$ считаются *равными,* если произведение числителя первой дроби на знаменатель второй равно произведению числителя второй на знаменатель первой, т. е. $\frac{p}{q}=\frac{m}{k}$, если $pk=qm$.

Аналогично $\frac{p}{q}>\frac{m}{k}$, если $pk>mq$; $\frac{p}{q}<\frac{m}{k}$, если $pk<mq$.

Суммой двух дробей называется дробь, числитель которой равен сумме произведений числителя первой дроби на знаменатель второй и числителя второй дроби на знаменатель первой, а знаменатель равен произведению знаменателей этих дробей, т. е.

$$\frac{p}{q}+\frac{m}{k}=\frac{pk+qm}{qk}.$$

Произведением двух дробей называется дробь, числитель которой равен произведению числителей этих дробей, а знаменатель — произведению знаменателей, т. е.

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{k}=\frac{pm}{qk}.$$

Справедливы следующие основные законы сложения и умножения дробей:

а) $\frac{p}{q}+\frac{m}{k}=\frac{m}{k}+\frac{p}{q}$ (коммутативность сложения);

б) $\left(\frac{p}{q}+\frac{m}{k}\right)+\frac{l}{n}=\frac{p}{q}+\left(\frac{m}{k}+\frac{l}{n}\right)$ (ассоциативность сложения);

в) $\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{k}=\frac{m}{k}\cdot\frac{p}{q}$ (коммутативность умножения);

г) $\left(\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{k}\right)\cdot\frac{l}{n}=\frac{p}{q}\left(\frac{m}{k}\cdot\frac{l}{n}\right)$ (ассоциативность умножения);

д) $\left(\frac{p}{q}+\frac{m}{k}\right)\cdot\frac{l}{n}=\frac{p}{q}\cdot\frac{l}{n}+\frac{m}{k}\cdot\frac{l}{n}$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

Разделить дробь $\frac{p}{q}$ на дробь $\frac{m}{n}$ — значит найти дробь $\frac{l}{k}$ такую, что

$$\frac{l}{k}\cdot\frac{m}{n}=\frac{p}{q}.$$

В отличие от натуральных чисел, деление для дробей всегда выполнимо. Используя определение равенства двух дробей, легко показать, что

$$\frac{l}{k}=\frac{pn}{qm}.$$

Вычесть из дроби $\frac{p}{q}$ дробь $\frac{m}{n}$ — значит найти дробь $\frac{r}{s}$ такую, что

$$\frac{m}{n}+\frac{r}{s}=\frac{p}{q}.$$

Вычитание так же, как и для натуральных чисел, не всегда выполнимо. Если $\frac{p}{q}<\frac{m}{n}$ или $\frac{p}{q}=\frac{m}{n}$, то не существует дроби, которая бы при сложении с дробью $\frac{m}{n}$ давала бы дробь $\frac{p}{q}$. Если же $\frac{p}{q}>\frac{m}{n}$, то вычитание выполнимо и легко видеть, что в этом случае

$$\frac{r}{s}=\frac{pn-mq}{nq}.$$

Из определения равенства двух дробей вытекает *основное свойство дробей: если числитель и знаменатель данной дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число k, то получится дробь, равная данной:*

$$\frac{p}{q}=\frac{pk}{qk}.$$

Дробь $\frac{p}{q}$ называется *несократимой*, если числа p и q взаимно простые.

Теорема 1. *Если* $\frac{p}{q}$ — *несократимая дробь, то дробь* $\frac{m}{n}$ *равна ей тогда и только тогда, когда* $m = pk$ *и* $n = qk$, *где* k — *некоторое натуральное число.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $m = pk$ и $n = qk$. Тогда дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{m}{n}$ равны по основному свойству дробей.

Необходимость. Пусть $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$. По определению равенства дробей $pn = mq$. Левая часть этого равенства делится на число p, следовательно, согласно основной теореме арифметики (см. § 1, теорема 7) и правая часть делится на p. Так как числа p и q взаимно простые, а произведение mq делится на p, то на p делится m (т. е. существует натуральное число k такое, что $m = pk$). Подставляя значение m в равенство $pn = mq$, получаем $np = pkq$, откуда $n = qk$. Теорема доказана.

Конечные десятичные дроби. Рассмотрим те дроби $\frac{p}{q}$, у которых знаменатель $q = 10^k$, где k — некоторое натуральное число. Для каждой такой дроби принята специальная форма записи, а именно: пишут числитель дроби и, отсчитав с правой стороны k цифр, отделяют их запятой; если в числителе меньше цифр, чем k, например n цифр ($n < k$), то пишут числитель и перед его первой цифрой дописывают $k - n$ нулей, затем ставят запятую и перед ней еще один нуль; если же в числителе k цифр, то пишут числитель, перед его первой цифрой ставят запятую и перед ней дописывают нуль.

Так, например, дроби $\frac{3721}{100}$, $\frac{21}{10\,000}$, $\frac{131}{1000}$ могут быть записаны так: 37,21; 0,0021; 0,131.

Дробь, записанная в таком виде, называется *конечной десятичной дробью.*

Значит, дроби 37,21; 0,0021; 0,131 могут служить примерами конечных десятичных дробей. Вообще, каждую конечную десятичную дробь будем дальше обозначать так:

$$a_0,\ a_1a_2a_3 \ldots a_k, \tag{1}$$

где k — натуральное число, a_0 — число из расширенного натурального ряда, каждое из $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — одно из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Часто конечную десятичную дробь называют просто десятичной дробью, опуская слово «конечная».

Любая конечная десятичная дробь легко переводится в обыкновенную. Для этого надо записать в числитель целое число, которое получается, если отбросить запятую у десятичной дроби, а в знаменатель написать число 10 в такой степени, сколько цифр стоит у десятичной дроби после запятой, после чего дробь можно сократить на общий множитель, если он есть, например $0{,}34 = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$.

Записать обыкновенную дробь в виде конечной десятичной — значит найти конечную десятичную дробь, равную данной. Естественно поставить вопрос: любую ли обыкновенную дробь можно записать в виде конечной десятичной дроби? Оказывается, что здесь дело обстоит намного сложнее, чем с переводом конечной десятичной дроби в обыкновенную.

Теорема 2. *Всякая дробь* $\frac{p}{q}$, *где натуральное число* q *не имеет простых делителей, отличных от* 2 *и* 5, *может быть записана в виде конечной десятичной дроби.*

Доказательство. Пусть дана дробь $\frac{p}{q}$, где $q=2^m\cdot 5^n$. По основному свойству дроби любая обыкновенная дробь не изменится, если числитель и знаменатель ее умножить на одно и то же число. Умножая числитель и знаменатель дроби $\frac{p}{q}$ на $2^n 5^m$, получим

$$\frac{p}{q}=\frac{p}{2^m\cdot 5^n}=\frac{2^n\cdot 5^m\cdot p}{2^m\cdot 5^n\cdot 2^n\cdot 5^m}=\frac{2^n\cdot 5^m p}{2^{n+m}\cdot 5^{n+m}}=\frac{2^n 5^m p}{10^{n+m}}.$$

Так как произведение $2^n\cdot 5^m p$ — натуральное число, то, обозначая его через l, запишем дробь в виде $\frac{p}{q}=\frac{l}{10^{n+m}}$, откуда видно, что дробь $\frac{p}{q}$ может быть записана конечной десятичной дробью. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если данная несократимая дробь* $\frac{p}{q}$ *может быть записана конечной десятичной дробью, то ее знаменатель не содержит простых множителей, отличных от* 2 *и* 5.

Доказательство. Если $q=1$, то теорема очевидна. Рассмотрим случай, когда $q\neq 1$. Дробь $\frac{p}{q}$ по условию представлена в виде конечной десятичной дроби, значит справедливо равенство $\frac{p}{q}=\frac{l}{10^k}$, где l и k — натуральные числа. Так как $\frac{p}{q}$ несократимая дробь, то из теоремы 1 вытекает, что $l=pm$ и $10^k=qm$. Число 10^k содержит только простые множители 2 и 5. Значит, и число qm не имеет других простых множителей, кроме 2 и 5, что вытекает из единственности разложения числа на простые множители. Следовательно, число q не содержит других простых множителей, кроме 2 и 5. Теорема доказана.

Теорема 4. *Для того чтобы несократимая дробь* $\frac{p}{q}$ *могла быть записана конечной десятичной дробью, необходимо и достаточно, чтобы ее знаменатель не содержал никаких других простых множителей, кроме* 2 *и* 5.

Справедливость теоремы 4 вытекает из теорем 2 и 3.

Теперь рассмотрим дробь $\frac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые числа, и q содержит простые множители, отличные от 2 и 5. Как вытекает из теоремы 4, эта дробь не может быть записана конечной десятичной дробью. Но такие дроби могут быть записаны при помощи так называемых бесконечных периодических десятичных дробей.

Бесконечные периодические десятичные дроби. Выше конечной десятичной дробью была названа дробь, записанная в виде (1), где после запятой стоит конечное число цифр. Естественно *бесконечной периодической десятичной дробью* назвать десятичную дробь, у которой после запятой стоит бесконечно много цифр, причем одна цифра или упорядоченная совокупность цифр, начиная с некоторого места после запятой, повторяется. Более точно это можно сказать так: бесконечной периодической десятичной дробью называется дробь, которая может быть записана в виде

$$a_0, a_1a_2\ldots a_k\ldots, \tag{2}$$

где

1. a_0 — число из расширенного натурального ряда;

2. в записи (2) — для любого натурального числа m на m-м месте после запятой стоит одно из чисел $0, 1, 2, \ldots, 9$, при этом или a_0 отлично от нуля, или, если a_0 равно нулю, то существует хотя бы одно натуральное число q такое, что на q-м месте после запятой стоит одно из чисел $1, 2, \ldots, 9$;

3. существуют такие натуральные числа l и p, что для любого натурального $n \geqslant l$ справедливо равенство $a_{n+p} = a_n$, при этом упорядоченная совокупность цифр $(a_l a_{l+1}\ldots a_{l+p-1})$ называется *периодом бесконечной периодической десятичной дроби* (2).

Обычно при записи бесконечной периодической десятичной дроби многоточие ставится после несколько раз повторенного периода, т. е. тогда, когда становится понятным, какое число является периодом этой дроби.

Например, очевидно, что дробь

$$4{,}27131313\ldots \tag{3}$$

есть бесконечная периодическая десятичная дробь с периодом (13).

Вместо того чтобы писать период несколько раз и потом ставить многоточие, принято писать период один раз, заключая его в круглые скобки:

$$4{,}27131313\ldots = 4{,}27\,(13),$$
$$0{,}454545\ldots = 0,(45).$$

Справедлива следующая теорема, доказательство которой опускается.

Теорема 5. *Всякая дробь $\frac{p}{q}$, где p и q взаимно просты и q содержит хотя бы один простой множитель, отличный от* 2 *и 5, может быть единственным образом записана в виде бесконечной периодической десятичной дроби.*

Объединяя теоремы 4 и 5, получаем, что любую обыкновенную дробь можно записать в виде либо конечной десятичной дроби, либо бесконечной периодической десятичной дроби. Приведем без доказательства правило перевода бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную (это правило будет доказано в гл. IX).

Чтобы обратить бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную, надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и сделать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом. Например:

$$0{,}1172\,(0)=\frac{11\,720-1172}{90\,000}=\frac{10\,548}{90\,000}=\frac{1172\cdot 9}{9\cdot 10\,000}=\frac{293\cdot 4}{4\cdot 2500}=\frac{293}{2500};$$

$$0,(45)=\frac{45-0}{99}=\frac{5\cdot 9}{9\cdot 11}=\frac{5}{11};$$

$$4{,}27\,(13)=\frac{42\,713-427}{9900}=\frac{42\,286}{9900}=\frac{2\cdot 21\,143}{2\cdot 4950}=\frac{21\,143}{4950}.$$

Пользуясь этим правилом, можно показать, что любую конечную десятичную дробь также можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби, причем двумя способами. Например:

$$0{,}172=0{,}172\,(0)=\frac{1720-172}{9000}=\frac{1548}{9000}=\frac{172\cdot 9}{9\cdot 1000}=0{,}172;$$

$$0{,}172=0{,}171\,(9)=\frac{1719-171}{9000}=\frac{1548}{9000}=\frac{172\cdot 9}{9\cdot 1000}=0{,}172.$$

Чтобы не было двух разных представлений одной и той же конечной десятичной дроби, принято не иметь число 9 в периоде. Тогда каждая десятичная конечная дробь может быть единственным образом записана в виде бесконечной периодической десятичной дроби с периодом 0 и, наоборот, каждая такая дробь есть конечная десятичная дробь. Итак, имеет место

Теорема 6. *Каждая обыкновенная дробь $\frac{p}{q}$ может быть единственным образом представлена в виде бесконечной десятичной периодической дроби и, наоборот, каждая бесконечная десятичная периодическая дробь может быть единственным образом представлена в виде обыкновенной дроби* $\frac{p}{q}$.

Таким образом, можно сказать, что каждая бесконечная периодическая десятичная дробь есть другая форма записи некоторой вполне определенной обыкновенной дроби.

§ 3. Целые числа

Выше уже отмечалось, что вычитание не всегда выполнимо в множестве натуральных чисел. Например, в множестве натуральных чисел нельзя вычесть из числа 3 число 5. Поэтому возникает необходимость в расширении множества натуральных чисел.

Введем в рассмотрение новые числа — натуральные числа со знаком минус, т. е. числа вида $(-m)$, где m — натуральное число, и будем называть такие числа *отрицательными* целыми числами. Отрицательное целое число $(-m)$ называют иногда числом, *противоположным* натуральному числу m.

Будем говорить, что два целых отрицательных числа $(-m)$ и $(-n)$ равны, если равны натуральные числа m и n. Теперь рассмотрим множество чисел, состоящее из всех натуральных чисел, нуля и всех целых отрицательных чисел. Будем считать, что два числа из этого множества равны, если либо они — равные натуральные числа, либо они — равные целые отрицательные числа, либо каждое из них есть нуль. Определим теперь действия сложения и умножения для чисел из этого множества. Если оба числа, которые надо сложить или умножить, есть числа из расширенного натурального ряда, то действия сложения и умножения для этих двух чисел определяются так же, как в § 1. Если же одно число или оба числа, которые надо сложить или умножить, есть отрицательные целые числа, то действия сложения и умножения для этих двух чисел производятся следующим образом:

а) $(-m)+(-n)=-(m+n)$;

б) $(-m)+0=0+(-m)=-m$;

в) $(-m)+n=\begin{cases} -(m-n), & \text{если } m>n; \\ n-m, & \text{если } m<n; \\ 0, & \text{если } m=n; \end{cases}$

г) $(-m)n=m(-n)=-(mn)$;

д) $(-m)(-n)=mn$;

е) $(-m)\cdot 0=0\cdot(-m)=0$.

Множество чисел, состоящее из всех натуральных чисел, нуля и всех отрицательных целых чисел, с только что введенными определениями равенства и действий сложения и умножения, называется *множеством целых чисел* и обозначается буквой Z, а сами эти числа называются *целыми числами*. Натуральные числа иногда называются также целыми положительными числами.

Основные законы сложения и умножения целых чисел аналогичны основным законам сложения и умножения натуральных чисел и потому здесь не приводятся.

Для действий сложения и умножения целых чисел вводятся обратные действия — вычитание и деление (кроме деления на нуль). При этом действие вычитания теперь всегда выполнимо, а действие деления не всегда. Но, как и для натуральных чисел, для целых чисел всегда выполнимо деление с остатком. Ниже рассматривается подробно лишь деление с остатком целого числа на натуральное число.

Деление с остатком. *Разделить целое число a на натуральное число m с остатком* — это значит найти два целых числа q и r таких, что справедливо равенство $a = mq + r$, причем число r удовлетворяет условию $0 \leqslant r < m$.

Если $r = 0$, то говорят, что целое число a делится нацело на натуральное число m.

Теорема 1. *Пусть a — любое целое число и m — любое натуральное число. Тогда существует единственная пара целых чисел q и r, удовлетворяющая условиям: $a = mq + r$ и $0 \leqslant r < m$.*

Доказательство. Случай, когда a — натуральное число, был разобран в § 1.

Если $a = 0$, то пара чисел $q = 0$ и $r = 0$ удовлетворяет условиям теоремы.

Пусть $a = -n$ — целое отрицательное число. Тогда n — натуральное число, и по уже доказанному получаем, что существует пара целых чисел q_1 и r_1 такая, что $n = mq_1 + r_1$ и $0 \leqslant r_1 < m$. В случае, если $r_1 = 0$, из равенства $n = mq_1 + r_1$ вытекает равенство $a = mq$, где $q = (-q_1)$, т. е. пара чисел $q = -q_1$ и $r = 0$ удовлетворяет условиям теоремы. Если $0 < r_1 < m$, то из равенства $n = mq_1 + r_1$ вытекает равенство $a = (-q_1 - 1)m + (m - r_1)$, и тогда пара чисел $q = -q_1 - 1$ и $r = m - r_1$ удовлетворяет условиям теоремы.

Итак, для любого целого числа a и любого натурального числа m существует пара целых чисел q и r таких, что $a = mq + r$ и $0 \leqslant r < m$.

Единственность пары целых чисел q и r доказывается так же, как и в теореме 9 § 1. Так же, как и в § 1, целое число, делящееся на 2 нацело, будем называть четным числом, а делящееся на 2 с остатком $r = 1$ — нечетным.

Приведем некоторые следствия теоремы 1.

а) *Любое четное число a может быть записано в виде $a = 2q$, где q — некоторое целое число.*

б) *Любое нечетное число a может быть записано в виде $a = 2q_1 + 1$, где q_1 — некоторое целое число.*

в) *Любое целое число a, делящееся нацело на три, может быть записано в виде $a = 3q$, где q — некоторое целое число.*

г) *Любое целое число a, не делящееся нацело на три, может быть записано в одном из следующих видов: $a = 3l + 1$ или $a = 3n + 2$, где l и n — некоторые целые числа.*

д) *Любое целое число a, делящееся нацело на некоторое натуральное число k, может быть записано в виде $a = kq$, где q — некоторое целое число.*

е) *Любое целое число a, не делящееся нацело на некоторое натуральное число k, может быть записано в виде $a = kq + r$, где r — одно из чисел $1, 2, \ldots, (k-1)$, а q — некоторое целое число.*

В зависимости от делимости целых чисел на данное натуральное число k множество целых чисел можно разбить на k классов. Например, если $k=2$, то множество всех целых чисел разбивается на два класса: четные числа и нечетные числа.

Множество всех целых чисел можно разбить также и на три класса:

а) числа, кратные числу три, т. е. числа вида $3q$, где q — любое целое число;

б) числа, имеющие при делении на три остаток единицу, т. е. числа вида $3l+1$, где l — любое целое число;

в) числа, имеющие при делении на три остаток два, т. е. числа вида $3n+2$, где n — любое целое число.

Из приведенных примеров ясно, как разбить множество целых чисел на 4 класса, 5 классов и т. д.

Приведем примеры, показывающие, как разбиение целых чисел на классы помогает решать ряд задач.

1. Доказать, что при любом целом b число $b(2b+1)(7b+1)$ делится на три.

Доказательство. Разобьем множество всех целых чисел на три класса: а) $3q$; б) $3q+1$; в) $3q+2$, где q — любое целое число.

Пусть b — любое число из класса а). Тогда $b(2b+1)(7b+1) = 3q(6q+1)(21q+1)$, откуда видно, что при любом целом q это число делится на 3.

Пусть b — любое число из класса б). Тогда $b(2b+1)(7b+1) = (3q+1)\cdot 3\cdot(2q+1)(21q+8)$, откуда видно, что при любом целом q это число делится на 3.

Пусть b — любое число из класса в). Тогда $b(2b+1)(7b+1) = (3q+2)(6q+5)\cdot 3\cdot(7q+5)$, откуда видно, что при любом целом q это число делится на 3.

2. Доказать, что среди любых k последовательных целых чисел есть число, делящееся нацело на k.

Доказательство. Все целые числа можно разбить на следующие k классов:

$$\begin{aligned} &kq, \\ &kq+1, \\ &kq+2, \\ &\quad\vdots \\ &kq+(k-1), \end{aligned}$$

где q — любое целое число.

Пусть даны k последовательных целых чисел, начинающихся с некоторого целого числа b, т. е. $b, (b+1), (b+2), \ldots, [b+(k-1)]$, и пусть число b содержится в классе $kq+i$ для некоторого

$i\,[i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (k-1)]$, т. е. пусть $b=kq+i$, где q — некоторое целое число. Поскольку среди k последовательных чисел есть число

$$[b+(k-i)]=[kq+i+(k-i)]=k(q+1),$$

которое делится нацело на k, то утверждение 2 доказано.

§ 4. Рациональные и иррациональные числа

Рациональные числа. Как уже отмечалось выше, в множестве натуральных чисел не всегда выполнимы действия вычитания и деления. В § 2 множество натуральных чисел было расширено до множества обыкновенных дробей, и в этом множестве действие деление уже всегда выполнимо; однако действие вычитания выполнимо не всегда. Поэтому возникает необходимость во введении новых чисел.

Введем в рассмотрение новые числа — *дроби со знаком минус*, т. е. числа вида $\left(-\frac{m}{n}\right)$, где m и n — натуральные числа. Дробь $\left(-\frac{m}{n}\right)$ называют иногда числом, *противоположным* дроби $\frac{m}{n}$.

Теперь рассмотрим множество чисел, состоящее из всех дробей, нуля и всех дробей со знаком минус. Можно считать, что каждое число из этого множества есть отношение целого числа к натуральному. Поэтому будем считать, что это множество состоит из чисел вида $\frac{p}{q}$, где q — натуральное число, а p — целое число.

Будем считать, что два числа $\frac{p}{q}$ и $\frac{m}{n}$ из этого множества равны, если справедливо равенство $pn=qm$. Будем считать, что сложение и умножение чисел из этого множества производится по следующим правилам:

$$\frac{p}{q}+\frac{m}{n}=\frac{pn+qm}{qn} \quad \text{и} \quad \frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}=\frac{pm}{qn}.$$

Множество чисел, состоящее из всех чисел вида $\frac{p}{q}$, где q — натуральное число, а p — целое число, с только что введенными определениями равенства и действий сложения и умножения, называется *множеством рациональных чисел* и обозначается буквой Q, а сами эти числа называются *рациональными числами*.

Если p — натуральное число, то число $\frac{p}{q}$ называется *положительным рациональным числом, или положительной дробью.*

Если же p — отрицательное число, то число $\frac{p}{q}$ называется *отрицательным рациональным числом*, или *отрицательной дробью*. Ясно, что множество целых чисел — часть множества рациональных чисел.

Для действий сложения и умножения рациональных чисел вводятся обратные действия — вычитание и деление, при этом оба эти действия, за исключением запрещенного деления на нуль, всегда выполнимы.

Основные законы сложения и умножения рациональных чисел аналогичны основным законам сложения и умножения целых чисел и потому здесь не приводятся.

Если рациональное число r взято сомножителем k раз ($k > 1$), то произведение $\underbrace{rr\ldots r}_{k \text{ раз}}$ называют *k-й степенью числа r* и обозначают r^k. Кроме того, по определению $r^1 = r$.

Как и для натуральных чисел, справедливы следующие свойства степеней рациональных чисел:

а) $r^m r^k = r^{m+k}$;

б) $r_1^m r_2^m = (r_1 r_2)^m$;

в) $(r^k)^m = r^{km}$;

г) $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^k = \frac{r_1^k}{r_2^k}$, если $r_2 \neq 0$;

д) $\frac{r^k}{r^m} = r^{k-m}$, если $k > m$, $r \neq 0$.

По определению $r^0 = 1$ для любого рационального числа r, кроме числа нуль.

В связи с понятием степени рационального числа часто возникает задача: для данного натурального числа k и для данного положительного рационального числа r_1 найти другое положительное рациональное число r_2 такое, что $r_2^k = r_1$.

Эта задача не всегда имеет решение.

Теорема 1. *Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.*

Доказательство. Предположим, что существует рациональное число $\frac{p}{q}$ такое, что $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Не ограничивая общности, будем считать p и q взаимно простыми (если числитель и знаменатель данного рационального числа имеют общие множители, то число $\frac{p}{q}$, полученное после сокращения, равно данному). Пользуясь свойством г) степеней рациональных чисел, запишем наше предположение в виде $\frac{p^2}{q^2} = \frac{2}{1}$.

Из определения равенства рациональных чисел вытекает, что $p^2 = 2q^2$. Поскольку правая часть этого равенства делится на 2, то и левая должна делиться на 2. Но число p^2 делится на 2 только в случае, если число p делится на 2 (если p не делится на 2, то p^2 также не делится на 2). Поскольку p делится на 2, то существует целое число k такое, что $p = 2k$. Подставляя это значение p в равенство $p^2 = 2q^2$, получаем, что $q^2 = 2k^2$. Поскольку правая часть этого равенства делится на 2, то и левая делится на 2, значит, число q делится на 2, т. е. $q=2m$.

Итак, получили, что числа p и q имеют общий множитель — число 2, а по предположению в равенстве $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$ числа p и q взаимно простые. Это противоречие и означает, что сделанное предположение неверно, а верно утверждение теоремы.

Таким образом, возникает необходимость ввести новые числа, отличные от рациональных, такие, например, как число, квадрат которого равен 2.

Иррациональные числа. В § 2 были введены в рассмотрение бесконечные периодические десятичные дроби. Теперь расширим это понятие, введя в рассмотрение новые числа, которые будем называть бесконечными десятичными дробями.

Бесконечной десятичной дробью назовем число, которое может быть записано или в виде

$$a_0,a_1a_2\ldots a_k\ldots, \qquad (1)$$

или в виде

$$-a_0,a_1a_2\ldots a_k\ldots, \qquad (2)$$

где a_0 — число из расширенного натурального ряда, a_1, a_2, ..., a_k, ... — числа из множества чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Многоточие означает, что для любого натурального числа m на m-м месте после запятой стоит число a_m.

Если среди чисел a_0, a_1, a_2, ..., a_k ... хотя бы одно отлично от нуля, то число, записанное в виде (1), будем называть *положительной бесконечной десятичной дробью*, а число, записанное в виде (2), будем называть *отрицательной бесконечной десятичной дробью.* Если среди чисел a_0, a_1, a_2, ..., a_k,... нет чисел, отличных от нуля, то число, записанное в виде (1), будем считать равным числу, записанному в виде (2), и называть нулевой бесконечной периодической десятичной дробью и обозначать так: 0,(0). Очевидно, что множество всех бесконечных десятичных дробей содержит в себе:

1) множество всех положительных периодических бесконечных десятичных дробей;

2) множество всех отрицательных периодических бесконечных десятичных дробей;

3) нулевую бесконечную периодическую десятичную дробь.

Покажем теперь, что только что перечисленными периодическими бесконечными десятичными дробями не исчерпывается множество всех бесконечных десятичных дробей.

Теорема 2. *Бесконечная десятичная дробь*

$$0,10100100010000100000100000001\ldots,$$

образуемая по правилу: за каждой единицей идет группа нулей, содержащая на один нуль больше, чем предыдущая группа,— не является периодической десятичной дробью.

Доказательство. Предположим, что это периодическая дробь. Пусть ее период состоит из n цифр и первый период начинается с k-го места. Ясно, что в рассматриваемой дроби, начиная с некоторого m-го места, каждой единице будут предшествовать $(2n+1)$ или более подряд идущих нулей. Рассмотрим каждую из таких групп нулей, начинающуюся с любого p-го места, где $p>k$ и $p>m$. Возьмем теперь нуль, стоящий посредине этой группы. Этот нуль находится либо в начале, либо в конце, либо внутри некоторого периода длины n, но во всех перечисленных случаях этот период целиком лежит на взятом отрезке из $(2n+1)$ или более нулей. Значит, период состоит из одних нулей, и, следовательно, в записи дроби с k-го места должны быть только нули, а это неверно. Теорема доказана.

Из вышеизложенного вытекает, что каждое рациональное число может быть записано в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Поэтому естественно *иррациональным числом* назвать число, которое может быть записано в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

В дальнейшем будем считать, что любая бесконечная периодическая десятичная дробь есть вполне определенное рациональное число, а любая бесконечная непериодическая десятичная дробь есть вполне определенное иррациональное число. Заметим, что в силу этих определений нулевая бесконечная периодическая дробь есть число нуль.

§ 5. Действительные числа

Множество всех бесконечных десятичных дробей (с вводимыми ниже определениями равенства, суммы и произведения этих чисел) называется *множеством действительных чисел* и обозначается буквой R, а каждая бесконечная десятичная дробь называется *действительным числом*. Положительная бесконечная десятичная дробь будет называться *положительным действительным числом*, отрицательная бесконечная десятичная дробь — *отрицательным действительным числом*, нулевая бесконечная периодическая десятичная дробь (с периодом нуль) — *числом нуль*. Поскольку бесконечные десятичные дроби есть периодические и непериодические, то каждое действительное число является либо рациональным, либо иррациональным.

Два положительных действительных числа

$$a_0,a_1a_2\ldots a_k\ldots,$$
$$b_0,b_1b_2\ldots b_k\ldots$$

равны, если $b_k=a_k$ для всех чисел k из расширенного натурального ряда.

Из двух положительных действительных чисел

$$a_0,a_1a_2\ldots a_k\ldots,$$
$$b_0,b_1b_2\ldots b_k\ldots$$

первое *больше* второго, если либо $a_0 > b_0$, либо если $a_0 = b_0$, но $a_1 > b_1$, либо если $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$ (для некоторого натурального числа n), но $a_{n+1} > b_{n+1}$.

Два действительных числа

$$a_0,a_1a_2\ldots a_k\ldots \quad \text{и} \quad -b_0,b_1b_2\ldots b_k\ldots$$

называются *противоположными*, если $b_k = a_k$ для всех чисел k из расширенного натурального ряда. *Два отрицательных действительных числа равны*, если равны противоположные им числа. *Из двух отрицательных чисел больше то*, у которого противоположное (положительное) число меньше. Положительное число больше нуля и любого отрицательного числа. Нуль больше любого отрицательного числа.

Рассмотрим *приближенные значения бесконечных дробей*. Оборвем на каком-то месте бесконечную положительную десятичную дробь, изображающую данное положительное действительное число. Получим конечную десятичную дробь (которую можно записать в виде бесконечной с периодом нуль). Эта дробь будет меньше данного числа (или равна ему). Такая дробь называется *приближенным значением данного положительного действительного числа с недостатком*.

Если положительную бесконечную десятичную дробь оборвать на каком-то k-м месте и к полученной дроби прибавить дробь $\frac{1}{10^k}$, то получим конечную десятичную дробь, которая больше данного действительного числа. Такая дробь называется *приближенным значением данного положительного действительного числа с избытком*.

Если отрицательную бесконечную дробь оборвать на каком-то месте, то получим конечную десятичную дробь, которая больше данного действительного числа (или равна ему). Такая дробь называется *приближенным значением данного отрицательного действительного числа с избытком*.

Если отрицательную бесконечную дробь оборвать на каком-то k-м месте и к полученной дроби прибавить дробь $\left(-\frac{1}{10^k}\right)$, то получим конечную десятичную дробь, которая меньше данного действительного числа. Такая дробь называется *приближенным значением данного отрицательного числа с недостатком*.

Примеры. 1. Приближенным значением числа 0,4(31) с недостатком будут следующие конечные дроби: 0,4; 0,43; 0,431; 0,4313; 0,43131; ... Приближенным значением этого же числа с избытком будут дроби 0,5; 0,44; 0,432; 0,4314; 0,43132; ...

2. Приближенным значением числа —3,2(17) с недостатком будут следующие конечные дроби: —3,3; —3,22; —3,218; —3,2172; —3,21718; ... Приближенным значением этого же

числа с избытком будут дроби —3,2; —3,21; —3,217; —3,2171; —3,21717; ...

Определим теперь действия сложения и умножения для действительных чисел.

Суммой двух действительных чисел называется число, которое больше (или равно) суммы двух любых приближенных их значений с недостатком, но меньше (или равно) суммы двух любых приближенных их значений с избытком.

Без доказательства примем, что такое число всегда существует и притом только одно.

Отметим частный случай: сумма действительного числа a и противоположного ему числа (которое будем обозначать $(-a)$) есть число нуль.

Произведением двух действительных положительных чисел $a_0,a_1a_2\ldots a_k\ldots$ и $b_0,b_1b_2\ldots b_k\ldots$ называется число, которое больше (или равно) произведения двух любых приближенных их значений с недостатком, но меньше (или равно) произведения двух любых приближенных их значений с избытком.

Без доказательства примем, что такое число всегда существует и притом только одно.

Произведение двух действительных отрицательных чисел $(-a_0,a_1a_2\ldots a_k\ldots)$ и $(-b_0,b_1b_2\ldots b_k\ldots)$ равно произведению противоположных им положительных чисел $a_0,a_1a_2\ldots a_k\ldots$ и $b_0,b_1b_2\ldots b_k\ldots$. Произведение двух действительных чисел, имеющих разные знаки $a_0,a_1a_2\ldots a_k\ldots$ и $(-b_0,b_1b_2\ldots b_k\ldots)$ или $(-a_0,a_1a_2\ldots a_k\ldots)$ и $b_0,b_1b_2\ldots b_k\ldots$, равно отрицательному числу, противоположному произведению чисел $a_0,a_1a_2\ldots a_k\ldots$ и $b_0,b_1b_2\ldots b_k\ldots$.

Произведение двух чисел, одно из которых есть нуль, равно нулю.

Справедливы следующие основные законы сложения и умножения действительных чисел:

а) $a+b=b+a$ (коммутативность сложения);

б) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (ассоциативность сложения);

в) $ab=ba$ (коммутативность умножения);

г) $(ab)c=a(bc)$ (ассоциативность умножения);

д) $(a+b)c=ac+bc$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

Для действий сложения и умножения действительных чисел вводятся обратные действия — вычитание и деление.

Вычесть из действительного числа a действительное число b — значит найти действительное число c такое, что $b+c=a$.

Разделить действительное число a на отличное от нуля действительное число b — значит найти действительное число d такое, что $bd=a$.

На множестве действительных чисел действия вычитания и деления, за исключением запрещенного деления на нуль, всегда выполнимы.

Если действительное число a взято множителем n раз (n — натуральное число, $n>1$), то произведение $\underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ раз}}$ называют *n-й степенью* числа a и обозначают a^n. Кроме того, по определению $a^1=a$. Свойства степени действительных чисел аналогичны свойствам степени рациональных чисел и потому здесь не приводятся. В связи с понятием степени действительных чисел часто возникает такая задача: для данного натурального числа n и для данного неотрицательного действительного числа a найти другое неотрицательное действительное число b такое, что $b^n=a$.

Неотрицательное число b такое, что его n-я степень есть данное число a, т. е. $b^n=a$, называется *арифметическим корнем* степени n из неотрицательного числа a и обозначается $b=\sqrt[n]{a}$.

Теорема. *Для любого натурального числа n и любого неотрицательного числа a существует и притом единственный в множестве неотрицательных чисел арифметический корень степени n из числа a.*

Доказательство теоремы опустим.

В случае $n=2$ в обозначении корня цифру 2 не пишут; в случае $n=1$ корень 1-й степени из числа a есть само число a. Арифметические корни могут быть рациональными и иррациональными числами.

Например, $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ есть рациональное число $\frac{2}{3}$; $\sqrt{2}$ — есть иррациональное число (это вытекает из теоремы 1 § 4).

Заметим, что по определению арифметический корень из числа 0 есть нуль.

Абсолютной величиной (или *модулем*) действительного числа a называется: само это число, если a — положительное число; нуль, если a — нуль; число противоположное числу a, если a — отрицательное число. Абсолютная величина действительного числа a обозначается $|a|$. Сформулированное выше определение можно коротко записать так:

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{если} \quad a>0; \\ 0, & \text{если} \quad a=0; \\ -a, & \text{если} \quad a<0. \end{cases}$$

Основные свойства абсолютных величин действительных чисел будут приведены в главе II.

Заметим, что в силу определения арифметического корня из неотрицательного числа для любого действительного числа справедливо равенство $\sqrt{a^2}=|a|$.

Поставим более общую задачу: для любого действительного числа a и любого натурального числа n найти действительные числа b такие, что $b^n=a$. Если такие числа существуют, то они называются *действительными алгебраическими корнями n-й степени* из действительного числа a. Если число a неотрицательное, то, как говорилось выше, существует одно неотрицательное число b такое, что $b^n = a$, т. е. для любого неотрицательного числа a всегда существует хотя бы один алгебраический корень b, для обозначения которого есть специальный символ $\sqrt[n]{a}$ (арифметический корень). В случае существования других алгебраических корней, кроме арифметического корня, для их обозначения нет специальных символов.

Рассмотрим вопрос существования алгебраического корня из действительного числа. Заметим, что в этом параграфе утверждения о количестве действительных корней для данного действительного числа принимаются без доказательства. Их справедливость будет вытекать из общей теоремы о количестве корней из комплексного числа (гл. XI).

Пусть $a = 0$, тогда для любого натурального числа n существует и притом только один алгебраический корень n-й степени — число b, равное 0.

Пусть a — положительное число и n — нечетное натуральное число ($n = 2k + 1$). Тогда существует и притом только один арифметический корень $b_1 = \sqrt[2k+1]{a}$ из этого числа и других действительных алгебраических корней из этого числа нет. Таким образом, существует только один алгебраический корень нечетной степени из положительного числа, а именно арифметический корень.

Пусть a — положительное число и n — четное натуральное число ($n = 2k$). Тогда существует и притом только один арифметический корень $b_1 = \sqrt[2k]{a}$ и действительный алгебраический корень $b_2 = -\sqrt[2k]{a}$ из этого числа. Таким образом, существуют два действительных алгебраических корня четной степени из положительного числа a: $b_1 = \sqrt[2k]{a}$ и $b_2 = -\sqrt[2k]{a}$.

Пусть a — отрицательное число и n — четное натуральное число ($n = 2k$). Поскольку любое не равное нулю действительное число в четной степени есть положительное число, а число 0 в любой натуральной степени есть нуль, то нет ни одного действительного числа b такого, что b^{2k} — отрицательное число. Значит, нет действительного алгебраического корня четной степени из отрицательного числа.

Пусть a — отрицательное число и n — нечетное натуральное число ($n = 2k + 1$). Покажем, что есть одно действительное отрицательное число b такое, что $b^n = a$. Обозначим $c = -a$. Тогда $c > 0$, и потому существует единственный арифметический корень d степени $(2k + 1)$ из числа c: $d^{2k+1} = c$, или $d = \sqrt[2k+1]{c} = \sqrt[2k+1]{-a} = \sqrt[2k+1]{|a|}$. Положим теперь $b = -d$. Тогда $b^{2k+1} = (-1)^{2k+1}d^{2k+1} = (-1)c = (-1)(-a) = a$. Значит, $b = -\sqrt[2k+1]{|a|}$ есть отрицательное число такое, что $b^{2k+1} = a$, т. е. $\left(-\sqrt[2k+1]{|a|}\right)$ — действительный алгебраический корень из отрицательного числа a.

Примеры. 1. Пусть $a=-7$, $n=5$, тогда вещественный алгебраический корень 5-й степени из числа (-7) есть число $b=-\sqrt[5]{|-7|}=-\sqrt[5]{7}$.

2. Пусть $a=-8$, $n=3$, тогда вещественный алгебраический корень 3-й степени из числа (-8) есть число $b=-\sqrt[3]{|-8|}=$ $=-\sqrt[3]{8}=-2$.

Замечание. Иногда корень нечетной степени из отрицательного числа a записывают в виде $b=\sqrt[2k+1]{a}$, понимая под этим число $b=-\sqrt[2k+1]{|a|}$. Например, вместо $b=-\sqrt[5]{7}$ пишут $b=\sqrt[5]{-7}$. Но в дальнейшем такая запись употребляться не будет.

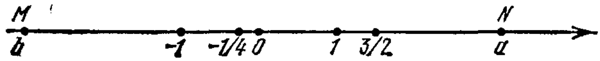


Рис. 1.

Перейдем теперь к *геометрической интерпретации* действительных чисел. Пусть дана горизонтальная прямая (рис. 1). Она имеет два взаимно противоположных направления. Назовем одно из этих направлений положительным, а другое отрицательным. Для определенности за положительное направление выберем направление вправо (если смотреть по рисунку). Зафиксируем на прямой некоторую точку O и назовем эту точку *началом отсчета*. Точка O разбивает прямую на две части, называемые *лучами*. Луч, направленный вправо, назовем *положительным* лучом, а луч, направленный влево,— *отрицательным* лучом. Пусть задан отрезок, принятый за единицу длины; в таких случаях говорят, что введен масштаб.

Прямую, на которой выбрано начало отсчета, положительное направление и введен масштаб, называют *числовой прямой*.

Каждой точке числовой прямой можно поставить в соответствие действительное число по следующему правилу:

— выбранной точке O поставим в соответствие число нуль;

— каждой точке N на положительном луче поставим в соответствие положительное число a, где a — длина отрезка ON;

— каждой точке M на отрицательном луче поставим в соответствие отрицательное число b, где $|b|$ — длина отрезка OM.

Таким образом, каждой точке числовой прямой (при выбранном масштабе) поставлено в соответствие единственное действительное число.

Покажем, что этим процессом перебраны все действительные числа. Предположим противное, т. е. пусть некоторое действительное число c не поставлено в соответствие некоторой точке на числовой прямой. Если число c положительное, то найдется отрезок, длина которого равна c. Отложив этот отрезок вправо от точки O на числовой прямой, получим точку, которой число c должно соответствовать, т. е. получим противоречие. Если же число c отрицательное, то найдется отрезок, длина которого равна $|c|$, отложив этот отрезок влево от точки O на числовой прямой, получим точку, которой должно соответствовать число c, т. е. опять получим противоречие.

Итак:

1. каждой точке на числовой прямой поставлено в соответствие одно и только одно действительное число;

2. разным точкам числовой прямой поставлены в соответствие разные числа;

3. нет ни одного действительного числа, которое не соответствовало бы какой-либо точке числовой прямой.

В таких случаях говорят, что между множеством всех точек числовой прямой и множеством всех действительных чисел установлено *взаимно однозначное соответствие*.

Отметим, что часто при этом точки числовой прямой отождествляются с числами, которые им поставлены в соответствие. Пользуясь этим, легко сформулировать, какое из двух действительных чисел больше: *больше то, которое расположено на числовой прямой правее другого.*

Система координат на прямой. Если на прямой выбрано начало отсчета, положительное направление и введен масштаб, то говорят еще, что на прямой задана *система координат*. При этом сама прямая называется *координатной осью*, а точка O — *началом координат*. Каждой точке M этой прямой ставят в соответствие число, называемое *координатой* точки M в заданной системе координат. Это число определяется по правилу: если точка M находится на положительном луче, то это число равно положительному числу — длине отрезка OM; если точка M находится на отрицательном луче, то это число равно отрицательному числу — длине отрезка OM со знаком минус; если же точка M совпадает с началом координат, то это число равно нулю.

Пусть данная координатная ось расположена горизонтально, причем так, что положительный луч направлен вправо. Тогда любая точка, лежащая справа от начала координат O, имеет положительную координату, а любая точка, лежащая слева от начала координат O, — отрицательную координату. Координата точки O, начала координат, равна нулю. Легко видеть, что координата любой точки M координатной оси равна действительному числу, поставленному в соответствие точке на числовой прямой.

Если рассматривается несколько разных фиксированных точек оси t, то часто их обозначают некоторой заглавной буквой с разными номерами, например $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n, \ldots$; координаты этих точек обозначают буквой оси с соответствующими номерами, т. е. $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots$ Чтобы указать, что данная точка имеет данную координату, записывают эту координату в круглых скобках рядом с обозначением самой точки, например $M_1(t_1)$, $M_2(t_2)$, $M_3(t_3), \ldots, M_n(t_n), \ldots$ Говоря, что дана точка, понимают, что дана ее координата; говоря, что надо найти точку, ищут ее координату.

Теорема 1. *При любом расположении на координатной оси двух разных точек $M_1(t_1)$ и $M_2(t_2)$ расстояние d между этими точками равно модулю разности их координат, т. е.*

$$d = |t_1 - t_2|.$$

Доказательство. Если точки M_1 и M_2 совпадают, то утверждение теоремы очевидно. Пусть точки M_1 и M_2 не совпадают и пусть для определенности точка $M_2(t_2)$ лежит правее точки $M_1(t_1)$ (если точка $M_1(t_1)$ лежит правее точки $M_2(t_2)$, то доказательство повторяется с заменой t_2 на t_1, а t_1 на t_2).

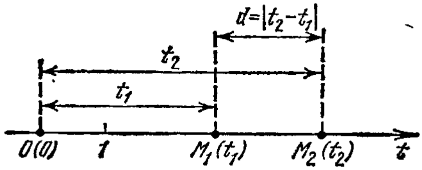


Рис. 2.

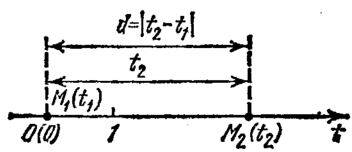


Рис. 3.

Пусть $M_1(t_1)$ и $M_2(t_2)$ — любые не совпадающие точки, лежащие правее начала координат O (рис. 2). Тогда длина отрезка M_1M_2 равна длине отрезка OM_2, которая равна t_2, минус длина отрезка OM_1, которая равна t_1, т. е.

$$d = t_2 - t_1 = |t_2 - t_1|.$$

Пусть $M_1(t_1)$ совпадает с началом координат $O(0)$, т. е. $t_1 = 0$, а $M_2(t_2)$ — любая точка, лежащая правее начала координат O (рис. 3). Тогда длина d отрезка M_1M_2 равна длине отрезка OM_2, которая равна t_2, т. е.

$$d = t_2 = |t_2 - 0| = |t_2 - t_1|.$$

Пусть $M_1(t_1)$ — любая точка, лежащая левее начала координат, а точка $M_2(t_2)$ — любая точка, лежащая правее начала координат

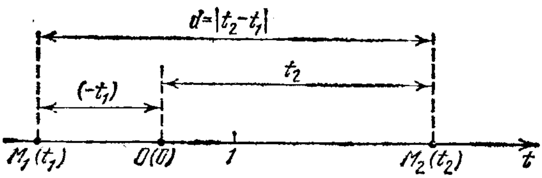


Рис. 4.

(рис. 4). Тогда длина d отрезка M_1M_2 равна длине отрезка OM_2, которая равна t_2, плюс длина отрезка OM_1, которая равна $(-t_1)$, т. е.

$$d = t_2 + (-t_1) = t_2 - t_1 = |t_2 - t_1|.$$

Пусть $M_1(t_1)$ — любая точка, лежащая левее начала координат, а точка $M_2(t_2)$ совпадает с началом координат $O(0)$, т. е. $t_2=0$ (рис. 5). Тогда длина d отрезка M_1M_2 совпадает с длиной отрезка M_1O, которая равна $(-t_1)$, т. е.

$$d=-t_1=|0-t_1|=|t_2-t_1|.$$

Пусть $M_1(t_1)$ и $M_2(t_2)$ — любые несовпадающие точки, лежащие левее начала координат O (рис. 6). Тогда длина d отрезка M_1M_2

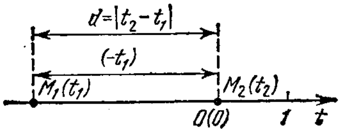


Рис. 5.

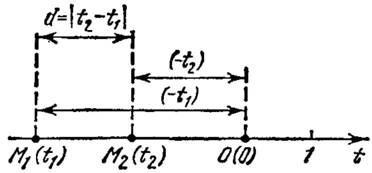


Рис. 6.

равна длине отрезка OM_1, которая равна $(-t_1)$, минус длина отрезка OM_2, которая равна $(-t_2)$, т. е.

$$d=(-t_1)-(-t_2)=t_2-t_1=|t_2-t_1|.$$

Итак, во всех случаях $d=|t_2-t_1|$. Теорема доказана.

Примеры. 1. Найти расстояние между точками $M(3)$ и $P(-2)$.

$$d=|3-(-2)|=|3+2|=5 \quad \text{или} \quad d=|-2-3|=|-5|=5.$$

2. Найти расстояние между точками $M(-4)$ и $P(-10)$.

$$d=|-4-(-10)|=|6|=6 \quad \text{или} \quad d=|(-10)-(-4)|=|-6|=6.$$

Итак, можно сказать, что модуль любого действительного числа a, т. е. $|a|$, есть расстояние от точки $M(a)$ до начала координат.

§ 6. Числовые равенства и неравенства

В § 5 упоминалось о сравнении чисел и были приведены определения, по которым можно выяснить, равны ли два данных действительных числа или одно больше другого. Все эти определения можно записать иначе, используя сравнение действительных чисел с числом нуль, а именно так: два действительных числа a и b равны тогда и только тогда, когда их разность равна нулю, т. е. $a=b \Leftrightarrow a-b=0$; число a больше числа b тогда и только тогда, когда разность $(a-b)$ положительна, т. е. $a>b \Leftrightarrow a-b>0$; число a меньше числа b тогда и только тогда, когда разность $(b-a)$ положительна или когда разность $(a-b)$ отрицательна, т. е. $a<b \Leftrightarrow a-b<0 \Leftrightarrow b-a>0$.

Если два числа соединены знаком равенства, то принято говорить, что задано числовое равенство. Однако это равенство может быть и верным, и неверным. Например, $2=5-3$, $\frac{4}{7}=\frac{\sqrt{16}}{7}$ — верные, а $3=5-1$, $6=\frac{7}{3}$ — неверные равенства.

Аналогично, если два числа соединены любым знаком неравенства, то принято говорить, что задано числовое неравенство, которое может быть верным и неверным. Например, $110{,}1 < 11^2$, $\sqrt{10} > 3$ — верные, $-5 > \sqrt{2}$, $\frac{7}{5} > 3$ — неверные неравенства.

Справедливость или несправедливость некоторых числовых равенств и неравенств не всегда очевидна. Например, справедливость неравенства

$$(100)^{50} < 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ \ldots\ 99\cdot 100$$

не очевидна. В таких случаях числовые равенства и неравенства надо доказывать. Большую роль при этом играют рассмотренные ниже основные свойства равенств и неравенств.

1. *Если числа a, b и c таковы, что $a=b$ и $b=c$, то $a=c$* (свойство транзитивности равенств).

2. *Если числа a, b, c, d таковы, что $a=b$ и $c=d$, то $a+c=b+d$.*

3. *Если числа a, b, c, d таковы, что $a=b$, $c=d$, то $ac=bd$.*

4. *Для любых действительных чисел a, b и c равенства $a=b$ и $a+c=b+c$ равносильны, т. е. из справедливости равенства $a=b$ следует справедливость равенства $a+c=b+c$, и наоборот, из справедливости равенства $a+c=b+c$ следует справедливость равенства $a=b$, т. е. $a=b \Leftrightarrow a+c=b+c$.*

5. *Для любых действительных чисел a и b и для любого действительного отличного от нуля числа c равенства $a=b$ и $ac=bc$ равносильны, т. е. если $c\neq 0$, то $a=b \Leftrightarrow ac=bc$.*

Приведем аналогичные свойства для числовых неравенств.

1. *Если числа a, b и c таковы, что $a>b$ и $b>c$, то $a>c$* (свойство транзитивности неравенств).

Доказательство. $a-c=(a-c)+(b-b)=(a-b)+(b-c)$. Так как $a>b$, то $a-b>0$, так как $b>c$, то $b-c>0$, но сумма двух положительных чисел положительна, поэтому $a-c>0$, т. е. $a>c$.

2. *Если числа a, b, c, d таковы, что $a>b$, $c>d$, то $a+c>b+d$.*

Доказательство. $(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)$. Так как $a>b$, то $(a-b)$ положительное число; так как $c>d$, то $(c-d)$ также положительное число; сумма двух положительных чисел положительна, поэтому $(a+c)-(b+d)>0$, т. е. $a+c>b+d$.

2а. *Если числа a, b, c, d таковы, что $a>b$ и $c<d$, то $a-c>b-d$.*

Доказательство. $(a-c)-(b-d)=(a-b)+(d-c)$. Так как $a>b$, то $(a-b)$ — положительное число; так как $c<d$, то $(d-c)$ — также положительное число; сумма двух положительных чисел положительна, поэтому $(a-c)-(b-d)>0$, т. е. $a-c>$ $>b-d$.

3. *Если a, b, c, d — положительные числа и $a>b$ и $c>d$, то $ac>bd$.*

Доказательство. $ac-bd=(ac-bd)+(bc-bc)=(ac-bc)+$ $+(bc-bd)=c(a-b)+b(c-d)$. Так как $a>b$, то $(a-b)$ — положительное число; так как c — положительное число и так как произведение положительных чисел положительно, то $c(a-b)$ — положительное число; аналогично показывается, что $b(c-d)$ — положительное число; сумма двух положительных чисел положительна, поэтому $ac-bd>0$, т. е. $ac>bd$.

4. *Для любых действительных чисел a, b и c неравенства $a>b$ и $a+c>b+c$ равносильны, т. е. из справедливости неравенства $a>b$ следует справедливость неравенства $a+c>b+c$ и наоборот, из справедливости неравенства $a+c>b+c$ следует справедливость неравенства $a>b$, т. е. $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$.*

Доказательство. Пусть $a>b$. Тогда $(a+c)-(b+c)=$ $=(a-b)+(c-c)=(a-b)>0$, т. е. $a+c>b+c$. Пусть $(a+c)>$ $>(b+c)$. Тогда $a-b=(a-b)+(c-c)=(a+c)-(b+c)>0$, т. е. $a>b$.

5. *Для любых действительных чисел a и b и любого положительного числа c неравенства $a>b$ и $ac>bc$ равносильны, т. е. если $c>0$, то $a>b \Leftrightarrow ac>bc$.*

Доказательство. Пусть $a>b$, тогда $ac-bc=(a-b)c$. Так как c и $(a-b)$ — положительные числа, то их произведение положительное число, т. е. $ac-bc>0$, или $ac>bc$. Пусть $ac>bc$, тогда $(a-b)c=ac-bc>0$.

Если произведение двух чисел положительно и одно из них также положительно, то положительно и другое число, т. е. так как $c>0$, то $a-b>0$, т. е. $a>b$.

5а. *Для любых действительных чисел a и b и любого отрицательного числа c неравенства $a>b$ и $ac<bc$ равносильны, т. е. если $c<0$, то $a>b \Leftrightarrow ac<bc$.*

Доказательство этого факта аналогично доказательству свойства 5.

Итак, имеют место следующие основные свойства равенств и неравенств:

1) $a=b,\ b=c \Rightarrow a=c$;	1) $a>b,\ b>c \Rightarrow a>c$;
2) $a=b,\ c=d \Rightarrow a+c=b+d$;	2) $a>b,\ c>d \Rightarrow a+c>b+d$;
	2а) $a>b,\ c<d \Rightarrow a-c>b-d$;
3) $a=b,\ c=d \Rightarrow ac=bd$;	3) $a>b>0,\ c>d>0 \Rightarrow ac>bd$;
4) $a=b \Leftrightarrow a+c=b+c$;	4) $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$;
5) $a=b \Leftrightarrow ac=bc$ при $c\neq 0$;	5) $a>b \Leftrightarrow ac>bc$ при $c>0$;
	5а) $a>b \Leftrightarrow ac<bc$ при $c<0$.

Выше употреблялись знаки равенства ($=$) и строгого неравенства ($<$ или $>$). Иногда этих знаков не хватает. Есть задачи, где необходимы нестрогие неравенства.

Пример. Сегодня в Москве 0°, а в Ленинграде температура не выше.

Если температуру в Ленинграде обозначить буквой T, тогда либо $T=0°$, либо $T<0°$. В таких случаях принято писать $T\leqslant 0°$.

Приведем определения нестрогих неравенств $a\geqslant b$ и $a\leqslant b$. Числовое неравенство $a\leqslant b$ считается верным и при $a<b$ и при $a=b$ и неверным лишь в случае $a>b$. Например, неравенства $6\leqslant 9$ и $3\leqslant 2+1$ — оба верные неравенства, а неравенство $7\leqslant 6$ неверное. (Запись $a\leqslant b$ читается либо как «a не больше b», либо как «a меньше или равно b».)

Числовое неравенство $a\geqslant b$ считается верным и при $a>b$, и при $a=b$; оно считается неверным лишь в случае $a<b$. (Запись $a\geqslant b$ читается либо как «a не меньше b», либо как «a больше или равно b».)

Для нестрогих неравенств справедливы свойства 1—5а, если в них знак строгого неравенства заменить на знак нестрогого неравенства.

Будем говорить, что

справедливо двойное неравенство $a<b<c$, если одновременно справедливы два неравенства $a<b$ и $b<c$;

справедливо двойное неравенство $a\leqslant b<c$, если одновременно справедливы два неравенства $a\leqslant b$ и $b<c$;

справедливо двойное неравенство $a<b\leqslant c$, если одновременно справедливы два неравенства $a<b$ и $b\leqslant c$;

справедливо двойное неравенство $a\leqslant b\leqslant c$, если одновременно справедливы два неравенства $a\leqslant b$ и $b\leqslant c$.

§ 7. Числовые множества

Понятия множества и элемента множества относятся к основным понятиям, т. е. к понятиям, которые не определяются.

В этом параграфе рассматриваются числовые множества, элементами которых являются действительные числа.

Если число a принадлежит множеству M, то пишут $a\in M$, если a не принадлежит множеству M, то пишут $a\notin M$.

Например: $2\in N$, $0\notin N$.

Выше были введены следующие числовые множества:

N — множество всех натуральных чисел (ряд натуральных чисел);

Z — множество всех целых чисел;

Z_0 — множество всех неотрицательных целых чисел (расширенный ряд натуральных чисел);

Q — множество всех рациональных чисел;

R — множество всех действительных чисел.

Приведем теперь примеры других числовых множеств и условимся, как будем их обозначать дальше.

Множество, не имеющее элементов, называется пустым множеством и обозначается $\varnothing$.

Если множество состоит из конечного количества элементов, то такое множество принято записывать так: в фигурных скобках записывают все элементы множества (в любом порядке), отделяя их друг от друга точкой с запятой. Например, множество M, состоящее из шести первых чисел натурального ряда, можно записать так: $M=\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, а множество L, состоящее из одного числа $\frac{\sqrt{2}-3}{4}$, запишется так: $L=\left\{\frac{\sqrt{2}-3}{4}\right\}$.

Если множество состоит из бесконечного количества элементов или из элементов, которые в свою очередь являются множествами, то введенные фигурные скобки сохраняются, а внутри них приводится краткое описание множества. Например, множество всех пар чисел a и b, из которых a есть любое целое число, а b есть любое действительное число, записывается так:

$$M=\{(a;\ b)\,|\,a\in Z,\ b\in R\}.$$

Если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, то множество A называется *подмножеством* множества B. В этом случае принято писать $A\subset B$ или $B\supset A$.

Например: $N\subset Z$; $\{(a;\ b)\,|\,a\in N;\ b\in Z\}\subset\{(a;\ b)\,|\,a\in Z;\ b\in R\}$.

Множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо двойное неравенство $-1<t<2$, принято обозначать $(-1;\ 2)$ и называть *интервалом* $(-1;\ 2)$. В силу взаимно однозначного соответствия между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек числовой прямой об интервале $(-1;\ 2)$ принято говорить, что это есть множество всех точек числовой прямой, расположенных между точками (-1) и (2), не включая эти точки (рис. 7).

Множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо двойное неравенство $-2\leqslant t<4$, принято

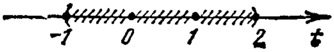


Рис. 7.

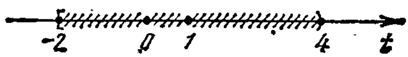


Рис. 8.

обозначать $[-2;\ 4)$ и называть *полуинтервалом* $[-2;\ 4)$. Принято также говорить, что полуинтервал $[-2;\ 4)$ есть множество всех точек числовой прямой, расположенных между точками (-2) и (4), включая точку (-2) (рис. 8).

Множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо двойное неравенство $0<t\leqslant 3$, принято обозначать $(0;\ 3]$ и называть *полуинтервалом* $(0;\ 3]$. Принято также говорить, что полуинтервал $(0;\ 3]$ есть множество всех точек

числовой прямой, расположенных между точками (0) и (3), включая точку (3) (рис. 9).

Множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо двойное неравенство $-2 \leqslant t \leqslant 1$, принято обозначать $[-2; 1]$ и называть *отрезком* $[-2; 1]$. Принято

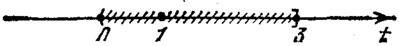


Рис. 9.

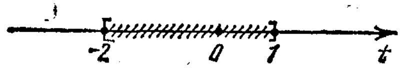


Рис. 10.

также говорить, что отрезок $[-2; 1]$ есть множество всех точек числовой прямой, расположенных между точками (-2) и (1), включая обе эти точки (рис. 10).

В общем случае, если $a < b$, то

отрезком $[a; b]$ называется множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо двойное неравенство $a \leqslant t \leqslant b$;

полуинтервалом $[a; b)$ называется множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо двойное неравенство $a \leqslant t < b$;

полуинтервалом $(a; b]$ называется множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо двойное неравенство $a < t \leqslant b$;

интервалом $(a; b)$ называется множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо двойное неравенство $a < t < b$;

лучом $[a; +\infty)$ называется множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо неравенство $t \geqslant a$;

лучом $(a; +\infty)$ называется множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо неравенство $t > a$;

лучом $(-\infty; a]$ называется множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо неравенство $t \leqslant a$;

лучом $(-\infty; a)$ называется множество всех действительных чисел t, для каждого из которых справедливо неравенство $t < a$.

Заметим, что иногда говорят — «*промежуток*», понимая под этим либо луч, либо отрезок, либо интервал, либо полуинтервал. Наконец, иногда множество R всех действительных чисел обозначается так: $(-\infty; +\infty)$.

Объединение и пересечение множеств.

Объединением множеств A и B называется множество C, состоящее из всех таких элементов, каждый из которых содержится хотя бы в одном из данных множеств A и B. Для объединения множеств употребляется символ $\cup$: $C = A \cup B$.

Примеры. 1. Если $A = \{1; 2; 3; 4\}$ и $B = \{2; 3; 4; 5\}$, то $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

2. $N \cup Z_0 \cup \{0\} = Z_0$; 3. $(-1; 2) \cup (0; 3] = (-1; 3]$;

4. $(-1; 2) \cup [-2; 1) = [-2; 2)$; 5. $[-2; 1] \cup (0; 3] = [-2; 3]$;

6. $(-1; 2] \cup (2; 4) = (-1; 4)$; 7. $(0; 1) \cup (-1; +\infty) = (-1; +\infty)$.

Пересечением множеств A и B называется множество L, элементами которого будут те и только те элементы, которые одновременно являются элементами и первого и второго множества, т. е. пересечение двух множеств есть *общая часть* этих множеств. Для пересечения множеств употребляется знак $\cap$: $L = A \cap B$.

Примеры. 1. Если $A = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ и $B = \{2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$, то $A \cap B = \{2;\ 3\}$;

2. $N \cap Z_0 = N$; 3. $N \cap Z = N$;

4. $\{1;\ 2;\ 3;\ 4\} \cap \{2;\ 3;\ 4;\ 5\} = \{2;\ 3;\ 4\}$; 5. $(-1;\ 2) \cap (0;\ 3] = (0;\ 2)$;

6. $(-\infty;\ 1] \cap (0;\ 3) = (0;\ 1]$; 7. $(-1,\ 3) \cap (3;\ +\infty) = \varnothing$.

Упорядоченные множества. Перестановки и размещения. При рассмотрении числового множества можно числа, принадлежащие этому множеству, расположить в определенном порядке. Тогда имеет смысл говорить об упорядоченном множестве. Одним из примеров упорядоченного множества является ряд натуральных чисел. Если два упорядоченных множества содержат одни и те же элементы, но расположенные в разном порядке, то будем говорить, что эти упорядоченные множества отличаются порядком расположения элементов. Например, из трех чисел 4, 7, 1 можно составить шесть различных упорядоченных множеств: $\{1;\ 4;\ 7\}$, $\{1;\ 7;\ 4\}$, $\{4;\ 7;\ 1\}$, $\{4;\ 1;\ 7\}$, $\{7;\ 1;\ 4\}$, $\{7;\ 4;\ 1\}$.

Рассмотрим более подробно этот вопрос для конечных множеств, т. е. для множеств, состоящих из конечного числа элементов, например чисел.

Определение. *Установленный в конечном множестве порядок называется перестановкой его элементов.* Число перестановок — это число различных упорядоченных множеств, составленных из одних и тех же элементов. Число перестановок из n элементов обозначают через P_n. Для того чтобы ответить на вопрос, — чему равно число перестановок из n элементов, рассмотрим общую задачу. Пусть дано множество, состоящее из n элементов. Выделим m элементов, где $m \leqslant n$, из этого множества и расположим их в некотором порядке. Полученное конечное упорядоченное множество будем называть *размещением*. Общую задачу можно сформулировать так: «Сколько существует размещений из n элементов по m элементов?» Ответим сначала на вопрос, сколько существует размещений из n элементов по два элемента. На первом месте такого размещения может быть любой элемент из n элементов, на втором месте может быть любой из $(n-1)$ оставшихся. Пусть на первом месте стоит элемент a_1, тогда на втором месте может стоять любой из элементов a_2, a_3, $\ldots$, a_n. При этом получим $(n-1)$ размещений. Если на первом месте стоит элемент a_2, то на втором месте может стоять любой из элементов a_1, a_3, a_4, $\ldots$, a_n, т. е. будет еще $(n-1)$ размещений. Перебрав все элементы a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n, получим n групп, в каждой из которых содержится $(n-1)$ размещений. Следовательно, число всех размещений из n элементов по два будет $n(n-1)$.

Если нужно узнать число размещений из n элементов по три, то следует к каждому размещению из n элементов по два добавить по очереди один элемент из $(n-2)$ оставшихся. Тогда получится $n(n-1)$ групп, в каждой из которых будет по $(n-2)$ размещений. Следовательно, всего размещений из n элементов по три будет $n(n-1)(n-2)$. Если число размещений из n элементов по m обозначить A_n^m, то можно записать следующие формулы:

$$A_n^2=n(n-1), \qquad A_n^3=n(n-1)(n-2). \tag{1}$$

Перепишем формулы (1) в ином виде:

$$A_n^2=n[n-(2-1)], \qquad A_n^3=n(n-1)[n-(3-1)]. \tag{2}$$

Можно подметить определенную закономерность в формулах (2): число размещений равно произведению последовательных натуральных чисел начиная с n и кончая $[n-(k-1)]$, где $k=2$, 3. Рассуждая аналогично предыдущему, получим

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)], \qquad 1\leqslant m\leqslant n. \tag{3}$$

Пример. В 1-м классе 6 учебных предметов и 4 урока в день. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня (более одного урока в день по каждому предмету не допускается)?

Для того чтобы решить эту задачу, надо найти число размещений из 6 элементов по 4: $A_6^4=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$. Итак, возможно 360 способами составить расписание на день. Очевидно, что перестановка — это размещение из n элементов по n. По формуле (3)

$$P_n=n(n-1)(n-2)\ldots2\cdot1. \tag{4}$$

Если воспользоваться символом $n!$ (читается: «n факториал»), который обозначает произведение n первых чисел натурального ряда ($n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$), то формулу (4) можно записать так:

$$P_n=n!. \tag{5}$$

Формулу (3) тоже можно записать, используя этот символ:

$$A_n^m=\frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]\cdot[(n-m)\ldots2\cdot1]}{[(n-m)\ldots2\cdot1]}=\frac{n!}{(n-m)!}. \tag{6}$$

Чтобы формула (6) совпадала с формулой (5) при $m=n$, принято считать, что $0!=1$.

Сочетания и их свойства. Часто возникают задачи, когда из данного конечного множества из n элементов надо образовать множество из m элементов $(m\leqslant n)$, но во вновь построенном множестве порядок следования элементов не важен, а важно лишь их наличие.

Например, пусть спрашивается, сколькими способами можно выбрать трех учеников из десяти для уборки класса. В этом случае упорядоченность в группе из трех человек необязательна. Такие множества из n элементов по m, которые отличаются друг от друга только элементами, но не порядком их расположения, называются *сочетаниями*, и их число обозначается через C_n^m. Очевидно, что число сочетаний из n элементов по n равно единице: $C_n^n=1$. Рассмотрим общий случай, когда $1 \leqslant m \leqslant n$.

Пусть составлены все сочетания C_n^m из n элементов по m. Возьмем любое из этих сочетаний и переставим в нем элементы всевозможными способами. Тогда число полученных всевозможных упорядоченных множеств из n элементов по m равно $C_n^m P_m$. Покажем, что это число совпадает с числом всех размещений из n элементов по m. Действительно, возьмем всевозможные размещения и запишем их по группам. В каждую группу включим размещения, составленные из одинаковых элементов, отличающиеся порядком их расположения. Таким образом, в каждую группу войдет столько размещений, сколько можно образовать перестановок из данных m элементов, т. е. $m!$ размещений. Все размещения, расположенные в одной группе, рассматриваемые как сочетания, одинаковы, так как содержат одинаковые элементы. Следовательно, число групп — это число различных сочетаний из n элементов по m, т. е.

$$A_n^m = C_n^m m!. \tag{7}$$

Из равенства (7) получим формулу для подсчета числа сочетаний

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$$

или, используя формулу (6):

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}\,. \tag{8}$$

Отметим, что в силу принятого соглашения: $0!=1$, формула (8) справедлива и при $m=0$, а именно $C_n^0=1$. Решим сформулированную выше задачу о выборе трех учеников. Число возможных способов выбора учеников равно

$$C_{10}^3 = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7)\,(1\cdot2\cdot3)} = 120.$$

Если подсчитаем C_{10}^7, то получим тот же результат:

$$C_{10}^7 = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{(1\cdot2\cdot3)\,(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7)} = 120.$$

Покажем в общем случае, что $C_n^m = C_n^{n-m}$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$. Действительно,

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{[n-(n-m)]!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = C_n^m. \tag{9}$$

Формула (9) позволяет легко подсчитать число сочетаний из n по m, когда m близко к n. Например,

$$C_9^8 = C_9^1 = \frac{9!}{8!} = 9.$$

Покажем справедливость еще одного свойства числа сочетаний:

$$C_n^{m+1} + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}. \qquad (10)$$

Действительно, используя формулу (8) имеем

$$C_n^{m+1} + C_n^m = \frac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!} + \frac{n!}{m!\,(n-m)!} =$$

$$= \frac{n!}{m!\,(m+1)\,(n-m-1)!} + \frac{n!}{m!\,(n-m-1)!\,(n-m)} =$$

$$= \frac{n!}{m!\,(n-m-1)!}\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n-m}\right) = \frac{n!\,(n+1)}{m!\,(n-m-1)!\,(m+1)\,(n-m)} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(m+1)!\,[(n+1)-(m+1)]!}.$$

Используя еще раз формулу (8), получаем, что формула (10) верна.

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить (1—10):

1. $3\frac{5}{14} - \left[1\frac{11}{49} : \left(76 \cdot \frac{25}{38} - 47\frac{3}{7}\right)\right] \cdot \frac{12}{55}$.

2. $\left\{5\frac{68}{126} \cdot \left[5\frac{5}{9} - 8\frac{3}{4} : \left(\frac{8}{11} \cdot 9\frac{3}{16} - 1\frac{2}{5}\right)\right] + 5\frac{2}{19}\right\} : 12\frac{3}{5} + \frac{5}{4}$.

3. $\left\{\left[\left(6\frac{9}{16} - 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{9}{14}\right) \cdot 0{,}53\right] : 0{,}75\right\} : 6\frac{2}{3}$.

4. $\left[\dfrac{3\frac{1}{3} + 4\frac{1}{9} - 6\frac{5}{6}}{5\frac{7}{8} - 2\frac{1}{4} - 0{,}5} : \left(13\frac{8}{11} - 8\frac{50}{99}\right)\right] \cdot \left(2\frac{3}{8} - 1\frac{5}{8}\right) + \dfrac{\left(3\frac{6}{7} - 1\frac{5}{3} - \frac{4}{21}\right) : 47}{9\frac{5}{51} - 3\frac{2}{9} + 5\frac{7}{18} - 10\frac{9}{34}}$.

5. $\left\{\dfrac{4\frac{1}{3} + 5{,}4 + 0{,}2\,(6)}{\frac{13}{15} + 0{,}0(3) + 0{,}1} : \left[\left(4 - 0{,}8\,(3) - 2\frac{7}{8}\right) : \left(8\frac{7}{24} - 7{,}91(6)\right)\right]\right\} : \left(\frac{3}{14} + \frac{9}{42}\right)$.

6. $\left[\left(\dfrac{3{,}25}{5{,}5} : \dfrac{3{,}125}{341}\right) : \dfrac{0{,}341}{6{,}875}\right] : \left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4} + 0{,}125} \cdot \dfrac{8}{13}\right) + \dfrac{1{,}01 - \frac{1}{5}}{3\frac{1}{2} - 0{,}8} \cdot \dfrac{2 - 0{,}04}{1 - 0{,}11}$.

7. $\dfrac{\left[\left(17\frac{3}{100}-11{,}27\right)\cdot 2\right]:3\frac{1}{3}}{12:[2{,}28:(28{,}57-5{,}03)]}+4\frac{1}{2}\left\{\left[3:\left(0{,}2-\frac{1}{10}\right)\right]:\right.$

$\left.:\left[2\frac{1}{2}\left(0{,}8+\frac{6}{5}\right)\right]\right\}.$

8. $\left\{\left[\dfrac{(4{,}6+5:6{,}25)\cdot 14}{4\cdot 0{,}125+2{,}3}\right]:\dfrac{7}{6}\right\}:\dfrac{2}{12{,}4+4\frac{2}{5}}+\left(4\frac{5}{8}-\frac{13}{6}:8\frac{2}{3}\right):$

$:\left(3{,}25-2\frac{1}{4}\right).$

9. $$\frac{2{,}(3)-\left(2\frac{3}{16}-\frac{2}{3}\right):\frac{3}{8}}{\left[10-0{,}21:\left(4{,}2-3\frac{4}{5}\right)\right]:\left(1{,}3\cdot 1\frac{19}{24}\right)}+\frac{\left[\left(0{,}3-\frac{3}{20}\right)\cdot 3\frac{1}{2}\right]:0{,}05}{\left(1\frac{22}{25}+2{,}12\right)\left(0{,}1+\frac{1}{40}\right)}.$$

10. $$\frac{4\frac{8}{37}\cdot\left(2{,}8(4):2\frac{2}{5}\right)+\left[18\frac{13}{17}+\left(15\frac{13}{137}-\frac{2068}{137}\right):8{,}01\right]\cdot 5\frac{2}{3}}{\left[\left(1{,}08-\frac{2}{25}\right):0{,}(571428)\right]:\left[\left(6{,}(5)-3\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{2}{17}\right]}.$$

Доказать следующие утверждения (11—33):

11. Для того чтобы натуральное число $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$ делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы либо $a_0=0$, либо $a_0=5$.

12. Для того чтобы натуральное число делилось на 6, необходимо, чтобы оно делилось на 3.

13. Для того чтобы натуральное число делилось на 3, достаточно, чтобы оно делилось на 6.

14. Для того чтобы натуральное число $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$, $n\geqslant 1$, делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы число $\overline{a_1 a_0}$ делилось на 4.

15. Для того чтобы натуральное число $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$, $n\geqslant 2$, делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы число $\overline{a_2 a_1 a_0}$ делилось на 8.

16. Натуральное число тогда и только тогда делится на 11, когда разность между суммой его цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой его цифр, стоящих на четных местах, делится на 11.

17. Для любого натурального числа n число $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ натуральное.

18. Произведение двух последовательных натуральных чисел при делении на три дает в остатке нуль или два.

19. Число, являющееся квадратом натурального числа, или делится на три, или при делении на три дает в остатке единицу.

20. Число, являющееся кубом натурального числа, при делении на 9 дает в остатке либо 0, либо 1, либо 8.

21. При любом натуральном n число $n(n^2+5)$ делится на 6.

22. Сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

23. Произведение трех последовательных натуральных чисел, среднее из которых есть квадрат натурального числа, делится на 60.

24. Для любых целых n и m число $[nm(n-m)]$ является четным.

25. Произведение двух последовательных четных чисел делится на восемь.

26. Разность между кубом нечетного числа и самим числом делится на 24.

27. Квадрат всякого нечетного числа, уменьшенный на 1, делится на 8.

28. Сумма двух последовательных нечетных чисел делится на 4.

29. Два последовательных нечетных числа — числа взаимно простые.

30. Для любого натурального числа n числа n, $n+1$ и $2n+1$ попарно взаимно простые.

31. Сумма четырех последовательных натуральных чисел не может быть простым числом.

32. Каждая из двух дробей $\frac{14n+3}{21n+4}$ и $\frac{2n+3}{5n+7}$ несократима ни при каком натуральном n.

33. Если данная дробь несократима, то дробь с числителем, равным сумме числителя и знаменателя данной дроби, и знаменателем, равным произведению числителя и знаменателя данной дроби, тоже несократима.

34. Сколько раз число 2 содержится множителем в разложении числа 100! на простые множители?

35. Сколько раз число 5 содержится множителем в разложении числа 1980! на простые множители?

36. Найти остаток от деления числа: а) 2^{1980} на 5; б) $7^{7^{100}}$ на 3.

37. Какой цифрой оканчивается число, получаемое в результате следующего возведения в степень: а) 2^{1980}; б) 7^{1980}.

38. Можно ли число 101010 представить в виде разности квадратов двух целых чисел?

39. Делится ли число $\underbrace{11\ldots11}_{81\ \text{раз}}$ на 81?

40. Найти НОД (247, 221), НОД (323; 187; 209).

41. Найти числа a и b, если: НОД $(a; b) = 13$, НОК $(a; b) = 1989$.

42. При каких цифрах x и y число $\overline{34x5y}$ делится на 36?

43. Разность двух чисел равна 5, а сумма квадратов равна 157. Найти эти числа.

44. Найти все такие трехзначные числа, каждое из которых в 12 раз больше суммы своих цифр.

45. Найти правильную дробь, превышающую $\frac{1}{3}$, зная, что от увеличения ее числителя на некоторое целое число и умножения знаменателя на то же число величина дроби не меняется.

46. Дробь $\frac{a}{b}$ несократима. Выяснить, сократима или несократима сумма двух дробей $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{a+b}$.

47. Найти все такие натуральные числа n, для каждого из которых число $\frac{3n+4}{5}$ — натуральное число.

48. Верно ли утверждение: сумма двух натуральных чисел, каждое из которых не делится на 7, также не делится на 7?

49. Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 7 дает остаток 6, а при делении на 9 дает остаток 8.

50. Найти наибольшее трехзначное число, которое при делении на 6 дает остаток 5, а при делении на 4 дает остаток 3.

51. Найти все натуральные числа, большие 200, но меньшие 1500, каждое из которых как при делении на 7, так и при делении на 21, дает в остатке 2.

52. Найти все натуральные числа, меньшие 150, каждое из которых как при делении на 6, так и при делении на 8, дает в остатке 5.

53. Пусть p $(p \geqslant 5)$ — простое число. Доказать, что число (p^2-1) делится на 24.

54. Пусть p $(p \geqslant 7)$ — простое число. Доказать, что число (p^2-13) не делится на 24.

55. Найти простые числа p и q такие, что $p^2-2q^2=1$.

56. Будет ли число $(4p+1)$ простым, если известно, что числа p и $(2p+1)$ простые и $p>3$?

57. Найти число p, если известно, что p, $(p+2)$ и $(p+4)$ — простые числа.

58. Показать, что сумма (разность, произведение, частное) двух иррациональных чисел может быть рациональным числом.

59. Доказать иррациональность чисел $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{49}$; $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$; $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})$.

60. Доказать, что бесконечная десятичная дробь 0,1234567891011..., где после запятой выписаны подряд все натуральные числа, является непериодической дробью.

61. Дано: $a \geqslant b > 0$; $c > d > 0$. Доказать, что $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

62. Доказать, что $|a|=|-a|$; $|a| \geqslant a$; $|a| \geqslant -a$.

Найти множество всех чисел, для каждого из которых справедливо равенство (63—73):

63. $|-a|=a$. 64. $|-a|=-a$. 65. $a+|a|=0$. 66. $a-|a|=0$. 67. $a+|a|=2a$. 68. $a|a|=-a^2$. 69. $\frac{a}{|a|}=1$. 70. $\frac{a}{|a|}=-1$. 71. $\sqrt{a^2}=-a$. 72. $a\sqrt{2}=-\sqrt{2a^2}$. 73. $\sqrt{3a^2}=-a\sqrt{3}$.

74. Какие из следующих неравенств справедливы: $5 \geqslant 2$; $3 \geqslant 3$; $\sqrt{4} \leqslant 2$; $6 \leqslant \sqrt{49}$ и $38 \leqslant \sqrt{912}$?

Если два действительных числа a и b таковы, что $a > b$, то справедливо ли неравенство (75, 76): 75. $a^2 > b^2$; 76. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$?

Найти множество всех чисел, для каждого из которых справедливо неравенство (77—88):

77. $|-a| \leqslant a$. 78. $|a| \leqslant -a$. 79. $|a| \leqslant |-a|$. 80. $a|a| \geqslant a^2$.

81. $\frac{a}{|a|} \leqslant -1$. 82. $\frac{a}{|a|} \geqslant 1$. 83. $\sqrt{a^2} \leqslant -a$. 84. $a\sqrt{5} \leqslant \sqrt{5a^2}$.

85. $\sqrt{7a^2} \leqslant -a\sqrt{7}$. 86. $|a|-a \leqslant 0$. 87. $|a|+a \leqslant 2a$. 88. $|a|+a \leqslant 0$.

Найти пересечение следующих двух множеств (89—96):

89. $\left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ и $[-6; 2]$. 90. $\left[\sqrt{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$ и $\left[1\frac{2}{5}; \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right]$.

91. $\left[-\sqrt{3};\ 2\right]$ и $\left(1\frac{18}{25};\ 4\right)$. **92.** $\left(-\sqrt{5};\ 4\right]$ и $\left[4;\ \sqrt{17}\right]$.

93. $\left(1;\ \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4};\ 2\right)$. **94.** $(-\infty;\ 2)$ и $\left(-\sqrt{3};\ 10\right]$.

95. $\left(-\frac{1}{2};\ +\infty\right)$ и $\left[\frac{-\sqrt{2}-0{,}6}{2};\ +\infty\right)$.

96. $\left(-\sqrt{17};\ \sqrt{5}\right)$ и $\left[\frac{\sqrt{3}+2}{2};\ 6\right]$.

Найти объединение следующих двух множеств (97—105):

97. $[-1{,}5;\ 4]$ и $[-2;\ 1]$. **98.** $[1;\ 5]$ и $[0;\ 6)$. **99.** $[2;\ 4]$ и $[4;\ 7]$. **100.** $(-1;\ 4)$ и $(0;\ 3]$.

101. $(-\infty;\ 2]$ и $[-3;\ 5)$. **102.** $(0;\ 1)$ и $\left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.

103. $(-\infty;\ 2]$ и $\left[\frac{\sqrt{7}}{2};\ \sqrt{17}\right)$. **104.** $(-4;\ 3)$ и $(2;\ 4]$.

105. $[-1;\ 1)$ и $(0{,}2;\ 2]$.

На числовой оси указать множество всех чисел, удовлетворяющих условию (106—113):

106. $|x|=1$. **107.** $|x|<3$. **108.** $|x|\geqslant 2$. **109.** $1<x\leqslant 4$. **110.** $-3\leqslant x<0$. **111.** $(x-1)(x+2)=0$. **112.** $(x-1)^2(x+3)\leqslant 0$. **113.** $(x-2)^2(x^2+4)\leqslant 0$.

114. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5, если в записи каждого такого числа никакая цифра не повторяется?

115. Сколько различных семизначных телефонных номеров можно набрать с помощью диска, имеющего десять отверстий с номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0?

116. Сколькими способами в группе из 25 человек можно выбрать профорга, физорга и культорга?

117. Сколькими способами можно отобрать несколько книг (не менее одной) из 5 одинаковых учебников алгебры и 4 одинаковых учебников геометрии?

118. Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выбрать наряд, состоящий из одного офицера, 2 сержантов и 20 рядовых?

119. Сколькими способами можно расставить 20 книг в книжном шкафу с 3 полками, если каждая полка может вместить все 20 книг?

120. У одного человека есть 7 книг, а у другого 9. Сколькими способами они могут обменять друг с другом по две книги?

§ 1. Определения и основные свойства

Математические и алгебраические выражения. В предыдущей главе были рассмотрены действительные числа и некоторые действия над ними. С помощью чисел, знаков действий и скобок составлялись различные *числовые выражения*. Приведем примеры некоторых числовых выражений:

$$(27:9);\quad \sqrt{8+1}.$$

$$\frac{\left(\frac{3}{11}-\frac{7}{2}\right)\frac{11}{71}-\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{7}\right)\frac{35}{47}}{\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{2}\right)\frac{19}{17}};$$

$$2\cdot 10^3+7\cdot 10^2+10-5.$$

Если в числовом выражении можно выполнить все указанные в нем действия, то полученное в результате действительное число называют *числовым значением данного числового выражения*, а о числовом выражении говорят, что *оно имеет смысл*. В приведенных примерах каждое из первых трех числовых выражений имеет числовое значение 3, а четвертое — 2705.

Если числовое выражение состоит из одного действительного числа, то его числовым значением является само это число.

Иногда числовое выражение не имеет числового значения, так как не все указанные в нем действия выполнимы; о таком числовом выражении говорят, что *оно не имеет (лишено) смысла*. Например, числовые выражения $\frac{7}{3\cdot 2-6}$; $\sqrt{10-18}$ и $(2-2)^0$ лишены смысла.

Таким образом, любое числовое выражение либо имеет одно числовое значение, либо лишено смысла.

Числовое выражение часто употребляют для описания какого-либо свойства числа, являющегося числовым значением этого выражения. Так, например, свойство числа (-17) давать при делении на 2 остаток 1 записывают числовым выражением $2(-9)+1$. Чтобы описать свойство каждого нечетного числа из отрезка $[-2;\,14]$ давать при делении на 2 остаток 1, надо написать соответствующее числовое выражение для каждого из чисел -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11 и 13, т. е. восемь следующих числовых выражений:

$$2\cdot(-1)+1;\quad 2\cdot 0+1;\quad 2\cdot 1+1;\quad 2\cdot 2+1;$$
$$2\cdot 3+1;\quad 2\cdot 4+1;\quad 2\cdot 5+1;\quad 2\cdot 6+1.$$

Это же свойство можно записать, используя буквенную символику, следующим образом: $2l+1$, где $l\in\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Приведенный пример говорит о том, что часто вместо числовых выражений удобнее рассматривать выражения, в которых на некоторых местах вместо чисел стоят буквы. Всякое такое выражение называют *математическим выражением*. Примеры математических выражений:

$$\frac{7}{a}+2^{b+3};\quad \sin\frac{b-a}{c};\quad \sqrt{3+\lambda};\quad \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta};\quad \log_c\frac{3+\sqrt{m}}{n}.$$

Отметим, что понятие «математическое выражение» является простейшим, и потому оно не определяется, а лишь описывается, что и было сделано выше. Математическое выражение, в котором над числами и буквами, входящими в это выражение, производятся действия сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень и извлечения арифметического корня, называется *алгебраическим выражением*.

Примеры алгебраических выражений:

$$a+b;\quad \frac{a-c}{a-b};\quad 2-\frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\beta};\quad \sqrt{2\alpha\beta}-1;\quad \frac{\sqrt{3}\,(a^2-b^2)}{(m-n)+\sqrt{xy}}+abc.$$

Алгебраическое выражение называется *рациональным*, если в нем участвуют относительно входящих в него букв лишь действия: сложение, умножение, вычитание, деление и возведение в натуральную степень (рациональное алгебраическое выражение может содержать любые числа, в том числе и иррациональные). Примеры рациональных алгебраических выражений:

$$\frac{\alpha}{2m}+\sqrt{3}a^7;\quad \frac{a-b}{c-a};\quad \frac{3b+m}{\sqrt{5}\,(m-n)}+xy;\quad 2x-\pi ab.$$

Рациональное выражение называется *целым относительно данной буквы*, если оно не содержит деления на данную букву или на выражение, содержащее эту букву.

Дробное рациональное выражение относительно данной буквы — это рациональное выражение, содержащее деление на некоторое выражение, содержащее эту букву, или на саму букву.

Например, рациональное выражение $\frac{a+b+c}{3a+4b}$ — целое относительно буквы c, но дробное относительно букв a и b; рациональное выражение $\frac{3a}{7}+\frac{\sqrt{2}}{b}$ — целое относительно a, но дробное относительно b.

Алгебраическое выражение называется *иррациональным*, если в нем участвует относительно входящих в него букв действие извлечения арифметического корня.

Примеры иррациональных алгебраических выражений:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+2ab; \quad \sqrt{c+1}; \quad 2\sqrt{3}l+\sqrt[3]{3l-1}.$$

Действия над алгебраическими выражениями. Пусть даны два алгебраических выражения, которые обозначены буквами A и B. Определим для них арифметические операции.

Сложить два алгебраических выражения A и B — значит формально написать алгебраическое выражение $A+B$, которое называется *суммой* выражений A и B.

Например, суммой алгебраических выражений $\frac{a-b}{c-a}$ и $\frac{\alpha}{2p}$ будет алгебраическое выражение $\frac{a-b}{c-a}+\frac{\alpha}{2p}$.

Умножить два алгебраических выражения A и B — значит формально написать алгебраическое выражение AB, которое называется *произведением* выражений A и B.

Например, произведением алгебраических выражений $\frac{3b}{\sqrt{x+y}}$ и (a^2-b^2) будет алгебраическое выражение $\frac{3b}{\sqrt{x+y}}(a^2-b^2)$.

Если надо сложить несколько алгебраических выражений, то сначала складывают два первых выражения, затем к полученной сумме прибавляют третье выражение и т. д. Вот, например, как выглядит сумма пяти алгебраических выражений: $\{[(A+B)+C]+$ $+D\}+E$. Аналогично определяется и произведение нескольких алгебраических выражений.

Если в произведении одно и то же алгебраическое выражение A является множителем n раз ($n>1$, $n\in N$), то пишут A^n вместо произведения $\underbrace{AA\ldots A}_{n \text{ раз}}$.

Например, вместо произведения $(a+b)(a+b)(a+b)$ пишут $(a+b)^3$. Вместо A^1 обычно пишут A.

Вычесть из алгебраического выражения A алгебраическое выражение B — это значит формально написать алгебраическое выражение $A-B$, которое называется *разностью* выражений A и B.

Например, разностью алгебраических выражений abc^3 и $\frac{a^{2mn}}{pq}$ будет алгебраическое выражение $abc^3-\frac{a^{2mn}}{pq}$.

Разделить алгебраическое выражение A на алгебраическое выражение B — это значит формально написать алгебраическое выражение $A:B$, которое называется *частным* от деления выражения A на выражение B.

Например, частным от деления алгебраического выражения $(a-b^2)$ на алгебраическое выражение $\frac{p}{5l}$ будет алгебраическое выражение $(a-b^2):\frac{p}{5l}$. Отметим, что частное от деления алгебраического выражения A на алгебраическое выражение B часто записывается в виде $\frac{A}{B}$.

Область допустимых значений алгебраического выражения. Ясно, что под областью допустимых значений алгебраического выражения следует понимать ту область, в которой это алгебраическое выражение имеет смысл. Однако это понятие необходимо уточнить.

Пусть дано некоторое алгебраическое выражение. Множество всех букв, входящих в это выражение, называется *буквенным набором* данного алгебраического выражения.

Если в алгебраическое выражение входит n букв $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то буквенный набор этого алгебраического выражения записывают в виде $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Каждая буква, сколько бы раз она ни встречалась в алгебраическом выражении, пишется в буквенном наборе только один раз. При составлении буквенного набора данного алгебраического выражения порядок следования букв может быть любым возможным, но раз навсегда зафиксированным.

Например, для алгебраического выражения $\frac{2a-7b}{\sqrt{19ac}}$ буквенным набором может служить набор (a, b, c), для алгебраического выражения $\sqrt[3]{\frac{a}{2}+a^3b^k-\alpha}$ — набор (k, α, a, b).

Если в буквенном наборе (α, β, γ) вместо буквы α взять, например, число $\left(-\frac{7}{16}\right)$, вместо буквы β — число $\sqrt{2}$, вместо буквы γ — число 0,3, то набор чисел $\left(-\frac{7}{16}\right)$, $\sqrt{2}$ и 0,3 называют числовым набором, соответствующим данному буквенному набору (α, β, γ), и записывают в виде $\left(-\frac{7}{16}, \sqrt{2}, 0{,}3\right)$. При этом говорят, что числовой набор $\left(-\frac{7}{16}, \sqrt{2}, 0{,}3\right)$ соответствует буквенному набору (α, β, γ) при $\alpha=-\frac{7}{16}$, $\beta=\sqrt{2}$, $\gamma=0{,}3$.

Аналогично определяется числовой набор, соответствующий буквенному набору $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, и для любого набора из n букв (n — любое натуральное число).

Одному и тому же буквенному набору можно поставить в соответствие бесконечно много разных числовых наборов.

Два числовых набора считаются *разными*, если хотя бы на одном, но на одном и том же в каждом наборе, например, i-м месте этих числовых наборов стоят неравные числа (т. е. вместо одной и той же буквы, стоящей на i-м месте буквенного набора, в этих двух числовых наборах взяты неравные числа). Например, числовые наборы $\left(1, -3, -5, -\sqrt{2}, \frac{7}{3}\right)$ и $\left(1, -3, -4, -\sqrt{2}, \frac{7}{3}\right)$, соответствующие буквенному набору (a, b, c, d, e), разные, так как у них на одном и том же третьем месте стоят неравные числа (-5) и (-4) (т. е. в первом наборе $c=-5$, а во втором $c=-4$). Числовые наборы $\left(-3, -\frac{9}{7}\right)$ и $\left(-\frac{9}{7}, -3\right)$, соответствующие буквенному набору (x, y), разные, так как у них на первом месте стоят неравные числа $\left(\text{т. е. в первом наборе } x=-3, \text{ во втором } x=-\frac{9}{7}\right)$; кроме того, они разные, так как у них на втором месте стоят неравные числа $\left(\text{т. е. в первом наборе } y=-\frac{9}{7}, \text{ во втором } y=-3\right)$.

Пусть даны некоторое алгебраическое выражение и его буквенный набор. Рассмотрим некоторый числовой набор, соответствующий этому буквенному набору. Этот числовой набор называется *числовым набором* для букв данного алгебраического выражения. Если в это алгебраическое выражение подставить вместо каждой буквы, где бы она в нем ни стояла, соответствующее ей число из данного числового набора, то получим числовое выражение, которое либо имеет смысл, либо лишено смысла. Например, рассмотрим алгебраическое выражение $\frac{b-3a}{\sqrt{5+a}}$. Запишем его буквенный набор в виде (a, b). Для числового набора $(4, 5)$, соответствующего буквенному набору (a, b) (т. е. при $a=4$, $b=5$), это алгебраическое выражение записывается в виде числового выражения $\frac{5-3\cdot 4}{\sqrt{5+4}}$ и имеет числовое значение $\left(-\frac{7}{3}\right)$. Для числового набора $(-6, 5)$ (т. е. при $a=-6$, $b=5$) это алгебраическое выражение запишется в виде числового выражения $\frac{5-3(-6)}{\sqrt{5-6}}$, которое лишено смысла.

Числовой набор, соответствующий буквенному набору данного алгебраического выражения, называется *допустимым* для этого выражения, если имеет смысл числовое выражение, которое получается из данного алгебраического выражения, если вместо каждой буквы, где бы она в нем ни стояла, подставить соответствующее ей число из данного числового набора.

Совокупность всех допустимых числовых наборов, соответствующих буквенному набору данного алгебраического выражения, называется *областью допустимых значений* (ОДЗ) данного алгебраического выражения.

Отметим, что существуют алгебраические выражения, ОДЗ которых пуста. Например, пуста ОДЗ алгебраического выражения $\frac{1}{2a-(a+a)}$, ибо для любого числового значения буквы a, соответствующее числовое выражение лишено смысла. Такие выражения называются выражениями, не имеющими смысла, и в дальнейшем рассматриваться не будут. Обычно ОДЗ алгебраического выражения записывают в виде набора множеств, причем указывают, какой букве соответствует каждое множество. Так, например, ОДЗ алгебраического выражения $\frac{b-3}{\sqrt{5+a}}$ записывается в виде $\{(a, b) \mid a \in (-5;\ +\infty);\ b \in (-\infty;\ +\infty)\}$.

Числовым значением, или *числовой величиной*, алгебраического выражения для данного числового набора из ОДЗ называют числовое значение того числового выражения, которое получится, если в данное алгебраическое выражение вместо каждой буквы, где бы она в нем ни стояла, подставить соответствующее ей число из данного числового набора.

Например, числовым значением алгебраического выражения $\frac{b-3}{\sqrt{5+a}}$ при $a=4$ и $b=5$ будет число $\frac{2}{3}$, а при $a=0$ и $b=4$ — число $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Часто алгебраические выражения рассматриваются не на всей своей ОДЗ, а лишь на ее части — некоторой области M,

Например, рассмотрим алгебраическое выражение vt. ОДЗ этого выражения $\{(v, t) \mid v \in R;\ t \in R\}$. Пусть это алгебраическое выражение vt определяет путь, пройденный за время t со скоростью v. Тогда по физическому смыслу задачи следует наложить на v и t ограничения: $v \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$. Другими словами, надо рассмотреть алгебраическое выражение vt на следующей области M — части ОДЗ этого выражения: $M = \{(v, t) \mid v \in [0;\ +\infty);\ t \in [0;\ +\infty)\}$. Алгебраическое выражение обычно дается вместе с областью M, на которой оно рассматривается. Если область M не указана, то алгебраическое выражение следует рассматривать на всей ОДЗ, которую предварительно надо найти.

Пусть даны два алгебраических выражения A и B. Множество всех букв этих двух выражений называют *буквенным набором двух выражений A и B*. Числовой набор, соответствующий буквенному набору двух алгебраических выражений, называют *допустимым*, если одновременно имеют смысл оба числовых выражения, которые получаются из данных алгебраических выражений, если в них вместо каждой буквы, где бы она в них ни стояла, подставить соответствующее ей число из этого числового набора.

Совокупность всех допустимых числовых наборов, соответствующих буквенному набору двух алгебраических выражений, называется *областью допустимых значений* (ОДЗ) этих алгебраических выражений.

Пример. $A = \frac{b+7}{\sqrt{b+3}\,(a-2)}$; $B = \frac{(a+b)\sqrt{a+1}}{b+8}$. ОДЗ этих двух алгебраических выражений записывается в виде $\{(a, b) \mid a \in [-1;\ 2) \cup (2;\ +\infty);\ b \in (-3;\ +\infty)\}$.

Аналогично определяется ОДЗ n алгебраических выражений. Два алгебраических выражения можно рассматривать не на всей ОДЗ, а лишь на некоторой ее части — некоторой области M. Поэтому дальше под областью M, принадлежащей ОДЗ алгебраических выражений, будет пониматься либо вся эта ОДЗ, либо какая-нибудь явно указываемая ее часть.

§ 2. Равенства и неравенства алгебраических выражений

Равенства алгебраических выражений. Два алгебраических выражения называются *тождественно равными на области* M, если для любого числового набора из области M соответствующие числовые значения этих выражений равны.

Например, два алгебраических выражения $(a+1)^2$ и (a^2+2a+1) тождественно равны как на всей ОДЗ этих выражений, т. е. на области $\{(a) \mid a \in (-\infty; +\infty)\}$, так и на любой ее части. Два алгебраических выражения $m+d+\frac{a-b}{3+c}$ и $\frac{d(3+c)+(a-b)}{3+c}$ тождественно равны не на всей ОДЗ этих двух выражений, которой является область $\{(a, b, m, c, d) \mid a \in R, b \in R;\ m \in R;\ c \in (-\infty; -3) \cup \cup (-3; +\infty);\ d \in R\}$, а лишь на ее части — области M, где $M = \{(a, b, m, c, d) \mid a \in R;\ b \in R;\ m \in \{0\};\ c \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty);\ d \in R\}$. Для записи тождественного равенства на области M двух алгебраических выражений иногда употребляется знак равенства, над которым сверху написана буква M, т. е. если буквами A и B обозначены некоторые алгебраические выражения, то запись $A \overset{M}{=} B$ обозначает, что алгебраические выражения A и B тождественно равны на области M, а область M входит в ОДЗ двух выражений A и B.

Например, запись

$$\frac{a-b}{3+c} \overset{\text{ОДЗ}}{=} \frac{a}{3+c} - \frac{b}{3+c}$$

означает, что алгебраические выражения $\left(\frac{a-b}{3+c}\right)$ и $\left(\frac{a}{3+c} - \frac{b}{3+c}\right)$ тождественно равны на ОДЗ этих выражений, т. е. на области $\{(a, b, c) \mid a \in R;\ b \in R,\ c \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)\}$, а запись $\sqrt{a^2} \overset{M}{=} a$, где $M = \{(a) \mid a \in [0; +\infty)\}$, означает, что утверждается тождественное равенство алгебраических выражений $\sqrt{a^2}$ и a лишь на области M.

Замена алгебраического выражения A алгебраическим выражением B, тождественно равным ему на области M, принадлежащей ОДЗ выражений A и B, называется *тождественным преобразованием на области* M алгебраического выражения A. Если не указана область M, на которой происходит тождественное преобразование, то принято считать, что это преобразование происходит на ОДЗ двух-выражений: данного и преобразованного.

Например, замена алгебраического выражения $(a+1)^2$ алгебраическим выражением a^2+2a+1 является тождественным преобразованием на ОДЗ этих выражений, т. е. на области M, где $M=\{(a)\mid a\in R\}$.

Законен вопрос, а возможна ли запись $A=B$ без буквы M над знаком равенства и что эта запись означает?

Конечно, формально можно сделать запись $A=B$, но если рядом нет слов, поясняющих, как следует понимать такую запись, то такая запись не несет никакой смысловой нагрузки. Следовательно, такая запись должна употребляться только с некоторыми сопровождающими эту запись пояснениями, которые и разъяснят, как следует понимать эту запись.

Приведем теперь наиболее часто встречающиеся случаи употребления записи $A=B$ с соответствующими пояснениями, как следует понимать такую запись.

а) Пусть известно, что на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ двух алгебраических выражений A и B, эти два выражения тождественно равны. Тогда это утверждение записывают так: «*Известно* (*или дано*), *что* $A=B$ *на области* M». В этом случае говорят также, что на области M *дано тождественное равенство* $A=B$.

б) Пусть требуется доказать справедливость утверждения: алгебраические выражения A и B тождественно равны на области M, принадлежащей ОДЗ этих выражений. Тогда пишут: «*Доказать, что* $A=B$ *на области* M». В этом случае говорят также, что требуется *доказать справедливость на области* M *тождественного равенства* $A=B$.

в) Пусть требуется найти область M, принадлежащую ОДЗ двух алгебраических выражений A и B, такую, что для любого числового набора из области M соответствующее числовое значение выражения A равно соответствующему числовому значению выражения B, а для любого числового набора, не входящего в область M, но входящего в ОДЗ этих выражений, соответствующие числовые значения данных выражений не равны. В таких случаях говорят: «*Решить уравнение* $A=B$».

Прежде всего отметим, что сложение и умножение алгебраических выражений производятся с использованием следующих утверждений:

1. *На ОДЗ двух выражений A и B справедливо тождественное равенство* $A+B=B+A$.

2. *На ОДЗ трех выражений A, B и C справедливо тождественное равенство* $(A+B)+C=A+(B+C)$.

3. *На ОДЗ двух выражений A и B справедливо тождественное равенство* $AB=BA$.

4. *На ОДЗ трех выражений A, B и C справедливо тождественное равенство* $(AB)C=A(BC)$.

5. *На ОДЗ трех выражений A, B и C справедливо тождественное равенство $A(B+C)=AB+AC$.*

Поскольку метод доказательства справедливости этих утверждений один и тот же, то приведем здесь доказательство лишь утверждения 1.

Возьмем некоторый числовой набор из ОДЗ двух выражений A и B и обозначим соответствующие числовые значения этих выражений соответственно через A_0 и B_0. Тогда для чисел A_0 и B_0 по свойству коммутативности сложения чисел справедливо числовое равенство $A_0+B_0=B_0+A_0$. Значит, показано, что для данного числового набора из ОДЗ двух выражений A и B соответствующие числовые значения выражений A_0+B_0 и B_0+A_0 равны. Так как это рассуждение можно провести для любого числового набора из ОДЗ двух выражений A и B, то справедливость на ОДЗ этих выражений тождественного равенства $A+B=B+A$ доказана.

Аналогично доказываются и следующие утверждения.

6. *На ОДЗ выражения A справедливы тождественные равенства $A+0=A$, $0+A=A$.*

7. *На ОДЗ выражения A справедливы тождественные равенства $A\cdot 1=A$, $1\cdot A=A$.*

8. *На ОДЗ выражения A справедливо тождественное равенство $A+(-A)=0$.*

9. *На области M — части ОДЗ выражения A, на которой ни для одного числового набора соответствующее числовое значение выражения A не равно нулю, — справедливо тождественное равенство $A\cdot\frac{1}{A}=1$.*

Используя утверждения 1—9, можно показать, что действия вычитания и деления алгебраических выражений являются соответственно обратными к действиям сложения и умножения алгебраических выражений. А именно, справедливы следующие утверждения.

10. *На ОДЗ двух выражений A и B справедливо тождественное равенство $B+(A-B)=A$.*

11. *На области M — части ОДЗ двух выражений A и B, на которой ни для одного числового набора соответствующее числовое значение выражения B не равно нулю, — справедливо тождественное равенство $B\left(\frac{A}{B}\right)=A$.*

Приведем теперь утверждения, которые часто используются при доказательстве равенств алгебраических выражений.

12. *Если на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ трех алгебраических выражений A, B и C, одновременно справедливы тождественные равенства $A=B$ и $B=C$, то на области M справедливо и тождественное равенство $A=C$* (транзитивность равенств).

13. *Если на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ четырех алгебраических выражений A, B, C и D, одновременно справедливы тождественные равенства $A=B$ и $C=D$, то на области M справедливо и тождественное равенство $A+C=B+D$.*

14. *Если на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ четырех алгебраических выражений A, B, C и D, одновременно справедливы тождественные равенства $A=B$ и $C=D$, то на области M справедливо и тождественное равенство $AC=BD$.*

Метод доказательства утверждений 10—14 является тем же самым, что и при доказательстве утверждений 1—9. Докажем, например, утверждение 12.

Возьмем некоторый числовой набор из области M. Обозначим соответствующие числовые значения выражений A, B и C соответственно через A_0, B_0 и C_0. Из справедливости на области M тождественных равенств $A=B$ и $B=C$ вытекает справедливость числовых равенств $A_0=B_0$ и $B_0=C_0$. По свойству транзитивности числовых равенств тогда справедливо и числовое равенство $A_0=C_0$. Таким образом, показано, что для данного числового набора из области M соответствующие числовые значения выражений A и C равны. Поскольку это рассуждение можно провести для любого числового набора из области M, то справедливость на области M тождественного равенства $A=C$ доказана.

Принято следующее соглашение: если не указана явно область M, на которой рассматривается тождественное равенство $A=B$, то оно рассматривается на ОДЗ двух выражений A и B. Поэтому слова «дано, что $A=B$» означают, что на ОДЗ двух выражений A и B справедливо тождественное равенство $A=B$. Слова «доказать, что $A=B$» означают, что сначала надо найти ОДЗ двух выражений A и B, а затем доказать тождественное равенство $A=B$ на этой ОДЗ.

В частности, исходя из этого, *утверждения* 1—5, называемые обычно законами сложения и умножения алгебраических выражений, можно переписать и так:

Справедливы следующие законы сложения и умножения алгебраических выражений:

1. $A+B=B+A$ (коммутативность сложения);
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (ассоциативность сложения);
3. $AB=BA$ (коммутативность умножения);
4. $(AB)C=A(BC)$ (ассоциативность умножения);
5. $(A+B)C=AC+BC$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

Прежде чем рассмотреть применение данных утверждений для доказательства равенств, дадим определение равносильного перехода от одного равенства к другому.

Если на некоторой области M из справедливости одного тождественного равенства вытекает справедливость второго, а из справедливости второго вытекает справедливость первого, то говорят, что такие два тождественные равенства *равносильны на области* M, а замену одного из них другим называют *равносильным переходом на области* M от первого равенства ко второму.

В дальнейшем, если это не будет вызывать недоразумений, для краткости слово «тождественное» будем опускать.

Равносильный переход на области M от одного равенства к другому обозначается двойной стрелкой, над которой сверху написана буква M, т. е. запись $A=B \overset{M}{\Leftrightarrow} C=D$ означает, что на области M равенства $A=B$ и $C=D$ равносильны.

Тогда из справедливости утверждений 13, 14 следует справедливость следующих равносильных переходов.

15. *Пусть* M — *ОДЗ трех алгебраических выражений* A, B *и* C, *тогда* $A=B \overset{M}{\Leftrightarrow} A+C=B+C$.

16. *Пусть некоторая область* M *принадлежит ОДЗ трех алгебраических выражений* A, B *и* C *и обладает следующим свойством: ни для какого числового набора из области* M *соответствующее числовое значение выражения* C *не равно нулю. Тогда* $A=B \overset{M}{\Leftrightarrow} AC=BC$.

Докажем, например, утверждение 15. Так как $C=C$, то из утверждения 13 следует справедливость перехода от равенства $A=B$ к равенству $A+C=B+C$. Обратно, имея равенства $A+C=B+C$ и $(-C)=(-C)$ и используя утверждения 13 и 8, получим справедливость перехода от равенства $(A+C)=(B+C)$ к равенству $A=B$. Следовательно, справедлив равносильный переход

$$A=B \overset{M}{\Leftrightarrow} A+C=B+C.$$

Приведенные утверждения 1—16 позволяют доказывать равенства алгебраических выражений. Докажем, например, что на ОДЗ двух выражений A и B справедливо равенство

$$A-B=A+(-B).$$

На основании утверждения 15 это равенство равносильно равенству

$$A-B+B=A+(-B)+B.$$

Согласно утверждениям 1, 2 и 10 справедливы следующие равенства:

$$A-B+B=B+(A-B) \quad \text{и} \quad B+(A-B)=A.$$

Следовательно, $A-B+B=A$.

Аналогично, используя утверждения 2,8, имеем $A+(-B)+$ $+B=A$.

Таким образом, доказано, что равенство $A-B+B=A+$ $+(-B)+B$ справедливо на ОДЗ алгебраических выражений A и B. Следовательно, на этой ОДЗ справедливо и равенство $A-B=A+(-B)$.

Неравенства алгебраических выражений. Перейдем теперь к употреблению знака неравенства для алгебраических выражений. Знак неравенства $>$ ($\geqslant$, $<$ или $\leqslant$) так же, как и знак равенства, употребляется для алгебраических выражений только с некоторыми пояснениями, как следует понимать такую запись. Приведем наиболее часто встречающиеся случаи употребления этих знаков.

а) Пусть известно, что на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ двух алгебраических выражений A и B, для любого числового набора из M соответствующее числовое значение выражения A больше соответствующего числового значения выражения B. Тогда это утверждение записывается так: «*Известно* (или *дано*), *что* $A > B$ *на области* M». В этом случае говорят также, что на области M *справедливо тождественное неравенство* $A > B$.

б) Пусть требуется доказать справедливость утверждения: «Для любого числового набора из области M, принадлежащей ОДЗ двух выражений A и B, соответствующее числовое значение выражения A больше соответствующего числового значения выражения B». Тогда пишут: «*Доказать, что* $A > B$ *на области* M». В этом случае говорят также, что *требуется доказать справедливость на области* M *тождественного неравенства* $A > B$.

в) Пусть требуется найти область M, принадлежащую ОДЗ двух алгебраических выражений A и B, такую, что для любого числового набора из области M соответствующее числовое значение выражения A больше соответствующего числового значения выражения B, а для любого числового набора из ОДЗ, не входящего в область M, соответствующее числовое значение выражения A меньше или равно соответствующему числовому значению выражения B. В таких случаях говорят: «*Решить неравенство* $A > B$».

При доказательстве тождественных неравенств часто приходится пользоваться следующими утверждениями.

17. *Если на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ трех алгебраических выражений A, B и C, одновременно справедливы тождественные неравенства $A > B$ и $B > C$, то на области M справедливо и тождественное неравенство $A > C$* (свойство транзитивности неравенств).

18. *Если на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ четырех алгебраических выражений A, B, C и D, одновременно справедливы тождественные неравенства $A > B$ и $C > D$, то на области M справедливо и тождественное неравенство $A+C > B+D$.*

19. *Если для любого числового набора из некоторой области M, принадлежащей ОДЗ четырех алгебраических выражений A, B, C и D, соответствующие числовые значения этих выражений A, B, C и D положительны и если на этой области одновременно справедливы тождественные неравенства $A > B$ и $C > D$, то справедливо и тождественное неравенство $AC > BD$.*

Дадим теперь определение равносильного перехода от одного неравенства к другому.

Если на некоторой области M из справедливости первого тождественного неравенства вытекает справедливость второго, а из справедливости второго вытекает справедливость первого, то говорят, что такие два тождественные неравенства *равносильны на области* M, а замену одного из них другим называют *равносильным переходом* от первого неравенства ко второму. При этом употребляется знак равносильного перехода $\Leftrightarrow$.

Из справедливости утверждений 17—19 следует справедливость следующих равносильных переходов.

20. *Пусть M—ОДЗ трех алгебраических выражений A, B и C, тогда* $A > B \overset{M}{\Leftrightarrow} A + C > B + C$.

21. *Пусть некоторая область M принадлежит ОДЗ трех алгебраических выражений A, B и C и обладает следующим свойством: для любого числового набора из области M соответствующее числовое значение выражения C положительно. Тогда* $A > B \overset{M}{\Leftrightarrow} AC > BC$.

Принято следующее соглашение: если не указана явно область M, на которой рассматривается тождественное неравенство $A > B$, то оно рассматривается на ОДЗ двух выражений A и B. Поэтому слова «*дано, что* $A > B$» означают, что на ОДЗ двух выражений A и B справедливо тождественное неравенство $A > B$; слова «*доказать, что* $A > B$» означают доказать, что на ОДЗ двух выражений A и B справедливо тождественное неравенство $A > B$ (при этом имеется в виду, что эту ОДЗ обязательно следует отыскать). Если дано неравенство $A > B$, то ОДЗ двух выражений A и B называют часто ОДЗ неравенства $A > B$.

Следует отметить, что утверждения 17—21 останутся верными и в случае нестрогих неравенств. Например, свойство транзитивности неравенств может быть сформулировано так.

17а. *Если на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ трех алгебраических выражений A, B и C, одновременно справедливы тождественные неравенства $A \geqslant B$ и $B > C$, то на области M справедливо и тождественное неравенство $A > C$.*

17б. *Если на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ трех алгебраических выражений A, B и C, одновременно справедливы тождественные неравенства $A > B$ и $B \geqslant C$, то на области M справедливо и тождественное неравенство $A > C$.*

Если оба неравенства являются нестрогими, то неравенство, вытекающее из них, будет также нестрогим. Например, в этом случае утверждение о транзитивности неравенств имеет вид.

17в. *Если на некоторой области M, принадлежащей ОДЗ трех алгебраических выражений A, B и C, одновременно справедливы тождественные неравенства $A \geqslant B$ и $B \geqslant C$, то на области M справедливо и тождественное неравенство $A \geqslant C$.*

В дальнейшем, также, как и в случае равенств, слово тождественное будем опускать.

Рассмотрим теперь некоторые способы доказательств равенств и неравенств.

1. Перебор всех возможных случаев. Докажем этим способом свойства абсолютных величин действительных чисел типа равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} &1.\ |a+b|\leqslant|a|+|b|;\\ &2.\ |a|-|b|\leqslant|a-b|;\\ &3.\ |ab|=|a||b|;\\ &4.\ \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|},\ \text{если}\ b\neq 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Начнем, например, со свойства 3. Рассмотрим все возможные случаи:

α) $\{(a,\ b)\,|\,a\in[0;\ +\infty);\ b\in[0;\ +\infty)\}$,
β) $\{(a,\ b)\,|\,a\in[0;\ +\infty);\ b\in(-\infty;\ 0]\}$,
γ) $\{(a,\ b)\,|\,a\in(-\infty;\ 0];\ b\in[0;\ +\infty)\}$,
δ) $\{(a,\ b)\,|\,a\in(-\infty;\ 0];\ b\in(-\infty;\ 0]\}$

и доказательство проведем отдельно в каждом случае.

В случае α) по определению абсолютной величины $|a|=a$ и $|b|=b$, поэтому $|ab|=ab$. Значит, в случае α) равенство $|ab|=|a||b|$ может быть записано в виде $ab=ab$, после чего оно становится очевидным.

В случае β) $ab\leqslant 0$, поэтому по определению абсолютной величины $|a|=a$, $|b|=-b$, $|ab|=-ab$. Значит, в этом случае свойство 3 может быть записано в виде $-ab=a(-b)$ или $-ab=-ab$, после чего оно становится очевидным.

В случае γ) или δ) свойство 3 доказывается аналогично. Из справедливости свойства 3 во всех возможных случаях вытекает его справедливость в той формулировке, в которой оно записано.

Докажем теперь свойство 1. Рассмотрим следующие 6 случаев:

α) $a\geqslant 0;\ b\geqslant 0;$
β) $a\geqslant 0;\ b\leqslant 0;\ a+b\geqslant 0;$
γ) $a\geqslant 0;\ b\leqslant 0;\ a+b\leqslant 0;$
δ) $a\leqslant 0;\ b\geqslant 0;\ a+b\geqslant 0;$
λ) $a\leqslant 0;\ b\geqslant 0;\ a+b\leqslant 0;$
ν) $a\leqslant 0;\ b\leqslant 0.$

В случае α) $|a+b|=a+b=|a|+|b|$, поэтому свойство 1 в этом случае может быть записано в виде $|a+b|=|a|+|b|$, после чего оно становится очевидным.

В случае β) $|a+b|=a+b=a-(-b)=|a|-|b|$, поэтому свойство 1 в этом случае может быть записано в виде $|a|-|b|\leqslant\leqslant|a|+|b|$, после чего оно становится очевидным.

В случае γ) $|a+b|=-(a+b)=(-b)-a=|b|-|a|$, поэтому свойство 1 в этом случае может быть записано в виде $|b|-|a|\leqslant|a|+|b|$, после чего оно становится очевидным.

В случаях δ), λ) и ν) доказательства свойства 1 аналогичны предыдущим. Из справедливости свойства 1 во всех возможных случаях вытекает его справедливость в той формулировке, в которой оно записано. Свойства 2 и 4 абсолютных величин (1) доказываются аналогично.

2. Использование законов действий над алгебраическими выражениями и вытекающих из них свойств (1—21). Докажем этим способом равенство

$$(a+b)(a^2+b^2)=a^3+a^2b+ab^2+b^3. \qquad (2)$$

Отметим, что равенство (2) доказывается на ОДЗ трех выражений $(a+b)$, (a^2+b^2) и $a^3+a^2b+ab^2+b^3$, т. е. на множестве $\{(a,\ b)\,|\,a\in R;\ b\in R\}$. На основании закона дистрибутивности действий над алгебраическими выражениями можно утверждать справедливость равенства

$$(a+b)(a^2+b^2)=a(a^2+b^2)+b(a^2+b^2) \qquad (3)$$

На основании закона коммутативности умножения справедливы равенства

$$a(a^2+b^2)=(a^2+b^2)a, \qquad (4)$$
$$b(a^2+b^2)=(a^2+b^2)b. \qquad (5)$$

На основании закона дистрибутивности справедливы равенства

$$(a^2+b^2)a=a^2a+b^2a, \qquad (6)$$
$$(a^2+b^2)b=a^2b+b^2b. \qquad (7)$$

На основании законов коммутативности и ассоциативности умножения справедливы равенства

$$a^2a=a^3, \qquad (8)$$
$$b^2a=ab^2, \qquad (9)$$
$$a^2b=a^2b, \qquad (10)$$
$$b^2b=b^3. \qquad (11)$$

Вследствие того что равенства можно складывать (см. свойство 13 равенств), складывая равенства (8) и (9), а затем (10) и (11), получаем справедливость равенств

$$a^2a+b^2a=a^3+ab^2,$$
$$a^2b+b^2b=a^2b+b^3.$$

Складывая эти равенства, а затем равенства (6) и (7), получаем справедливость равенств

$$a^2a+b^2a+a^2b+b^2b=a^3+ab^2+a^2b+b^3, \qquad (12)$$
$$(a^2+b^2)a+(a^2+b^2)b=a^2a+b^2a+a^2b+b^2b. \qquad (13)$$

Складывая равенства (4) и (5), получаем справедливость равенства

$$a(a^2+b^2)+b(a^2+b^2)=(a^2+b^2)a+(a^2+b^2)b. \qquad (14)$$

Применяя свойства транзитивности равенств, из справедливости равенств (3), (14), (13) и (12) получаем справедливость равенства (2).

Отметим, что все предшествующие выкладки записывают в виде следующей цепочки равенств:

$$(a+b)(a^2+b^2)=$$
$$=a(a^2+b^2)+b(a^2+b^2)=(a^2+b^2)a+(a^2+b^2)b=$$
$$=a^2a+b^2a+a^2b+b^2b=a^3+a^2b+ab^2+b^3.$$

Из справедливости этой цепочки равенств делается вывод о справедливости равенства (2). В дальнейшем при доказательстве этим и другими способами будем писать лишь цепочку очевидных равенств.

3. Прямое доказательство. Часто в процессе поиска доказательства, переходя от данного неравенства к следующим, приходят в конце к очевидному неравенству. Если при этом совершались только равносильные переходы, т. е. в результате перехода каждый раз получали неравенство, равносильное предыдущему, то тем самым получено доказательство исходного неравенства. Докажем этим способом следующее неравенство: $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ на области $M=\{(a,\ b)\,|\,a\in(0,\ +\infty);\ b\in(0;\ +\infty)\}$. Напишем цепочку равносильных на области M переходов:

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\overset{M}{\Leftrightarrow}a+b-2\sqrt{ab}\geqslant 0\overset{M}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{M}{\Leftrightarrow}(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2\geqslant 0\overset{M}{\Leftrightarrow}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0.$$

Поскольку справедливость последнего неравенства очевидна, то из равносильности первого и последнего неравенств вытекает справедливость первого неравенства.

Доказанное неравенство часто формулируют так: *среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического.*

4. Метод от противного. Этот метод уже использовался в главе I при доказательстве теоремы о том, что простых чисел бесконечно много. Можно его применять и при доказательстве равенств и неравенств.

Докажем, например, этим методом, что для любого положительного числа a справедливо неравенство $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$. Предположим противное, т. е. предположим, что существует хотя бы одно положительное число a такое, что для него справедливо неравенство $a+\frac{1}{a}<2$. Так как a — положительное число, то это неравенство на основании утверждения 21 равносильно неравенству $\left(a+\frac{1}{a}\right)a<2a$, т. е. неравенству $a^2+1<2a$, которое на основании утверждения 20 равносильно неравенству $(a^2+1)-2a < 2a-2a$, т. е. неравенству $a^2-2a+1<0$. Перепишем последнее неравенство в виде $(a-1)^2<0$. Приходим к противоречию с очевидным фактом, что квадрат любого действительного числа неотрицателен. Полученное противоречие говорит о том, что сделанное предположение неверно. Следовательно, неравенство $a+\frac{1}{a} \geqslant 2$ выполняется для любого положительного a.

5. Использование свойства транзитивности неравенств. Пусть требуется доказать на области M неравенство $A<C$. Если известно или уже доказано, что на области M справедливы неравенства $A<B$, $B<C$, или неравенства $A \leqslant B$, $B<C$, или неравенства $A<B$, $B \leqslant C$, то по свойству транзитивности неравенств будет справедливо и исходное неравенство.

Докажем этим способом следующее неравенство:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2$$

на множестве $M=\{(n) \mid n \in N\}$.

Для $n=1$ неравенство очевидно. Рассмотрим теперь любое натуральное $n \geqslant 2$. Каждое слагаемое суммы, начиная со второго, заменим на большее: $\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}<\frac{1}{k(k-1)}$, где $2 \leqslant k \leqslant n$. Таким образом, имеем справедливое неравенство $A_n<B_n$, где $A_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ и $B_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n(n-1)}$. Следует отметить, что неравенство $A_n<B_n$ является строгим при любом натуральном $n \geqslant 2$.

Алгебраическое выражение B_n можно упростить, если каждое слагаемое, начиная со второго, заменить алгебраической суммой: $\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$.

Получим

$$B_n=\frac{1}{1^2}+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+ \\ +\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}.$$

Неравенство $B_n<2$ является, как легко заметить, справедливым для любого натурального n. Следовательно, по свойству транзитивности неравенств имеем $A_n<2$, что и требовалось доказать.

Докажем в заключение свойства возведения алгебраических выражений в натуральную степень, которые часто используются при решении уравнений и неравенств (см. гл. III).

Теорема 1. *Пусть некоторая область M принадлежит ОДЗ двух алгебраических выражений A и B и обладает следующим свойством: для любого числового набора из области M соответствующие числовые значения выражений A и B положительны. Тогда на области M для любого натурального числа n $(n \geqslant 2)$:*

а) *равенства* $A=B$ *и* $A^n=B^n$ *равносильны*;

б) *неравенства* $A>B$ *и* $A^n>B^n$ *равносильны.*

Доказательство. Обозначим алгебраическое выражение $A^{n-1}+A^{n-2}B+\ldots+AB^{n-2}+B^{n-1}$ через C. В § 6 будет доказана справедливость следующего равенства алгебраических выражений:

$$A^n-B^n=(A-B)C. \qquad (15)$$

Очевидно, что для любого числового набора из области M соответствующее числовое значение выражения C положительно.

Докажем утверждение а). Пусть дано, что $A=B$ на области M. Тогда на основании утверждения 15 на M справедливо равенство $A-B=0$, а отсюда по утверждению 16 получим, что на M справедливо равенство $(A-B)C=0$. По свойству транзитивности равенств из этого равенства и равенства (15) вытекает, что $A^n-B^n=0$, откуда по утверждению 15 следует, что на области M справедливо равенство A^n-B^n.

Итак, доказано, что на области M из справедливости равенства $A=B$ следует справедливость равенства $A^n=B^n$.

Пусть теперь дано, что $A^n=B^n$ на области M. Тогда на области M по утверждению 15 справедливо равенство $A^n-B^n=0$. Отсюда и из равенства (15) на области M на основании свойства транзитивности равенств имеем, что $(A-B)C=0$, а отсюда по утверждению 16 вытекает, что $A-B=0$, и наконец, по утверждению 15 получаем, что $A=B$. Значит, на области M из справедливости равенства $A^n=B^n$ вытекает справедливость равенства $A=B$. Утверждение а) доказано.

Докажем теперь утверждение б). Пусть дано, что на области M $A>B$. Тогда на основании утверждения 20 на M справедливо и неравенство $A-B>0$, а отсюда по утверждению 21 получим справедливость неравенства $(A-B)C>0$. Учитывая справедливость равенства (15) получим, что $A^n-B^n>0$. Наконец, по утверждению 20 получим, что на M справедливо неравенство $A^n>B^n$.

Итак, доказано, что на области M из справедливости неравенства $A>B$ следует справедливость неравенства $A^n>B^n$.

Пусть теперь дано, что $A^n>B^n$ на области M. Тогда на области M по утверждению 20 справедливо неравенство $A^n-B^n>0$. Отсюда и из равенства (15) получим, что $(A-B)C>0$ на области M. Применяя теперь утверждение 21, находим, что $A-B>0$ на M. Наконец, по утверждению 20 имеем $A>B$ на M. Итак, на области M из справедливости неравенства $A^n>B^n$ вытекает справедливость неравенства $A>B$. Утверждение б) доказано. Теорема доказана полностью.

§ 3. Многочлены

Рациональное выражение, содержащее относительно входящих в него букв только два действия — умножение и возведение в натуральную степень, называется *одночленом*.

Примеры одночленов: $3a$, $2abc\frac{23ab}{7}abc$, $\frac{2ab}{3}$.

Рациональное выражение называется *многочленом*, если оно является целым относительно каждой буквы, входящей в это выражение.

Например, рациональное выражение $\sqrt{35}abc-\frac{16ad}{7}+0{,}3dc$ является многочленом, ибо это выражение является целым относительно букв a, b, c и d.

В частности, рациональное выражение, содержащее только одну букву и являющееся целым относительно этой буквы, называется многочленом целым относительно одной буквы.

Из определения многочлена и правил действий над алгебраическими выражениями следует, что сумма, разность и произведение двух многочленов будут многочленами.

Если в многочлен входит n букв, то многочлен имеет смысл для любого числового набора из n чисел. Поэтому обычно, рассматривая многочлен, не говорят о его ОДЗ. Обычно одночлены тождественно преобразуют по законам действий, приведенных в § 2, собирая вместе все числа, входящие в одночлен, и записывая их перед буквами одночлена, а также собирая вместе одинаковые буквы, входящие в одночлен, и записывая их в виде натуральной степени этой буквы. После такого преобразования одночлен считается записанным в *стандартном виде*, а числовой множитель, стоящий перед буквами одночлена, называется *коэффициентом* данного одночлена.

Например, одночлен $3abc2cb\frac{3}{7}ac$ преобразуется к стандартному виду $\frac{18}{7}a^2b^2c^3$, и число $\frac{18}{7}$ есть его коэффициент.

Согласно правилам действий над алгебраическими выражениями многочлен всегда можно тождественно преобразовать к виду, в котором многочлен состоит из нескольких одночленов, записанных в стандартном виде и соединенных знаками сложения и вычитания; поэтому обычно говорят, что *многочлен есть алгебраическая сумма одночленов*.

Подобные члены многочлена — это его одночлены, записанные в стандартном виде и отличающиеся не более чем коэффициентами. *Привести подобные члены* многочлена — это значит заменить алгебраическую сумму подобных членов одним членом, тождественно равным этой сумме.

Исходя из правил действий над алгебраическими выражениями, можно следующим образом конкретизировать законы действий над многочленами.

Чтобы *сложить* два многочлена, следует записать подряд все члены первого многочлена, а затем все члены второго многочлена, сохраняя у каждого одночлена знак, стоящий перед его коэффициентом, после чего необходимо привести подобные члены.

Например: $(2cd+5a)+(x+7a-4cd)=2cd+5a+x+7a-4cd=$ $=12a+x-2cd$.

Чтобы *вычесть* из одного многочлена другой многочлен, следует записать подряд все члены первого многочлена, сохраняя у каждого одночлена знак, стоящий перед его коэффициентом, затем все члены второго многочлена, изменив на противоположные знаки, стоящие перед коэффициентами одночленов второго многочлена, после чего необходимо привести подобные члены.

Например: $(x^2-y^2)-(-7x^2+8y^2-5a)=x^2-y^2+7x^2-8y^2+5a=$ $8x^2-9y^2+5a$.

Чтобы *умножить одночлен на многочлен*, следует умножить этот одночлен на каждый член многочлена, записать члены произведения подряд с теми знаками, какие были у членов многочлена, если перед коэффициентом одночлена стоит знак плюс, и с противоположными знаками — если перед коэффициентом одночлена стоит знак минус, каждый одночлен произведения записать в стандартном виде, а затем привести подобные члены.

Например: $(-4ab)(3ab-2+3a^2b^2)=-(4ab)(3ab)+(4ab)\cdot 2-$ $-(4ab)(3a^2b^2)=-12a^2b^2+8ab-12a^3b^3$; $5c(2ab+1-3b)=(5c)(2ab)+$ $+(5c)\cdot 1-(5c)(3b)=10abc+5c-15bc$.

Чтобы *умножить многочлен на многочлен*, следует каждый одночлен (вместе со знаком, стоящим перед его коэффициентом) первого многочлена умножить на второй многочлен, записать подряд все произведения, каждый полученный одночлен записать в стандартной форме, а затем привести подобные члены.

Например: $(ab-cd)\cdot(ab+cd)=(ab)(ab)+(ab)(cd)-(cd)(ab)-$ $(cd)(cd)=a^2b^2+abcd-abcd-c^2d^2=a^2b^2-c^2d^2$.

Пользуясь правилами сложения и умножения многочленов и свойствами равенств алгебраических выражений, получим тождественные равенства, которые часто называют *формулами сокращенного умножения*.

Начнем с перемножения одинаковых многочленов вида $(a+b)$. Используя законы действий над алгебраическими выражениями, можно написать следующую цепочку тождественных равенств:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=(a)(a)+(a)(b)+(b)(a)+(b)(b)=$$
$$=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2. \quad (1)$$

Формула (1) имеет следующую словесную формулировку: *квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа, плюс удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.*

Теперь, используя предыдущую формулу, можно написать следующую цепочку тождественных равенств:

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=$$
$$=(a)(a^2)+(a)(2ab)+(a)(b^2)+(b)(a^2)+(b)(2ab)+(b)(b^2)=$$
$$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \quad (2)$$

Формула (2) имеет следующую словесную формулировку: *куб суммы двух чисел равен кубу первого числа, плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго числа и плюс куб второго числа.*

Напишем еще одну цепочку тождественных равенств:

$$(a+b)^4=(a+b)(a+b)^3=(a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)=$$
$$=(a)(a^3)+(a)(3a^2b)+(a)(3ab^2)+(a)(b^3)+(b)(a^3)+$$
$$+(b)(3a^2b)+(b)(3ab^2)+(b)(b^3)=a^4+3a^3b+3a^2b^2+$$
$$+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Приведенные формулы позволяют заметить некоторую закономерность, с помощью которой можно написать формулу для $(a+b)^n$, где n — любое натуральное число. А именно легко заметить, что всех членов будет $(n+1)$; первый член есть первое число в степени n; в каждом последующем члене степень первого числа на единицу меньше его степени в предшествующем члене, а в последнем члене оно в нулевой степени; второе число находится в первом члене в нулевой степени, во втором члене в первой степени, в каждом последующем члене степень второго числа на единицу больше его степени в предшествующем члене, а в последнем члене второе число в степени n.

Коэффициент же при каждом члене можно найти при помощи «треугольника Паскаля»:

0										1									
1									1		1								
2								1		2		1							
3							1		3		3		1						
4						1		4		6		4		1					
5					1		5		10		10		5		1				
6				1		6		15		20		15		6		1			
7			1		7		21		35		35		21		7		1		
8		1		8		28		56		70		56		28		8		1	
9	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1
	.		.		.		.		.		.		.		.		.		.

Правило образования строк «треугольника Паскаля» простое. Каждая строка может быть получена из предыдущей верхней строки следующим образом. В промежутке между любыми соседними числами верхней строки (но ниже их) пишется сумма этих чисел, а по краям пишутся единицы. Номер строки показывает, в какую степень возводится двучлен $(a+b)$, а числа этой строки являются коэффициентами соответствующих членов, записанных в рассмотренном выше порядке.

Конечно, если надо написать формулу для $(a+b)^n$, где n — большое число (например, 100), то ясно, что по треугольнику Паскаля вычислять коэффициенты правой части долго. Поэтому желательно знать общую формулу для вычисления $(a+b)^n$. Эта формула носит название формулы *бинома Ньютона* и имеет вид

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n, \qquad (3)$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, $0! = 1$, $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k$ для любого $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Доказательство равенства (3) будет дано в § 6.

Применим формулу бинома Ньютона, например, для вычисления $(a+b)^5$:

$$(a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5.$$

Вычислим коэффициенты C_5^m, где $m \in \{0, 1, 2\}$. Для вычисления остальных коэффициентов воспользуемся равенством

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{[n-(n-m)]!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}, \text{ для } 0 \leqslant m \leqslant n,$$

доказанным в главе 1.

Таким образом,

$$C_5^0 = C_5^5 = 1, \quad C_5^1 = C_5^4 = \frac{5!}{1!\,4!} = 5, \quad C_5^2 = C_5^3 = \frac{5!}{2!\,3!} = 10.$$

Следовательно,

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Из формулы бинома Ньютона легко получить формулу для $(a-b)^n$. Обозначим $d = -b$ и применим формулу бинома Ньютона:

$$(a-b)^n = (a+d)^n = C_1^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} d + \ldots + C_n^k a^{n-k} d^k + \ldots + C_n^n d^n.$$

Подставляя $(-b)$ вместо d, получим

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + (-1)^n C_n^n b^n.$$

Частные случаи этой формулы для $n=2$ и $n=3$:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3.$$

Формула бинома Ньютона $(a+b)^n$ и вытекающая из нее формула $(a-b)^n$ являются *формулами сокращенного умножения*, в которых берется произведение одинаковых многочленов (биномов) n раз.

Докажем теперь некоторые формулы, в которых берется произведение разных многочленов. Очевидна следующая цепочка тождественных равенств:

$$(a-b)(a+b) = (a)(a) + (a)(b) - (b)(a) - (b)(b) =$$
$$= a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Эта формула обычно запоминается в записи, где меняются местами правая и левая части: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Приведем ее словесную формулировку: *разность квадратов двух чисел равна произведению разности этих чисел на их сумму.*

Выведем формулу разности кубов двух чисел (a^3-b^3). Поскольку

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a)(a^2)+(a)(ab)+(a)(b^2)-(b)(a^2)-$$
$$-(b)(ab)-(b)(b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3,$$

то

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Приведем словесную формулировку этой формулы: *разность кубов двух чисел равна произведению разности этих чисел на неполный квадрат суммы этих чисел.*

Приведенные формулы позволяют заметить закономерность, с помощью которой легко записать формулу a^n-b^n для любого натурального числа n. Эта формула имеет вид

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Доказательство этой формулы будет проведено в § 6 методом математической индукции.

Наконец, выведем следующую формулу:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Действительно,

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=$$
$$=(a)(a^2)-(a)(ab)+(a)(b^2)+(b)(a^2)-(b)(ab)+(b)(b^2)=$$
$$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3.$$

Словесная формулировка этой формулы следующая: *сумма кубов двух чисел равна произведению суммы этих чисел на неполный квадрат разности этих чисел.*

Приведем формулы, которые желательно запомнить:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Формулы, доказанные в этом параграфе, справедливы для любых числовых значений букв a и b. Иногда эти формулы употребляются и тогда, когда буквами a и b обозначены некоторые алгебраические выражения, но тогда очевидно, что эти формулы будут справедливы уже на ОДЗ двух алгебраических выражений a и b.

В ряде вопросов при действиях с многочленами удобнее рассматривать их не в стандартном виде, а в виде произведения.

Тождественное преобразование многочлена к виду произведения многочленов называется *разложением многочлена на множители*. Собственно говоря, все формулы сокращенного умножения и есть формулы разложения многочлена на множители.

Кроме применения формул сокращенного умножения, есть и другие приемы для разложения многочлена на множители, например, *вынесение за скобки общего множителя*, *группировка*. Для разложения многочлена на множители употребляются все приемы.

Рассмотрим пример разложения многочлена на множители. Группируя, вынося за скобки общий множитель и пользуясь формулой сокращенного умножения, получаем цепочку тождественных равенств:

$$a^2c+2abc+b^2c+(a+b)^2 d=c(a^2+2ab+b^2)+d(a+b)^2=$$
$$=c(a+b)^2+d(a+b)^2=(a+b)^2(c+d).$$

§ 4. Алгебраические дроби

Алгебраической дробью называется дробное рациональное выражение, являющееся частным от деления одного многочлена на другой.

Алгебраическая дробь, которая есть частное от деления многочлена A на многочлен B, обычно записывается в виде $\frac{A}{B}$, причем многочлен A *называется числителем* алгебраической дроби, а многочлен B — ее *знаменателем*.

Примеры алгебраических дробей:

$$\frac{3a+b}{a^3+1};\quad \frac{ab-b}{d+a};\quad \frac{a^2+b^2}{a-b};\quad \frac{xy+6y}{7x+8y}.$$

ОДЗ алгебраической дроби $\frac{A}{B}$, в которую входит n букв, есть множество всех числовых наборов, соответствующих буквенному набору дроби $\frac{A}{B}$, кроме тех, для каждого из которых соответствующее числовое значение многочлена B равно нулю.

Например, ОДЗ алгебраической дроби $\frac{a^2+b^2}{a-b}$ есть множество $\{(a, b) | a\in R;\ b\in R;\ a\neq b\}$.

Докажем несколько утверждений о равенстве алгебраических дробей.

1. *Если обозначить алгебраическую дробь $\frac{A}{B}$ одной буквой C, то на ОДЗ этой дроби равносильны тождественные равенства $C=\frac{A}{B}$ и $A=CB$.*

Справедливость этого свойства вытекает из справедливости утверждения 14 § 2.

2. *Равенства* $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ *и* $AD=BC$ *равносильны на ОДЗ первого из них.*

Это свойство часто формулируют так: *две дроби* $\frac{A}{B}$ *и* $\frac{C}{D}$ *тождественно равны на ОДЗ тогда и только тогда, когда на этой ОДЗ справедливо равенство* $AD=BC$.

Доказательство. Пусть область M — ОДЗ двух дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$. Рассмотрим случай, когда $A=0$ на M. Тогда $\frac{A}{B}=0$ и из равенства $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ следует, что и $\frac{C}{D}=0$ на M. Поэтому $C=0$ на M, а это значит, что $AD=BC$ на M.

Наоборот, пусть $AD=BC$ и $A=0$ на M. Так как на M $D\neq 0$ и $B\neq 0$, то $C=0$ на M. Следовательно, $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$.

Рассмотрим теперь случай, когда ни для одного набора из области M многочлен A не обращается в нуль, т. е. рассмотрим случай, когда $A\neq 0$ на M. Пусть $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, тогда отсюда следует, что и $C\neq 0$ на M. Обозначим $\frac{A}{B}$ через α и $\frac{C}{D}$ через β. По свойству 1 алгебраических дробей $A=\alpha B$ и $C=\beta D$. По утверждению 14 § 2 имеем

$$A\beta D=C\alpha B. \tag{1}$$

Так как $\alpha=\beta\neq 0$ на M, то по утверждению 14 § 2 из (1) следует, что $AD=CB$.

Наоборот, пусть $AD=BC$, тогда, так как $A\neq 0$, $D\neq 0$ и $B\neq 0$ на M, то и $C\neq 0$ на M. Следовательно, $\alpha=\frac{A}{B}$ и $\beta=\frac{C}{D}$ не равны нулю на M. Тогда умножим данное равенство $AD=BC$ на $\alpha\beta$. Получим равносильное равенство

$$\alpha\beta AD=\alpha\beta BC. \tag{2}$$

Но $\alpha B=A$, $\beta D=C$, и равенство (2) примет вид

$$\alpha AC=\beta AC. \tag{3}$$

Используя утверждение 14 § 2, получим $\alpha=\beta$, что и требовалось доказать.

Таким образом, свойство 2 алгебраических дробей доказано.

3. *На ОДЗ алгебраической дроби* $\frac{A}{B}$ *справедливы тождественные равенства* $\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}=-\frac{A}{-B}=-\frac{-A}{B}$.

Каждое из этих равенств становится очевидным, если воспользоваться только что доказанным свойством 2.

4. *Для любого многочлена К, не обращающегося в нуль на ОДЗ алгебраической дроби* $\frac{A}{B}$, *справедливо тождественное равенство* $\frac{A}{B}=\frac{AK}{BK}$.

Поскольку на ОДЗ дроби $\frac{A}{B}$ это равенство по свойству 2 равносильно равенству $A(BK)=B(AK)$, которое является очевидным, то столь же очевидна и справедливость свойства 4.

5. *На ОДЗ алгебраической дроби* $\frac{A}{B}$ *справедливо тождественное равенство* $\frac{A}{B}=A\cdot\frac{1}{B}$.

Действительно, по утверждению 9 § 2

$$\frac{A}{B}=\frac{A}{B}\left(B\cdot\frac{1}{B}\right).$$

Используя ассоциативность умножения алгебраических выражений, имеем

$$\frac{A}{B}\left(B\cdot\frac{1}{B}\right)=\left(\frac{A}{B}\cdot B\right)\cdot\frac{1}{B}.$$

Применяя утверждение 11 § 2 получаем, что

$$\frac{A}{B}=A\cdot\frac{1}{B}.$$

6. *На ОДЗ алгебраической дроби* $\frac{1}{AB}$ *справедливо тождественное равенство* $\frac{1}{AB}=\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}$.

Действительно, на ОДЗ дроби $\frac{1}{AB}$ очевидна справедливость цепочки тождественных равенств

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AB}\left(B\cdot\frac{1}{B}\right)\left(A\cdot\frac{1}{A}\right)=\left(\frac{1}{AB}\cdot AB\right)\left(\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}\right)=\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}.$$

7. *На ОДЗ двух алгебраических дробей* $\frac{A}{B}$ *и* $\frac{B}{A}$ *справедливо тождественное равенство* $\frac{A}{B}=\frac{1}{\frac{B}{A}}$.

Действительно, применяя сначала свойство 5 дробей, затем свойства действий над алгебраическими выражениями, затем свойства 6 и 5 дробей, имеем цепочку тождественных равенств

$$\frac{A}{B}=A\cdot\frac{1}{B}=A\cdot\frac{1}{B}\cdot\left(\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\frac{1}{A}}\right)=\left(A\cdot\frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{B}\cdot\frac{1}{\frac{1}{A}}\right)=\frac{1}{B\cdot\frac{1}{A}}=\frac{1}{\frac{B}{A}}.$$

Напомним следующее соглашение: если не указана явно область M, на которой рассматривается некоторое тождественное равенство, то оно рассматривается на ОДЗ двух выражений, стоящих в левой и правой частях равенства. Поэтому дальше не будет явно указываться область, на которой будет справедливо тождественное равенство, имея в виду, что оно справедливо на ОДЗ двух выражений, стоящих в левой и правой частях равенства.

Пользуясь свойствами сложения и умножения алгебраических выражений и свойствами алгебраических дробей, легко показать справедливость тождественных равенств

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD}; \quad \frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}.$$

Действительно, используя свойства алгебраических дробей, получим

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD}{BD}+\frac{CB}{DB}=AD\cdot\frac{1}{BD}+CB\cdot\frac{1}{BD}.$$

Применяя теперь свойства сложения и умножения алгебраических выражений, а затем опять свойства алгебраических дробей, имеем

$$AD\cdot\frac{1}{BD}+CB\cdot\frac{1}{BD}=(AD+CB)\frac{1}{BD}=\frac{AD+CB}{BD},$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается второе равенство:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\left(A\cdot\frac{1}{B}\right)\left(C\cdot\frac{1}{D}\right)=AC\cdot\frac{1}{B}\cdot\frac{1}{D}=AC\cdot\frac{1}{BD}=\frac{AC}{BD}.$$

Так же доказываются и равенства

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{AD-BC}{BD}; \quad \frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{AD}{BC}.$$

Часто надо привести алгебраические дроби *к общему знаменателю*, т. е. записать их так, чтобы у всех этих дробей был один и тот же знаменатель. Для этого существует следующий способ: надо разложить каждый знаменатель на множители, а затем числитель и знаменатель каждой дроби умножить на произведение тех множителей знаменателей остальных дробей, которые не содержатся в данном знаменателе, что по свойству дробей их не изменит.

Пример. Привести к общему знаменателю следующие алгебраические дроби:

$$\frac{a}{a^3-b^3}; \quad \frac{c}{a^2-b^2}; \quad \frac{d}{a^2+ab+b^2}.$$

Разлагая знаменатели на множители, перепишем дроби так:

$$\frac{a}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}; \quad \frac{c}{(a-b)(a+b)}; \quad \frac{d}{a^2+ab+b^2}.$$

Теперь, умножая числитель и знаменатель первой дроби на $(a+b)$, второй — на (a^2+ab+b^2), третий — на $(a-b)(a+b)$, получаем

$$\frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)};\quad \frac{c(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)};$$
$$\frac{d(a-b)(a+b)}{(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)}.$$

У этих дробей одинаковые знаменатели, т. е. первоначальные дроби приведены к общему знаменателю.

В ряде случаев требуется представить дробь в виде суммы дробей с более простыми знаменателями. Это можно сделать только в том случае, когда многочлен, стоящий в знаменателе дроби, разлагается на произведение многочленов меньшей степени. Покажем на примере, как это делается.

Пусть надо разложить алгебраическую дробь $\frac{1}{x^2-1}$ на простейшие. Так как многочлен x^2-1 разлагается на произведение многочленов $(x-1)$ и $(x+1)$, то это можно сделать. Для этого нужно найти алгебраические дроби $\frac{A}{x-1}$ и $\frac{B}{x+1}$ такие, чтобы было выполнено тождественное равенство $\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$. Рассмотрим сумму $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$. По только что сформулированным правилам

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(A+B)x+(A-B)}{(x-1)(x+1)}.$$

Так как эта дробь должна тождественно равняться дроби $\frac{1}{x^2-1}$ (заметим, что эти рассуждения проводятся для любого x, кроме $x=1$ и $x=-1$), то по свойству 2 эти две дроби равны только тогда, когда $[(A+B)x+(A-B)](x-1)(x+1)=(x-1)(x+1)$. Так как это равенство должно выполняться для любого x, кроме $x=1$ и $x=-1$, то, полагая, например, $x=0$, затем $x=2$, получаем, что это будет верно только тогда, когда одновременно $A-B=1$ и $3A+B=1$. А эти два равенства справедливы одновременно только для $A=\frac{1}{2}$ и $B=-\frac{1}{2}$. Значит, данная дробь разложена на простейшие, а именно, справедливо следующее тождественное равенство:

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}.$$

Этот способ разложения дроби в сумму более простых дробей называется *способом неопределенных коэффициентов*. Действительно, полагая числа A и B вначале неизвестными, получаем на ОДЗ равенство двух многочленов, один из которых с известными коэффициентами, другой с неизвестными, выраженными через A и B. Это дает возможность выписать алгебраические равенства относительно неизвестных коэффициентов (в данном случае $A-B=1$, $3A+B=1$). Найдя числовые значения неизвестных коэффициентов, обращающие данные алгебраические равенства в верные числовые равенства, тем самым решим поставленную задачу о представлении дроби в виде суммы более простых дробей.

Неравенства алгебраических дробей. Докажем два утверждения, которые часто применяются при рассмотрении алгебраических дробей.

8. *На ОДЗ алгебраической дроби* $\frac{A}{B}$ *равносильны следующие неравенства:* $\frac{A}{B}>0$ *и* $AB>0$.

Докажем, что из справедливости первого неравенства следует справедливость второго неравенства.

Доказательство. Обозначим алгебраическую дробь $\frac{A}{B}$ одной буквой C, т. е. $C=\frac{A}{B}$. На ОДЗ данной алгебраической дроби алгебраическое выражение C положительно, так как любое числовое значение алгебраического выражения C является положительным числом. По свойству 1 равенств алгебраических дробей имеем $A=CB$ на ОДЗ данной дроби. Следовательно, алгебраическое выражение AB равно CB^2: $AB=CB^2$. По определению на ОДЗ дроби $\frac{A}{B}$ алгебраическое выражение B в нуль не обращается, т. е. алгебраическое выражение B^2 положительно на ОДЗ дроби $\frac{A}{B}$. Произведение положительных алгебраических выражений C и B^2 будет также положительным. Аналогично доказывается, что на ОДЗ алгебраической дроби $\frac{A}{B}$ из справедливости неравенства $AB>0$ следует справедливость неравенства $\frac{A}{B}>0$.

9. *На ОДЗ алгебраических дробей* $\frac{A}{B}$ *и* $\frac{C}{D}$ *равносильны неравенства* $\frac{A}{B}>\frac{C}{D}$ *и* $AD^2B>CB^2D$.

Доказательство. Используя утверждение 20, получим равносильные неравенства: $\frac{A}{B}>\frac{C}{D}$ и $\frac{A}{B}-\frac{C}{D}>0$.

Выше было доказано равенство

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{AD-BC}{BD},$$

которое позволяет сделать еще один равносильный переход:

$$\frac{A}{B}>\frac{C}{D}\Leftrightarrow\frac{AD-BC}{BD}>0.$$

Последнее неравенство по утверждению 8 на ОДЗ алгебраических дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ равносильно неравенству $(AD-BC)\,BD>0$, которое равносильно неравенству $AD^2B>CB^2D$. Утверждение 9 полностью доказано.

Утверждения 8, 9 используются при доказательстве других неравенств.

Докажем, например, что неравенства $\frac{a+b}{a-b}>\frac{a-b}{a+b}$ и $a>b$ равносильны для любых, не равных друг другу положительных чисел a и b.

Действительно, по утверждению 9 равносильны следующие неравенства:

$$\frac{a+b}{a-b}>\frac{a-b}{a+b}\quad\text{и}\quad(a^2-b^2)\left[(a+b)^2-(a-b)^2\right]>0.$$

Так как $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$, то последнее неравенство равносильно неравенству $(a-b)(a+b)\,4ab>0$, которое в силу положительности a и b равносильно неравенству $a>b$. Следовательно, $\frac{a+b}{a-b}>\frac{a-b}{a+b}\Leftrightarrow a>b$ для любых, не равных друг другу, положительных a и b.

§ 5. Многочлены, целые относительно одной буквы.

Многочлен, целый относительно одной буквы x, имеет одночлены разных степеней, ибо в противном случае можно привести подобные члены. Одночлены разных степеней можно упорядочить относительно возрастания или убывания степеней буквы x. Обычно многочлен, целый относительно одной буквы, записывают в порядке убывания степеней.

Многочлен, записанный в виде $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots$ $\ldots+a_{n-1}x+a_n$, называется *расположенным многочленом*. Если $a_0\neq 0$, то говорят, что этот многочлен имеет степень n.

Если не известно, равен или не равен нулю коэффициент a_0, то говорят, что этот многочлен степени не выше, чем n.

Из этого определения в частности вытекает, что многочлены нулевой степени — это отличные от нуля числа. Число нуль также считается многочленом, причем это единственный многочлен, степень которого не определена. Для сокращенного обозначения многочленов обычно употребляют следующие записи:

$$P(x),\quad Q(x),\quad T(x),\quad R(x),\quad p(x),\quad q(x),\quad r(x),$$

при этом, если хотят подчеркнуть, что многочлен $P(x)$ — степени n, то пишут $P_n(x)$.

Для нахождения *суммы* многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ нужно записать подряд все члены этих двух многочленов и затем сделать приведение подобных членов.

Для нахождения *произведения* многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ нужно каждый одночлен многочлена $P_n(x)$ умножить на каждый одночлен многочлена $Q_m(x)$, сложить полученные произведения и привести подобные члены.

Теорема 1. *Два многочлена, целые относительно x, тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их степени и равны коэффициенты при одинаковых степенях x.*

Доказательство этой теоремы опускается.

В этом параграфе для обозначения тождественного равенства двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ будет употребляться запись $P(x) = Q(x)$, т. е. в этом параграфе знак «$=$», связывающий два многочлена, будет пониматься в смысле тождественного равенства этих многочленов. В частности, запись $P(x) = 0$ будет означать, что многочлен $P(x)$ тождественно равен нулю, т. е. есть число нуль.

Теорема 1 может быть применена для разложения многочлена на множители. Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Суть применения этого метода состоит в следующем. Пусть дан многочлен $P_n(x)$ степени n и его надо представить в виде произведения многочленов степеней k и $(n-k)$, где $k < n$. Тогда выписываются два многочлена $P_k(x)$ и $P_{n-k}(x)$; первый — степени k и второй — степени $(n-k)$ с коэффициентами, обозначенными некоторыми буквами, скажем, у первого $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$, у второго $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-k}$. Перемножая многочлены $P_k(x)$ и $P_{n-k}(x)$, получаем многочлен $T_n(x)$ степени n с коэффициентами, зависящими от α_i $(i = 0, 1, \ldots, k)$ и β_j $(j = 0, 1, \ldots, n-k)$. Из условия, что многочлены $P_n(x)$ и $T_n(x)$ тождественно равны, получаем $n+1$ равенство, в которых участвуют $n+2$ коэффициента α_i и β_i, которые надо найти. Полагая, например, коэффициент $\alpha_0 = 1$, приходим к $n+1$ равенству, из которых надо найти $n+1$ коэффициент α_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ и β_j $(j = 0, 1, \ldots, n-k)$. Найдя их, найдем и многочлены $P_k(x)$ и $P_{n-k}(x)$.

Пример. Разложить многочлен $x^3 + 3x + 4$ на множители, среди которых один — многочлен первой степени, а второй — многочлен второй степени. Будем искать многочлены $(x + \alpha_1)$ и $(\beta_0 x^2 + \beta_1 x + \beta_2)$ такие, что справедливо тождественное равенство $(x + \alpha_1)(\beta_0 x^2 + \beta_1 x + \beta_2) = x^3 + 3x + 4$. Применяя теорему 1, получаем 4 равенства: $\beta_0 = 1$, $\beta_0\alpha_1 + \beta_1 = 0$, $\beta_1\alpha_1 + \beta_2 = 3$, $\alpha_1\beta_2 = 4$. Этим равенствам удовлетворяют $\beta_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 4$. Значит, многочлен $x^3 + 3x + 4$ разлагается на множители $(x+1)$ и $(x^2 - x + 4)$, т. е.

$$x^3 + 3x + 4 = (x+1)(x^2 - x + 4).$$

Заметим, что не всякий многочлен можно разложить на множители. Например, многочлен $x^2 + x + 1$ нельзя разложить в произведение двух многочленов первой степени.

Теорема 2. *Если произведение двух многочленов тождественно равно нулю, то хотя бы один из этих многочленов тождественно равен нулю.*

Доказательство этого утверждения опускается.

Вычесть из многочлена $P(x)$ многочлен $T(x)$ — это значит найти такой многочлен $Q(x)$, что $P(x)=T(x)+Q(x)$.

Нетрудно проверить, что для любых двух многочленов $P(x)$ и $T(x)$ такой многочлен $Q(x)$ существует и при этом только один, он называется *разностью многочленов* $P(x)$ и $T(x)$ и обозначается $Q(x)=P(x)-T(x)$.

Разделить нацело многочлен $P(x)$ на многочлен $T(x)$, отличный от нуля,— это значит найти многочлен $Q(x)$ такой, что $P(x)= = T(x)Q(x)$.

Если такой многочлен $Q(x)$ существует, то говорят, что многочлен $T(x)$ является делителем многочлена $P(x)$, а многочлен $Q(x)$ называется частным от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $T(x)$. Не всегда многочлен $P(x)$ можно разделить нацело на многочлен $T(x)$. Например, многочлен x^2+1 не делится нацело на многочлен $x+1$. Значит, в множестве многочленов не всегда выполнимо деление нацело. Зато, как будет показано ниже, в множестве многочленов всегда выполнимо деление с остатком.

Деление с остатком. *Разделить с остатком* многочлен $P(x)$ на многочлен $T(x)$, отличный от нуля,— это значит найти два многочлена $q(x)$ и $r(x)$ такие, что

$$P(x)=T(x)q(x)+r(x), \tag{1}$$

причем либо степень многочлена $r(x)$ строго меньше степени многочлена $T(x)$, либо $r(x)$ есть нуль.

В случае, если выполнено равенство (1), говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $T(x)$ с остатком $r(x)$ и частным $q(x)$; если $r(x)=0$, т. е. если остаток есть число нуль, то говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $T(x)$ с остатком нуль или многочлен $P(x)$ делится нацело на многочлен $T(x)$.

Пример. Пусть $P(x)=x^7-x^6+2x^5+x^2$, $T(x)=x^2-x+2$. Тогда легко видеть, что $P(x)=T(x)(x^5+1)+x-2$, т. е. многочлен $P(x)$ делится на многочлен $T(x)$ с остатком $r(x)=x-2$ и частным x^5+1. Отметим, что из равенства $P(x)=T(x)x^5+x^2$ не вытекает, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $T(x)$ с остатком x^2, ибо нарушено условие: степень остатка $r(x)$ должна быть строго меньше степени многочлена $T(x)$.

Теорема 3. *Для любых двух многочленов $P(x)$ и $T(x)$, где $T(x)\neq 0$, существует пара многочленов $q(x)$ и $r(x)$ таких, что $P(x)=T(x)q(x)+r(x)$, причем либо степень многочлена $r(x)$ строго меньше степени многочлена $T(x)$, либо $r(x)$ есть нуль.*

Доказательство. Пусть $P(x)=0$, а $T(x)$ — любой отличный от нуля многочлен, тогда многочлены $q(x)=0$ и $r(x)=0$ удовлетворяют условиям теоремы.

Пусть $P(x) \neq 0$, а многочлен $T(x)$ имеет степень бо́льшую, чем степень многочлена $P(x)$, тогда многочлены $q(x)=0$ и $r(x)=P(x)$ удовлетворяют условиям теоремы.

Наконец, пусть $P(x) \neq 0$, а многочлен $T(x)$ имеет степень, меньшую или равную степени многочлена $P(x)$. Если $T(x)=c$, где c — константа, отличная от нуля, то многочлены $q(x)=P(x)/c$ и $r(x)=0$ удовлетворяют условиям теоремы.

Остается рассмотреть случай, когда многочлен $P(x)$ имеет степень n, причем $n \geqslant 1$, а многочлен $T(x)$ имеет степень m, причем $0 < m \leqslant n$. Пусть $P(x)=P_n(x)$, $T(x)=T_m(x)$, где $0<m \leqslant n$, $n \geqslant 1$, т. е.

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$
$$T_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m,$$

где $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Построим последовательность многочленов $Q_{n_k}(x)$ следующим образом. Положим

$$Q_{n_1}(x)=P_n(x)-\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}T_m(x).$$

Тогда либо $Q_{n_1}(x)=0$, либо $Q_{n_1}(x)$ можно записать в виде

$$Q_{n_1}(x)=a_0^{(1)}x^{n_1}+a_1^{(1)}x^{n_1-1}+\ldots+a_{n_1-1}^{(1)}x+a_{n_1}^{(1)},$$

причем $a_0^{(1)} \neq 0$ и степень многочлена $Q_{n_1}(x)$ меньше, чем n, т. е. $n_1<n$; если окажется, что $n_1<m$ или $Q_{n_1}(x)=0$, то многочлены $q(x)=\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}$ и $r(x)=Q_{n_1}(x)$ удовлетворяют условиям теоремы; если же $n_1 \geqslant m$, то делаем следующий шаг: положим

$$Q_{n_2}(x)=Q_{n_1}(x)-\frac{a_0^{(1)}}{b_0}x^{n_1-m}T_m(x).$$

Ясно, что либо $Q_{n_2}(x)=0$, либо $n_2<n_1<n$ и $Q_{n_2}(x)$ можно записать в виде

$$Q_{n_2}(x)=a_0^{(2)}x^{n_2}+a_1^{(2)}x^{n_2-1}+\ldots+a_{n_2-1}^{(2)}x+a_{n_2}^{(2)},$$

причем $a_0^{(2)} \neq 0$. Если окажется, что $n_2<m$ или $Q_{n_2}(x)=0$, то многочлены $q(x)=\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}+\frac{a_0^{(1)}}{b_0}x^{n_1-m}$ и $r(x)=Q_{n_2}(x)$ удовлетворяют условиям теоремы; если же $n_2 \geqslant m$, то делаем следующий шаг и продолжаем этот процесс. Поскольку на каждом шагу степень уменьшается: $n>n_1>n_2>\ldots$, то на некотором k-м шагу натуральное число n_k станет меньше натурального числа m или $Q_{n_k}(x)=0$ и процесс закончится. В результате получим, что

$$P_n(x)=\left(\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}+\frac{a_0^{(1)}}{b_0}x^{n_1-m}+\ldots+\frac{a_0^{(k-1)}}{b_0}x^{n_{k-1}-m}\right)T_m(x)+Q_{n_k}(x).$$

Тогда многочлены $r(x)=Q_{n_k}(x)$ и $q(x)=\left(\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}+\frac{a_0^{(1)}}{b_0}x^{n_1-m}+\ldots\right.$ $\left.\ldots+\frac{a_0^{(k-1)}}{b_0}x^{n_{k-1}-m}\right)$ удовлетворяют условиям теоремы.

Итак, утверждение теоремы о существовании многочленов $q(x)$, $r(x)$ доказано.

Теорема 4. *Пара многочленов $q(x)$, $r(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 3, единственна.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. предположим, что существуют две пары многочленов $q(x)$, $r(x)$ и $q_1(x)$, $r_1(x)$ таких, что $P(x)=T(x)q(x)+r(x)$ и $P(x)=T(x)q_1(x)+r_1(x)$. Пользуясь определением равенства многочленов, имеем

$$T(x)[q(x)-q_1(x)]=r_1(x)-r(x). \tag{2}$$

Возможны два случая: либо $r_1(x)-r(x)=0$, либо $r_1(x)-r(x)\neq 0$. В первом случае, так как $T(x)\neq 0$, то $q(x)-q_1(x)=0$, и единственность имеет место.

Во втором случае, так как степень $r_1(x)-r(x)$ не больше ни степени $r_1(x)$, ни степени $r(x)$, то степень $r_1(x)-r(x)$ меньше степени многочлена $T(x)$. В то же время степень многочлена $T(x)[q(x)-q_1(x)]$ либо больше, либо равна степени многочлена $T(x)$. Значит, в равенстве (2) многочлены, стоящие в левой и правой частях, имеют разные степени, что противоречит теореме 1. Полученное противоречие означает, что $r_1(x)-r(x)=0$, а в этом случае единственность уже доказана. Объединяя теоремы 3 и 4, получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 5. *Для любых двух многочленов $P(x)$ и $T(x)$, где $T(x)\neq 0$, существует и притом единственная пара многочленов $q(x)$ и $r(x)$ таких, что $P(x)=T(x)q(x)+r(x)$, причем либо степень многочлена $r(x)$ строго меньше степени многочлена $T(x)$, либо $r(x)$ есть нуль.*

Для определения коэффициентов многочленов $q(x)$ и $r(x)$ существует несколько способов. Наиболее распространенным среди них является метод неопределенных коэффициентов, уже рассмотренный ранее.

Пусть даны многочлены $P_n(x)$ и $T_m(x)$, где $n>m$. Положим

$$q(x)=c_0x^{n-m}+c_1x^{n-m-1}+\ldots+c_{n-m},$$
$$r(x)=d_0x^{m-1}+d_1x^{m-2}+\ldots+d_{m-1},$$

где коэффициенты c_i и d_j пока не определены (отметим, что их всего $n+1$ и $c_0\neq 0$). Потребуем, чтобы было справедливо равенство

$$P_n(x)=T_m(x)q(x)+r(x).$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, получим $n+1$ равенство, в которых участвует $n+1$ коэффициент $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-m}, d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$; найдя их, тем самым найдем многочлены $q(x)$ и $r(x)$.

Пример. Пусть $P(x)=2x^4-5x^3+2$, $T(x)=2x^2-3x$. Полагая $q(x)=c_0x^2+c_1x+c_2$ $(c_0\neq 0)$, $r(x)=d_0x+d_1$, напишем равенство

$$2x^4-5x^3+2=(2x^2-3x)(c_0x^2+c_1x+c_2)+(d_0x+d_1),$$

которое можно переписать в виде

$$2x^4-5x^3+2=2c_0x^4+(2c_1-3c_0)x^3+(2c_2-3c_1)x^2+(d_0-3c_2)x+d_1.$$

Согласно теореме 1 справедливы равенства

$$\begin{cases} 2c_0=2, \\ 2c_1-3c_0=-5, \\ 2c_2-3c_1=0, \\ d_0-3c_2=0, \\ d_1=2. \end{cases}$$

Из этих равенств находим $c_0=1$, $c_1=-1$, $c_2=-\frac{3}{2}$, $d_0=-\frac{9}{2}$, $d_1=2$, и тогда получаем, что $q(x)=x^2-x-\frac{3}{2}$, $r(x)=-\frac{9}{2}x+2$.

Схема Горнера. Рассмотрим деление многочлена на двучлен $(x-\alpha)$.

Пусть даны многочлен

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

где $a_0\neq 0$, $n\geqslant 1$, и двучлен $(x-\alpha)$. По теореме 5 существуют многочлен $q(x)$ и число r такие, что $P_n(x)=(x-\alpha)q(x)+r$. Степень многочлена $q(x)$ равна $(n-1)$. Поэтому $q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots$ $\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}$, где $b_0\neq 0$. Найдем числа b_0, b_1, b_2, $\ldots$, b_{n-1} и r методом неопределенных коэффициентов. Подставим $q(x)$ в равенство $P(x)=(x-\alpha)q(x)+r$, получим, что

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=b_0x^n+(b_1-\alpha b_0)x^{n-1}+(b_2-\alpha b_1)x^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+(b_{n-1}-\alpha b_{n-2})x+(r-\alpha b_{n-1}).$$

По правилу равенства многочленов, отсюда получаем, что

$$\begin{cases} a_0=b_0, \\ a_1=b_1-\alpha b_0, \\ a_2=b_2-\alpha b_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n-1}=b_{n-1}-\alpha b_{n-2}, \\ a_n=r-\alpha b_{n-1}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} b_0=a_0, \\ b_1=a_0+\alpha b_0, \\ b_2=a_2+\alpha b_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{n-1}=a_{n-1}+\alpha b_{n-2}, \\ r=a_n+\alpha b_{n-1}. \end{cases} \qquad (3)$$

Итак, коэффициенты частного $q(x)$ и остаток r выражаются через коэффициенты многочлена $P(x)$ и число α при помощи действий сложения и умножения согласно формулам (3), откуда следует:

а) если $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ и α — рациональные числа, то $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ и r — также рациональные числа:

б) если $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ и α — целые числа, то $b_0, b_1, b_2, \ldots$ $\ldots, b_{n-1}$ и r — также целые числа.

Из формул (3) вытекает следующее правило для вычисления коэффициентов $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ и остатка r.

Выписать подряд, начиная с a_0, в строку все коэффициенты многочлена $P_n(x)$. Во второй строке под a_0 написать коэффициент b_0, равный коэффициенту a_0. Умножить α на b_0 и, прибавляя произведение αb_0 к a_1, получить коэффициент b_1 и написать его во второй строке под a_1. Умножить α на b_1 и, прибавляя произведение αb_1 к a_2, получить коэффициент b_2 и написать его во второй строке под a_2. Продолжая этот процесс, получить коэффициент b_{n-1} и написать его во второй строке под a_{n-1}. Умножить, наконец, α на b_{n-1} и, прибавляя произведение αb_{n-1} к a_n, получить остаток r и написать его во второй строке под a_n.

Это правило записывается в виде следующей таблицы, которая называется *схемой Горнера:*

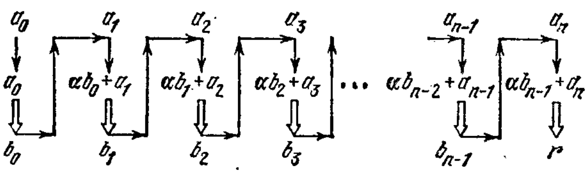
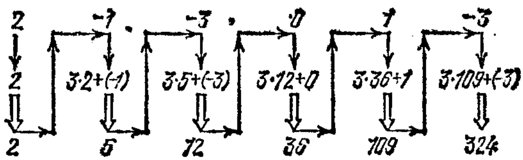


Схема Горнера позволяет легко разделить многочлен $P(x)$ на двучлен $x-\alpha$, т. е. найти коэффициенты частного $q(x)$ и остаток r.

Пример. Применяя схему Горнера, найдем частное $q(x)$ и остаток r при делении многочлена $P(x)=2x^5-x^4-3x^3+x-3$ на многочлен $T(x)=x-3$.

Схема Горнера имеет вид:



Таким образом, $2x^5-x^4-3x^3+x-3=(x-3)(2x^4+5x^3+12x^2+$ $+36x+109)+324$.

Теорема 6 (теорема Безу). *Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x-\alpha)$ равен значению многочлена $P(x)$ при $x=\alpha$, т. е. $r=P(\alpha)$.*

Доказательство. Подставив в равенство $P(x) = (x-\alpha) q(x) + r$ вместо x значение α, получим $P(\alpha) = (\alpha - \alpha) q(\alpha) + r$, откуда и вытекает, что $r = P(\alpha)$.

Теорема 7. *Многочлен $P(x)$ делится нацело на двучлен $(x-\alpha)$ тогда и только тогда, когда значение многочлена при $x = \alpha$ равно нулю, т. е. $P(\alpha) = 0$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть многочлен $P(x)$ делится нацело на двучлен $(x-\alpha)$. Это значит, что остаток r равен нулю. По теореме Безу остаток $r = P(\alpha)$. Следовательно, $P(\alpha) = 0$.

Достаточность. Пусть $P(\alpha) = 0$. С другой стороны, по теореме Безу $r = P(\alpha)$. Значит, $r = 0$, т. е. $P(x)$ делится нацело на $x - \alpha$.

Приведем несколько следствий из этой теоремы.

1. *Многочлен $P_n(x) = x^n - \alpha^n$ делится нацело на двучлен $(x-\alpha)$ при любом натуральном n.*

Действительно, $P_n(\alpha) = \alpha^n - \alpha^n = 0$.

2. *Многочлен $P_n(\alpha) = x^n - \alpha^n$ делится нацело на двучлен $(x+\alpha)$ при любом четном n (т. е. $n = 2m$).*

Действительно, $P_{2m}(-\alpha) = (-\alpha)^{2m} - \alpha^{2m} = 0$.

3. *Многочлен $P_n(x) = x^n + \alpha^n$ делится нацело на двучлен $(x+\alpha)$ при любом нечетном n (т. е. $n = 2m+1$).*

Действительно, $P_{2m+1}(-\alpha) = (-\alpha)^{2m+1} + \alpha^{2m+1} = 0$. Приведем пример на применение этих следствий.

Требуется доказать, что при любом четном натуральном n число $(20^n + 16^n - 3^n - 1)$ делится на 19. Так как $n = 2m$, где $m \in N$, то воспользуемся формулами сокращенного умножения:

$$20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^{2m} - 1) + (16^{2m} - 3^{2m}) =$$
$$= (20^m - 1)(20^m + 1) + (16^m + 3^m)(16^m - 3^m). \quad (4)$$

В первом слагаемом первый сомножитель при любом $m \in N$ делится без остатка на число $(20-1)$, т. е. на 19. Во втором слагаемом первый сомножитель при $m = 2k+1$, $k \in N$, делится без остатка на число $(16+3)$, т. е. на 19. При $m = 2k$ второй сомножитель можно представить в виде произведения сомножителей $(16^k + 3^k) \times (16^k - 3^k)$. Если k нечетно, то разложение второго слагаемого на сомножители заканчивается. Если же k четно, то разложение продолжается. Через конечное число шагов, не превышающее $(n-1)$, разложение будет закончено и один из сомножителей этого разложения будет иметь вид $16^s + 3^s$, где s — нечетное число. Тогда этот сомножитель делится на 19. Таким образом, и первое, и второе слагаемые в равенстве (4) при любом $m \in N$ делятся на 19, значит, и $(20^n + 16^n - 3^n - 1)$ делится на 19 при любом четном натуральном n.

Корни многочлена. Число α называется *корнем* многочлена $P(x)$, если $P(\alpha) = 0$. Переформулируем теорему 7, используя определение корня многочлена.

Теорема 8. *Число α является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда многочлен $P(x)$ делится нацело на двучлен $x-\alpha$.*

Докажем теорему о нахождении целых корней многочлена.

Теорема 9. *Если все коэффициенты многочлена степени n, где $n \geqslant 1$, — целые числа и корень α этого многочлена — также целое число, то число α — делитель свободного члена многочлена.*

Доказательство. Пусть дан многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

степени n, где $n \geqslant 1$, и пусть α — корень этого многочлена. Разделим с остатком многочлен $P_n(x)$ на двучлен $(x-\alpha)$, тогда частное есть многочлен $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$, а остаток — число r. Как показано выше, если все коэффициенты многочлена $P_n(x)$ и α — целые числа, то числа $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ и r — также целые числа. По схеме Горнера $r = a_n + \alpha b_{n-1}$, а по теореме 8, если α — корень многочлена, то $r=0$. Поэтому имеем равенство $a_n + \alpha b_{n-1} = 0$, откуда $a_n = \alpha(-b_{n-1})$. Так как a_n, α, $(-b_{n-1})$ — целые числа, то отсюда вытекает, что α — делитель числа a_n, и теорема доказана.

Следствие. *Целыми корнями многочлена с целыми коэффициентами могут быть лишь делители свободного члена многочлена.*

Это следствие позволяет находить все целые корни многочлена с целыми коэффициентами, применяя схему Горнера.

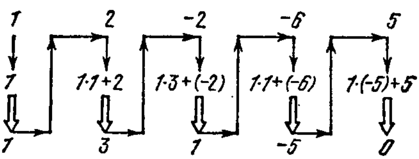
Пример. Выяснить, имеет ли целые корни многочлен

$$P_4(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5. \tag{5}$$

Делители свободного члена: 1, —1, 5, —5. Найдем значения многочлена в этих точках:

$$P_4(1) = 1 + 2 - 2 - 6 + 5 = 0,$$
$$P_4(-1) = 1 - 2 - 2 + 6 + 5 = 8 \neq 0,$$
$$P_4(5) = 625 + 250 - 50 - 30 + 5 = 800 \neq 0,$$
$$P_4(-5) = 625 - 250 - 50 + 30 + 5 = 360 \neq 0.$$

Итак, многочлен (5) имеет целый корень $x_1 = 1$, а числа 5, —5 и —1 не являются его корнями. Применив схему Горнера, разложим многочлен (5) на множители. Схема Горнера имеет вид:

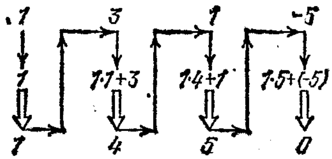


Следовательно, $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x^3 + 3x^2 + x - 5)$.

Теперь будем искать корни многочлена $P_3(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$. Делители его свободного члена: 1, —1, 5, —5. Нет необходимости искать значение многочлена $P_3(x)$ в точках —1, 5, —5, так как эти числа заведомо не являются корнями многочлена $P_4(x)$, а значит, и многочлена $P_3(x)$ в силу того, что многочлен $P_4(x)$ в них не обращается в нуль. Поэтому проверим только число 1:

$$P_3(1)=1+3+1-5=0.$$

Применив опять схему Горнера:



получим $P_3(x)=(x-1)(x^2+4x+5)$, а потому многочлен $P_4(x)$ можно записать так: $P_4(x)=(x-1)^2(x^2+4x+5)$.

Так как квадратный трехчлен x^2+4x+5 целых корней не имеет, то следовательно, многочлен $P_4(x)$ имеет два целых корня $x_1=1$, $x_2=1$. В таких случаях целесообразно ввести понятие кратности корня. Если многочлен $P_n(x)$ делится нацело на $(x-\alpha)^k$, где k — некоторое фиксированное натуральное число, но не делится нацело на $(x-\alpha)^{k+1}$, то число α называется корнем кратности k многочлена $P_n(x)$. Корни кратности единица называются простыми корнями многочлена. Таким образом, многочлен $P_4(x)$ в вышеприведенном примере (5) имеет один корень $x=1$ кратности два.

Замечание. Если найден один корень $x_1=\alpha$ многочлена $P(x)$, то этот многочлен можно записать в виде $P(x)=(x-\alpha)q(x)$, где коэффициенты многочлена $q(x)$ легко вычисляются по схеме Горнера. Чтобы найти другие корни многочлена $P(x)$, следует найти корни многочлена $q(x)$. Важно отметить, что многочлен $q(x)$ может иметь корнем то же число α, которое находится также по схеме Горнера.

Если не искать корни многочлена $q(x)$, а отыскивать корни многочлена $P(x)$, то корень, который уже найден, во второй раз этим же способом не будет обнаружен. Поэтому после нахождения одного корня надо искать корни частного, т. е. корни многочлена $q(x)$.

Теорема 10. *Если многочлен*

$$P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом, равным единице, имеет рациональный корень, то этот корень — целое число.

Доказательство. Доказательство этой теоремы проведем методом от противного. Предположим, что многочлен $P_n(x)$ имеет корень $\alpha=p/q$, где p и q — взаимно простые целые числа. Так как число p/q — корень многочлена $P_n(x)$, то справедливо числовое равенство

$$\frac{p^n}{q^n}+a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+a_2\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}}+\ldots+a_{n-1}\frac{p}{q}+a_n=0,$$

которое можно записать в равносильной форме

$$\frac{p^n}{q^n}=-\left(a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+a_2\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}}+\ldots+a_{n-1}\frac{p}{q}+a_n\right).$$

Умножая это равенство на q^{n-1}, получим равносильное равенство

$$\frac{p^n}{q}=-a_1p^{n-1}-a_2p^{n-2}q-\ldots-a_{n-1}pq^{n-2}-a_nq^{n-1}.$$

Так как числа p и q — взаимно простые, то число $\frac{p^n}{q}$ — не целое, а справа в последнем равенстве стоит целое число. Такое равенство невозможно, значит, предположение неверно, а верна теорема.

Следствие. *Если у многочлена все коэффициенты — целые числа, а старший коэффициент равен единице, то все рациональные корни этого многочлена — целые числа.*

Рассмотрим многочлен $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots$ $\ldots+a_{n-1}x+a_n$ с целыми коэффициентами и многочлен

$$Q_n(x)=a_0^{n-1}P_n(x)=(a_0x)^n+a_1(a_0x)^{n-1}+\ldots+a_na_0^{n-1}.$$

Ясно, что многочлены $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ имеют одинаковые корни. Обозначим $y=a_0x$, тогда

$$Q_n(x)=T_n(y)=y^n+a_1y^{n-1}+a_2a_0y^{n-2}+a_3a_0^2y^{n-3}+\ldots+a_na_0^{n-1}.$$

Многочлен $T_n(y)$ имеет по теореме 10 только целые корни, которые можно найти. Пусть это будут числа $y_1, y_2, \ldots, y_m$, тогда числа $x_k=y_k/a_0$, где $k\in\{1; 2; \ldots; m\}$, и только они будут рациональными корнями многочлена $P_n(x)$. Итак, у любого многочлена с целыми коэффициентами можно найти все его рациональные корни.

Если коэффициенты многочлена — рациональные числа, то после приведения их к общему знаменателю можно искать лишь корни числителя, который есть многочлен с целыми коэффициентами.

Пример. Найти корни многочлена $P_3(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}$. Рассмотрим многочлен $Q_3(x)=8P_3(x)=(2x)^3+(2x)^2-2x-1$ или $T_3(t)=t^3+t^2-t-1$, где $t=2x$. Делители свободного члена многочлена $T_3(t)$: $+1$, -1. Найдем значения многочлена $T_3(t)$ в этих точках:

$$T_3(1)=1+1-1-1=0,$$
$$T_3(-1)=-1+1+1-1=0.$$

Применив схему Горнера, получим $T_3(t)=(t-1)(t^2+2t+1)$. Многочлен (t^2+2t+1) есть полный квадрат бинома $(t+1)$. Следовательно, многочлен $T_3(t)$ имеет три корня: $t_1=1$, $t_2=-1$, $t_3=-1$, а многочлен $P_3(x)$ — соответственно три корня: $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=-\frac{1}{2}$; $x_3=-\frac{1}{2}$, или два различных корня; один простой корень $x_1=\frac{1}{2}$ и другой корень $x_2=-\frac{1}{2}$ кратности два.

В заключение остановимся на корнях двучлена $P_n(x)=x^n-a$. Как следует из § 5 предыдущей главы, при четном n двучлен $P_n(x)$ имеет: если $a>0$, то два корня: $\sqrt[n]{a}$ и $-\sqrt[n]{a}$; если $a=0$, то один корень 0; если $a<0$, то не имеет корней. Если n — нечетное число, то двучлен $P_n(x)$ имеет: если $a\geqslant 0$ — один корень $\sqrt[n]{a}$, если $a<0$ — один корень $(-\sqrt[n]{|a|})$. Например, двучлен x^3+11 имеет один корень $(-\sqrt[3]{11})$.

§ 6. Метод математической индукции

Существует очень много утверждений, зависящих от натурального числа n. Как понимать такие утверждения?

Поскольку натуральных чисел бесконечно много, то на самом деле каждое такое утверждение содержит в себе бесконечно много утверждений. Например, утверждение — сумма n первых натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)}{2}$ — содержит в себе следующие утверждения:

для $n=1$: первое натуральное число, т. е. число единица, равно $\frac{1(1+1)}{2}$;

для $n=2$: сумма двух первых натуральных чисел, т. е. сумма чисел единица и два, равна $\frac{2(2+1)}{2}$;

для $n=3$: сумма трех первых натуральных чисел, т. е. сумма чисел единица, два и три, равна $\frac{3(3+1)}{2}$;

. . . .

для $n=10000$: сумма десяти тысяч первых натуральных чисел равна $\frac{10\,000(10\,000+1)}{2}$ и т. д.,

т. е. рассматриваемое утверждение действительно содержит бесконечно много утверждений.

Аналогично и любое другое утверждение, зависящее от натурального числа n, на самом деле есть простая форма записи бесконечного числа утверждений.

Возникает вопрос, а как убедиться в справедливости утверждения, зависящего от натурального числа?

Для доказательства утверждений, зависящих от натурального числа n, часто применяется общий метод доказательства — *метод полной математической индукции.* Этот метод основан на аксиомах натуральных чисел. Но поскольку ранее эти аксиомы не приводились, то метод полной математической индукции принимается здесь без доказательства.

Для доказательства некоторого утверждения, зависящего от натурального числа n, делается следующее:

1. Проверяется справедливость этого утверждения для $n=1$.
2. Предполагается справедливость этого утверждения для $n=k$.
3. Доказывается справедливость этого утверждения для $n=k+1$ с учетом предполагаемой справедливости его для $n=k$.

После чего делается вывод, что утверждение справедливо для любого натурального числа n.

Пользуясь этим методом, докажем, что для любого натурального числа n справедливо равенство

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

Проверяем справедливость равенства (1) для $n=1$. Для $n=1$ оно запишется так: $1=\frac{1(1+1)}{2}$, и очевидно, что это равенство верное. Предположим, что равенство (1) справедливо для $n=k$, т. е. предположим, что справедливо равенство

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}. \tag{2}$$

Используя равенство (2), докажем, что равенство (1) справедливо для $n=k+1$, т. е. докажем справедливость равенства

$$1+2+3+\ldots+(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}. \tag{3}$$

Действительно, рассмотрим сумму $1+2+3+\ldots+(k+1)$. Используя сначала свойство ассоциативности сложения, затем равенство (2) и делая простейшие преобразования, получаем

$$1+2+3+\ldots+(k+1)=(1+2+3+\ldots+k)+(k+1)=$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2},$$

т. е. получаем справедливость равенства (3). На основании метода полной математической индукции делаем вывод, что равенство (1) справедливо для любого натурального числа n.

Рассмотрим еще пример. Докажем, что для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$n\leqslant 2^{n-1}. \tag{4}$$

Доказательство. Для $n=1$ неравенство (4) превращается в верное числовое неравенство $1\leqslant 2^{1-1}$. Предположим, что неравенство (4) справедливо для $n=k$, т. е. предположим справедливость неравенства

$$k\leqslant 2^{k-1}. \tag{5}$$

Используя неравенство (5), докажем справедливость неравенства (4) для $n=k+1$, т. е. докажем справедливость неравенства

$$(k+1)\leqslant 2^{(k+1)-1}. \qquad (6)$$

Действительно, очевидно, что $k+1\leqslant 2k$. Отсюда, используя неравенство (5) и свойство транзитивности неравенств, получим, что $k+1\leqslant 2\cdot 2^{(k-1)}$. Правая часть последнего неравенства может быть записана в виде $2^{(k+1)-1}$, откуда и следует справедливость неравенства (6). На основании метода полной математической индукции делаем вывод, что неравенство (4) справедливо для любого натурального числа n.

Обобщенный метод полной математической индукции. Часто метод полной математической индукции применяется к доказательству утверждений, справедливых не для всех натуральных чисел n, а лишь для n, больших или равных некоторого натурального числа p. Тогда формулировка сути метода полной математической индукции остается почти такой же, но с заменой пункта 1 на пункт 1а): «Проверяется справедливость этого утверждения для $n=p$». В этом случае для доказательства справедливости утверждения для любого натурального $n\,(n\geqslant p)$ делается следующее:

1. Проверяется справедливость утверждения для $n=p$.

2. Предполагается справедливость этого утверждения для $n=k$ (где $k\geqslant p$).

3. Доказывается справедливость этого утверждения для $n=k+1$ с учетом его справедливости для $n=k$. После этого делается вывод, что утверждение справедливо для любого натурального $n\geqslant p$.

Приведем пример доказательства неравенства с помощью обобщенного метода математической индукции: докажем, что если α — фиксированное число такое, что $\alpha>-1$ и $\alpha\neq 0$, то для любого натурального $n\geqslant 2$ справедливо *неравенство Бернулли*

$$(1+\alpha)^n>1+\alpha n. \qquad (7)$$

Действительно, при $n=2$ неравенство (7) имеет вид

$$(1+\alpha)^2>1+2\alpha. \qquad (8)$$

Неравенство (8) равносильно неравенству

$$\alpha^2>0. \qquad (9)$$

Неравенство (9) при $\alpha\neq 0$ очевидно. Следовательно, неравенство (8) справедливо для рассматриваемых α. Предположим, что для рассматриваемых α при $n=k$ $(k\geqslant 2)$ неравенство (7) справедливо, т. е.

$$(1+\alpha)^k>1+\alpha k. \qquad (10)$$

Докажем, используя неравенство (10), справедливость неравенства (7) для $n=k+1$, т. е. докажем неравенство

$$(1+\alpha)^{k+1}>1+\alpha(k+1). \qquad (11)$$

Для доказательства умножим обе части неравенства (10) на положительное число $(1+\alpha)$ (так как $\alpha > -1$, то $1+\alpha > 0$). Получим неравенство

$$(1+\alpha)^{k+1} > (1+\alpha k)(1+\alpha), \tag{12}$$

равносильное неравенству (10), т. е. получим, что неравенство (12) справедливо.

Докажем теперь справедливость неравенства

$$(1+\alpha k)(1+\alpha) > 1+\alpha(k+1). \tag{13}$$

Перенеся все члены неравенства (13) в одну сторону, раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим равносильное неравенство $\alpha^2 k > 0$, которое справедливо, так как $\alpha \neq 0$ и $k \geqslant 2$. Следовательно, неравенство (13) справедливо, но тогда, используя справедливость неравенств (12), (13) и свойство транзитивности неравенств, получим, что справедливо и неравенство (11). Таким образом, неравенство Бернулли доказано для любого натурального $n \geqslant 2$.

Это неравенство имеет смысл запомнить, так как с его помощью можно доказать справедливость многих других неравенств, например, справедливость для любого натурального n неравенства

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \tag{14}$$

Действительно, сделав несложные преобразования, получим цепочку равносильных неравенств:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \frac{(n+2)^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)^n} > 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1}\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^n > 1 \Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n > 1. \tag{15}$$

Для доказательства неравенства (15) для $n \geqslant 2$ к выражению $\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n$, считая $\alpha = -\frac{1}{(n+1)^2}$, применим неравенство Бернулли (7). Получим

$$\left[1+\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]^n > 1-\frac{n}{(n+1)^2}.$$

Умножая обе части этого неравенства на положительное число $\frac{n+2}{n+1}$, получим

$$\frac{n+2}{n+1}\left[1+\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]^n > \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right).$$

Поскольку

$$\frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1,$$

то, используя свойство транзитивности неравенств, имеем

$$\frac{n+2}{n+1}\left[1+\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]^n > \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) > 1.$$

Таким образом, неравенство (15) доказано.

Так как неравенство (15) равносильно неравенству (14), то и неравенство (14) справедливо для $n \geqslant 2$. Поскольку при $n=1$ оно очевидно, то справедливость неравенства (14) доказана для любого натурального n.

Решение задач на делимость. Метод математической индукции применяется также для решения задач на делимость.

Докажем, например, что для любого натурального числа n число $N(n)=n^3+5n$ делится на 6.

Доказательство. Для $n=1$ число $N(1)=6$, и потому $N(1)$ делится на 6, т. е. утверждение справедливо, если $n=1$. Предположим, что утверждение справедливо для $n=k$, т. е. предположим, что число $N(k)=(k^3+5k)$ делится на 6. Используя то, что число $N(k)$ делится на 6, докажем справедливость утверждения для $n=k+1$, т. е. докажем, что число $N(k+1)=[(k+1)^3+ 5(k+1)]$ делится на 6.

Действительно, используя свойства ассоциативности и коммутативности действий над числами и алгебраическими выражениями, имеем

$$N(k+1)=[(k+1)^3+5(k+1)]=k^3+3k^2+3k+1+5k+5=$$
$$=(k^3+5k)+6+3k^2+3k=N(k)+6+3k(k+1).$$

Поскольку k и $k+1$ — два рядом стоящих натуральных числа, то одно из них четное, поэтому число $3k(k+1)$ делится на 6. Учитывая, что число $N(k)$ делится на 6 и число 6 делится на 6, получаем, что число $N(k+1)$ также делится на 6. На основании метода полной математической индукции делаем вывод, что число $N(n)=n^3+5n$ делится на 6 для любого натурального числа n.

Рассмотрим решение более сложной задачи на делимость, когда метод полной математической индукции приходится применять несколько раз.

Требуется доказать, что при любом натуральном n число $(3^{2^n}-1)$ не делится нацело на число 2^{n+3}.

При $n=1$ утверждение очевидно, так как 8 не делится на 16. Предположим теперь, что утверждение справедливо при $n=k$, т. е. число $(3^{2^k}-1)$ не делится нацело на число 2^{k+3}. Докажем тогда, что число $(3^{2^{k+1}}-1)$ не делится нацело на число 2^{k+4}, т. е., что утверждение справедливо при $n=k+1$. Представим выражение $(3^{2^{k+1}}-1)$ в виде произведения:

$$3^{2^{k+1}}-1=(3^{2^k}-1)(3^{2^k}+1).$$

По предположению первый сомножитель произведения не делится нацело на число 2^{k+3}, т. е. в представлении составного числа

$(3^{2^k}-1)$ в виде произведения простых чисел число два повторяется не более, чем $(k+2)$ раза. Таким образом, чтобы доказать, что число $(3^{2^{k+1}}-1)$ не делится нацело на число 2^{k+4}, надо доказать, что число $(3^{2^k}+1)$ не делится на 4.

Для доказательства этого утверждения докажем вспомогательное утверждение: для любого натурального n число $(3^{2n}+1)$ не делится на 4. Для $n=1$ это утверждение очевидно, так как 10 не делится на 4 без остатка. При предположении, что $(3^{2k}+1)$ не делится на 4, докажем, что и $(3^{2(k+1)}+1)$ не делится на 4. Представим последнее выражение в виде суммы $3^{2(k+1)}+1=(3^{2k}+1)+$ $+8\cdot 3^{2k}$. Второе слагаемое суммы делится на 4 нацело, а первое не делится. Следовательно, вся сумма не делится на 4 без остатка. Вспомогательное утверждение доказано.

Теперь ясно, что $(3^{2^k}+1)$ не делится на 4, так как число 2^k является четным числом. Окончательно получаем на основании метода полной математической индукции, что число $(3^{2^n}-1)$ не делится нацело на число 2^{n+3} ни при каком натуральном n.

В заключение докажем методом математической индукции два утверждения, приведенные выше (§§ 2, 3 гл. II). В § 3 была приведена формула бинома Ньютона:

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+C_n^nb^n. \quad (16)$$

Здесь C_n^m — биномиальные коэффициенты, вычисляемые по формуле $C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$.

Докажем равенство (16).

Для $n=1$ формула (16) запишется в виде $(a+b)^1=C_1^0a^1+C_1^1b^1$. Учитывая правило для вычисления биномиальных коэффициентов, перепишем эту формулу в виде $(a+b)^1=a^1+b^1$, т. е. убеждаемся в справедливости формулы (16) для $n=1$. Предположим, что формула (16) справедлива для $n=k$, т. е. предположим, что справедлива формула

$$(a+b)^k=C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b+\ldots+C_k^{l-1}a^{k-(l-1)}b^{l-1}+C_k^la^{k-l}b^l+$$
$$+C_k^{l+1}a^{k-(l+1)}b^{l+1}+\ldots+C_k^{k-1}ab^{k-1}+C_k^kb^k. \quad (17)$$

Докажем, используя справедливость формулы (17), что формула (16) верна для $n=k+1$, т. е. докажем справедливость формулы

$$(a+b)^{k+1}=C_{k+1}^0a^{k+1}+C_{k+1}^1a^{(k+1)-1}b+\ldots+C_{k+1}^la^{(k+1)-l}b^l+$$
$$+C_{k+1}^{l+1}a^{(k+1)-(l+1)}b^{l+1}+\ldots+C_{k+1}^{(k+1)-1}ab^k+C_{k+1}^{k+1}b^{k+1}. \quad (18)$$

Действительно, используя сначала свойства степени с натуральным показателем, затем формулу (17), затем правило перемножения многочленов, получим

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)(a+b)^k=(a+b)(C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b+C_k^2a^{k-2}b^2+\dots$$
$$\dots+C_k^{l-1}a^{k-(l-1)}b^{l-1}+C_k^la^{k-l}b^l+C_k^{l+1}a^{k-(l+1)}b^{l+1}+\dots$$
$$\dots+C_k^{k-1}ab^{k-1}+C_k^kb^k)=C_k^0a^{k+1}+C_k^1a^kb+C_k^2a^{k-1}b^2+\dots$$
$$\dots+C_k^{l-1}a^{k-l+2}b^{l-1}+C_k^la^{k-l+1}b^l+C_k^{l+1}a^{k-l}b^{l+1}+\dots$$
$$\dots+C_k^{k-1}a^2b^{k-1}+C_k^kab^k+C_k^0a^kb+C_k^1a^{k-1}b^2+C_k^2a^{k-2}b^3+\dots$$
$$\dots+C_k^{l-1}a^{k-l+1}b^l+C_k^la^{k-l}b^{l+1}+C_k^{l+1}a^{k-l-1}b^{l+2}+\dots$$
$$\dots+C_k^{k-1}ab^k+C_k^kb^{k+1}. \quad (19)$$

Приводя в этой сумме подобные члены, получим, что

$$(a+b)^{k+1}=C_k^0a^{k+1}+(C_k^1+C_k^0)a^kb+(C_k^2+C_k^1)a^{k-1}b^2+\dots$$
$$\dots+(C_k^l+C_k^{l-1})a^{k-l+1}b^l+(C_k^{l+1}+C_k^l)a^{k-l}b^{l+1}+\dots$$
$$\dots+(C_k^{k-1}+C_k^{k-2})a^2b^{k-1}+(C_k^k+C_k^{k-1})ab^k+C_k^kb^{k+1}. \quad (20)$$

Так как коэффициент C_n^k есть число сочетаний из n элементов по k элементов (см. § 7 гл. I), то

$$C_n^{m+1}+C_n^m=C_{n+1}^{m+1}.$$

Пользуясь этим равенством, а также очевидными равенствами $C_k^0=1=C_{k+1}^0$ и $C_k^k=1=C_{k+1}^{k+1}$, из справедливости формулы (20) получим справедливость формулы (18). На основании метода полной математической индукции делаем вывод, что формула бинома Ньютона (16) справедлива для любого натурального числа n.

В § 2 было приведено равенство алгебраических выражений

$$(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+\dots+AB^{n-2}+B^{n-1})=A^n-B^n. \quad (21)$$

Для доказательства этого равенства при $n\geqslant 2$ воспользуемся обобщенным методом полной математической индукции.

При $n=2$ имеем следующую цепочку равенств: $(A-B)(A+B)=$ $=A^2+AB-BA-B^2=A^2-B^2$, т. е. равенство (21) верно.

Предположим, что при $n=k$ $(k\geqslant 2)$ равенство (21) справедливо, т. е. справедливо равенство

$$(A-B)(A^{k-1}+A^{k-2}B+A^{k-3}B^2+\dots+AB^{k-2}+B^{k-1})=A^k-B^k. \quad (22)$$

Докажем, используя равенство (22), справедливость равенства (21) для $n=k+1$, т. е. докажем равенство

$$(A-B)(A^k+A^{k-1}B+A^{k-2}B^2+\dots+AB^{k-1}+B^k)=$$
$$=A^{k+1}-B^{k+1}. \quad (23)$$

Действительно, используя свойства действий над алгебраическими выражениями и равенство (22), имеем цепочку тождественных равенств

$$(A-B)(A^k+A^{k-1}B+A^{k-2}B^2+\ldots+AB^{k-1}+B^k)=$$
$$=(A-B)(A^k+A^{k-1}B+A^{k-2}B^2+\ldots+AB^{k-1})+(A-B)B^k=$$
$$=(A-B)(A^{k-1}+A^{k-2}B+A^{k-3}B^2+\ldots+B^{k-1})A+(A-B)B^k=$$
$$=(A^k-B^k)A+(A-B)B^k=A^{k+1}-B^kA+AB^k-$$
$$-B^{k+1}=A^{k+1}-B^{k+1}.$$

Тем самым равенство (23) доказано, а значит, доказано и равенство (21) для любого натурального $n\geqslant 2$.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти числовое значение следующего алгебраического выражения при $a=-0{,}1$ (1—5):

1. $\dfrac{a^2-2a+1}{a-3}\cdot\left[\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right].$

2. $\left(\dfrac{2}{2a-1}+\dfrac{6}{1-4a^2}-\dfrac{4}{2a+1}\right):\left(1-\dfrac{4a^2+1}{4a^2-1}\right).$

3. $\left(\dfrac{a-2}{a^3+1}+\dfrac{1}{a^3-a^2+a}\right)\cdot\dfrac{a^3-a}{a^2+1}+\dfrac{2}{a^3+a^2+a+1}.$

4. $\left\{\left[\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2-\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^2\right]:\dfrac{8a^3+8a}{a^3+a^2-a-1}+\dfrac{1}{a+1}\right\}\cdot(1-a^2).$

5. $\left(\dfrac{a^2-2a+4}{4a^2-1}\cdot\dfrac{2a^2-a}{a^3+8}-\dfrac{a+2}{2a^2+a}\right):\dfrac{4}{a^2+2a}-\dfrac{a+4}{3-6a}.$

Найти числовое значение следующего алгебраического выражения при $a=1$ и $b=-2$ (6—10):

6. $\dfrac{a^2(a+b^2)(a^3-b^3)(a^2-b)}{(a^2+b^2)(2a-3b^2)}$. 7. $\dfrac{a^3+b(b^2+3a)-1}{a(a-b+1)+b(b+1)}.$

8. $\dfrac{a^4+64}{b(a+2)^2-4(a-b)-a^2-8}.$

9. $\dfrac{3}{2}\left\{4b-b\left[a-b:\left(\dfrac{b-2a}{b+4a}-a\right)\right]\right\}+10.$

10. $\dfrac{b}{2}\left\{ab^2-2\left[\dfrac{4{,}75(2a^2+4b)-b^2}{a^2b^4+0{,}3(b^4-6a)}-3a(4-b)\right]\right\}-10b.$

Найти числовое значение следующего алгебраического выражения при $m=10$, $n=4$ и $p=5$ (11—15):

11. $\left\{[3(n+5)]^m-p(m-1)^8\cdot\left(\dfrac{p+10}{5}\right)^{m+2}+4(3n-3)^{m-2}\cdot 3^{2p-1}\right\}:41\times$
$\times\left(\dfrac{n+5}{3}\right)^{24}.$

12. $\left(m^{12}+p^{m+1}\cdot 2^{m-1}-p^{3n+1}\cdot 2^{\frac{m+n+10}{3}}\right):[(20-4n)\cdot 5^{n+1}\cdot(2n+2)^{m-n}].$

13. $\dfrac{[2(p-4)]^{2m-1}\cdot(3p+12)^{\frac{10-n}{2}}+15\cdot n^{3(p-2)}\cdot(m-1)^{n+p-5}}{6^{m+5}\cdot[2(n-5)]^{p+5}+(32-4p)^{20-m}}.$

14. $\dfrac{5\cdot 4^{3p}\cdot(2m-11)^{n+5}-4(p-4)\cdot 3^{2m}\cdot(2n)^9}{5\cdot 2^{2p-1}\cdot 6^{2m-1}-7\cdot(m-8)^{2m+9}\cdot 27^{10-n}}.$

15. $\dfrac{(m+26)\cdot(3m-12)^{20-4n}-8\cdot 2^n\cdot(p+n)^4-3^{n+1}\cdot(m-4)^p}{(2n+4m-22)^{p-2}}$.

Найти числовое значение следующего алгебраического выражения при $a=-\sqrt{3}$, $b=1$, $c=3$, $x=-\dfrac{3}{2}$ (16—20):

16. $\dfrac{x^2}{ab}+\dfrac{(x-a)^2}{a(a-b)}-\dfrac{(x-b)^2}{b(a-b)}+\dfrac{b-c}{bc}+\dfrac{c-a}{ac}+\dfrac{a-b}{ab}$.

17. $\dfrac{1}{2(x-a)}-\dfrac{1}{2(x+a)}+\dfrac{4}{a^2-x^2}+\left(\dfrac{x^2}{a^2b^2}:\dfrac{c^3x}{ab^3}\right)\cdot\dfrac{a^4}{xb}\cdot\dfrac{c^3}{a^3}$.

18. $\dfrac{a^2-4}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^3-x}{a^3+2a^2}+\dfrac{3ab^2}{5b^3c}\cdot\dfrac{15b^2c^2}{9a^2b}-\dfrac{3b}{(b+1)^2}+\dfrac{2}{b+1}$.

19. $\left[\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}\right]:\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{3x^3+x}$.

20. $\left\{\left[\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2+3\right]:\left[\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2+c\right]\right\}:\dfrac{a^c+1}{a^3-1}-\dfrac{2a}{a-1}+\dfrac{x-3}{x+c}$.

Найти ОДЗ следующего алгебраического выражения (21—25):

21. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

22. $\left(\dfrac{2}{2a-b}+\dfrac{6b}{b^2-4a^2}-\dfrac{4}{(2a+b)}\right):\dfrac{a^2}{4a^2-b^3}$.

23. $\dfrac{a^2-2a+1}{a-3}:\left[\dfrac{(a+2)^2-a^2}{a^2-1}-\dfrac{1}{a^2-a}\right]$.

24. $\left[\left(\dfrac{a}{m(b-c)}+\dfrac{b}{n(a-c)}\right):\dfrac{9a^2-b^2}{ab(m-c)}\right]:\dfrac{m-4}{(m-2)(a+1)}$.

25. $\left[\dfrac{a+t}{(a-t)^2}-\dfrac{2a}{a^2-t^2}+\dfrac{a-t}{(t+a)^2}\right]:\dfrac{ab^3t^2}{a^4-t^4}-\dfrac{bt^2}{t^2-a^2}$.

Найти ОДЗ двух следующих алгебраических выражений (26—30):

26. $\dfrac{4a^2+12a+9}{2a^2-a-6}:\dfrac{a^2+6a+3}{a^2+a-6}$ и $\dfrac{2a+3}{a+3}$.

27. $\dfrac{2a}{a^2-b^2}+\dfrac{1}{ab(b+2)}$ и $\dfrac{a^2-2a}{a^2(a+1)^2-1}$.

28. $\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right):\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{c}\right)$ и $\dfrac{1}{a^2-c^2}+\dfrac{b}{b-2bc}$.

29. $\dfrac{c-b}{bc}:\dfrac{b^2-c^2}{a^2-1}$ и $\dfrac{b+1}{(m-a)(b+1)}+\dfrac{1}{bcm}$.

30. $\left[\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2+4\right]:\left[\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2+4\right]:\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$, и $\dfrac{x+a}{2x+a}:\dfrac{ax+a^2}{4x^2-a^2}$.

Найти ОДЗ следующего алгебраического выражения и упростить это выражение на его ОДЗ (31—40):

31. $(3a^2x+a^2x-18a^2x):\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{2}+x-\dfrac{2x}{3}\right)$.

32. $(2x^2yx^5y^7\cdot 6x^2y^2):(-3x^4y\cdot 4x^5y^9xy)$.

33. $[3a^4b^7x^3\cdot 5a^3bx\cdot(-6a^3x^2)]:(15ax\cdot 2yxa\cdot 7ayx)$.

34. $\dfrac{2x^2y}{3yz}\cdot\dfrac{5z^2x}{7xy^2}:\dfrac{21x^2y^3z^2}{40xy^2z}$.

35. $\left(\dfrac{8a^2b}{12b^2c}:\dfrac{abc}{a^3b^2c}\right):\dfrac{15a^2b^2c}{3abc}$.

36. $\left[\left(\frac{y^2b^2}{a^2x}:\frac{ya}{b}\right):\frac{ab^4}{x^3y}\right]:\frac{b^2}{a^2}$.

37. $\left(\frac{a^2-5a+6}{a^2+5a+4}:\frac{a^2-4a+3}{2a^2+3a+1}\right)\cdot\frac{a^2+3a-4}{2a^2-3a-2}$.

38. $\frac{b^2-100}{a^2-b^2}:\frac{b+10}{a-b}+\frac{a-b}{a^2+2ab+b^2}\cdot\frac{b^2+ab}{b^2-ab}$.

39. $\left[\frac{c^3-8}{c+a}:\left(\frac{c-2}{4c}\cdot\frac{8c^3}{c^2+ac}\right)\right]:\frac{c^2+2c+4}{2b\,(a-c)}$.

40. $\left(\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-4ab-21b^2}\cdot\frac{a^2+2ab-3b^2}{a^3-b^3}\right):\frac{1}{a-7b}+\frac{a^2-l^2}{5a^3c^3}:\left(\frac{a+l}{10a^4}\cdot\frac{2a-2l}{ac^4}\right)$.

Упростить следующее алгебраическое выражение (41—65):

41. $3(x-2)-2(x-1)$.

42. $18-5(x+2)-3(x+1)$.

43. $6(x-2)-13(x-3)-2x+4$.

44. $3(x-4)-4(x-3)-5(x-2)-9(8-x)+20$.

45. $2x-5[7-(x-6)+3x]-21$.

46. $1-x+2\{3-2[x+2(x-2)]-x\}$.

47. $2+3[x-4(1-x)]-x-\{(x-1)-3[x+2(x-1)]-2x\}$.

48. $\frac{x}{3}+1\frac{1}{2}-\frac{2x}{9}+\frac{x}{6}-4x$.

49. $\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}(x-1)$.

50. $3+\frac{x}{4}-\frac{1}{3}\left(4-\frac{x}{3}\right)-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-11\right)$.

51. $\frac{0{,}75-x}{3}-\frac{2x+4}{1{,}5}-x-4\frac{1}{3}$.

52. $0{,}5x-3+\frac{0{,}25-3x}{4\frac{1}{4}}-1\frac{1}{2}x$.

53. $\frac{3x+5}{3}+4\frac{1}{6}-0{,}1\left(\frac{7x}{2}+8\right)$.

54. $\frac{7x+2}{2}-1{,}5-\frac{4x-1}{3}-\frac{0{,}75x}{6}$.

55. $5\frac{1}{2}+0{,}5x-\frac{3x}{4}+2(x+0{,}(3)-1)$.

56. $\frac{8}{3}\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{8}-\frac{x}{12}\right)-0{,}5\left[\frac{1}{2}\left(\frac{5x}{6}-\frac{x}{12}+\frac{x}{9}\right)+2\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{12}\right)\right]$.

57. $a-\{2a-[3b-2(4c-2a)]-3(b-c)\}$.

58. $2x-4[5x-(11y-3x)]-3[5y-2(3x-6y)]$.

59. $3y-\{16y-2[3x-2(x-12y)-5x]+x\}$.

60. $-2[a-2(b-a)]-3[b-4(2a-3b)]+2a$.

61. $6\{2a-3[b-2(c+a)]-3b\}-4\{b-2[a-4(c-a)-2c]+3a\}$.

62. $0{,}5a-\frac{1}{2}\left(\frac{2b}{3}-0{,}5a\right)-\left\{a-\left[1\frac{1}{2}a-\left(\frac{b}{3}-0{,}25a\right)\right]-\left(\frac{2a}{3}-\frac{b}{4}\right)\right\}$.

63. $\frac{1}{4}[c-4(b-c)-2b]-1\frac{1}{2}\left\{0{,}5\left(b-\frac{c}{3}\right)-\frac{2}{3}\left[2c-0{,}75\left(b-\frac{4c}{5}\right)\right]\right\}$.

64. $\frac{1}{8}\left(\frac{2a}{5}-\frac{4b}{15}\right)-2\left[0{,}4\left(\frac{5a}{4}-\frac{a}{6}-\frac{b}{10}\right)-0{,}2\left(b-\frac{a}{3}\right)-\frac{b-2a}{4}\right]$.

65. $0{,}2(3)+a-0{,}5\left[2\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{9}\right)-1\frac{1}{2}\left(\frac{a}{5}+0{,}(6)-\frac{b}{4}\right)\right]-\frac{a+b-1}{15}$.

Следующий многочлен разложить в произведение не менее чем двух многочленов (66—85):

66. $5mx+3ny-5my-3nx$. 67. $5x+xy+5y+y^2$.

68. $ax-bx+by+cy-cx-ay$. 69. $3a^5-6a^4b+3a^3b^2$.

70. $36x^2y^2-100$. 71. $25-49a^2b^6c^4$. 72. $4p^2q^4-81z^2$.

73. $(2a-3b)^2-(3a-2b)^2$. 74. $(m+2n)^2-4(3m-n)^2$.

75. $9(a-3b)^2-16(b-2a)^2$. 76. $a^4-c^2+9y^2-6a^2y$.

77. $c^6-6c^3-c^2-2cx-x^2+9$. 78. $a^3b^3-27m^3$.

79. $1+1000y^6$. 80. $m^3b^6c^9-8k^6$. 81. $125a^3-343b^3$.

82. $8a^3+(b-2a)^3$. 83. $64(m-n)^3+1$.

84. $(2a-b)^3-(3b-a)^3$. 85. $8(x-y)^3+27(y-2x)^3$.

Следующий многочлен разложить в произведение не менее, чем четырех многочленов (86—100):

86. $25b^2\cdot 81y^2z^2-121a^2\cdot 81y^2z^2-25b^2\cdot 169a^2+121a^2\cdot 169a^2$.

87. $144a^2b^8\cdot 25a^{10}-49c^4\cdot 25a^{10}-144a^2b^8+49c^4$.

88. $125x^3\cdot(a+b)^2-125x^3\cdot(3a-2b)^2-8(a+b)^2+8(3a-2b)^2$.

89. $25(a-3b)^2-\frac{1}{4}(3a+7b)^2-125z^3y^6(a-3b)^2+\frac{125}{4}z^3y^6(3a+7b)^2$.

90. $16x^2\cdot 64a^6b^6-225(3m-n)^2\cdot 64a^6b^6+16x^2-225(3m-n)^2$.

91. $9(x+y)^2\cdot 27a^6b^3-16(x+2y)^2\cdot 64a^6b^3+9(x+y)^2\cdot 125m^3-16(x+2y)^2\times$
$\times 125m^3$.

92. $2a^2y^5+aby^5-aby^3-2a^2y^3$.

93. $13x^2y^2\cdot 3a-39y^4\cdot 3a-13x^2y^2\cdot 9a^2+39y^4\cdot 9a^2$.

94. $36a^3\cdot 49x^2-9ab^2\cdot 49x^2+36a^3\cdot 7xy-9ab^2\cdot 7xy+36a^3\cdot 14x-9ab^2\cdot 14x$.

95. $15b\cdot 4a^2+45mb^2\cdot 4a^2+15b\cdot 16ab+15mb^2\cdot 16ab$.

96. $(1-x^2)(y^2-m^2)+(6x-9)(y^2-m^2)-(1-x^2)(2mn+n^2)-(6x-9)\times$
$\times(2mn+n^2)$.

97. $(25x^2+b^2)(a^2+6ab)+9(25x^2+b^2)(b^2-c^2)-9(y^2+10xb)(b^2-c^2)-$
$-(y^2+10xb)(a^2+6ab)$.

98. $(x+y)^4(a^3+b^3)-a^3b^3+(x+y)^4(a+b)-(a+b)$.

99. $(y^3-y^2+y)(121-25x^2-10x)-(121-25x^2-10x)-(y^3-y^2+y)+1$.

100. $16(a^3-b^3-b)(9x^3y-4xy^3)+16a(9x^3y-4xy^3)$.

Привести к общему знаменателю следующие три алгебраические дроби (101—110):

101. $\frac{1}{xy+x^2}$, $\frac{1}{x^2-y^2}$, $\frac{1}{2x^2-2xy}$.

102. $\frac{1}{(a+b)^2}$, $\frac{1}{a^3-a^2b}$, $\frac{1}{a^2-b^2}$.

103. $\frac{1}{a^2-4}$, $\frac{1}{a^2+3a+2}$, $\frac{1}{a^2+2a}$.

104. $\frac{1}{a^2+a-2}$, $\frac{1}{a^2-4a+3}$, $\frac{1}{a^2-1}$.

105. $\frac{1}{20a-4}$, $\frac{1}{50a^2+2}$, $\frac{1}{75a^2c-3c}$.

106. $\frac{1}{9bx+4by}$, $\frac{1}{18cx+12cy}$, $\frac{1}{81x^2-16y^2}$.

107. $\dfrac{1}{a^2+ab}$, $\dfrac{1}{b^2+ab}$, $\dfrac{1}{a^3b-b^3a}$.

108. $\dfrac{1}{x^2-x-20}$, $\dfrac{1}{x^2-9x+20}$, $\dfrac{1}{8x-32}$.

109. $\dfrac{1}{(2a^2-3ab)^2}$, $\dfrac{1}{(4a-6b)^3}$, $\dfrac{1}{4a^2-9b^2}$.

110. $\dfrac{1}{x^3-y^3}$, $\dfrac{1}{2x^2+2xy+2y^2}$, $\dfrac{1}{ax^2-ay^2}$.

Найти ОДЗ следующего алгебраического выражения и упростить это выражение на его ОДЗ (111—130):

111. $\dfrac{a^3-a^2b-ab^2-2b^3}{a^3+3a^2b+3ab^2+2b^3}$.

112. $\dfrac{4b^4+11b^2+25}{4b^4-9b^2+30b-25}$.

113. $\dfrac{3a^2+6a}{a^2+4a+4}\cdot\dfrac{a^3-2a}{a^4-4a^2+4}$.

114. $\dfrac{b^2-5b}{b^2-4b-5}:\dfrac{5a^3b+10a^2b^2}{3a^2b^2+6ab^3}$.

115. $\left(\dfrac{x^2+y^2+xy}{x^3-y^3}:\dfrac{a^3b-2a^2b+4ab}{a^3+8}\right):\dfrac{x^2-2x+1}{3x^3+7x-10}$.

116. $\dfrac{b^2-17b+72}{b^2-25}\cdot\dfrac{b^2-1}{b^2-8b-9}:\dfrac{b^2-9b+8}{b^2+4b-5}$.

117. $\dfrac{c^2-c-20}{c^2+5c+4}\cdot\dfrac{c^2-c}{c^2+c-2}:\left(\dfrac{c^2}{c^2+3c+2}\cdot\dfrac{c^2-3c-15}{c+3}\right)$.

118. $\dfrac{6xy-14y}{x-2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x+4x^2-14}\cdot\dfrac{4x-7}{4x^2}:\dfrac{3x^2-x-14}{2x^2+4x}$.

119. $\left(\dfrac{a^2-4a-45}{a^2-14a-15}:\dfrac{a^2-12a-45}{a^2-6a-27}\right):\left(\dfrac{b^2-4}{b^2-121}\cdot\dfrac{b+11}{b+2}\right)$.

120. $\left(\dfrac{12a^3+24a^2}{14a^2-7a}:\dfrac{a^2+2a}{2a-1}\right):\left(\dfrac{16a^2-49}{4a^2+a-14}:\dfrac{2a^2-a-1}{2a^2+5a+2}\right)$.

121. $\dfrac{a}{a+2}+\dfrac{a^2+3a}{4-a^2}-\dfrac{a+1}{3a-6}$.

122. $\dfrac{6a^3+48a^2}{a^3+64}+\dfrac{a^2-4}{a+4}-\dfrac{3a^2}{a^2-4a+16}$.

123. $\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{3}{(x+1)(x^2+5x+6)}$.

124. $\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

125. $\dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)}-\dfrac{2}{a-b}-\dfrac{2}{b-c}-\dfrac{2}{c-a}$.

126. $\dfrac{1}{a^2+a}+\dfrac{1}{a^2+3a+2}+\dfrac{1}{a^2+5a+6}+\dfrac{1}{a^2+7a+12}$.

127. $\dfrac{a^6-b^6}{a^2-b^2}-\dfrac{a^6+b^6}{a^2+b^2}-\dfrac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)(a-b)}$.

128. $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)[(x-y)^2+xy]+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)[(x+y)^2-xy]$.

129. $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right):\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)$.

130. $\left(\frac{1}{x+y}-\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right)\cdot\frac{x^6-y^6}{x^2y^2}+\frac{x^3-y^3}{xy}$.

Найти ОДЗ двух следующих алгебраических выражений A и B и доказать, что на этой области справедливо тождественное равенство $A=B$ (131—160):

131. $A=\frac{a^2-2}{6ab}\cdot\frac{18b^3}{5a^4-10a^2}$, $B=\frac{3b^2}{5a^3}$.

132. $A=\frac{a^3-b^3}{a^2-2ab+b^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+ab}$, $B=\frac{a^2+ab+b^2}{a}$.

133. $A=\frac{a^2-16}{a^2-8a+16}:\frac{2a+8}{3a-9}$, $B=\frac{3(a-3)}{2(a-4)}$.

134. $A=\frac{a^3+9a^2+20a}{a^2+5a+4}:\frac{a^2+7a+10}{a^2+3a+2}$, $B=a$.

135. $A=\frac{2a-3}{2a^2+13a-24}\cdot\frac{4a^2-3a-7}{4a-7}\cdot\frac{a^2+5a-24}{a^2-2a-3}$, $B=1$.

136. $A=\frac{2a^2+3ab-2b^2}{a^2+2ab+4b^2}\cdot\frac{a^3-8b^3}{a^2+3ab+2b^2}:\frac{2a^2-5ab+2b^2}{a^2+2ab+b^2}$, $B=a+b$.

137. $A=\frac{a^2-9}{5a^3b^3}:\left(\frac{a+3}{10a^4}\cdot\frac{2a-6}{ab^4}\right)$, $B=a^2b$.

138. $A=\left(\frac{m^3+4m^2n+4mn^2}{3m^2n-5mn^2-2n^3}:\frac{(m+2n)^3}{27m^3+n^3}\right)\cdot\frac{m^2-4n^2}{9m^2-3mn+n^2}$, $B=\frac{m}{n}$.

139. $A=\frac{c^2-4m^2}{c^2-2cm}-\frac{c^2+2cm-8m^2}{c^2-4m^2}$, $B=\frac{4m^2}{c(c+2m)}$.

140. $A=\frac{1+a^2+a}{1-a^3}+\frac{a-a^2}{(1-a)^3}$, $B=\frac{1}{(1-a)^2}$.

141. $A=\frac{a^2}{xy}+\frac{(a+x)^2}{x^2-xy}-\frac{(a+y)^2}{yx-y^2}$, $B=1$.

142. $A=\frac{3a-5}{3a^2-2a-5}-\frac{3a+5}{3a^2+7a+2}-\frac{1}{6a^2-a-1}$, $B=2$.

143. $A=\frac{5(2b-3)}{11(6b^2+b-1)}+\frac{7b}{6b^2+7b-3}-\frac{12(3b+1)}{11(4b^2+8b+3)}$, $B=\frac{1}{2b+1}$.

144. $A=\frac{a-1}{a-2}+\frac{a+1}{a+2}-\frac{4}{4-a^2}+\frac{2}{2-a}$, $B=0$.

145. $A=\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x+3}+\frac{3}{1-x}-\frac{1}{3-x}$, $B=\frac{48}{(x^2-9)(x^2-1)}$.

146. $A=\frac{a}{(a-x)^2}+\frac{3a}{x^2+ax-2a^2}+\frac{1}{2a+x}$, $B=\frac{x}{(a-x)^2}$.

147. $A=\frac{1+x}{(x-y)(x-z)}+\frac{1+y}{(y-z)(y-x)}+\frac{1+z}{(z-x)(z-y)}$, $B=0$.

148. $A=\frac{m^2nr}{(m-n)(m-r)}+\frac{n^2mr}{(n-r)(n-m)}+\frac{r^2mn}{(r-m)(r-n)}$, $B=0$.

149. $A=\frac{(ac+bm)^3-(am+bc)^3}{(a-b)(c-m)}-\frac{(ac+bm)^3+(am+bc)^3}{(a+b)(c+m)}$,
$B=2(ac+bm)(am+bc)$.

150. $A=\frac{3}{2c-3}-\frac{2c+15}{4c^2+9}-\frac{2}{2c+3}+\frac{18(2c+15)}{81-16c^4}$, $B=0$.

151. $A=\frac{x^3+3x^2+5x+15}{x^3+2x^2+5x+10}-\frac{x^4+x^3+3x+x-2}{x^4+2x^3+3x^2+4x-4}$, $B=2$.

152. $A=\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)^2-(x-y)^2}:\frac{x^4-y^4}{2xy(x-y)}, \quad B=\frac{1}{x+y}.$

153. $A=\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+z)^2-y^2}+\frac{y^2-(z-x)^2}{(x+y)^2-z^2}-\frac{(x-y)^2-z^2}{(y+z)^2-x^2}, \quad B=1.$

154. $A=\frac{(x-y)^4-xy(x-y)^2-2x^2y^2}{(x-y)(x^3-y^3)+2x^2y^2}, \quad B=\frac{x^2-4xy+y^2}{x^2+y^2}.$

155. $A=\frac{z^2}{a^2+b^2}+\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\left(x-\frac{za^2}{a^2+b^2}\right)^2, \quad B=\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z-x}{b}\right)^2.$

156. $A=\left(\frac{a+5}{5a-1}+\frac{a+5}{a+1}\right):\frac{a^2+5a}{1-5a}+\frac{a^2+5}{a+1}, \quad B=a-1.$

157. $A=\left(\frac{b-3}{7b-4}-\frac{b-3}{b-4}\right)\cdot\frac{7b-4}{9b-3b^2}+\frac{b^2-14}{4-b}, \quad B=-(b+4).$

158. $A=\left(\frac{1+6ac}{8c^3-a^3}-\frac{1}{2c-a}\right):\left(\frac{1}{a^3-8c^3}-\frac{1}{a^2+2ac+4c^2}\right), \quad B=1-2c+a.$

159. $A=\frac{b-4}{b-2}:\left(\frac{80b}{b^3-8}+\frac{2b}{b^2+2b+4}-\frac{b-16}{2-b}\right)-\frac{6b+4}{(4-b)^2}, \quad B=\frac{b}{b-4}.$

160. $A=\frac{9m}{(3-m)^2}-1:\left(\frac{m}{m-3}+\frac{12m^2-9m}{27-m^3}+\frac{9}{m^2+3m+9}\right), \quad B=-1.$

Для любых положительных чисел a и b доказать, что справедливо неравенство (161—165):

161. $(a^2-b^2)^2\geqslant 4ab(a-b)^2$. 162. $a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$.

163. $(a+b)^4\leqslant 8a^4+8b^4$. 164. $\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$.

165. $\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.

Используя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, доказать, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо следующее неравенство (166—168):

166. $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c$.

167. $(a+b)(b+c)(a+c)\geqslant 8abc$.

168. $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$.

169. Доказать, что для любого действительного числа a справедливо неравенство

$$a^2+1\geqslant\frac{2a}{a^2+1}.$$

170. Доказать, что если $a\geqslant b\geqslant c>0$, то

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3.$$

171. Доказать, что если $a_1>0$, $a_2>0$, $\ldots$, $a_n>0$ и $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$, то

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\geqslant\frac{1}{n}.$$

Доказать, что при любом натуральном n справедливо следующее неравенство (172—173):

172. $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2$.

173. $\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n!}<2.$

Доказать, что для любых натуральных m и p справедливо следующее неравенство (174—176):

174. $\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}+\frac{1}{(m+3)(m+4)}+\ldots+$
$+\frac{1}{(m+p)(m+p+1)}<\frac{1}{m+1}.$

175. $\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\ldots+\frac{1}{m+p}>\frac{p}{m+p}.$

176. $\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\frac{1}{(m+3)^2}+\ldots+\frac{1}{(m+p)^2}<\frac{1}{p}.$

Доказать, что для любого натурального $n\geqslant 2$ справедливо следующее неравенство (177—184):

177. $(n!)^2\geqslant n^n.$ 178. $\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n-1}.$ 179. $\frac{2^n}{n!}\leqslant\frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$

180. $\frac{1}{n!}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}.$ 181. $(n!)^2<\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]^n.$

182. $n!<\left(\frac{1+n}{2}\right)^n.$ 183. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$

184. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1.$

Разложить по формуле бинома Ньютона (185—187):

185. $\left(a+\frac{1}{2}\right)^6.$ 186. $(a-\sqrt{2})^7.$ 187. $(a-\sqrt{3})^8+(a+\sqrt{3})^8.$

Найти 7-й член в разложении бинома Ньютона (188—191):

188. $(2+b)^9.$ 189. $(3a-2)^{10}.$ 190. $(a^2-2a)^{11}.$ 191. $\left(\frac{a^2}{3}+3a\right)^{12}.$

Найти все k, при каждом из которых коэффициент при a^k в разложении бинома Ньютона есть рациональное число (192—194):

192. $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2}\cdot a)^{24}.$ 193. $(\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}\cdot a)^{76}.$ 194. $(\sqrt[3]{3}\cdot a+\sqrt[12]{2})^{102}.$

Найти коэффициент при x^5 следующего многочлена (195—200):

195. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^{14}.$ 196. $(2x-1)^{17}.$ 197. $(1+x-x^2)^4.$

198. $(1-2x+x^2)^5.$ 199. $(1-x)^2\cdot(2+x)^6.$ 200. $(1+2x)^4\cdot(x-1)^7.$

Подобрать числа A, B, C так, чтобы было справедливо следующее тождественное равенство (201—205):

201. $x^4+2x^3-16x^2-2x+15=(x+1)(x^3+Ax^2+Bx+C).$

202. $3x^5-x^4-3x+1=(x^2+1)(3x^3+Ax^2+Bx+C).$

203. $\frac{x^2+4x-1}{x^3+9x^2+23x+15}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x+5}.$

204. $\frac{x^2-1}{x^3+5x^2+3x-9}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}.$

205. $\frac{-2x+1}{x^3+2x^2+2x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$

Применяя схему Горнера, найти частное и остаток при делении на $(x+1)$ следующего многочлена (206—211):

206. $x^6+9x^3+32x+16$.

207. $14x-4+27x^4-9x^7$. 208. x^5-7x-6. 209. x^4+19x^2-30.

210. $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$.

211. $(x^2+4x+18)^2+3x(x^2-4x+8)+3$.

Применяя схему Горнера, убедиться, что и число (-2) и число 1 являются корнями следующего многочлена (212—214):

212. $(x^2+x)^2+4(x^2+1)-12$. 213. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.

214. $2x^4+7x^3-2x^2-13x+6$.

215. Применяя схему Горнера, убедиться, что многочлен

$$(x^2+4x+3)(x^2+12x+35)+15$$

делится на многочлен $(x+2)(x+6)$, и найти частное.

216. Применяя схему Горнера, убедиться, что многочлен

$$x^5-6x^4+16x^3-32x^2+48x-32$$

делится на многочлен $(x-2)^3$.

217. Делится ли многочлен $(x^4-10x^2+16)+(x^4-11x^2+24)$ на многочлен (x^2-8)?

218. Доказать, что сумма одинаковых степеней x^m+c^m не делится на разность их оснований $x-c$.

219. Доказать, что разность одинаковых нечетных степеней $x^{2k+1}-c^{2k+1}$ не делится на сумму их оснований $x+c$.

220. Доказать, что сумма одинаковых четных степеней $x^{2k}+c^{2k}$ не делится на сумму их оснований $x+c$.

221. Найти целые корни многочлена $x^4-x^3-2x^2+4x-24$.

Доказать методом математической индукции, что для любого натурального n справедливо следующее равенство (222—241):

222. $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

223. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

224. $2^2+4^2+8^2+\ldots+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$.

225. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

226. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

227. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

228. $1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+\ldots+(n-1)n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

229. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

230. $3+3^2+3^3+\ldots+3^n=\frac{3(3^n-1)}{2}$.

231. $2\cdot2^0+3\cdot2^1+4\cdot2^2+\ldots+(n+1)\cdot2^{n-1}=n\cdot2^n$.

232. $\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$.

233. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$.

234. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n-3}{2^n}$.

235. $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$.

236. $\frac{1}{1\cdot10}+\frac{1}{10\cdot19}+\frac{1}{19\cdot28}+\ldots+\frac{1}{(9n-8)(9n+1)}=\frac{n}{9n+1}$.

237. $\frac{1}{5\cdot11}+\frac{1}{11\cdot17}+\frac{1}{17\cdot23}+\ldots+\frac{1}{(6n-1)(6n+5)}=\frac{n}{5(6n+5)}$.

238. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

239. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\frac{3^2}{5\cdot7}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

240. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

241. $\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{2}{3\cdot5\cdot7}+\frac{3}{5\cdot7\cdot9}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=$
$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$.

Доказать (методом математической индукции), что для любого натурального n справедливо следующее неравенство (242—244):

242. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}<2-\frac{1}{n+1}$.

243. $2\sqrt{n+1}>\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}$.

244. $(n!)>\left(\frac{n}{3}\right)^n$.

245. Доказать, что для любого натурального $n\geqslant5$ справедливо неравенство $2^n>n^2$.

246. Доказать, что для любого натурального $n\geqslant3$ справедливо неравенство $n!>2^{n-1}$.

Доказать, что при любом натуральном n:

247. Число n^3+5n делится на 6.

248. Число $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ делится на 9.

249. Число $4^n+15n-1$ делится на 9.

250. Число $3^{2n}-1$ делится на 2^{n+2} и не делится на 2^{n+3}.

251. Число n^5-n делится на 30.

252. Число $4^{2n}-3^{2n}-7$ делится на 84.

253. Число $6^{2n}+19^n-2^{n+1}$ делится на 17.

254. Число $4^{2n+1}+3^{n+2}$ делится на 13.

255. Число $n^2(n^4-1)$ делится на 60.

256. Число $6n^5+15n^4+10n^3-n$ делится на 30.

257. Число $20^{n+1}+16^{n+1}-3^{n+1}-1$ делится на 323.

258. Число $(2n)^3+20(2n)$ делится на 48.

Глава III. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Пусть даны два многочлена A и B. Если стоит задача (гл. II) решить уравнение $A=B$, то говорят, что дано *алгебраическое уравнение* $A=B$. Если же стоит задача решить неравенство $A>B$ $(A<B,\ A\geqslant B,\ A\leqslant B)$, то говорят, что дано *алгебраическое неравенство* $A>B$ $(A<B,\ A\geqslant B,\ A\leqslant B)$.

В этой главе рассматриваются только алгебраические уравнения и неравенства. Поэтому в этой главе часто вместо слов «алгебраическое уравнение» будем писать просто «уравнение», вместо слов «алгебраическое неравенство» будем часто писать «неравенство».

§ 1. Уравнения с одним неизвестным

Основные понятия и определения. Пусть стоит задача решить уравнение

$$R(x)=Q(x), \tag{1}$$

где $R(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, целые (см. гл. II) относительно одной буквы x; тогда букву x называют неизвестной буквой, или просто *неизвестным*, а уравнение (1) — *алгебраическим уравнением с одним неизвестным*.

Поскольку ОДЗ многочленов $R(x)$ и $Q(x)$ состоит из всех действительных чисел, то задача о решении уравнения (1) может быть сформулирована так: *найти все числовые значения неизвестного x, каждое из которых обращает уравнение* (1) *в верное числовое равенство.* Каждое такое число называют *корнем* или *решением* уравнения (1). Поэтому *решить уравнение* (1) — это значит найти множество всех его корней.

Если множество всех корней уравнения (1) состоит из k чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$, то говорят, что уравнение (1) имеет только *k корней* $x_1, x_2, \ldots, x_k$, т. е. множество всех решений уравнения (1) есть множество $M=\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Если же множество всех корней состоит из одного числа x_1, то говорят еще, что уравнение (1) имеет *единственный корень* или *единственное решение* x_1.

В случае, если множество всех корней уравнения (1) есть пустое множество, говорят, что уравнение (1) *не имеет корней.*

Например, очевидно, что уравнение $x^2+1=-(x^4+1)$ корней не имеет, ибо ни для одного числового значения неизвестного x это уравнение не превращается в верное числовое равенство.

Теперь рассмотрим простейшее алгебраическое уравнение с одним неизвестным

$$x=\alpha, \tag{2}$$

где α — некоторое фиксированное число. Очевидно, что это простейшее уравнение имеет единственный корень — число α, поэтому множество всех корней уравнения (2) состоит из одного числа α.

Не для всякого алгебраического уравнения с одним неизвестным так же очевидно, как в двух рассмотренных примерах, множество всех корней уравнения. Обычно для нахождения множества всех корней уравнения это уравнение равносильными переходами (определение равносильного перехода см. ниже) сводят к одному или совокупности нескольких уравнений (определение совокупности уравнений см. ниже), каждое из которых — либо простейшее уравнение типа (2), либо уравнение, для которого очевидно, что оно не имеет корней.

В этом параграфе рассматриваются примеры равносильных переходов.

Пусть даны два алгебраических уравнения с одним неизвестным $R(x)=Q(x)$ и $S(x)=T(x)$. Эти уравнения называются *равносильными*, если любой корень первого уравнения является корнем второго уравнения, и, наоборот, любой корень второго уравнения является корнем первого уравнения. В силу этого определения равносильны любые два уравнения, не имеющие корней.

Замена одного уравнения равносильным ему другим уравнением называется *равносильным переходом* от одного уравнения к другому. Равносильный переход от одного уравнения к другому обозначается двойной стрелкой $\Leftrightarrow$. Запись

$$R(x)=Q(x) \Leftrightarrow S(x)=T(x)$$

означает, что уравнения $R(x)=Q(x)$ и $S(x)=T(x)$ равносильны.

Приведем некоторые утверждения, при помощи которых и будут совершаться равносильные переходы.

1. *Уравнения* $R(x)=Q(x)$ *и* $R(x)-Q(x)=0$ *равносильны.*

2. *Уравнения* $R(x)=Q(x)$ *и* $R(x)+\alpha=Q(x)+\alpha$ *равносильны для любого действительного числа* α.

3. *Уравнения* $R(x)=Q(x)$ *и* $\alpha R(x)=\alpha Q(x)$ *равносильны для любого отличного от нуля действительного числа* α.

4. *Пусть известно, что для любого действительного числа* x *справедливо равенство* $R(x)=T(x)$, *тогда равносильны уравнения* $R(x)=Q(x)$ *и* $T(x)=Q(x)$.

Доказательства справедливости этих утверждений похожи, поэтому докажем, например, утверждение 2. Пусть число x_1 — некоторый корень уравнения $R(x)=Q(x)$. Тогда справедливо числовое равенство $R(x_1)=Q(x_1)$. Поскольку справедливость числового равенства не нарушается при прибавлении к обеим его частям любого действительного числа (см. гл. I), то справедливо числовое равенство $R(x_1)+\alpha=Q(x_1)+\alpha$. Справедливость этого числового равенства означает, что число x_1 является корнем уравнения $R(x)+\alpha=Q(x)+\alpha$. Поскольку такое рассуждение можно провести для любого корня уравнения $R(x)=Q(x)$, то тем самым показано, что любой корень уравнения $R(x)=Q(x)$ является корнем уравнения $R(x)+\alpha=Q(x)+\alpha$.

Покажем теперь обратное. Пусть число x_2 есть некоторый корень уравнения $R(x)+\alpha=Q(x)+\alpha$, тогда справедливо числовое равенство $R(x_2)+\alpha=Q(x_2)+\alpha$. Прибавим к обеим частям этого числового равенства число $(-\alpha)$, получим справедливость числового равенства $R(x_2)=Q(x_2)$, откуда вытекает, что число x_2 есть корень уравнения $R(x)=Q(x)$. Поскольку такое рассуждение можно провести для любого корня уравнения $R(x)+\alpha=Q(x)+\alpha$, то тем самым показано, что любой корень уравнения $R(x)+\alpha=$ $=Q(x)+\alpha$ является корнем уравнения $R(x)=Q(x)$.

Из доказанного вытекает, что если уравнение $R(x)=Q(x)$ не имеет корней, то и уравнение $R(x)+\alpha=Q(x)+\alpha$ также не имеет корней. Действительно, предположим, что уравнение $R(x)=Q(x)$ не имеет корней, а уравнение $R(x)+\alpha=Q(x)+\alpha$ имеет хотя бы один корень. Из условия, что уравнение $R(x)+\alpha=Q(x)+\alpha$ имеет корень, по доказанному выше следует, что имеет корень и уравнение $R(x)=Q(x)$, что противоречит предположению. Значит, если уравнение $R(x)=Q(x)$ не имеет корней, то и уравнение $R(x)+\alpha=Q(x)+\alpha$ корней не имеет.

Аналогично показывается, что если уравнение $R(x)+\alpha=$ $=Q(x)+\alpha$ не имеет корней, то и уравнение $R(x)=Q(x)$ корней не имеет.

Итак, показано, что в этом случае уравнения $R(x)=Q(x)$ и $R(x)+\alpha=Q(x)+\alpha$ равносильны. Тем самым утверждение 2 доказано полностью.

Пусть дан многочлен $P(x)$ степени n, целый относительно буквы x:

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \qquad (a_0\neq 0), \tag{3}$$

где буквами $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ обозначены некоторые фиксированные действительные числа, называемые *коэффициентами* многочлена $P(x)$.

Из утверждений 1 и 4 вытекает, что каждое алгебраическое уравнение с одним неизвестным можно привести к виду $P(x)=0$, поэтому достаточно рассмотреть лишь уравнение

$$P(x)=0, \tag{4}$$

где $P(x)$ есть многочлен вида (3). Всякое такое уравнение называется *алгебраическим уравнением степени* n.

Из определений корня многочлена $P(x)$ (см. § 5 гл. II) и корня (решения) алгебраического уравнения следует, что любой корень многочлена $P(x)$ является корнем (решением) уравнения (4). Следовательно, нахождение всех корней (решений) уравнения (4) сводится к нахождению всех корней многочлена $P(x)$. Следует только иметь в виду, что при нахождении корней уравнения (4) не учитывается кратность корня многочлена $P(x)$. Например, многочлен $P(x)=x^2-2x+1$ имеет корень $x_1=1$ кратности два, а уравнение $x^2-2x+1=0$ имеет единственный корень (единственное решение) $x_1=1$. Хорошо известно, что нахождение корней многочлена является сложной задачей. Поэтому рассмотрим только некоторые такие случаи, когда удается найти все корни многочлена, т. е. решить уравнение (4).

Уравнение первой степени. Рассмотрим случай, когда $P(x)$ есть многочлен первой степени, т. е. рассмотрим уравнение

$$a_0x+a_1=0 \qquad (a_0\neq 0). \tag{5}$$

На основании утверждения 2 уравнение (5) равносильно уравнению

$$a_0x=-a_1 \qquad (a_0\neq 0). \tag{6}$$

Поскольку число $a_0\neq 0$, то на основании утверждения 3 уравнение (6) равносильно уравнению

$$x=-\frac{a_1}{a_0} \qquad (a_0\neq 0). \tag{7}$$

Все равносильные переходы от уравнения (5) к уравнению (7) можно записать более коротко в виде следующей цепочки равносильных переходов:

$$a_0x+a_1=0 \;\; (a_0\neq 0) \Leftrightarrow a_0x=-a_1 \;\; (a_0\neq 0) \Leftrightarrow x=-\frac{a_1}{a_0} \; (a_0\neq 0).$$

Простейшее уравнение $x=-\frac{a_1}{a_0}$ имеет единственный корень — число $\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)$. Так как уравнение (5) равносильно простейшему уравнению (7), то уравнение (5) также имеет единственный корень — число $\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)$.

Таким образом, *уравнение первой степени* с одним неизвестным (5) имеет *только один корень* $x_1=-\frac{a_1}{a_0}$.

Для решения алгебраических уравнений более высоких степеней понадобится понятие совокупности уравнений. Пусть дано m многочленов $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_m(x)$. Говорят, что дана *совокупность m алгебраических уравнений* с одним неизвестным x:

$$P_1(x)=0, \quad P_2(x)=0, \; \ldots, \; P_m(x)=0, \tag{8}$$

если требуется найти все числовые значения неизвестного x, каждое из которых является корнем хотя бы одного уравнения из этой совокупности (8) (уравнения совокупности обычно записываются в строчку).

Таким образом, решить совокупность уравнений (8) — значит решить каждое уравнение $P_i(x)=0$, где $i=1, 2, \ldots, m$, т. е. найти множества $N_1, N_2, \ldots, N_m$ всех корней каждого из уравнений и затем взять объединение этих множеств. Это объединение $N=N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_m$ будет множеством всех корней совокупности уравнений (8), а каждое число из множества N будет называться корнем или решением совокупности (8). Если множество N состоит из k чисел: $x_1, x_2, \ldots, x_k$, то говорят, что совокупность уравнений (8) имеет *только k корней* $x_1, x_2, \ldots, x_k$; если же множество N состоит из одного числа x_1, то говорят, что совокупность уравнений (8) имеет *единственный корень* x_1.

Часто возникает необходимость совершить равносильный переход от уравнения к совокупности уравнений. Будем говорить, что *уравнение*

$$P(x)=0 \tag{4}$$

равносильно совокупности уравнений

$$P_1(x)=0, \quad P_2(x)=0, \ \ldots, \ P_m(x)=0, \tag{8}$$

если любое решение (любой корень) уравнения (4) является решением (корнем) совокупности (8) и, наоборот, любое решение (любой корень) совокупности (8) является решением (корнем) уравнения (4). Замена уравнения (4) равносильной ему совокупностью (8) называется *равносильным переходом* от уравнения (4) к совокупности (8).

Например, уравнение

$$(3x+4)(-7x+2)(2x-\sqrt{5})(-12x-16)=0 \tag{9}$$

равносильно совокупности уравнений

$$3x+4=0, \quad -7x+2=0, \quad 2x-\sqrt{5}=0, \quad -12x-16=0.$$

Действительно, любой корень уравнения (9) обращает в нуль хотя бы один из многочленов $(3x+4)$, $(-7x+2)$, $(2x-\sqrt{5})$, $(-12x-16)$, т. е. является корнем хотя бы одного из уравнений совокупности, и, наоборот, любой корень совокупности обращает в нуль хотя бы один из этих многочленов, т. е. удовлетворяет уравнению (9). Совокупность уравнений имеет только три корня $x_1=-\frac{4}{3}$, $x_2=\frac{2}{7}$, $x_3=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Следовательно, в силу равносильного перехода эти корни и только они являются корнями уравнения (9).

Рассмотрим *алгебраическое уравнение второй степени*, т. е. уравнение

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a \neq 0). \tag{10}$$

Такие уравнения принято называть *квадратными уравнениями*. Многочлен ax^2+bx+c, где $a\neq 0$, называют обычно *квадратным трехчленом*, число a ($a\neq 0$), стоящее при x^2, — называется *первым коэффициентом*, число b, стоящее при x, — *вторым коэффициентом*, число c — *свободным членом*. Кроме того, число $D=b^2-4ac$ называется *дискриминантом* квадратного трехчлена, а также дискриминантом квадратного уравнения (10).

Проведем тождественное преобразование квадратного трехчлена. Так как $a\neq 0$, то справедливо тождественное равенство

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

Теперь применим тождественное преобразование, которое называется «выделением полного квадрата»:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2+2x\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=$$
$$=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=$$
$$=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}.$$

Окончательно получаем справедливость следующего тождественного равенства:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right]\qquad(a\neq 0).$$

На основании утверждения 4 уравнение (10) равносильно уравнению

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right]=0\qquad(a\neq 0),\tag{11}$$

а на основании утверждения 3, учитывая, что $a\neq 0$, получаем, что уравнение (11) равносильно уравнению

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}=0\qquad(a\neq 0).\tag{12}$$

Более коротко это можно записать так:

$$ax^2+bx+c=0\qquad(a\neq 0),$$
$$\Updownarrow$$
$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right]=0\qquad(a\neq 0),$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}=0\qquad(a\neq 0).$$

В зависимости от дискриминанта D возможны три случая.

а) $D<0$. Так как при любом числовом значении x_0 число $\left(x_0+\frac{b}{2a}\right)^2$ неотрицательно, а число $\left(-\frac{D}{4a^2}\right)$ — положительно, то число $\left(x_0+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}$ также положительно и потому не может равняться нулю. А это означает, что уравнение (12) не имеет действительных корней. Поскольку уравнение (10) равносильно уравнению (12), то оно также не имеет действительных корней.

б) $D=0$. Тогда уравнение (12) принимает вид

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \qquad (a\neq 0).$$

Это уравнение равносильно уравнению первой степени

$$x+\frac{b}{2a}=0 \qquad (a\neq 0).$$

Следовательно, если $D=0$, то уравнение (12) имеет единственный корень $x_1=-\frac{b}{2a}$.

в) $D>0$. Тогда $D=(\sqrt{D})^2$, и поэтому выражение, стоящее в левой части уравнения (12), можно рассматривать как разность двух квадратов $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ и $\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2$. Воспользовавшись формулой сокращенного умножения, получим уравнение

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right]=0 \qquad (a\neq 0),$$

равносильное уравнению (12). Это уравнение, в свою очередь, равносильно совокупности двух уравнений

$$x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}=0 \qquad (a\neq 0), \qquad x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}=0 \qquad (a\neq 0). \tag{13}$$

Каждое уравнение в этой совокупности является уравнением первой степени и, следовательно, по доказанному выше имеет только один корень. Решая каждое уравнение совокупности (13), получаем, что совокупность уравнений (13) имеет только два корня

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad (a\neq 0), \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad (a\neq 0). \tag{14}$$

В силу равносильных переходов, если $D>0$, то уравнение (10) равносильно совокупности (13) и потому имеет только два корня x_1 и x_2, вычисляемые по формулам (14).

Итак, *квадратное уравнение* (10) *не имеет действительных корней, если его дискриминант отрицателен, имеет только два действительных корня, если дискриминант положителен, и имеет только один действительный корень, если дискриминант равен нулю.*

Отметим, что если дискриминант квадратного уравнения (10) положителен, то формулы (14) для нахождения корней этого уравнения часто записывают в виде одной формулы:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (a \neq 0). \tag{15}$$

Замечание. Если $D=0$, то можно считать, что формула (15) остается справедливой, только надо помнить о том, что в этом случае квадратное уравнение имеет только один корень.

Приведенное квадратное уравнение. Квадратный трехчлен, у которого первый коэффициент равен единице, называется *приведенным* квадратным трехчленом. Общепринято второй коэффициент приведенного трехчлена обозначать p, а его свободный член — q, т. е. приведенный квадратный трехчлен имеет вид x^2+px+q.

Квадратное уравнение вида

$$x^2+px+q=0 \tag{16}$$

называется *приведенным* квадратным уравнением.

Очевидно, что квадратное уравнение (10) равносильно соответствующему приведенному уравнению, а именно

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0) \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad (a \neq 0). \tag{17}$$

Если дискриминант приведенного уравнения (16) положителен, то формула (15) для нахождения корней этого уравнения принимает вид

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}. \tag{18}$$

Теорема (теорема Виета). *Если приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет положительный дискриминант, то сумма корней этого уравнения равна второму его коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену, т. е. если x_1 и x_2 корни уравнения $x^2+px+q=0$, то $x_1+x_2=-p$; $x_1x_2=q$.*

Доказательство. Так как $D>0$, то используя формулы (18), получим

$$x_1+x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)+\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)=-p,$$

$$x_1x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\left(\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)=\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=q.$$

Теорема доказана.

Замечание. При $D=0$, как следует из доказательства, теорема Виета верна, если рассматривать корень $x_1=-\frac{p}{2}$ как два совпадающих корня $x_1=-\frac{p}{2}$ и $x_2=-\frac{p}{2}$. Теорема Виета имеет место и при $D<0$, но в этом случае корнями квадратного уравнения будут комплексные сопряженные числа (см. гл. XI).

Теорема Виета часто применяется при решении различных задач. Рассмотрим одну из них. Требуется найти неизвестный свободный член q квадратного уравнения $x^2+x+q=0$, если известно, что это уравнение имеет два действительных корня x_1, x_2 и сумма квадратов этих корней равна единице, т. е. $x_1^2+x_2^2=1$. Чтобы найти q, воспользуемся теоремой Виета. Справедлива цепочка тождественных равенств

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2,$$

и потому $x_1^2+x_2^2=1-2q$, т. е. $1-2q=1$, откуда $q=0$.

Симметричное уравнение третьей степени. Алгебраическое уравнение третьей степени называется *симметричным* уравнением, если оно имеет вид

$$ax^3+bx^2+bx+a=0 \quad (a\neq 0). \tag{19}$$

Преобразуем многочлен ax^3+bx^2+bx+a, воспользовавшись способом разложения многочлена на множители. Очевидна справедливость следующей цепочки тождественных равенств:

$$\begin{aligned}ax^3+bx^2+bx+a&=a(x^3+1)+bx(x+1)=\\&=a(x+1)(x^2-x+1)+bx(x+1)=(x+1)[a(x^2-x+1)+bx]=\\&=(x+1)[ax^2+(b-a)x+a],\end{aligned}$$

поэтому уравнение (19) равносильно уравнению

$$(x+1)[ax^2+(b-a)x+a]=0 \qquad (a\neq 0). \tag{20}$$

Уравнение (20), в свою очередь, равносильно совокупности уравнений:

$$x+1=0 \quad (a\neq 0), \qquad ax^2+(b-a)x+a=0 \quad (a\neq 0). \tag{21}$$

Следовательно, и уравнение (19) равносильно этой совокупности. Решение совокупности (21) легко находится, так как она содержит только уравнения первой и второй степени.

Пример. Найти корни уравнения

$$x^3+4x^2+4x+1=0. \tag{22}$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$x^3+4x^2+4x+1=(x^3+1)+4x(x+1)=(x+1)(x^2+3x+1).$$

Очевидно, что уравнение (22) равносильно совокупности уравнений

$$x+1=0, \quad x^2+3x+1=0. \tag{23}$$

Первое уравнение совокупности (23) имеет только один корень

$x_1=-1$; второе — только два корня $x_2=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ и $x_3=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$. Следовательно, совокупность уравнений (23), а значит, и данное уравнение (22) имеют только три корня $x_1=-1$, $x_2=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $x_3=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

Симметричное уравнение четвертой степени. Алгебраическое уравнение четвертой степени называется *симметричным*, если оно имеет вид

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0 \qquad (a\neq 0). \tag{24}$$

Учитывая, что $a\neq 0$, запишем это уравнение в равносильном виде:

$$(x^4+1)+\frac{b}{a}x(x^2+1)+\frac{c}{a}x^2=0 \qquad (a\neq 0).$$

Очевидна справедливость следующей цепочки тождественных равенств:

$$(x^4+1)+\frac{b}{a}x(x^2+1)+\frac{c}{a}x^2=(x^4+2x^2+1)+\frac{b}{a}x(x^2+1)+$$
$$+\left(\frac{c}{a}-2\right)x^2=(x^2+1)^2+2(x^2+1)\frac{bx}{2a}+\left(\frac{bx}{2a}\right)^2+x^2\left(\frac{c}{a}-2-\frac{b^2}{4a^2}\right)=$$
$$=\left(x^2+\frac{b}{2a}x+1\right)^2-\frac{b^2-4a(c-2a)}{4a^2}x^2.$$

Из справедливости этой цепочки получаем, что уравнение (24) равносильно уравнению

$$\left(x^2+\frac{b}{2a}x+1\right)^2-\frac{b^2-4a(c-2a)}{4a^2}x^2=0 \qquad (a\neq 0). \tag{25}$$

В зависимости от числа $M=b^2-4a(c-2a)$ возможны три случая:

а) $M<0$. Уравнение (25), а значит, и равносильное ему уравнение (24) действительных корней не имеют.

б) $M=0$. Уравнение (25) в этом случае принимает вид

$$\left(x^2+\frac{b}{2a}x+1\right)^2=0. \tag{26}$$

Очевидно, что уравнение (26) равносильно уравнению

$$x^2+\frac{b}{2a}x+1=0. \tag{27}$$

Следовательно, множество корней симметричного уравнения 4-й степени в этом случае совпадает с множеством корней квадратного уравнения

$$x^2+\frac{b}{2a}x+1=0 \qquad (a\neq 0). \tag{28}$$

в) $M>0$. Уравнение (25), а значит, и равносильное ему уравнение (24) равносильны совокупности квадратных уравнений

$$x^2+\frac{b+\sqrt{b^2-4a(c-2a)}}{2a}x+1=0 \qquad (a\neq 0), \tag{29}$$

$$x^2+\frac{b-\sqrt{b^2-4a(c-2a)}}{2a}x+1=0 \qquad (a\neq 0), \tag{30}$$

каждое из которых легко решить.

Пример. Решить уравнение

$$x^4+x^3-x^2+x+1=0. \tag{31}$$

Приведем следующую цепочку тождественных равенств:

$$x^4+x^3-x^2+x+1=x^4+2x^2+1+x(x^2+1)-3x^2=$$
$$=(x^2+1)^2+2(x^2+1)\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2-3x^2-\frac{x^2}{4}=\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)^2-\frac{13x^2}{4}=$$
$$=\left(x^2+\frac{1+\sqrt{13}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{13}}{2}x+1\right),$$

откуда следует, что уравнение (31) равносильно совокупности уравнений

$$x^2+\frac{1+\sqrt{13}}{2}x+1=0, \qquad x^2+\frac{1-\sqrt{13}}{2}x+1=0.$$

Первое уравнение этой совокупности имеет только два корня:

$$x_1=\frac{-\sqrt{13}-1+\sqrt{2\sqrt{13}-2}}{4}, \qquad x_2=\frac{-\sqrt{13}-1-\sqrt{2\sqrt{13}-2}}{4}, \tag{32}$$

а второе уравнение действительных корней не имеет, так как его дискриминант отрицателен. Следовательно, уравнение (31) имеет только два корня (32).

Двучленное уравнение. Алгебраическое уравнение называется *двучленным* уравнением, если оно имеет вид

$$x^n-a=0. \tag{33}$$

Рассмотрим сначала двучленное уравнение (33) в частном случае, когда $a=1$:

$$x^n-1=0. \tag{34}$$

При $n=1$ уравнение (34) есть частный случай уравнения первой степени и потому имеет единственный корень $x_1=1$. При $n=2$ уравнение (34) есть частный случай квадратного уравнения с положительным дискриминантом и потому имеет только два корня: $x_1=1$ и $x_2=-1$. Покажем теперь, что при $n\geqslant 3$ для любого нечетного n уравнение (34) имеет только один действительный корень $x_1=1$, а для любого четного n уравнение (34) имеет только два действительных корня $x_1=1$ и $x_2=-1$.

Пусть n — фиксированное нечетное натуральное число, $n \geqslant 3$, т. е. пусть $n = 2k+1$, где k — фиксированное натуральное число. Пользуясь формулой сокращенного умножения, получаем справедливость тождественного равенства (см. гл. II):

$$x^{2k+1} - 1 = (x-1)(x^{2k} + x^{2k-1} + \ldots + x^2 + x + 1).$$

Из справедливости этого тождественного равенства вытекает, что уравнение (34) при $n = 2k+1$ равносильно совокупности уравнений

$$(x-1) = 0, \quad x^{2k} + x^{2k-1} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0.$$

Первое уравнение этой совокупности имеет только один корень $x_1 = 1$, второе уравнение совокупности действительных корней не имеет. Для доказательства этого покажем, что для любого действительного x справедливо неравенство

$$x^{2k} + x^{2k-1} + \ldots + x^2 + x + 1 > 0. \qquad (35)$$

Действительно, для любого $x \in [0, +\infty)$ справедливость неравенства (35) очевидна. При любом $x \in [-1; 0)$, переписав левую часть неравенства (35) в виде

$$x^{2k} + x^{2k-2}(x+1) + \ldots + x^2(x+1) + (x+1),$$

убеждаемся, что первое слагаемое этой суммы положительно, а остальные — неотрицательны. Значит, для любого $x \in [-1; 0)$ неравенство (35) справедливо. Переписав левую часть неравенства (35) в виде

$$x^{2k-1}(x+1) + x^{2k-3}(x+1) + \ldots + x(x+1) + 1,$$

убеждаемся, что для любого $x \in (-\infty, -1)$ все слагаемые этой суммы положительны. Значит, для любого $x \in (-\infty; -1)$ неравенство (35) справедливо.

Итак, показана справедливость неравенства (35) для любого действительного x, а это означает, что уравнение

$$x^{2k} + x^{2k-1} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0$$

действительных корней не имеет. Значит, уравнение (34) при $n = 2k+1$ имеет только один действительный корень $x_1 = 1$.

Пусть теперь $n = 2k$ (k — фиксированное натуральное число и $k \geqslant 2$). Пользуясь формулой сокращенного умножения (см. гл. II), получаем справедливость тождественного равенства

$$x^{2k} - 1 = (x^2 - 1)(x^{2(k-1)} + x^{2(k-2)} + \ldots + x^4 + x^2 + 1).$$

Из справедливости этого тождественного равенства вытекает, что уравнение (34) при $n = 2k$ ($k \geqslant 2$) равносильно совокупности уравнений

$$x^2 - 1 = 0, \quad x^{2(k-1)} + x^{2(k-2)} + \ldots + x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

Первое уравнение этой совокупности имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$, а второе уравнение действительных корней не имеет, так как для любого действительного x очевидна справедливость неравенства

$$x^{2(k-1)} + x^{2(k-2)} + \ldots + x^4 + x^2 + 1 > 0.$$

Значит уравнение (34) имеет при $n = 2k$ два действительных корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$.

Итак, уравнение (34) при любом нечетном n имеет только один действительный корень $x_1 = 1$, а при любом четном n — только два действительных корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$.

Рассуждая аналогично, можно показать (см. § 1 гл. VII), что:

— при любом положительном a уравнение (33) имеет: 1) при любом нечетном n только один действительный корень $x_1 = \sqrt[n]{a}$, 2) при любом четном n—только два действительных корня $x_1 = \sqrt[n]{a}$ и $x_2 = -\sqrt[n]{a}$;

— при $a = 0$ уравнение (33) имеет только один корень $x_1 = 0$;

— при любом отрицательном a можно показать (см. § 1 гл. VII), что уравнение (33) имеет: 1) при любом нечетном n только один действительный корень $x_1 = -\sqrt[n]{-a}$, 2) при любом четном n не имеет действительных корней.

Пример. Решить уравнение

$$x^3 + 8 = 0.$$

Так как в данном случае n — нечетно ($n = 3$) и a — отрицательно ($a = -8$), то данное уравнение имеет единственное решение $x_1 = -2$.

Трехчленное уравнение. Алгебраическое уравнение вида

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \tag{36}$$

при условии, что $n \geqslant 2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, называется *трехчленным* уравнением. При $n = 2$ трехчленное уравнение имеет еще одно название «*биквадратное уравнение*». Для решения биквадратного уравнения

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \qquad (a \neq 0) \tag{37}$$

его левая часть преобразуется способом «выделения полного квадрата»:

$$ax^4 + bx^2 + c = a\left[\left(x^4 + 2x^2\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] =$$
$$= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

На основании этого тождественного равенства уравнение (37) равносильно уравнению

$$a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \qquad (a \neq 0). \tag{38}$$

Очевидно, что если $b^2-4ac<0$, то уравнение (38), а значит, и равносильное ему уравнение (37), корней не имеют.

При $b^2-4ac=0$ уравнение (38) принимает вид

$$\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \qquad (a\neq 0). \tag{39}$$

Очевидно, что уравнение (39) равносильно уравнению

$$x^2+\frac{b}{2a}=0 \qquad (a\neq 0). \tag{40}$$

Таким образом, при $b^2-4ac=0$ биквадратное уравнение (37) равносильно квадратному уравнению (40), т. е. при $\frac{b}{2a}<0$ имеет только два действительных корня $x_1=\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ и $x_2=-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$; при $\frac{b}{2a}=0$ — единственный корень $x_1=0$; при $\frac{b}{2a}>0$ — не имеет решений.

Если же $b^2-4ac>0$, то уравнение (38), а значит, и равносильное ему уравнение (37) равносильны совокупности уравнений

$$x^2+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \quad (a\neq 0), \qquad x^2+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \quad (a\neq 0).$$

Перепишем эту совокупность в равносильном виде:

$$x^2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (a\neq 0), \qquad x^2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (a\neq 0). \tag{41}$$

Поскольку числа, стоящие в правых частях уравнений совокупности (41), есть корни квадратного уравнения

$$at^2+bt+c=0 \quad (a\neq 0), \tag{42}$$

имеющего положительный дискриминант $D=b^2-4ac$, то совокупность уравнений (41) может быть записана в виде

$$x^2=t_1 \quad (a\neq 0), \qquad x^2=t_2 \quad (a\neq 0), \tag{43}$$

где t_1 и t_2 — корни уравнения (42).

Таким образом показано, что для решения биквадратного уравнения (37) надо сначала решить квадратное уравнение (42), при этом, если квадратное уравнение (42) не имеет действительных корней, т. е. его дискриминант отрицателен, то уравнение (37) также не имеет корней; если дискриминант уравнения (42) равен нулю, то уравнение (37) равносильно квадратному уравнению (40), которое легко решается; если же дискриминант уравнения (42) положителен, то уравнение (37) равносильно совокупности уравнений (41). Каждое из уравнений совокупности (41) — квадратное, поэтому корни этой совокупности, а значит, и корни равносильного этой совокупности уравнения (37) легко найти.

Пример. Решить биквадратное уравнение

$$x^4 - x^2 - 6 = 0. \tag{44}$$

Для решения уравнения (44) решим сначала квадратное уравнение $t^2 - t - 6 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = -2$, $t_2 = 3$. Поэтому уравнение (44) равносильно совокупности уравнений

$$x^2 = -2, \quad x^2 = 3.$$

Первое уравнение этой совокупности действительных корней не имеет, а второе имеет только два корня: $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = -\sqrt{3}$. Значит, и уравнение (44) имеет только два корня $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = -\sqrt{3}$.

При $n > 2$ для решения трехчленного уравнения

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

его левая часть также преобразуется способом «выделения полного квадрата»

$$ax^{2n} + bx^n + c = a\left[\left(x^n + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]. \tag{45}$$

На основании этого тождественного равенства уравнение (36) равносильно уравнению

$$\left(x^n + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (a \neq 0). \tag{46}$$

Очевидно, что если $b^2 - 4ac < 0$, то уравнение (46), а значит, и уравнение (36) корней не имеют.

Если $b^2 - 4ac = 0$, то уравнение (46) равносильно двучленному уравнению

$$x^n + \frac{b}{2a} = 0 \qquad (a \neq 0). \tag{47}$$

Следовательно, при $b^2 - 4ac = 0$ трехчленное уравнение (36) равносильно двучленному уравнению (47), решение которого рассматривалось в предыдущем пункте.

Если же $b^2 - 4ac > 0$, то уравнение (46) равносильно совокупности двучленных уравнений

$$x^n + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \quad (a \neq 0), \quad x^n + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \quad (a \neq 0), \tag{48}$$

решение которых, как показано выше, можно найти.

Пример. Решить трехчленное уравнение

$$x^6 + 3x^3 + 2 = 0. \tag{49}$$

Так как данное уравнение равносильно совокупности двух двучленных уравнений

$$x^3 + 2 = 0, \quad x^3 + 1 = 0,$$

то, решив их, получим, что уравнение (49) имеет только два действительных корня $x_1=-\sqrt[3]{2}$ и $x_2=-1$.

Замечание. Выше было показано, как решить любое уравнение первой степени и любое квадратное уравнение и были выведены формулы для нахождения их корней. Что касается уравнений, степени которых выше, чем два, то были рассмотрены лишь отдельные примеры. Связано это с тем, что хотя для уравнений третьей и четвертой степеней такие формулы есть, они очень громоздки и потому применяются редко, а для уравнений пятой степени и выше, таких формул нет. В то же время следует отметить, что если все коэффициенты многочлена $P(x)$ в уравнении (4) являются целыми (или рациональными) числами, то для нахождения целых (или рациональных) корней уравнения (4) можно применить теорему о целых (или рациональных) корнях многочлена (см. гл. II).

§ 2. Неравенства с одним неизвестным

Основные понятия и определения. Пусть стоит задача: решить неравенство

$$R(x)>Q(x) \quad [\text{или } R(x)<Q(x)], \tag{1}$$

где $R(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, целые (см. гл. II) относительно одной буквы x. Буква x называется неизвестной буквой, или просто *неизвестным*, неравенство (1) — *алгебраическим неравенством с одним неизвестным*.

Поскольку ОДЗ многочленов $R(x)$ и $Q(x)$ состоит из всех действительных чисел, то задачу о решении неравенства (1) можно сформулировать так: найти все числовые значения буквы x, каждое из которых обращает неравенство (1) в верное числовое неравенство. Каждое такое числовое значение называется *решением* неравенства (1). Поэтому решить неравенство (1) — это значит найти множество всех его решений. В случае, если множество всех решений неравенства (1) есть пустое множество, говорят, что неравенство (1) не имеет решений.

Два алгебраических неравенства $R(x)>Q(x)$ и $T(x)<S(x)$ называются *равносильными*, если любое решение первого неравенства является решением второго, и, наоборот, любое решение второго неравенства является решением первого. В силу этого определения равносильны любые два неравенства, не имеющие решений. Замена одного неравенства равносильным ему другим неравенством называется *равносильным переходом* от одного неравенства к другому. Равносильный переход принято обозначать двойной стрелкой $\Leftrightarrow$. Запись

$$R(x)>Q(x)\Leftrightarrow T(x)<S(x)$$

обозначает, что неравенства $R(x)>Q(x)$ и $T(x)<S(x)$ равносильны.

Приведем некоторые утверждения, при помощи которых будут совершаться равносильные переходы.

1. *Неравенства* $R(x) > Q(x)$ *и* $R(x) - Q(x) > 0$ *равносильны.*

2. *Неравенства* $R(x) > Q(x)$ *и* $R(x) + \alpha > Q(x) + \alpha$ *равносильны для любого действительного числа* α.

3. а) *Неравенства* $R(x) > Q(x)$ *и* $\alpha R(x) > \alpha Q(x)$ *равносильны для любого положительного числа* α.

б) *Неравенства* $R(x) > Q(x)$ *и* $\alpha R(x) < \alpha Q(x)$ *равносильны для любого отрицательного числа* α.

4. *Пусть известно, что для любого действительного числа* x *справедливо равенство* $R(x) = T(x)$, *тогда равносильны неравенства* $R(x) > Q(x)$ и $T(x) > Q(x)$.

Доказательства справедливости этих утверждений похожи, поэтому докажем, например, утверждение 1. Пусть число x_1 есть некоторое решение неравенства $R(x) > Q(x)$, т. е. пусть справедливо числовое неравенство $R(x_1) > Q(x_1)$. Тогда по свойству числовых неравенств справедливо и числовое неравенство $R(x_1) - Q(x_1) > 0$. Справедливость этого числового неравенства означает, что число x_1 является решением неравенства $R(x) - Q(x) > 0$. Поскольку такое рассуждение можно провести для любого решения неравенства $R(x) > Q(x)$, то любое решение неравенства $R(x) > Q(x)$ есть решение неравенства $R(x) - Q(x) > 0$.

Покажем теперь обратное. Пусть число x_2 есть некоторое решение неравенства $R(x) - Q(x) > 0$, т. е. пусть справедливо числовое неравенство $R(x_2) - Q(x_2) > 0$. Из справедливости последнего неравенства следует справедливость числового неравенства $R(x_2) > Q(x_2)$, а это означает, что число x_2 — решение неравенства $R(x) > Q(x)$. Поскольку такое рассуждение можно провести для любого решения неравенства $R(x) - Q(x) > 0$, то любое решение неравенства $R(x) - Q(x) > 0$ есть решение неравенства $R(x) > Q(x)$. Значит, если каждое из неравенств $R(x) > Q(x)$ и $R(x) - Q(x) > 0$ имеет решение, то эти неравенства равносильны.

Из доказанного вытекает, что если одно из неравенств $R(x) > Q(x)$ или $R(x) - Q(x) > 0$ не имеет решений, то и другое не имеет решений, т. е. и в этом случае неравенства $R(x) > Q(x)$ и $R(x) - Q(x) > 0$ равносильны. Утверждение 1 доказано.

Из утверждений 1 и 4 вытекает, что каждое алгебраическое неравенство можно привести или к виду $P(x) > 0$ или к виду $P(x) < 0$, поэтому достаточно рассмотреть лишь неравенства вида

$$P(x) > 0 \tag{2}$$

и

$$P(x) < 0, \tag{3}$$

где $P(x)$ — многочлен степени n, целый относительно буквы x, т. е.

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \qquad (a_0 \neq 0).$$

Такие неравенства называют алгебраическими неравенствами степени n.

Неравенства первой степени. Метод интервалов. Пусть надо решить неравенство

$$a_0x+a_1>0 \qquad (a_0\neq 0), \tag{4}$$

которое называется *неравенством первой степени.* На основании утверждения 2 неравенство (4) равносильно неравенству

$$a_0x>-a_1 \qquad (a_0\neq 0). \tag{5}$$

Рассмотрим случаи $a_0>0$ и $a_0<0$. Пусть $a_0>0$, тогда на основании утверждения 3а) неравенство (5) равносильно неравенству

$$x>-\frac{a_1}{a_0} \qquad (a_0\neq 0). \tag{6}$$

Очевидно, что любое x из промежутка $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$ удовлетворяет неравенству (6). Следовательно, множество всех решений неравенства (6) есть промежуток $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$ (рис. 11). Так как неравенство (4) при $a_0>0$ равносильно неравенству (6), то множество всех решений неравенства (4) также есть промежуток $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$. Все равносильные переходы от неравенства (4) к неравенству (5), а затем к очевидному неравенству (6) записываются более коротко в виде следующей цепочки равносильных переходов:

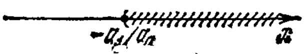


Рис. 11.

$$a_0x+a_1>0\,(a_0>0)\Leftrightarrow a_0x>-a_1\,(a_0>0)\Leftrightarrow x>-\frac{a_1}{a_0}\,(a_0>0).$$

Аналогично справедливы следующие цепочки равносильных переходов:

$$a_0x+a_1>0\,(a_0<0)\Leftrightarrow a_0x>-a_1\,(a_0<0)\Leftrightarrow x<-\frac{a_1}{a_0}\,(a_0<0);$$

$$a_0x+a_1<0\,(a_0>0)\Leftrightarrow a_0x<-a_1\,(a_0>0)\Leftrightarrow x<-\frac{a_1}{a_0}\,(a_0>0);$$

$$a_0x+a_1<0\,(a_0<0)\Leftrightarrow a_0x<-a_1\,(a_0<0)\Leftrightarrow x>-\frac{a_1}{a_0}\,(a_0<0).$$

В каждой из этих цепочек из последнего неравенства легко найти множество всех решений первого неравенства данной цепочки (при указанном ограничении на a_0). Итак, решением неравенства $a_0x+a_1>0$ при $a_0<0$ является промежуток $\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$; решением неравенства $a_0x+a_1<0$ при $a_0>0$ является промежуток $\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$; решением неравенства $a_0x+a_1<0$ при $a_0<0$ является промежуток $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$.

Все вышенаписанное о решении неравенств первой степени часто формулируют так: многочлен первой степени a_0x+a_1 $(a_0\neq 0)$:

а) при $a_0>0$ положителен для любого $x\in\left(-\frac{a_1}{a_0},\ +\infty\right)$ и отрицателен для любого $x\in\left(-\infty,\ -\frac{a_1}{a_0}\right)$;

б) при $a_0<0$ положителен для любого $x\in\left(-\infty,\ -\frac{a_1}{a_0}\right)$ и отрицателен для любого $x\in\left(-\frac{a_1}{a_0},\ +\infty\right)$.

В частности, двучлен $(x-\alpha)$ положителен для всех x, находящихся на числовой оси справа от точки, изображающей число α, и отрицателен для всех x, находящихся слева от этой точки. Другими словами, точка α делит числовую ось на две части: в части, находящейся справа от точки α, двучлен $(x-\alpha)$ положителен, а в части, находящейся слева от точки α, отрицателен.

Это свойство двучлена $(x-\alpha)$ лежит в основе *метода интервалов* и часто используется для решения алгебраических неравенств более высоких степеней.

Пусть требуется решить неравенство

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n)>0, \tag{7}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ — фиксированные числа, среди которых нет равных, причем такие, что $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{n-1}<\alpha_n$.

Рассмотрим многочлен

$$P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \ldots\ (x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n). \tag{8}$$

На основании сделанного выше замечания очевидно, что для любого числа x_0 такого, что $x_0>\alpha_n$, соответствующее числовое значение любого сомножителя в произведении (8) положительно, поэтому соответствующее числовое значение $P(x_0)$ многочлена $P(x)$ также положительно. Для любого числа x_1, взятого из промежутка (α_{n-1}, α_n), соответствующее числовое значение последнего сомножителя отрицательно, а соответствующее числовое значение любого из оставшихся сомножителей положительно, поэтому число $P(x_1)$ — отрицательно; аналогично для любого числа x_2 из промежутка $(\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1})$ число $P(x_2)$ — положительно и т. д.

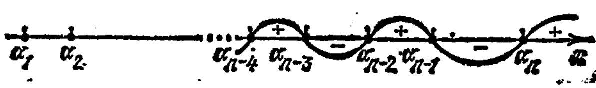


Рис. 12.

На этом рассуждении и основан *метод интервалов*, состоящий в следующем: на числовую прямую наносят числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$; в промежутке справа от наибольшего из них ставят знак плюс, в следующем за ним справа налево промежутке ставят знак минус, затем — знак плюс, затем — знак минус и т. д. (рис. 12).

Тогда множество всех решений неравенства (7) будет объединением всех промежутков, в которых поставлен знак плюс.

Методом интервалов можно решать те алгебраические неравенства, которые цепочкой равносильных переходов можно свести к неравенствам вида (7).

Пример. Решить неравенство

$$(x-3)(2+x)(4-x)>0. \tag{9}$$

Умножая неравенство (9) на (— 1) получим равносильное ему неравенство

$$[x-(-2)](x-3)(x-4)<0. \tag{10}$$

Для решения неравенства (10) применим метод интервалов: на числовую прямую наносим числа (— 2), 3,4. В промежутках справа налево расставим знаки плюс и минус (рис. 13). Множество всех x из промежутков $(-\infty, -2)$ и $(3,4)$ — множество всех решений

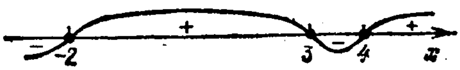


Рис. 13.

неравенства (10). Поскольку неравенство (9) равносильно неравенству (10), то множество всех решений неравенства (9) есть множество $(-\infty, -2) \cup (3,4)$.

Квадратное неравенство. Применим метод интервалов к решению алгебраических неравенств второй степени. Отметим, что обычно их называют *квадратными* неравенствами. Рассмотрим квадратное неравенство

$$ax^2+bx+c>0 \qquad (a \neq 0). \tag{11}$$

Применяя тождественное преобразование «выделение полного квадрата» (см. § 1, гл. III), получаем

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right],$$

где $D=b^2-4ac$. Поэтому неравенство (11) равносильно неравенству

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right]>0 \qquad (a \neq 0). \tag{12}$$

Пусть $a>0$. Тогда неравенство (12) равносильно наравенству

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}>0 \qquad (a>0). \tag{13}$$

а) Если $D<0$, то при любом числовом значении неизвестного $x=x_0$ в левой части неравенства (13) стоит сумма неотрицательного числа $\left(x_0+\frac{b}{2a}\right)^2$ и положительного числа $\left(-\frac{D}{4a^2}\right)$, т. е. неравенство (13) превращается в верное числовое неравенство. Следовательно, неравенство (13) справедливо при любом x. Другими словами, множество всех решений неравенства (13) в этом случае есть множество всех действительных чисел.

б) Если $D=0$, то очевидно, что неравенство (13) превращается в верное числовое неравенство для любого числа x, кроме $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Следовательно, множество всех решений неравенства (13) в этом случае есть множество $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

в) Если $D>0$, то неравенство (13) равносильно неравенству

$$(x-x_1)(x-x_2)>0 \qquad (a>0), \tag{14}$$

где $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$. Очевидно, что $x_1 < x_2$, поэтому, применяя метод интервалов, получим, что множество всех решений неравенства (14) есть множество $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$.

Пусть $a<0$. Тогда неравенство (12) равносильно неравенству

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} < 0 \qquad (a<0). \tag{15}$$

а) Если $D<0$, то очевидно, что для любого числа x это неравенство превращается в неверное числовое неравенство, а потому неравенство (15) не имеет решений.

б) Если $D=0$, то столь же очевидно, что неравенство (15) не имеет решений.

в) Если $D>0$, то неравенство (15) равносильно неравенству

$$(x-x_1)(x-x_2)<0 \qquad (a<0), \tag{16}$$

где $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$. Очевидно, что $x_1 > x_2$, поэтому, применяя метод интервалов, получим, что множество всех решений неравенства (16) есть интервал $(x_2; x_1)$.

Аналогично проводится решение неравенства $ax^2+bx+c<0$ $(a \neq 0)$. Приведенные выше рассуждения можно собрать вместе (см. табл. 1 на с. 130).

Отметим, что запоминать эту таблицу не надо, для решения конкретного квадратного неравенства лучше каждый раз повторить те рассуждения, которые были сделаны выше.

Пример. Решить неравенство

$$x^2-x-6<0.$$

Поскольку корни квадратного трехчлена $P(x)=x^2-x-6$ есть $x_1=3$ и $x_2=-2$, то $P(x)=(x-3)(x+2)$.

Значит, неравенство равносильно неравенству

$$(x-3)(x+2)<0.$$

ТАБЛИЦА 1

a	D	Неравенство	Решение неравенства
$a>0$	$D>0$	$ax^2+bx+c>0$	$\left(-\infty, \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)\cup\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, +\infty\right)$
$a>0$	$D>0$	$ax^2+bx+c<0$	$\left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)$
$a>0$	$D=0$	$ax^2+bx+c>0$	$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$
$a>0$	$D=0$	$ax^2+bx+c<0$	нет решений
$a>0$	$D<0$	$ax^2+bx+c>0$	$(-\infty, +\infty)$
$a>0$	$D<0$	$ax^2+bx+c<0$	нет решений
$a<0$	$D>0$	$ax^2+bx+c>0$	$\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)$
$a<0$	$D>0$	$ax^2+bx+c<0$	$\left(-\infty, \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)\cup\left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, +\infty\right)$
$a<0$	$D=0$	$ax^2+bx+c>0$	нет решений
$a<0$	$D=0$	$ax^2+bx+c<0$	$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$
$a<0$	$D<0$	$ax^2+bx+c>0$	нет решений
$a<0$	$D<0$	$ax^2+bx+c<0$	$(-\infty, +\infty)$

Применив метод интервалов к последнему неравенству (рис. 14), получим, что множество всех решений исходного неравенства есть интервал $(-2;\ 3)$.

Обобщенный метод интервалов. Некоторые алгебраические неравенства степеней, более высоких чем два, цепочкой равносильных переходов приводятся к виду

$$(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_{n-1})^{k_{n-1}}(x-\alpha_n)^{k_n}>0, \tag{17}$$

где $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n$ — фиксированные натуральные числа, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}, \alpha_n$ — фиксированные действительные числа, среди

Рис. 14.

которых нет равных, и такие, что $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_{n-1}<\alpha_n$ (отметим, что если хотя бы одно из чисел $k_i\geqslant 2$, то для решения неравенства (17) неприменим приведенный выше метод интервалов). Тогда неравенства вида (17) решаются так называемым *обобщенным методом интервалов*. Рассмотрим многочлен

$$P(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_{n-1})^{k_{n-1}}(x-\alpha_n)^{k_n}. \tag{18}$$

Очевидно, что для любого числа x_0 такого, что $x_0 > \alpha_n$, соответствующее значение любого сомножителя в произведении (18) положительно, поэтому числовое значение $P(x_0)$ многочлена $P(x)$ также положительно.

Для любого числа x_1, взятого из промежутка (α_{n-1}, α_n), соответствующее числовое значение любого сомножителя, кроме последнего, положительно; соответствующее числовое значение последнего сомножителя положительно, если k_n — четное число, и отрицательно, если k_n — нечетное число. Поэтому число $P(x_1)$ — положительно, если k_n — четное число, и число $P(x_1)$ — отрицательно, если k_n — нечетное число. Обычно в этих случаях говорят, что многочлен $P(x)$ при переходе через точку α_n меняет знак, если k_n — нечетное число, и не меняет знака, если k_n — четное число.

Аналогично показывается, что если известен знак многочлена $P(x)$ на промежутке (α_i, α_{i+1}), то на промежутке (α_{i-1}, α_i) знак определяется по правилу: многочлен $P(x)$ при переходе через точку α_i меняет знак, если k_i — нечетное число, и не меняет знака, если k_i — четное число. На этом рассуждении и основан *обобщенный метод интервалов*: на числовую ось наносятся числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$; в промежутке справа от наибольшего из этих чисел, т. е. справа от α_n, ставят знак плюс, в следующем за ним справа налево промежутке ставят знак плюс, если k_n — четное число, и знак минус, если k_n — нечетное число; в следующем за ним справа налево промежутке ставят знак, пользуясь правилом: многочлен $P(x)$ при переходе через точку α_{n-1} меняет знак, если k_{n-1} — нечетное число, и не меняет знака, если k_{n-1} — четное число; затем рассматривается следующий за ним справа налево промежуток, в нем ставят знак, пользуясь тем же правилом; таким образом рассматриваются все промежутки.

Решением неравенства (17) будет объединение всех промежутков, в которых поставлен знак плюс.

Пример. Решить неравенство

$$(x+5)(2x-3)^5(-x+7)^3(3x+8)^2 < 0. \qquad (19)$$

Прежде всего, умножая это неравенство на $\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$, получим равносильное ему неравенство

$$[x-(-5)]\left[x-\left(-\frac{8}{3}\right)\right]^2\left(x-\frac{3}{2}\right)^5(x-7)^3 > 0. \qquad (20)$$

Для решения неравенства (20) применим обобщенный метод интервалов. На числовой оси отметим числа (-5), $\left(-\frac{8}{3}\right)$, $\frac{3}{2}$, 7 (рис. 15). Справа от наибольшего числа, т. е. от числа 7, ставим знак плюс. При переходе через точку (7) многочлен

$$P(x) = [x-(-5)]\left[x-\left(-\frac{8}{3}\right)\right]^2\left(x-\frac{3}{2}\right)^5(x-7)^3 \qquad (21)$$

меняет знак, так как двучлен $(x-7)$ содержится в произведении (21) в нечетной степени, поэтому в промежутке $\left(\frac{3}{2}, 7\right)$ ставим знак минус. При переходе через точку $\left(\frac{3}{2}\right)$ многочлен $P(x)$ меняет знак, так как двучлен $\left(x-\frac{3}{2}\right)$ содержится в произведении (21) в нечетной степени, поэтому в промежутке $\left(-\frac{8}{3}, \frac{3}{2}\right)$ ставим знак плюс. При переходе через точку $\left(-\frac{8}{3}\right)$ многочлен $P(x)$ не меняет знака, так как двучлен $\left[x-\left(-\frac{8}{3}\right)\right]$ содержится в произведении (21) в четной степени, поэтому в промежутке $\left(-5, -\frac{8}{3}\right)$ ставим знак плюс. Наконец, при переходе через точку (-5) многочлен $P(x)$ меняет знак, так как двучлен $[x-(-5)]$ содержится

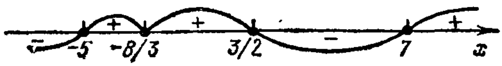


Рис. 15.

в произведении (21) в первой степени, поэтому в промежутке $(-\infty, -5)$ ставим знак минус. Итак, решение неравенства (20) и равносильного ему неравенства (19) — совокупность всех промежутков, где поставлен знак плюс, т. е. множество всех решений неравенства (19) есть множество $\left(-5, -\frac{8}{3}\right) \cup \left(-\frac{8}{3}, \frac{3}{2}\right) \cup$ $\cup (7, +\infty)$.

Нестрогие неравенства. Перейдем теперь к решению нестрогих неравенств

$$P(x) \geqslant 0, \tag{22}$$

$$P(x) \leqslant 0. \tag{23}$$

Если некоторое число x_0 есть решение неравенства (22), то справедливо числовое неравенство $P(x_0) \geqslant 0$. Тогда в силу определения нестрогого знака неравенства справедливо или числовое равенство $P(x_0) = 0$ или числовое неравенство $P(x_0) > 0$. Другими словами, если число x_0 — решение неравенства (22), то оно — либо решение уравнения $P(x) = 0$, либо — неравенства $P(x) > 0$. Такое рассуждение можно провести для любого решения неравенства $P(x) \geqslant 0$. Аналогично показывается, что любое решение неравенства $P(x) > 0$ и любое решение уравнения $P(x) = 0$ также есть решение неравенства (22).

Таким образом, множество решений нестрогого неравенства (22) является объединением двух множеств: множества всех решений строгого неравенства $P(x) > 0$ и множества всех решений уравнения $P(x) = 0$.

Аналогично множество всех решений нестрогого неравенства (23) является объединением двух множеств: множества всех решений строгого неравенства $P(x) < 0$ и множества всех решений уравнения $P(x) = 0$.

На этом и основано *правило решения нестрогих неравенств.* Сначала решаются соответствующее строгое неравенство и соответствующее уравнение, а затем множества решений строгого неравенства и уравнения объединяются; объединение этих множеств и является множеством всех решений нестрогого неравенства.

Примеры. 1. Решить нестрогое неравенство первой степени:

$$a_0 x + a_1 \geqslant 0 \qquad (a_0 \neq 0). \tag{24}$$

Решаем сначала уравнение

$$a_0 x + a_1 = 0 \qquad (a_0 \neq 0). \tag{25}$$

Его единственное решение — число $\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)$. Затем решаем неравенство

$$a_0 x + a_1 > 0 \qquad (a_0 \neq 0). \tag{26}$$

При $a_0 > 0$ множество всех его решений — множество $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$, при $a_0 < 0$ множество всех его решений — множество $\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$;

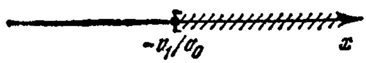


Рис. 16.

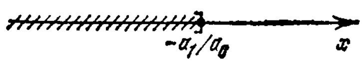


Рис. 17.

объединяя решения уравнения (25) и неравенства (26), получаем: для $a_0 > 0$ множество всех решений неравенства (24) есть множество $\left[-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$ (рис. 16); для $a_0 < 0$ множество всех решений неравенства (24) есть множество $\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right]$ (рис. 17).

2. Решить неравенство

$$(x^2 - 3x + 2)(x^3 - 3x^2)(4 - x^2) \geqslant 0. \tag{27}$$

Поскольку справедливы следующие тождественные равенства

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1),$$
$$x^3 - 3x^2 = x^2(x-3),$$
$$4 - x^2 = -(x-2)(x+2),$$

то согласно утверждениям 4 и 3б) этого параграфа неравенство (27) равносильно неравенству

$$[x - (-2)]\, x^2 (x-1)(x-2)^2 (x-3) \leqslant 0. \tag{28}$$

Решим сначала уравнение

$$[x-(-2)]\,x^2(x-1)(x-2)^2(x-3)=0. \qquad (29)$$

Оно имеет только пять корней: $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=2$, $x_5=3$. Затем решаем строгое неравенство

$$[x-(-2)]\,x^2(x-1)(x-2)^2(x-3)<0 \qquad (30)$$

обобщенным методом интервалов (рис. 18). Множеством всех его решений будет множество $(-\infty; -2)\cup(1; 2)\cup(2; 3)$. Объединяя

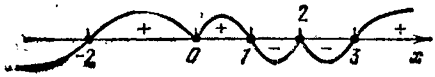


Рис. 18.

множество решений уравнения (29) и строгого неравенства (30), получим множество всех решений неравенства (28), а в силу равносильного перехода — неравенства (27).

Итак, множество всех решений неравенства (27) есть множество $(-\infty, -2]\cup\{0\}\cup[1; 3]$.

§ 3. Уравнения с двумя неизвестными

Основные понятия. Пусть дано уравнение

$$R(x, y)=Q(x, y), \qquad (1)$$

где $R(x, y)$, $Q(x, y)$ — многочлены, целые (см. § 3 гл. II) относительно двух букв x и y. Тогда говорят, что дано *алгебраическое уравнение с двумя неизвестными x и y*. Упорядоченная пара (x, y) называется *набором неизвестных* уравнения (1). ОДЗ уравнения (1) является множество всех пар (x, y), где буквы x и y могут быть любыми действительными числами.

Числовой набор (x_0, y_0), соответствующий набору неизвестных (x, y), называется *решением уравнения* (1), если равны числовые значения многочленов R и Q, соответствующие этому числовому набору, т. е. если справедливо числовое равенство $R(x_0, y_0)=Q(x_0, y_0)$. *Решить уравнение* (1) — значит найти множество всех его решений, т. е. найти все числовые наборы, каждый из которых обращает уравнение (1) в верное числовое равенство. Если множество всех решений уравнения (1) состоит из k пар действительных чисел (x_1, y_1); (x_2, y_2); ...; (x_k, y_k), то говорят, что уравнение (1) имеет только *k решений*, т. е. множество всех решений есть множество $M=\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)\}$. Если же множество всех решений состоит из одной пары (x_1, y_1), то говорят, что уравнение (1) имеет *единственное решение*. Например, уравнение $x^2+y^2=0$ имеет единственное решение (x, y): $(0, 0)$. В случае, если множество всех решений уравнения (1) есть пустое множество, говорят, что уравнение (1) *не имеет решений*. Например, уравнение $x^2+y^2=-1$ не имеет решений.

Пусть даны два алгебраических уравнения с двумя неизвестными:

$$R(x, y)=Q(x, y) \quad \text{и} \quad T(x, y)=S(x, y).$$

Эти уравнения называются *равносильными*, если любое решение первого уравнения является решением второго уравнения и любое решение второго уравнения является решением первого уравнения. В силу этого определения равносильны любые два уравнения, не имеющие решений.

Замена одного уравнения равносильным ему другим уравнением называется *равносильным переходом* от первого уравнения ко второму.

Справедливы следующие утверждения:

1. *Уравнения* $R(x, y)=Q(x, y)$ *и* $R(x, y)-Q(x, y)=0$ *равносильны.*

2. *Уравнения* $R(x, y)=Q(x, y)$ *и* $R(x, y)+S(x, y)=Q(x, y)+$ $+S(x, y)$, *где* $S(x, y)$ — *любой многочлен, целый относительно букв* x *и* y, — *равносильны.*

3. *Уравнения* $R(x, y)=Q(x, y)$ *и* $\alpha R(x, y)=\alpha Q(x, y)$ *равносильны для любого, отличного от нуля действительного числа* α.

4. *Пусть известно, что справедливо тождественное равенство* $R(x, y)=T(x, y)$, *тогда уравнения* $R(x, y)=Q(x, y)$ *и* $T(x, y)=$ $=Q(x, y)$ *равносильны.*

Справедливость этих утверждений доказывается аналогично доказательству соответствующих утверждений § 1 и потому опускается. Из утверждений 1 и 4 вытекает, что каждое алгебраическое уравнение с двумя неизвестными x и y можно привести к виду $P(x, y)=0$, поэтому можно рассматривать лишь уравнение вида

$$P(x, y)=0, \tag{2}$$

где $P(x, y)$ — многочлен, целый относительно букв x и y. Для геометрической иллюстрации множества всех решений уравнения (2) целесообразно ввести систему координат на плоскости.

Прямоугольная система координат на плоскости. Если указан способ, позволяющий устанавливать положение точек на плоскости заданием пар чисел, то говорят, что *на плоскости задана система координат*. Плоскость в этом случае называют *координатной плоскостью*. Рассмотрим простейшую и чаще всего употребляемую систему координат, которая называется прямоугольной.

Пусть дан отрезок, длина которого принята за единицу измерения длины на плоскости, т. е. пусть введен масштаб. Пусть даны две взаимно перпендикулярные прямые. Точку пересечения прямых будем считать началом отсчета или началом координат. На каждой прямой зададим положительное направление и отложим от начала координат заданный единичный отрезок. Таким образом, на каждой этой прямой введена своя система координат (см. § 5 гл. I); эти прямые называют координатными прямыми, их часто называют еще координатными осями, причем одну из них принято называть *осью абсцисс*, а другую — *осью ординат*.

Если на плоскости введен масштаб и заданы две взаимно перпендикулярные координатные оси и указано, какая из этих осей является осью абсцисс, а какая осью ординат, то говорят, что на плоскости задана *прямоугольная система координат*.

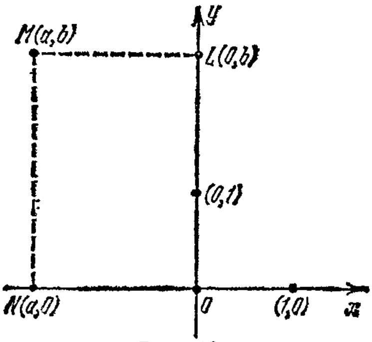


Рис. 19.

Обозначим начало координат буквой O, ось абсцисс — буквами Ox и ось ординат — буквами Oy. На рисунках координатные оси обычно располагаются так, чтобы ось абсцисс была горизонтальной и ее положительная полуось направлена вправо, а положительная полуось ординат — вверх (рис. 19).

Пусть M — любая точка координатной плоскости. Проведем через точку M прямые, параллельные координатным осям. Пусть прямая, проходящая через точку M и параллельная оси Oy, пересечет ось абсцисс в точке N, а прямая, проходящая через точку M, параллельная оси Ox, пересечет ось ординат в точке L (см. рис. 19). Так как на осях заданы системы координат, то точка N имеет в системе координат на оси абсцисс координату a, точка L имеет в своей системе координат на оси ординат координату b. Тогда *координатами точки* M в выбранной системе координат с осями Ox и Oy называют *упорядоченную пару чисел* (a, b). Число a называется первой координатой, или *абсциссой точки* M, число b называется второй координатой, или *ординатой точки* M. Тот факт, что точка M имеет абсциссу a и ординату b записывается так: $M(a, b)$ (при этом сначала пишется абсцисса, затем ордината точки M).

Часто, когда рассматриваются несколько разных фиксированных точек координатной плоскости, их обозначают некоторой заглавной буквой с разными номерами, например, $M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_n, \ldots$ Координаты этих точек помечаются соответствующими номерами: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $\ldots$ $M_n(x_n, y_n)$, $\ldots$

Так как через любую точку плоскости можно провести только одну прямую, параллельную данной координатной оси, а каждая такая прямая пересечет соответствующую перпендикулярную ей ось только в одной точке, то каждой точке координатной плоскости соответствует только одна упорядоченная пара чисел — координаты этой точки.

Между точками, лежащими на любой оси, и множеством действительных чисел имеется взаимно однозначное соответствие (см. гл. I), следовательно, разным точкам плоскости xOy будут соответствовать разные упорядоченные пары действительных чисел. Итак, если на плоскости задана прямоугольная система координат xOy, то между множеством точек на плоскости и множеством упорядоченных пар действительных чисел существует следующее соответствие:

1. Каждой точке плоскости соответствует одна упорядоченная пара действительных чисел.

2. Двум разным точкам плоскости соответствуют разные упорядоченные пары действительных чисел.

3. Нет ни одной упорядоченной пары действительных чисел, которая бы не соответствовала какой-нибудь точке плоскости.

Такое соответствие называется *взаимно однозначным соответствием*. Таким образом, введение на плоскости прямоугольной системы координат позволяет установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством упорядоченных пар действительных чисел. Это соответствие дает возможность сводить изучение множества точек плоскости к изучению множества пар действительных чисел, т. е. применять к изучению вопросов геометрии алгебраические методы.

Сделаем несколько замечаний:

1. *Абсцисса* точки M *равна нулю* тогда и только тогда, когда точка M лежит на оси Oy.

2. *Ордината* точки M *равна нулю* тогда и только тогда, когда точка M лежит на оси Ox.

3. Точка O — *начало координат* (и только она) *имеет обе координаты, равные нулю.*

4. Множество всех точек координатной плоскости, каждая точка которого имеет положительную ординату ($y > 0$), называется *верхней полуплоскостью.*

5. Множество всех точек координатной плоскости, каждая точка которого имеет отрицательную ординату ($y < 0$), называется *нижней полуплоскостью.*

6. Множество всех точек координатной плоскости, каждая точка которого имеет положительную абсциссу ($x > 0$), называется *правой полуплоскостью.*

7. Множество всех точек координатной плоскости, каждая точка которого имеет отрицательную абсциссу ($x < 0$), называется *левой полуплоскостью.*

8. Множество всех точек координатной плоскости, каждая точка которого имеет положительную абсциссу ($x > 0$) и положительную ординату ($y > 0$), называется *первой координатной четвертью.*

9. Множество всех точек координатной плоскости, каждая точка которого имеет положительную ординату ($y > 0$) и отрицательную абсциссу ($x < 0$), называется *второй координатной четвертью.*

10. Множество всех точек координатной плоскости, каждая точка которого имеет отрицательную абсциссу ($x < 0$) и отрицательную ординату ($y < 0$), называется *третьей координатной четвертью.*

11. Множество всех точек координатной плоскости, каждая точка которого имеет отрицательную ординату ($y < 0$) и положительную абсциссу ($x > 0$), называется *четвертой координатной четвертью.*

12. Две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ называются *симметричными относительно оси ординат*, если их координаты таковы, что $x_1 = -x_2$ и $y_1 = y_2$ (рис. 20); *симметричными относительно оси абсцисс*, если их координаты таковы, что $x_1 = x_2$ и $y_1 = -y_2$ (рис. 21); *симметричными, относительно начала координат*, если их координаты таковы, что $x_1 = -x_2$ и $y_1 = -y_2$ (рис. 22).

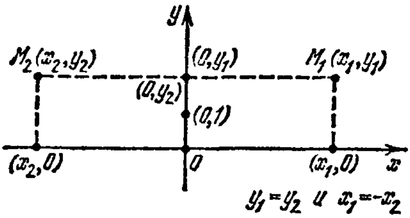


Рис. 20.

Теорема 1. *При любом расположении двух точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на координатной плоскости квадрат расстояния между ними (т. е. квадрат длины отрезка M_1M_2) определяется формулой $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, т. е. квадрат расстояния между двумя любыми точками координатной плоскости равен сумме квадратов разностей одноименных координат.*

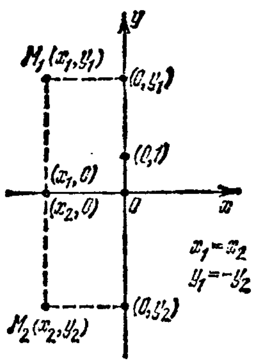


Рис. 21.

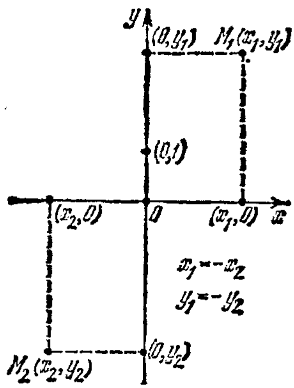


Рис. 22.

Доказательство. Пусть даны две несовпадающие точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Прямая M_1M_2 может быть:

а) параллельна оси Oy (или совпадать с ней);

б) параллельна оси Ox (или совпадать с ней);

в) не параллельна ни оси Oy, ни оси Ox. Доказательство теоремы проведем для каждого из этих случаев отдельно.

а) Пусть прямая, на которой лежат точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, параллельна оси Oy (или совпадает с ней). Тогда у любой точки, лежащей на этой прямой, одна и та же абсцисса, т. е. у точек M_1 и M_2 одинаковые абсциссы: $x_1 = x_2 = m$ (рис. 23).

Эта прямая может быть рассмотрена как ось, с положительным направлением вверх, с тем же самым единичным отрезком, что и для системы координат xOy, и началом в точке $(m, 0)$. Координата любой точки этой оси будет совпадать с ординатой

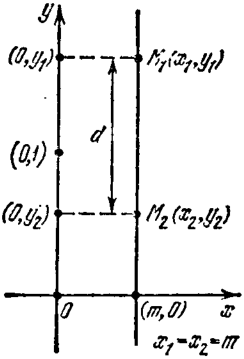


Рис. 23.

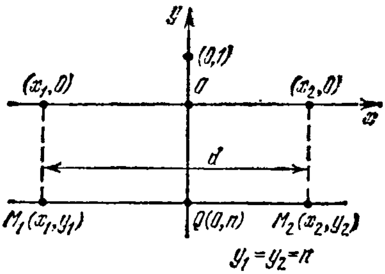


Рис. 24.

той же точки, рассматриваемой как точка плоскости. Согласно теореме 1 (§ 5 гл. I) расстояние между точками M_1 и M_2, как точками этой координатной прямой, равно $d = |y_2 - y_1|$, откуда

$$d^2 = |y_2 - y_1|^2 = 0 + (y_2 - y_1)^2 = (m - m)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \\ = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

б) Пусть прямая, на которой лежат точки M_1 и M_2, параллельна оси Ox (или совпадает с ней). Тогда у любой точки, лежащей на этой прямой, одна и та же ордината, т. е. у точек M_1 и M_2 одинаковые ординаты: $y_1 = y_2 = n$ (рис. 24).

Эта прямая может быть рассмотрена как ось с положительным направлением вправо, с тем же самым единичным отрезком, что и у системы координат xOy, и началом в точке $(0, n)$. Координата любой точки этой оси будет совпадать с абсциссой той же точки, как точки плоскости. Согласно теореме 1 (§ 5 гл. I) расстояние между двумя точками M_1 и M_2, как точками этой координатной прямой, равно $d = |x_2 - x_1|$, откуда

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + 0 = (x_2 - x_1)^2 + (n - n)^2 = \\ = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

в) Пусть теперь точки M_1 и M_2 не лежат ни на прямой, параллельной оси ординат, ни на прямой, параллельной оси абсцисс. Тогда одноименные координаты этих точек будут разные числа, т. е. $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$ (рис. 25). Проведем через точку M_1

прямую, параллельную оси абсцисс, а через точку M_2 — прямую, параллельную оси ординат. Эти прямые пересекутся в точке $K(x_2, y_1)$. Точка M_1 и точка K лежат на прямой, параллельной оси абсцисс, следовательно, как было установлено в случае б), расстояние между этими точками (длина отрезка M_1K) равно $d_{M_1K} = |x_2 - x_1|$.

Точка M_2 и точка K лежат на прямой, параллельной оси ординат, следовательно, как было установлено в случае а), расстояние между этими точками (длина отрезка M_2K) равно $d_{M_2K} = |y_2 - y_1|$. Так как треугольник M_1KM_2 — прямоугольный, то по теореме Пифагора $d^2 = d^2_{M_1K} + d^2_{M_2K} = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$. На основании свойств абсолютной величины получим

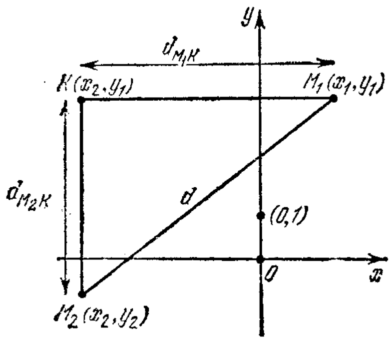


Рис. 25.

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Теорема доказана полностью.

Следствие. *Расстояние d между двумя любыми точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на координатной плоскости определяется по формуле*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Пример. Найти расстояние d между точками $M_1(-3, -2)$ и $M_2(-2, 1)$.

$$d = \sqrt{[-2-(-3)]^2 + [1-(-2)]^2} = \sqrt{10}.$$

Геометрическая иллюстрация множества решений. Непустое множество всех тех точек координатной плоскости, координаты x и y каждой из которых являются решением уравнения (2): $P(x, y) = 0$, есть некоторая фигура G. Говорят, что уравнение $P(x, y) = 0$ задает фигуру G или что оно является уравнением фигуры G, если выполнены два следующих условия:

1. Координаты каждой точки $M_0(x_0, y_0)$ фигуры G являются решением уравнения $P(x, y) = 0$, т. е. удовлетворяют числовому равенству $P(x_0, y_0) = 0$.

2. Любому решению уравнения $P(x, y) = 0$, т. е. любой паре чисел (x_1, y_1), удовлетворяющей числовому равенству $P(x_1, y_1) = 0$, соответствует на координатной плоскости точка $M_1(x_1, y_1)$, принадлежащая фигуре G.

Приведем некоторые примеры.

1. Пусть дано уравнение

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \tag{3}$$

Покажем, что на координатной плоскости это уравнение является уравнением окружности радиуса R с центром в точке $C(a, b)$.

Действительно, возьмем любую точку M_0 с координатами x_0 и y_0, лежащую на данной окружности. По определению окружности расстояние от точки M_0 до центра окружности — точки C — равно R. Используя следствие из теоремы 1, получим, что $R=\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}$. Из этого числового равенства вытекает числовое равенство

$$R^2=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2.$$

Следовательно, каждая точка, лежащая на данной окружности, имеет координаты, являющиеся решением уравнения (3).

Возьмем теперь любое решение уравнения (3), т. е. возьмем любую пару чисел (x_1, y_1) такую, что справедливо числовое равенство

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=R^2.$$

Это числовое равенство равносильно числовому равенству

$$\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}=|R|.$$

Упорядоченной паре чисел (x_1, y_1) соответствует на координатной плоскости точка $M_1(x_1, y_1)$, причем из справедливости числового равенства $\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}=|R|=R$ следует, что точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит на окружности радиуса R с центром в точке $C(a, b)$.

Значит, действительно, уравнение (3) является уравнением окружности радиуса R с центром в точке $C(a, b)$ (рис. 26). Пусть

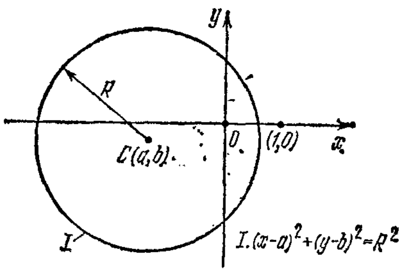


Рис. 26.

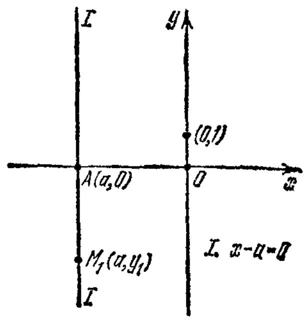


Рис. 27.

на координатной плоскости дана окружность радиуса r с центром в точке (α, β). Рассуждая аналогично, можно показать, что уравнение

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

есть уравнение этой окружности.

Итак, на координатной плоскости каждое уравнение вида (3) есть уравнение некоторой окружности, а каждая окружность задается некоторым уравнением вида (3).

Поэтому, говоря, что на координатной плоскости дана окружность, имеют в виду, что дано уравнение этой окружности, т. е. что дано уравнение вида (3).

2. Пусть дано уравнение

$$x-a=0. \tag{4}$$

Покажем, что на координатной плоскости это уравнение является уравнением прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $A(a, 0)$.

Действительно, возьмем любую точку M_0, лежащую на этой прямой. Тогда абсцисса этой точки есть число $x_0=a$, а ордината y_0 есть какое-то фиксированное действительное число.

Очевидно, что эти координаты x_0 и y_0 являются решением уравнения (4), т. е. координаты любой точки, лежащей на прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $A(a, 0)$, являются решением уравнения (4).

Возьмем теперь любое решение уравнения (4), т. е. возьмем любую пару чисел (x_1, y_1) такую, что она удовлетворяет числовому равенству $x_1-a=0$. Другими словами, возьмем любую пару чисел (a, y_1), где y_1 — любое фиксированное действительное число.

Легко видеть, что точка $M_1(a, y_1)$ лежит на прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $A(a, 0)$ (рис. 27). Значит, действительно, уравнение (4) является уравнением прямой, параллельной оси ординат.

Пусть на координатной плоскости дана прямая, параллельная оси ординат и проходящая через точку $D(d, 0)$. Рассуждая аналогично, можно показать, что уравнение $x-d=0$ является уравнением этой прямой.

Итак, на координатной плоскости каждое уравнение вида (4) есть уравнение некоторой прямой, параллельной оси ординат, а прямая, параллельная оси ординат, задается некоторым уравнением вида (4).

Поэтому, говоря, что на координатной плоскости дана прямая, параллельная оси ординат, имеют в виду, что дано уравнение этой прямой, т. е. дано уравнение вида (4).

3. Рассуждая аналогично, можно показать, что на координатной плоскости каждое уравнение вида

$$y-b=0 \tag{5}$$

есть уравнение некоторой прямой, параллельной оси абсцисс (рис. 28), а каждая прямая, параллельная оси абсцисс, задается некоторым уравнением вида (5).

Поэтому, говоря, что на координатной плоскости дана прямая, параллельная оси абсцисс, имеют в виду, что дано уравнение этой прямой, т. е. дано уравнение вида (5).

4. Пусть дано уравнение

$$y = kx + b, \tag{6}$$

где $k \neq 0$.

В главе VI будет показано, что на координатной плоскости это уравнение является уравнением прямой, проходящей через точку $M(0, b)$ и образующей с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен k (рис. 29).

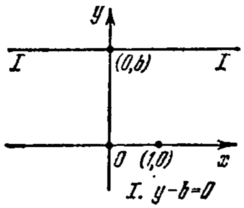


Рис. 28.

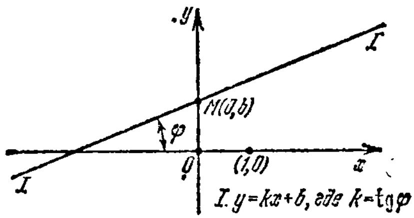


Рис. 29.

Пусть на координатной плоскости дана прямая, проходящая через точку $M(0, b_1)$ и образующая с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен k_1, где $k_1 \neq 0$; можно показать, что уравнение

$$y = k_1 x + b_1$$

является уравнением этой прямой.

Итак, на координатной плоскости каждое уравнение вида (6), где $k \neq 0$, есть уравнение прямой, не параллельной ни одной из осей координат, а каждая прямая, не параллельная ни одной из осей координат, задается некоторым уравнением вида (6), где $k \neq 0$.

Поэтому, говоря, что на координатной прямой дана прямая, не параллельная оси абсцисс и не параллельная оси ординат, имеют в виду, что дано уравнение этой прямой, т. е. дано уравнение вида (6), где $k \neq 0$.

Уравнение первой степени. *Уравнением первой степени с двумя неизвестными* называется уравнение вида

$$Ax + By + C = 0,$$

где $A^2 + B^2 \neq 0$, или другими словами, где хотя бы один из двух коэффициентов A и B отличен от нуля.

Из вышеизложенного вытекает, что на координатной плоскости каждое уравнение первой степени с двумя неизвестными есть уравнение некоторой прямой, а каждая прямая плоскости задается некоторым уравнением первой степени с двумя неизвестными.

Действительно, пусть дано уравнение

$$Ax + By + C = 0 \qquad (A^2 + B^2 \neq 0). \tag{7}$$

Если $B=0$, то учитывая, что $A \neq 0$, уравнение (7) равносильно уравнению

$$x-\left(-\frac{C}{A}\right)=0,$$

а выше показано, что это уравнение есть уравнение прямой. Если $B \neq 0$, то уравнение (7) равносильно уравнению

$$y=\left(-\frac{A}{B}\right)x+\left(-\frac{C}{B}\right),$$

а выше показано, что это уравнение есть уравнение прямой. Значит, действительно, уравнение (7) является уравнением некоторой прямой. Кроме того, можно показать, что если на координатной плоскости дана прямая, то она задается некоторым уравнением вида (7).

Поэтому, говоря, что на координатной плоскости дана прямая, имеют в виду, что дано уравнение этой прямой, т. е. что дано некоторое уравнение первой степени с двумя неизвестными.

Поскольку через две несовпадающие точки проходит единственная прямая, то для того чтобы задать прямую, достаточно задать две несовпадающие точки, лежащие на этой прямой.

Значит, если известны координаты двух несовпадающих точек, лежащих на этой прямой, то можно написать уравнение этой прямой.

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку $M(p, q)$, где $p^2+q^2 \neq 0$. Если $p=0$, то очевидно, что эта прямая есть ось ординат и ее уравнение есть $x=0$.

Если $q=0$, то очевидно, что прямая есть ось абсцисс и ее уравнение есть $y=0$.

Если $q \neq 0$, $p \neq 0$, то как указано выше, уравнение этой прямой есть уравнение вида (7), где A, B, C — некоторые фиксированные числа, причем $A^2+B^2 \neq 0$.

Найдем эти числа, используя условие, что две точки $O(0, 0)$ и $M(p, q)$ лежат на этой прямой.

Так как прямая проходит через начало координат, то пара $(0, 0)$ должна являться решением уравнения (7), а это возможно только если $C=0$. Ясно, что $B \neq 0$, так как если бы коэффициент B был равен нулю, то уравнение (7) имело бы вид $Ax=0$, т. е. было бы уравнением оси ординат ($A \neq 0$, так как $A^2+B^2 \neq 0$), что противоречит условию $p \neq 0$. Так как $B \neq 0$, то уравнение (7) равносильно уравнению

$$y=kx,$$

где $k=-\frac{A}{B}$. Так как прямая проходит через точку (p, q), то справедливо числовое равенство

$$q=kp.$$

Следовательно, $k=\frac{q}{p}$ и уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку $M(p, q)$, не лежащую ни на одной оси координат, имеет вид

$$y=\frac{q}{p}x.$$

Совокупность уравнений. Пусть даны многочлены $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$, ..., $P_m(x, y)$, целые относительно букв x и y.

Говорят, что дана *совокупность m алгебраических уравнений с двумя неизвестными*

$$P_1(x, y)=0,\ P_2(x, y)=0,\ \ldots,\ P_m(x, y)=0, \tag{8}$$

если требуется найти все пары чисел (x, y), каждая из которых является решением хотя бы одного уравнения из совокупности (8), и которая называется решением совокупности (8). Таким образом, решить совокупность уравнений (8) — это значит решить каждое уравнение совокупности, т. е. найти множества $M_1, M_2, \ldots, M_m$, где M_i — множество всех решений уравнения $P_i(x, y)=0$, а затем найти множество M_0, являющееся объединением всех этих множеств: $M_0=M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_m$. Множество M_0 и будет множеством всех решений совокупности уравнений (8).

Уравнение (1) *равносильно совокупности уравнений* (8), если любое решение уравнения (1) является решением совокупности уравнений (8), а любое решение совокупности уравнений (8) является решением уравнения (1), иными словами, если множества их решений совпадают. Замена уравнения (1) равносильной совокупностью уравнений (8) называется *равносильным переходом* от уравнения (1) к совокупности уравнений (8).

Часто с помощью таких равносильных переходов к совокупности уравнений удается решить исходное уравнение. Например, пусть требуется найти все корни уравнения

$$x^2-y^2=0. \tag{9}$$

Воспользуемся формулой сокращенного умножения (см. гл. II) $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$. Тогда по утверждению 4 получим уравнение (10), равносильное уравнению (9):

$$(x-y)(x+y)=0. \tag{10}$$

Уравнение (10), как легко видеть, равносильно следующей совокупности уравнений:

$$x-y=0,\ x+y=0. \tag{11}$$

Множество всех решений первого уравнения совокупности есть множество всех пар (t, t), где t — любое действительное число: $M_1 = \{(t, t) | t \in R\}$. Множество всех решений второго уравнения совокупности есть множество всех пар $(q, -q)$, где q — любое действительное число: $M_2 = \{(q, -q) | q \in R\}$. Таким образом, множество всех решений совокупности (11), а значит, и уравнения (9), есть объединение этих множеств $M = M_1 \cup M_2$, т. е. $M = \{(t, t) | t \in R; (q, -q) | q \in R\}$.

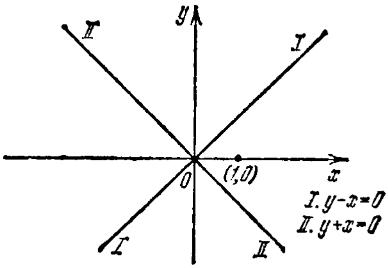


Рис. 30.

Как было показано выше, каждое из уравнений совокупности (11) есть уравнение прямой. Поэтому фигура, задаваемая уравнением (9), представляет собой две прямые; причем легко видеть, что эти прямые проходят через начало координат и являются биссектрисами координатных углов (рис. 30).

§ 4. Системы уравнений

Система двух уравнений с двумя неизвестными. Пусть даны многочлены $P(x, y)$, $Q(x, y)$, целые относительно букв x, y. Говорят, что дана *система* двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

если требуется найти числовые наборы, соответствующие набору неизвестных (x, y), каждый из которых является решением каждого из уравнений системы (1), т. е. если требуется найти все такие числовые наборы неизвестных (x, y), при подстановке каждого из которых в оба уравнения системы (1) последние обращались бы в верные числовые равенства. Каждый такой числовой набор называется *решением* системы (1) (уравнения системы обычно записываются в столбик и объединяются фигурной скобкой).

Решить систему уравнений (1), это значит найти множество всех решений данной системы. Следует отметить, что это множество является пересечением двух множеств: множества всех решений первого уравнения системы и множества всех решений второго уравнения системы. Рассмотрим еще одну систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} R(x, y) = 0, \\ S(x, y) = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

где $R(x, y)$, $S(x, y)$ — многочлены, целые относительно букв x и y. Две системы алгебраических уравнений (1) и (2) называются *равносильными*, если любое решение первой системы является решением второй системы и любое решение второй системы является решением первой системы. Другими словами, системы (1) и (2) равносильны, если множества их решений совпадают. Из определения следует, что две системы равносильны, если множества их решений пусты.

Говорят, что дана *совокупность* k систем двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} P_1(x, y)=0, \\ Q_1(x, y)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} P_2(x, y)=0, \\ Q_2(x, y)=0, \end{cases} \ldots, \quad \begin{cases} P_k(x, y)=0, \\ Q_k(x, y)=0, \end{cases} \tag{3}$$

где $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$, $\ldots$, $P_k(x, y)$, $Q_1(x, y)$, $\ldots$, $Q_k(x, y)$ — многочлены, целые относительно букв x и y, если требуется найти все числовые наборы, каждый из которых является решением хотя бы одной из систем уравнений совокупности (3). Каждый такой набор называется *решением* совокупности систем уравнений (3).

Система уравнений (1) *равносильна* совокупности систем уравнений (3), если любое решение системы уравнений (1) является решением совокупности систем уравнений (3), а любое решение совокупности систем уравнений (3) является решением системы уравнений (1).

Приведем некоторые утверждения о равносильности систем уравнений:

1. *Если изменить порядок следования уравнений системы* (1), *то полученная система равносильна системе* (1).

2. *Если одно из уравнений системы* (1) *заменить на равносильное уравнение, то полученная система равносильна системе* (1).

3. *Пусть в системе уравнений с неизвестными x и y одно из уравнений записано в виде, где в левой части стоит одно из неизвестных, например x, в первой степени, а в правой части — многочлен, целый относительно y. Тогда говорят, что неизвестное x выражено через другое неизвестное y. Если неизвестное x выражено из первого уравнения системы* (1), *то, подставив в другое уравнение системы* (1) *вместо x этот многочлен от y, получим равносильную систему уравнений*, т. е. равносильны следующие системы:

$$\begin{cases} x=R(y), \\ Q(x, y)=0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=R(y), \\ Q[R(y), y]=0. \end{cases}$$

Заметим, что второе уравнение $Q[R(y), y]=0$ является уравнением с одним неизвестным, и поэтому для нахождения его решений можно применить способы, рассмотренные в § 1.

4. *Если первое уравнение системы* (1) *заменить уравнением, равным сумме первого уравнения, умноженного на некоторое действительное число $\beta \neq 0$, и второго уравнения, умноженного на некоторое действительное число α, то полученная система уравнений равносильна системе уравнений* (1), т. е. при любых дей-

ствительных $\beta \neq 0$ и α две следующие системы уравнений равносильны:

$$\begin{cases} P(x, y)=0, \\ Q(x, y)=0, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \beta P(x, y)+\alpha Q(x, y)=0, \\ Q(x, y)=0. \end{cases}$$

В качестве следствия утверждения 4 имеем утверждение:

5. *Если первое уравнение системы* (1) *заменить на сумму* (*или разность*) *первого и второго уравнений системы, то полученная система уравнений будет равносильна системе уравнений* (1).

6. *Если первое уравнение системы* (1) *равносильно совокупности уравнений* $P_1(x, y)=0$, $P_2(x, y)=0$, $\ldots$, $P_k(x, y)=0$, *то система* (1) *равносильна следующей совокупности k систем уравнений:*

$$\begin{cases} P_1(x, y)=0, \\ Q(x, y)=0, \end{cases} \begin{cases} P_2(x, y)=0, \ldots, \\ Q(x, y)=0, \ldots, \end{cases} \begin{cases} P_k(x, y)=0, \\ Q(x, y)=0. \end{cases} \quad (4)$$

Если и уравнение $Q(x, y)=0$ равносильно совокупности m уравнений $Q_1(x, y)=0$, $Q_2(x, y)=0$, $\ldots$, $Q_m(x, y)=0$, то к каждой системе совокупности (4) применимо утверждение 6 и каждая система совокупности (4) может быть заменена своей совокупностью m систем.

Доказательство всех этих утверждений опускается.

Рассмотрим применение этих утверждений при решении систем уравнений.

Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными. Рассмотрим систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \end{cases} \quad (5)$$

где $a_1^2+b_1^2 \neq 0$ и $a_2^2+b_2^2 \neq 0$, другими словами, где хотя бы один из двух коэффициентов a_1 и b_1, а также хотя бы один из двух коэффициентов a_2 и b_2 отличны от нуля (в противном случае по крайней мере один из многочленов $a_1x+b_1y+c_1$ или $a_2x+b_2y+c_2$ не был бы многочленом первой степени ни относительно неизвестного x, ни относительно неизвестного y).

Каждое из двух уравнений системы (5) (как было показано в § 3) является уравнением прямой на координатной плоскости. Как известно, две прямые на плоскости могут либо пересекаться в одной точке, либо совпадать, либо быть параллельными, но не совпадающими. Следовательно, и при нахождении всех решений системы уравнений (5) могут возникнуть эти ситуации.

Рассмотрим их на примерах.

1. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} x-y=0, \\ x+y+1=0. \end{cases} \quad (6)$$

Система (6), как легко видеть, равносильна системе

$$\begin{cases} x=y, \\ x+y+1=0. \end{cases} \tag{7}$$

Используя утверждение 3, перейдем от системы (7) к системе

$$\begin{cases} x=y, \\ y+y+1=0, \end{cases} \tag{8}$$

ей равносильной.

Второе уравнение системы (8) есть уравнение первой степени с одним неизвестным и имеет единственное решение $y_1=-\frac{1}{2}$. Следовательно, система (8), а значит и равносильная ей система (6)

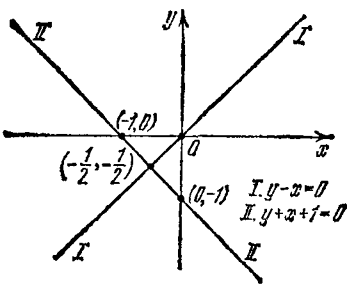


Рис. 31.

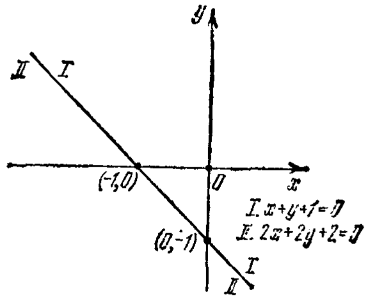


Рис. 32.

имеет единственное решение (x_1, y_1): $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Точка с этими координатами является точкой пересечения прямых, задаваемых уравнениями (6) (рис. 31).

2. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ 2x+2y+2=0. \end{cases} \tag{9}$$

Разделив левую и правую части второго уравнения на 2, перейдем к системе

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ x+y+1=0, \end{cases} \tag{10}$$

равносильной исходной системе (9).

Система (10) состоит из двух одинаковых уравнений, что соответствует двум совпавшим прямым на координатной плоскости (рис. 32). Очевидно, что множество всех решений системы (10), а значит и равносильной ей системы (9) есть множество всех пар вида $(t, -1-t)$, где t — любое действительное число.

3. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} x+y=0, \\ 2x+2y+1=0. \end{cases} \tag{11}$$

Перейдем к равносильной ей системе

$$\begin{cases} x=-y, \\ 2x+2y+1=0. \end{cases} \tag{12}$$

Воспользовавшись утверждением 3, получим систему

$$\begin{cases} x=-y, \\ 2(-y)+2y+1=0, \end{cases} \tag{13}$$

равносильную системе (12).

Второе уравнение системы (13) равносильно числовому равенству $1=0$, которое не верно. Следовательно, система (13), а значит и система (11) не имеют решений, что соответствует двум не совпадающим, но параллельным прямым на координатной плоскости (рис. 33).

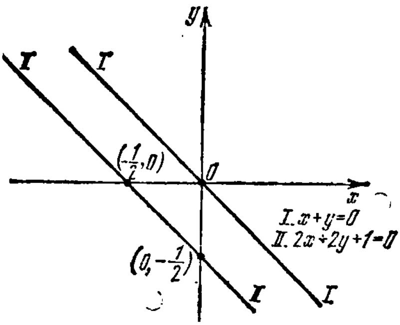


Рис. 33.

Способ решения систем уравнений (6), (9) и (11), основанный на утверждении 3, называется *способом подстановки* или *способом исключения неизвестного*.

Рассмотрим его применение на более сложном примере, когда одно из уравнений системы не является уравнением первой степени:

$$\begin{cases} ax+by+c=0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \tag{14}$$

Рассмотрим случай, когда $b=0$. Тогда первое уравнение системы (14) есть уравнение прямой, параллельной оси ординат. Второе уравнение системы (14) есть уравнение окружности единичного радиуса с центром в начале координат. Применив метод подстановки ($a\neq 0$, так как $b=0$), получим систему

$$\begin{cases} x=-\frac{c}{a}, \\ \left(-\frac{c}{a}\right)^2+y^2=1, \end{cases} \tag{15}$$

равносильную исходной системе (14). Второе уравнение системы (15) является квадратным уравнением. Если $1-\frac{c^2}{a^2}<0$, то это уравнение не имеет корней и, следовательно, система (15) и равносильная ей система (14) не имеют решений. Это соответствует ситуации, когда прямая $x=-\frac{c}{a}$ не пересекает единичную окружность $x^2+y^2=1$ (рис. 34). $\left(\text{На рис. 34 прямая } x=-\frac{c}{a} \text{ изображена и в случае } \left(-\frac{c}{a}\right)>1, \text{ и в случае } \left(-\frac{c}{a}\right)<-1.\right)$ Если

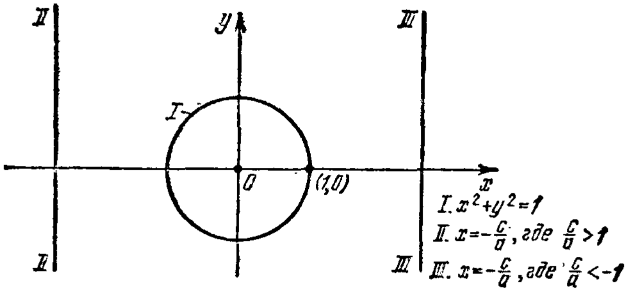


Рис. 34.

$1-\frac{c^2}{a^2}=0$, то второе уравнение системы (15) имеет единственное решение $y=0$. Система (15), а значит, и система (14) имеют при этом единственное решение (x_1, y_1): $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$. Геометрически это соответствует случаю касания прямой единичной окружности в точке $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ (рис. 35). $\left(\text{На рис. 35 прямая } x=-\frac{c}{a} \text{ изображена и в случае } \left(-\frac{c}{a}\right)=1, \text{ и в случае } \left(-\frac{c}{a}\right)=-1.\right)$ Если $1-\frac{c^2}{a^2}>0$, то второе уравнение системы (15) имеет только два корня $y_1=\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}$ и $y_2=-\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}$. Следовательно, системы (15) и (14) имеют при этом только два решения (x_1, y_1), (x_2, y_2): $\left(-\frac{c}{a}, \sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\right)$, $\left(-\frac{c}{a}, -\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\right)$. Геометрически это соответствует пересечению единичной окружности прямой $x=-\frac{c}{a}$ в двух точках: $\left(-\frac{c}{a}, \sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\right)$ и $\left(-\frac{c}{a}, -\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\right)$ (рис. 36). $\left(\text{На рис. 36 прямая } x=-\frac{c}{a} \text{ изображена в трех случаях: 1) } 0<-\frac{c}{a}<1, \text{ 2) } \left(-\frac{c}{a}\right)=0, \text{ 3) } 0>\left(-\frac{c}{a}\right)>-1.\right)$

Если $b\neq 0$, то из первого уравнения системы (14) можно выразить неизвестное y: $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ — и аналогично вышесказанному применить способ подстановки. При этом возможны только три ситуации:

1. Система (14) не имеет решений, т. е. прямая и окружность не имеют общих точек (см. рис. 34);

2. Система имеет единственное решение, т. е. прямая является касательной к данной окружности (см. рис. 35);

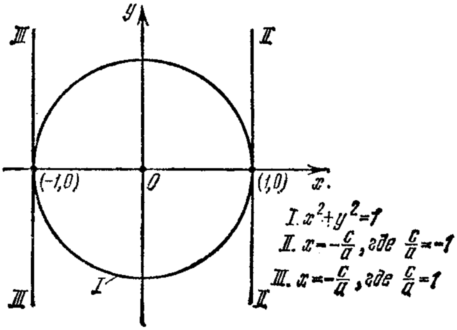


Рис. 35.

3. Система имеет только два решения, т. е. прямая пересекает окружность только в двух точках (см. рис. 36).

Проведение соответствующих выкладок в этом случае предоставляется читателю.

Способ линейного преобразования (способ базируется на утверждении 4 и заключен в равносильной замене первого уравнения системы другим уравнением, равным сумме первого уравнения, умноженного на число $\beta \neq 0$, и второго уравнения, умноженного на число α).

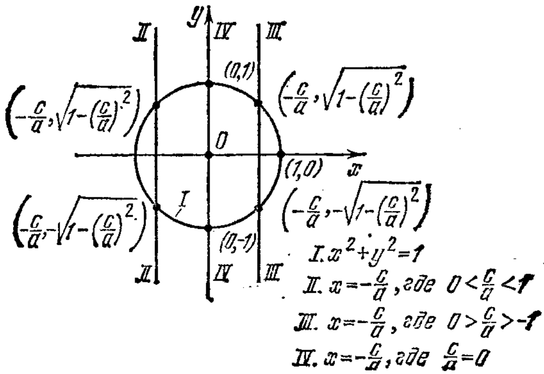


Рис. 36.

Рассмотрим применение этого способа на примере решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2+3y+1=0, \\ x^2+y^2+y-3=0. \end{cases} \tag{16}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим на основании утверждения 5 систему

$$\begin{cases} 2y+4=0, \\ x^2+y^2+y-3=0, \end{cases} \tag{17}$$

равносильную системе (16). Первое уравнение системы (17) имеет единственное решение $y_1=-2$. Подставив это значение y_1 во второе уравнение системы (17), получим, что эта система, а значит, и равносильная ей система (16) имеют только два решения: (1, —2) и (—1, —2). Отметим, что часто эти решения записываются в виде множества: $M=\{(1, -2); (-1, -2)\}$.

Способ замены системы уравнений совокупностью систем уравнений (способ базируется на утверждении 6 о равносильности системы уравнений совокупности систем уравнений).

Рассмотрим применение этого способа на примере решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2-y^2-x+y=0, \\ x+y^2-2=0. \end{cases} \tag{18}$$

Поскольку первое уравнение этой системы равносильно совокупности уравнений

$$x-y=0, \quad x+y-1=0,$$

то система (18) равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} x-y=0, \\ x+y^2-2=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-1=0, \\ x+y^2-2=0. \end{cases} \tag{19}$$

Каждая из систем совокупности (19) легко решается способом подстановки. Первая система имеет только два решения: (1, 1); (—2, —2); вторая система тоже имеет только два решения: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Следовательно, система (18) имеет только четыре решения:

$$(1,\ 1);\quad (-2,\ -2);\quad \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Рассмотрим еще применение этого способа на примере решения системы двух уравнений с двумя неизвестными, если одно из уравнений этой системы будет однородным уравнением второй степени. Уравнение $ax^2+bxy+cy^2=0$ называется *однородным уравнением второй степени*. Итак, решим систему уравнений

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=0, \\ P(x, y)=0, \end{cases} \tag{20}$$

где $P(x, y)$ — многочлен, целый относительно x и y.

1. Пусть $a=0$. Очевидно, что система (20) равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} y=0, \\ P(x, y)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} bx+cy=0, \\ P(x, y)=0. \end{cases}$$

Каждую из этих систем можно решить способом подстановки.

2. Пусть $a \neq 0$. Применим к левой части первого уравнения системы (20) тождественное преобразование «выделение полного квадрата»:

$$ax^2+bxy+cy^2=a\left(x^2+\frac{b}{a}xy+\frac{c}{a}y^2\right)=$$
$$=a\left\{\left[x^2+2x\frac{by}{2a}+\left(\frac{by}{2a}\right)^2\right]+\frac{cy^2}{a}-\left(\frac{by}{2a}\right)^2\right\}=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}y\right)^2-\frac{Dy^2}{4a^2}\right\}, \quad (21)$$

где $D=b^2-4ac$.

В случае, если $D>0$, левая часть первого уравнения системы (20) представляется в виде произведения

$$ax^2+bxy+cy^2=a\left(x+\frac{b}{2a}y+\frac{\sqrt{D}}{2a}y\right)\left(x+\frac{b}{2a}y-\frac{\sqrt{D}}{2a}y\right),$$

и поэтому система (20) равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} x+\dfrac{b+\sqrt{D}}{2a}y=0, \\ P(x,\ y)=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+\dfrac{b-\sqrt{D}}{2a}y=0, \\ P(x,\ y)=0. \end{cases} \quad (22)$$

Каждую из этих систем можно решить способом подстановки. В случае, если $D=0$, совокупность систем (22) состоит из двух одинаковых систем уравнений, т. е. на самом деле есть только одна система уравнений.

В случае, если $D<0$, из равенства (21) вытекает, что первое уравнение системы (20) имеет единственное решение $(x_1,\ y_1)$: $(0,\ 0)$ — и поэтому остается проверить, удовлетворяет ли это решение второму уравнению системы (20).

Решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=19, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases} \quad (23)$$

Применим сначала способ линейного преобразования системы: умножая первое уравнение на 7, а второе на 19 и вычитая затем из второго уравнения первое, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 12x^2-26xy+12y^2=0, \\ x^2-xy+y^2=7, \end{cases} \quad (24)$$

равносильной системе (23). Применим к левой части первого уравнения тождественное преобразование «выделение полного квадрата»:

$$12x^2-26xy+12y^2=12\left[x^2-2x\frac{13y}{12}+\left(\frac{13y}{12}\right)^2+y^2-\frac{169y^2}{144}\right]=$$
$$=12\left[\left(x-\frac{13y}{12}\right)^2-\frac{25y^2}{144}\right]=12\left(x-\frac{13y}{12}+\frac{5y}{12}\right)\left(x-\frac{13y}{12}-\frac{5y}{12}\right)=$$
$$=12\left(x-\frac{2y}{3}\right)\left(x-\frac{3y}{2}\right).$$

На основании этого тождественного преобразования и утверждения 6 можно утверждать, что система уравнений (24) равносильна совокупности систем уравнений:

$$\begin{cases} x-\frac{2}{3}y=0, \\ x^2-xy+y^2=7, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-\frac{3y}{2}=0, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$$

Решая каждую из этих систем способом подстановки, получаем, что первая система имеет только два решения: (2; 3) и (—2; —3); и вторая система имеет только два решения: (3; 2) и (—3; —2). Следовательно, система (23) имеет только четыре решения: (2; 3); (—2; —3); (3; 2); (—3; —2).

Иногда для решения системы уравнений утверждение 6 надо применить не один раз, а несколько раз. Например, так надо поступить при решении системы уравнений

$$\begin{cases} x^3-y^3=19(x-y), \\ x^3+y^3=7(x+y). \end{cases} \tag{25}$$

Перепишем эту систему в следующем равносильном виде:

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2-19)=0, \\ (x+y)(x^2-xy+y^2-\ \ 7)=0. \end{cases}$$

На основании утверждения 6 эта система равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} x-y=0, \\ (x+y)(x^2-xy+y^2-7)=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+xy+y^2-19=0, \\ (x+y)(x^2-xy+y^2-7)=0. \end{cases}$$

Применяя к каждой системе опять утверждение 6, получим, что исходная система уравнений (25) равносильна совокупности систем уравнений

$$\begin{cases} x-y=0, \\ x+y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=0, \\ x^2-xy+y^2-7=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+xy+y^2-19=0, \\ x+y=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2-19=0, \\ x^2-xy+y^2-7=0. \end{cases}$$

Первые три системы легко решаются способом подстановки, а четвертая система уже была решена выше. Собирая вместе решения всех этих систем, получаем, что исходная система (25) имеет только девять решений: (0, 0); $(\sqrt{7}, \sqrt{7})$; $(-\sqrt{7}, -\sqrt{7})$; $(-\sqrt{19}, \sqrt{19})$; $(\sqrt{19}, -\sqrt{19})$; (2, 3); (—2, —3); (3, 2); (—3, —2).

Отметим, что обычно для решения системы приходится применять несколько способов.

Системы уравнений с несколькими неизвестными. На практике приходится решать системы уравнений не только с двумя неизвестными, но и с большим количеством неизвестных: с тремя, четырьмя и т. д. Поэтому приведем соответствующие определения и рассмотрим необходимые для решения таких систем утверждения.

Пусть надо решить уравнение

$$R(x, y, z, \ldots, t)=Q(x, y, z, \ldots, t), \tag{26}$$

где $R(x, y, z, \ldots, t)$ и $Q(x, y, z, \ldots, t)$ — многочлены, целые (см. гл. II) относительно букв $x, y, z, \ldots, t$. Тогда говорят, что дано *алгебраическое уравнение с неизвестными* $x, y, z, \ldots, t$. Заметим, что неизвестные $x, y, z, \ldots, t$ представляют собой множество всех неизвестных, содержащихся как в левой, так и в правой частях уравнения (26). Например, уравнение $4x^2 = yz+5y^2$ есть уравнение относительно неизвестных x, y, z, ибо многочлены, стоящие в левой и правой частях этого уравнения, могут быть записаны в виде $R(x, y, z)=4x^2=4x^2+0\cdot y+0\cdot z$, $Q(x, y, z)=yz+5y^2=0\cdot x+yz+5y^2$, откуда видно, что эти многочлены действительно целые относительно букв x, y, z.

Упорядоченный набор $(x, y, z, \ldots, t)$ называется *набором неизвестных* уравнения (26). ОДЗ уравнения (26) есть множество всех числовых наборов, соответствующих набору неизвестных $(x, y, z, \ldots, t)$, у каждого из которых на месте каждого неизвестного может стоять любое действительное число.

Числовой набор $(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)$, соответствующий набору неизвестных $(x, y, z, \ldots, t)$, называется *решением* уравнения (26), если равны числовые значения многочленов R и Q, соответствующие этому числовому набору, т. е. если справедливо числовое равенство $R(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)=Q(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)$.

Решить уравнение (26) — это значит найти все его решения, т. е. найти все числовые наборы, каждый из которых обращает уравнение (26) в верное числовое равенство.

Пусть даны два алгебраических уравнения с одними и теми же неизвестными:

$$R(x, y, z, \ldots, t)=Q(x, y, z, \ldots, t)$$

и

$$T(x, y, z, \ldots, t)=S(x, y, z, \ldots, t).$$

Эти уравнения называются *равносильными*, если любое решение первого уравнения является решением второго уравнения и, наоборот, любое решение второго уравнения является решением первого уравнения. Замена одного уравнения равносильным ему другим уравнением называется *равносильным переходом* от первого уравнения ко второму.

Справедливы следующие утверждения:

1. *Уравнения* $R(x, y, z, \ldots, t)=Q(x, y, z, \ldots, t)$ *и* $R(x, y, z, \ldots, t)-Q(x, y, z, \ldots, t)=0$ — *равносильны.*

2. *Уравнения* $R(x, y, z, \ldots, t)=Q(x, y, z, \ldots, t)$ *и* $R(x, y, z, \ldots, t)+S(x, y, z, \ldots, t)=Q(x, y, z, \ldots, t)+S(x, y, z, \ldots, t)$,

где $S(x, y, z, \ldots, t)$ — *многочлен, целый относительно букв* $x, y, z, \ldots, t$, *равносильны.*

3. *Уравнения* $R(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$ *и* $\alpha R(x, y, z, \ldots, t) = \alpha Q(x, y, z, \ldots, t)$ *равносильны для любого, отличного от нуля действительного числа* α.

4. *Пусть известно, что справедливо тождественное равенство* $R(x, y, z, \ldots, t) = T(x, y, z, \ldots, t)$; *тогда уравнения* $R(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$ *и* $T(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$ — *равносильны.*

Справедливость этих утверждений доказывается аналогично доказательству соответствующих утверждений § 1 и потому опускается.

Из утверждений 1 и 4 вытекает, что каждое алгебраическое уравнение можно привести к виду $P(x, y, z, \ldots, t) = 0$, поэтому можно рассматривать лишь уравнения вида

$$P(x, y, z, \ldots, t) = 0, \tag{27}$$

где $P(x, y, z, \ldots, t)$ — многочлен, целый относительно букв $x, y, z, \ldots, t$.

Пусть даны многочлены $P_1(x, y, z, \ldots, t)$, $P_2(x, y, z, \ldots, t)$, ..., $P_m(x, y, z, \ldots, t)$, целые относительно букв $x, y, z, \ldots, t$. Говорят, что дана *совокупность* m алгебраических уравнений с неизвестными $x, y, z, \ldots, t$:

$$P_1(x, y, z, \ldots, t) = 0,\ P_2(x, y, z, \ldots, t) = 0,\ \ldots,\ P_m(x, y, z, \ldots, t) = 0, \tag{28}$$

если требуется найти все числовые наборы, соответствующие набору неизвестных $(x, y, z, \ldots, t)$, каждый из которых является решением хотя бы одного уравнения из совокупности (28). Каждый такой набор называется *решением совокупности* (28). Таким образом, решить совокупность уравнений (28) — это значит решить каждое уравнение $P_i(x, y, z, \ldots, t) = 0$, где $i = 1, 2, \ldots, m$, а затем взять объединение этих решений.

Уравнение (27) *равносильно* совокупности уравнений (28), если любое решение уравнения (27) является решением совокупности (28), а любое решение совокупности (28) является решением уравнения (27). Замена уравнения (27) равносильной совокупностью (28) называется *равносильным переходом* от уравнения (27) к совокупности (28).

Пусть даны многочлены $P_1(x, y, z, \ldots, t)$, $P_2(x, y, z, \ldots, t)$, ..., $P_m(x, y, z, \ldots, t)$, целые относительно букв $x, y, z, \ldots, t$. Говорят, что дана система m алгебраических уравнений с неизвестными $x, y, z, \ldots, t$:

$$\left\{\begin{array}{l} P_1(x, y, z, \ldots, t) = 0, \\ P_2(x, y, z, \ldots, t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t) = 0, \end{array}\right. \tag{29}$$

если требуется найти все числовые наборы, соответствующие набору неизвестных $(x, y, z, \ldots, t)$, каждый из которых является решением каждого из уравнений системы (29), т. е. если требуется найти все такие числовые наборы неизвестных $(x, y, z, \ldots, t)$, при подстановке каждого из которых во все уравнения системы (29) последние обращались бы в верные числовые равенства. Каждый такой числовой набор называется *решением системы* (29) (уравнения системы обычно записываются в столбик и объединяются фигурной скобкой).

Две системы алгебраических уравнений с одними и теми же неизвестными $x, y, z, \ldots, t$ называются *равносильными*, если любое решение первой системы является решением второй системы и, наоборот, любое решение второй системы является решением первой.

Говорят, что дана *совокупность* k алгебраических систем уравнений с неизвестными $x, y, z, \ldots, t$:

$$\begin{cases} P_{11}(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ P_{21}(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_{m1}(x, y, z, \ldots, t)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} P_{12}(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ P_{22}(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_{n2}(x, y, z, \ldots, t)=0, \end{cases} \ldots$$

$$\ldots, \begin{cases} P_{1k}(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ P_{2k}(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_{lk}(x, y, z, \ldots, t)=0, \end{cases} \tag{30}$$

если требуется найти все числовые наборы, каждый из которых является решением хотя бы одной из систем уравнений совокупности (30). Каждый такой набор называется *решением* совокупности систем уравнений (30). Система уравнений (29) *равносильна* совокупности систем уравнений (30), если любое решение системы уравнений (29) является решением совокупности систем уравнений (30), а любое решение совокупности систем уравнений (30) является решением системы уравнений (29).

Приведем некоторые утверждения о равносильности систем уравнений.

1. *Если изменить порядок следования уравнений системы* (29), *то полученная система равносильна системе* (29).

2. *Если одно из уравнений системы* (29) *заменить на равносильное уравнение, то полученная система равносильна системе* (29).

3. *Пусть в системе уравнений с неизвестными $x, y, z, \ldots, t$ первое уравнение записано в виде, где в левой части стоит одно из неизвестных, например x, в первой степени, а в правой части — многочлен, целый относительно других букв. Тогда говорят, что неизвестное x выражено из первого уравнения системы через другие неизвестные. Если неизвестное x выражено из первого уравнения системы через другие неизвестные, то, подставив в другие*

уравнения системы вместо x этот многочлен от других неизвестных, получим равносильную систему уравнений, т. е. равносильны две следующие системы:

$$\begin{cases} x=Q(y,\ z,\ \ldots,\ t), \\ P_2(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=Q(y,\ z,\ \ldots,\ t), \\ P_2[Q(y,z,\ldots,t),y,z,\ldots,t]=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m[Q(y,z,\ldots,t),y,z,\ldots,t]=0. \end{cases}$$

Заметим, что если во второй системе рассмотреть только уравнения $P_2=0$, $P_3=0$, $\ldots$, $P_m=0$, то они образуют систему уравнений с числом неизвестных меньшим, чем в первой системе.

4. *Если первое уравнение системы* (29) *заменить уравнением, равным сумме первого уравнения, умноженного на некоторое действительное число $\beta\neq 0$, и второго уравнения, умноженного на некоторое действительное число α, то полученная система уравнений равносильна системе уравнений* (29), *т. е. при любых действительных $\beta\neq 0$ и α две следующие системы уравнений равносильны:*

$$\begin{cases} P_1(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0, \\ P_2(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \beta P_1(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)+\alpha P_2(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0, \\ P_2(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0. \end{cases}$$

В качестве следствия утверждения 4 имеем утверждения:

5. *Если первое уравнение системы* (29) *заменить на сумму* (*или разность*) *первого и второго уравнений системы, то полученная система уравнений будет равносильна системе уравнений* (29).

6. *Если первое уравнение системы* (29) *равносильно совокупности уравнений $Q_1(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0$, $Q_2(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0$, $\ldots$ $\ldots$, $Q_k(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0$, то система* (29) *равносильна следующей совокупности систем уравнений:*

$$\begin{cases} Q_1(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0, \\ P_2(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} Q_2(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0, \\ P_2(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0, \ \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0, \end{cases}$$

$$\ldots, \begin{cases} Q_k(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0, \\ P_2(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0. \end{cases} \qquad (31)$$

Если другие уравнения системы (29) равносильны своим совокупностям уравнений, то к каждой системе совокупности (31) применимо утверждение 6 и каждая система совокупности (31) может быть заменена своей совокупностью систем уравнений. Полная совокупность систем уравнений, равносильная системе (29), получается перебором всех логически возможных случаев.

Замечание. Системы линейных алгебраических уравнений подробно рассматриваются в гл. X.

Пример. Решим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x^2+y+z=2, \\ x+y^2+z=2, \\ x+y+z^2=2. \end{cases} \tag{32}$$

Первое уравнение заменим на разность первого и второго уравнений, второе уравнение заменим на разность второго и третьего уравнений. В результате по утверждению 5 получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x^2+y-x-y^2=0, \\ y^2+z-y-z^2=0, \\ x+y+z^2=2. \end{cases} \tag{33}$$

Многочлены, стоящие в левой части первого и второго уравнений системы (33), можно разложить на множители:

$$x^2+y-x-y^2=(x-y)(x+y-1),$$
$$y^2+z-y-z^2=(y-z)(y+z-1).$$

В результате, по утверждению 2, система (33) равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} (x-y)(x+y-1)=0, \\ (y-z)(y+z-1)=0, \\ x+y+z^2=2. \end{cases} \tag{34}$$

Первое уравнение системы (34) равносильно совокупности уравнений

$$x-y=0, \qquad x+y-1=0.$$

Следовательно, по утверждению 6, система (34) равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} x-y=0, \\ (y-z)(y+z-1)=0, \\ x+y+z^2=2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-1=0, \\ (y-z)(y+z-1)=0, \\ x+y+z^2=2. \end{cases} \tag{35}$$

Второе уравнение в системах совокупности (35) равносильно совокупности уравнений

$$y-z=0, \qquad y+z-1=0.$$

Следовательно, первая система совокупности (35) равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} x-y=0, \\ y-z=0, \\ x+y+z^2=2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=0, \\ y+z-1=0, \\ x+y+z^2=2. \end{cases}$$

Вторая система совокупности (35) равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} x+y-1=0, \\ y-z=0, \\ x+y+z^2=2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-1=0, \\ y+z-1=0, \\ x+y+z^2=2. \end{cases}$$

Таким образом, совокупность систем (35), а значит, и равносильная ей система (32), равносильна следующей совокупности систем уравнений

$$\begin{cases} x-y=0, \\ y-z=0, \\ x+y+z^2=2, \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=0, \\ y+z-1=0, \\ x+y+z^2=2, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-1=0, \\ y-z=0, \\ x+y+z^2=2, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-1=0, \\ y+z-1=0, \\ x+y+z^2=2. \end{cases}$$

Все системы этой совокупности легко решаются методом подстановок. Первая система имеет только два решения (x, y, z): $(-1+\sqrt{3}; -1+\sqrt{3}; -1+\sqrt{3})$; $(-1-\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}; -1-\sqrt{3})$; вторая — только два решения (x, y, z): $(-1; -1; 2)$; $(1; 1; 0)$; третья — только два решения (x, y, z): $(0; 1; 1)$; $(2; -1; -1)$; четвертая — только два решения (x, y, z): $(1, 0; 1)$; $(-1; 2; -1)$. Следовательно, исходная система (32) имеет только 8 решений (x, y, z): $(-1+\sqrt{3}; -1+\sqrt{3}; -1+\sqrt{3})$; $(-1-\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}; -1-\sqrt{3})$; $(0; 1; 1)$; $(1; 0; 1)$; $(1; 1; 0)$; $(-1; -1; 2)$; $(-1; 2, -1)$; $(2; -1; -1)$.

УПРАЖНЕНИЯ

Применяя способ выделения полного квадрата, записать в виде алгебраической суммы квадратов многочленов следующий многочлен (1—14):

1. $6x^2+7x-3$. **2.** $23+31x-5x^2$. **3.** $27x^2-15x-112$.

4. $x^2-6(x+12)$. **5.** $x(x+34)+289$. **6.** $-\frac{1}{2}x^2+2x+1$.

7. $\frac{1}{3}x^2-4x+2$. **8.** $9-3x-\frac{x^2}{4}$. **9.** $4x^2-4x+1$.

10. $4x^4+3x^2+1$. 11. $x^4-4x^3+6x^2-4x+1$.

12. $x^4+2x^3-x+\frac{1}{4}$. 13. $x^4-2x^3+\frac{3x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}$.

14. $16x^6+16x^7-4x^8-4x^9+x^{10}$.

Следующий многочлен записать в виде квадратного трехчлена относительно x и найти его дискриминант (15—33):

15. $3-\frac{4x}{15}+4x^2$. 16. $23x-120-x^2$.

17. $13x-11-8x(1+x)$. 18. $x(22+x)-2(x-3)$.

19. $4+x^2+2(4x+6)$. 20. $(x-1)(3-2x)-3x^2+2$.

21. $(2x-3)(3x+1)-(x-11)$. 22. $3(x+1)(2x+3)-(x-1)^2$.

23. $8x-(4x+3)(x-2)-x(2x-1)$. 24. $x^2-(x+2)(3-x)-2x-8$.

25. $5(4x^2+4)-3(x-1)+4(x+1)$. 26. $\frac{1}{3}(1-x)(2-x)-\frac{x}{2}$.

27. $\frac{1}{6}(2x+9)-\frac{1}{10}(x^2-2x)$. 28. $3+\frac{(3+1)(x-2)}{3}-\frac{x^2}{4}$.

29. $2mx-mn-nx+2x^2$. 30. $x^2+2a(b-x)+3bx$.

31. $x^2-b(2x-b)-4b^2$. 32. $5a(x-a)+8a(x+2a)-x(x-a)+2a(x-a)$.

33. $(x-3)(3x-a)-(x-2a)(2x-3)$.

Принадлежит ли множество $\{1;\ -2\}$ множеству всех решений следующего уравнения (34—41):

34. $2x+1=3(x-2)-(x-7)$; 35. $(x-1)(x+2)=0$;

36. $2x+x^2-3=0$; 37. $x^6+7x^3=8$;

38. $4+x^4=5x^2$; 39. $x^3+2x(1-x)=x^2$;

40. $x^2+3x(x-3)=7x-9$; 41. $(x^2+3x-5)(x^2+3x+3)+7=0$?

Равносильны ли два следующих уравнения (42—54):

42. $2x+1=3$ и $2x=2$; 43. $\frac{7x+5}{2}=9{,}5$ и $x(x-1)=2$;

44. $x^2=4$ и $x^4-16=0$; 45. $x^2+1=0$ и $x^4+1=0$;

46. $9x(2x-3)=26$ и $(6x-13)(3x+2)=0$;

47. $(x-2)(3+4x)=2x^2$ и $\left(x+\frac{\sqrt{73}-5}{4}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{73}}{4}\right)=0$;

48. $(x+4)=0$ и $(x+4)(x^2+4x+100)=0$;

49. $x-12=17-2x$ и $(x-12)^2=(17-2x)^2$;

50. $x^2=6-x$ и $x^2(x-2)=(6-x)(x-2)$;

51. $x^2+6=5x$ и $(x^2+6)(x+4)=5x(x+4)$;

52. $3=2x-x^2$ и $3+(x^2+5)=2x-x^2+(x^2+5)$;

53. $\frac{x}{7}(x-4)=0$ и $2(x+1)(x+3)+8=(2x+1)(x+5)$;

54. $(3x+2)(2x-7)=6(x+2)^2+7$ и $3[5-2(x^2-2x+10)]=5x$?

Равносильны ли следующие уравнение и совокупность уравнений (55—72):

	Уравнение	Совокупность уравнений
55.	$3x-4-\frac{4(7x+9)}{15}=\frac{4}{5}\left(6+\frac{x-1}{3}\right)$	$13x-92=0;\quad x=7\frac{1}{13};$
56.	$\frac{1}{6}(2x+9)-\frac{1}{10}(x^2-1)=$ $=(x+5)(x+3)$	$7x=18-2x;\ 3x+6=0;$
57.	$\frac{(3x-2)(x-1)}{21}=1\frac{2}{7}+\frac{(x-3)^2}{7}$	$2x-5[7-(x-6)(x+1)]=28;$ $x=4;$
58.	$2x^2-32=x+4$	$x=-4;\ 3x+12=0;$
59.	$(3x-5)(2x-5)=x^2+2x+3$	$x-4=0;\quad x=\frac{7}{3};$
60.	$2x(x+7)=x^2+3x$	$5x^2=6x;\quad 5x+4=0;$
61.	$2x^2-15=x$	$2(x-1)=x+1;\quad 2x+5=0;$
62.	$15-11x=8x(1+x)$	$8x-5=0;\quad x+3=0;$
63.	$x^2+\frac{1}{8}=\frac{3x}{4}$	$2x=1;\quad 2x+6=2(x+4)+1;$
64.	$(x+1)(2x+3)=4x^2-22$	$0{,}3x-1{,}8=0{,}7-0{,}2x;\ 2x+5=0;$
65.	$(3x+5)^2+2x(3x+5)=0$	$3\{7-3[x-2(x-1)]\}=6x;\ 2x=5;$
66.	$\frac{7}{8}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{11}(3x-1)^2=0$	$3x-1=0;\ 6-(3-x)=4x-4;$
67.	$(x+1)^2+(x-2)^2=2(x^2-2{,}5)$	$15-x(8-x)=(x-5)^2;\ x=5;$
68.	$\frac{x(2x+1)}{14}-\frac{(x+2)(x-4)}{7}=1\frac{1}{2}$	$0{,}5x+\frac{x}{3}=x-3;\ 2(x-5)^2=0;$
69.	$\frac{3}{5}(2x-7)=\frac{2}{3}(x-8)^2$	$\frac{x}{3}-0{,}25x=1\frac{1}{2};\quad 2x-\frac{1}{3}=0;$
70.	$3(x-9)^2-2(x-9)-16=0$	$\frac{x}{3}-\frac{3}{5}\left(x+\frac{4}{3}\right)=\frac{13}{2};$ $x^2-14x+49=0;$
71.	$3x(x-2)-(x+1)(x-13)=0$	$x^2+7=0;\ 13x^2-14x+9=0;$
72.	$4(2x-3)^2-4(2x-3)+1=0$	$\sqrt{3}x^2-x+2=0;$ $\frac{3(2x-7)(x^2+1)}{4}=0.$

Решить следующее уравнение (73—123):

73. $5-4(x-3)=x-2(x-1)$.

74. $4(3+x)-3(2x-5)=6-x-2(3-x)$.

75. $3\{15-2[x-2(x-4)]-x\}=5x-20$.

76. $6-\frac{x-1}{2}=\frac{3-x}{4}+\frac{x-2}{3}$. 77. $\frac{2x-5}{11}-\frac{x-2}{7}=5x-17\frac{1}{2}$.

78. $0{,}2(x-1)+0{,}5(3x-9)=\frac{x}{3}-2$. 79. $\frac{0{,}75-x}{3}-\frac{0{,}47+2x}{5}=\frac{4{,}4x}{1{,}5}$.

80. $(x+2)(x-1)=0$. 81. $2x(3x-4)=0$.
82. $(3x+4)(5-2x)=0$.
83. $x^2-7x+6=0$. 84. $2x^2-5x+12=0$.
85. $3x^2-7x-1=0$. 86. $2x(x+6)=x^2-3x$.
87. $3(x^2+20)=21x$. 88. $x+2x(x-1)=5$.
89. $(2x+5)^2+2x(3x+5)=0$. 90. $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{3}+2\right)-1=0$.
91. $7(x^2+5x+8)=3(x+1)(x-2)$.
92. $3(x^2-3x+1)-2x(x-2)=20-3(x+1)(2x-4)$.
93. $2(x-3)-3(x^2-2x-4)=4x^2-(3-5x)(x-1)-34$.
94. $3(x-2)^2-\frac{3(2-x^2)}{4}=x-1\frac{1}{2}$.
95. $(x+2)(x-3)+x(x+4)=(x-3)(x-7)+x^2$.
96. $(x+1)(x+2)+9+(x+2)(x+3)=(x+3)(x+4)$.
97. $(2+0,5x)\left(\frac{x}{3}-1\right)+3\frac{1}{2}=0,2\left(\frac{x}{2}+2\frac{1}{2}\right)$.
98. $18+(x+4)(x-3)(x-1)=(x+1)(x+3)(x+2)$.
99. $(1-x)(x+2)(x+3)=9x^2-x^3+4(1-7x)$.
100. $x^2+4x-8\sqrt{8}\cdot x+20=0$. 101. $x(x-3)-2x(\sqrt{2}\cdot x-3)=0$.
102. $(x+1)(x-3)-2(x+\sqrt{7})=0$.
103. $3x^2-2x(x-\pi)+(x+2)(3x-1)=0$.
104. $(\sqrt{2}-x)x-(\sqrt{3}x+4)(x+2)=0$. 105. $(x+2)^2=2(x+2)+3$.
106. $(x^2+5x-7)(2x^2+10x-11)+1=0$. 107. $x^6-3x^3+2=0$.
108. $x^4+2x^2-8=0$. 109. $x^9-2x^5+x=0$.
110. $(x^4+x^2+1)(x^4+x^2+2)=12$. 111. $(x^2+2x+1)(x^2-5x+7)=0$.
112. $(4x^3-19x^2+12x)(2x^2-7x+6)=0$.
113. $(x^2-1)(x^2-5x-6)=0$. 114. $3x^3-3x(x-1)=7x^2$.
115. $x^3-x^2+x-1=0$. 116. $x^3+x-2=0$.
117. $x^3-2(x+1)=x$. 118. $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$.
119. $(x+9)(x-1)(2x^2+16x-20)=12$.
120. $(x^2-5x+7)^2-2(x-2)(x-3)=1$.
121. $x^4+x^3+x^2+x+1=0$. 122. $x^4-x(x^2-x+1)+1=0$.
123. $x^5+x^3=x^4$.

Принадлежит ли множество $\{-2;\ 1\}$ множеству всех решений следующего неравенства (124—134):

124. $7x-3(2x+3)>2(x-4)$; 125. $\frac{x+1}{4}<2\frac{1}{2}-\frac{1-2x}{3}$;
126. $\frac{6-5x}{5}+\frac{3x-1}{2}>5-x$; 127. $\frac{7x}{4}<0,3(x+7)+2\frac{1}{5}$;
128. $x(x-1)-6>5x-x^2$; 129. $x^2-4x+3<0$;
130. $\frac{1}{4}x^2-3(x+5)<0$; 131. $9x^2-6x+1>0$;
132. $x(x-3)-2<3x-(x^2+2)$; 133. $4x^2+6\left(x-\frac{3}{2}\right)>2$;
134. $(x-2)(3x+4)(x^2+1)>0$?

Равносильны ли два следующих неравенства (135—153):
135. $x^2+4x+12>0$ и $x-x^2-3>0$;

136. $(2x-5)(2x-1)<0$ и $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$;

137. $(x-1)^2>0$ и $1-x<0$;

138. $4x-3>1$ и $(4x-3)(x+2)>x+2$;

139. $2(5x-4)<4$ и $4(5x-4)^2\leqslant 16$;

140. $x+3>0$ и $x^3>-3x^2$;

141. $x-x^2\leqslant 2$ и $(x-x^2)(x+4x^2+5)\leqslant 2(x+4x^2+5)$;

142. $2x-4>3$ и $2x-4+2(x+3)>3+2(x+3)$;

143. $x^2-5x+6\leqslant 0$ и $1\leqslant 2x+7\leqslant 3$;

144. $x^2-x-6\geqslant 3x-1$ и $3\leqslant 5-2x\leqslant -5$;

145. $x+4<3x-2$ и $x(x+1)^2>3(x+1)^2$;

146. $\frac{x}{2}-3\left[2x-\frac{1-2(x-3)}{2}\right]>x+5\frac{1}{2}$ и $x>3$;

147. $6x^2-29x+30<0$ и $-3x^2+5x+2>0$;

148. $(x^2-4)(x+1)>0$ и $x^2-2x-3>0$;

149. $x^2-x+1>0$ и $4x^2+x+3>0$;

150. $x^3-1<0$ и $x<1$;

151. $x\geqslant -1$ и $x^3+1\leqslant 0$;

152. $x^8-x^5+x^2-x+1\geqslant 0$ и $x^2-3x+10\geqslant 0$;

153. $2x^2-1\leqslant x^4$ и $4x^4-4x^3+5x^2-4x+1\geqslant 0$?

Решить следующее неравенство (154—205):

154. $21-7(2x-9)>3x$. 155. $5(3-x)-3(x-4)<16x$.

156. $2(x-1)-3(2x-3)>6-3(x+5)$.

157. $\frac{1}{3}(3-2x)-\frac{1}{6}(4-5x)>\frac{1}{5}(x+4)-16$.

158. $\frac{x}{3}-\frac{(4x-7)(3x-5)}{15}<\frac{2}{5}-\frac{(4x-9)(x-1)}{5}$.

159. $\frac{1}{6}(2x+24)-0{,}1(x+1)>\frac{2x}{5}-0{,}3(2-3x)$.

160. $\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)<\frac{3}{5}\left(x+\frac{4}{3}\right)+\frac{7}{2}$.

161. $3x-4-\frac{4(5x-9)}{15}>\frac{4}{5}\left(6-\frac{x-2}{3}\right)$.

162. $(3x-2)(2x-3)-(2x-1)(x-2)+6x>(2x-3)^2$.

163. $\frac{(3x-4)(3x+1)}{3}-\frac{(8x-11)(x+2)}{4}<\frac{(6x-1)(2x-3)}{12}$.

164. $\frac{(3x-2)(x-1)}{21}<1\frac{2}{7}+\frac{(x-3)^2}{7}-2(3x+1)$.

165. $(2x+3)(x-7)-(23x-11)\leqslant 2(x+8)(x-2)$.

166. $\frac{3}{5}(2x-7)-\frac{2}{3}(x-8)-4\geqslant\frac{4x+1}{15}+\frac{4}{15}(x-11)$.

167. $x^2-x-2<0$. 168. $3x^2-5x-8\leqslant 0$.

169. $15x^2-77x+10>0$. 170. $3x^2+13x-30\geqslant 0$.

171. $16x-15x(x+1)<0$. 172. $21-22x-24x^2\leqslant 0$.

173. $(x-4)^2(x+5)\leqslant 0$. 174. $\frac{(2-x)x}{2}>x+\frac{1+3x}{4}$.

175. $(x-3)\geqslant(x-3)^2$. 176. $8x(x+2)+3(x+1)>-1$.

177. $(2x+2)(x-1)<5x+6$.

178. $\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2} > x(x-1)+4.$

179. $\sqrt{6}x^2-2\sqrt{2}x-\sqrt{3}x+2 \leqslant 0.$

180. $(x^2-16x)^2-63 \geqslant 2(x^2-16x).$

181. $x^2+2x+7 \geqslant (4+2x+x^2)(3+2x+x^2).$

182. $(3x^2-4x+1)(4x^4-5x^3+x^2) \leqslant 0.$

183. $x^3+2x^2 > 6+3x.$ 184. $(x+2)(x-1)(x-3)^2 \leqslant 0.$

185. $(x+4)(x+2)^3(x-1)(2-x)^2(x^2-3x+5) > 0.$

186. $(x^2-4)(x^2-4x+4)(x^2-x-2) \leqslant 0.$

187. $(9-x^2)(x^2-2x-3)(x+8) \geqslant 0.$

188. $(x^3-2x^2-3x+4)(x^2-3x+7) > 0.$

189. $(27-37x^2-16x^4)(x^2+x+1) < 0.$

190. $(x^2-4x-12)(x^3-7x-6) \geqslant 0.$ 191. $(x^2+10x+25)(25-x^2) > 0.$

192. $(2x^2-3x-14)(2x^2+11x+14) < 0.$

193. $(3x^3-24)(2x^2+6x-20) \geqslant 0.$

194. $(x^2+4x-45)(3x^2-14x-5)(x+1) \leqslant 0.$

195. $(2x^2+2x)(x^2-2x+1)(3x^3+7x-10) > 0.$

196. $(6x^3-x^2+16)(8x^3-14x^2+19x-4) < 0.$

197. $x(x^2+3x-4) > 7x^3-18x^2+6x+5.$

198. $4x^3+3x^2-5(4x+3) > 2x^3-5x(2+5x-x^3).$

199. $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10 \geqslant 0.$

200. $(x^2-3x+2)(x^2-5x+6)(1-x^2) \leqslant 0.$

201. $(5x^2-x-4)(x^3-1)(x+10) > 0.$

202. $3(x^2+3x+2) \geqslant (x+1)(x+2)(x+3).$

203. $(x^2-16)(3x-9) \leqslant (x^2-8x+16)(2x+8).$

204. $(x^2+4x)(x^2+x-6) > (x^3-9x)(x^2+2x-8).$

205. $(3x^2-7x+2)(x^2-9) < (2x^2-5x-3)(9x^2-6x+1).$

В задачах №№ 206—213 под числовым набором $(a;\ b)$ понимается числовой набор, соответствующий набору неизвестных $(x;\ y)$ при $x=a$ и $y=b$.

Принадлежит ли множество $\{(2;\ 1)\}$ множеству всех решений следующей системы уравнений (206—209):

206. $\begin{cases} 7x+5y=1, \\ 5x+7y=11; \end{cases}$ 207. $\begin{cases} 95y-49=23x, \\ 76y=102-13x; \end{cases}$

208. $\begin{cases} x+2y=4, \\ 2x+3y=7; \end{cases}$ 209. $\begin{cases} 14x+9y=9, \\ 9x+4y=4? \end{cases}$

Является ли множество $\{(2;\ 3),\ (3;\ 2)\}$ множеством всех решений следующей системы уравнений (210—213):

210. $\begin{cases} x+y=5, \\ x^3+y^3=35; \end{cases}$ 211. $\begin{cases} x+y=5, \\ x^2y^2+24=10xy; \end{cases}$

212. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=19, \\ x^4+x^2y^2+y^4=133; \end{cases}$ 213. $\begin{cases} x^2+4y^2+80=15x+30y, \\ xy=6? \end{cases}$

В задачах №№ 214—221 под числовым набором $(a,\ b,\ c)$ понимается числовой набор, соответствующий набору неизвестных $(x,\ y,\ z)$ при $x=a$, $y=b$, $z=c$.

Принадлежит ли множество $\{(3;\ 2;\ 1)\}$ множеству всех решений следующей системы уравнений (214—217):

214. $\begin{cases} 2x+y+z=8, \\ 5x-3y+2z=3, \\ 7x+y+3z=20; \end{cases}$ 215. $\begin{cases} 5x-3z=4(1+y), \\ 2(z+2x)=8+3y, \\ 2y+3x=14-z; \end{cases}$

216. $\begin{cases} x^2-y^2+z^2=6, \\ 2yx-zx+2xy=13, \\ x-y+z=2; \end{cases}$ 217. $\begin{cases} (x-1)(y+5)=14, \\ (y+5)(z+8)=63, \\ (z+8)(x-1)=18? \end{cases}$

Является ли множество $\{(3;\ 4;\ 1),\ (-3;\ -4;\ -1)\}$ множеством всех решений следующей системы уравнений (218—221):

218. $\begin{cases} x^2yz=36, \\ xy^2z=48, \\ xyz^2=12; \end{cases}$ 219. $\begin{cases} x^2+xy+xz=25, \\ xy+y^2+yz=32, \\ xz+yz+z^2=8; \end{cases}$

220. $\begin{cases} xy^2z^2=36, \\ x^2yz^2=144, \\ x^2y^2z=48; \end{cases}$ 221. $\begin{cases} xy+2x+y=24, \\ yz+3y+2z=15, \\ zx+x+3z=9? \end{cases}$

Равносильны ли следующие две системы уравнений (222—229):

222. $\begin{cases} 3x+2y=13, \\ 3x-2y=5 \end{cases}$ и $\begin{cases} \dfrac{3x+1}{7}-\dfrac{2x-y}{2}=\dfrac{2y-x}{8}, \\ \dfrac{4x-2}{3}-\dfrac{4y-5x}{2}=\dfrac{x+y}{5}; \end{cases}$

223. $\begin{cases} x+y=11, \\ xy=12 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=11, \\ x^2+xy+y^2=91; \end{cases}$

224. $\begin{cases} x+5y=26, \\ x^2-25y^2=156 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+2y=1, \\ x^3+8y^3=127; \end{cases}$

225. $\begin{cases} 7x-4y=23, \\ 49x^2-16y^2=1081 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=5, \\ 4(x^2+y^2)=17xy; \end{cases}$

226. $\begin{cases} y-x=2, \\ 35x^2+35y^2=74xy \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19, \\ x^4+x^2y^2+y^4=741; \end{cases}$

227. $\begin{cases} x+y=6, \\ y+z=10, \\ z+x=20 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x-5y+6z=3, \\ 8x-7y-3z=9, \\ 7x-8y+9z=6; \end{cases}$

228. $\begin{cases} yz+zx=16, \\ zx+yx=25, \\ xy+zy=-39 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2+xy+xz=48, \\ xy+y^2+yz=12, \\ xz+yz+z^2=84; \end{cases}$

229. $\begin{cases} y+x-z=14, \\ y^2+z^2-x^2=46, \\ yz=9 \end{cases}$ и $\begin{cases} (x+y)^2-z^2=65, \\ x^2-(y+z)^2=13, \\ x+y-z=5? \end{cases}$

Решить следующую систему уравнений (230—273):

230. $\begin{cases} 4x+3y=21, \\ 4x-3y=3. \end{cases}$ 231. $\begin{cases} 13+2y=9x, \\ 7x=3y. \end{cases}$

232. $\begin{cases} 9x+3y-2=0, \\ 10x+6y-4=0. \end{cases}$ 233. $\begin{cases} 7x=8-7y, \\ 16y+16x-8=0. \end{cases}$

234. $\begin{cases} 5x-3=-2y, \\ 6y+15x=9. \end{cases}$ 235. $\begin{cases} x+y=12, \\ 2xy=9(x-y). \end{cases}$

236. $\begin{cases} x+y=5, \\ x^2y^2-10xy+24=0. \end{cases}$ 237. $\begin{cases} x+3y=10, \\ x^3+27y^2=280. \end{cases}$

238. $\begin{cases} x+y=11, \\ x^3+y^3=341. \end{cases}$ 239. $\begin{cases} x-y=2, \\ x^4=272-y^4. \end{cases}$

240. $\begin{cases} x+y=3, \\ x^5+y^5=1023. \end{cases}$ 241. $\begin{cases} x-y=2, \\ (x^2+y^2)(x^3-y^3)=260. \end{cases}$

242. $\begin{cases} x+3xy=35, \\ y=22-2xy. \end{cases}$ 243. $\begin{cases} x^3=5x+y, \\ y^3=x+5y. \end{cases}$

244. $\begin{cases} xy=35, \\ 2(x+y)^2+324=51(x+y). \end{cases}$ 245. $\begin{cases} xy=72, \\ x^2+y^2=145. \end{cases}$

246. $\begin{cases} x^2+xy=210, \\ y^2=231-xy. \end{cases}$ 247. $\begin{cases} (x-y)^2=3-2x-2y, \\ y(x-y+1)=x(y-x+1). \end{cases}$

248. $\begin{cases} 3x^2+xy=2x+6, \\ 2y=y^2+3xy+3. \end{cases}$ 249. $\begin{cases} x^2-3y^2=3y-x-30, \\ x^2+y^2+x+y=18. \end{cases}$

250. $\begin{cases} x^2+2xy+10y^2=145, \\ xy+y^2=24. \end{cases}$ 251. $\begin{cases} x^2+4y^2=5xy, \\ 2x^2=y^2+31. \end{cases}$

252. $\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ x^3-y^3=8(x-y). \end{cases}$ 253. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=37, \\ x^3-y^3=37. \end{cases}$

254. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=39, \\ x^3+y^3=351. \end{cases}$ 255. $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ (x+y)(y^3+x^3)=19. \end{cases}$

256. $\begin{cases} x^2y+xy^2=120, \\ x^3+y^3=152. \end{cases}$ 257. $\begin{cases} x^4+y^4-x^2y^2=5, \\ x^2-y^2-xy=1. \end{cases}$

258. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=19, \\ x^4+x^2y^2+y^4=133. \end{cases}$ 259. $\begin{cases} 10x-9z=19, \\ 8x-y=10, \\ y-12z=10. \end{cases}$

260. $\begin{cases} 5x-4y+z=3, \\ 3x+y-2z=31, \\ 8x-3y-z=1. \end{cases}$ 261. $\begin{cases} 2x-y=z+12, \\ 3z+3y=6x-36, \\ 2(y+z)=4(x-6). \end{cases}$

262. $\begin{cases} x+y-z=1, \\ y+z-x=1, \\ x+z-y=1. \end{cases}$ 263. $\begin{cases} 4x-2y=7x, \\ y+z=x, \\ y^2-4=8x-3z^2. \end{cases}$

264. $\begin{cases} x+y+z=19, \\ x^2+y^2+z^2=91, \\ y^2=xz. \end{cases}$ 265. $\begin{cases} x-y+z=2, \\ x^2+z^2=y^2+6, \\ 2(xy+yz)=13+zx. \end{cases}$

266. $\begin{cases} xy+2x+y=7, \\ yz+3y+2z=12, \\ zx+z+3x=15. \end{cases}$ 267. $\begin{cases} xy+yz=10, \\ yz+zx=12, \\ zx+yz=10. \end{cases}$

268. $\begin{cases} (x+y)(x+z)=63, \\ (y+z)(y+x)=42, \\ (z+x)(z+y)=54. \end{cases}$ 269. $\begin{cases} x(x+y+z)=42, \\ y(x+y+z)=70, \\ z(x+y+z)=84. \end{cases}$

270. $\begin{cases} y+z=xyz, \\ z+x=xyz, \\ x+y=xyz. \end{cases}$ 271. $\begin{cases} x^2yz=6, \\ xy^2z=18, \\ xyz^2=12. \end{cases}$

272. $\begin{cases} x^2yz^2=144, \\ x^2y^2z=48, \\ xy^2z^2=36. \end{cases}$ 273. $\begin{cases} x^3y^2z=24, \\ xy^3z^2=18, \\ x^2yz^3=108. \end{cases}$

Какую фигуру на координатной плоскости задает следующее уравнение (274—281):

274. $y=1$; 275. $x-2y=0$; 276. $3x-2y=1$; 277. $xy=0$;

278. $(1-x)(x-y)=0$; 279. $x^2+y^2=5$; 280. $x^2+y^2=0$; 281. $x^2-y^2=0$?

Имеют ли общую точку следующие две прямые (282—284):

282. $x+2y=4$ и $2x+3y=7$;

283. $4x-y=3$ и $8x=2y+6$;

284. $2x-y-3=0$ и $2y+9=4x$?

Имеют ли общие точки следующие окружность и прямая (285—289):

285. $x^2+y^2=16$ и $2x+5=0$;

286. $x^2+y^2=25$ и $y=x$;

287. $x^2+y^2=49$ и $y=2x-3$;

288. $x^2+y^2=4$ и $y=7-x$;

289. $x^2+y^2=18$ и $y=x+3\sqrt{2}$?

Глава IV. СТЕПЕНИ И ЛОГАРИФМЫ

§ 1. Степень с целым показателем

В первой главе было определено действие возведения любого действительного числа в степень с натуральным показателем. В этом параграфе повторяется это определение, а также приводятся определения возведения числа в нулевую степень и в степень с отрицательным целым показателем.

Пусть a — любое действительное число, n — любое натуральное число, тогда *степенью числа a с натуральным показателем n* (*или n-й степенью числа a*) называется число, записываемое как a^n и определяемое по правилу

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{aa\ldots a}_{n\text{ раз}}, & \text{если } n \geqslant 2; \\ a, & \text{если } n = 1. \end{cases}$$

Пусть a — любое отличное от нуля действительное число, тогда *нулевой степенью этого числа* называется число единица, т. е. по определению $a^0 = 1$ для любого отличного от нуля действительного числа a.

Нулевая степень числа нуль не определяется, и символ 0^0 считается лишенным смысла.

Пусть a — любое отличное от нуля действительное число, n — любое натуральное число, тогда *степенью числа a с целым отрицательным показателем* $(-n)$ называется число $\frac{1}{a^n}$, т. е. по определению $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ для любого отличного от нуля действительного числа a и любого целого отрицательного числа $(-n)$.

Целая отрицательная степень числа нуль не определяется, и символ 0^{-n} считается лишенным смысла.

Итак, натуральная (n-я) степень определяется для любого действительного числа, а нулевая и целая отрицательная степени лишь для любого отличного от нуля действительного числа.

Если a — любое отличное от нуля действительное число, то можно дать определение степени с целым показателем, которое есть объединение предыдущих определений.

Пусть a — любое отличное от нуля действительное число, α — любое целое число, тогда *под числом* a^α понимают число, определяемое по правилу

$$a^\alpha = \begin{cases} a, & \text{если } \alpha = 1; \\ \underbrace{aa\ldots a}_{m \text{ раз}}, & \text{если } \alpha = m,\ m \text{ — натуральное число, } m \geqslant 2; \\ 1, & \text{если } \alpha = 0; \\ \dfrac{1}{a^n}, & \text{если } \alpha = -n,\ (-n) \text{ — целое отрицательное число;} \end{cases}$$

при этом число a^α *называется степенью с целым показателем*, число a — *основанием степени*, число α — *показателем степени*.

В первой главе были приведены основные свойства, которыми обладает действие возведения в степень с натуральным показателем. Для действия возведения в степень с целым показателем эти свойства также имеют место.

Именно, пусть a, b — любые, не равные нулю, действительные числа, α, β — любые целые числа, тогда:

а) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$; б) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$;

в) $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$; г) $a^\alpha : a^\beta = \dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$;

д) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

Д о к а ж е м справедливость этих свойств. Справедливость свойства а) при натуральном α ($\alpha = n$, $n \in N$) следует из основных законов сложения и умножения действительных чисел:

$$(ab)^\alpha = (ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\ldots(ab)}_{n \text{ раз}} = \underbrace{a\ldots a}_{n \text{ раз}}\underbrace{b\ldots b}_{n \text{ раз}} = a^n b^n = a^\alpha b^\alpha.$$

Пусть $\alpha = 0$, тогда $(ab)^\alpha = (ab)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 b^0 = a^\alpha b^\alpha$, т. е. $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$.

Пусть $\alpha = -m$ и m — натуральное число. По определению степени с отрицательным показателем $(ab)^\alpha = (ab)^{-m} = \dfrac{1}{(ab)^m} =$

по свойству степени с натуральным показателем $= \dfrac{1}{a^m b^m} =$

по свойству дробей $= \dfrac{1}{a^m} \cdot \dfrac{1}{b^m} =$

по определению степени с отрицательным показателем $= a^{-m} b^{-m} = a^\alpha b^\alpha$.

Следовательно, свойство а) справедливо.

Свойство б) доказывается аналогично.

Для доказательства свойства в) рассмотрим все шесть возможных случаев: 1) $\alpha = n$, $\beta = m$; 2) $\alpha = n$, $\beta = -m$; 3) $\alpha = -n$, $\beta = m$; 4) $\alpha = -n$, $\beta = -m$ (где n и m — любые натуральные числа); 5) α — любое целое число, $\beta = 0$; 6) $\alpha = 0$, β — любое целое число.

1. При $\alpha=n$, $\beta=m$ справедливость свойства в) следует из основных законов сложения и умножения действительных чисел:

$$a^\alpha a^\beta = a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \ldots a)}_{n \text{ раз}} \underbrace{(a \ldots a)}_{m \text{ раз}} = \underbrace{a \ldots a}_{(n+m) \text{ раз}} = a^{n+m} = a^{\alpha+\beta}.$$

2. Пусть $\alpha=n$, $\beta=-m$, где n и m — натуральные числа, тогда по определению степени с целым отрицательным показателем

$$a^\alpha a^\beta = a^n \cdot \frac{1}{a^m}.$$

Применяя правило умножения дробей, имеем $a^n \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{a^n}{a^m}$.

Пусть $n > m$, тогда, применяя свойство степени с натуральным показателем, получаем

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n : a^m = a^{n-m} = a^{n+(-m)} = a^{\alpha+\beta}.$$

Пусть $n=m$, тогда по определению степени с нулевым показателем получаем

$$\frac{a^n}{a^m} = 1 = a^0 = a^{n+(-m)} = a^{\alpha+\beta}.$$

Пусть $n < m$, тогда, применяя свойство степени с натуральным показателем и определение степени с целым отрицательным показателем, получаем

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^m \cdot \frac{1}{a^n}} = \frac{1}{a^m a^{-n}} = \frac{1}{a^{m-n}} = a^{-(m-n)} = a^{-m+n} = a^{n+(-m)} = a^{\alpha+\beta}.$$

3. Пусть $\alpha=-n$, $\beta=m$, где n и m — натуральные числа Этот случай аналогичен случаю $\alpha=n$, $\beta=-m$.

4. Пусть $\alpha=-n$, $\beta=-m$, где n, m — натуральные числа.

Тогда $a^\alpha a^\beta = a^{-n} a^{-m} =$

по определению степени с целым отрицательным показателем $= \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^m} =$

по правилу перемножения дробей $= \frac{1}{a^n a^m} =$

по свойству степени с натуральным показателем $= \frac{1}{a^{n+m}} =$

по определению степени с целым отрицательным показателем $= a^{-(n+m)} = a^{-n-m} = a^{(-n)+(-m)} = a^{\alpha+\beta}.$

5. Пусть α — любое целое число, $\beta=0$, тогда, применяя определение степени с нулевым показателем, получаем

$$a^\alpha a^\beta = a^\alpha \cdot 1 = a^\alpha = a^{\alpha+0} = a^{\alpha+\beta}.$$

6. Пусть $\alpha=0$, β — любое целое число, тогда, применяя определение степени с нулевым показателем, получаем

$$a^{\alpha}a^{\beta}=1\cdot a^{\beta}=a^{\beta}=a^{0+\beta}=a^{\alpha+\beta}.$$

Следовательно, свойство в) справедливо.

Для доказательства свойства г) при натуральных α, β ($\alpha=n$, $\beta=m$, $n\in N$, $m\in N$) рассмотрим три случая:

1. Если $n>m$, то $n=m+l$, где $l\in N$. Воспользуемся основными свойствами умножения и деления действительных чисел:

$$a^{\alpha}:a^{\beta}=a^{n}:a^{m}=\frac{a^{n}}{a^{m}}=\frac{\overbrace{(a\ldots a)}^{m\text{ раз}}\,\overbrace{(a\ldots a)}^{l\text{ раз}}}{\underbrace{a\ldots a}_{m\text{ раз}}}=a^{l}=a^{n-m}=a^{\alpha-\beta}.$$

2. Если $n=m$, то

$$a^{n}:a^{m}=\frac{a^{n}}{a^{m}}=\frac{\overbrace{a\ldots a}^{n\text{ раз}}}{\underbrace{a\ldots a}_{m\text{ раз}}}=1.$$

По определению $a^{0}=1$. Следовательно,

$$a^{\alpha}:a^{\beta}=a^{n}:a^{m}=a^{0}=a^{n-m}=a^{\alpha-\beta}.$$

3. Если $m>n$, то $m=n+k$, где $k\in N$. Воспользуемся основными свойствами умножения и деления действительных чисел, а также определением возведения в отрицательную степень:

$$a^{\alpha}:a^{\beta}=a^{n}:a^{m}=\frac{a^{n}}{a^{m}}=\frac{\overbrace{a\ldots a}^{n\text{ раз}}}{\underbrace{(a\ldots a)}_{n\text{ раз}}\underbrace{(a\ldots a)}_{k\text{ раз}}}=\frac{1}{\underbrace{a\ldots a}_{k\text{ раз}}}=a^{-k}=$$

$$=a^{-(m-n)}=a^{n-m}=a^{\alpha-\beta}.$$

Следует отметить, что в этом случае $(n-m)$ не является натуральным числом.

Для остальных пяти случаев значений α и β доказательство свойства г) аналогично доказательству свойства в).

Для доказательства свойства д) также как и в случае свойств в) и г) рассмотрим все шесть возможных ситуаций:

1. Пусть $\alpha=n$, $\beta=m$, где n и m — натуральные числа. Для доказательства свойства д) в этом случае воспользуемся основными законами сложения и умножения действительных чисел:

$$(\alpha^{\alpha})^{\beta}=(a^{n})^{m}=\underbrace{(a^{n})(a^{n})\ldots(a^{n})}_{m\text{ раз}}=\underbrace{\underbrace{(a\ldots a)}_{n\text{ раз}}\ldots\underbrace{(a\ldots a)}_{n\text{ раз}}}_{m\text{ раз}}=$$

$$=\underbrace{aa\ldots a}_{nm\text{ раз}}=a^{nm}=a^{\alpha\beta}.$$

2. Пусть $\alpha = n$, $\beta = -m$, где n и m — натуральные числа.

Тогда $(a^\alpha)^\beta = (a^n)^{-m} =$

по определению степени с целым отрицательным показателем $= \frac{1}{(a^n)^m} =$

по свойству степени с натуральным показателем $= \frac{1}{a^{nm}} =$

по определению степени с целым отрицательным показателем $= a^{-nm} = a^{n(-m)} = a^{\alpha\beta}$.

3. Пусть $\alpha = -n$, $\beta = m$, где n и m — натуральные числа. Справедливость этого свойства доказывается аналогично случаю $\alpha = n$, $\beta = -m$.

4. Пусть $\alpha = -n$, $\beta = -m$, где n и m — натуральные числа.

Тогда $(a^\alpha)^\beta = (a^{-n})^{-m} =$

по определению степени с целым отрицательным показателем $= \frac{1}{(a^{-n})^m} =$

по только что разобранному случаю 3 $= \frac{1}{a^{-nm}} =$

по определению степени с целым отрицательным показателем $= \frac{1}{\frac{1}{a^{nm}}} =$

по свойству дробей $= 1 : \frac{1}{a^{nm}} =$

по правилу деления дробей $= a^{nm} = a^{(-n)(-m)} = a^{\alpha\beta}$.

5. Пусть α — любое целое число, $\beta = 0$, тогда по определению степени с нулевым показателем $(a^\alpha)^\beta = (a^\alpha)^0 = 1 = a^0 = a^{\alpha 0} = a^{\alpha\beta}$.

6. Пусть $\alpha = 0$, β — любое целое число, тогда по определению степени с нулевым показателем $(a^\alpha)^\beta = (a^0)^\beta = (1)^\beta = 1 = a^0 = a^{0\beta} = a^{\alpha\beta}$.

Следовательно, свойство д) справедливо.

Пример. Применим свойства степени с целым показателем для вычисления следующего числового выражения:

$$A = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3} \cdot 2^4}{\left(\frac{8}{3}\right)^0 + 4^{-1} - 5 \cdot 10^{-1}}.$$

Так как $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, $\left(\frac{4}{3}\right)^{-3} = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$, $\left(\frac{8}{3}\right)^0 = 1$, $(4)^{-1} = \frac{1}{4}$, $5 \cdot 10^{-1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, то

$$A = \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{27}{64} \cdot 16}{1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = 1.$$

§ 2. Степень с рациональным показателем

В главе I было дано следующее определение арифметического корня из положительного числа.

Пусть n — натуральное число, a — положительное число. Тогда положительное число b, такое, что $b^n = a$ называется *арифметическим корней n-й степени из числа a* и обозначается $b = \sqrt[n]{a}$.

Без доказательства было принято утверждение, что для каждого положительного числа a существует и притом единственный арифметический корень n-й степени.

По определению $\sqrt[n]{a}$ справедливо следующее утверждение:

$$\sqrt[n]{a} \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ — положительное число,} \\ n \text{ — натуральное число,} \\ \sqrt[n]{a} \text{ — положительное число,} \\ (\sqrt[n]{a})^n = a. \end{cases}$$

Используя определение возведения в целую степень и определение арифметического корня из положительного числа, дадим теперь определение возведения положительного числа в степень с рациональным показателем.

Пусть a — положительное число, $r = \frac{p}{q}$ — рациональное число, причем q — натуральное число ($q > 0$). Положительное число b такое, что $b = \sqrt[q]{a^p}$, называется r-й *степенью числа* a и обозначается $b = a^r$, т. е. $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Заметим, что $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Пусть a и b — любые положительные числа, r_1 и r_2 — любые рациональные числа, тогда справедливы следующие свойства, называемые свойствами степеней с рациональными показателями:

а) $(ab)^{r_1} = a^{r_1} b^{r_1}$,

б) $\left(\frac{a}{b}\right)^{r_1} = \frac{a^{r_1}}{b^{r_1}}$,

в) $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$,

г) $a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1 - r_2}$,

д) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$.

Докажем справедливость этих свойств.

а) Пусть $r_1 = \frac{p}{q}$, причем q — натуральное число.

Рассмотрим	$\left[(ab)^{\frac{p}{q}}\right]^q =$
по определению рациональной степени	$= \left[\sqrt[q]{(ab)^p}\right]^q =$
по определению арифметического корня	$= (ab)^p =$
по свойству степени с целым показателем	$= a^p b^p =$

по определению арифметического корня $=(\sqrt[q]{a^p})^q(\sqrt[q]{b^p})^q=$

по определению рациональной степени $=\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\left(b^{\frac{p}{q}}\right)^q=$

по свойству степени с натуральным показателем $=\left(a^{\frac{p}{q}}b^{\frac{p}{q}}\right)^q.$

Итак, $[(ab)^{r_1}]^q=[a^{r_1}b^{r_1}]^q$. По теореме 1 § 2 гл. II это равенство равносильно равенству $(ab)^{r_1}=a^{r_1}b^{r_1}$ и свойство а) доказано.

Свойство б) доказывается аналогично.

в) Пусть $r_1=\frac{p}{q}$, $r_2=\frac{m}{n}$. Тогда $a^{r_1}a^{r_2}=a^{\frac{p}{q}}a^{\frac{m}{n}}$.

Рассмотрим $\left[a^{\frac{p}{q}}a^{\frac{m}{n}}\right]^{qn}=$

по свойству степени с натуральным показателем $=\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qn}\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{qn}=$

по свойству степени с натуральным показателем $=\left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\right]^n\left[\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n\right]^q=$

по определению рациональной степени $=[(\sqrt[q]{a^p})^q]^n[(\sqrt[n]{a^m})^n]^q=$

по определению арифметического корня $=(a^p)^n(a^m)^q=$

по свойству степени с целым показателем $=a^{pn}a^{mq}=$

по свойству степени с целым показателем $=a^{pn+mq}=$

по определению арифметического корня $=(\sqrt[nq]{a^{pn+mq}})^{nq}=$

по определению рациональной степени $=\left(a^{\frac{pn+mq}{nq}}\right)^{nq}.$

Итак, учитывая, что $\frac{(pn+mq)}{nq}=r_1+r_2$, имеем $(a^{r_1}a^{r_2})^{qn}=(a^{r_1+r_2})^{qn}$. По теореме 1 § 2 гл. II это равенство равносильно равенству $a^{r_1}a^{r_2}=a^{r_1+r_2}$ и свойство в) доказано.

Свойство г) доказывается аналогично.

д) Пусть $r_1=\frac{p}{q}$, $r_2=\frac{m}{n}$. Тогда $(a^{r_1})^{r_2}=\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}$.

Рассмотрим $\left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}\right]^{nq}=$

по свойству степени с натуральным показателем $=\left\{\left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}\right]^n\right\}^q=$

по определению степени с рациональным показателем $=\left\{\left[\sqrt[n]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^m}\right]^n\right\}^q=$

по определению арифметического корня $=\left\{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^m\right\}^q =$

по свойству степени с целым показателем $=\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{mq} =$

по свойству степени с целым показателем $=\left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\right]^m =$

по определению степени с рациональным показателем $=[(\sqrt[q]{a^p})^q]^m =$

по определению арифметического корня $=(a^p)^m =$

по свойству степени с целым показателем $=a^{pm} =$

по определению арифметического корня $=(\sqrt[qn]{a^{pm}})^{qn} =$

по определению степени с рациональным показателем $=\left(a^{\frac{pm}{qn}}\right)^{qn}$.

Итак, $[(a^{r_1})^{r_2}]^{nq}=(a^{r_1r_2})^{nq}$. По теореме 1 § 2 гл. II из справедливости этого равенства вытекает справедливость свойства д).

Докажем еще одно свойство степени с рациональным показателем.

е) Пусть a — положительное число, $r_1=\frac{p}{q}$ — рациональное число, q и n — натуральные числа. Тогда $a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{pn}{qn}}$.

Рассмотрим $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qn} =$

по свойству степени с натуральным показателем $=\left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\right]^n =$

по определению степени с рациональным показателем $=[(\sqrt[q]{a^p})^q]^n =$

по определению арифметического корня $=(a^p)^n =$

по свойству степени с целым показателем $=a^{pn} =$

по определению арифметического корня $=(\sqrt[qn]{a^{pn}})^{qn} =$

по определению степени с рациональным показателем $=\left(a^{\frac{pn}{qn}}\right)^{qn}$.

Итак, $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qn}=\left(a^{\frac{pn}{qn}}\right)^{qn}$, откуда и вытекает справедливость свойства е).

Для арифметических корней доказанные свойства имеют вид

а) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$;

б) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

в) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[k]{a}=\sqrt[nk]{a^{n+k}}$;

г) $\sqrt[n]{a}:\sqrt[k]{a}=\sqrt[nk]{a^{k-n}}$;

д) $(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}$, $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nk]{a}$;

е) $\sqrt[nk]{a^k}=\sqrt[n]{a}$.

Пример. Упростить числовое выражение

$$A=(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(\sqrt{72}+\sqrt{20}-4\sqrt{2}).$$

Применим рассмотренные свойства:

$$\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2};\ \sqrt{72}=\sqrt{2^3\cdot 3^2}=\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{3^2}=6\sqrt{2};$$
$$\sqrt{20}=\sqrt{2^2 5}=\sqrt{2^2}\sqrt{5}=2\sqrt{5}.$$

Следовательно,

$$A=(4\sqrt{2}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(6\sqrt{2}+2\sqrt{5}-4\sqrt{2})=$$
$$=3\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{2})\cdot 2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{5})=6(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})=$$
$$=6(5-2)=18.$$

Рассмотрим теперь основные свойства типа неравенства для степени с рациональным показателем.

ж) Пусть $a>1$, $r=\frac{p}{q}$ — положительное рациональное число ($p>0$, $q>0$). Тогда $a^r>1$.

Рассмотрим	$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q=$
по определению степени с рациональным показателем	$=(\sqrt[q]{a^p})^q=$
по определению арифметического корня	$=a^p.$

По теореме 1 § 2 гл. II условия $a>1$ и $a^p>1^p$ равносильны, значит, из условия $a>1$ вытекает, что $a^p>1$, но тогда $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q>1^q$, т. е. $(a^r)^q>1^q$, откуда по тому же свойству получаем, что $a^r>1$. Свойство ж) доказано.

з) Пусть $0<a<1$, $r=\frac{p}{q}$ — *положительное рациональное число* ($p>0$, $q>0$). Тогда $a^r<1$.

Доказательство этого свойства аналогично доказательству свойства ж).

и) Пусть $a>1$ и r_1 и r_2 — рациональные числа такие, что $r_1>r_2$. Тогда $a^{r_1}>a^{r_2}$.

Доказательство. Поскольку (r_1-r_2) — рациональное положительное число, то по свойству ж) $a^{r_1-r_2}>1$. Умножая это неравенство на положительное число a^{r_2}, по свойству 21 неравенств (см. § 2 гл. II) получаем $a^{r_2}(a^{r_1-r_2})>a^{r_2}$. Применяя к левой части свойство в) степени с рациональным показателем, получаем $a^{r_1}>a^{r_2}$, т. е. свойство и) доказано.

к) Пусть $0<a<1$, r_1, r_2 — рациональные числа такие, что $r_1>r_2$. Тогда $a^{r_1}<a^{r_2}$.

Доказательство этого свойства аналогично доказательству свойства и).

Пример. Доказать, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство

$$a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}>(a+b)^{\frac{2}{3}}.$$

Доказательство. Обозначим $a+b$ через c и рассмотрим дроби $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$. Так как $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=1$, то $0<\frac{a}{c}<1$, $0<\frac{b}{c}<1$. Используя свойство к), получим $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}}<1$, $\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{3}}<1$ или $\left(\frac{a}{c}\right)^{1-\frac{2}{3}}<1$, $\left(\frac{b}{c}\right)^{1-\frac{2}{3}}<1$. Следовательно, $\left(\frac{a}{c}\right)<\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}}$ и $\left(\frac{b}{c}\right)<\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}}$. По свойству числовых неравенств справедливо и неравенство

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}}>\frac{a}{c}+\frac{b}{c},$$

откуда, учитывая, что $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=1$, получаем справедливость неравенства

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}}>1.$$

Учитывая, что c — положительное число, и умножая это неравенство на $c^{\frac{2}{3}}$, получаем справедливость неравенства $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}>c^{\frac{2}{3}}$, что и требовалось доказать.

§ 3. Степень с иррациональным показателем

Возьмем приближенные значения числа $\sqrt{2}$ с недостатком:

$$1,\quad 1{,}4,\quad 1{,}41,\quad 1{,}414,\ \ldots$$

и приближенные значения числа $\sqrt{2}$ с избытком:

$$2,\quad 1{,}5,\quad 1{,}42,\quad 1{,}415,\ \ldots$$

По свойству и) степени с рациональным показателем

$$3^1<3^{1,4}<3^{1,41}<3^{1,414}<\ldots \tag{1}$$

и

$$3^2>3^{1,5}>3^{1,42}>3^{1,415}>\ldots \tag{2}$$

В неравенствах (1) и (2) членов бесконечно много и любой член неравенств (1) меньше любого члена неравенств (2). Естественно под числом $3^{\sqrt{2}}$ понимать число, которое больше любого члена неравенств (1) и меньше любого члена неравенств (2). Значит, под числом $3^{\sqrt{2}}$ понимается число, которое больше чем 3 в любой рациональной степени, приближающей $\sqrt{2}$ с недостатком, и которое меньше чем 3 в любой рациональной степени, приближающей $\sqrt{2}$ с избытком. Без доказательства здесь принимается, что такое число существует и притом только одно.

Так же определяется и a^{α}, где $a>1$, α — иррациональное положительное число. А именно, находятся рациональные числа r_i, приближающие число α с недостатком: $r_1<r_2<r_3<\ldots<\alpha$, затем — рациональные числа l_k, приближающие число α с избытком: $l_1>l_2>l_3>\ldots>\alpha$, и составляются неравенства: $a^{r_1}<$ $<a^{r_2}<a^{r_3}<\ldots$ и $a^{l_1}>a^{l_2}>a^{l_3}>\ldots$ Тогда под a^{α} понимается число, которое больше любого числа a^{r_i} и меньше любого числа a^{l_k}. Это определение можно сформулировать и так.

Пусть даны число $a>1$ и *положительное иррациональное число* α. Через r_i обозначим рациональные числа, приближающие α с недостатком, через l_k — с избытком. *Под числом* a^{α} понимается число γ такое, что для любых r_i и l_k справедливо неравенство $a^{r_i}<\gamma<a^{l_k}$. Без доказательства здесь принимается, что *такое число существует и притом только одно.*

Пусть даны число a такое, что $0<a<1$, и *положительное иррациональное число* α. Через r_i обозначим рациональные числа, приближающие α с недостатком, через l_k — с избытком. *Под числом* a^{α} понимается число γ такое, что для любых r_i и l_k справедливо неравенство $a^{r_i}>\gamma>a^{l_k}$. Без доказательства здесь принимается, что *такое число существует и притом только одно.*

Пусть даны *положительное число* a такое, что $a\neq 1$, и *отрицательное иррациональное число* α. *Под числом* a^{α} понимается число, равное $\frac{1}{a^{|\alpha|}}$, т. е. если $a\neq 1$ и α — отрицательное иррациональное число, то $a^{\alpha}=\frac{1}{a^{-\alpha}}$. Поскольку число $a^{|\alpha|}$ не равно нулю и в множестве действительных чисел деление всегда выполнимо, то *существует и притом единственное число*, равное частному $\frac{1}{a^{|\alpha|}}$. Это число называют числом a^{α}.

Замечание. 1. Если $a=1$, то $a^{\alpha}=1$ для любого действительного числа α. Поэтому в вышеприведенных определениях случай $a=1$ не рассматривается.

2. В силу вышеприведенных определений и определения степени с рациональным показателем для $a>0$ и любого действительного числа α число a^{α} всегда положительно.

Для степеней с иррациональным показателем справедливы следующие свойства. Пусть $a>0$, $b>0$, α — иррациональное число, β — рациональное или иррациональное, тогда:

а) $(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}$;

б) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}=\frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$;

в) $a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$;

г) $a^{\alpha}:a^{\beta}=a^{\alpha-\beta}$;

д) $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$.

Доказательство этих свойств проводится с помощью теории пределов и поэтому здесь не приводится.

§ 4. Степень положительного числа

Изложенное в §§ 1—3 позволяет дать определение действительной степени положительного числа. Заметим, что число a^{α} существует и притом только одно для любого действительного α.

Определение. *Пусть дано положительное число a и действительное число α. Под числом a^{α} понимают положительное число, определяемое по следующему правилу:*

I. *Если $\alpha>0$ и:*

1. *$\alpha=m$, m — натуральное число, то*

$$a^{\alpha}=\begin{cases} a, \text{ при } m=1,\\ \underbrace{aa\ldots a}_{m \text{ раз}}, \text{ при } m\geqslant 2. \end{cases}$$

2. *$\alpha=\frac{1}{q}$, q — натуральное число, то $a^{\alpha}=\sqrt[q]{a}$ (арифметический корень q-й степени из положительного числа);*

3. *$\alpha=\frac{p}{q}$, где p, q — натуральные числа, то $a^{\alpha}=\sqrt[q]{a^p}$;*

4. *α — иррациональное число, тогда:*

а) *если $a>1$, то a^{α} — число большее, чем a^{r_i} и меньшее, чем a^{l_k}, где r_i — любое рациональное приближение числа α с недостатком, l_k — любое рациональное приближение числа α с избытком;*

б) *если $0<a<1$, то a^{α} — число меньшее, чем a^{r_i} и большее, чем a^{l_k} (r_i и l_k — те же, что и выше);*

в) *если $a=1$, то $a^{\alpha}=1$.*

II. *Если $\alpha=0$, то $a^{\alpha}=1$.*

III. *Если $\alpha<0$, то $a^{\alpha}=\frac{1}{a^{|\alpha|}}$.*

Число a^{α} называется степенью, число a — основанием степени, число α — показателем степени.

Из §§ 1—3 вытекает, что степень положительного числа обладает следующими основными свойствами: если a и b — положительные числа, α и β — любые действительные числа, то:

а) $(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}$;

б) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}=\frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$;

в) $a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$;

г) $a^{\alpha}:a^{\beta}=a^{\alpha-\beta}$;

д) $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$.

Рассмотрим теперь основные свойства степени положительного числа типа неравенства.

Теорема 1. *Если $a>1$ и $\alpha>0$, то $a^{\alpha}>1$.*

Доказательство. Если $\alpha=\frac{p}{q}$ — рациональное число (p и q — натуральные числа), то свойство $a^{\alpha}>1$ уже доказано в § 2. Если α — иррациональное число, то возьмем любое положительное рациональное число r, приближающее α с недостатком, тогда $a^{\alpha}>a^{r}$ по определению иррациональной степени. В то же время по уже доказанному в § 2 свойству $a^{r}>1$. По свойству транзитивности неравенств из справедливости двух неравенств $a^{\alpha}>a^{r}$ и $a^{r}>1$ вытекает справедливость неравенства $a^{\alpha}>1$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если $a>1$ и $\alpha<0$, то $a^{\alpha}<1$.*

Доказательство. Число $\beta=-\alpha$ — положительное число, поэтому, применяя теорему 1, имеем $a^{\beta}>1$. Умножим обе части этого неравенства на положительное число a^{α}. По свойству неравенств $a^{\beta}a^{\alpha}>a^{\alpha}$; по свойству в) и определению степеней $a^{\beta}a^{\alpha}=a^{\alpha+\beta}=a^{0}=1$, поэтому $a^{\alpha}<1$ и теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если $a>1$ и $a^{\alpha}>1$, то $\alpha>0$.*

Доказательство. Предположим, что $a>1$ и $a^{\alpha}>1$, но $\alpha\leqslant 0$, т. е. либо $\alpha=0$, либо $\alpha<0$. Если $\alpha=0$, то $a^{\alpha}=1$ по определению. Если $\alpha<0$ и $a>1$, то применяя теорему 2, имеем $a^{\alpha}<1$. Итак, если $\alpha\leqslant 0$, то $a^{\alpha}\leqslant 1$, что противоречит предположению $a^{\alpha}>1$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Если $a>1$ и $a^{\alpha}<1$, то $\alpha<0$.*

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3.

Объединим теоремы 1—4.

Утверждение 1. *Если $a>1$, то условия $a^{\alpha}>1$ и $\alpha>0$ равносильны; кроме того, равносильны условия $a^{\alpha}<1$ и $\alpha<0$, т. е. если $a>1$, то*

$$a^{\alpha}>1\Leftrightarrow\alpha>0,$$

$$a^{\alpha}<1\Leftrightarrow\alpha<0.$$

Теорема 5. *Если $0<a<1$ и $\alpha>0$, то $a^{\alpha}<1$.*

Доказательство. Рассмотрим число $b>\frac{1}{a}$. Так как $b>1$, то применяя теорему 1, имеем $b^{\alpha}=1$. Умножим обе части этого неравенства на положительное число a^{α}. По свойству неравенств $b^{\alpha}a^{\alpha}>a^{\alpha}$. По свойствам степеней $b^{\alpha}a^{\alpha}=(ab)^{\alpha}=(1)^{\alpha}=1$, поэтому $a^{\alpha}<1$.

Теорема 6. *Если $0<a<1$ и $\alpha<0$, то $a^{\alpha}>1$.*

Теорема 7. *Если $0<a<1$ и $a^{\alpha}>1$, то $\alpha<0$.*

Теорема 8. *Если* $0 < a < 1$ *и* $a^{\alpha} < 1$, *то* $\alpha > 0$.

Доказательство этих теорем аналогично доказательству теоремы 5.

Объединим теоремы 5—8.

Утверждение 2. *Если* $0 < a < 1$, *то условия* $a^{\alpha} > 1$ *и* $\alpha < 0$ *равносильны; кроме того, равносильны условия* $a^{\alpha} < 1$ *и* $\alpha > 0$, *т. е. если* $0 < a < 1$, *то*

$$a^{\alpha} > 1 \Leftrightarrow \alpha < 0,$$
$$a^{\alpha} < 1 \Leftrightarrow \alpha > 0.$$

Из утверждений 1 и 2 легко получить следующее следствие:

Утверждение 3. *Если* $a > 0$ *и* $a \neq 1$, *то условия* $a^{\alpha} = 1$ *и* $\alpha = 0$ *равносильны, т. е. если* $a > 0$ *и* $a \neq 1$, *то*

$$a^{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

Теорема 9. *Если* $a > 1$ *и* $\alpha_1 > \alpha_2$, *то* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$.

Доказательство. Рассмотрим число $\beta = \alpha_1 - \alpha_2$. Так как $\beta > 0$, то $a^{\beta} > 1$. Умножим обе части этого неравенства на положительное число a^{α_2}. По свойству неравенств $a^{\beta}a^{\alpha_2} > a^{\alpha_2}$; по свойству степеней $a^{\beta}a^{\alpha_2} = a^{\alpha_1}$, поэтому $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$ и теорема 9 доказана.

Теорема 10. *Если* $a > 1$ *и* $\alpha_1 < \alpha_2$, *то* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$.

Теорема 11. *Если* $a > 1$ *и* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$, *то* $\alpha_1 > \alpha_2$.

Теорема 12. *Если* $a > 1$ *и* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$, *то* $\alpha_1 < \alpha_2$.

Доказательство этих теорем аналогично доказательству теоремы 9.

Объединим теоремы 9—12.

Утверждение 4. *Если* $a > 1$, *то условия* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$ *и* $\alpha_1 > \alpha_2$ *равносильны; кроме того, равносильны условия* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$ *и* $\alpha_1 < \alpha_2$, *т. е. если* $a > 1$, *то*

$$a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 > \alpha_2,$$
$$a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2.$$

Теорема 13. *Если* $0 < a < 1$ *и* $\alpha_1 > \alpha_2$, *то* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$.

Теорема 14. *Если* $0 < a < 1$ *и* $\alpha_1 < \alpha_2$, *то* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$.

Теорема 15. *Если* $0 < a < 1$ *и* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$, *то* $\alpha_1 < \alpha_2$.

Теорема 16. *Если* $0 < a < 1$ *и* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$, *то* $\alpha_1 > \alpha_2$.

Доказательство этих теорем аналогично доказательству теоремы 9.

Объединим теоремы 13—16.

Утверждение 5. *Если* $0 < a < 1$, *то условия* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$ *и* $\alpha_1 < \alpha_2$ *равносильны; кроме того, равносильны условия* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$ *и* $\alpha_1 > \alpha_2$, *т. е. если* $0 < a < 1$, *то*

$$a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2,$$
$$a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 > \alpha_2.$$

Из утверждений 4 и 5 легко получить следующее следствие:

Утверждение 6. *Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то условия $a^{\alpha_1} = a^{\alpha_2}$ и $\alpha_1 = \alpha_2$ равносильны, т. е. если $a > 0$ и $a \neq 1$, то*

$$a^{\alpha_1} = a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

Утверждения 4 и 5 словесно формулируются следующим образом:

Если основание степени больше 1, то большему показателю соответствует бо́льшая степень и наоборот, большей степени соответствует больший показатель.

Если основание степени меньше 1 ($0 < a < 1$), то большему показателю соответствует меньшая степень и наоборот, меньшей степени соответствует больший показатель.

Замечание. Если $\alpha > 0$, то понятие действия возведения в степень можно расширить на множество всех неотрицательных чисел, так как по определению $0^\alpha = 0$, если $\alpha > 0$.

Рассмотрим пример на применение свойств степеней положительного числа. Пусть требуется доказать, что $3^{\sqrt{3}} < 7$.

По определению $3^{\sqrt{3}} < 3^r$, где r — рациональное приближение иррационального числа $\sqrt{3}$ с избытком. Возьмем $r = \frac{7}{4}$. Так как $\sqrt{3} < \frac{7}{4}$, то $3^{\sqrt{3}} < 3^{\frac{7}{4}}$. Докажем, что $3^{\frac{7}{4}} < 7$.

Используя два раза теорему 5, получим равносильность следующих неравенств:

$$\frac{3^{\frac{7}{4}}}{7} < 1 \quad \text{и} \quad \left(\frac{3^{\frac{7}{4}}}{7}\right)^4 < 1.$$

Используя свойства степеней типа равенства, получим, что неравенство $\left(\frac{3^{\frac{7}{4}}}{7}\right)^4 < 1$ равносильно неравенству $\frac{3^7}{7^4} < 1$, которое является верным, так как $3^7 = 2187$, $7^4 = 2401$.

Следовательно, в силу равносильности переходов верно и исходное неравенство $3^{\sqrt{3}} < 7$.

§ 5. Логарифмы

Рассмотрим основные задачи, которые возникают при изучении степеней.

1. Даны действительные числа a и α. *Найти действительное число x такое, что $x = a^\alpha$.* Это — задача о возведении действительного числа в степень. Она разрешима для любого положительного числа a и любого действительного числа α. Если $a = 0$ и $\alpha > 0$, то $x = 0$ (см. § 4 гл. IV). При $a < 0$ эта задача здесь рассматриваться не будет.

2. Даны действительные числа b и α. *Найти действительное число x такое, что $x^\alpha = b$.*

Если b — любое положительное число и α — любое отличное от нуля действительное число, то эта задача сводится к предыдущей, ибо ответ дает число $x = b^{\frac{1}{\alpha}}$. Действительно, $x^\alpha = \left(b^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = b^{\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha} = b^1 = b$. Если $\alpha = 0$ и $b = 1$, то решением этой задачи является любое действительное отличное от нуля число x. Если $\alpha = 0$ и $b \neq 1$, то эта задача не имеет решения. При $b < 0$ эта задача здесь рассматриваться не будет.

3. Даны действительные числа a и b. *Найти действительное число x такое, что $a^x = b$.* Будем рассматривать эту задачу только для действительных положительных чисел a и b. Если $a = 1$ и $b = 1$, то решением этой задачи является любое действительное число x. Если $a = 1$ и $b \neq 1$, то задача не имеет решения. Рассмотрим случай $a \neq 1$.

Теорема 1. *Для любой пары действительных чисел a и b таких, что $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, существует и притом только одно действительное число x такое, что $a^x = b$.*

Доказательство существования такого числа x здесь не приводится. Докажем единственность. Предположим, что существуют действительные числа x_1 и x_2 такие, что $a^{x_1} = b$ и $a^{x_2} = b$. По свойству транзитивности равенств $a^{x_1} = a^{x_2}$. На основании утверждения 6 (см. § 4) $x_1 = x_2$, что и требовалось доказать.

Определение. *Если $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, то действительное число α называется логарифмом числа b по основанию a и обозначается $\alpha = \log_a b$, если $a^\alpha = b$.*

Заметим, что определение логарифма можно дать только после доказательства теоремы 1, так как до нее было неясно, существует ли такое число α, что $a^\alpha = b$, и единственно ли оно. Подчеркнем еще раз, что логарифм определяется только для положительного числа по положительному не равному единице основанию, т. е. для любого $a \leqslant 0$, $a = 1$ и любого $b \leqslant 0$ понятие логарифма лишено смысла. Например, утверждение, что число 3 является логарифмом числа (-8) по основанию (-2), лишено смысла.

Итак, в определении логарифма $\log_a b$ всегда $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. Из определения логарифма вытекает *основное логарифмическое тождество*

$$a^{\log_a b} = b.$$

Пользуясь определением логарифма, получаем, что $\log_a a = 1$ и $\log_a 1 = 0$.

Используя единственность логарифма, имеем, что если $\mu > 0$ и $\mu \neq 1$, то всегда $\log_a \mu \neq 0$.

Перейдем к рассмотрению основных свойств логарифмов.

Пусть числа M, N, a, b, α и β таковы, что $M > 0$, $N > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, α и β — любые действительные числа ($\beta \neq 0$). Тогда:

а) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$;

б) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$;

в) $\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M$;

г) $\log_{a^\beta} M^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a M$;

д) $\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$ (правило перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию);

е) $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$;

ж) если $a > 1$, то $\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow M < N$;

з) если $0 < a < 1$, то $\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow M > N$;

г′) $\log_{a^\beta} M^\beta = \log_a M$;

д′) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Докажем эти свойства.

а) Рассмотрим $a^{\log_a MN} =$

по основному логарифмическому тождеству $= MN =$

по основному логарифмическому тождеству $= a^{\log_a M} a^{\log_a N} =$

по свойству степени положительного числа $= a^{\log_a M + \log_a N}$.

Итак, $a^{\log_a MN} = a^{\log_a M + \log_a N}$. Применяя к последнему равенству утверждение 6 свойств степеней, получим, что $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$.

Свойство б) доказывается аналогично.

в) Рассмотрим $a^{\log_a (M^\alpha)} =$

по основному логарифмическому тождеству $= M^\alpha = (a^{\log_a M})^\alpha =$

по свойству степени положительного числа $= a^{\alpha \log_a M}$.

Итак, $a^{\log_a (M^\alpha)} = a^{\alpha \log_a M}$. Применяя утверждение 6 свойств степеней, получим $\log_a (M^\alpha) = \alpha \log_a M$.

г) Рассмотрим $(a^\beta)^{\log_{a^\beta} (M)^\alpha} =$

по основному логарифмическому тождеству $= (M)^\alpha = (a^{\log_a M})^\alpha =$

по свойству степени положительного числа $= a^{\alpha \log_a M} =$

так как $\beta \neq 0$, то $1 = \beta \cdot \frac{1}{\beta}$, поэтому $= \left[(a^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \right]^{\alpha \log_a M} =$

по свойству степени положительного числа $= (a^\beta)^{\frac{\alpha}{\beta} \log_a M}$.

Итак, $(a^\beta)^{\log_{a^\beta} (M)^\alpha} = (a^\beta)^{\frac{\alpha}{\beta} \log_a M}$. Применяя к последнему равенству утверждение 6 свойств степеней, получим $\log_{a^\beta} (M)^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a M$.

д) Рассмотрим $a^{\log_a M} =$

по основному логарифмическому тождеству $= M =$

по основному логарифмическому тождеству $= b^{\log_b M} =$

по основному логарифмическому тождеству $= (a^{\log_a b})^{\log_b M} =$

по свойству степени положительного числа $= a^{\log_a b \log_b M}$.

Итак, $a^{\log_a M} = a^{\log_a b \log_b M}$. Применяя к последнему равенству утверждение 6 свойств степеней, получим, что $\log_a M = \log_a b \log_b M$. По свойству равенств обе части этого равенства можно умножить на число $\frac{1}{\log_a b}$ (так как $b \neq 1$, то $\log_a b \neq 0$) и получить справедливость равенства

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}.$$

е) По основному логарифмическому тождеству $M = a^{\log_a M}$ и $N = a^{\log_a N}$, следовательно,

$$M = N \Leftrightarrow a^{\log_a M} = a^{\log_a N}. \qquad (1)$$

По утверждению 6 свойств степеней имеем

$$a^{\log_a M} = a^{\log_a N} \Leftrightarrow \log_a M = \log_a N. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) вытекает, что

$$M = N \Leftrightarrow \log_a M = \log_a N.$$

ж) По основному логарифмическому тождеству $M = a^{\log_a M}$ и $N = a^{\log_a N}$, следовательно,

$$M < N \Leftrightarrow a^{\log_a M} < a^{\log_a N}. \qquad (3)$$

На основании утверждения 4 свойств степеней имеем

$$a^{\log_a M} < a^{\log_a N} \Leftrightarrow \log_a M < \log_a N. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) вытекает, что

$$M < N \Leftrightarrow \log_a M < \log_a N.$$

Свойство з) доказывается аналогично.

Свойства ж) и з) имеют следующую словесную формулировку:

При основании, большем единицы, меньшему из двух положительных чисел соответствует меньший логарифм и меньшему логарифму соответствует меньшее число.

При основании, меньшем единицы, меньшему из двух положительных чисел соответствует больший логарифм и большему логарифму соответствует меньшее число.

Логарифмы по основанию 10 называются *десятичными логарифмами*, и вместо обозначения $\log_{10} M$ часто употребляется обозначение $\lg M$.

Логарифмы по основанию e (e — иррациональное число, приближенное значение которого 2,718281828459045...) называются *натуральными логарифмами*, и вместо обозначения $\log_e N$ часто употребляется обозначение $\ln N$.

Свойства логарифмов используются для преобразования различных логарифмических выражений как с числами, так и с буквами.

Примеры. 1. Вычислить $A = \left(\sqrt[7]{\frac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{5\log_5 3} + \log_{9\sqrt{3}} 125}$.

По свойству д′) логарифмов $\frac{1}{5\log_5 3} = \frac{1}{5}\log_3 5$; по свойству д) логарифмов $\log_{9\sqrt{3}} 125 = \log_{3^{\frac{5}{2}}} 5^3 = \frac{6}{5}\log_3 5$. Используя свойства степеней и основное логарифмическое тождество, получим

$$A = \left(3^{-\frac{3}{7}}\right)^{\frac{1}{5}\log_3 5 + \frac{6}{5}\log_3 5} = 3^{-\frac{3}{5}\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{-\frac{3}{5}} =$$

$$= 5^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{0{,}008}.$$

2. Доказать, что если a, b и c — действительные числа, удовлетворяющие условию $0 < b \leqslant c < a - 1$, то справедливо неравенство $\log_a (a+b) < \log_{a-c} a$.

Доказательство. Поскольку $a > 0$ и $c \geqslant b > 0$, то очевидна справедливость неравенства

$$a^2 - (c-b)a - bc < a^2,$$

которое можно переписать так:

$$(a+b)(a-c) < a^2. \qquad (5)$$

Так как $a > 1$, то можно воспользоваться свойством ж) и получить неравенство

$$\log_a (a+b)(a-c) < 2, \qquad (6)$$

равносильное неравенству (5).

Используя свойство а), получим неравенство

$$\log_a (a+b) + \log_a (a-c) < 2, \qquad (7)$$

равносильное неравенству (6).

Каждое слагаемое в левой части неравенства (3) положительно, так как $(a+b) > 1$ и $(a-c) > 1$. Следовательно, можно воспользоваться теоремой 1 § 2 гл. II: возведя в квадрат левую и правую части неравенства (7) получим равносильное неравенство.

Поэтому неравенство (7) равносильно неравенству

$$[\log_a(a+b)+\log_a(a-c)]^2<4,$$

которое равносильно неравенству

$$[\log_a(a+b)-\log_a(a-c)]^2<4-4\log_a(a+b)\log_a(a-c). \qquad (8)$$

Неравенство (8) равносильно неравенству (5), которое справедливо, значит, справедливо и неравенство (8).

Так как при $b>0$, $c>0$ справедливо неравенство

$$0<[\log_a(a+b)-\log_a(a-c)]^2, \qquad (9)$$

то можно воспользоваться свойством транзитивности неравенств.

Тогда из справедливости неравенств (8) и (9) будет следовать справедливость неравенства

$$0<4-4\log_a(a+b)\log_a(a-c),$$

которое можно записать так:

$$\log_a(a+b)\log_a(a-c)<1.$$

Применяя свойство д′) и учитывая, что $a-c>1$ и $a>1$, получим справедливость исходного неравенства.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти числовое значение следующего числового выражения (1—19):

1. $(3^2)^2-[(-2)^3]^2-(-5^2)^2$. 2. $\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(1\frac{1}{2}\right)^2-[(-0,5)^3]^2$.

3. $4^{-2}-2^{-3}+[(-2)^3]^{-1}$. 4. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}-\left(-2\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(-\frac{5}{2}\right)^{-2}$.

5. $(-0,75)^3+(0,3)^{-3}-\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}$. 6. $[(0,6)^2]^0-[(-4,5)^{-2}]^0+\left(3\frac{1}{2}\right)^0$.

7. $(4^{-1})^4\cdot2^5\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^3\cdot(8^{-2})^5\cdot(64^2)^3$. 8. $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3\cdot(0,25)^2\cdot[(-5)^{-3}]^2\cdot[(0,1)^2]^{-2}$.

9. $(\sqrt{2})^4\cdot\left[\left(2\frac{1}{2}\right)^3:\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]:\left[(0,1)^2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}\right]$.

10. $3^{-4}:\left(2^4:3^2-2^2:1\frac{1}{8}\right)+\left(2\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot(-0,295)^0$.

11. $(0,25)^{-1}\cdot\left(1\frac{1}{4}\right)^2+\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^3\right]:\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

12. $\left(2\frac{1}{3}\right)^0+\left[(1,2)^{-4}\cdot\left(\frac{25}{6}\right)^2\right]:6^{-3}-[(-33,41)^2]^0$.

13. $(-0,(3))^2\cdot\left[\left(1\frac{1}{3}\right)^2\right]^{-2}+((0,5)^2)^3:[(43)^0]^2+(-8)^3\cdot\left(\frac{2}{3^2}\right)^{-1}$

14. $\left[27^{10}-5\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-8}\cdot3^{12}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{3^2}\right)^{-8}\cdot3^8\right]:[41\cdot(3^{-2})^{-12}]$.

15. $[(10^{-6})^{-2}+5^3\cdot(25)^4\cdot2^5\cdot(2^3)^2-5^{13}\cdot(4^2)^2]:\left[(5^{-5})^{-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot10^6\right]$.

16. $\left[9\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot 18^5-(2^{-2})^{-2}\cdot\left(\frac{1}{3^2}\right)^{-5}-(3^{-3})^{-2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{-6}\right]\times$

$\times\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^{-1}\cdot(3^2)^4.$

17. $\left\{15\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-1}\cdot(25)^3-2^3\cdot(5^3)^2+4\cdot\frac{(25)^3}{5}\right\}\cdot(4)^{-1}\cdot\frac{25}{5^6}.$

18. $\frac{8\cdot(4^2)^4\cdot 3^3\cdot 27^2+90\cdot 6^3\cdot 4^7\cdot(3^2)^2}{24\cdot(6^2)^4\cdot(2^4)^2+144\cdot(2^3)^4\cdot(9^2)^2\cdot 4^2}.$

19. $\frac{180\cdot\left[2^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^6\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{-2}-72\cdot(6^2)^3\cdot[(36)^3\cdot 4^2]^2}{135\cdot 216^3\cdot[4^2\cdot 9]^2\cdot 6^3+36\cdot[32\cdot 4^2\cdot 3^4]^2}.$

Вынести за знак корня те множители числа, стоящего под знаком корня, которые можно вынести (20—25):

20. $\sqrt{120}$, $\sqrt{147}$, $\sqrt{108}$, $\sqrt{245}$, $\sqrt{363}$. 21. $\sqrt[3]{32}$, $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[3]{512}$, $\sqrt[3]{1080}$, $\sqrt[3]{375}$.

22. $\sqrt[4]{80}$, $\sqrt[4]{405}$, $\sqrt[4]{328}$. 23. $\sqrt[5]{486}$, $\sqrt[5]{800}$, $\sqrt[5]{12500}$.

24. $\sqrt{18(4-\sqrt{17})^2}$, $\sqrt{54(2-\sqrt{3})^2}$. 25. $\sqrt[4]{48(2-\sqrt{7})^4}$, $\sqrt[4]{2(\sqrt{11}-3)^4}$.

Внести под знак корня все множители, стоящие перед знаком корня (26—30):

26. $4\sqrt{3}$, $5\sqrt{2}$, $7\sqrt{\frac{3}{7}}$, $\frac{1}{3}\sqrt{15}$. 27. $2\sqrt[3]{5}$, $3\sqrt[3]{4}$, $12\sqrt[3]{1\frac{1}{9}}$, $6\sqrt[3]{1\frac{4}{27}}$.

28. $\frac{3}{2}\sqrt{8}$, $1\frac{1}{3}\sqrt{6}$, $1\frac{2}{3}\sqrt{2\frac{2}{5}}$. 29. $(2-\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}$, $(4-\sqrt{19})\cdot\sqrt{3}$.

30. $(\sqrt{3}-2)\cdot\sqrt[4]{5}$, $(11-\sqrt{13})\cdot\sqrt[4]{7}$.

Вынести за знак корня знаменатель дроби, стоящий под знаком корня (31—33):

31. $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{28}{3}\sqrt{\frac{5}{7}}$, $\frac{21}{2}\sqrt{3\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{0{,}2}$, $6\sqrt{2\frac{1}{3}}$.

32. $\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$, $\sqrt[3]{3\frac{1}{2}}$, $\frac{4}{3}\sqrt[3]{1{,}5}$, $\frac{4}{9}\sqrt[3]{20\frac{1}{4}}$, $\frac{3}{5}\sqrt[3]{13\frac{8}{9}}$.

33. $\sqrt[4]{\frac{7}{4}}$, $16\sqrt[5]{1\frac{3}{8}}$, $\sqrt[6]{\frac{5}{27}}$, $1\frac{1}{2}\sqrt[4]{7\frac{1}{9}}$.

Записать в виде произведения двух чисел следующее число (34—37):

34. $7+\sqrt{7}$, $\sqrt{12}+\sqrt{45}+\sqrt{18}$, $5+\sqrt{5}+\sqrt{15}$.

35. $5-\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}$, $3-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{24}$.

36. $3\sqrt{12}-3\sqrt{6}+\sqrt{30}-\sqrt{15}$. 37. $\sqrt[3]{48}-\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{40}$.

Найти числовое значение следующего числового выражения (38—45):

38. $2\sqrt{5\sqrt{48}}+3\sqrt{40\sqrt{12}}-2\sqrt{15\sqrt{27}}$.

39. $\sqrt{176}-2\sqrt{275}+\sqrt{1584}-\sqrt{891}$.

40. $2(\sqrt{252}-\sqrt{175})-(\sqrt{112}-\sqrt{63}-\sqrt{28})$.

41. $15\sqrt{1{,}04}-\frac{3}{5}\sqrt{5\frac{5}{9}}+6\sqrt{\frac{1}{18}}-(5\sqrt{0{,}02}-\sqrt{300})$.

42. $30\sqrt[3]{\frac{1}{12}}+3\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+5\sqrt[3]{144}$. 43. $2\sqrt[3]{0{,}125}+\sqrt[4]{0{,}0016}$.

44. $\sqrt[4]{0{,}0001}-\sqrt[5]{0{,}00032}$. 45. $(\sqrt{6}-2\sqrt{15})\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{20}$.

Записать в виде корней одной и той же степени следующие четыре числа (46—50):

46. $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[6]{5}$ и $\sqrt[4]{7}$. 47. $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{15}$, $\sqrt[8]{50}$ и $\sqrt[16]{171}$.

48. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{11}$ и $\sqrt[12]{1671}$. 49. $\sqrt[3]{2\cdot3^4}$, $\sqrt[6]{5\cdot64^2}$, $\sqrt[4]{3\cdot5^3}$ и $\sqrt{2^3\cdot7^5}$.

50. $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$, $\sqrt[4]{\frac{5}{9}}$, $\sqrt[6]{\frac{5}{7}}$ и $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Записать в виде степени с рациональным показателем следующие числа (51—53):

51. $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7^2}$, $\sqrt[4]{11^3}$, $\sqrt[5]{13^2}$, $\sqrt[7]{19^3}$.

52. $\sqrt{2^{-3}}$, $\sqrt[9]{10^{-2}}$, $\sqrt[4]{3^{-3}}$, $\sqrt[6]{7^{-4}}$, $\sqrt[7]{5^{-5}}$.

53. $2\sqrt{4^{21}}$, $3\sqrt[4]{3^3}$, $7\sqrt[5]{7^3}$, $3\sqrt[6]{27^5}$, $9\sqrt[7]{3^{25}}$.

Записать, используя знак корня, следующую степень с рациональным показателем (54—57):

54. $2^{\frac{1}{3}}$, $3^{\frac{3}{4}}$, $5^{\frac{2}{5}}$, $7^{\frac{3}{7}}$, $4^{\frac{2}{3}}$. 55. $3^{0{,}5}$, $4^{0{,}25}$, $4^{0{,}75}$, $7^{1{,}25}$, $3^{2\frac{1}{2}}$.

56. $3\cdot2^{\frac{2}{3}}$, $4\cdot3^{\frac{1}{4}}$, $5\cdot6^{0{,}25}$, $7\cdot3^{2{,}25}$, $2\cdot9^{2\frac{1}{2}}$.

57. $2\cdot3^{-\frac{1}{2}}$, $3\cdot2^{-3{,}75}$, $7\cdot5^{-2\frac{3}{4}}$, $6\cdot7^{-0{,}7}$, $8\cdot10^{-\frac{7}{2}}$.

Заменив все знаки корней рациональными показателями степени, найти числовое значение следующего числового выражения (58—64):

58. $\sqrt{\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}}:\sqrt{\sqrt[4]{5}}\right)^2$.

59. $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}:\left(\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

60. $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt{3}}}:\left(\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}}}:\sqrt[4]{\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

61. $\left(\sqrt[3]{16\sqrt[4]{8\sqrt{2}}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{32\sqrt[4]{2}}\cdot\sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}}$.

62. $\sqrt{3\sqrt[3]{9\sqrt{27\sqrt{3}}}}:\left(\sqrt[16]{3^{15}}\cdot\sqrt[8]{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

63. $\left(\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}}}:\sqrt[9]{4\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{3\sqrt[9]{9}}$.

64. $\dfrac{\left(\sqrt[6]{5\sqrt{5}}\right)^2\cdot\left(\sqrt[6]{25\sqrt[3]{25}}\right)^4}{\left(\sqrt[3]{5\sqrt[4]{125}}\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(\sqrt[3]{5\sqrt{5\cdot\sqrt{5}}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Найти числовое значение следующего числового выражения (65—78):

65. $\left(27^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{2}{3}}\cdot 32^{\frac{2}{5}}\cdot 81^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{4}}$.

66. $\left(100^{-\frac{1}{2}}\cdot 64^{\frac{4}{3}}\cdot 0{,}25^{0,5}\cdot 16^{-0,75}\right)^{\frac{4}{3}}$.

67. $\left(0{,}25^{0,5}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}\cdot 100^{-\frac{1}{2}}\cdot 0{,}01^{-1}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

68. $\left[\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right):4^{\frac{1}{6}}\right]:\left\{\left[4^{-\frac{1}{2}}:\left(2^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}\right)\right]\cdot\left[\left(2^{-\frac{5}{6}}\cdot 4^{-\frac{2}{3}}\right):3^{\frac{5}{6}}\right]\right\}$.

69. $\left\{3^{\frac{1}{3}}\left[5^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}\cdot(225^2)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}^{6}$.

70. $\left\{\left[\left(3^{-\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right):\left(3^{-\frac{3}{4}}\cdot 2^{-\frac{5}{6}}\right)\right]:\left(\frac{1}{864}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}^{\frac{2}{7}}$.

71. $\left\{\left[\left(3^{\frac{5}{2}}\cdot 5^{\frac{4}{3}}\right):2^{-\frac{5}{4}}\right]:\left[16:\left(5^2\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{5}}$.

72. $\left\{3^{\frac{5}{2}}\cdot 5^{\frac{4}{3}}\cdot 2^{\frac{5}{4}}\cdot\left[16:\left(27^{-1}\cdot 5^{-\frac{5}{3}}\right)\right]\cdot\left(25\cdot 3^{\frac{1}{2}}:2^{\frac{1}{4}}\right)\right\}^{\frac{1}{5}}$.

73. $10^2\cdot 1000^{-\frac{2}{3}}-\left(100^{-\frac{1}{2}}-0{,}027^{-\frac{1}{3}}\right)-\left[625^{-0,75}+\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{2}\right]$.

74. $\left[(27\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}+(8\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\right]-\left[\frac{2}{7}\cdot(343\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}-10\,(0{,}001\cdot\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\right]$.

75. $2\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{1}{12}}-3\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)-3\cdot\left(5\sqrt[3]{144}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{5\frac{1}{3}}\right)$.

76. $\left(4\sqrt{\frac{1}{2}}-0{,}5\sqrt{12}+\sqrt{0{,}02}-5\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)(-0{,}75\sqrt{2})$.

77. $(2\sqrt{6}-\sqrt{5}+4\sqrt{2})(3\sqrt{5}+\sqrt{6}-2\sqrt{2})$.

78. $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+4\sqrt[3]{\frac{1}{72}}-\sqrt[3]{9}\right)\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16}\right)$.

Доказать справедливость следующего числового равенства (79—112):

79. $\sqrt{10-4\sqrt{6}}=\sqrt{6}-2$. 80. $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$.

81. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}=2\sqrt{3}$.

82. $\sqrt{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\frac{9}{2}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2}{2}$.

83. $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}=\sqrt{5}-2$.

84. $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=1$.

85. $\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}=\sqrt{3}+1$.

86. $\sqrt{8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}+1.$

87. $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{2}(1+\sqrt{5}).$

88. $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$ 89. $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2.$

90. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$

91. $\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}}-\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}}=0.$

92. $\sqrt[3]{3+9\sqrt[3]{12}-9\sqrt{18}}=\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}.$

93. $\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=2.$

94. $\sqrt[6]{8\sqrt{2}(7+4\sqrt{3})}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2\sqrt{2}}-2\sqrt{6\sqrt{2}}}=2\sqrt[6]{2}.$

95. $\sqrt[4]{28+4\sqrt{48}}=\sqrt{3}+1.$ 96. $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1.$

97. $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1.$

98. $\sqrt{6+2(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}-\sqrt{6-2(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})}=2\sqrt{2}.$

99. $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}{\sqrt{3\sqrt{5}-3\sqrt{2}}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}.$

100. $\frac{(2+\sqrt{5})(2+5\sqrt{5})-(2+2\sqrt{5})(2-2\sqrt{5})}{4+3\sqrt{5}}=3\sqrt{5}.$

101. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}=(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})(3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9}+4).$

102. $\frac{4+2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+1.$

103. $\frac{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt[4]{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt[4]{2}}}=\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}\,(3-\sqrt[4]{2})(3-\sqrt{2})}{7}.$

104. $\frac{3}{\sqrt[4]{11}-\sqrt[4]{8}}=(\sqrt[4]{11}+\sqrt[4]{8})(\sqrt{11}+\sqrt{8}).$

105. $\frac{1}{\sqrt[8]{3}+\sqrt[8]{2}}=(\sqrt[8]{3}-\sqrt[8]{2})(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}).$

106. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2}.$

107. $\frac{2\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}=\frac{(30-2\sqrt{30})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})}{26}.$

108. $\frac{6}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{3(3\sqrt{2}-4)(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2}.$

109. $\frac{6}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}+3}=3-\sqrt[4]{27}.$

110. $\sqrt[4]{7}-\dfrac{\sqrt{7}-\frac{1}{7}}{\sqrt[4]{7}-\sqrt{\frac{1}{\sqrt{7}}}}+\dfrac{6}{7\left(\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{\frac{1}{7}}\right)}+\dfrac{2}{\sqrt[4]{343}}=0.$

111. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(\sqrt{3}+12)\sqrt[4]{3}-6\sqrt{3}-8}}{\sqrt{3}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}=1.$

112. $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2=2.$

113. Разность $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$ является целым числом. Найти это целое число.

Какое из двух следующих чисел больше (114—123):

114. $\sqrt[8]{10}$ или $\sqrt[4]{3}$; 115. $(\sqrt{0,2})^{-3,5}$ или 1;

116. $\sqrt[6]{24}$ или $\sqrt[3]{5}$; 117. $\sqrt[12]{623}$ или $\sqrt[3]{5}$;

118. $(2\sqrt[3]{2})^{-6}$ или 2^{-11}; 119. $\sqrt[21]{9}$ или $\sqrt[44]{81}$;

120. $\sqrt[3]{125\cdot 343}$ или $\sqrt[5]{\frac{52}{81}}\cdot\sqrt[5]{\frac{4}{39}}\cdot\sqrt[5]{972}$;

121. $\sqrt[3]{\frac{1000}{729}}$ или $\sqrt[5]{12}:\sqrt[5]{\frac{4}{81}}$;

122. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{10}}$ или $\sqrt[7]{\sqrt{13}}$; 123. $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{2^5}}}$ или $\sqrt[7]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^8}}}$?

Доказать справедливость следующего числового неравенства (124—132):

124. $3^{34}>2^{51}$. 125. $202^{303}>303^{202}$.

126. $\sqrt{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$.

127. $\sqrt[5]{\sqrt{11}-3}>\sqrt[10]{11}-\sqrt[5]{3}$.

128. $2(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{7})-(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})<3$.

129. $6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+5\sqrt{5}>5\sqrt[4]{6}+7\sqrt[4]{10}+3\sqrt[4]{15}$.

130. $(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{9})(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{9})>9\sqrt[4]{315}$.

131. $3\sqrt{2}+\sqrt{3}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})>2\sqrt[4]{6}(1+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3})$.

132. $\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{10}+\sqrt{15}<\dfrac{23}{3}$.

Найти числовое значение следующего числового выражения (133—170):

133. $\log_2\sqrt[3]{16}+\log_8\sqrt[4]{2}-\log_3(27\sqrt{3})-\log_5\sqrt{5\sqrt{5}}$.

134. $\log_2\left(\dfrac{1}{4\sqrt{4}}\right)+\log_3\left(\dfrac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}}{27}\right)+\log_4\left(\dfrac{\sqrt[3]{8}}{128\sqrt{2}}\right)-\log_7\left(\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt[3]{49}}\right)$.

135. $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{9}+\log_{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}9-\log_{\frac{1}{8}}\sqrt[4]{32}+\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt[3]{128\sqrt{2}}$.

136. $\log_3 27-\log_{\sqrt{3}}27-\log_{\frac{1}{3}}27-\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\dfrac{64}{27}\right)$.

137. $\log_2\left(\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2\sqrt[5]{16}}}{\sqrt{2}}\right)-\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{2}}}+\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(9\sqrt[3]{3})$.

138. $\log_{0,4}\left(\frac{1}{5}\cdot\sqrt[3]{50}\right)+\log_{0,6}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)+\log_{0,32}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$.

139. $\log^2_{\sqrt[5]{5}}\sqrt{5}-\log_{\sqrt[5]{5}}(5\sqrt{5})+\log_{(\sqrt{3}+1)}(4+2\sqrt{3})$.

140. $\sqrt{\log_{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}}}+\log_{\sqrt{\sqrt{2}}}\sqrt[4]{\sqrt{2\sqrt{2}}}}$.

141. $\sqrt{\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{\frac{(\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}}+\log_{\sqrt[4]{3}}\sqrt[4]{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}}}}$.

142. $\left(\log_{\sqrt{5}}\frac{1}{5}\right)\sqrt{\log_{\frac{1}{5}}(5\sqrt{5})+\log_{\sqrt{5}}(5\sqrt{5})}$.

143. $2\cdot\log_5\sqrt[4]{5}+\frac{1}{2}\cdot\log_{\sqrt{5}}25-\log_5^2\sqrt{5}-2$.

144. $\frac{1}{2}\left(9^{\log_{25}5+1}-3^{2\left(\log_{16}2+\frac{1}{4}\right)}\right)-\log_{\sqrt{2}}(2\sqrt{2})$.

145. $\log_3\log_8\log_2 16$. 146. $\log_8\log_4\log_2 64$.
147. $\log_4\log_2\log_3 81$.

148. $\log_3\left[\log_2^2\left(\frac{1}{2}\right)+6\log_2\sqrt{2}+5\right]$.

149. $(\log_{\sqrt{5}}125:\log_5^2 25)\cdot\left(\log_{\frac{1}{5}}\sqrt{5}:\log_{0,2}\sqrt[3]{25}\right)$.

150. $\left[\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}+6\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}\right)-2\log_{\frac{1}{16}}\left(\frac{1}{4}\right)\right]:\log_{\sqrt{2}}\sqrt[5]{8}$.

151. $3^{1+\log_3 4}+2^{\log_2 3-2}$. 152. $4^{3\log_4 2}-(1,5)^{\log_{\frac{3}{2}}3-1}$.

153. $2^{3-\log_4 3}+7^{2\log_7 2+1}$. 154. $16^{1-\log_6 5}+4^{\frac{1}{2}\log_2 3+3\log_8 5}$.

155. $9^{2\log_3 2+4\log_{81}2}$, $\sqrt{3^{2+\frac{1}{2}\log_3 16}}$.

156. $(0,1)^{2\lg 0,1-1,5\lg 0,1}$, $(0,1)^{-\left(\lg\frac{8}{3}+2-\lg 20\right)}$.

157. $72\cdot\left(49^{\frac{1}{2}\log_7 9-\log_7 6}+5^{-\log_{\sqrt{5}}4}\right)$.

158. $\frac{\log_3 81}{\log_3 9}(36^{1-\log_6 2}+49^{-\log_7 6})$.

159. $\frac{\log_{\sqrt{2}}16}{\log_4\sqrt{2}}\left[\log_{\sqrt{2}}(2\sqrt[4]{2})+100^{\frac{1}{2}\lg 8-2\lg 2}\right]$.

160. $10^{\frac{1}{2}\lg 9-\lg 5+\lg 2}$, $7^{\log_{3\sqrt{3}}27}$.

161. $\log_{\sqrt{6}} 3\cdot\log_3 36+\log_{\sqrt{3}} 8\cdot\log_4 81$.

162. $72\log_2 \sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\log_{25}\sqrt[3]{2}+10\log_2\left(\frac{\sqrt[5]{8}}{2}\right)$.

163. $3^{\frac{2}{5}\log_3 32-\frac{1}{3}\log_3 64+\log_3 10}$.

164. $(0,2)^{\frac{1}{2}(9\log_{0,2}2-3\log_{0,2}4)}$.

165. $(\sqrt{2})^{3\log_{\sqrt{2}}5-2\log_{\sqrt{2}}25-\log_{\sqrt{2}}10+2\log_{\sqrt{2}}\sqrt{5}}$.

166. $(\lg 2+\lg 5+\lg 300-\lg 3)\cdot 3^{\frac{1}{5\log_5 3}}$.

167. $\left(\log_8 27-\log_{0,5}\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{\log_3 12}{\log_{36}3}-\frac{\log_3 4}{\log_{108}3}\right)$.

168. $\frac{\log_2\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}{\log_2^2\sqrt{7}}-\frac{2\log_{\sqrt{7}}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}{\log_{\sqrt{3}}\sqrt{7}}-\log_{\sqrt[6]{7}}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\cdot\log_{\sqrt{7}}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

169. $2^{\log_6 3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{1-\log_6 2,5}\cdot\log_9 2\cdot\log_4 81$.

170. $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7$.

Имеет ли смысл следующее числовое выражение (171—173):

171. $\sqrt{\log_2 1,4+\log_2 0,7}$; 172. $\sqrt{\lg 15+\lg 0,07}$; 173. $\lg\lg\lg 11$?

Какое из двух чисел больше (174—188):

174. $\lg 0,245$ или 0; 175. $\lg\left(\frac{\sqrt{71}}{4}\right)$ или 0;

176. $\lg\sqrt[6]{10}$ или $\log_2\sqrt{2}$; 177. $\log_4 5$ или $\log_6 5$;

178. $\log_9 10$ или $\log_{10} 11$; 179. $\log_3 2$ или $\log_2 3$;

180. $\log_4 2$ или $\log_{0,0625} 0,25$; 181. $\log_{189} 1323$ или $\log_{63} 147$;

182. $\log_5 11$ или $\log_5\sqrt{74}$; 183. $\frac{1}{2}+\lg 3$ или $\lg 19-\lg 2$;

184. $\log_{0,2} 0,8+\log_{0,2} 5$ или 0; 185. $\frac{\lg 5+\lg\sqrt{7}}{2}$ или $\lg\frac{5+\sqrt{7}}{2}$;

186. $3(\lg 7-\lg 5)$ или $2\left(\frac{1}{2}\lg 9-\frac{1}{3}\lg 8\right)$; 187. $\lg\lg\lg 5$ или $\lg^3 5$;

188. $\log_{\frac{1}{2}}\log_{\sqrt{2}} 5$ или $\log_{\sqrt{5}}\log_{\sqrt{5}} 7$?

Доказать справедливость следующего числового неравенства (189—205):

189. $\log_5 32<\log_2 5$. 190. $\log_5 14>\log_7 18$.

191. $\log_{16} 729<\log_3 16$. 192. $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}<\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2}$.

193. $\log_{\log_3 2}\frac{1}{2}>0$. 194. $\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_{4,5}\pi}<2$.

195. $(1+\log_2 5)\left(\log^2_{2\sqrt{3}} 5+1\right)>2\log_2 5$.

196. $\log_{\sqrt{3}}\sqrt{35}\left(1+\frac{1}{\log_{\sqrt{3}}7\cdot\log_{\sqrt{3}}5}\right)>4$.

197. $\log_{30}^3 2 \log_2 3 \log_2 5 < \frac{1}{27}$.

198. $3 \log_5 7 + \log_7 5 + \log_{49} 5 > 4$.

199. $\log_7 \sqrt[4]{45} \cdot \log_7 (45 \sqrt{3}) > 24 \log_7 \sqrt[4]{5} \log_7 \sqrt{3}$.

200. $\frac{\lg 1 + \lg 2 + \lg 3 + \lg 4}{4} > \frac{\lg 1 + \lg 2 + \lg 3}{3}$.

201. $\lg \frac{7}{2} > \frac{\lg 1 + \lg 2 + \lg 3 + \lg 4 + \lg 5 + \lg 6}{6}$.

202. $\log_2 \log_3 \frac{7}{6} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{6}{7}$.

203. $\log_{\frac{6}{5}} 2 \cdot \log_{\frac{12}{5}} 2 \cdot \log_2 \frac{24}{5} > 1$. 204. $\log_{\frac{1}{3}} 7 > \log_7 3 - \frac{5}{2}$.

205. $\log_{11} \left(\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} \right) < \log_7 (2 \sqrt[3]{3})$.

206. Зная, что $\log_6 2 = a$, найти $\log_{24} 72$.

207. Зная, что $\log_{36} 8 = b$, найти $\log_{36} 9$.

208. Зная, что $\log_4 125 = c$, найти $\log_{10} 64$.

209. Зная, что $\log_{100} 3 = \alpha$ и $\log_{100} 2 = \beta$, найти $\log_5 6$.

210. Зная, что $\log_6 15 = m$ и $\log_{12} 18 = n$, найти $\log_{25} 24$.

§ 1. Углы и их измерение

Понятие угла. Пусть даны два совпадающих луча: луч OA и луч OB (рис. 37).

Пусть луч OA, поворачиваясь в плоскости вокруг точки O, совершит некоторый поворот. Тогда для любого такого поворота луч OB считается *неподвижным* (начальным) лучом поворота, а луч OA — *подвижным*, совершившим данный поворот.

Любой поворот подвижного луча OA от неподвижного луча OB может быть совершен в двух противоположных направлениях (по часовой и против часовой стрелки). Если на подвижном луче OA приспособить пишущее устройство, равномерно удаляющееся от точки O вдоль луча OA, то при вращении луча OA оно будет оставлять след на плоскости. После того как луч OA совершит некоторый поворот, этот след будет представлять собой раскручивающуюся вокруг точки поворота O кривую, которая начинается у неподвижного луча OB и оканчивается у подвижного

Рис. 37.

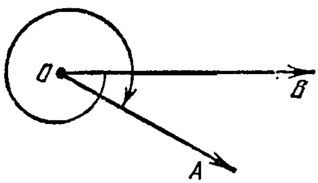


Рис. 38.

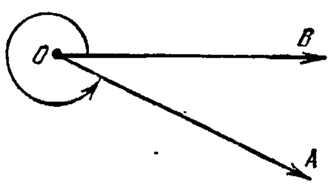


Рис. 39.

луча OA. С помощью такой кривой на рисунках показывают повороты. При этом возле подвижного луча кривая обязательно оканчивается стрелкой, указывающей направление совершенного поворота.

На рис. 38 показан один из поворотов по часовой стрелке. На рис. 39 показан один из поворотов против часовой стрелки.

Пусть подвижный луч OA совершил такой поворот по часовой стрелке, что луч OA впервые совпал с начальным лучом OB.

Этот поворот принято называть *полным оборотом по часовой стрелке* (рис. 40).

Пусть подвижный луч OA совершил такой поворот против часовой стрелки, что луч OA впервые совпал с начальным лучом OB. Этот поворот принято называть *полным оборотом против часовой стрелки* (рис. 41).

Рис. 40.

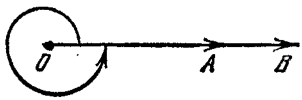


Рис. 41.

На рис. 42 показан поворот, равный трем полным оборотам против часовой стрелки.

На рис. 43 показан поворот, равный двум полным оборотам по часовой стрелке.

Итак, из рассмотренных примеров ясно, как изобразить на рисунке любой поворот.

Пусть подвижный луч OA совершил некоторый поворот в плоскости вокруг точки O от неподвижного луча OB. Тогда принято считать, что тем самым образован некоторый угол α, и в таком

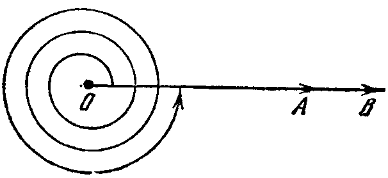


Рис. 42.

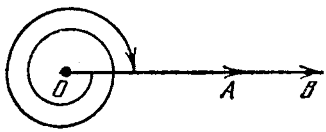


Рис. 43.

случае говорят, что подвижный луч OA задает угол α, соответствующий этому повороту. Точку O называют вершиной угла α, неподвижный луч OB — началом отсчета угла α, подвижный луч OA — подвижным лучом, задающим угол α. Неподвижный луч OB (начало отсчета для любого угла) на рисунках принято располагать горизонтально вправо. Принято считать: если подвижный луч совершил некоторый поворот против часовой стрелки, то он задает соответствующий *положительный угол*; если подвижный луч совершил некоторый поворот по часовой стрелке, то он задает соответствующий *отрицательный угол*; если подвижный луч не совершил поворота, то он задает *нулевой угол*.

Например, если подвижный луч OA совершил полный оборот против часовой стрелки, то он задает *положительный полный угол*; если подвижный луч OA совершил полный оборот по часовой стрелке, то он задает *отрицательный полный угол*.

Градусная мера угла. Пусть подвижный луч OA совершил поворот, равный $\frac{1}{360}$ части полного оборота против часовой стрелки.

Тогда говорят, что подвижный луч OA задает угол, градусная мера которого равна *одному градусу*, или короче — угол в *один градус* (1°). Следовательно, положительный полный угол и угол в 360° — это один и тот же угол — угол, который задает подвижный луч OA, совершивший полный оборот против часовой стрелки (см. рис. 41).

Для частей угла в один градус приняты специальные наименования — *минута* и *секунда.*

Пусть подвижный луч OA совершил поворот, равный $\frac{1}{60}$ части поворота, соответствующего углу в один градус, против часовой

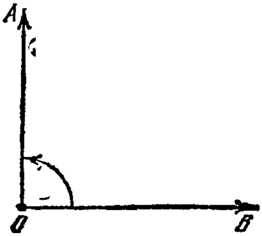


Рис. 44.

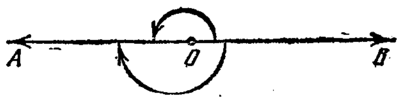


Рис. 45.

стрелки. Тогда говорят, что подвижный луч OA задает угол в *одну минуту* (1′). Следовательно, угол в 60′ и угол в 1° — это один и тот же угол.

Пусть подвижный луч OA совершил поворот, равный $\frac{1}{60}$ части поворота, соответствующего углу в одну минуту, против часовой стрелки. Тогда говорят, что подвижный луч OA задает угол в *одну секунду* (1″). Следовательно, угол в 60″ и угол в 1′ — один и тот же угол.

Пусть подвижный луч OA совершил поворот, равный $\frac{1}{4}$ части полного оборота против часовой стрелки. Тогда говорят, что подвижный луч OA задает *положительный прямой угол*, или угол в 90° (рис. 44).

Пусть подвижный луч OA совершил поворот, равный $\frac{1}{2}$ части полного оборота против часовой стрелки. Тогда говорят, что подвижный луч OA задает *развернутый положительный угол*, или угол в 180° (рис. 45).

Пусть подвижный луч OA не совершил никакого поворота, тогда говорят, что подвижный луч OA задает *нулевой угол*, или угол в 0° (см. рис. 37).

В таких случаях иногда говорят, что подвижный луч OA совершил *нулевой поворот.*

Пусть подвижный луч OA совершил поворот, равный $\frac{1}{2}$ части полного оборота по часовой стрелке. Тогда говорят, что подвижный луч OA задает *развернутый отрицательный* угол, или угол в (—180°) (см. рис. 45).

Пусть подвижный луч OA совершил поворот, равный $\frac{1}{4}$ части полного оборота по часовой стрелке. Тогда подвижный луч OA задает *отрицательный прямой угол*, или угол в (—90°) (рис. 46).

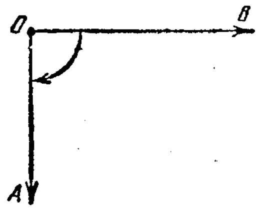


Рис. 46.

Радианная мера угла. Пусть подвижный луч OA совпадает с неподвижным лучом OB, не совершив поворота. Возьмем произвольную точку M на неподвижном луче OB и точку N подвижного луча OA, которая совпадает с точкой M. Проведем окружность с центром в точке O радиусом R, равным длине отрезка ON (рис. 47).

Если подвижный луч OA будет вращаться вокруг точки O, то точка N будет двигаться по этой окружности.

Пусть подвижный луч OA совершил такой поворот против часовой стрелки, что точка N, двигаясь по окружности, прошла расстояние, равное радиусу этой окружности. Тогда говорят, что

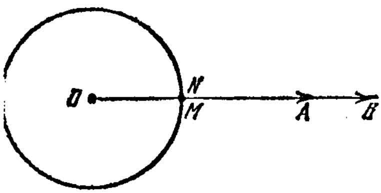


Рис. 47.

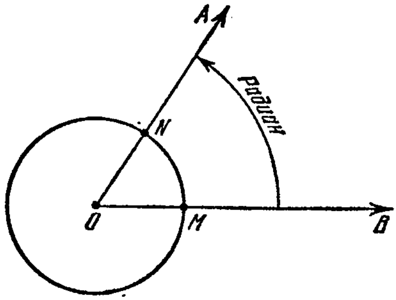


Рис. 48.

подвижный луч OA задает угол, радианная мера которого равна одному радиану, или короче—*угол в один радиан* (рис. 48).

Пусть дано положительное число β. Пусть подвижный луч OA совершил такой поворот против часовой стрелки, что точка N, двигаясь по окружности, прошла расстояние S, равное βR, тогда говорят, что подвижный луч OA задает *угол в* β *радиан.*

Пусть дано отрицательное число β. Пусть подвижный луч OA совершил такой поворот по часовой стрелке, что точка N, двигаясь по окружности, прошла расстояние S, равное $|\beta| R$, тогда говорят, что подвижный луч OA задает *угол в* β *радиан.*

Таким образом, радианную меру любого угла определяют следующим образом. Пусть дан некоторый угол α, задаваемый подвижным лучом OA. *Радианной мерой угла* α называют такое число, абсолютная величина которого равна отношению расстояния S, пройденного по окружности радиуса R точкой N подвижного луча OA, к радиусу R и знак которого определяется направлением совершенного поворота, другими словами, радианной мерой угла α называют положительное число $\frac{S}{R}$, если поворот совершен против часовой стрелки, или отрицательное число $\left(-\frac{S}{R}\right)$, если поворот совершен по часовой стрелке.

Если угол задается подвижным лучом OA, не совершившим поворота, то угол α будет нулевым и радианную меру этого угла полагают равной нулю.

Пусть подвижный луч OA совершил полный оборот против часовой стрелки, тогда точка N подвижного луча OA, двигаясь по окружности радиуса R, прошла расстояние $2\pi R$. Значит, в

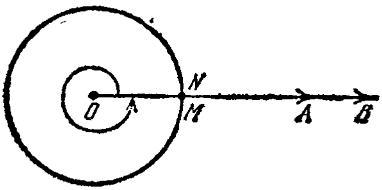


Рис. 49.

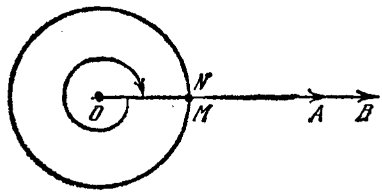


Рис. 50.

этом случае подвижный луч OA задает угол, радианная мера которого равна 2π радиан, или короче, угол в 2π радиан (рис. 49), т. е. угол в $360°$ и угол в 2π радиан,— один и тот же угол (см. рис. 41 и рис. 49).

Если подвижный луч OA совершил полный оборот по часовой стрелке, то он задает угол в (-2π) радиан (рис. 50), т. е. угол в $(-360°)$ и угол в (-2π) радиан, — один и тот же угол (см. рис. 40 и рис. 50).

Пусть подвижный луч OA совершил $\frac{1}{4}$ часть полного оборота против часовой стрелки. Тогда точка N подвижного луча, двигаясь по окружности радиуса R, прошла расстояние $\frac{\pi R}{2}$. Следовательно, если подвижный луч OA совершил $\frac{1}{4}$ часть полного оборота против часовой стрелки, то он задает угол в $\frac{\pi}{2}$ радиан (рис. 51), т. е. угол в $90°$ и угол в $\frac{\pi}{2}$ радиан,— один и тот же угол (см. рис. 44 и рис. 51).

Если подвижный луч OA совершил $\frac{1}{4}$ часть полного оборота по часовой стрелке, то он задает угол в $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ радиан (рис. 52), т. е. угол в $(-90°)$ и угол в $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ радиан,— один и тот же угол (см. рис. 46 и рис. 52).

Пусть подвижный луч OA совершил $\frac{1}{2}$ часть полного оборота против часовой стрелки. Тогда точка N подвижного луча OA, двигаясь по окружности радиуса R, прошла расстояние πR, следовательно, в этом случае, задаваемый подвижным лучом OA угол, будет углом в π радиан (рис. 53), т. е. угол в $180°$ и угол в π радиан — один и тот же угол (см. рис. 45 и рис. 53).

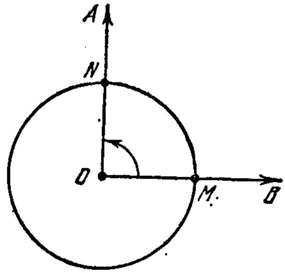


Рис. 51.

Аналогично угол в $(-180°)$ и угол в $(-\pi)$ радиан — один и тот же угол — угол, задаваемый подвижным лучом OA, совершившим $\frac{1}{2}$ часть полного оборота по часовой стрелке (см. рис. 45 и рис. 53).

Если радианная мера некоторого угла есть β радиан, а градусная мера того же самого угла равна α градусов, то эти числа связаны пропорцией

$$\alpha° : 360° = \beta : 2\pi.$$

Пользуясь этой пропорцией, можно переводить радианную меру угла в градусную и наоборот — градусную меру в радианную. Рассмотренные выше примеры — частные случаи этой пропорции. Приведем еще примеры.

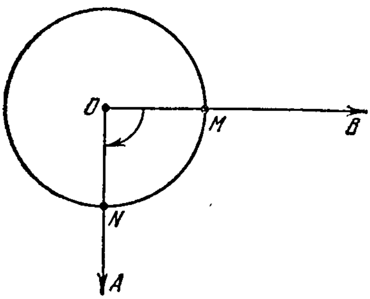


Рис. 52.

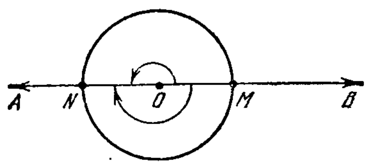


Рис. 53.

Угол в $30°$ и угол в $\frac{\pi}{6}$ радиан есть один и тот же угол. Это вытекает из справедливости пропорции $30° : 360° = \frac{\pi}{6} : 2\pi$.

Угол в $45°$ и угол в $\frac{\pi}{4}$ радиан есть один и тот же угол. Это вытекает из справедливости пропорции $45° : 360° = \frac{\pi}{4} : 2\pi$. Угол в $60°$ и угол в $\frac{\pi}{3}$ радиан есть один и тот же угол. Это вытекает из справедливости пропорции $60° : 360° = \frac{\pi}{3} : 2\pi$.

Замечание. Всюду в дальнейшем будет использоваться только радианная мера угла. В обозначениях меры угла в радианах почти всегда будет опускаться слово «радиан». Поэтому в дальнейшем

— под углом π понимается угол в π радиан, т. е. угол, радианная мера которого равна π радиан;

— под углом $\frac{7}{9}$ понимается угол в $\frac{7}{9}$ радиан, т. е. угол, радианная мера которого равна $\frac{7}{9}$ радиан;

— под углом α (где α — некоторое фиксированное число) понимается угол в α радиан, т. е. угол, радианная мера которого равна α радиан;

— под углом $(\alpha+\beta)$ понимается угол, радианная мера которого равна $(\alpha+\beta)$ радиан;

— под углом $(\alpha-\beta)$ понимается угол, радианная мера которого равна $(\alpha-\beta)$ радиан.

Отметим еще, что под словами «угол α такой, что $\alpha\neq\beta+k\gamma$, $k\in Z$» понимается, что угол α такой, что его радианная мера не равна числу $(\beta+k\gamma)$ ни при каком целом числе k.

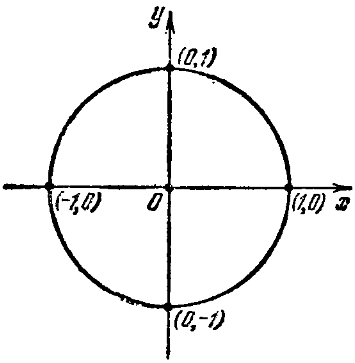


Рис. 54.

Единичная окружность. Пусть на плоскости введена прямоугольная система координат xOy с положительной полуосью абсцисс Ox, направленной вправо, и положительной полуосью ординат Oy, направленной вверх. Пусть дана окружность радиуса, равного единице измерения длин, и с центром в начале координат (рис. 54). Такую окружность принято называть *единичной окружностью*.

Примем за вершину любого угла начало координат — точку $O(0, 0)$. Положительную полуось абсцисс примем за неподвижный луч, т. е. за начало отсчета для любого угла α.

Пусть дан любой угол α; очевидно, что подвижный луч OA, задающий этот угол α, обязательно пересекает единичную окружность в некоторой точке $Q(a, b)$. Столь же очевидно, что для любой точки $R(c, d)$ единичной окружности обязательно найдется угол β такой, что подвижный луч OA, задающий этот угол β, пересекает единичную окружность именно в этой точке $R(c, d)$.

Определим координаты некоторых точек единичной окружности.

Прежде всего ясно (рис. 55), что: подвижный луч OA, задающий нулевой угол, пересекает единичную окружность в точке $M(1; 0)$; подвижный луч OA, задающий угол π, пересекает единичную окружность в точке P $(-1;\ 0)$; подвижный луч OA, задающий угол $\frac{\pi}{2}$, пересекает единичную окружность в точке T $(0;\ 1)$; подвижный луч OA, задающий угол $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, пересекает единичную окружность в точке L $(0,\ -1)$.

Пусть подвижный луч OA, задающий угол $\frac{\pi}{4}$, пересекает единичную окружность в точке K (рис. 56). Вычислим ее координаты. Проведем через точку K прямую, параллельную оси Oy, пусть она пересекает ось Ox в точке K_1. Поскольку обе коор-

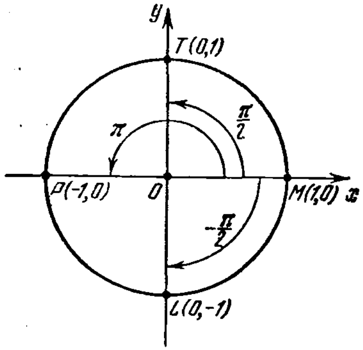


Рис. 55.

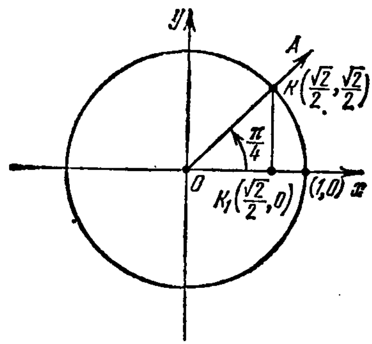


Рис. 56.

динаты точки K положительны, то они соответственно равны длинам катетов равнобедренного прямоугольного треугольника OK_1K. Согласно теореме Пифагора $|OK|^2=|OK_1|^2+|KK_1|^2$; так как $|OK_1|=|K_1K|$, то отсюда получаем, что $|OK_1|=|KK_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Поэтому абсцисса точки K равна ординате точки K и равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Значит, подвижный луч OA, задающий угол $\frac{\pi}{4}$, пересекает единичную окружность в точке $K\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Пусть подвижный луч OA, задающий угол $\frac{\pi}{6}$, пересекает единичную окружность в точке S (рис. 57). Вычислим ее координаты. Проведем через точку S прямую, параллельную оси Oy, пусть она пересекает ось Ox в точке S_1. Поскольку обе координаты точки S положительны, то они соответственно равны длинам катетов прямоугольного треугольника OS_1S. Из геометрии известно, что в прямоугольном треугольнике длина катета, лежащего против угла $\frac{\pi}{6}$, равна половине длины гипотенузы. Значит, $|SS_1|=\frac{1}{2}$. По теореме Пифагора $|OS_1|^2=|OS|^2-|SS_1|^2$.

Откуда $|OS_1|=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому абсцисса точки S равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а ее ордината равна $\frac{1}{2}$.

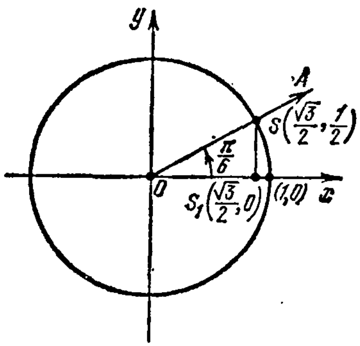


Рис. 57.

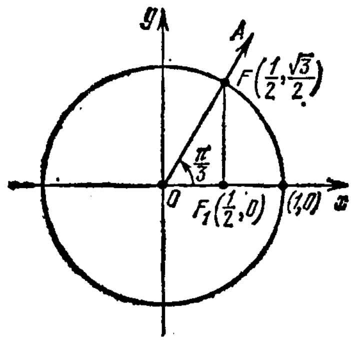


Рис. 58.

Значит, подвижный луч OA, задающий угол $\frac{\pi}{6}$, пересекает единичную окружность в точке $S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Пусть подвижный луч OA, задающий угол $\frac{\pi}{3}$, пересекает единичную окружность в точке F (рис. 58). Вычислим ее коор-

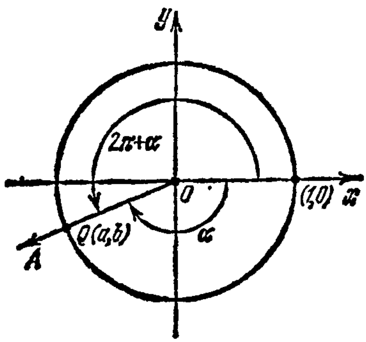


Рис. 59.

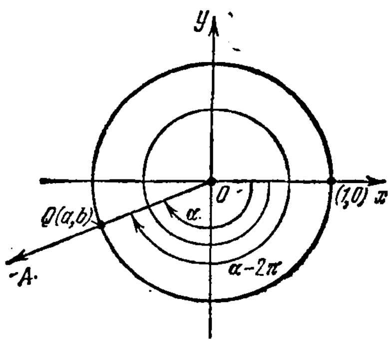


Рис. 60.

динаты. Проведем через точку F прямую, параллельную оси Oy, пусть она пересекает ось Ox в точке F_1. Поскольку обе координаты точки F положительны, то они соответственно равны длинам катетов прямоугольного треугольника. Используя сформулированное выше утверждение о длине катета, лежащего против угла $\frac{\pi}{6}$, получаем, что $|OF_1|=\frac{1}{2}$, но тогда, применяя теорему Пифагора, находим, что $|F_1F| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому абсцисса точки F равна $\frac{1}{2}$, а ее ордината равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Значит, подвижный луч OA, задающий угол $\frac{\pi}{3}$, пересекает единичную окружность в точке $F\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

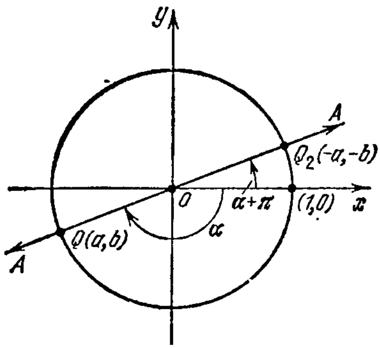


Рис. 61.

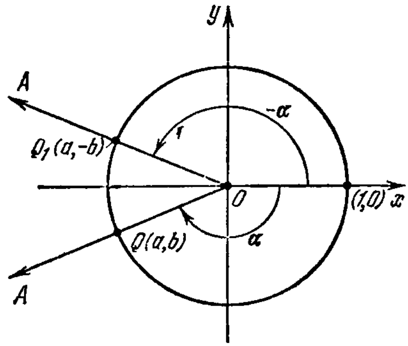


Рис. 62.

Пусть подвижный луч OA, задающий угол α, пересекает единичную окружность в некоторой точке $Q(a, b)$. Тогда легко видеть справедливость следующих утверждений:

1. *Подвижный луч OA, задающий угол* $(\alpha+2\pi)$, *пересекает единичную окружность в той же точке* $Q(a, b)$ (рис. 59).

2. *Подвижный луч OA, задающий угол* $(\alpha-2\pi)$, *пересекает единичную окружность в той же точке* $Q(a, b)$ (рис. 60).

3. *Подвижный луч, задающий угол* $(\alpha+\pi)$ *пересекает единичную окружность в точке* $Q_2(-a, -b)$, *симметричной точке* $Q(a, b)$ *относительно начала координат — точки* $O(0, 0)$ (рис. 61).

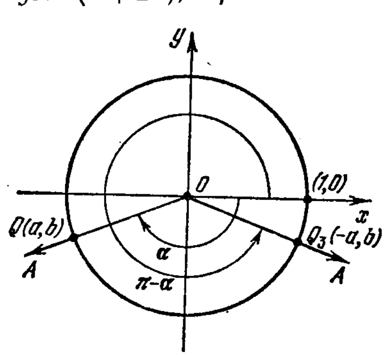


Рис. 63.

4. *Подвижный луч, задающий угол* $(-\alpha)$, *пересекает единичную окружность в точке* $Q_1(a, -b)$, *симметричной точке* $Q(a, b)$ *относительно оси* Ox (рис. 62).

5. *Подвижный луч, задающий угол* $(\pi-\alpha)$, *пересекает единичную окружность в точке* $Q_3(-a, b)$, *симметричной точке* $Q(a, b)$ *относительно оси* Oy (рис. 63).

§ 2. Синус и косинус угла

Пусть на плоскости введена прямоугольная система координат xOy с положительной полуосью абсцисс Ox, направленной вправо, и положительной полуосью ординат Oy, направленной вверх (рис. 64). Пусть дана единичная окружность.

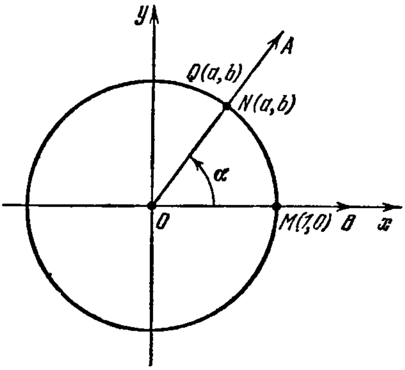


Рис. 64.

Примем за вершину любого угла начало координат — точку $O(0, 0)$. Положительную полуось абсцисс примем за неподвижный луч OB, т. е. за начало отсчета для любого угла α.

Пусть точка M есть общая точка неподвижного луча OB и единичной окружности. Тогда часть неподвижного луча OB — отрезок OM — будем называть единичным неподвижным радиусом, или началом отсчета углов.

Пусть подвижный луч OA совпадает с неподвижным лучом OB, не совершив поворота. Точку подвижного луча OA, которая совпадает с точкой M неподвижного луча OB, обозначим через N. Тогда часть подвижного луча OA — отрезок ON — будем называть единичным подвижным радиусом, а точку N — концом единичного подвижного радиуса.

Если подвижный луч OA совершит некоторый поворот, то вместе с ним совершит этот же поворот и единичный подвижный радиус ON. Поэтому можно считать, что не только подвижный луч OA задает некоторый угол α, но и единичный подвижный радиус ON задает этот же угол α.

Условимся в дальнейшем говорить: единичный подвижный радиус ON задает угол α, понимая под этим, что соответствующий подвижный луч OA задает тот же самый угол α.

Пусть конец подвижного единичного радиуса ON, задающего угол α, совпадает с точкой $Q(a, b)$ единичной окружности; тогда координаты точки Q будем называть координатами конца единичного подвижного радиуса, задающего угол α, и будем писать: $N(a, b)$.

Синус угла. Пусть дан любой угол α. Число, равное ординате конца подвижного единичного радиуса, задающего этот угол α, называется *синусом* угла α и обозначается $\sin\alpha$ (рис. 65).

Из определения следует, что для любого угла α, существует синус этого угла и притом единственный.

Примеры.

Ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего нулевой угол, равна нулю (рис. 66), следовательно, $\sin 0 = 0$.

Ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол π, равна нулю (см. рис. 66), следовательно, $\sin\pi = 0$.

Ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\frac{\pi}{2}$, равна единице (рис. 67), следовательно, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

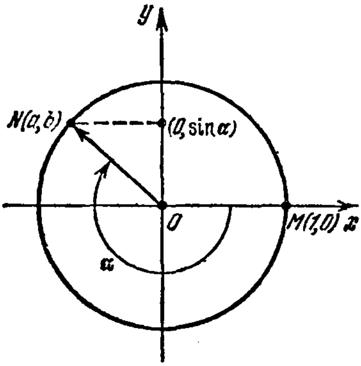


Рис. 65.

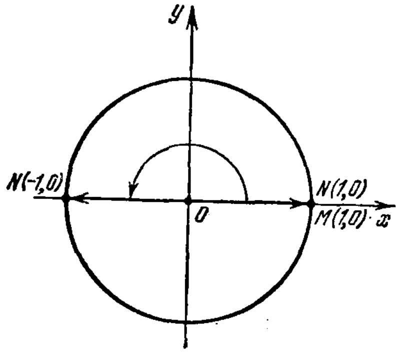


Рис. 66.

Ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, равна (-1) (см. рис. 67), следовательно, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

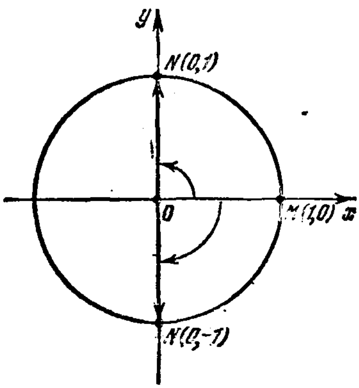


Рис. 67.

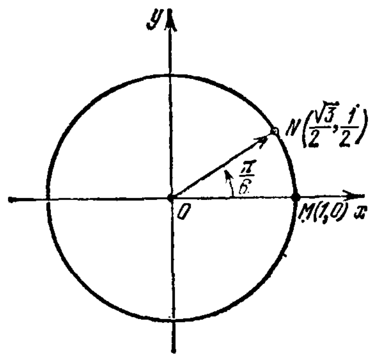


Рис. 68.

Ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\frac{\pi}{6}$, равна $\frac{1}{2}$ (рис. 68), следовательно, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\frac{\pi}{4}$ равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 69), следовательно, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\frac{\pi}{3}$, равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 70), следовательно, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Отметим некоторые свойства синуса угла.

Так как для любого угла α ордината конца подвижного единичного радиуса, задающего этот угол α, не может быть меньше,

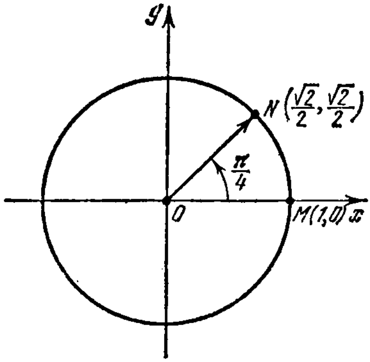


Рис. 69.

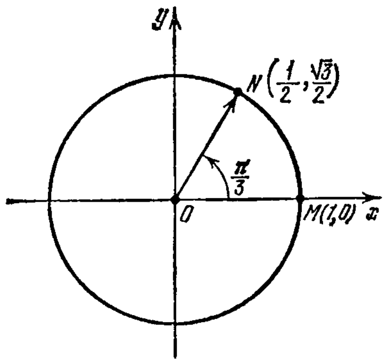


Рис. 70.

чем (— 1), и больше, чем 1, а заключена между ними, включая (— 1) и 1, то для любого угла α справедливо двойное неравенство $-1\leqslant\sin\alpha\leqslant 1$.

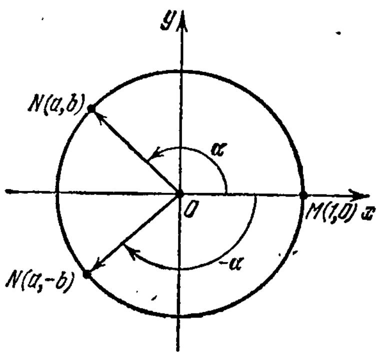


Рис. 71.

Пусть ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол α, есть число b, тогда, как указано выше, ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $(-\alpha)$ есть число $(-b)$ (рис. 71). Поэтому для любого угла α справедливо равенство

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.$$

Это свойство синуса угла можно сформулировать так: знак минус можно выносить за знак синуса или вносить под знак синуса, т. е.

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha=\sin(-\alpha).$$

Примеры. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$;

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Как указано выше, ордината конца единичного радиуса, задающего угол α, равна ординате конца единичного радиуса, задающего угол $(\pi-\alpha)$ (рис. 72). Поэтому для любого угла α справедливо равенство

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha.$$

Примеры. $\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};$$

$$\sin\frac{2\pi}{3}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пусть ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол α, есть число b, тогда, как указано выше, ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего угол

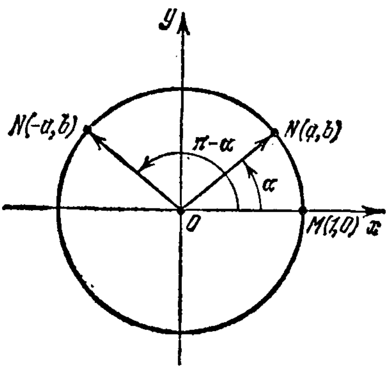


Рис. 72.

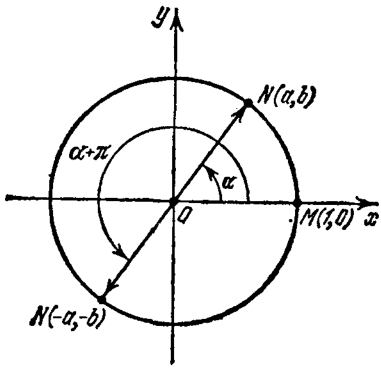


Рис. 73.

$(\pi+\alpha)$ есть число $(-b)$ (рис. 73). Поэтому для любого угла α справедливо равенство

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha.$$

Примеры. $\sin\frac{5\pi}{4}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2};$$

$$\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Как указано выше, ордината конца подвижного единичного радиуса, задающего угол α, равна ординате конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $(\alpha+2\pi)$, и равна ординате конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $(\alpha-2\pi)$. Поэтому для любого угла α справедливы равенства

$$\sin\alpha=\sin(\alpha+2\pi),$$
$$\sin\alpha=\sin(\alpha-2\pi).$$

Используя эти равенства и применяя метод математической индукции, можно показать, что для любого целого числа n и любого угла α справедливы равенства

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi n) = \sin(\alpha - 2\pi n).$$

Это свойство синуса угла можно сформулировать так: синус любого угла α повторяется при изменении угла на $2\pi n$, где n — любое целое число.

Примеры. $\sin\frac{13\pi}{6} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

$$\sin\frac{9\pi}{4} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin\frac{7\pi}{3} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin\frac{11\pi}{6} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2};$$

$$\sin\frac{7\pi}{4} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin\frac{5\pi}{3} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 10\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1;$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} - 24\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Пусть дано число $\beta \in (0, \pi)$. Рассмотрим угол, радианная мера которого есть это число β. Конец единичного подвижного радиуса, задающего этот угол, совпадает с некоторой точкой

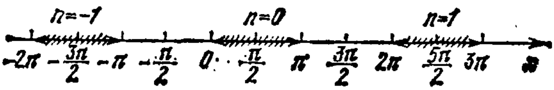


Рис. 74.

единичной окружности, лежащей или в I или во II четвертях, или на положительной полуоси ординат. Поэтому ордината конца единичного подвижного радиуса, задающего этот угол, положительна, другими словами, синус этого угла положителен.

Учитывая, что $\sin\beta = \sin(\beta + 2\pi n)$ для любого целого числа n, можно утверждать, что $\sin\alpha$ положителен для любого угла α такого, что его радианная мера — число α — принадлежит при некотором целом n соответствующему интервалу $(2\pi n,\ \pi + 2\pi n)$. На числовой прямой (рис. 74) указаны такие интервалы, что для каждого числа α из любого такого интервала $\sin\alpha$ положителен.

Аналогично показывается, что справедливо и такое утверждение: $\sin\alpha$ — отрицателен для любого угла α такого, что его радианная мера — число α — принадлежит при некотором целом n

интервалу $(\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n)$. На числовой прямой (рис. 75) указаны такие интервалы, что для каждого числа α из любого такого интервала $\sin\alpha$ отрицателен.

Наконец, учитывая, что $\sin\alpha=\sin(\alpha+2\pi n)$ для любого целого числа n и что $\sin 0=\sin\pi=0$, получаем, что $\sin\alpha$ равен

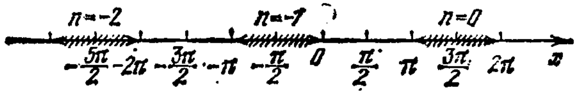


Рис. 75.

нулю для любого угла α такого, что его радианная мера — число α — равно при некотором целом m числу πm. На числовой прямой (рис. 76) указаны такие числа α, для каждого из которых $\sin\alpha$ равен нулю.

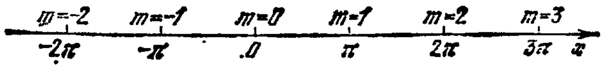


Рис. 76.

Арксинус числа. Часто возникает такая задача: для любого действительного числа a найти угол α такой, что его синус равен этому числу a.

Сразу отметим, что если $a>1$, а также если $a<-1$, то эта задача не имеет решения, так как по определению синуса угла нет такого угла, синус которого был бы больше, чем 1, или меньше, чем (-1).

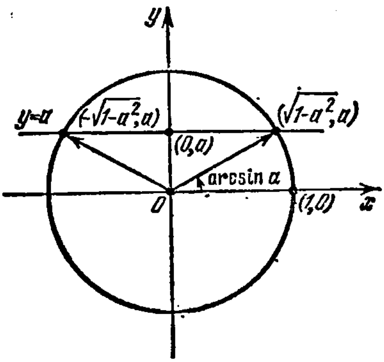


Рис. 77.

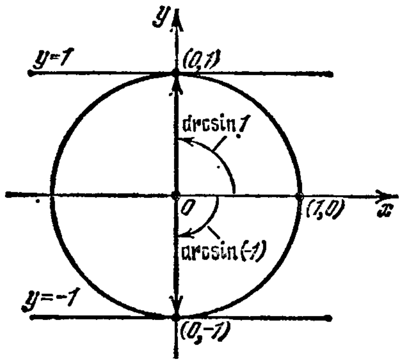


Рис. 78.

Если же $a\in[-1;\ 1]$, то можно показать, что существует бесконечно много углов таких, что синус каждого такого угла равен числу a. Действительно, прямая $y=a$ при $a\in[-1,\ 1]$ пересекает единичную окружность либо в двух точках (рис. 77), либо в одной (рис. 78). Но, как указано выше, для каждой такой точки единичной окружности существует угол α такой, что синус этого угла равен ординате этой точки, т. е. равен a. Далее, по свойству синуса

$$\sin\alpha=\sin(\alpha+2\pi n)$$

для любого угла α и любого целого числа n. Поэтому для любого целого числа n синус угла $(\alpha+2\pi n)$ равен числу a.

Принято следующее соглашение: тот угол, синус которого равен числу a и который взят из сегмента $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, называть *главным углом* и обозначать $\arcsin a$ (читается: арксинус числа a). Таким образом, по определению $\arcsin a$ — есть угол, удовлетворяющий одновременно двум условиям:

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin a\leqslant\frac{\pi}{2}, \quad \sin(\arcsin a)=a.$$

Легко видеть, что для любого числа $a\in[-1;\ 1]$ арксинус этого числа существует и притом единственный. Для любого числа $a\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$ арксинус этого числа не существует.

Примеры. 1. $\arcsin 0$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha=0$; ясно, что это есть нулевой угол, следовательно,

$$\arcsin 0=0.$$

2. $\arcsin 1$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha=1$; ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 78), следовательно,

$$\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

3. $\arcsin(-1)$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha=$ $=-1$; ясно, что это есть угол $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (см. рис. 78), следовательно,

$$\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}.$$

4. $\arcsin\frac{1}{2}$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{6}$, следовательно,

$$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

5. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; ясно, что это есть угол $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, следовательно,

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}.$$

6. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{3}$, следовательно,

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

Отметим некоторые свойства арксинуса числа, вытекающие из его определения. Для любого числа a, большего чем 1, а также для любого числа a, меньшего чем (-1), лишена смысла запись $\arcsin a$. Например, лишены смысла записи

$$\arcsin 2,\ \arcsin(-3),\ \arcsin(-\sqrt{5}),$$
$$\arcsin\pi,\ \arcsin(-3\pi),\ \arcsin\sqrt{\frac{\pi}{3}}.$$

Для любого числа $a\in[-1;\ 1]$ справедливо двойное неравенство

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin a\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Для любого числа $a\in[-1;\ 1]$ справедливо равенство

$$\sin(\arcsin a)=a.$$

Для любого угла $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ справедливо равенство

$$\arcsin(\sin\alpha)=\alpha.$$

Примеры. 1. Вычислить $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$. Поскольку $\frac{1}{3}\in[-1,\ 1]$, то $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

2. Вычислить $\arcsin\left(\sin\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$. Поскольку $\sqrt{\frac{\pi}{3}}\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin\left(\sin\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

3. Вычислить $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right)$. Поскольку $\frac{13\pi}{6}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$, то нельзя написать, что $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right)=\frac{13\pi}{6}$. Однако легко видеть, что $\sin\frac{13\pi}{6}=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$. Поэтому $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right)=\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Поскольку $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$. Итак, $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$.

4. Вычислить $\arcsin[\sin(-5)]$. Легко видеть, что $\sin(-5)=\sin(2\pi-5)$ и $(2\pi-5)\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому $\arcsin[\sin(-5)]=$

$= \arcsin[\sin(2\pi - 5)] = 2\pi - 5$. Итак, $\arcsin[\sin(-5)] = 2\pi - 5$. Наконец, отметим еще одно свойство арксинуса числа a: для любого числа $a \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a.$$

Действительно, по определению

$$\arcsin a = \alpha, \text{ причем } \sin\alpha = a \quad \text{и } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\arcsin(-a) = \beta, \text{ причем } \sin\beta = -a \text{ и } \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Отсюда очевидно, что $\beta = -\alpha$, т. е.

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a.$$

Примеры.

1. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$.
2. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$.
3. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

Косинус угла. Пусть дан любой угол α. Число, равное абсциссе конца подвижного единичного радиуса, задающего этот угол α, называется *косинусом* угла α и обозначается $\cos\alpha$ (рис. 79).

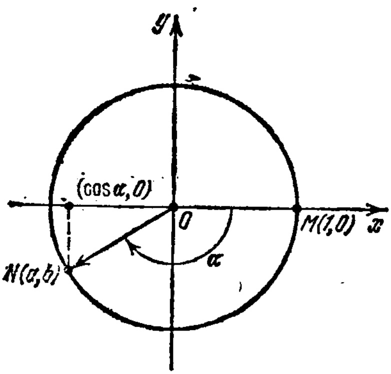


Рис. 79.

Из определения следует, что для любого угла α существует косинус этого угла и притом единственный.

Примеры.

Абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\frac{\pi}{2}$, равна нулю (см. рис. 67), следовательно, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, равна нулю (см. рис. 67), следовательно, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего нулевой угол, равна 1 (см. рис. 66), следовательно, $\cos 0 = 1$.

Абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол π, равна (-1) (см. рис. 66), следовательно, $\cos\pi = -1$.

Абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\frac{\pi}{6}$, равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. рис. 68), следовательно, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\frac{\pi}{4}$ равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (см. рис. 69), следовательно, $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $\frac{\pi}{3}$, равна $\frac{1}{2}$ (см. рис. 70), следовательно, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

Отметим некоторые свойства косинуса угла.

Так как для любого угла α абсцисса конца подвижного единичного радиуса, задающего этот угол α, не может быть меньше чем (-1) и больше чем 1, а заключена между ними, включая (-1) и 1, то для любого угла α справедливо двойное неравенство

$$-1\leqslant\cos\alpha\leqslant 1.$$

Как показано выше, абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол α, равна абсциссе конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $(-\alpha)$. Поэтому для любого угла α справедливо равенство

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

Это свойство косинуса угла можно сформулировать так: знак перед углом, стоящим под знаком косинуса, можно менять, не меняя значения косинуса угла, т. е.

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha=\cos(-\alpha).$$

Примеры.
$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

Пусть абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол α, есть число a; тогда, как показано выше, абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $(\pi-\alpha)$, есть число $(-a)$ (см. рис. 72). Поэтому для любого угла α справедливо равенство

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha.$$

Примеры.
$$\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$$

Пусть абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол α, есть число a; тогда, как указано выше, абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $(\pi+\alpha)$, есть число $(-a)$ (см. рис. 73). Поэтому для любого угла α справедливо равенство

$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha.$$

Примеры. $\cos\frac{5\pi}{4}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{4\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$$

Как указано выше, абсцисса конца подвижного единичного радиуса, задающего угол α, равна абсциссе конца подвижного единичного радиуса, задающего угол $(\alpha+2\pi)$, и равна абсциссе конца единичного подвижного радиуса, задающего угол $(\alpha-2\pi)$. Поэтому для любого угла α справедливы равенства

$$\cos\alpha=\cos(\alpha+2\pi),$$
$$\cos\alpha=\cos(\alpha-2\pi).$$

Используя эти равенства и применяя метод математической индукции, можно показать, что для любого целого числа n и любого угла α справедливы равенства

$$\cos\alpha=\cos(\alpha+2\pi n)=\cos(\alpha-2\pi n).$$

Это свойство косинуса угла можно сформулировать так: косинус любого угла α повторяется при изменении угла на $2\pi n$, где n — любое целое число.

Примеры. $\cos\frac{13\pi}{6}=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\cos\frac{9\pi}{4}=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\frac{11\pi}{6}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{7\pi}{4}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\frac{5\pi}{3}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{7\pi}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-10\pi\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}-102\pi\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-12\pi\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

Пусть дано число $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Рассмотрим угол, радианная мера которого есть число β. Конец единичного подвижного радиуса, задающего этот угол, совпадает с некоторой точкой единичной окружности, лежащей или в I или в IV четвертях,

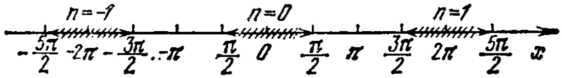


Рис. 80.

или на положительной полуоси абсцисс. Поэтому абсцисса конца единичного подвижного радиуса, задающего этот угол, положительна. Другими словами, косинус этого угла положителен. Учитывая, что $\cos\beta = \cos(\beta + 2\pi n)$ для любого целого числа n, можно утверждать, что $\cos\alpha$ положителен для любого угла α такого, что его радианная мера — число α — принадлежит при некотором целом n интервалу $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$. На числовой прямой (рис. 80) указаны такие интервалы, что для каждого числа α из любого такого интервала $\cos\alpha$ положителен.

Аналогично показывается, что $\cos\gamma$ отрицателен для любого угла γ такого, что его радианная мера — число γ — принадлежит при некотором целом n интервалу $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$. На числовой прямой (рис. 81) указаны такие интервалы, что для каждого числа γ из любого такого интервала $\cos\gamma$ отрицателен.

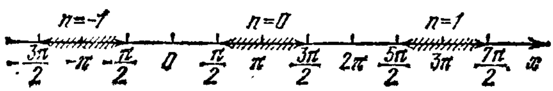


Рис. 81.

Наконец, учитывая, что $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi n)$ для любого целого числа n и что $\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, получаем, что $\cos\alpha$ равен нулю для любого угла α такого, что его радианная мера — число α — равно при некотором целом n числу $\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right)$. На числовой

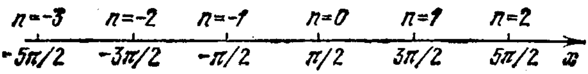


Рис. 82.

прямой (рис. 82) указаны такие числа α, для каждого из которых $\cos\alpha$ равен нулю.

Арккосинус числа. Часто возникает такая задача: для любого действительного числа a найти угол α такой, что его косинус равен этому числу a.

Сразу отметим, что если $a > 1$, а также если $a < -1$, то эта задача не имеет решения, так как по определению косинуса угла, нет такого угла, косинус которого был бы больше, чем 1, или меньше, чем (-1).

Если же $a \in [-1;\ 1]$, то можно показать, что существует бесконечно много углов таких, что косинус каждого такого угла равен числу a.

Действительно, прямая $x = a$ при $a \in [-1;\ 1]$ пересекает единичную окружность либо в двух точках (рис. 83), либо в одной

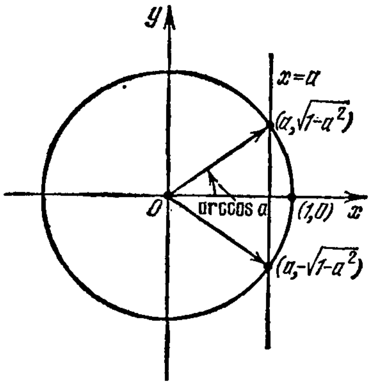


Рис. 83.

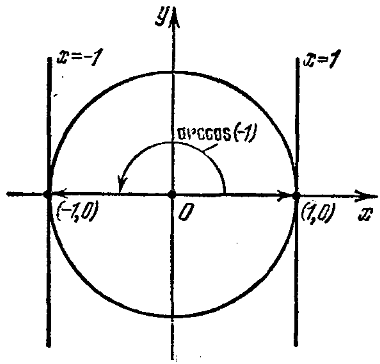


Рис. 84.

(рис. 84). Но, как указано выше, для каждой такой точки существует угол α такой, что косинус этого угла равен абсциссе этой точки, т. е. равен a. Далее по свойству косинуса

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi n)$$

для любого угла α и любого целого числа n. Поэтому для любого целого числа n косинус угла $(\alpha + 2\pi n)$ равен числу a.

Принято следующее соглашение: тот угол, косинус которого равен числу a и который взят из сегмента $[0,\ \pi]$, называть *главным углом* и обозначать $\arccos a$ (читается: арккосинус числа a). Таким образом, по определению $\arccos a$ есть угол, удовлетворяющий одновременно двум условиям:

$$0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi, \quad \cos(\arccos a) = a.$$

Легко видеть, что для любого числа $a \in [-1,\ 1]$ арккосинус этого числа существует и притом единственный. Для любого числа $a \in (-\infty,\ -1) \cup (1,\ +\infty)$ арккосинус этого числа не существует.

Примеры. 1. $\arccos 1$ есть такой угол α, что $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ и $\cos\alpha = 1$. Очевидно, что это есть нулевой угол (см. рис. 84), следовательно, $\arccos 1 = 0$.

2. $\arccos 0$ есть такой угол α, что $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ и $\cos\alpha = 0$. Очевидно, что это есть угол $\frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

3. $\arccos(-1)$ есть такой угол α, что $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ и $\cos\alpha = -1$. Очевидно, что это есть угол π (см. рис. 84) и, следовательно, $\arccos(-1) = \pi$.

4. $\arccos\frac{1}{2}$ есть такой угол α, что $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ и $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{3}$ и, следовательно, $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

5. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ есть такой угол α, что $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ и $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{4}$ и, следовательно, $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

6. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ есть такой угол α, что $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ и $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{6}$ и, следовательно, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Отметим некоторые свойства арккосинуса числа, вытекающие из его определения.

Для любого числа a, меньшего чем (-1), а также для любого числа a, большего чем 1, лишена смысла запись $\arccos a$. Например, лишены смысла записи

$$\arccos\sqrt{3}, \quad \arccos\left(-\frac{5}{4}\right), \quad \arccos\pi$$

$$\arccos\left(-\frac{11}{10}\right), \quad \arccos\sqrt{\frac{10}{\pi}}, \quad \arccos\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Для любого числа $a \in [-1;\ 1]$ справедливо двойное неравенство

$$0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi.$$

Для любого числа $a \in [-1;\ 1]$ справедливо равенство

$$\cos(\arccos a) = a.$$

Для любого угла $\alpha \in [0;\ \pi]$ справедливо равенство

$$\arccos(\cos\alpha) = \alpha.$$

Примеры. 1. Вычислить $\cos(\arccos 0)$. Поскольку $0 \in [-1;\ 1]$, то $\cos(\arccos 0) = 0$.

2. Вычислить $\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$. Поскольку $\frac{1}{3} \in [-1;\ 1]$, то $\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

3. Вычислить $\arccos(\cos\sqrt{\pi})$. Поскольку $\sqrt{\pi} \in [0,\ \pi]$, то $\arccos(\cos\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}$.

4. Вычислить $\arccos[\cos(-6)]$. Так как $(-6) \notin [0,\ \pi]$, то нельзя написать, что $\arccos[\cos(-6)] = -6$. Однако легко видеть, что $\cos(-6) = \cos(2\pi - 6)$ и $(2\pi - 6) \in [0,\ \pi]$. Поэтому $\arccos[\cos(-6)] = \arccos[\cos(2\pi - 6)] = 2\pi - 6$.

Наконец, отметим еще одно свойство арккосинуса числа: для любого числа $a \in [-1;\ 1]$ справедливо равенство

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a.$$

Действительно, по определению

$$\arccos a = \alpha, \text{ причем } \cos\alpha = a \text{ и } \alpha \in [0,\ \pi],$$
$$\arccos(-a) = \beta, \text{ причем } \cos\beta = -a \text{ и } \beta \in [0,\ \pi].$$

Отсюда видно, что $\beta = \pi - \alpha$, т. е. $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Примеры.

1. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.
2. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.
3. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

§ 3. Тангенс и котангенс угла

Тангенс угла. Пусть дан любой угол α такой, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. *Тангенсом* этого угла α называется число, равное отношению синуса этого угла α к косинусу того же угла α и обозначаемое $\operatorname{tg}\alpha$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Из определения следует, что для любого угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, тангенс этого угла α существует и притом единственный.

Примеры. $\operatorname{tg} 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = 0, \quad \operatorname{tg}\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = 0,$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 1, \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}.$$

Отметим некоторые свойства тангенса угла.

Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, справедливо равенство

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Действительно, для любого угла α справедливы равенства $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ и $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, поэтому для любого угла α такого, что $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, по определению тангенса

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Это свойство тангенса угла можно сформулировать так: для любого угла α такого, что $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, знак минус можно выносить за знак тангенса или вносить под знак тангенса, т. е. если $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, то

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(-\alpha).$$

Примеры. $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1,$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}.$$

Используя свойства синуса и косинуса угла, можно показать, что для любого угла α такого, что $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, справедливы равенства

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\operatorname{tg}(\alpha-\pi).$$

Действительно, для любого такого угла справедливы цепочки равенств

$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\pi)=\frac{\sin(\alpha-\pi)}{\cos(\alpha-\pi)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Примеры. $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1,$

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}=\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1,$$

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}.$$

Используя равенства

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\operatorname{tg}(\alpha-\pi)$$

и применяя метод математической индукции, можно показать, что для любого целого числа n и любого угла α такого, что

$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, справедливы равенства

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}(\alpha - \pi n).$$

Это свойство тангенса угла можно сформулировать так: тангенс любого угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, повторяется при изменении угла на πn, где n — любое целое число.

Примеры.

$$\operatorname{tg}\frac{13\pi}{6} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - 2\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4} - 2\pi\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1,$$

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1,$$

$$\operatorname{tg}\frac{9\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3} - \pi\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 13\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 15\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + 10\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Для любого угла α, синус и косинус которого одного знака, тангенс угла α положителен, т. е. $\operatorname{tg}\alpha$ положителен для любого угла α, задаваемого подвижным единичным радиусом, конец которого совпадает с точкой единичной окружности, лежащей в I

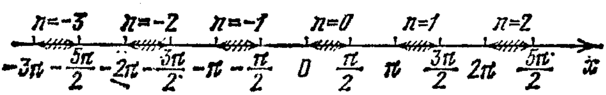


Рис. 85.

или III четвертях (т. е. для любого числа α как радианной меры соответствующего угла α, принадлежащего при некотором целом n промежутку $\left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$). На числовой прямой (рис. 85) указаны такие интервалы, что для каждого числа α из любого такого интервала $\operatorname{tg}\alpha$ положителен.

Для любого угла α, синус и косинус которого разных знаков, тангенс угла α отрицателен, т. е. $\operatorname{tg}\alpha$ отрицателен для любого угла α, задаваемого подвижным единичным радиусом, конец которого совпадает с точкой единичной окружности, лежащей во II или IV четвертях (т. е. для любого числа α как радианной меры соответствующего угла α, принадлежащего при некотором целом n промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \pi n\right)\Big)$. На числовой прямой (рис. 86) указаны такие интервалы, что для каждого числа α из любого такого интервала $\operatorname{tg}\alpha$ отрицателен.

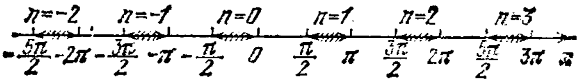


Рис. 86.

Для любого угла α, синус которого равен нулю, тангенс угла α тоже равен нулю, т. е. $\operatorname{tg}\alpha=0$ для любого угла α, задаваемого подвижным единичным радиусом, конец которого совпадает или с точкой $M(1;\ 0)$ или с точкой $P\ (-1;\ 0)$ (т. е. для любого числа α как радианной меры соответствующего угла α, равного при некотором целом n числу πn). На числовой прямой (см. рис. 76) указаны такие числа α, для каждого из которых $\operatorname{tg}\alpha$ равен нулю.

Приведенное выше определение тангенса угла можно переформулировать так:

пусть дан (рис. 87) любой угол α такой, что $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$, и пусть конец подвижного единичного радиуса, задающего этот угол α, есть точка $N(a,\ b)$ (причем $a\neq 0$, вследствие того что $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$); *тангенсом* этого угла называется число, равное отношению ординаты точки N к абсциссе той же точки N, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}.$$

Легко видеть (см. рис. 87), что прямая, проходящая через начало координат и точку $N(a,\ b)$, пересекает прямую $x=1$ в точке $K\left(1,\ \frac{b}{a}\right)$. Другими словами, прямая, проходящая через начало координат и конец подвижного единичного радиуса, задающего угол α $\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\right)$, пересекает прямую $x=1$ в точке $K(1,\ \operatorname{tg}\alpha)$. Поэтому прямую $x=1$ часто называют линией тангенсов.

Арктангенс числа. Часто возникает такая задача: для любого действительного числа k найти угол α такой, что его тангенс равен этому числу k.

Можно показать, что существует бесконечно много углов таких, что тангенс каждого такого угла равен числу k. Действительно, можно видеть (рис. 88), что прямая, проходящая через начало координат и точку $C(1;\ k)$, лежащую на прямой тангенса, пересекает единичную окружность в двух точках: $\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ и $\left(\frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$. Но, как указано выше, для каждой такой точки единичной окружности существует угол α

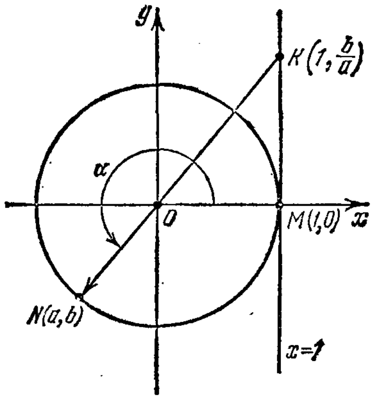


Рис. 87.

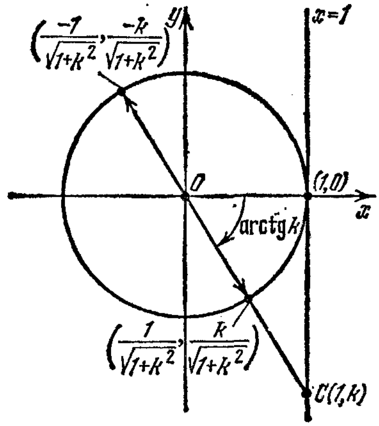


Рис. 88.

такой, что тангенс этого угла равен отношению ординаты этой точки к абсциссе этой же точки, т. е. равен k. Далее по свойству тангенса

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha + \pi l)$$

для любого угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$, и любого целого числа l. Поэтому для любого целого числа l тангенс угла $(\alpha + \pi l)$ равен числу k. Принято следующее соглашение: тот угол, тангенс которого равен числу k и который взят из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, называть *главным углом* и обозначать $\operatorname{arctg} k$ (читается: арктангенс числа k).

Таким образом, по определению $\operatorname{arctg} k$ есть угол, удовлетворяющий одновременно двум условиям:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} k < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} k) = k.$$

Легко видеть, что для любого действительного числа k арктангенс этого числа существует и притом единственный.

Примеры. 1. $\operatorname{arctg} 0$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} \alpha = 0$. Ясно, что это есть нулевой угол, следовательно, $\operatorname{arctg} 0 = 0$.

2. $\operatorname{arctg} 1$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = 1$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{4}$, следовательно, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

3. $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{3}$. Следовательно, $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

4. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{6}$. Следовательно, $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$.

5. $\operatorname{arctg}(-1)$ есть такой угол α, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = -1$. Ясно, что это есть угол $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Следовательно, $\operatorname{arctg}(-1) = \left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Отметим некоторые свойства арктангенса числа, вытекающие из его определения.

Для любого действительного числа k справедливо двойное неравенство

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} k < \frac{\pi}{2}.$$

Для любого действительного числа k справедливо равенство

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} k) = k.$$

Для любого угла $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ справедливо равенство

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha.$$

Примеры. 1. Вычислить $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 10)$. Получаем $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 10) = 10$.

2. Вычислить $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)$. Поскольку $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.

3. Вычислить $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3\pi)$. Поскольку $3\pi \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то нельзя написать $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3\pi) = 3\pi$. Однако $\operatorname{tg} 3\pi = \operatorname{tg} 0$. Следовательно, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3\pi) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0) = 0$.

4. Вычислить $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 10)$. Поскольку $10 \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то нельзя написать $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 10) = 10$. Однако $\operatorname{tg} 10 = \operatorname{tg}(10 - 3\pi)$. Так как $(10 - 3\pi) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 10) = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(10 - 3\pi)] = 10 - 3\pi$.

Наконец, отметим еще одно свойство арктангенса числа: для любого действительного числа k справедливо равенство

$$\operatorname{arctg}(-k) = -\operatorname{arctg} k.$$

Действительно, по определению

$$\operatorname{arctg} k=\alpha, \text{ причем } \operatorname{tg}\alpha=k \text{ и } \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{arctg}(-k)=\beta, \text{ причем } \operatorname{tg}\beta=-k \text{ и } \beta\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

отсюда очевидно, что $\beta=-\alpha$, т. е.

$$\operatorname{arctg}(-k)=-\operatorname{arctg} k.$$

Примеры.

1. $\operatorname{arctg}(-1)=-\operatorname{arctg} 1=-\frac{\pi}{4}$.

2. $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3}$.

3. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\pi}{6}$.

Котангенс угла. Пусть дан любой угол α такой, что $\alpha\neq\pi m$, $m\in Z$. *Котангенсом* этого угла α называется число, равное отношению косинуса этого угла α к синусу того же угла α и обозначаемое $\operatorname{ctg}\alpha$, т. е.

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Из определения следует, что для любого угла α такого, что $\alpha\neq\pi m$, $m\in Z$, котангенс этого угла α существует и притом единственный.

Примеры.

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{1}=0, \qquad \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{0}{-1}=0,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1, \qquad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Отметим некоторые свойства котангенса угла.

Для любого угла α такого, что $\alpha\neq\pi m$, $m\in Z$, справедливо равенство

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Действительно, для любого такого угла справедлива цепочка равенств

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Это свойство котангенса угла можно сформулировать так: для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, знак минус можно выносить за знак котангенса или вносить под знак котангенса, т. е. если $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, то

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(-\alpha).$$

Примеры.

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1; \quad \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Используя свойства синуса и косинуса угла, можно показать, что для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, справедливы равенства

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}(\alpha - \pi).$$

Действительно, для любого такого угла справедливы цепочки равенств

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \frac{\cos(\alpha + \pi)}{\sin(\alpha + \pi)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \pi) = \frac{\cos(\alpha - \pi)}{\sin(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Примеры. $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1,$

$$\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4} + \pi\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

Используя равенства

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}(\alpha - \pi)$$

и применяя метод математической индукции, можно показать, что для любого целого числа n и любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, справедливы равенства

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + n\pi) = \operatorname{ctg}(\alpha - n\pi).$$

Это свойство котангенса угла можно сформулировать так: котангенс любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, повторяется при изменении угла на πn, где n — любое целое число.

Примеры. $\operatorname{ctg}\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3},$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - 2\pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}+11\pi\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}-13\pi\right)=\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}+15\pi\right)=\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Для любого угла α, косинус и синус которого одного знака, котангенс угла α положителен, т. е. $\operatorname{ctg}\alpha$ положителен для любого угла α, задаваемого подвижным единичным радиусом, конец которого совпадает с точкой единичной окружности, лежащей в I или III четвертях (т. е. для любого числа α как радианной меры соответствующего угла α, принадлежащего при некотором целом l промежутку $\left(\pi l, \frac{\pi}{2}+\pi l\right)\Big)$.

На числовой прямой (см. рис. 85) указаны такие интервалы, что для каждого числа α из любого такого интервала $\operatorname{ctg}\alpha$ положителен.

Для любого угла α, косинус и синус которого разных знаков, котангенс угла α отрицателен, т. е. $\operatorname{ctg}\alpha$ отрицателен для любого угла α, задаваемого подвижным единичным радиусом, конец которого совпадает с точкой единичной окружности, лежащей во II или IV четвертях (т. е. для любого числа α как радианной меры соответствующего угла α, принадлежащего при некотором целом k промежутку $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k, \pi+\pi k\right)\Big)$.

На числовой прямой (см. рис. 86) указаны такие интервалы, что для каждого числа α из любого такого интервала $\operatorname{ctg}\alpha$ отрицателен.

Для любого угла α, косинус которого равен нулю, котангенс угла α тоже равен нулю, т. е. $\operatorname{ctg}\alpha=0$ для любого угла α, задаваемого подвижным единичным радиусом, конец которого совпадает или с точкой T (0; 1), или с точкой L (0; -1) (т. е. для любого числа α как радианной меры соответствующего угла α, равного при некотором целом n числу $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\Big)$.

На числовой прямой (см. рис. 82) указаны такие числа α, для каждого из которых $\operatorname{ctg}\alpha$ равен нулю.

Приведенное выше определение котангенса угла можно переформулировать так:

пусть дан (рис. 89) любой угол α такой, что $\alpha\neq\pi m$, $m\in Z$, и пусть конец подвижного единичного радиуса, задающего этот угол α, есть точка $N(a, b)$ (причем $b\neq 0$, вследствие того что $\alpha\neq\pi m$, $m\in Z$); котангенсом этого угла α называется число, равное отношению абсциссы точки N к ординате той же точки N, т. е. $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{a}{b}$.

Легко видеть (см. рис. 89), что прямая, проходящая через начало координат и точку $N(a, b)$, пересекает прямую $y=1$ в точке

$F\left(\frac{a}{b}, 1\right)$. Другими словами, прямая, проходящая через начало координат и конец подвижного единичного радиуса, задающего угол α ($\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$), пересекает прямую $y=1$ в точке $F(\operatorname{ctg}\alpha, 1)$. Поэтому прямую $y=1$ часто называют линией котангенсов.

Арккотангенс числа. Часто возникает такая задача: для любого действительного числа d найти угол α такой, что его котангенс равен этому числу d.

Можно показать, что существует бесконечно много углов таких, что котангенс каждого такого угла равен числу d.

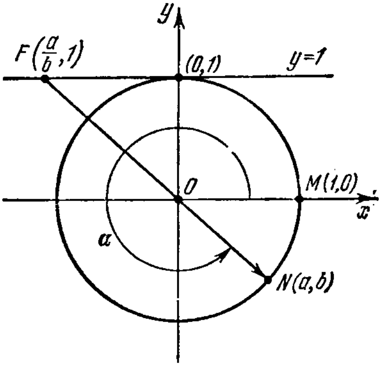


Рис. 89.

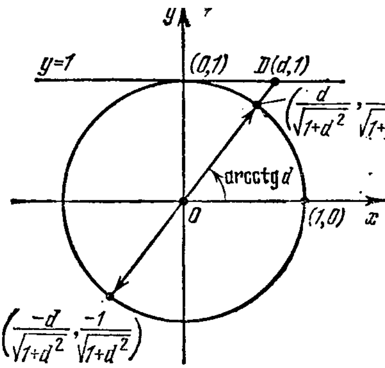


Рис. 90.

Действительно, легко видеть (рис. 90), что прямая, проходящая через начало координат и точку $D(d; 1)$, лежащую на линии котангенсов, пересекает единичную окружность в двух точках: $\left(\frac{d}{\sqrt{1+d^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+d^2}}\right)$, $\left(\frac{-d}{\sqrt{1+d^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+d^2}}\right)$. Но, как указано выше, для каждой такой точки существует угол такой, что котангенс этого угла равен отношению абсциссы этой точки к ординате этой же точки, т. е. равен d. Далее по свойству котангенса

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n)$$

для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, и любого целого числа n. Поэтому для любого целого числа n котангенс угла $(\alpha + \pi n)$ равен числу d.

Принято следующее соглашение: тот угол, котангенс которого равен числу d и который взят из интервала $(0, \pi)$, называть *главным углом* и обозначать $\operatorname{arcctg} d$ (читается: арккотангенс числа d).

Таким образом, по определению $\operatorname{arcctg} d$ есть угол, удовлетворяющий одновременно двум условиям:

$$0 < \operatorname{arcctg} d < \pi, \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} d) = d.$$

Легко видеть, что для любого действительного числа d арккотангенс этого числа существует и притом единственный.

Примеры. 1. $\operatorname{arcctg} 0$ есть такой угол α, что $0<\alpha<\pi$ и $\operatorname{ctg}\alpha=0$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{2}$, следовательно, $\operatorname{arcctg} 0=\frac{\pi}{2}$.

2. $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$ есть такой угол α, что $0<\alpha<\pi$ и $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{3}$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{6}$. Следовательно, $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$.

3. $\operatorname{arcctg} 1$ есть такой угол α, что $0<\alpha<\pi$ и $\operatorname{ctg}\alpha=1$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{4}$. Следовательно, $\operatorname{arcctg} 1=\frac{\pi}{4}$.

4. $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$ есть такой угол α, что $0<\alpha<\pi$ и $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ясно, что это есть угол $\frac{\pi}{3}$. Следовательно, $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}$.

5. $\operatorname{arcctg}(-1)$ есть такой угол α, что $0<\alpha<\pi$ и $\operatorname{ctg}\alpha=(-1)$. Ясно, что это есть угол $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. Следовательно, $\operatorname{arcctg}(-1)=\frac{3\pi}{4}$.

Отметим некоторые свойства арккотангенса числа, вытекающие из его определения.

Для любого действительного числа d справедливо двойное неравенство

$$0<\operatorname{arcctg} d<\pi.$$

Для любого действительного числа d справедливо равенство

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} d)=d.$$

Для любого угла $\alpha\in(0, \pi)$ справедливо равенство

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha)=\alpha.$$

Примеры. 1. Вычислить $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 10)$. Получаем

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 10)=10.$$

2. Вычислить $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right)$. Поскольку $\frac{\pi}{3}\in(0, \pi)$, то $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$.

3. Вычислить $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$. Поскольку $\left(-\frac{\pi}{3}\right)\notin(0, \pi)$, то нельзя написать $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=-\frac{\pi}{3}$. Однако легко видеть, что $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\right)=\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}\in(0, \pi)$. Следовательно, $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

Наконец, отметим еще одно свойство арккотангенса числа: для любого действительного числа d справедливо равенство

$$\operatorname{arcctg}(-d)=\pi-\operatorname{arcctg} d.$$

Действительно, по определению

$$\operatorname{arcctg} d=\alpha, \text{ причем } \operatorname{ctg}\alpha=d \text{ и } \alpha\in(0, \pi),$$
$$\operatorname{arcctg}(-d)=\beta, \text{ причем } \operatorname{ctg}\beta=-d \text{ и } \beta\in(0, \pi),$$

отсюда вытекает, что $\beta=\pi-\alpha$, т. е.

$$\operatorname{arcctg}(-d)=\pi-\operatorname{arcctg} d.$$

Примеры. 1. $\operatorname{arcctg}(-1)=\pi-\operatorname{arcctg} 1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

2. $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})=\pi-\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

3. $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\pi-\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

§ 4. Основное тригонометрическое тождество

Теорема. *Для любого угла α справедливо равенство*:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \tag{1}$$

которое называется основным тригонометрическим тождеством.

Эту теорему можно сформулировать так: *квадрат синуса любого угла плюс квадрат косинуса того же угла равен единице.*

Доказательство. Пусть дан некоторый угол α. Тогда координаты конца подвижного единичного радиуса, задающего угол α, будут $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ (рис. 91). Так как квадрат расстояния между любыми двумя точками плоскости, заданными своими координатами, равен сумме квадратов разности одноименных координат, то для точки $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ и точки $(0, 0)$ имеем

$$(\cos\alpha-0)^2+(\sin\alpha-0)^2=1^2$$

или

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

и теорема доказана.

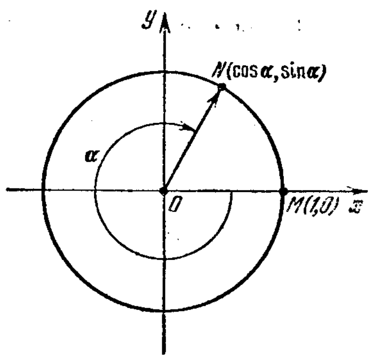


Рис. 91.

Основное тригонометрическое тождество показывает, в какой зависимости находятся синус и косинус одного и того же угла. Зная одну из величин, входящих в основное тригонометрическое тождество для некоторого угла α, можно найти другую величину того же угла α. Действительно, основное тригонометрическое тождество равносильно равенству $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, которое равносильно следующему:

$$|\cos\alpha|=\sqrt{1-\sin^2\alpha}. \tag{2}$$

Из равенства (2) имеем

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \qquad (2а)$$

для любого угла α, для которого $\cos\alpha$ не отрицателен (т. е. для любого α, принадлежащего при некотором $k \in Z$ промежутку $\left[2\pi k - \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$).

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} \qquad (2б)$$

для любого угла α, для которого $\cos\alpha$ не положителен (т. е. для любого α, принадлежащего при некотором $k \in Z$ промежутку $\left[2\pi k + \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$).

Далее, основное тригонометрическое тождество равносильно равенству

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha,$$

которое равносильно следующему:

$$|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}. \qquad (3)$$

Из равенства (3) имеем

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad (3а)$$

для любого угла α, для которого $\sin\alpha$ не отрицателен (т. е. для любого α, принадлежащего при некотором $m \in Z$ промежутку $[2\pi m;\ \pi + 2\pi m]$).

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad (3б)$$

для любого угла α, для которого $\sin\alpha$ не положителен (т. е. для любого α, принадлежащего при некотором $m \in Z$ промежутку $[\pi + 2\pi m;\ 2\pi + 2\pi m]$).

Замечание. Формулы (2а) и (2б) при граничных значениях угла α, т. е. при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$, дают одно и то же значение $\cos\alpha = 0$; формулы (3а) и (3б) при граничных значениях угла α, т. е. при $\alpha = \pi m$, где $m \in Z$, дают одно и то же значение $\sin\alpha = 0$.

Примеры. 1. Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{9}{11}$ и $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Для любого угла α из указанного промежутка $\sin\alpha$ отрицателен, и поэтому $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{9}{11}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{10}}{11}$.

2. Вычислить $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\alpha \in \left(-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right)$.

Для любого угла α из указанного промежутка $\cos\alpha$ отрицателен, и поэтому $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Следствие 1. *Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, справедливо равенство*

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad (4)$$

Доказательство. Так как $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, то $\cos\alpha \neq 0$, и поэтому основное тригонометрическое тождество (1) можно почленно разделить на $\cos^2\alpha$. Тогда для любого такого α имеем

$$\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$
$$\Updownarrow$$
$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Равенство (4) доказано.

Равенство (4) показывает, в какой зависимости находятся тангенс и косинус одного и того же угла α $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z\right)$. Зная одну из величин, входящих в равенство (4), для некоторого такого угла α можно найти другую величину того же угла. Действительно, так как $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, то равенство (4) равносильно равенству $\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$, которое равносильно следующему:

$$|\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}. \tag{5}$$

Из равенства (5) имеем

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} \tag{5а}$$

для любого угла α, для которого $\cos\alpha$ положителен (т. е. для любого α, принадлежащего при некотором $k \in Z$ промежутку $\left(2\pi k - \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$).

$$\cos\alpha = \frac{1}{-\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} \tag{5б}$$

для любого угла α, для которого $\cos\alpha$ отрицателен (т. е. для любого α, принадлежащего при некотором $k \in Z$ промежутку $\left(2\pi k + \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$).

Далее равенство (4) равносильно равенству $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$, которое равносильно следующему:

$$|\operatorname{tg}\alpha| = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{|\cos\alpha|}. \tag{6}$$

Из равенства (6) имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \tag{6а}$$

для любого угла α, для которого $\operatorname{tg}\alpha$ и $\cos\alpha$ одного знака (т. е. для любого угла α, принадлежащего при некотором

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \tag{6б}$$

для любого угла α, для которого $\operatorname{tg}\alpha$ и $\cos\alpha$ разных знаков (т. е. для любого угла α, принадлежащего при некотором

$m \in Z$ множеству $\left[2\pi m, \frac{\pi}{2}+2\pi m\right) \cup$ $\cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi m;\ \pi+2\pi m\right]\Big)$.

$m \in Z$ множеству $\left[2\pi m-\pi;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi m\right) \cup$ $\cup \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi m, 2\pi m\right]\Big)$.

Замечание. Формулы (6а) и (6б) при граничных значениях угла α, т. е. при $\alpha=\pi m$, где $m \in Z$, дают одно и то же значение $\operatorname{tg}\alpha=0$.

Примеры. 1. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Для любого угла α из указанного промежутка $\operatorname{tg}\alpha$ положителен, а $\cos\alpha$ отрицателен, и поэтому $\operatorname{tg}\alpha=\frac{-\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=2$.

2. Вычислить $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-3$ и $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Для любого угла α из указанного промежутка $\cos\alpha$ положителен, и поэтому $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Следствие 2. *Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, справедливо равенство*

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}. \tag{7}$$

Доказательство. Так как $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, то $\sin\alpha \neq 0$, и поэтому основное тригонометрическое тождество (1) можно почленно разделить на $\sin^2\alpha$. Тогда для любого такого α имеем

$$\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$
$$\Updownarrow$$
$$\operatorname{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Равенство (7) доказано.

Равенство (7) показывает, в какой зависимости находятся котангенс и синус одного и того же угла α ($\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$). Зная одну из величин, входящих в равенство (7), для некоторого такого угла α можно найти другую величину того же угла α. Действительно, так как $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, то равенство (7) равносильно равенству

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha},$$

которое равносильно следующему:

$$|\sin\alpha|=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}. \tag{8}$$

Из равенства (8) имеем

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} \qquad (8\text{а})$$

для любого угла α, для которого $\sin\alpha$ положителен (т. е. для любого α, принадлежащего при некотором $n\in Z$ промежутку $(2\pi n;\ \pi+2\pi n)$).

$$\sin\alpha=\frac{1}{-\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} \qquad (8\text{б})$$

для любого угла α, для которого $\sin\alpha$ отрицателен (т. е. для любого α, принадлежащего при некотором $n\in Z$ промежутку $(\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n)$).

Далее, так как $\alpha\neq\pi k$, $k\in Z$, то равенство (7) равносильно равенству

$$\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha},$$

которое равносильно следующему:

$$|\operatorname{ctg}\alpha|=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{|\sin\alpha|}. \qquad (9)$$

Из равенства (9) имеем

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} \qquad (9\text{а})$$

для любого угла α, для которого $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\sin\alpha$ одного знака (т. е. для любого α, принадлежащего при некотором $k\in Z$ множеству

$$\left[2\pi k-\frac{\pi}{2};\ 2\pi k\right)\cup\left(2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]\Big).$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} \qquad (9\text{б})$$

для любого угла α, для которого $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\sin\alpha$ разных знаков (т. е. для любого α, принадлежащего при некотором $k\in Z$ множеству

$$\left[2\pi k+\frac{\pi}{2};\ 2\pi k+\pi\right)\cup\left(\pi+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]\Big).$$

Замечание. Формулы (9а) и (9б) при граничных значениях угла α, т. е. при $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, дают одно и то же значение $\operatorname{ctg}\alpha=0$.

Примеры. 1. Вычислить $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$ и $\alpha\in\left(-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right)$.

Для любого угла α из указанного промежутка $\operatorname{ctg}\alpha$ положителен, а $\sin\alpha$ отрицателен, и поэтому

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=\frac{7}{24}.$$

2. Вычислить $\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=4$ и $\alpha\in\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Для любого угла α из указанного промежутка $\sin\alpha$ отрицателен, и поэтому

$$\sin\alpha=\frac{1}{-\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=-\frac{\sqrt{17}}{17}.$$

Из определения тангенса и котангенса одного и того же угла следует справедливость следующего у т в е р ж д е н и я:

для любого угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$, справедливы равенства

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1, \tag{10}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \tag{11}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{12}$$

Равенства (11) и (12) показывают, в какой зависимости находятся тангенс и котангенс одного и того же угла α $\left(\alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z\right)$. Зная одну из величин, входящих в равенства (11) и (12), для некоторого такого угла α можно найти другую величину того же угла α.

П р и м е р ы. 1. Вычислить $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\alpha \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Для любого угла α из указанного промежутка $\cos\alpha$ отрицателен, и поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{4}{5}.$$

Так как $\cos\alpha \neq 0$, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}.$$

Аналогично, так как $\sin\alpha \neq 0$, то

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{4}{3}.$$

2. Вычислить $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -7$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Так как $\operatorname{ctg}\alpha \neq 0$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = -\frac{1}{7}$.

Для любого угла α из указанного промежутка $\sin\alpha$ положителен, а $\cos\alpha$ отрицателен, следовательно,

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{2}}{10}, \qquad \cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

§ 5. Формулы сложения

Пусть даны некоторый угол α и некоторый угол β, т. е. пусть даны число α, представляющее радианную меру угла α, и число β, представляющее радианную меру угла β. Тогда под углом $(\alpha-\beta)$ понимается угол, радианная мера которого есть число $(\alpha-\beta)$;

угол $(\alpha-\beta)$ называется *разностью* двух данных углов. Под углом $(\alpha+\beta)$ понимается угол, радианная мера которого есть число $(\alpha+\beta)$; угол $(\alpha+\beta)$ называется *суммой* двух данных углов.

Косинус разности и косинус суммы.

Теорема. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta, \tag{1}$$

которое называется формулой косинуса разности двух углов.

Эту теорему можно сформулировать так: *косинус разности двух любых углов равен произведению косинуса первого угла на*

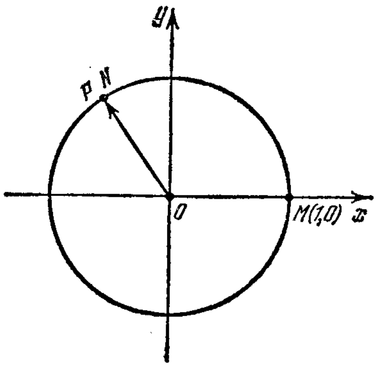


Рис. 92.

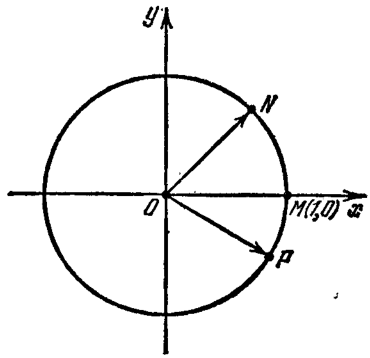


Рис. 93.

косинус второго угла плюс произведение синуса первого угла на синус второго угла.

Доказательство. Пусть на плоскости даны прямоугольная система координат xOy и единичная окружность. Будем считать началом отсчета неподвижный единичный радиус OM этой окружности, где M (1, 0).

Пусть угол α задается подвижным единичным радиусом, конец которого совпадает с точкой $N(\cos\alpha, \sin\alpha)$ единичной окружности; угол β — подвижным единичным радиусом, конец которого совпадает с точкой $P(\cos\beta, \sin\beta)$ единичной окружности.

Возможны два случая расположения точек N и P: они или совпадают (рис. 92), либо не совпадают (рис. 93).

Доказательство теоремы проведем отдельно в каждом из этих случаев.

1. Пусть точки N и P совпадают. В этом случае углы α и β таковы, что $\alpha=\beta+2\pi k$, т. е. $(\alpha-\beta)=2\pi k$ для некоторого фиксированного целого числа k, и равенство (1) можно переписать в виде

$$\cos 2\pi k=\cos\beta\cos(\beta+2\pi k)+\sin\beta\sin(\beta+2\pi k)$$

или, поскольку

$$\cos 2\pi k = 1$$
$$\cos(\beta + 2\pi k) = \cos\beta,$$
$$\sin(\beta + 2\pi k) = \sin\beta,$$

в виде

$$1 = \cos^2\beta + \sin^2\beta,$$

т. е. в рассматриваемом случае равенство (1) есть равносильная форма записи основного тригонометрического тождества, следовательно, равенство (1) справедливо.

2. Пусть углы α и β таковы, что $\alpha \neq \beta + 2\pi k$ ни для какого целого числа k. Вычислим двумя способами длину отрезка PN.

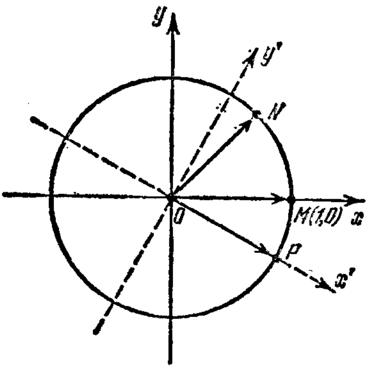


Рис. 94.

В данной системе координат координаты точек N и P известны, поэтому по теореме о длине отрезка, координаты концов которого заданы, имеем

$$d_{NP}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2. \quad (2)$$

Введем теперь другую прямоугольную систему координат $x'Oy'$ так, чтобы единица масштаба совпала с уже выбранной ранее единицей длины; положительная полуось абсцисс (Ox') была бы продолжением радиуса OP; положительная полуось ординат (Oy') образовывала бы положительный угол $\frac{\pi}{2}$ с положительной полуосью абсцисс (Ox') (рис. 94).

В новой системе координат точка P будет иметь координаты $P(1, 0)$. Примем теперь радиус OP за неподвижный единичный радиус, т. е. за новое начало отсчета углов. Система координат $x'Oy'$ вводится так, чтобы новое начало отсчета углов (единичный неподвижный радиус OP) было смещено на угол β относительно предыдущего начала отсчета углов (единичного неподвижного радиуса OM). Тогда относительно нового начала отсчета углов подвижный единичный радиус ON будет задавать угол $(\alpha - \beta)$ и в системе координат $x'Oy'$ точка N будет иметь координаты $N(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$. По теореме о длине отрезка, координаты концов которого заданы (см. § 3 гл. III), имеем

$$d_{NP}'^2 = [1 - \cos(\alpha - \beta)]^2 + [0 - \sin(\alpha - \beta)]^2. \quad (3)$$

Так как квадрат расстояния между двумя фиксированными точками плоскости, найденный в двух разных прямоугольных системах координат с одной и той же единицей длины, есть одно и то же число, то $d_{NP}'^2 = d_{NP}^2$.

Используя свойство транзитивности равенств, из равенств (2) и (3) имеем

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=[1-\cos(\alpha-\beta)]^2+[\sin(\alpha-\beta)]^2.$$

Раскрывая скобки и группируя, имеем

$$(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\cos^2\beta+\sin^2\beta)-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=$$
$$=1+[\cos^2(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)]-2\cos(\alpha-\beta).$$

Применяя трижды основное тригонометрическое тождество, перепишем это равенство в виде

$$2-2[\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta]=2-2\cos(\alpha-\beta).$$

Откуда следует справедливость теоремы во втором случае. Теорема доказана.

Пример. Вычислить $\cos\frac{\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, то

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}.$$

Итак, $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$.

Приведем несколько следствий из доказанной теоремы.

Следствие 1. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

которое называется формулой косинуса суммы двух углов.

Это следствие можно сформулировать так: *косинус суммы двух углов равен произведению косинуса первого угла на косинус второго угла минус произведение синуса первого угла на синус второго угла.*

Доказательство. Представим $(\alpha+\beta)$ в виде $[\alpha-(-\beta)]$ и применим теорему. Затем, пользуясь тем, что $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ и $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ для любого угла α, имеем

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

что и требовалось доказать.

Примеры. 1. Вычислить $\cos\frac{5\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$, то

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

Итак, $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$.

2. Вычислить $\cos\frac{7\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, то

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}.$$

Итак, $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$.

Формулы для дополнительных углов. Два угла α и β, в сумме составляющие $\frac{\pi}{2}$, т. е. такие, что $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, называются *дополнительными один к другому*. Так, угол α дополнительный к углу $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ и наоборот.

Следствие 2. *Для любого угла α справедливы равенства*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,$$

которые называются формулами для дополнительных углов.

Действительно, применяя равенство (1), имеем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha+1\cdot\sin\alpha=\sin\alpha,$$

т. е. получаем справедливость первой формулы.

Обозначая $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\beta$, получаем из уже доказанной первой формулы, что $\sin\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$. Так как $\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\alpha$, то

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.$$

Следствие 2 можно сформулировать так:

— *синус любого угла равен косинусу дополнительного угла*, а
— *косинус любого угла равен синусу дополнительного угла.*

Пример. Вычислить $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$, то $\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}$. Значение $\cos\frac{\pi}{12}$ было найдено выше и равно $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$. Следовательно, $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$.

Следствие 3. а) *Для любого угла α такого, что $\alpha\neq\pi k$, $k\in Z$, справедливо равенство*

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha.$$

б) *Для любого угла α такого, что $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in Z$, справедливо равенство*

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha.$$

Эти равенства также называются *формулами для дополнительных углов*. Справедливость этих формул следует из определений тангенса и котангенса и следствия 2.

Пример. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$. Так как $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}$, то $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right)=\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}=\frac{\cos\frac{5\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12}}$. Значения $\cos\frac{5\pi}{12}$ и $\sin\frac{5\pi}{12}$ были найдены выше и соответственно равны $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ и $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$.

Следовательно, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ или $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

Синус суммы и синус разности.

Следствие 4. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

которое называется формулой синуса суммы двух углов.

Это следствие можно сформулировать так: *синус суммы любых двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго плюс произведение косинуса первого угла на синус второго.*

Доказательство. Используя следствие 2, затем равенство (1) и еще раз следствие 2, имеем

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

что и требовалось доказать.

Примеры. 1. Вычислить $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$, то

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}.$$

Итак, $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$.

2. Вычислить $\sin\frac{7\pi}{12}$. Так как $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, то

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}.$$

Итак, $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$.

Следствие 5. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

которое называется формулой синуса разности двух углов.

Это следствие можно сформулировать так: *синус разности любых двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго угла минус произведение косинуса первого угла на синус второго угла.*

Доказательство. Представим $(\alpha-\beta)$ в виде $[\alpha+(-\beta)]$ и применим следствие 4. Затем, пользуясь тем, что $\cos(-\beta)=\cos\beta$ и $\sin(-\beta)=-\sin\beta$ для любого угла β, имеем

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Вычислить $\sin\frac{\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, то

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

Итак, $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$.

Тангенс суммы и тангенс разности.

Следствие 6. *Для любых двух углов α и β таких, что $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$, и $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in Z$,* *справедливо равенство*

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

которое называется формулой тангенса суммы двух углов.

Доказательство. Для любых двух таких углов справедлива цепочка равенств

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

которая и доказывает следствие 6.

Примеры. 1. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$, то

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=2+\sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}$.

2. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$. Имеем

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}=$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=-(2+\sqrt{3}).$$

Итак, $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}=-(2+\sqrt{3})$.

Следствие 7. *Для любых двух углов α и β таких, что $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$, и $\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in Z$,* *справедливо равенство*

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

которое называется формулой тангенса разности двух углов.

Доказательство. Для любых двух таких углов справедлива цепочка равенств

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}[\alpha+(-\beta)]=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

которая и доказывает следствие 7.

Пример. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, то

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}=2-\sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

Котангенс суммы и котангенс разности.

Следствие 8. *Для любых углов α и β таких, что $\alpha\neq\pi k$, $k\in Z$, $\beta\neq\pi n$, $n\in Z$, и $(\alpha+\beta)\neq\pi m$, $m\in Z$, справедливо равенство*

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha},$$

которое называется формулой котангенса суммы двух углов.

Следствие 9. *Для любых двух углов α и β таких, что $\alpha\neq\pi k$, $k\in Z$, $\beta\neq\pi n$, $n\in Z$, и $(\alpha-\beta)\neq\pi m$, $m\in Z$, справедливо равенство*

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha},$$

которое называется формулой котангенса разности двух углов.

Доказательство этих следствий аналогично доказательству следствий 6 и 7 и потому опускается.

Примеры. 1. Вычислить $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$, то

$$\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}-1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{1\cdot\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=2-\sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

2. Вычислить $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, то

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=2+\sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}=2+\sqrt{3}$.

Формулы для вычисления произведений.

Следствие 10. *Для любых двух углов α и β справедливо равенство*

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2},$$

которое называется формулой для вычисления произведения косинусов.

Следствие 10 можно сформулировать так: *произведение косинуса любого угла α на косинус любого угла β равно полусумме косинуса разности этих углов и косинуса суммы этих углов.*

Следствие 11. *Для любых двух углов α и β справедливо равенство*

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2},$$

которое называется формулой для вычисления произведения синусов.

Следствие 11 можно сформулировать так: *произведение синуса любого угла α на синус любого угла β равно полуразности косинуса разности этих углов и косинуса суммы этих углов.*

Доказательство. Выше было показано, что для любых углов α и β справедливы следующие равенства:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Складывая и вычитая эти равенства, получаем формулы для вычисления произведения косинусов и произведения синусов:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}, \tag{4}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}. \tag{5}$$

Замечание. В формулах (4) и (5), в силу того что $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ для любого угла α, при взятии косинуса разности двух углов можно брать косинус и угла $(\alpha-\beta)$ и угла $(\beta-\alpha)$.

Примеры. 1. $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)=$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2}=$$

$$=\frac{\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\cos\alpha+\frac{1}{2}}{2}=\frac{2\cos\alpha+1}{4}.$$

2. $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta-\frac{\pi}{4}-\beta\right)-$

$$-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta+\frac{\pi}{4}+\beta\right)=\cos(-2\beta)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2\beta.$$

3. $\cos 4\cos 3=\dfrac{\cos(4-3)+\cos(4+3)}{2}=\dfrac{\cos 1+\cos 7}{2}.$

4. $\dfrac{4\sin 7\sin 8}{5}=\dfrac{4[\cos(7-8)-\cos(7+8)]}{5\cdot 2}=\dfrac{2[\cos 1-\cos 15]}{5}.$

Следствие 12. *Для любых двух углов α и β справедливо равенство*

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2},$$

которое называется формулой для вычисления произведения синуса одного угла на косинус другого угла.

Следствие 12 можно сформулировать так: *произведение синуса любого угла α на косинус любого угла β равно полусумме синуса суммы углов α и β и синуса разности углов α и β, причем разность берется так, что от угла, стоящего под знаком синуса, вычитается угол, стоящий под знаком косинуса.*

Доказательство. Выше было показано, что для любых углов α и β справедливы следующие равенства:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Складывая эти равенства, получаем формулу для вычисления произведения синуса угла на косинус другого угла:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}. \qquad (6)$$

Примеры. 1. Вычислить $4\sin\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(1+\frac{\pi}{3}\right)$.

Применяя формулу (6), имеем

$$4\sin\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(1+\frac{\pi}{3}\right)=2\left[\sin\left(1+\frac{\pi}{6}+1+\frac{\pi}{3}\right)+\right.$$
$$\left.+\sin\left(1+\frac{\pi}{6}-1-\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\left[\sin\left(2+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=$$
$$=2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-(-2)\right)-\frac{1}{2}\right]=2\cos(-2)-1=2\cos 2-1.$$

Итак, $4\sin\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(1+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos 2-1$.

2. Вычислить $2\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$.

Применяя формулу (6), имеем

$$2\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\left[\sin\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right]=$$
$$=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

Итак, $2\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

3. $\frac{3\sin 4\cos 5}{7}=\frac{3[\sin(4+5)+\sin(4-5)]}{7\cdot 2}=\frac{3(\sin 9-\sin 1)}{14}$.

Формулы суммы и разности синусов и косинусов.

Следствие 13. *Для любых двух углов* α *и* β *справедливо равенство*

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

которое называется формулой суммы косинусов.

Следствие 13 можно сформулировать так: *сумма косинусов любых двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов на косинус полуразности этих углов.*

Следствие 14. *Для любых двух углов* α *и* β *справедливо равенство*

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

которое называется формулой разности косинусов.

Следствие 14 можно сформулировать так: *разность косинусов любых двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на синус обратной полуразности этих углов* (под обратной разностью углов понимается такая разность, когда из угла, стоящего под знаком вычитаемого косинуса, вычитается угол, стоящий под знаком уменьшаемого косинуса).

Следствие 15. *Для любых двух углов α и β справедливо равенство*

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

которое называется формулой суммы синусов.

Следствие 15 можно сформулировать так: *сумма синусов любых двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус полуразности этих углов.*

Следствие 16. *Для любых двух углов α и β справедливо равенство*

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

которое называется формулой разности синусов.

Следствие 16 можно сформулировать так: *разность синусов любых двух углов равна удвоенному произведению синуса полуразности этих углов на косинус полусуммы этих углов, при этом синус полуразности берется так, что из угла, стоящего под знаком уменьшаемого синуса, вычитается угол, стоящий под знаком вычитаемого синуса.*

Доказательство. Обозначая

$$\begin{cases}\alpha+\beta=x,\\ \alpha-\beta=y,\end{cases} \tag{7}$$

и складывая эти равенства, получим

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{x+y}{2},\\ \beta=\dfrac{x-y}{2}.\end{cases} \tag{8}$$

Из равенства (8) следует, что для любой пары x и y всегда найдется пара α и β такая, что справедливы равенства (7).

Если в формулах (4), (5) и (6) произвести замену α и β на x и y по формулам (7) и (8), то получим справедливость следующих формул:

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \tag{9}$$

$$\cos x-\cos y=2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}, \tag{10}$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}. \tag{11}$$

Пользуясь тем, что $\sin(-y) = -\sin y$ для любого угла y, из формулы (11) получим

$$\sin x - \sin y = \sin x + \sin(-y) = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$

т. е. получим, что справедлива следующая формула:

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}. \qquad (12)$$

Из справедливости формул (9), (10), (11) и (12) вытекает справедливость следствий 13, 14, 15 и 16.

Примеры. 1. $\cos 4\alpha + \cos 6\alpha = 2\cos\frac{4\alpha+6\alpha}{2}\cos\frac{4\alpha-6\alpha}{2} = 2\cos 5\alpha\cos(-\alpha) = 2\cos 5\alpha\cos\alpha.$

2. $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}+\beta\right) = 2\sin\frac{\frac{\pi}{3}-\beta+\frac{\pi}{6}+\beta}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{6}+\beta-\frac{\pi}{3}+\beta}{2} = 2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\beta-\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\beta-\frac{\pi}{12}\right).$

3. $\sin\gamma + \frac{1}{2} = \sin\gamma + \sin\frac{\pi}{6} = 2\sin\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{12}\right).$

4. $\sin\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2}-5\alpha\right) = \sin\alpha - \sin 5\alpha = 2\sin\frac{\alpha-5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+5\alpha}{2} = 2\sin(-2\alpha)\cos 3\alpha = -2\sin 2\alpha\cos 3\alpha.$

§ 6. Формулы для двойных и половинных углов

Формулы для двойных углов. Пусть дан некоторый угол α, т. е. пусть дано некоторое число α, представляющее радианную меру этого угла. Тогда под углом 2α понимается угол, радианная мера которого есть число 2α; угол 2α часто называют *двойным углом.*

1. *Для любого угла α справедливо равенство*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad (1)$$

которое называется формулой синуса двойного угла.

Это утверждение можно сформулировать так: *синус двойного угла 2α равен удвоенному произведению синуса угла α на косинус угла α.*

Доказательство. Полагая $\alpha = \beta$ в формуле для синуса суммы двух углов

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

получаем справедливость утверждения 1.

2. *Для любого угла 2α справедливо равенство*

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad (2)$$

которое называется формулой косинуса двойного угла.

Это утверждение можно сформулировать так: *косинус двойного угла 2α равен квадрату косинуса угла α минус квадрат синуса угла α.*

Доказательство. Полагая $\beta=\alpha$ в формуле для косинуса суммы двух углов

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$

получаем справедливость утверждения 2.

3. *Для любого угла α такого, что $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, и $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$, справедливо равенство*

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \tag{3}$$

которое называется формулой тангенса двойного угла.

Доказательство. Представляя 2α как $(\alpha+\alpha)$ и применяя формулу тангенса суммы двух углов, имеем

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$

что и требовалось доказать.

4. *Для любого угла α такого, что $\alpha\neq\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$, справедливо равенство*

$$\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}, \tag{4}$$

которое называется формулой котангенса двойного угла.

Доказательство. Представляя 2α как $(\alpha+\alpha)$ и применяя формулу котангенса суммы двух углов, имеем

$$\operatorname{ctg} 2\alpha=\operatorname{ctg}(\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha},$$

что и требовалось доказать.

Примеры. 1. Вычислить $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Для любого угла α из указанного промежутка $\cos\alpha$ отрицателен, и поэтому

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}.$$

Применяя формулы (1) и (2), получаем

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25},$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{7}{25}.$$

2. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\operatorname{tg} 2\alpha=3$. Применяя формулы для тангенса суммы двух углов, затем для тангенса двойного угла, получаем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}-\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}=$$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=2\operatorname{tg}2\alpha=6.$$

Рассмотрим угол $n\alpha$, где n — любое натуральное число. Под углом $n\alpha$ понимается угол, радианная мера которого есть число $n\alpha$. Можно вывести формулы, выражающие $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ ($n\in N$) через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. В качестве примера приведем формулы для $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$:

$$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos^2\alpha+$$
$$+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\alpha=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$$

Итак, $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$;

$$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cos\alpha-$$
$$-2\sin^2\alpha\cos\alpha=\cos^3\alpha-(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha=$$
$$=\cos^3\alpha-\cos\alpha+\cos^3\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

Итак, $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

Примеры. 1. Вычислить $\sin 3\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{3}{4}$. Используя формулу для $\sin 3\alpha$, получим

$$\sin 3\alpha=3\cdot\frac{3}{4}-4\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{36-27}{16}=\frac{9}{16}.$$

2. Вычислить $(\sin 3\alpha+\cos 3\alpha)$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Используя формулы для $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$, имеем

$$\sin 3\alpha+\cos 3\alpha=3(\sin\alpha-\cos\alpha)-4(\sin^3\alpha-\cos^3\alpha).$$

Применим формулу сокращенного умножения:

$$\sin^3\alpha-\cos^3\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)(\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha).$$

Таким образом, при $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ имеем

$$\sin 3\alpha+\cos 3\alpha=\frac{3}{\sqrt{2}}-4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sin\alpha\cos\alpha)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-4\sin\alpha\cos\alpha).$$