

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ  
ПРОМЫШЛЕННЫХ СООРУЖЕНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

---

Д. В. БЫЧКОВ и А. К. МРОЩИНСКИЙ

# КРУЧЕНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ БАЛОК

СТРОЙИЗДАТ НАРКОМСТРОЯ

1944



ЦЕНТРАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ  
ПРОМЫШЛЕННЫХ СООРУЖЕНИЙ  
ЛАБОРАТОРИЯ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

---

Канд. техн. наук Д. В. БЫЧКОВ и А. К. МРОЩИНСКИЙ

# КРУЧЕНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ БАЛОК

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ  
ИССЛЕДОВАНИЯ И ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ  
РАСЧЕТА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ  
ЛАУРЕАТА СТАЛИНСКОЙ ПРЕМИИ  
ДОКТОРА ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК  
проф. В. З. ВЛАСОВА

1944

---

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО СТРОИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
Москва Ленинград

Редактор инж. М. С. Рудоминер

*Книга содержит изложение основных положений новой теории расчета тонкостенных стержней, а также описание и результаты экспериментов, проведенных авторами в ЦНИПС, подтверждающих правильность этих положений, и предназначена для использования при проектировании элементов металлических конструкций. Книга снабжена в большом количестве таблицами, графиками и числовыми примерами, которые должны содействовать распространению изложенных методов расчета среди инженеров-проектировщиков, для которых она явится весьма важным пособием. Книга рассчитана на инженеров-проектировщиков, аспирантов и научных работников.*



### ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка, формула	Напечатано	Следует читать	По чьей вине опечатка
13	7-я сверху	на 65 <sup>0</sup> / <sub>0</sub> , больше	на 65 <sup>0</sup> / <sub>0</sub> , с больше	Типографии
65	ф-ла 52	$(b_x - a)$	$(b_x - a_x)$	"
Табл. 29	№ 3, графа 5	$\vartheta$	$\Theta =$	"
"	№ 5 " 5	$(k^2 kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl)$	$k^2 (kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl)$	"
105	ф-ла 20	$(z)$	$f(z)$	"
124	ф-ла 9	$\omega_D = \omega_D - \omega_D^0$	$\omega_D = \overline{\omega_D} - \overline{\omega_D^0}$	"
133	ф-ла 31	$c_{\eta} \xi_0$	$c_{\eta} \overline{\xi_0}$	Автора
133	ф-ла 32	$c_{\xi} \overline{\eta^0}$	$c_{\eta} \overline{\xi_0}$	Автора
241	Фигуру повернуть по часовой стрелке на 90°			Типографии

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Материалом для настоящей работы послужили экспериментальные и теоретические исследования, проведенные авторами под руководством лауреата Сталинской премии, доктора технических наук проф. В. З. Власова в лаборатории строительной механики ЦНИПС в период с 1938 по 1940 гг.

Работа эта ставила своей целью, во-первых, экспериментально проверить предложенную проф. Власовым новую теорию расчета тонкостенных профилей на совместное действие изгиба и кручения и, во-вторых, путем дополнительных теоретических исследований и составления необходимых таблиц и графиков дать практические методы расчета металлических балок с учетом кручения и облегчить внедрение указанной теории расчета в практику проектирования металлических конструкций.

В процессе исследования выявилось значительное влияние жесткости стержня при чистом кручении на величину нормальных напряжений при стесненном кручении. Так как данных в нашей литературе по определению указанной величины жесткости оказалось очень мало, то авторы поставили своей дополнительной задачей пополнить этот пробел, используя материалы, взятые в основном из американской литературы, и результаты экспериментов, проведенных в лаборатории строительной механики ЦНИПС, по определению действительной величины  $J_d$  для различных прокатных, сварных и клепаных профилей.

Почти все главы работы иллюстрируются достаточным количеством численных примеров, преследующих ту же основную цель — облегчить понимание излагаемой теории и практическое пользование ею при проектировании металлических конструкций.

Кроме собственных теоретических и экспериментальных исследований, авторы при составлении настоящей работы использовали довольно обширную литературу, перечисленную в конце текста книги, и некоторые теоретические и экспериментальные работы других сотрудников лаборатории строительной механики ЦНИПС, в частности, работы старших научных сотрудников Н. Г. Добудогло и А. Р. Ржаницына с соответствующими ссылками в тексте.

В заключение авторы считают своим долгом выразить глубокую благодарность проф. В. З. Власову за руководство и редактирование настоящей работы и профессорам И. М. Рабиновичу и Н. С. Стрелецкому за весьма ценные замечания, данные при неоднократных рецензиях на отдельные разделы и работу в целом, а также технику Ф. А. Перн, непосредственному участнику этой работы в части проведения и обработки экспериментов, вычисления и оформления таблиц и графиков.

Авторы весьма благодарны также редактору книги инж. М. С. Рудоминеру, чрезвычайно внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд существенных и ценных замечаний.

Настоящая работа была подготовлена к печати в 1941 г., но по условиям военного времени печатание ее задержалось до сих пор.

---

## Г Л А В А I

### ЧИСТОЕ КРУЧЕНИЕ

Чистым кручением стержня, как известно, называют такой случай закручивания стержня, при котором в поперечных сечениях его нет нормальных напряжений, а касательные напряжения распределены по всем сечениям одинаково.

Осуществление чистого кручения сплошных круглых или полых цилиндрических стержней не представляет затруднений, так как поперечные сечения этих стержней при закручивании остаются плоскими. Чистое кручение некруглых стержней возможно только при отсутствии препятствий к искажению поперечных сечений; только в этом случае продольные волокна стержня не будут при кручении менять свою длину и в сечениях не возникнут нормальные напряжения. Практически в некруглых элементах металлических конструкций кручение в чистом виде почти никогда не встречается, так как при передаче внешних крутящих моментов возникают препятствия к искажению поперечных сечений, вследствие чего появляются нормальные напряжения. Однако как теоретическое, так и экспериментальное изучение чистого кручения представляется совершенно необходимым: оно входит, как увидим дальше, в качестве составного элемента в общий случай кручения, сопровождаемого нормальными напряжениями, так называемого стесненного кручения.

#### § 1. ИСТОРИЯ ВОПРОСА

Теория чистого кручения впервые была предложена Кулоном<sup>[1]</sup> еще в 1784 г. Он нашел правильную формулу для угла закручивания круглого стержня.

Позднее она была применена Навье<sup>[2]</sup> для призматических стержней прямоугольного сечения. Навье, пользуясь своей теорией изгиба, исходил из гипотезы плоских сечений и пришел к ошибочным заключениям, что угол закручивания при данном крутящем моменте обратно пропорционален центральному полярному моменту инерции поперечного сечения и что наибольшие касательные напряжения получаются в точках, наиболее удаленных от центра тяжести сечения. Теория Навье пользовалась всеобщим признанием до середины прошлого столетия несмотря на то, что она противоречила общеизвестным опытным фактам.

В 20-х годах XIX столетия Коши впервые доказал, что поперечные сечения некруглых стержней не могут при кручении оставаться плоскими; однако данное им решение задачи о кручении стержня прямоугольного сечения оказалось неправильным.

Вполне строгую теорию кручения призматического стержня любого поперечного сечения дал в 1855 г. Сен-Венан<sup>[3]</sup>. Можно считать, что с этого времени ведет начало научная теория чистого кручения.

По Сен-Венану полная деформация при кручении призматического стержня любого поперечного сечения состоит из простого закручивания стержня, как и по теории Кулона, и из продольных перемещений, переменных по величине и знаку для различных точек сечения. Эти продольные перемещения и являются причиной искривления первоначально плоской формы поперечного сечения.

Теория Сен-Венана получила признание лишь в 1864 г., когда вышло в свет третье издание книги Навье „Résumé des leçons“, переработанное самим Сен-Венаном.

Эта теория устранила один из главных недостатков в теории Навье, заключавшийся в том, что последняя противоречила граничным условиям, по которым касательные напряжения в точках контура сечения не должны иметь составляющих нормальных к линии контура. Однако, удовлетворяя этому условию, теория Сен-Венана по этой причине не может дать общего решения задачи о кручении, годного для любых поперечных сечений.

Сен-Венан дал общие уравнения теории кручения и решил их для ряда различных поперечных сечений; в частности, он первый правильно решил задачу о расчете на кручение стержней прямоугольного сечения. Это решение нас будет наиболее интересовать, потому что поперечные сечения строительных металлических профилей, как правило, составлены из тонких и высоких прямоугольников.

Дальнейшее развитие теории чистого кручения заключалось главным образом в нахождении точных или приближенных способов решения отдельных частных задач. Здесь особенно следует отметить использование некоторых аналогий между задачами о кручении и родственными им задачами из других отделов теоретической физики. Таковыми являются гидродинамические аналогии и аналогия с мембраной, установленная Прандтлем<sup>[4]</sup> (1903—1904 гг.).

Одна из наиболее замечательных гидродинамических аналогий заключается в том, что функция напряжений с математической точки зрения эквивалентна функции тока при плоском течении идеальной несжимаемой жидкости, циркулирующей в сосуде, имеющем то же сечение, что и стержень, подвергающийся кручению. Между прочим, гидродинамическая аналогия приводит к заключению, что в выступающих углах поперечных сечений скручиваемого стержня касательные напряжения равны нулю, а во входящих углах они, наоборот, достигают очень больших значений, в особенности при отсутствии закруглений или при малых радиусах последних. Здесь сравнительно малый крутящий момент может вызвать явление текучести металла и образование трещин в рупком металле.

Еще более замечательной и практически ценной оказалась аналогия, установленная Прандтлем. Она заключается в следующем. Если в пластинке вырезать отверстие, имеющее такой же контур, как поперечное сечение скручиваемого стержня, и это отверстие затянуть гибкой, например мыльной, пленкой, подвергающейся равномерному гидростатическому давлению, то дифференциальное уравнение и граничные условия вздутой поверхности пленки тождественны соответствующему

уравнению и граничным условиям поверхности напряжений скручиваемого стержня.

Если эту поверхность пересечь равноудаленными друг от друга плоскостями, параллельными плоскости контура, то полученная система кривых (горизонталей) будет обладать следующими свойствами.

1) Касательная, проведенная в любой точке к кривой, дает направление вектора касательного напряжения в соответствующей точке поперечного сечения скручиваемого стержня.

2) Тангенс угла наибольшего ската поверхности пленки к плоскости контура в любой точке пленки пропорционален величине касательного напряжения в соответствующей точке поперечного сечения стержня.

3) Объем, заключенный между выпучившейся пленкой и плоскостью пластинки, пропорционален величине скручивающего момента, а следовательно, и величине момента инерции при чистом кручении (крутильного сопротивления).

Аналогия Прандтля помимо наглядности, которую она вносит в задачу о кручении, как увидим далее, ценна еще и тем, что позволяет экспериментально установить распределение напряжений и величину момента инерции при чистом кручении стержня, имеющего сложную форму сечения.

Первые опыты на кручение металлических стержней были произведены Бахом [6] в 1887—1889 гг. Эксперименты производились со специально отлитыми из чугуна стержнями различных поперечных сечений: двутаврового, швеллерного, уголкового и др. Опыты эти в основном подтвердили теорию Сен-Венана и вместе с тем дали новый материал для дальнейшего ее развития. Между прочим, в результате этих экспериментов автором их была высказана впервые мысль, что прочность на кручение двутаврового или швеллерного профиля равна сумме прочностей прямоугольников, из которых составлен этот профиль. Мысль эта, как известно, позднее была подтверждена и целым рядом теоретических исследований.

Для лучшего защемления в захватах испытательной машины стержни имели на концах массивные головки. Эти головки препятствовали искажению ближайших к ним поперечных сечений, и поэтому в последних появились значительные продольные напряжения, вызвавшие образование трещин.

Однако это не означало разрушения стержней, нагрузку на них еще оказывалось возможным увеличить и после появления трещин. Таким образом стержень с трещиной в полке выдерживал большую нагрузку, чем в неповрежденном состоянии.

Вопрос о месте наибольших напряжений в двутавровых балках нормального профиля (не широкополочных) подробно рассмотрел Р. Бредт [6], опубликовавший результаты своих исследований еще в 1896 г. Но он не обратил внимания на существование в горизонтальных полках балки (так же как и в вертикальной стенке) замкнутых траекторий касательных напряжений, не заходящих в тело вертикальной стенки.

Существование этих замкнутых траекторий касательных напряжений в горизонтальных полках двутавровой балки доказали в 1917—1918 гг. А. Гриффитс и Д. Тейлор [7]. Они были первыми исследователями, использовавшими аналогию Прандтля при исследовании прочности на кручение авиационных профилей.

Сочетая результаты, полученные из опытов с мыльными пленками, с известными математическими решениями, Гриффитс и Тейлор дали эмпирический метод определения момента инерции при чистом кручении различных сплошных стержней. В дальнейшем мы на этом методе остановимся подробнее.

Прибор и измерительные установки, которыми пользовались при своих экспериментах Гриффитс и Тейлор, в дальнейшем подверглись различным усовершенствованиям. В частности, этим вопросом занимались Пиккар и Бэс [8] (1926 г.), Пиккар и Жоннэ [9] (1929 г.), Квест [10] (1933 г.), Блох [11] (1936 г.) и Тиль [12] (1934 г.)<sup>1</sup>.

В 1917—1921 гг. Август Феппл [13] произвел большое количество опытов на чистое кручение прокатных металлических балок с целью определения для различных профилей действительной жесткости на кручение. Испытания производились под руководством инж. Губера механико-технической лабораторией Мюнхенского высшего механического училища в ударной испытательной машине, снабженной для этой цели специально устроенной вертикальной направляющей конструкцией. Образцы при испытании располагали вертикально, чтобы исключить влияние их собственного веса, которое сказалось бы при горизонтальном положении образца.

Длина стержней была от 3 до 5 м; они закреплялись верхним концом. Крутящая пара передавалась в горизонтальной плоскости на свободный конец стержня посредством поперечной штанги, к обоим концам которой был прикреплен трос, пропущенный через ролик и натянутый подвешенными к нему грузами. Угол закручивания измерялся на длине 1 м только в средних частях стержня. Это исключало местные влияния от защемления и приложения нагрузки. Измерение углов закручивания производилось оптическим методом.

Указанными опытами для исследуемых профилей были установлены поправочные коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  к формулам момента инерции при чистом кручении:

$$J_a = \alpha \sum \frac{b\delta^3}{3}, \quad (1)$$

$$J_a = \beta \frac{F^4}{40J_p}, \quad (2)$$

где  $b$  и  $\delta$  — высота (ширина) и толщина отдельных прямоугольников, из которых составлен профиль;  $F$  и  $J_p$  — площадь и полярный момент инерции поперечного сечения профиля.

Формула (1), как известно, построена на аналогии Прандтля, а формула (2) предложена Сен-Венаном.

Феппл считает формулу (1) более правильной, и только для двутавровых балок нормального профиля формула (2) довольно близко соответствует действительности. Величины поправочных коэффициентов  $\alpha$  к формуле (1), полученные из указанных опытов, приведены ниже в табл. 1.

<sup>1</sup> Описание прибора Гриффитса и Тейлора и усовершенствований, сделанных в нем перечисленными исследователями, см. „Теория упругости“ проф. П. Ф. Папкович, 1939 г. (стр. 556—562).

Кроме прокатных профилей Феппл испытал на кручение клепаный стержень крестового сечения, составленный из двух широкополочных тавров. Результаты показали, что жесткость составного стержня значительно меньше жесткости прокатного стержня такого же сечения. То же самое подтвердили и другие опыты Феппла над склепанными вместе металлическими листами и клепаными двутаврами. В дальнейшем мы остановимся на результатах этих опытов несколько подробнее.

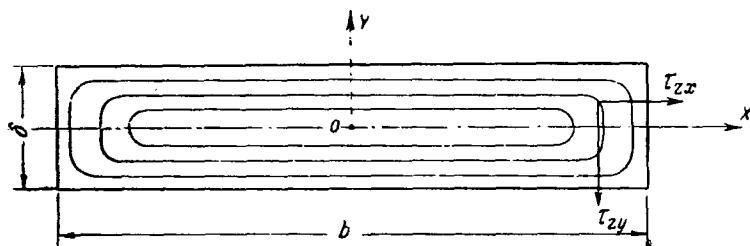
Приближенные формулы для определения момента инерции и момента сопротивления при чистом кручении, а также формулы максимальных касательных напряжений для большого числа разнообразных сечений приведены в книге К. Вебера „Die Lehre von der Drehungsfestigkeit“ [14].

Обширные опыты для изучения кручения различных профилей, применяемых в конструкциях самолета, были проведены в 1930 г. в США Трайером и Мершем [15] как с мыльными пленками, так и над реальными балками, изготовленными из дерева: двутаврового, швеллерного, таврового, уголкового и Z-образного сечения.

Из экспериментальных работ последнего времени по определению действительной жесткости стержней при кручении нам известны работы Лехайского университета США под руководством Инге Льяза [16]. Было проведено два рода испытаний: с мыльной пленкой и обычные механические испытания над стальными образцами двутаврового сечения высотой от 7,5 до 30 см с незашемленными и зашемленными концами. Испытания с мыльной пленкой производились на 57 двутавровых профилях различных размеров с параллельными и непараллельными полками и с различными радиусами закруглений в местах сопряжения стенки с полками. Стальных образцов было испытано 7 с незашемленными и 22 с зашемленными концами. В результате испытаний была определена действительная величина жесткости стержней при кручении; кроме того из опытов над образцами с зашемленными концами были получены данные для расчета сварных соединений.

## § 2. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЧИСТОГО КРУЧЕНИЯ

Стержни, применяемые в металлических конструкциях, как правило, состоят из отдельных прямоугольных полос.



Фиг. 1.

Пусть  $\delta$  и  $b$  — толщина и высота (ширина) сечения прямоугольной полосы (фиг. 1);

$\theta'$  — относительный угол закручивания, т. е. угол взаимного поворота двух сечений, отстоящих друг от друга на единицу длины;



$M_{кр}$  — крутящий момент;  
 $G$  — модуль упругости материала при сдвиге и  
 $J_d$  — момент инерции при чистом кручении (крутильное сопротивление).

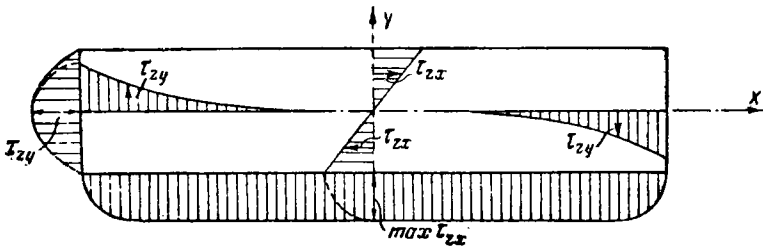
При малом значении  $\delta$  по сравнению с  $b$  можно из точного решения Сен-Венана получить следующие приближенные формулы для основных расчетных величин<sup>1</sup>.

Крутящий момент:

$$M_{кр} = GJ_d\theta'. \quad (3)$$

Момент инерции при чистом кручении:

$$J_d = \frac{1}{3} \delta^3 (b - 0,63 \delta) \approx \frac{b\delta^3}{3}. \quad (4)$$



Фиг. 2.

Максимальное касательное напряжение:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр} \delta}{J_d}. \quad (5)$$

Траектории и эпюры касательных напряжений в сечении скручиваемой прямоугольной полосы изображены на фиг. 1 и 2. Эти эпюры (фиг. 2) показывают, что касательные напряжения, параллельные длинной стороне прямоугольника ( $\tau_{zx}$ ), распределяются по толщине полосы (вдоль оси  $Y$ ), по линейному закону и на значительном протяжении вдоль прямоугольника почти не зависят от  $X$ ; напряжения  $\tau_{zy}$  имеют значительную величину лишь вблизи коротких сторон прямоугольника.

В восприятии крутящего момента основную роль, очевидно, играют напряжения  $\tau_{zx}$ , а так как плечо этих напряжений (равное  $\frac{2}{3} \delta$ ) очень мало, то они должны быть очень большими; этим и объясняется весьма малое сопротивление скручиванию такого рода узких прямоугольников.

Максимальные касательные напряжения, определяемые формулой (5), имеют место посредине длинных сторон наружного контура прямоугольника.

Результаты многочисленных теоретических и экспериментальных исследований, о которых речь шла в предыдущем параграфе, показали, что формулы (3), (4) и (5) остаются приближенно верными и для дру-

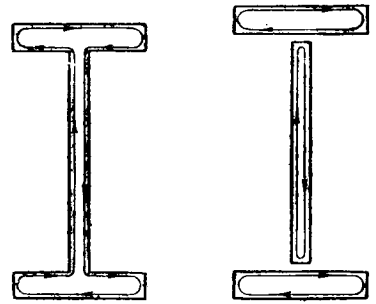
<sup>1</sup> А. Ф е п п л ь и Л. Ф е п п л ь, Сила и деформация, т. II, стр. 95—102, 1936.

гих открытых тонкостенных профилей. Как было указано выше, для профилей, состоящих из узких прямоугольников, например уголков, двутавров, швеллеров и т. п., момент инерции при чистом кручении определяется формулой (1):

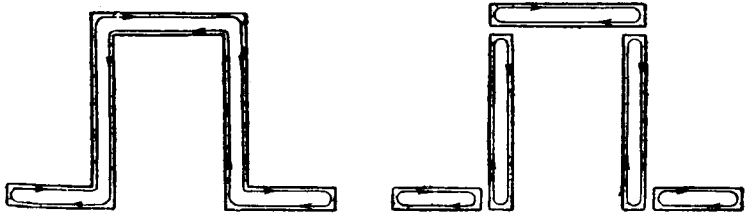
$$J_d = \alpha \sum \frac{b\delta^3}{3}$$

Таким образом, при чистом кручении отдельные полоски профиля работают как бы независимо одна от другой, и каждая из них воспринимает часть крутящего момента, пропорциональную значению своего момента инерции при кручении  $J_d$ .

В справедливости этого легко убедиться, если рассмотреть траектории касательных напряжений в целых и разрезанных профилях (фиг. 3



Фиг. 3.



Фиг. 4.

и 4). За исключением небольших областей, где стенки соединяются с полками, касательные напряжения в обоих случаях тождественны.

Таблица 1  
 Поправочные коэффициенты  $\alpha$  к формуле  $J_d = \sum \frac{b\delta^3}{3}$  по экспериментальным данным А. Феппля

Профиль	Коэффициент $\alpha$	
	для различных образцов	средний
Уголки . . . . .	0,83—1,10	0,99
Швеллеры . . . . .	0,98—1,25	1,12
Тавры . . . . .	0,92—1,25	1,15
Двутавры . . . . .	1,16—1,44	1,30
Двутавры широкополочные		
Г (Грея и Пейнера) . .	1,21—1,47	1,29
Зеты . . . . .	1,13—1,20	Не установлен

Эта неточность в формуле (1) учитывается поправочным коэффициентом  $\alpha$ , зависящим от формы поперечного сечения. Значения этого коэффициента для прокатных профилей, полученные А. Фепплом [13] из вышеописанных опытов, приведены в табл. 1.

Сопrotивление открытых металлических стержней скручиванию очень мало, что становится особенно наглядным, если сравнить жесткость стержня на

изгиб с жесткостью его на кручение. Для обычных прокатных профилей относительный угол закручивания  $\theta'$  от 50 до 900 раз больше относительного угла поворота  $\varphi$  при изгибе. Так, например, для двутавра № 30а

$$GJ_d = 0,8 \cdot 10^6 \cdot 38,83 = 31,06 \cdot 10^6,$$

а

$$EJ_x = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 8950 = 18\,800 \cdot 10^6.$$

Так как  $\theta' = \frac{M_{кр}}{GJ_d}$  и  $\varphi = \frac{M_x}{EJ_x}$ , то, принимая  $M_{кр} = M_x$ , получаем:

$$\frac{\theta'}{\varphi} = \frac{EJ_x}{GJ_d} = \frac{18800 \cdot 10^6}{31 \cdot 10^6} = 606.$$

Наибольшая величина касательного напряжения получается посредине наружного края наиболее толстого прямоугольника:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр} \delta_{\max}}{J_d}, \quad (5')$$

причем  $J_d$  в формулу (5') вводится без поправочного коэффициента  $\alpha$ .

### § 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ $J_d$ ДЛЯ ПРОКАТНЫХ ДВУТАВРОВ И ШВЕЛЛЕРОВ

#### 1. Общие соображения

Поправочные коэффициенты  $\alpha$ , введенные А. Фепплом в формулу (1) для момента инерции при чистом кручении, как показывает табл. 1, являются слишком неопределенными, потому что эксперименты дали весьма большую и совершенно незакономерную разбросанность их. Средние значения этих коэффициентов, рекомендуемые Фепплом, совершенно не учитывают различия уклонов полок в разных профилях и соотношений толщин и радиусов закруглений в местах сопряжения отдельных элементов профиля. Все это заставило нас обратиться к работам других исследователей, дающих более точные методы и формулы для определения указанной величины  $J_d$ , в частности, к уже указанным выше работам Гриффитса и Тейлора, Трайера и Мерша, Инге Лъяза и др.

#### 2. Метод Гриффитса и Тейлора

Метод Гриффитса и Тейлора заключается в следующем<sup>1</sup>.

Как известно, величина  $J_d$  в формуле (3) для круглого сечения равна полярному моменту инерции:

$$J_d = J_p = \frac{\pi r^4}{2}. \quad (6)$$

Формулу (6), очевидно, можно представить так:

$$J_d = \frac{\pi r^2}{2} r^2 = \frac{F}{2} r^2, \quad (7)$$

где  $F$  — площадь круга.

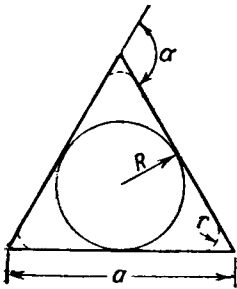
<sup>1</sup> Содержание этого метода нами заимствовано из работы Трайера и Мерша [12].

Допустим, что для любого сечения:

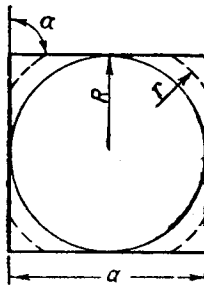
$$J_d = \frac{F}{2} c^2, \quad (8)$$

где  $c$  будем называть приведенным крутильным радиусом сечения. Для каждого сечения величина  $c$  должна быть найдена. Если мы сравним величину  $c$  для равностороннего треугольника с величиной  $c$  для вписанного в него круга, то мы найдем, что в то время, как площадь треугольника больше площади вписанного круга на 65%, больше радиуса того же круга только на 10%.

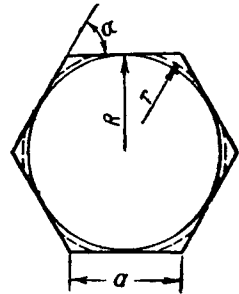
Это показывает, что выступающие углы сечения только немного увеличивают крутильную жесткость его. Поэтому для получения правильной величины  $c$  Гриффитс и Тейлор прежде всего предложили



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

выступающие углы сечения закруглить дугами подходящих радиусов (фиг. 5, 6 и 7). Радиус такой дуги зависит от внешнего угла  $\alpha$  между соответствующими гранями рассматриваемого сечения и от радиуса наибольшего вписанного в сечение круга, касающегося не менее чем в трех точках контура сечения. Для равностороннего треугольника  $\alpha = 120^\circ$ , для квадрата  $\alpha = 90^\circ$ , для правильного шестиугольника  $\alpha = 60^\circ$  и т. д.

Обозначим через  $R$  радиус наибольшего вписанного в сечение круга, а через  $r$  — искомый радиус закругления выступающего угла. Соотношения между этими радиусами в зависимости от угла  $\alpha$  приведены в табл. 2.

Таблица 2

Определение радиуса закругления выступающего угла сечения в зависимости от внешнего угла  $\alpha$

$\frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$	$\frac{r}{R}$	$\frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$	$\frac{r}{R}$
0,0	1,000	0,6	0,375
0,1	0,930	0,7	0,270
0,2	0,850	0,8	0,210
0,3	0,750	0,9	0,170
0,4	0,625	1,0	0,155
0,5	0,500		

Таблица 3

## Значения коэффициента

$$\lambda \text{ в формуле } c^2 = \lambda \left( \frac{2F_1}{P_1} \right)^2$$

$\frac{PR}{2F}$	$\lambda$	$\frac{PR}{2F}$	$\lambda$
1,00	1,000	0,70	0,897
0,95	0,998	0,65	0,848
0,90	0,994	0,60	0,793
0,85	0,984	0,55	0,732
0,80	0,966	0,50	0,667
0,75	0,938		

Закруглив все выступающие углы сечения дугами радиуса  $r$ , мы получим новую фигуру поперечного сечения, после чего можно определить величину приведенного крутильного радиуса  $c$  по формуле, предложенной Гриффитсом и Тейлором:

$$c^2 = \lambda c_1^2 = \lambda \left( \frac{2F_1}{P_1} \right)^2. \quad (9)$$

Здесь  $F_1$  и  $P_1$  — площадь и периметр новой фигуры, а  $\lambda$  — коэффициент, зависящий от радиуса наибольшего вписанного круга  $R$  и от площади и периметра  $F$  и  $P$

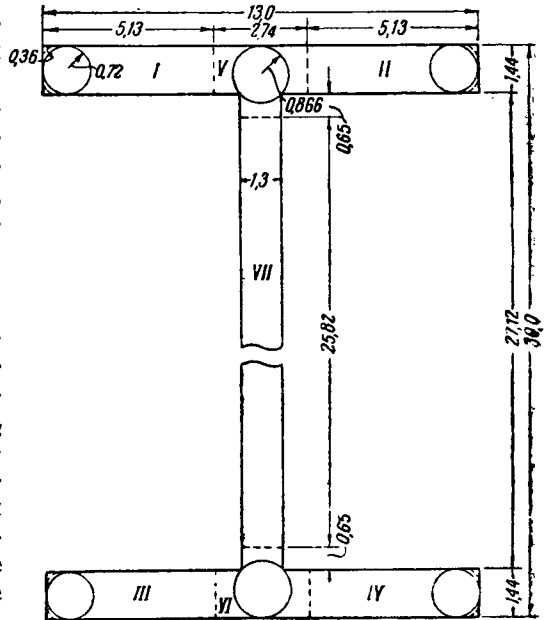
начального сечения. Значения этого коэффициента приведены в табл. 3.

Для иллюстрации применения метода Гриффитса и Тейлора к простейшим сечениям нами в табл. 4 вычислены значения  $J_d$  для трех сечений, изображенных на фиг. 5—7. Вычисленные значения  $J_d$  полностью совпадают с соответствующими значениями, полученными обычными методами теории упругости.

Применяя метод Гриффитса и Тейлора для сечения, в которое можно вписать более чем один круг, необходимо прежде всего разбить это сечение на отдельные части и вычислить для каждой из них указанную выше способом величину  $J_d$ . Затем, сложив значения  $J_d$  для отдельных элементов, получим величину  $J_d$  для всего сечения. Если сечение состоит из узких элементов с параллельными или почти параллельными сторонами, например сечение двутавра, то разделяющие линии должны быть проведены на расстоянии от начала параллельного участка, равном половине его толщины. Разделяющие линии не включаются в периметры составляющих частей, и углы, образованные ими с первоначальным контуром, не закругляются.

Для примера определим значение  $J_d$  для двутавра № 30с.

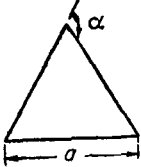
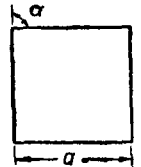
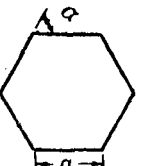
Прежде всего разбиваем сечение на 7 частей, как показано на фиг. 8. Затем закругляем наружные выступающие углы. Так как для



Фиг. 8.

Таблица 4

Значения  $J_d$  вычисленные по способу Гриффитса и Тейлора для трех простейших сечений

Тип сечения	$\alpha^\circ$	$\frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$	$\frac{r}{R}$	$R$	$r$	$F$	$P$	$\frac{PR}{2F}$	$\lambda$	$F_1$	$P_1$	$\left(\frac{2F_1}{P_1}\right)^2 = c^2$	$J_d$
	120°	0,667	0,305	0,289a	0,0881a	0,433a <sup>2</sup>	3a	1,0	1,0	0,417a <sup>2</sup>	2,61a	0,100a <sup>2</sup>	0,0217a <sup>4</sup>
	90°	0,500	0,500	0,500a	0,2500a	a <sup>2</sup>	4a	1,0	1,0	0,946a <sup>2</sup>	3,58a	0,279a <sup>2</sup>	0,140a <sup>4</sup>
	60°	0,333	0,708	0,866a	0,6130a	2,6a <sup>2</sup>	6a	1,0	1,0	2,48a <sup>2</sup>	5,60a	0,784a <sup>2</sup>	1,019a <sup>4</sup>

всех углов внешний угол  $\alpha = 90^\circ$ , то, согласно табл. 2,  $\frac{r}{R} = 0,5$ , а следовательно,

$$r = 0,5R.$$

Все остальные вычисления даны в табл. 5.

Таблица 5

К примеру определения  $J_d$  для двутавра № 30с по способу Гриффитса и Тейлора

Элементы	$R$ см	$r$ см	$F$ см <sup>2</sup>	$P$ см	$\frac{PR}{2F}$	$\lambda$	$F_1$ см <sup>2</sup>	$P_1$ см	$\left(\frac{2F_1}{P_1}\right)^2$ см <sup>2</sup>	$c^2$ см <sup>2</sup>	$J_d$ см <sup>4</sup>
I	0,72	0,36	7,39	11,70	0,57	0,756	7,33	11,59	1,60	1,21	4,47
II	0,72	0,36	7,39	11,70	0,57	0,756	7,33	11,59	1,60	1,21	4,47
III	0,72	0,36	7,39	11,70	0,57	0,756	7,33	11,59	1,60	1,21	4,47
IV	0,72	0,36	7,39	11,70	0,57	0,756	7,33	11,59	1,60	1,21	4,47
V	0,866	—	4,79	5,48	0,495	0,667	4,79	5,48	3,06	2,04	4,88
VI	0,866	—	4,79	5,48	0,495	0,667	4,79	5,48	3,06	2,04	4,88
VII	0,65	—	33,57	51,64	0,500	0,667	33,57	51,64	1,69	1,127	18,92
Суммарное $J_d = 46,56$											

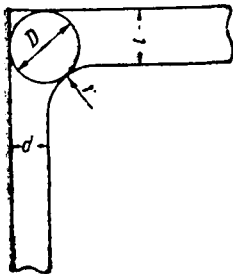
В результате получаем  $J_d = 46,56$  см<sup>4</sup>; по формуле (1) получим  $J_d = 45,73$  см<sup>4</sup>.

### 3. Метод Трайера и Мерша

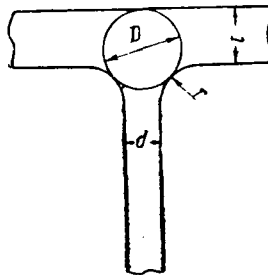
Метод определения величины  $J_d$  для сложных профилей, предложенный Трайером и Мершем, объединяет идеи Вебера и Феппля со способом Гриффитса и Тейлора. Основную величину  $J_d$  для стержней, сечения которых составлены из нескольких прямоугольников, они определяют по обычной формуле, построенной на аналогии Прандтля:

$$J_d = \sum \frac{b\delta^3}{3}.$$

К этой формуле они дают дополнительную поправку на увеличение жесткости от связи стенок с полками и от наличия закруглений в этих местах, вызывающих дополнительное выпучивание мыльной пленки.



Фиг. 9.

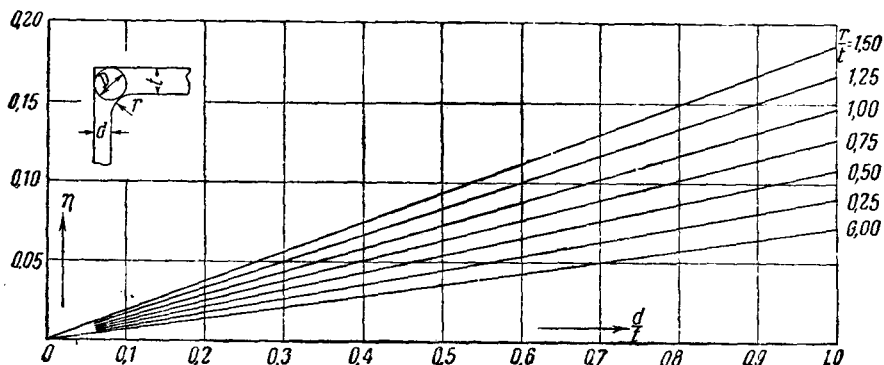


Фиг. 10.

Эту поправку они принимают пропорциональной четвертой степени диаметра наибольшего круга, который может быть вписан в месте соединения стенки с полкой (фиг. 9 и 10), т. е. выражают ее формулой:

$$\Delta J_d = \eta D^4. \quad (10)$$

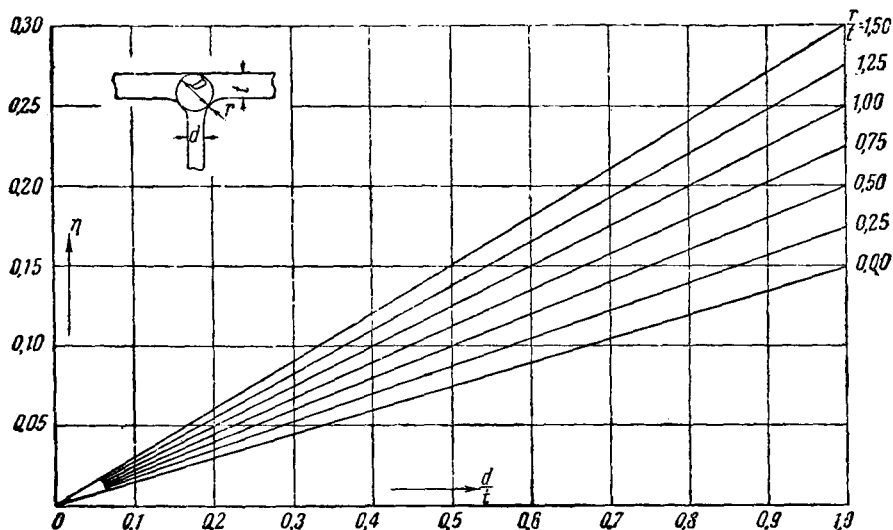
Здесь  $\eta$  — коэффициент, зависящий от двух величин: от отношения радиуса закругления к толщине полки ( $\frac{r}{t}$ ) и от отношения толщины



Фиг. 11.

более узкого составляющего прямоугольника к толщине более широкого ( $\frac{d}{t}$ ).

Значения коэффициента  $\eta$  для различных комбинаций этих отношений Трайер и Мерш получили из обширного количества экспериментов как



Фиг. 12.

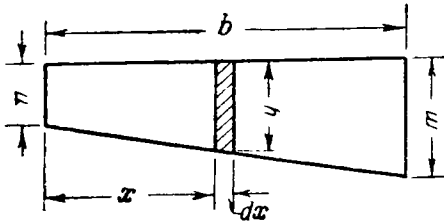
над мыльной пленкой, так и над реальными балками: двутаврового, швеллерного, уголкового и Z-образного сечений, изготовленными из дерева.

Значения  $\eta$  графически представлены для уголкового типа сопряжения на фиг. 11 и для таврового — на фиг. 12.



#### 4. Метод Инге Льяза и Б. Джонстона

Этот метод по существу ничего нового не вносит в способ определения величины  $J_a$ , а уточняет метод Трайера и Мерша и распространяет его на металлические прокатные двутавры не только с параллельными полками (широкополочные), но и с полками, имеющими уклоны. Метод проверен не только экспериментами над мыльной пленкой, но также и экспериментами на чистое кручение над реальными прокатными балками; поэтому для наших целей он является наиболее приемлемым.



Фиг. 13.

Исходным пунктом этого метода является точная формула  $J_a$  для прямоугольного сечения, впервые предложенная Сен-Венаном:

$$J_a = \frac{b\delta^3}{3} - 2v\delta^4, \quad (11)$$

где  $b$  и  $\delta$  — ширина и толщина прямоугольника, а  $v$  — множитель, зависящий от отношения  $\frac{b}{\delta}$  и при  $\frac{b}{\delta} > 3$  практически постоянный, равный  $v = 0,10504$ .

Последний член формулы (11), как известно, характеризует концевые сужения мыльной пленки.

Для длинных и узких прямоугольников этим членом без большой ошибки можно пренебречь и принять:

$$J_a = \frac{b\delta^3}{3}. \quad (12)$$

Принимая для элемента длиной  $dx$  вдоль сечения

$$J_a = \frac{\delta^3 dx}{3}, \quad (13)$$

получаем для полосы с непараллельными сторонами (фиг. 13):

$$J_a = \frac{1}{3} \int_0^b y^3 dx. \quad (14)$$

Обозначив толщину полосы по концам через  $n$  и  $m$  и произведя интегрирование, получим:

$$J_a = \frac{b}{12} (n + m)(n^2 + m^2). \quad (15)$$

Более точно, т. е. с учетом концевых сужений, формулу (15) можно записать так:

$$J_a = \frac{b}{12} (n + m)(n^2 + m^2) - v_S n^4 - v_L m^4; \quad (16)$$

где  $v_S$  и  $v_L$  — коэффициенты для учета поправок на концевые части узкого и широкого концов полосы.

Значения этих коэффициентов определены проф. Рейнольдсом на основании работ Сен-Венана для сечения, изображенного на фиг. 13:

$$v_s = 0,10504 + 0,10000k + 0,08480k^2 + 0,06746k^3 + 0,05153k^4; \quad (17)$$

$$v_L = 0,10504 - 0,10000k + 0,08480k^2 - 0,06746k^3 + 0,05153k^4, \quad (18)$$

где  $k$  — общий уклон сторон полосы:

$$k = \frac{m-n}{b}. \quad (19)$$

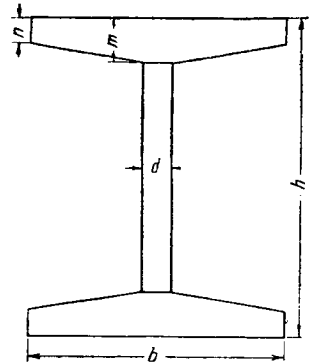
Пользуясь формулой (16) нетрудно написать выражение  $J_d$  для составляющих элементов обыкновенного (с непараллельными полками) прокатного двутавра (фиг. 14):

для полки:

$$J_d^{пол} = \frac{b-d}{12} (n+m)(n^2+m^2) + \frac{dm^3}{3} - 2v_s n^4; \quad (20)$$

для стенки:

$$J_d^{cm} = \frac{1}{3} (h-2m) a^3. \quad (21)$$



Фиг. 14.

Дополнительную поправку к  $J_d$ , учитывающую увеличение жесткости профиля от связи стенки с полками и от наличия закруглений, И. Ляз и Б. Джонстон предлагают определять также по формуле (10). Для определения коэффициента  $\eta$  в этой формуле они построили графики для двутавров с параллельными полками (фиг. 15) и для двутавров, имеющих уклон полок, равный 1:6 (фиг. 16). Кривые, как было сказано выше, определялись экспериментально на опытах с мыльной пленкой. Необходимо отметить, что на фиг. 15 вправо от  $a-a$  линии параллельны и расположены на одинаковом расстоянии друг от друга; в этой части графика коэффициент  $\eta$  выражается формулой:

$$\eta = 0,094 + 0,070 \frac{r}{n}. \quad (22)$$

Для балок, имеющих полки с уклонами 1:20 и 1:50, значения  $\eta$  предлагается определять по формулам, полученным путем интерполяции между кривыми фиг. 15 и 16, а именно:

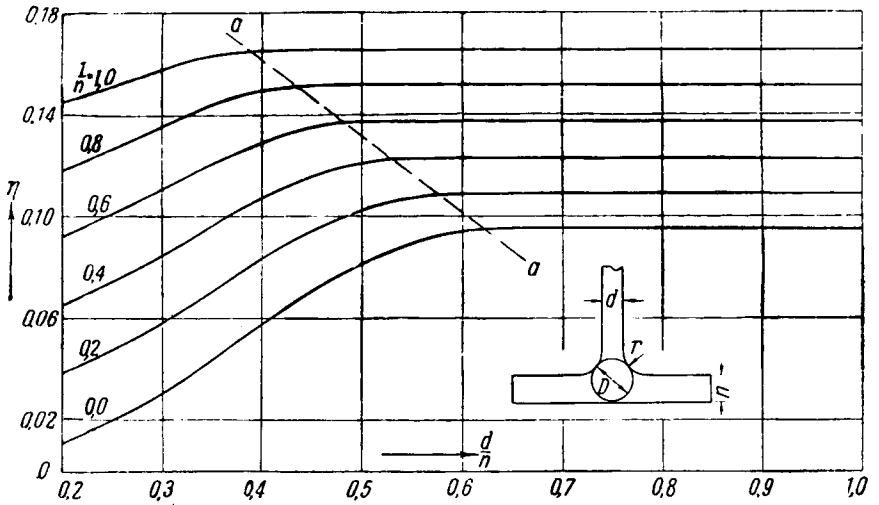
для уклона 1:20:

$$\eta = 0,066 + 0,021 \frac{d}{m} + 0,072 \frac{r}{m}; \quad (23)$$

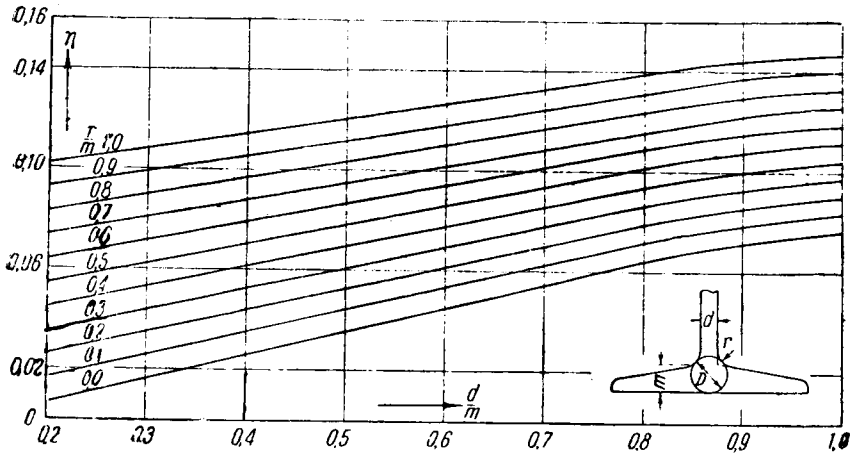
для уклона 1:50:

$$\eta = 0,084 + 0,007 \frac{d}{m} + 0,071 \frac{r}{m}. \quad (24)$$

Коэффициенты для учета поправок на концевые части  $v_S$  и  $v_L$  для стандартных уклонов американских прокатных двутавров имеют следующие



Фиг. 15.



Фиг. 16.

значения:

для  $k = \frac{1}{6}$  :  $v_S = 0,12441$ ;  $v_L = 0,09045$   
 „  $k = \frac{1}{20}$  :  $v_S = 0,11026$ ;  $v_L = 0,10026$   
 „  $k = \frac{1}{50}$  :  $v_S = 0,10707$ ;  $v_L = 0,10307$   
 „  $k = \frac{1}{\infty}$  :  $v_S = 0,10504$ ;  $v_L = 0,10504$

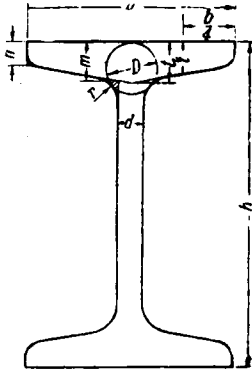
Складывая теперь все составляющие, входящие в общее выражение  $J_d$  и определяемые формулами (20), (21) и (10), получаем:

1) для прокатных двутавров с полками, имеющими уклоны (фиг. 17):

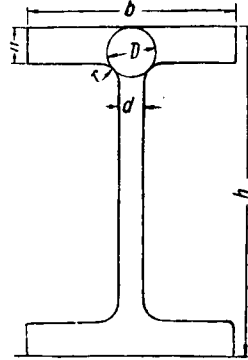
$$J_d = \frac{h-d}{6} (n+m)(n^2+m^2) + \frac{2}{3} dm^3 + \frac{1}{3} (h-2m)d^3 + 2r_1D^4 - 4v_8n^4; \quad (25)$$

2) для двутавров с параллельными полками (фиг. 18):

$$J_d = \frac{2}{3} bn^3 + \frac{1}{3} (h-2n)d^3 + 2r_1D^4 - 0,42016n^4. \quad (26)$$



Фиг. 17.



Фиг. 18.

Диаметр вписанного круга  $D$  определяется по формулам:

1) для двутавров с параллельными полками:

$$D = \frac{(r+n)^2 + d \left( r + \frac{d}{4} \right)}{2r+n}; \quad (27)$$

2) для двутавров с полками, имеющими уклон  $k = \frac{m-n}{b}$  (фиг. 17):

$$D = \frac{(B+t_1)^2 + d \left( r + \frac{d}{4} \right)}{B+r+t_1}, \quad (28)$$

где

$$B = rk \left( \sqrt{\frac{1}{k^2} + 1} - 1 - \frac{d}{2r} \right) \quad (29)$$

и  $t_1$  — максимальная высота полки, равная

$$t_1 = t + \frac{kh}{4}. \quad (30)$$

Средняя толщина полки  $t$  обычно дается в сортаменте прокатных профилей.

Формулы (25) и (26) были проверены путем испытания на чистое кручение семи металлических прокатных балок различных размеров.

Результаты испытаний приведены в табл. 6. Из табл. 6 видно, что максимальное отклонение экспериментальных данных от расчетных составляет 6,7%, а среднее отклонение для семи испытаний — 2,26%.

Таблица 6

Результаты испытаний на чистое кручение двутавровых прокатных балок, проведенных в Лехайском университете США под руководством Инге Льяза

Стандартная высота профиля дм	Вес $\frac{\text{фунт}}{\text{фут}}$	Момент инерции при чистом кручении $J_d$ , дм <sup>4</sup>		Отклонение в %
		по формуле согласно измеренным размерам	полученный эксперимен- тальным путем	
6	20	0,243	0,243	0,0
8	31	0,463	0,451	— 2,6
10	62	2,101	1,960	— 6,7
12				
широкополочный	31,8	0,833	0,804	— 3,5
12				
широкополочный	55	3,318	3,380	+ 1,9
12	190	48,440	48,870	+ 0,9
12	65	2,227	2,222	— 0,2

Ниже мы подробнее остановимся на описании экспериментов на чистое кручение, проведенных нами в лаборатории строительной механики ЦНИПС над металлическими образцами. В числе этих образцов был испытан один прокатный двутавр № 16. В результате этого эксперимента мы получили  $J_d = 12,03 \text{ см}^4$ . Подсчитав значение  $J_d$  по формуле (25) по действительным размерам образца, получим  $J_d = 11,03 \text{ см}^4$ . Расхождение составляет 9%.

Результаты всех этих экспериментов достаточно хорошо совпадают со значениями  $J_d$ , вычисленными по формуле (25), а потому эту формулу можно считать наиболее правильной. Мы воспользовались ею при вычислении величины  $J_d$  для всего сортамента наших двутавров (ОСТ 2451), при этом коэффициент  $\eta$  мы принимали по графику (фиг. 16), так как уклон полок наших двутавров также равен 1:6. Результаты этого подсчета даны в графе 5 приложения 1. Сравнив вычисленные таким образом значения  $J_d$  с соответствующими значениями, получаемыми по формуле (1), мы получили, как и следовало ожидать, переменный для всего сортамента поправочный коэффициент от 1,28 для № 10 до 1,17 для № 60с, а не 1,30, как рекомендует принимать А. Феппл для всех двутавров.

### 5. Определение значений $J_d$ для прокатных швеллеров

На основании формул (20), (21) и (10) получается общая формула  $J_d$  для прокатного швеллера в таком виде (фиг. 19):

$$J_d = \frac{b-d}{6}(n+m)(n^2+m^2) + \frac{2}{3}dm^3 + \frac{1}{3}(h-2m)d^3 + 2\tau D^4 - 2v_s n^4. \quad (31)$$

Коэффициент  $v_s$  для поправок на концевые части мы вычислили по формуле (17), считая уклон полок швеллеров нашего сортамента (ОСТ 2452)  $k=0,1$ , и получили  $v_s=0,11597$ .

Для определения диаметра вписанного круга  $D$  мы вывели следующую формулу:

$$D = 2 \{A + C - \sqrt{2C(A+r)}\}, \quad (32)$$

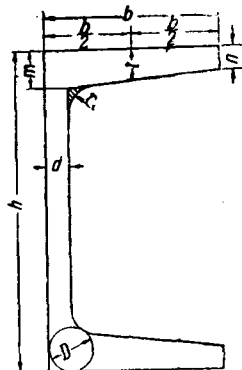
где

$$C = d + 2r; \quad (33)$$

$$A = B + t_1; \quad (34)$$

$$B = rk \left( \sqrt{\frac{1}{k^2} + 1} - 1 - \frac{d}{2r} \right); \quad (35)$$

$$t_1 = t + \frac{k}{2} (b - d). \quad (36)$$



Фиг. 19.

Коэффициент  $\eta$  в формуле (31), как известно, определяется из опытов над мыльной пленкой. Однако подобных опытов, специально проведенных для швеллерных сечений с полками, имеющими уклон, мы в литературе не встречали, поэтому решили распространить на швеллеры результаты экспериментов Инге Льяза и Б. Джонстона над двутавровыми сечениями и экспериментов Трайера и Мерша — над сопряжениями уголкового типа с параллельными гранями.

Прежде всего установим формулу коэффициента  $\eta$  для двутаврового сечения с уклоном полок 1:10. С этой целью воспользуемся формулой (22) для двутавров с параллельными полками, формулой (23) — для уклона 1:20 и составим аналогичную формулу по кривым графика фиг. 16 для уклона 1:6. Для наиболее интересующего нас участка в пределах  $\frac{r}{m}$  от 0,7 до 0,9 и  $\frac{d}{m}$  от 0,5 до 0,7 линии этого графика можно считать прямыми, выраженными уравнением:

$$\eta = 0,003 + 0,066 \frac{d}{m} + 0,0825 \frac{r}{m}. \quad (37)$$

Из формул (22) и (23) при помощи экстраполяции или из формул (22) и (37) при помощи интерполяции (для проверки) получается для двутавра с уклоном полок 1:10 формула:

$$\eta = 0,038 + 0,042 \frac{d}{m} + 0,074 \frac{r}{m}. \quad (38)$$

Чтобы перейти от двутаврового сечения к швеллерному, пользуемся графиками Трайера и Мерша, изображенными на фиг. 11 для уголкового типа сопряжения и на фиг. 12 для сопряжения таврового типа.

Прямые графика фиг. 11 можно выразить уравнением:

$$\eta = \left( 0,072 + 0,075 \frac{r}{m} \right) \frac{d}{m}, \quad (39)$$

а прямые графика фиг. 12 — уравнением:

$$\eta = \left( 0,15 + 0,1 \frac{r}{m} \right) \frac{d}{m}. \quad (40)$$

Очевидно, что прямые графика фиг. 11, соответствующие швеллерному типу сечения, можно получить из прямых графика фиг. 12, соответствующих сечению двутаврового типа, путем умножения последних на коэффициент:

$$\beta = \frac{(0,072 + 0,075 \frac{r}{m}) \frac{d}{m}}{(0,15 + 0,1 \frac{r}{m}) \frac{d}{m}} = \frac{0,72 + 0,75 \frac{r}{m}}{1,5 + \frac{r}{m}}. \quad (41)$$

Поэтому для распространения формулы (38), выведенной для двутавров с уклоном полок 1:10, на швеллеры с тем же уклоном полок умножаем ее на коэффициент  $\beta$ . Таким образом для швеллеров нашего сортамента коэффициент  $\eta$  будет такой:

$$\eta = \frac{0,72 + 0,75 \frac{r}{m}}{1,5 + \frac{r}{m}} (0,038 + 0,042 \frac{d}{m} + 0,074 \frac{r}{m}). \quad (42)$$

Для проверки достаточной правильности формул (31), (32) и (42) мы сравнили результаты подсчета  $J_a$  по этим формулам с экспериментальными данными. С этой целью мы воспользовались экспериментами на чистое кручение над прокатными швеллерами, проведенными в Иллинойском университете США [17]. Сравнивались экспериментальные значения  $J_a$  для пяти швеллеров различных размеров с уклоном полок 1:6. При подсчетах член в скобках формулы (42) был заменен формулой (37). Результаты подсчета приведены в табл. 7. Размеры профилей при вычислении  $J_a$  по формуле нами принимались действительные за исключением радиусов закруглений, которые были приняты из соответствующего сортамента американских швеллеров. Из табл. 7 видно, что максимальное отклонение экспериментальных данных от расчетных составляет 12,3%, а среднее отклонение для пяти образцов — 6%.

Таблица 7

**Результаты испытаний на чистое кручение прокатных швеллеров, проведенных в Иллинойском университете США**

Высота профиля $h$ в дм	Вес $\frac{\text{фунт}}{\text{фут}}$	Размеры в дм				Момент инерции при чистом кручении $J_a$ в дм <sup>4</sup>		Отклонение в %
		$b$	$d$	$t$	$r$	по формуле	экспериментальн.	
4	5,4	1,58	0,180	0,296	0,28	0,0411	0,0400	-2,7
6	8,2	1,92	0,200	0,343	0,30	0,0798	0,0720	-9,8
6	15,5	2,28	0,559	0,343	0,30	0,399	0,393	-1,5
10	15,3	2,60	0,240	0,436	0,34	0,227	0,255	+12,3
15	33,9	3,40	0,400	0,650	0,50	1,119	1,080	-3,5

В числе экспериментов на чистое кручение, проведенных нами в ЦНИПС, был также один образец из прокатного швеллера № 12. В результате этого эксперимента мы получили  $J_a = 4,34 \text{ см}^4$ . Подсчет по формулам (31), (32) и (42) по действительным размерам профиля дал  $J_a = 4,62 \text{ см}^4$ ; отклонение равно 6%.

Убедившись в достаточной правильности указанных формул, мы вычислили по ним величину  $J_d$  для всего сортамента наших швеллеров (ОСТ 2452). Результаты этого подсчета даны в графе 8 приложения 2.

Так же, как и для двутавров, мы сравнили вычисленные величины  $J_d$  с результатами подсчета по формуле (1) и получили поправочный коэффициент, меняющийся для разных номеров в пределах от 1,107 до 1,1578, а для швеллера № 5 он даже оказался равным 1,413. Феппл, как известно, рекомендует принимать поправочный коэффициент для всех швеллеров равным 1,12.

#### § 4. ИСПЫТАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ НА ЧИСТОЕ КРУЧЕНИЕ В ЛАБОРАТОРИИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ЦНИП

##### 1. Описание установки для испытания стержней на чистое кручение. Испытание прокатных образцов

Испытания металлических стержней на чистое кручение производились на специальной установке, запроектированной и выполненной под руководством старшего научного сотрудника Н. Г. Добудогло и техника Ф. А. Перн.

Общий вид этой установки показан на фиг. 20, а детали подвесной конструкции к ней показаны на фиг. 21.

Образец подвешивается в горизонтальном положении. Один конец его, зажатый в хомуте, закрепляется неподвижно при помощи двуплечего рычага и круглых металлических тяг, заанкеренных между парой швеллеров у пола.

К другому концу, также зажатому в хомуте, прилагается крутящий момент при помощи нагрузки, укладываемой на платформу, которая подвешивается к такому же двуплечему рычагу. Применение двуплечего рычага позволяет производить закручивание образца как в одну, так и в другую сторону.

Для возможности свободной деформации (искривления) поперечных сечений испытываемого образца рычаги хомутов опираются на элемент профиля посредством стального шарика, расположенного в плоскости симметрии профиля (при испытании несимметричных профилей применялись специальные опоры). Нижние элементы образца обладают относительно меньшей свободой деформации, так как они опираются непосредственно на нижнюю перекладину хомута.

Мы проверили эту установку в действии, испытав на ней предварительно два прокатных металлических образца: швеллер № 12 и двутавр № 16. Целью испытания было определение действительной жесткости при чистом кручении  $GJ_d$ .

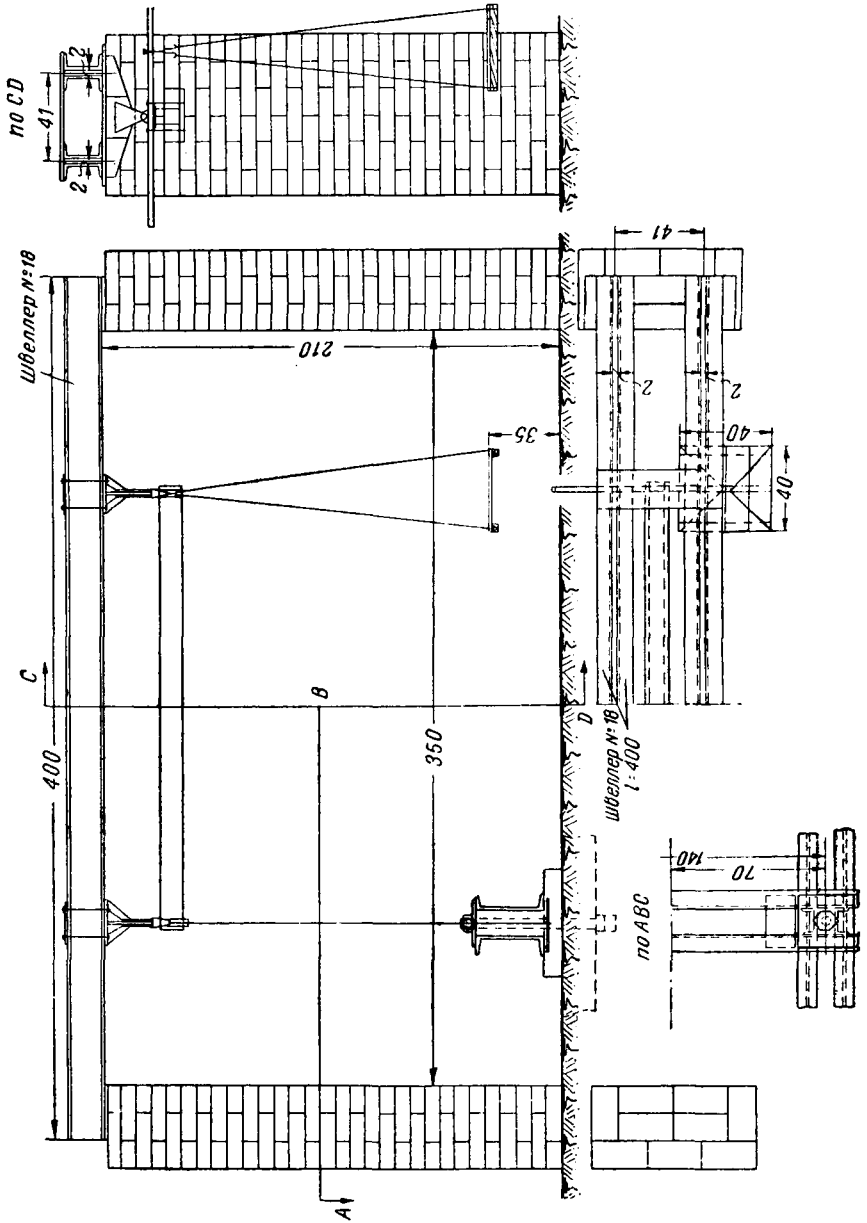
Испытывавшийся швеллер имел длину 3 м. В пяти сечениях образца на расстоянии 65 см друг от друга было установлено по два прогибомера, при помощи которых измерялись вертикальные перемещения крайних точек каждого из этих сечений (фиг. 22). Закручивающий момент  $M_{кр}$  изменялся ступенями путем добавления нагрузки по 15 кг на плече 50 см, следовательно, приращение закручивающего момента составляло:

$$\Delta M_{кр} = 15 \cdot 50 = 750 \text{ кгсм.}$$

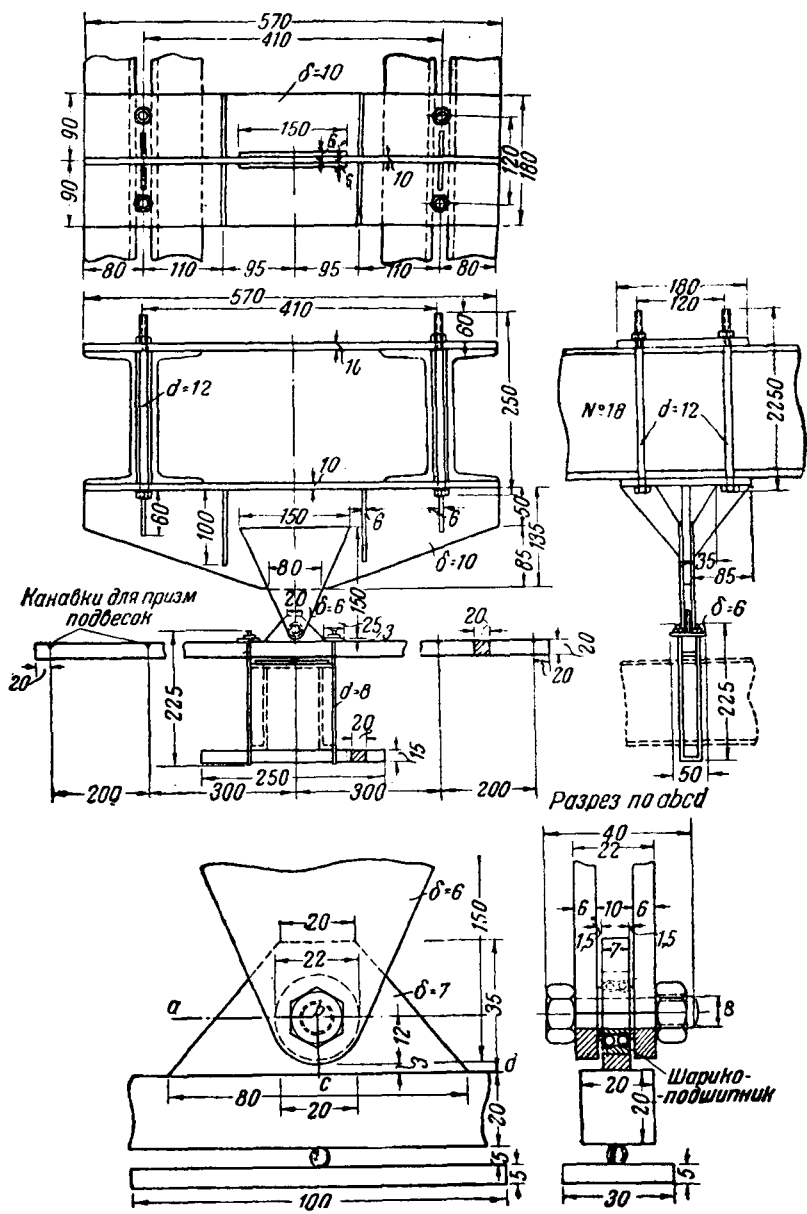
Цикличность загрузки и разгрузки схематически можно изобразить так:

0; 1; 2; 3; 2; 1; 0; 1; 2; 3; 2; 1; 0.



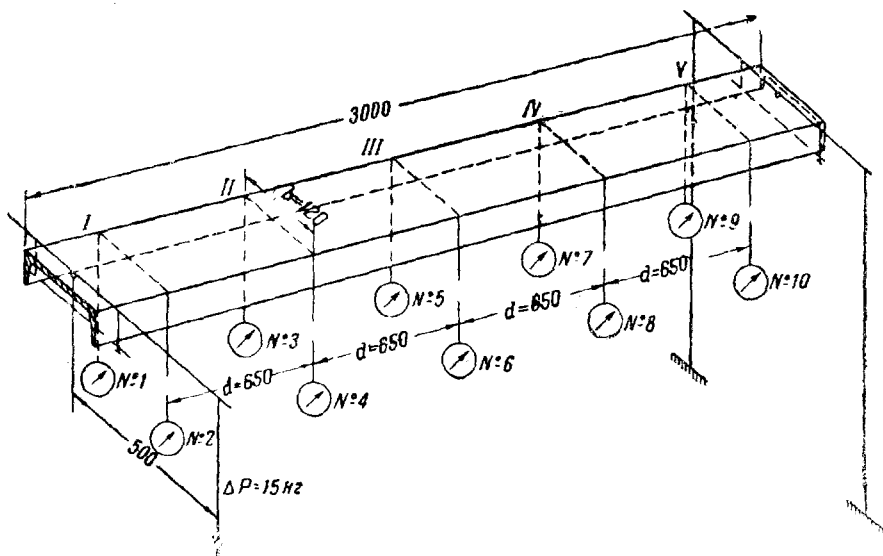


Фиг. 20.



Фиг. 21.

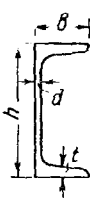
Нагрузка № 0 равнялась 15 кг и составлялась из собственного веса платформы и некоторого начального груза, который при дальнейших



Фиг. 22.

испытаниях оставался постоянно на платформе; нагрузка № 1 была 30 кг, № 2—45 кг, № 3—60 кг. Закручивание производилось в обе стороны: по ходу часовой стрелки (положительное кручение) и обратно ходу

Результаты испытания на чисте

Тип образца	Разности между суммами приращений отсчетов в смежных сечениях в мм				Средняя из восьми разностей в мм	Расстояние между приборами в одном сечении $b$ в мм	Расстояние между сечениями $d$ в мм	Относительный угол закручивания $\theta'$ в мм <sup>-1</sup>
	I—II	II—III	III—IV	IV—V				
	Положительное кручение				1,62	120	650	20,8 · 10 <sup>-6</sup>
	1,59	1,60	1,63	1,66				
Отрицательное кручение								
	1,615	1,54	1,65	1,64				

часовой стрелки (отрицательное кручение) с той же схемой цикличности нагружения. Результаты испытания и сравнение полученного значения  $J_d$  с теоретическим подсчетом даны в табл. 8.

Относительный угол закручивания  $\theta'$  определялся по формуле:

$$\theta' = \frac{R}{bd}, \quad (43)$$

где  $R$  — разность между суммой приращений показаний двух поставленных в одном сечении прогибомеров и такой же суммой приращений в смежном сечении;

$b$  — расстояние между проволоками прогибомеров по ширине образца;

$d$  — расстояние между сечениями.

Искомая жесткость образца при чистом кручении  $GJ_d$  определялась по формуле:

$$GJ_d = \frac{\Delta M_{кр}}{\theta'}, \quad (44)$$

где  $\Delta M_{кр}$  — приращение закручивающего момента.

Полученная в результате обработки испытаний жесткость  $GJ_d$  представляет среднее из 96 величин [12 циклов  $\times$  2 (положительное и отрицательное кручение)  $\times$  4 (I—II сечения, II—III сечения, III—IV сечения, IV—V сечения)].

Сравнительно небольшая разница экспериментальных величин, полученных в разных участках по длине образца, как это видно из табл. 8, убеждает нас в том, что при подобных испытаниях нет необходимости ставить большое количество приборов, а потому в дальнейшем при

Таблица 8

кручение швеллера № 12 (фиг. 22)

Приращение крутящего момента $\Delta M_{кр}$ в кг·м·м	Жесткость при чистом кручении $GJ_d$ в кг·см <sup>2</sup>	Принятый модуль упругости $G$ в кг/см <sup>2</sup>	$J_d$ по экспериментальным данным в см <sup>4</sup>	Действительные размеры образца в мм				$J_d$ по формуле: $J_d = \frac{bd^3}{3}$ в см <sup>4</sup>	Поправочный коэффициент $\alpha$
				$h$	$b$	$d$	$t$		
7500	$3,61 \cdot 10^6$	$0,8 \cdot 10^6$	4,51	119	52,9	5,5	10,0	4,08	1,10

испытании других образцов мы ставили прогибомеры не более чем в четырех или даже трех сечениях образца.

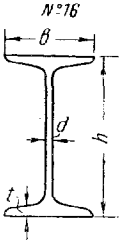
Так как мы для данного образца не определяли непосредственно модуля упругости при сдвиге  $G$ , то приняли его равным среднему значению для стали, т. е.  $800\,000 \text{ кг/см}^2$ .

Сравнение полученного экспериментального значения  $J_d$  с теоретическим подсчетом его по формуле (1) дает поправочный коэффициент 1,10. По экспериментам А. Фепля для шести испытанных им швеллеров (табл. 1) тот же коэффициент колебался в пределах 0,98—1,25. По аналогичным экспериментам, проведенным в Иллинойском университете (табл. 7), сравнение результатов испытаний с подсчетами по той же формуле (1) дает поправочный коэффициент, заключающийся в пределах 1,01—1,25.

Полученный нами поправочный коэффициент 1,10 находится в тех же пределах.

Переходим к описанию испытания прокатного двутавра № 16. Длина образца составляла 2 м. Приборы были поставлены в трех сечениях на расстоянии  $d = 60 \text{ см}$  друг от друга. Расстояние между проволоками прогибомеров в каждом сечении было доведено до  $b = 20 \text{ см}$  путем приварки к верхней полке образца круглых стержней с выступающими концами, к которым привязывались проволоки прогибомеров. Степень изменения нагрузки была принята в 20 кг на том же плече 50 см. Цикличность загрузки и разгрузки была такая же, как и при испытании швеллера. Результаты этого испытания и сравнение полученного значения  $J_d$  с теоретическим подсчетом даны в табл. 9.

#### Результаты испытания на чистое

Тип образца	Средние разности между суммами приращений отсчетов в смежных сечениях в мм		Средняя из четырех разностей в мм	Расстояние между приборами в одном сечении $b$ в мм	Расстояние между сечениями $d$ в мм	Относительный угол закручивания $\theta'$ в $\text{мм}^{-1}$
	I—II	II—III				
	Положительное кручение		} 1,246	200	600	10,38 · 10 <sup>-4</sup>
	1,271	1,257				
Отрицательное кручение		} 1,208				
1,208	1,218					

По экспериментам А. Фепля (табл. 1) для пяти испытанных им обыкновенных (не широкополочных) двутавров поправочный коэффициент колебался в пределах 1,16—1,44, причем для двутавра № 14 он равнялся 1,44, а для двутавра № 20—1,32. Полученный нами поправочный коэффициент для двутавра № 16—1,37 вполне укладывается в эти рамки.

Таким образом результаты испытания прокатных швеллера и двутавра подтвердили полную пригодность нашей установки для испытания металлических образцов на чистое кручение.

## 2. Испытание сварных двутавровых образцов

Испытание сварных двутавровых образцов на чистое кручение производилось с целью установить действительную жесткость  $GJ_d$  и степень изменения ее при наличии ребер жесткости или планок в зависимости от расстояния между ними по длине стержня. Нами были запроектированы и изготовлены в мастерских ЦНИПС под руководством техника Ф. А. Перн два сварных образца длиной по 2 м: один без ребер и планок, а второй с ребрами жесткости, расположенными на расстоянии 48 см друг от друга. Геометрические размеры образцов даны на фиг. 23. После первого испытания к полкам первого образца (без ребер) были приварены с обеих сторон вертикальные планки шириной в 50 мм на расстояниях между осями в 48 см; после второго испытания между ними были приварены еще дополнительные планки, так что шаг планок стал в 24 см. Точно так же и ко второму образцу (с ребрами) после первого испытания были приварены дополнительные ребра жесткости,

Таблица 9

кручение двутавра № 16

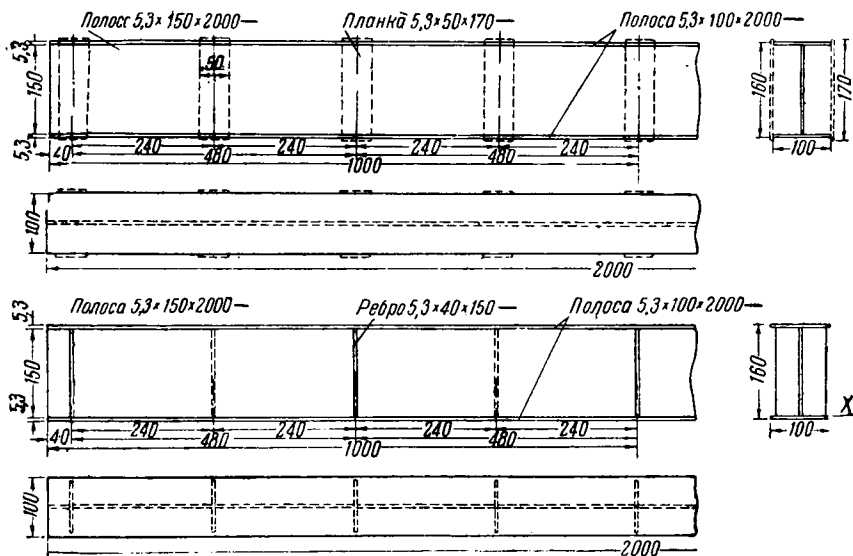
Приращение крутящего момента $\Delta M_{кр}$ в кгсм	Жесткость при чистом кручении $GJ_d$ в кгсм <sup>2</sup>	Принятый модуль упругости $G$ в кг/см <sup>2</sup>	$J_d$ по экспериментальным данным в см <sup>4</sup>	Действительные размеры образца в мм				$J_d$ по формуле: $J_d = \sum \frac{bd^3}{3}$ в см <sup>4</sup>	Поправочный коэффициент $\alpha$
				$h$	$b$	$d$	$t$		
10 000	$9,63 \cdot 10^6$	$0,8 \cdot 10^6$	12,0	159	89	7,4	10,5	8,73	1,37

и общий шаг их стал равен 24 см. Таким образом всего было испытано на чистое кручение 5 сварных образцов.

Приборы при испытаниях каждого образца ставились в трех сечениях на расстоянии 60 см друг от друга. Расстояние между проволоками прогибомеров в каждом сечении было равно 20 см.

Степень изменения нагрузки была принята: в 5 кг для первого испытания обоих образцов, в 10 кг — для второго испытания обоих образцов и, наконец, в 15 кг для третьего испытания первого образца.

Кроме этих пяти испытаний было произведено еще испытание двутаврового стержня длиной 1,5 м, сваренного из трех листов: стенки 150 × 5,3 мм и полки 130 × 5,3 мм с ребрами жесткости на взаимном



Фиг. 23.

расстоянии 37,5 см. Приборы для измерения углов закручивания ставились также в трех сечениях, отстоящих друг от друга на 37,5 см. Расстояние между проволоками прогибомеров в каждом сечении было равно ширине полки, т. е. 13 см. Степень изменения нагрузки составляла 10 кг.

Плечо приложения нагрузки во всех испытаниях было принято в 50 см. Цикличность нагрузки и разгрузки была такая же, как и при испытании прокатных образцов. Результаты этих испытаний приведены в табл. 10 (стр. 34).

Модуль упругости металла, из которого были изготовлены образцы, определялся непосредственным испытанием круглых образцов, вырезанных из того же листа стали, и получился равным  $0,815 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, это значение  $G$  и принято нами при обработке результатов эксперимента. На вопросе об определении механических характеристик стали мы подробнее остановимся в главе II (§ 10, п. 5).

Последняя графа табл. 10, в которой помещены экспериментальные поправочные коэффициенты к формуле (1), позволяет сделать следующие выводы:

Для сварного двутавра без ребер и планок поправочный коэффициент получился 1,34. Так как этот профиль с точки зрения сопротивляемости его чистому кручению мало чем отличается от прокатных широкополочных двутавров, то мы считаем возможным сравнить результаты нашего эксперимента с соответствующими опытными данными А. Феппля. Для шести испытанных им широкополочных балок поправочные коэффициенты получились в пределах 1,21—1,47 (табл. 1). Как видим, наш коэффициент 1,34 находится в тех же пределах.

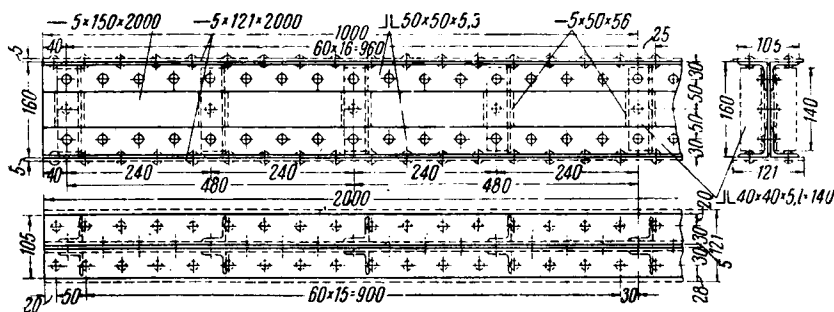
Для трех сварных образцов с ребрами жесткости поправочные коэффициенты у нас получились: 1,50, 1,56 и 1,38. Сравнительно небольшое расхождение между ними показывает, что наличие ребер жесткости, а также изменение расстояний между ними не сильно влияют на жесткость стержня. Поэтому мы считаем возможным при определении по формуле (1) значения  $J_a$  для сварных двутавровых балок, в которых фактически всегда имеются ребра жесткости, рекомендовать поправочный коэффициент  $\alpha$  принимать равным 1,5.

Для образцов с планками получились поправочные коэффициенты: 2,34 при редком расположении планок и 3,33 при частых планках. Сравнение этих коэффициентов с коэффициентом 1,34, полученным для стержня без планок, дает возможность установить следующее.

Во-первых, планки значительно увеличивают жесткость  $GJ_a$  двутаврового стержня и, во-вторых, с уменьшением расстояния между ними жесткость эта увеличивается. Мы ставим своей ближайшей задачей установить закон изменения жесткости в зависимости от изменения расстояния между планками путем как теоретических, так и дополнительных экспериментальных исследований, но в настоящий момент располагаем возможностью только констатировать это явление и указать на необходимость более глубокого изучения его.

### 3. Испытание клепаных двутавровых образцов

Нами были испытаны на чистое кручение четыре клепаных двутавровых образца. Целью испытания было определить действительную жесткость образцов и степень влияния на нее наличия поясных заклепок

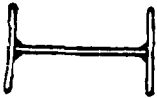
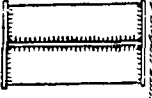


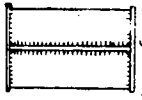
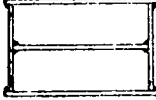
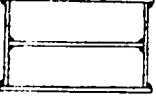
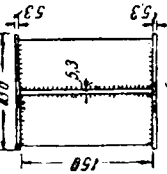
Фиг. 24.

(горизонтальных и вертикальных) и уголков жесткости. Для испытания был запроектирован и изготовлен в мастерских ЦНИПС один двутавровый образец длиной 2 м, склепанный из вертикального листа  $150 \times 5$  мм и четырех равнобоких уголков  $50 \times 50 \times 5,3$  мм. Общий вид и размеры его даны на фиг. 24.



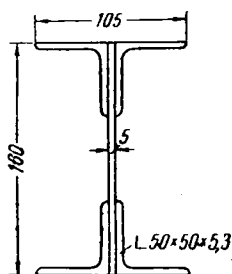
Результаты испытаний на чистое кручение сварных двутавровых образцов

Тип образца	Средние разности между суммами приращений отсчетов в смежных сечениях в мм		Средняя из четырех разностей в мм	Расстояние между профилями в мм	Расстояние между сечениями в мм	Относительный угол закручивания $\theta'$ в мм <sup>-1</sup>	Приращение крутящего момента $\Delta M_{кр}$ в кгсм	$GJ_d$ в кгсм <sup>2</sup>	Модуль упругости $G$ в кг/см <sup>2</sup>	$J_d$ по экспериментальным данным в см <sup>4</sup>	$J_d$ по формуле: $J_d = \frac{2}{3} \sum \frac{b_i^3}{3}$ в см <sup>4</sup>	Поправочный коэффициент $\alpha$
	I—II	II—III										
	Положительное кручение	1,583   1,571	1,579	200	620	$13,16 \cdot 10^{-6}$	2 500	$1,9 \cdot 10^6$	$0,815 \cdot 10^6$	2,33	1,74	1,34
	Отрицательное кручение	1,632   1,531										
	Положительное кручение	1,432   1,383	1,405	200	600	$11,71 \cdot 10^{-6}$	2 500	$2,13 \cdot 10^6$	$0,815 \cdot 10^6$	2,62	1,74	1,50
	Отрицательное кручение	1,414   1,393										

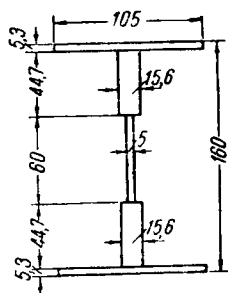
 <p>шаг ребер - 24 см</p>	Положительное кручение 2,787   2,641 Отрицательное кручение 2,832   2,615	2,719	200	600	$22,66 \cdot 10^{-6}$	5 000	$2,21 \cdot 10^6$	$0,815 \cdot 10^6$	2,72	1,74	1,56
 <p>шаг планок - 48 см</p>	Положительное кручение 1,896   1,808 Отрицательное кручение 1,782   1,828	1,806	200	600	$15,05 \cdot 10^{-6}$	5 000	$3,32 \cdot 10^6$	$0,815 \cdot 10^6$	4,07	1,74	2,34
 <p>шаг планок - 24 см</p>	Положительное кручение 1,951   1,851 Отрицательное кручение 1,922   1,878	1,901	200	600	$15,84 \cdot 10^{-6}$	7 500	$4,73 \cdot 10^6$	$0,815 \cdot 10^6$	5,8	1,74	3,33
 <p>шаг ребер - 37,5 см</p>	Положительное кручение 1,039   1,145 Отрицательное кручение 0,957   1,135	1,069	130	375	$21,93 \cdot 10^{-6}$	5 000	$2,23 \cdot 10^6$	$0,815 \cdot 10^6$	2,80	2,035	1,38

Отверстия для поясных заклепок были приняты в 10 мм при диаметре стержня заклепки 9,5 мм; шаг заклепок — 60 мм. Клепка производилась вручную в горячем состоянии заклепки. Модуль упругости материала при сдвиге  $G = 0,815 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ <sup>1</sup>.

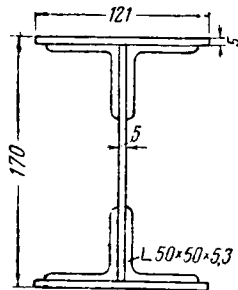
После первого испытания в горизонтальных полках поясных уголков были просверлены дыры и к уголкам были приклепаны дополнительные горизонтальные листы размером  $121 \times 5,0 \text{ мм}$ . Вертикальные заклепки поставлены в шахмат по отношению к горизонтальным с тем же шагом 60 мм. После второго испытания к образцу были приклепаны с обеих сторон вертикальные уголки жесткости из профилей  $40 \times 40 \times 5 \text{ мм}$  на взаимном расстоянии 48 см. Наконец, после третьего испытания были установлены дополнительные уголки жесткости так, что общий



Фиг. 25.



Фиг. 26.



Фиг. 27.

шаг их составлял 24 см. Таким образом всего было испытано четыре клепаных образца.

Число измерительных приборов и места их установки были такие же, как и при испытании сварных образцов. Степень изменения нагрузки для образца без горизонтальных листов была принята в 10 кг, а для остальных трех образцов — в 20 кг. Плечо закручивающего момента и цикличность загрузки и разгрузки такие же, как и в предыдущих испытаниях. Результаты этих испытаний приведены в табл. 11 (стр. 38).

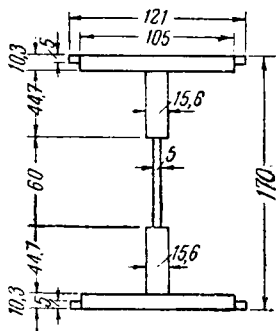
В предпоследней графе табл. 11 даны значения  $J_d$ , вычисленные по формуле  $J_d = \sum \frac{l \delta^3}{3}$  (без поправочного коэффициента). Для этих подсчетов сечения были разложены на элементы, как это изображено на фиг. 25 и 26 для первого образца и на фиг. 27 и 28 — для трех остальных.

Для первого образца, состоявшего из вертикального листа и четырех приклепанных к нему одним рядом заклепок поясных уголков, полученная действительная жесткость при кручении составляет только 30% от расчетной (поправочный коэффициент  $0,289 \approx 0,3$ ). Это показывает весьма слабую сопротивляемость кручению однорядных горизонтальных поясных заклепок. В этом случае соединение сопротивляется закручивающему моменту лишь до тех пор, пока не будет преодолено трение между листами, вызванное обжатием заклепок при охлаждении после

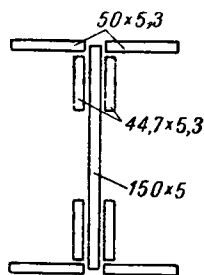
<sup>1</sup> См. выше испытание сварных двутавровых образцов.

клепки. Но как только между листами возникает скольжение, элементы профиля начинают работать не совместно, а порознь. Если, учтя это обстоятельство, мы вычислим величину  $J_a$ , разложив сечение на элементы по фиг. 29, то получим  $J_a = 2,505 \text{ см}^4$ . Сравнение с экспериментальной величиной дает в этом случае поправочный коэффициент, равный  $\frac{3,64}{2,505} = 1,45$ , что находится в пределах колебаний поправочных коэффициентов для несоставных (прокатных) двутавров.

Результаты испытаний второго образца, клепаного двутавра с горизонтальными листами, дали поправочный коэффициент 0,568, т. е. почти вдвое больший, чем для предыдущего образца. Это объясняется тем, что вертикальные поясные заклепки, связывающие горизонтальные листы



Фиг. 28.



Фиг. 29.

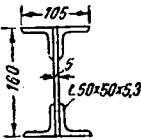
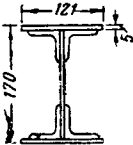


с поясными уголками, находятся в отношении сопротивляемости соединения скручиванию в более выгодных условиях, чем горизонтальные. В этом случае каждый из горизонтальных листов приклепан не одним, а двумя рядами заклепок, а поэтому крутящий момент воспринимается не только трением между листами, но и частично суммой моментов заклепочных пар, равных произведению усилий, возникающих в заклепках, на расстояние между рядами этих заклепок.

Наконец, результаты испытаний последних двух образцов явно свидетельствуют о том, что наличие уголков жесткости почти не влияет на жесткость стержня при чистом кручении. Этот факт можно объяснить тем, что уголки жесткости в клепаных балках в отличие от сварных балок не соединены с полками, а потому при закручивании они не оказывают никакого препятствия свободной деформации полок и не увеличивают сопротивляемости стержня кручению.

Наш вывод вполне совпадает с заключением Ф. Блейха о работе заклепок на кручение.

В книге „Теория и расчет железных мостов“<sup>[18]</sup> Ф. Блейх говорит, что в клепаных стержнях „надо самым тщательным образом следить за появлением даже небольших крутящих моментов, так как они способны оказывать вредное действие на заклепочные соединения. Можно прямо сказать, что нет лучшего средства разрушить заклепочные соединения жесткой балки, как подвергнуть ее действию кручения. Особенно неблагоприятна в этом случае работа тех частей сечения, которые соединены только одним рядом заклепок“.

Результаты испытаний на чистое кручение

Тип образца	Средние разности между суммами приращений отсчетов в смежных сечениях в мм		Средняя из четырех разностей в мм	Расстояние между приборами в одном сечении в мм	Расстояние между сечениями $d$ в мм
	I—II	II—III			
	Положительное кручение 2,043   2,054  Отрицательное кручение 1,978   2,004	2,020	200	600	
	Положительное кручение 1,299   1,453  Отрицательное кручение 1,260   1,340	1,338	200	600	
	Положительное кручение 1,326   1,323  Отрицательное кручение 1,302   1,302	1,313	200	600	
	Положительное кручение 1,275   1,401  Отрицательное кручение 1,268   1,344	1,322	200	600	

## чение клепаных двутавровых образцов

Относительный угол закручивания $\theta'$ в $мм^{-1}$	Приращение крутящего момента $\Delta M_{кр}$ в $кгмм$	Жесткость при чистом кручении $GJ_d$ в $кгсм^2$	Принятый модуль упругости $G$ в $кг/см^2$	$J_d$ по экспериментальным данным в $см^4$	$J_d$ по формуле: $J_d = \sum \frac{b\delta^3}{3}$ в $см^4$	Поправочный коэффициент $\alpha$
$16,83 \cdot 10^{-6}$	5 000	$2,97 \cdot 10^6$	$0,815 \cdot 10^6$	3,64	12,60	0,289
$11,15 \cdot 10^{-6}$	10 000	$8,97 \cdot 10^6$	$0,815 \cdot 10^6$	11,0	19,35	0,568
$10,94 \cdot 10^{-6}$	10 000	$9,14 \cdot 10^6$	$0,815 \cdot 10^6$	11,2	19,35	0,579
$11,02 \cdot 10^{-6}$	10 000	$9,07 \cdot 10^6$	$0,815 \cdot 10^6$	11,13	19,35	0,575

Практически условия работы заклепочных соединений складываются несколько лучше, так как в чистом виде кручение в конструкциях почти никогда не встречается и часть крутящего момента, как увидим ниже, уравновешивается напряжениями от изгиба.

Изучение клепаных стержней в условиях кручения мы по существу только начали; небольшое количество экспериментов, произведенных над двутавровыми стержнями, конечно, полностью не разрешает задачи, и ясно, что работа в этом направлении должна продолжаться. Тем не менее, учитывая результаты наших экспериментов и аналогичных опытов, проведенных А. Фепплом, полагаем возможным рекомендовать при практических расчетах клепаных двутавров следующее:

1) при вычислении величины  $J_d$  по формуле (1) сечение разлагать на элементы, как изображено на фиг. 26 и 28;

2) поправочный коэффициент  $\alpha$  к этой формуле принимать: для балок без горизонтальных листов  $\alpha = 0,25$ , а для балок с горизонтальными листами  $\alpha = 0,5$ .

#### 4. Результаты испытаний сварных тавровых образцов

Ст. научный сотрудник лаборатории строительной механики ЦНИПС Н. Г. Добудогло испытал на чистое кручение 11 образцов таврового сечения длиной по 2 м, сваренных из вертикального и горизонтального листов размерами  $95 \times 5,5$  мм и продольного ребра жесткости  $27 \times 5,5$  мм. По длине стержней имелись вертикальные ребра жесткости у первых восьми образцов № 1—8; они были изготовлены из узких в 1 см шириной полосок, сваренных под прямым углом и поставленных на расстоянии 27,4 см друг от друга. У остальных трех образцов ребра были обычные треугольные и были поставлены на взаимном расстоянии: в образце № 9—38,4 см, в № 10—27,4 см и в № 11—22,0 см. Результаты этих испытаний представлены в табл. 12<sup>1</sup>. Из последней графы этой таблицы видно, что поправочный коэффициент (1,28) к формуле (1) для этих стержней, являющихся по существу несимметричными двутаврами, лишь немного меньше соответствующего коэффициента 1,34 для симметричного двутавра без ребер жесткости (табл. 10). Обычно применяемые в практике для этих стержней треугольные ребра увеличивают жесткость, так же как и для сварных двутавров, лишь на 10—15%. Изменение расстояний между ребрами оказывает сравнительно небольшое влияние на величину жесткости при кручении.

При определении величины  $J_d$  для подобного типа стержней с треугольными ребрами жесткости, обычно применяемых для поясов сварных стропильных ферм, можно рекомендовать поправочный коэффициент  $\alpha$  принимать равным 1,4.

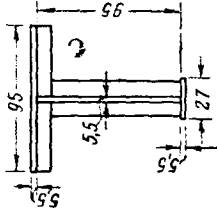
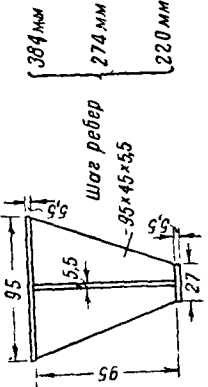
#### 5. Результаты испытаний сварных П-образных образцов

Сварные образцы П-образного сечения были испытаны старшим научным сотрудником Н. Г. Добудогло с целью выявить влияние планок и различного типа решеток на жесткость стержня при чистом кручении.

<sup>1</sup> При составлении табл. 12 и 13 модуль упругости 2-го рода  $G$  был принят  $G = 0,815 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, так как эти образцы были изготовлены из той же партии стали, для которой  $G$  определялся экспериментально (см. п. 5, § 10; гл. II).

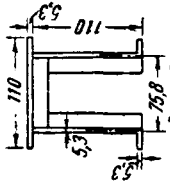
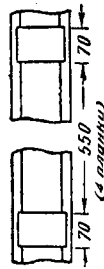
Таблица 12

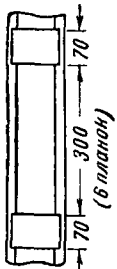
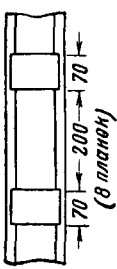
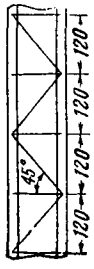
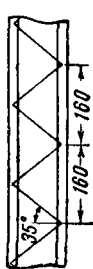
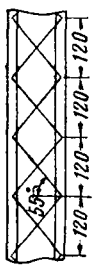
Результаты испытаний на чистое кручение тавровых сварных образцов

Сечение образца (размеры в мм)	№ образцов	$GJ_d$ по экспериментальным данным в кгсм <sup>2</sup>		Модуль упругости $G$ в кг/см <sup>2</sup>	$J_d$ по экспериментальным данным в см <sup>4</sup>	$J_d$ по формуле: $J_d = \sum \frac{b^3}{3}$ в см <sup>4</sup>	Поправочный коэффициент $\alpha$
		для каждого образца	среднее				
	1	1,147 · 10 <sup>6</sup>	1,255 · 10 <sup>6</sup>	0,815 · 10 <sup>6</sup>	1,54	1,201	1,28
	2	1,243 · 10 <sup>6</sup>					
	3	1,305 · 10 <sup>6</sup>					
	4	1,282 · 10 <sup>6</sup>					
	5	1,364 · 10 <sup>6</sup>					
	6	1,286 · 10 <sup>6</sup>					
	7	1,235 · 10 <sup>6</sup>					
	8	1,177 · 10 <sup>6</sup>					
	9	1,347 · 10 <sup>6</sup>	0,815 · 10 <sup>6</sup>	1,65	1,21	1,37	
	10	1,416 · 10 <sup>6</sup>					
	11	1,552 · 10 <sup>6</sup>					



Результаты испытаний на чистое кручение П-образных сварных образцов

Сечение образца и тип решетки (размеры в мм)	№ образцов	$GJ_d$ по экспериментальным данным в кгсм <sup>2</sup>		Модуль упругости $G$ в кг/см <sup>2</sup>	$J_d$ по экспериментальным данным в см <sup>4</sup>	$J_d$ по формуле: $J_d = \sum \frac{b^3}{3}$ в см <sup>4</sup>	Поправочный коэффициент $\alpha$
		для каждого образца	среднее				
 <p>Эталонный с небольшими ребрами из латуни 15 мм шириной. Шаг ребер - 384 мм</p>	1	2,176 · 10 <sup>6</sup>	2,151 · 10 <sup>6</sup>	0,815 · 10 <sup>6</sup>	2,64	1,78	1,48
	2	2,150 · 10 <sup>6</sup>					
	3	2,081 · 10 <sup>6</sup>					
	4	2,199 · 10 <sup>6</sup>					
 <p>(с латуни)</p>	5	9,260 · 10 <sup>6</sup>	8,897 · 10 <sup>6</sup>	0,815 · 10 <sup>6</sup>	11,2	1,78	6,29
	6	8,534 · 10 <sup>6</sup>					

	7	$14,532 \cdot 10^6$	$\left. \begin{array}{l} 13,98 \cdot 10^6 \\ 13,438 \cdot 10^6 \end{array} \right\}$	$0,815 \cdot 10^6$	17,15	1,78	9,63
	8	$13,438 \cdot 10^6$					
	9	$19,999 \cdot 10^6$	$\left. \begin{array}{l} 19,79 \cdot 10^6 \\ 19,580 \cdot 10^6 \end{array} \right\}$	$0,815 \cdot 10^6$	24,3	1,78	13,65
	10	$19,580 \cdot 10^6$					
	11	$78,96 \cdot 10^6$	$\left. \begin{array}{l} 80,0 \cdot 10^6 \\ 81,04 \cdot 10^6 \end{array} \right\}$	$0,815 \cdot 10^6$	96,3	1,78	54,1
	12	$81,04 \cdot 10^6$					
	13	$92,98 \cdot 10^6$	$\left. \begin{array}{l} 92,09 \cdot 10^6 \\ 91,21 \cdot 10^6 \end{array} \right\}$	$0,815 \cdot 10^6$	113,0	1,78	63,5
	14	$91,21 \cdot 10^6$					
	15	$176,77 \cdot 10^6$	$\left. \begin{array}{l} 14^{\circ},1 \cdot 10^6 \\ 121,43 \cdot 10^6 \end{array} \right\}$	$0,815 \cdot 10^6$	183,0	1,78	103,8
	16	$121,43 \cdot 10^6$					

Всего было испытано 16 образцов длиной по 2 м. Геометрические размеры образцов, типы решеток и результаты испытаний представлены в табл. 13. Рассматривая эту таблицу, прежде всего следует констатировать четко выявленную картину увеличения жесткости П-образного профиля по мере заполнения открытой части его дополнительными связями в виде планок и решеток, т. е. по мере приближения его к типу профилей с замкнутым сечением. Поправочный коэффициент к формуле (1) для первых четырех эталонных образцов без планок и решеток с редко расположенными слабыми небольшими ребрами получился равным 1,48, т. е. несколько выше, чем для сварных двутавра (1,34) и тавра (1,28). Этого и следовало ожидать, так как поправка к формуле (1) в виде коэффициента  $\alpha$  объясняется, как известно, дополнительным увеличением объема мыльной пленки в местах сопряжения элементов сечения между собой. Здесь в отличие от двутаврового сечения мы имеем не два, а четыре места сопряжения.

В образцах с планками жесткость увеличивается по мере уменьшения расстояния между планками, причем нетрудно заметить, что жесткость почти пропорциональна числу планок: без планок  $\alpha = 1,48$ , для образца с четырьмя планками (№ 5 и 6)  $\alpha = 6,29$ , с шестью планками (№ 7 и 8)  $\alpha = 9,63$  и с восемью планками (№ 9 и 10)  $\alpha = 13,65$ .

Результаты испытаний последних шести образцов показывают, что особенно сильно влияют на увеличение жесткости стержня раскосные элементы решетки. Даже наиболее жесткий профиль с планками (№ 9 и 10) в 4 раза слабее наименее жесткого из профилей с решетками при наличии раскосных элементов (№ 11 и 12). Сравнивая жесткость профилей № 11 и 12 с жесткостью профилей № 13 и 14, можно видеть, что уменьшение угла наклона раскосов более эффективно влияет на увеличение жесткости, чем добавление к решетке дополнительных стоек.

Наконец, сравнивая жесткость последних двух профилей (№ 15 и 16) с жесткостью профилей № 11 и 12, мы видим, что постановка второй системы перекрестных раскосов при той же панели увеличивает жесткость стержня почти вдвое; это еще раз свидетельствует о том, что стойки решетки значительно меньше влияют на жесткость стержня, чем раскосы.

Фридрих и Ганс Блейхи [19] рекомендуют рассчитывать открытый профиль, стенки которого соединены раскосными элементами, как профиль с замкнутым сечением. Чтобы убедиться в правильности этого предложения, определим жесткость рассматриваемого нами профиля,

как замкнутого. По формуле  $J_a = \frac{(2F)^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}$ <sup>1</sup>, получим  $J_a = 397 \text{ см}^4$ , что

приблизительно вдвое больше момента инерции самого жесткого из рассматриваемых нами профилей, в то время как тот же профиль без решетки и планок имеет  $J_a = 2,64 \text{ см}^4$  (табл. 13), т. е. приблизительно в 70 раз меньше самого жесткого из испытанных профилей.

## § 5. ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

При определении величины  $J_a$  момента инерции при чистом кручении рекомендуем руководствоваться следующими указаниями:

<sup>1</sup> П. Ф. Папков и ч, Теория упругости, Оборонгиз, 1939, стр. 237.

1) В качестве основной расчетной формулы принять формулу (1):

$$J_d = \alpha \sum \frac{b\delta^3}{3},$$

где  $b$  и  $\delta$  — ширина и толщина прямоугольников, на которые можно разложить сечение;

$\alpha$  — опытный коэффициент.

2) Составные сечения следует разбивать на элементы, как показано на фиг. 26 и 28.

3) Для прокатных двутавров и швеллеров по ОСТ 2451 и 2452 и уголков по ОСТ 14—15 руководствоваться данными, приведенными в сортаменте (приложения 1, 2, 3 и 4).

4) Для прокатных двутавров, швеллеров и уголков, действительные размеры которых не соответствуют указанным в ОСТ 2451, 2452, 14 и 15, руководствоваться формулой (1) и принимать поправочный коэффициент  $\alpha$  равным: для двутавров — 1,20, для швеллеров — 1,12 и для уголков — 1,0. При этом за толщину полок у двутавров и швеллеров принимать среднюю их величину.

5) Для сварных двутавровых балок при наличии ребер жесткости, приваренных к вертикальному и горизонтальным листам, принимать коэффициент  $\alpha = 1,50$ .

6) Для клепаных двутавровых балок принимать поправочный коэффициент  $\alpha$  равным: для балок без горизонтальных листов 0,25, а для балок с горизонтальными листами 0,5.

7) Для сварных тавровых профилей по типу изображенных на фигуре в табл. 12 с приваренными к стенке и полке треугольными ребрами коэффициент  $\alpha$  принимать равным 1,4.

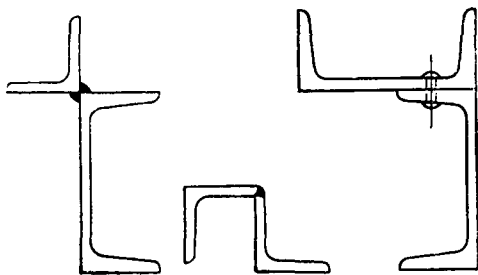
8) Для профилей, составленных из прокатных двутавров, швеллеров или уголков, соединенных между собой не более чем одним рядом заклепок или сварным швом по одной кромке, по типу сечений, изображенных на фиг. 30, величину  $J_d$  рекомендуется определять по формуле:

$$J_d = J_d^I + J_d^{II} + J_d^{III} + \dots, \quad (45)$$

где  $J_d^I, J_d^{II}, J_d^{III} \dots$  — значения  $J_d$  для отдельных элементов, составляющих профиль; их следует брать из сортамента или определять указанным в предыдущих пунктах способом.

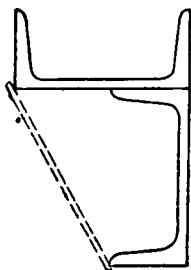
9) Одним из конструктивных мероприятий, увеличивающим в несколько раз жесткость профиля на кручение, является приварка или приклепка планок, причем последними наиболее целесообразно соединять точки профиля с наибольшей разностью секториальных координат.

Так, например, для третьего профиля, изображенного на фиг. 30, постановку планок целесообразнее производить по фиг. 31, а не по фиг. 32.

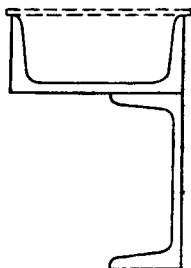


Фиг. 30.

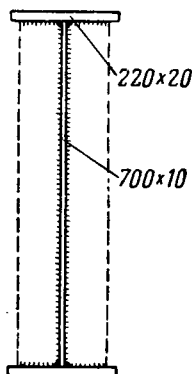
10) Наиболее эффективным конструктивным мероприятием, увеличивающим жесткость стержня на кручение в несколько десятков раз и приближающим его к типу замкнутой профилей, является постановка треугольной (без дополнительных стоек) или, еще лучше, перекрестной решетки.



Фиг. 31.



Фиг. 32.

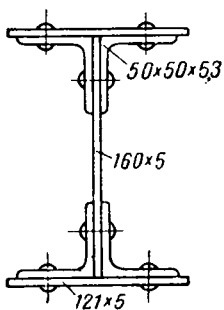


Фиг. 33.

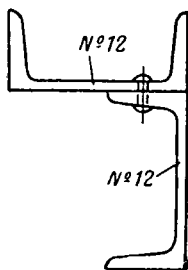
## § 6. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ $J_d$

**Пример 1.** Определить величину  $J_d$  для двутавра, сваренного из трех листов: вертикального  $700 \times 10$  мм и двух горизонтальных  $220 \times 20$  мм, и снабженного ребрами жесткости (фиг. 33).

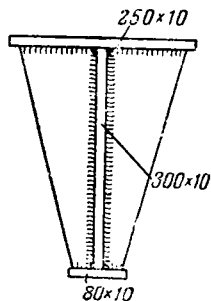
$$J_d = 1,5 \sum \frac{b\delta^3}{5} = 1,5 \frac{1}{3} (2 \cdot 22,0 \cdot 2,0^3 + 70,0 \cdot 1,0^3) \text{ см}^4 = 211 \text{ см}^4.$$



Фиг. 34.



Фиг. 35.



Фиг. 36.

**Пример 2.** Определить величину  $J_d$  для клепаного двутавра, составленного из вертикального листа  $160 \times 5$  мм, четырех уголков  $50 \times 50 \times 5,3$  мм и двух горизонтальных листов  $121 \times 5$  мм (фиг. 34 и 28).

$$J_d = 0,5 \sum \frac{b\delta^3}{3} = 0,5 \frac{1}{3} (4 \cdot 0,8 \cdot 0,5^3 + 2 \cdot 10,5 \cdot 1,0^3 + 2 \cdot 4,47 \cdot 1,5^3 + 6 \cdot 0,5^3) = 9,67 \text{ см}^4.$$

**Пример 3.** Определить величину  $J_d$  для сечения (фиг. 35), составленного из двух швеллеров № 12, склепанных одним рядом заклепок. Профиль при-

меняется для ригеля фахверка промышленных зданий.

$$J_d = 2 J_d^{III} = 2 \cdot 3,634 = 7,27 \text{ см}^4.$$

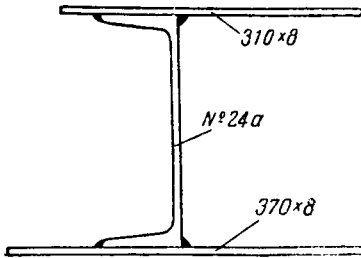
**Пример 4.** Определить величину  $J_d$  для профиля, изображенного на фиг. 36.

$$J_d = \alpha \sum \frac{b\delta^3}{3} = 1,4 \frac{1}{3} (25 + 30 + 8) 1^3 = 29,4 \text{ см}^4.$$

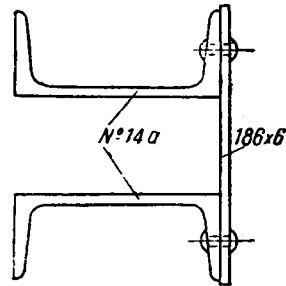
**Пример 5.** Определить величину  $J_d$  для сварного профиля, составленного из швеллера № 24а и двух листов  $310 \times 8 \text{ мм}$  и  $370 \times 8 \text{ мм}$  (фиг. 37).

Профиль предложен Техническим управлением Промстройпроекта для ригелей фахверка промышленных зданий.

$$J_d = \sum \frac{b\delta^3}{3} = \frac{1}{3} [(31,0 - 7,8) 0,8^3 + (37,0 - 7,8) 0,8^3 + 2 \cdot 7,8 (0,8 + 1,2)^3 + (24 - 2,4) 0,65^3] = 52,5 \text{ см}^4.$$



Фиг. 37.



Фиг. 38.

**Пример 6.** Определить величину  $J_d$  для профиля (фиг. 38), составленного из двух швеллеров № 14а и одного листа  $186 \times 6 \text{ мм}$ , взаимно соединенных однорядными заклепками.

Этот профиль применяется в качестве ригеля обмуровочного щита прямо-точного котла (пример 15, гл. V).

$$J_d = 2J_d^{III} + J_d^I = 2 \cdot 4,815 + \frac{1}{3} 18,6 \cdot 0,6^3 = 9,63 + 1,34 = 10,97 \text{ см}^4.$$

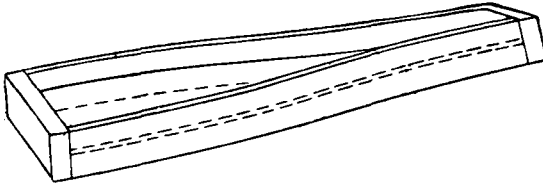
## ГЛАВА II

### СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ. КРУЧЕНИЕ ПРИ ЭКСЦЕНТРИЧНОМ ИЗГИБЕ

Если закручиваемый стержень некруглого сечения и по концам его или в каких-либо поперечных сечениях имеются препятствия свободному искривлению сечений, то стержень этот уже не будет находиться в условиях чистого кручения. Продольные перемещения точек сечения в этом случае стеснены, и кручение поэтому будет сопровождаться появлением нормальных напряжений.

Препятствие свободному искривлению поперечных сечений может быть осуществлено различными способами; например, можно приварить к торцам стержня достаточно жесткие из своей плоскости диафрагмы (фиг. 39) или можно один конец стержня защемить в стену, а к другому приложить закручивающий момент (фиг. 40). Кручение может со-

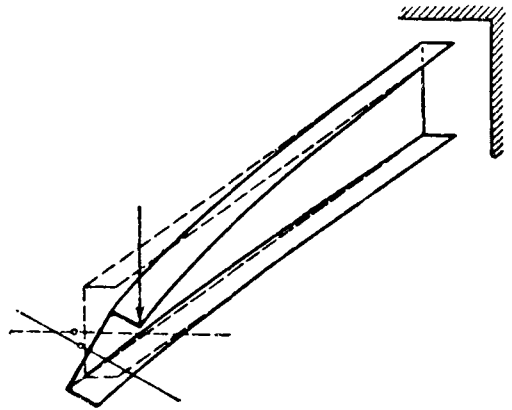
проводятся продольными напряжениями не только при наличии специальных конструктивных защемлений, но и в случае изменения закручивающего момента или размеров поперечного сечения по длине стержня. Это явление проще всего иллюстрировать на примере двутавровой балки, закрепленной обоими концами и подверженной по своей длине действию скручивающего момента. В полках балки в этом случае появятся продольные напряжения, неравномерно распределенные по ширине их,



Фиг. 39.

а потому вызывающие изгиб полки. При этом верхняя и нижняя полки будут изгибаться в разные стороны относительно вертикальной оси балки (фиг. 41). Часть внешнего закручивающего момента передается вдоль балки от сечения к сечению посредством чистого кручения, вызывающего выпучивание (искривление) сечений и только касательные напряжения. Другая же часть его, сопровождаемая изгибом полки, вызывает нормальные напряжения, вследствие которых в полках балки появляются дополнительные срезающие силы. Можно сказать, что эти срезающие силы, направленные в обеих полках в разные стороны, и передают от сечения к сечению вторую часть закручивающего момента.

Изгиб элементов профиля имеет место во всех случаях кручения со стесненным искажением поперечных сечений. Поэтому явление это можно назвать изгибным, или, как называет проф. Уманский [20], стесненным кручением. Для того чтобы яснее представить себе разницу деформаций балки при чистом и стесненном кручении, мы на фиг. 42 изобразили ту же двутавровую балку, находящуюся в условиях чистого кручения.



Фиг. 40.

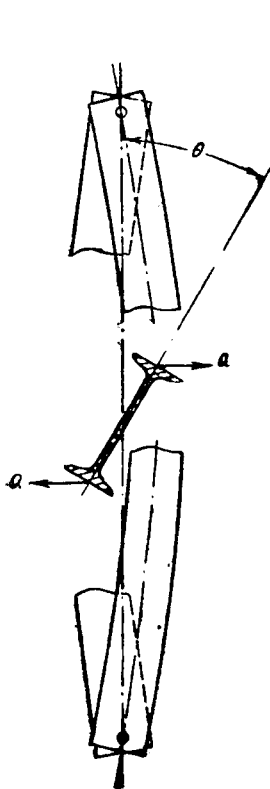
## § 7. ИСТОРИЯ ВОПРОСА

Основоположником теории изгибного кручения является проф. С. П. Тимошенко [21]. Еще в 1905—1906 гг. при рассмотрении вопроса об общей устойчивости двутавровой балки он исследовал изгибающее действие кручения и вывел формулу угла закручивания двутавровой балки с одним заделанным концом, которую проверил также опытным путем.

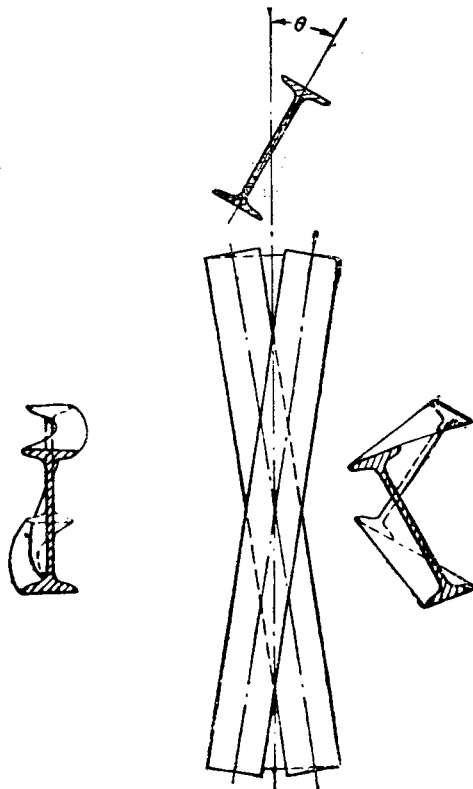
В результате испытаний измеренные углы поворота очень хорошо совпали с теоретическими.

Проф. Тимошенко испытал также один образец клепаной балки, и оказалось, что жесткость ее при кручении значительно меньше соответствующей жесткости прокатной балки таких же размеров.

В 1910 г. проф. Тимошенко опубликовал составленное им общее уравнение для угла закручивания двутавровой балки, опертой обоими концами и подверженной по длине своей действию крутящего момента.



Фиг. 41.



Фиг. 42.

В 1909—1910 гг. Бах<sup>15)</sup> испытал на совместное действие изгиба и кручения швеллерную балку № 30 длиной 3 м, нагружая ее двумя сосредоточенными силами в третях пролета, причем как нагрузка, так и опорные реакции проходили параллельно стенке в одном случае через центр самой стенки, а в другом — через центр тяжести всего сечения. Результаты испытаний показали весьма неравномерное распределение напряжений в полках, в то время как по обычному способу расчета они на одинаковом расстоянии от нейтральной плоскости получаются одинаковыми. Неравномерность распределения напряжений при нагрузке в главной вертикальной плоскости оказалась большей, чем при нагрузке балки в средней плоскости стенки; в крайней части сжатой полки в первом случае появились даже растягивающие напряжения. На осно-



вании этих опытов Бах сделал не совсем правильные выводы. Неравномерность распределения напряжений в швеллере он объяснил несимметричностью сечения.

В том же 1909 г. арх. Зонтаг<sup>[22]</sup>, исследуя касательные напряжения в стержнях уголкового, зетового и швеллерного профилей, также пришел к неправильному выводу, что появление кручения при изгибе зависит только от формы сечения.

Перечисленные работы можно отнести к первому периоду развития теории изгибного кручения. После 1910 г. мы на протяжении 10 лет не встретили в литературе ни теоретических, ни экспериментальных работ на эту тему. Только в 1920—1922 гг. почти одновременно немецкие инженеры Эггеншвиллер<sup>[23]</sup>, Циммерман<sup>[24]</sup> и Майар<sup>[25]</sup>, анализируя указанные выше опыты Баха над швеллерной балкой, установили тот факт, что нормальный прогиб балки швеллерного сечения (без выпучивания), т. е. то, что мы теперь называем центральным изгибом, происходит тогда, когда нагрузка находится на некотором расстоянии от стенки. Майар нашел, что центр изгиба (Майар назвал эту точку средней точкой сдвига) швеллера № 30 находится на расстоянии 3,1 см от средней точки стенки. По Эггеншвиллеру та же величина получилась равной 3,25 см.

Между прочим, Майар в одной из своих статей, опубликованных в журнале SBZ № 18 за 1921 г., останавливаясь на неправильных выводах Баха, говорит, что „Бах убедился бы в неправильности своего решения, если бы он приложил таким же образом нагрузку к симметричному сечению, например если бы он образовал сечение, сдвинув стенку швеллера на середину, т. е. нагрузку прилагал к симметричному двутавровому профилю“.

Упомянутые авторы определяли центр изгиба как точку, через которую проходит равнодействующая касательных напряжений, при этом, конечно, кроме вертикальных касательных напряжений учитывались и горизонтальные, возникающие в полках балки. Наиболее правильно задачу решил Майар. Эггеншвиллер же допустил ошибку. Он считал, что во всех случаях кручение тонкостенного профиля сопровождается появлением нормальных напряжений независимо от того, имеется ли и каково по величине препятствие искривлению сечения, поэтому по его вычислению напряжения получились втрое больше, чем по экспериментам Баха, что он объяснил неточностью проведения экспериментов. На самом же деле, как увидим ниже, качество проведения этих экспериментов было очень высокое.

Немецкие инженеры, устанавливая понятие о центре изгиба и давая способ определения этой важной точки сечения тонкостенного стержня, повидимому, не знали о существовании посвященной этому же вопросу работы проф. Тимошенко<sup>[21]</sup>. В этой работе, опубликованной еще в 1920 г., проф. Тимошенко предложил точный метод нахождения центра изгиба.

Приближенный метод решения той же задачи дал В. Ритц. Вопросом о нахождении центра изгиба и центра кручения занимался также акад. Б. Г. Галеркин<sup>[26]</sup>.

Во всех указанных работах положение центра изгиба определяется в зависимости только от формы сечения и не учитывается материал, из которого изготовлен стержень. Опыты, проведенные Дункан, не подтвердили правильности такого решения вопроса. Более точное решение этой задачи дано проф. Л. С. Лейбензоном<sup>[27]</sup>.

Следующим значительным шагом вперед в теории изучения стесненного кручения являются работы К. Вебера<sup>[28]</sup> (1924—1926 гг.), который решил задачу в более общем виде, а именно — для балок любого двухполочного профиля (несимметричного двутавра, зета, швеллера и т. п.). Работу свою он опубликовал в 1926 г. и показал на числовых примерах совпадение найденного им решения с результатами тех же опытов Баха над швеллерной балкой.

Вебер обратил внимание на связь между центром изгиба и центром кручения, т. е. той точкой сечения, которая при стесненном кручении не перемещается. Он доказал, что обе эти точки совпадают.

Из экспериментальных работ периода 20-х годов можно указать на работу Губера<sup>[29]</sup>, который в 1925 г. проверил в механической лаборатории Высшей технической школы в Мюнхене теорию стесненного кручения опытами над прокатным двутавром № 30 пролетом 6 м; образец был шарнирно оперт, но имел по концам защемления против закручивания. Результаты испытаний очень близко совпали с расчетными.

В 1930 г. в бюллетене № 211 Иллинойского университета США были опубликованы результаты экспериментов Сили, Патнама и Швальбе<sup>[17]</sup> над серий прокатных швеллерных балок в условиях совместного действия изгиба и кручения. Предварительно эти балки испытывались на чистое кручение для определения действительной величины  $GJ_d$  (о чем мы уже упоминали в главе I); затем они защемлялись одним концом, а на другом загружались сосредоточенной силой, помещаемой в разных плоскостях сечения. Этими испытаниями было определено действительное положение центра изгиба и был установлен закон изменения нормальных напряжений по мере перемещения плоскости действия нагрузки по ширине сечения.

В 1928 г. появилась известная работа Вагнера<sup>[30]</sup>, содержащая наиболее существенные элементы современной теории стесненного кручения тонкостенных профилей. С этого времени начинается новый период развития этой теории, особенность которого заключается в том, что изучение стесненного кручения тесно связывается с авиастроением и с вопросами потери устойчивости от кручения.

В своей работе Вагнер пользуется гипотезой о недеформируемости контура поперечного сечения (в неявном виде этой гипотезой пользовался и Вебер) и впервые устанавливает, что в тонкостенных профилях нормальные напряжения при стесненном кручении распределяются по особому закону, который мы теперь по терминологии проф. Власова называем „законом секториальных площадей“.

Наряду с большими достоинствами указанной работы Вагнера следует отметить наличие в ней и принципиальной ошибки. По Вагнеру получается, что изгибная и крутильная формы потери устойчивости независимы друг от друга. Как показали исследования проф. Власова, в общем случае обе формы не встречаются в чистом виде, т. е. отдельно друг от друга; разделение форм потери устойчивости на независимые изгибную и крутильную формы может быть только в частных случаях, например для профилей с двумя осями симметрии.

Исследованием стесненного кручения и потери устойчивости от кручения тавровых, двутавровых, Z-образных и швеллерных стержней занимался также Остенфельд<sup>[31]</sup> (1931 — 1932 гг.).

В 1934 г. в журнале „Luftfahrtforschung“ № 6 Вагнер и Претчнер<sup>[32]</sup> опубликовали свою работу, посвященную исследованию потери устойчивости открытых тонкостенных профилей от кручения. В этой работе они дают также практические указания об определении геометрических характеристик стержня и излагают результаты испытаний профилей уголкового типа на центральное и внецентренное сжатие.

В том же 1934 г. инж. П. М. Знаменский<sup>[33]</sup> независимо от Вагнера дал формулу для определения критической сжимающей силы при потере устойчивости от кручения.

Наряду с перечисленными работами, относящимися преимущественно к авиационной литературе, в это же время появилась одна из капитальных работ, посвященная тем же вопросам и связанная преимущественно со строительными конструкциями. Это — работа Фридриха и Ганса Блейхов<sup>[19]</sup>, опубликованная в 1936 г. в трудах второго международного конгресса по мостам и конструкциям.

Подводя итог предшествующим работам, они дали вместе с тем более общее исследование проблемы стесненного кручения и потери устойчивости от кручения. Они фактически пришли к системе трех дифференциальных уравнений деформаций для случая центрального сжатия, которые вывели энергетическим методом.

Однако в работе Блейхов, как замечено проф. Власовым, имеется ряд ошибок. Во-первых, они упустили из виду, что при кручении закон плоских сечений не соблюдается, и заменили заданные в поперечном сечении нормальные напряжения равнодействующей, приняв ее за средоточенную силу, приложенную в центре тяжести сечения. Вторая их ошибка состоит в том, что данное ими решение для открытых профилей они распространяют на замкнутые профили, между тем как в замкнутых профилях с недеформируемым контуром нормальные напряжения от кручения всюду равны нулю.

Пользуясь в основном предпосылками Вагнера и Блейхов, полную теорию потери устойчивости тонкостенного профиля при центральном сжатии в пределах пропорциональности дал в 1937 г. Каппус<sup>[34]</sup>. Он рассматривает напряженное и деформированное состояния тонкостенного стержня при чистом и стесненном кручении. Между прочим, законом секториальных площадей он пользуется еще в теории чистого кручения при определении искажений закручиваемого открытого профиля. Дифференциальные уравнения деформаций он выводит, пользуясь энергетическим методом.

Совершенно особо следует остановиться на работах нашего советского ученого проф. В. З. Власова<sup>[35]</sup>, который независимо от других авторов в 1936 г. дал наиболее общую теорию расчета любых тонкостенных незамкнутых профилей на совместное действие изгиба и кручения.

Проф. Власов при решении этой задачи отказывается от понятия „стержень“ и рассматривает профиль как тонкостенную пространственную складчатую систему, работающую не только на осевые (нормальные и сдвигающие) силы, но также и на моменты, вызывающие изгиб профиля в поперечном направлении.

Исходя из гипотезы о недеформируемости контура поперечного сечения, он установил общий закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении тонкостенного стержня при совместном

действии изгиба и кручения. По этому закону нормальные напряжения в самом общем случае работы стержня распределяются по сечению пропорционально секториальной площади. Закон плоских сечений в исследованиях проф. Власова является частным случаем закона секториальных площадей. Им дан также общий метод определения координат центра изгиба и выявлены новые геометрические характеристики сечения тонкостенного профиля; введение этих характеристик в теорию способствует стройному построению ее аналогично соответствующим разделам курса сопротивления материалов.

В 1937 г. проф. Власов распространил свою теорию и на вопросы пространственной устойчивости тонкостенных стержней и получил ряд новых решений.

В частности, им наиболее полно разрешена задача об устойчивости стержней при центральном и внецентренном сжатии и при чистом изгибе, а также об устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных стержней при действии поперечной нагрузки. В процессе исследования им попутно была поставлена и разрешена задача о возможности потери устойчивости стержней также и при внецентренном растяжении, если растягивающая сила приложена вне некоторой области, названной проф. Власовым кругом устойчивости. В дальнейшем теория эта была распространена автором также и на вопросы изгибно-крутильных колебаний.

С наибольшей полнотой теорию свою проф. Власов изложил в своей книге „Тонкостенные упругие стержни“<sup>[36]</sup>, удостоенной в 1941 г. Сталинской премии 1-й степени.

Из других работ, не помещенных в этой далеко не полной истории вопроса, связанного с изучением стесненного кручения и устойчивости открытых тонкостенных профилей, следует указать на работы по устойчивости Лангвиста и Флигга<sup>[37]</sup>, Геммерлинга и Логвиновича<sup>[38]</sup>, экспериментальные работы ВИАМ<sup>[39]</sup>, Болобана<sup>[40]</sup> и др.

## § 8. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ СТЕСНЕННОГО КРУЧЕНИЯ

### 1. Деформации при кручении

Рассмотрим произвольное сечение открытого тонкостенного профиля. На фиг. 43 изображено сечение серединной поверхности этого профиля (средняя линия сечения). В дальнейшем эту кривую или ломаную будем называть контуром профиля.

В отношении деформаций этого профиля примем следующие две гипотезы:

1) деформации сдвига в серединной поверхности профиля равны нулю и

2) контур поперечного сечения не деформируется, т. е. проекция расстояния между любыми двумя точками поперечного сечения на плоскость сечения остается постоянной при переходе стержня в деформированное состояние.

Отнесем рассматриваемое сечение к системе главных центральных осей координат  $X$  и  $Y$ , направленных, как указано на фиг. 43; положительное направление продольной оси  $Z$  принимаем от плоскости чертежа к наблюдателю.

Пусть рассматриваемое сечение повернулось на некоторый малый угол  $\theta$  вокруг центра кручения  $A$ , пока нам неизвестного, причем за

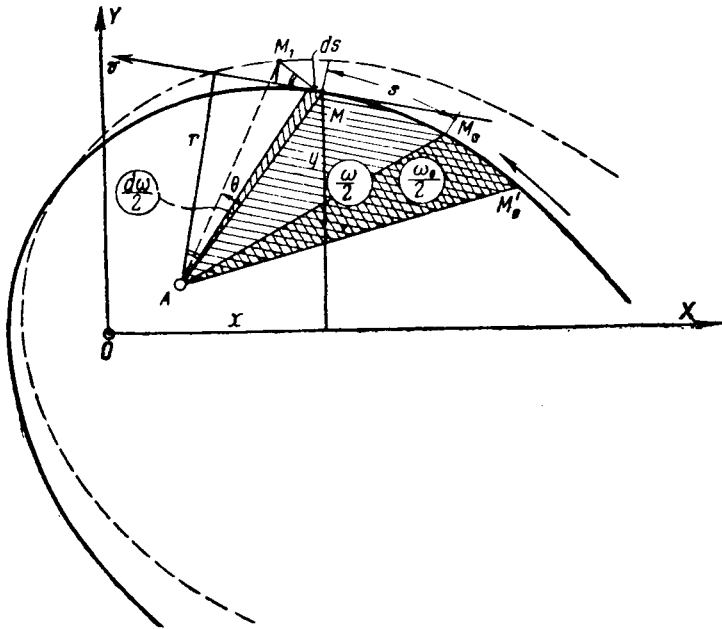
положительный угол условимся принимать поворот против часовой стрелки (от  $X$  и  $Y$ ).

Новое положение какой-нибудь произвольной точки  $M(x, v)$  контура обозначим через  $M_1$ .

Тогда проекция полного перемещения  $MM_1$  на касательную к контуру будет равна:

$$v = r\theta \quad (1)$$

(из подобия треугольников  $v : MM_1 = r : AM$ ;  $v = r \frac{MM_1}{AM} = r \operatorname{tg} \theta \approx r\theta$ ), где  $r$  — перпендикуляр из центра кручения на касательную к контуру в точке  $M$ .



Фиг. 43.

Проекцию полного перемещения  $MM_1$  на ось  $Z$ , т. е. продольное перемещение точки, характеризующее искажение сечения, обозначим через  $u$ . Для установления связи между  $u$  и  $v$  воспользуемся условием отсутствия деформаций сдвига в срединной поверхности профиля, т. е. отсутствия угловой деформации между продольными волокнами и контуром стержня. Это условие может быть выражено так:

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

где  $s$  — координата, отсчитываемая по дуге контура от какой-то начальной точки контура  $M_0$ .

Содержание условия (2) становится понятным из фиг. 44, 45, на которых изображены два одинаковых элемента срединной поверхности профиля  $MNPQ$ , отнесенных к осям  $v$  и  $Z$ : один из них (фиг. 44)

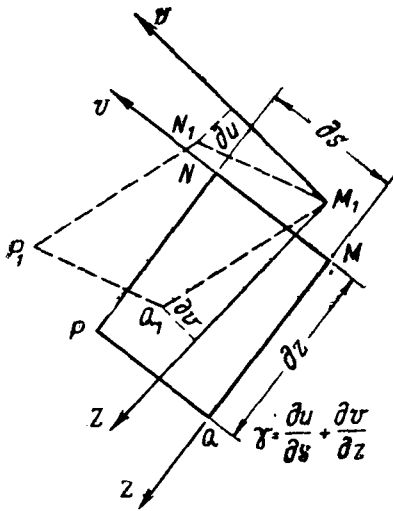
не удовлетворяет условию (2), а другой (фиг. 45) удовлетворяет этому условию (2). Ось  $Z$  на этих фигурах совмещена с образующей профиля.

Дифференцируя выражение (1) по  $z$  и принимая во внимание, что  $r$  не зависит от  $z$ , находим:

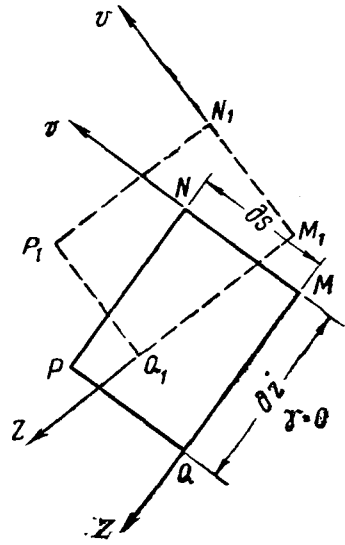
$$\frac{\partial v}{\partial z} = r \frac{\partial \theta}{\partial z} = r\theta'.$$

Подставляем в уравнение (2):

$$\frac{\partial u}{\partial s} + r\theta' = 0.$$



Фиг. 44.



Фиг. 45.

Умножив обе части равенства на  $ds$ , получим:

$$\frac{\partial u}{\partial s} ds = -\theta' r ds. \quad (3)$$

Произведение  $r ds$ , очевидно, равно удвоенной площади изображенного на фиг. 43 элементарного треугольника (сектора), основанием которого служит дифференциал дуги контура  $ds$ , а вершиной — центр кручения  $A$ .

Обозначим эту удвоенную площадь через  $d\omega$ :

$$r ds = d\omega \quad (4)$$

и подставим  $d\omega$  в выражение (3):

$$\frac{\partial u}{\partial s} ds = -\theta' d\omega. \quad (5)$$

Тогда искомое продольное перемещение  $u$  будет равно:

$$u = - \int_{\omega_0}^{\omega} \theta' d\omega + f(z), \quad (6)$$

где  $f(z)$  — произвольная функция, зависящая только от  $z$ .

Через  $\omega$  обозначена удвоенная площадь сектора, ограниченного дугой (или ломаной)  $M_0'M$  и радиусами-векторами  $AM_0'$  и  $AM$ , соединяющими концы этой дуги с центром кручения  $A$ . В дальнейшем эту удвоенную площадь будем называть просто секториальной площадью точки  $M$ , для которой определяется перемещение  $u$ . Точку же  $A$ , являющуюся вершиной сектора  $M_0'AM$ , будем называть полюсом отсчета секториальных площадей. Секториальную площадь будем считать положительной, если она описывается вращением подвижного радиуса-вектора  $AM$  против движения часовой стрелки.

$\omega_0$  — секториальная площадь начальной точки  $M_0$ , от которой ведется отсчет дуг.

$M_0'$  — пока произвольная точка, служащая началом отсчета секториальных площадей.

Имея в виду, что  $\theta'$  является функцией только  $z$ , из выражения (6) получаем:

$$u = - \theta' (\omega - \omega_0) + f(z). \quad (7)$$

Слагаемое формулы (7)  $\theta'\omega_0$  зависит только от переменного  $z$ , поэтому можно включить его в произвольную функцию  $f(z)$ . Обозначим:

$$\theta'\omega_0 + f(z) = \zeta(z). \quad (8)$$

Тогда формула (7) примет более простой вид:

$$u = - \theta' \omega + \zeta(z), \quad (9)$$

где заменой  $\omega$  через  $\omega(s)$  подчеркнуто, что секториальная площадь  $\omega$  зависит только от  $s$ .

Формула (9) выражает закон изменения продольных перемещений  $u$  тонкостенного стержня, имеющего в поперечном сечении жесткий недеформируемый контур.

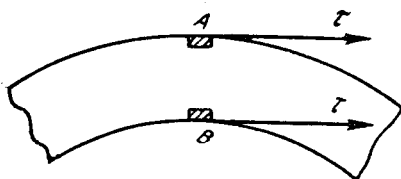
Перемещения эти, как было сказано выше, возникают при кручении вследствие деформации (искажения) сечения и, как показывает формула (9), меняются по закону секториальных площадей.

## 2. Нормальные и касательные напряжения

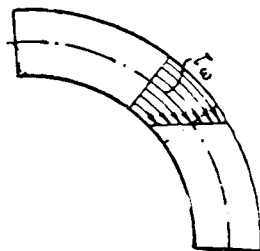
Если тонкостенный стержень находится в условиях стесненного кручения, т. е. имеется то или иное препятствие свободной деформации поперечных сечений, то в поперечных сечениях возникают нормальные и сопутствующие им дополнительные касательные напряжения.

Обозначим нормальные напряжения при кручении (секториальные нормальные напряжения) через  $\sigma_\omega$  и будем считать, что по толщине стенки профиля они распределяются равномерно. Что же касается касательных напряжений, то, как известно, в крайних точках сечения бруса, боковая поверхность которого свободна от напряжений,

они всегда направлены по касательной к контуру (фиг. 46). Вследствие малой толщины стенки профиля по сравнению с общими размерами его принимают, что по толщине стенки, т. е. при переходе от точки  $A$  к точке  $B$ , направление касательных напряжений меняется незначительно. Поэтому будем считать, что касательные напряжения в любой точке тонкостенного профиля направлены параллельно касательной к дуге контура и по толщине стенки при стесненном кручении меняются по линейному закону (фиг. 47).

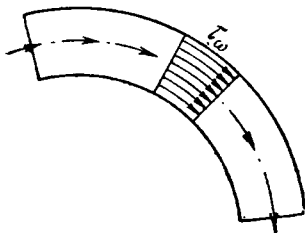


Фиг. 46.

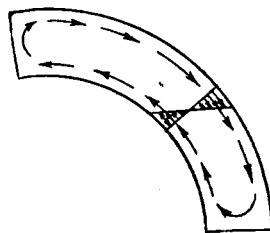


Фиг. 47.

При этих допущениях нормальные напряжения приводятся к одним только нормальным усилиям, действующим вдоль образующей срединной поверхности профиля, а касательные напряжения приводятся к сдвигающим силам, действующим по направлению касательной к дуге контура (фиг. 48), и крутящим моментам, возникающим вследствие разности касательных напряжений в крайних точках стенки профиля (фиг. 49). Первые из них будем называть секториальными касательными напряжениями и обозначать через  $\tau_\omega$ ; последние,



Фиг. 48.



Фиг. 49.

соответствующие чистому кручению, эквивалентны крутящему моменту и определяются по формуле (3) главы I.

Установим связь между продольными удлинениями  $u$  и нормальными напряжениями при кручении.

Беря от  $u$  частную производную по  $z$ , получаем относительное удлинение:

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (10)$$

(при чистом кручении  $u = \text{const}$ , а следовательно,  $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ ).

По закону Гука:

$$\sigma_\omega = E\epsilon = E \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (11)$$



Дифференцируя выражение (9) по  $z$  и подставляя результат в (11), получаем:

$$\sigma_{\omega} = -E [\theta'' \omega - \zeta'(z)]. \quad (12)$$

Для определения  $\zeta'(z)$  составим уравнение проекций на продольную ось  $Z$  всех сил, действующих на рассматриваемую часть стержня. Так как внешние силы при кручении приводятся только к крутящему моменту, то система нормальных усилий, распределенных по любому поперечному сечению, должна быть эквивалентна нулю. Поэтому уравнение  $\sum Z = 0$  в нашем случае запишется так:

$$\int_F \sigma_{\omega} dF = 0. \quad (13)$$

Подставив значение  $\sigma_{\omega}$  из формулы (12) в уравнение (13), получим:

$$\int_F E [\theta'' \omega - \zeta'(z)] dF = 0, \quad (14)$$

откуда

$$\zeta'(z) = \frac{\theta''}{F} \int_F \omega dF. \quad (15)$$

$\int_F \omega dF$  — новая геометрическая характеристика сечения тонкостенного стержня, напоминающая по своему виду статический момент с той лишь разницей, что вместо плеча  $x$  или  $y$  взята секториальная площадь  $\omega$ . Назовем эту величину секториальным статическим моментом и обозначим ее через  $S_{\omega}$ :

$$S_{\omega} = \int_F \omega dF. \quad (16)$$

Величина  $S_{\omega}$  зависит не только от формы и геометрических размеров поперечного сечения, но также и от начала отсчета секториальных площадей (от выбора точки  $M'_0$  на фиг. 43).

Проще всего это начало выбрать так, чтобы секториальный статический момент всего сечения обратился в нуль, т. е. из условия:

$$S_{\omega} = \int_F \omega dF = 0. \quad (17)$$

Тогда

$$\zeta'(z) = 0 \quad (18)$$

и формула (12) для нормальных напряжений примет более простой вид:

$$\sigma_{\omega} = -E \theta'' \omega. \quad (19)$$

Составим еще два уравнения равновесия моментов всех сил, действующих на рассматриваемую часть стержня, относительно осей  $X$  и  $Y$ :

$$\sum M_x = 0 \text{ и } \sum M_y = 0.$$

Так как касательные усилия и внешние крутящие моменты не дают моментов относительно осей  $X$  и  $Y$ , то эти уравнения запишутся так:

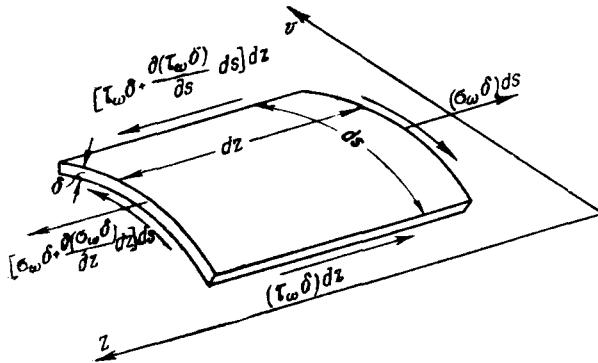
$$\int_F x \sigma_{\omega} dF = 0; \quad (20)$$

$$\int_F y \sigma_{\omega} dF = 0. \quad (21)$$

Подставив в уравнения (20) и (21) значения  $\sigma_{\omega}$  из формулы (19), получим, после сокращения на  $E\theta''$  ( $\theta$  от  $s$  не зависит):

$$\int_F \omega_A x dF = 0; \quad (22)$$

$$\int_F \omega_A y dF = 0. \quad (23)$$



Фиг. 50.

Значком  $A$  у  $\omega$  подчеркнуто, что секториальная площадь  $\omega$  берется относительно центра кручения  $A$ . Эти уравнения понадобятся нам в дальнейшем.

Для определения секториальных касательных напряжений  $\tau_{\omega}$  выделим из стенки профиля бесконечно малый элемент со сторонами  $dz$  и  $ds$ , ограниченный двумя плоскостями, параллельными оси  $Z$ , и двумя плоскостями, ей перпендикулярными (фиг. 50). Уравнение проекций всех сил, действующих на этот элемент, на направление образующей (на ось  $Z$ ) будет (фиг. 50):

$$\frac{\partial(\sigma_{\omega}\delta)}{\partial z} dz ds + \frac{\partial(\tau_{\omega}\delta)}{\partial s} ds dz = 0. \quad (24)$$

Разделив уравнение (24) на произведение  $ds \cdot dz$  и считая, что толщина стенки зависит только от координаты  $s$  и постоянна по длине стержня, получим:

$$\delta \frac{\partial \sigma_{\omega}}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{\omega}\delta)}{\partial s} = 0. \quad (25)$$

Величина  $\tau_{\omega}\delta$  представляет собой касательное усилие, приходящееся на единицу длины стержня в данной точке сечения и одновременно,

в силу взаимности касательных напряжений, — на единицу длины контура поперечного сечения профиля (фиг. 51).

Уравнение (25) представим в другом виде, умножив обе части его на  $ds$  и заменив  $\delta ds$  на  $dF$ :

$$\frac{\partial(\tau_{\omega}\delta)}{\partial s} ds = -\frac{\partial\sigma_{\omega}}{\partial z} dF, \quad (26)$$

или, принимая во внимание формулу (19):

$$\frac{\partial(\tau_{\omega}\delta)}{\partial s} ds = E\theta''' \omega dF. \quad (27)$$

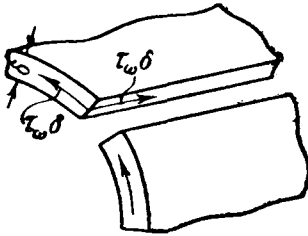
Проинтегрировав обе части равенства (27), получим:

$$\tau_{\omega} = \frac{E\theta'''}{\delta} \int_0^s \omega dF + \zeta(z), \quad (28)$$

где  $\zeta(z)$  — произвольная функция, зависящая только от  $z$ .

Для того чтобы выяснить физический смысл этой функции, положим в выражении (28)  $s=0$ . Тогда интеграл в правой части этого выражения обратится в нуль и функция  $\zeta(z)$  будет равна:

$$\zeta(z) = \tau_{\omega s=0}. \quad (29)$$



Фиг. 51.

Следовательно, она представляет собой величину касательного напряжения по продольному сечению  $s=0$  (начало отсчета дуги  $s$ ).

Беря начало отсчета дуг (точку  $M_0$  по фиг. 43) у края сечения и считая, что этот край свободен от внешних сдвигающих сил, будем иметь:

$$\zeta(z) = 0. \quad (30)$$

$\int_0^s \omega dF$  в формуле (28) есть секториальный статический момент, вычисляемый только для той части сечения, которая заключена между начальной точкой  $M_0$ , выбранной нами у края сечения, и точкой  $M$ , для которой определяется касательное напряжение, т. е. только для отсеченной части сечения; поэтому в дальнейшем вместо  $\int_0^s \omega dF$  будем писать  $\int_{F_{омс}} \omega dF$  и сокращенно обозначим этот момент через  $S_{\omega}^{омс}$ :

$$S_{\omega}^{омс} = \int_{F_{омс}} \omega dF. \quad (31)$$

Тогда формула (28) для секториальных касательных напряжений примет более простой вид:

$$\tau_{\omega} = E\theta''' \frac{S_{\omega}^{омс}}{\delta}. \quad (32)$$

### 3. Дифференциальное уравнение равновесия

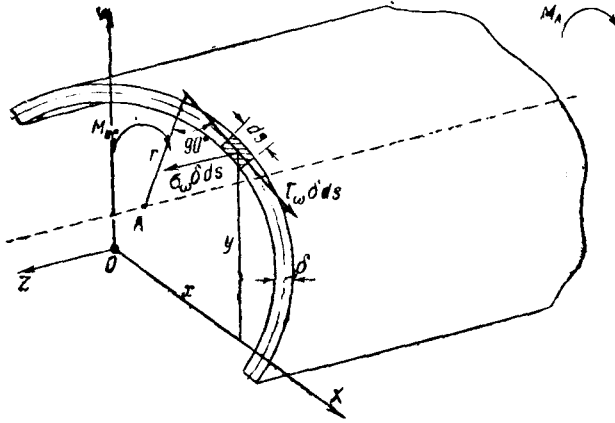
Рассечем нормальным сечением рассматриваемый тонкостенный стержень и составим уравнение моментов внешних и внутренних сил, действующих на рассматриваемую часть стержня, относительно продольной оси, проходящей через центр кручения  $A$  (фиг. 52).

Получим:

$$\int_F r \tau_{\omega} \delta ds + M_{кр} + M_A = 0. \quad (33)$$

Здесь  $r$  — перпендикуляр из центра кручения на касательную к контуру (на направление касательных напряжений  $\tau_{\omega}$ );

$M_A$  — внешний закручивающий момент.



Фиг. 52.

Подставив в формулу (33) значение  $\tau_{\omega}$  из формулы (32), значение  $M_{кр}$  из формулы (3) главы I и заменив  $r ds$  через  $d\omega$ , согласно формуле (4), будем иметь:

$$\int_F \delta E \theta''' \frac{S_{\omega}^{omc}}{\delta} d\omega + GJ_d \theta' + M_A = 0,$$

или, принимая во внимание формулу (31):

$$E \theta''' \int_F \left( \int_{F_{omc}} \omega dF \right) d\omega + GJ_d \theta' + M_A = 0.$$

Интегрируя первое слагаемое по частям, получаем:

$$E \theta''' \left( \omega \int_F \omega dF - \int_F \omega^2 dF \right) + GJ_d \theta' + M_A = 0. \quad (34)$$

Здесь  $\int_F \omega dF$  согласно условию (17) равен нулю, а  $\int_F \omega^2 dF$  — новая геометрическая характеристика сечения тонкостенного профиля, связанная с законом секториальных площадей и имеющая размерность  $см^6$ .

По структуре своей она напоминает момент инерции с той лишь разницей, что вместо квадрата линейной координаты точки  $x^2$  или  $y^2$  здесь под интегралом стоит квадрат секториальной координаты —  $\omega^2$ .

Условимся в дальнейшем интеграл этот называть секториальным моментом инерции и обозначать через  $J_\omega$ :

$$J_\omega = \int_F \omega^2 dF. \quad (35)$$

В таком случае уравнение (34) примет следующий вид:

$$-EJ_\omega \theta''' + GJ_d \theta' + M_A = 0. \quad (36)$$

Как и при поперечном изгибе балки, нам придется иметь дело с четырьмя граничными условиями на концах закручиваемого стержня, а потому желательно, чтобы интеграл дифференциального уравнения содержал четыре произвольных постоянных. Поэтому перейдем к уравнению 4-го порядка, продифференцировав уравнение (36) один раз по  $z$ :

$$-EJ_\omega \theta^{IV} + GJ_d \theta'' + \frac{dM_A}{dz} = 0. \quad (37)$$

$\frac{dM_A}{dz}$  есть интенсивность изменения по длине стержня внешних крутящих моментов.

Обозначив ее через  $m$ :

$$m = \frac{dM_A}{dz}, \quad (38)$$

окончательно получим:

$$EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' = m. \quad (39)$$

Произведение модуля упругости на секториальный момент инерции  $EJ_\omega$  в дальнейшем будем называть изгибно-крутильной или секториальной жесткостью стержня.

#### 4. Координаты центра изгиба

Для тонкостенных стержней, находящихся в условиях стесненного кручения или совместного действия изгиба и кручения, весьма существенную роль играет особая точка сечения, называемая центром изгиба. Она, как уже говорилось выше, обладает тем свойством, что если действующая на стержень поперечная нагрузка проходит через этот центр и нормальные напряжения на концах стержня равны нулю или распределены по линейному закону, то стержень будет испытывать только изгиб (без кручения).

Для определения координат центра изгиба рассмотрим открытый тонкостенный профиль, находящийся в условиях косоугольного изгиба (фиг. 53).

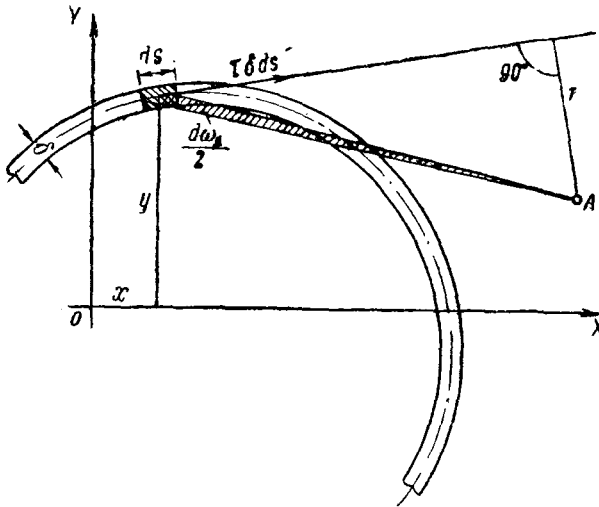
Отнесем сечение к главным центральным осям  $X$  и  $Y$  и рассмотрим сначала случай простого изгиба относительно оси  $X$ .

В сечениях стержня возникнут нормальные и сопутствующие им касательные напряжения. Последние, как известно, определяются по формуле:

$$\tau = \frac{Q_y}{J_x^0} \int_{F_{отс}} y dF, \quad (40)$$

где  $Q_y$  — проекция поперечной силы на ось  $Y$ ;

$\int_{F_{отс}} y dF$  — статический момент отсеченной части сечения относительно оси  $X$ .



Фиг. 53.

Направление касательных напряжений в любой точке сечения тонкостенного профиля, как было сказано выше, совпадает с направлением касательной к контуру сечения в данной точке.

Пусть точка  $A$  является искомым центром изгиба сечения, а  $r$  — перпендикуляр, опущенный из этого центра на касательную к контуру в рассматриваемой точке профиля.

Элементарный момент усилия  $\tau \delta ds$  относительно центра изгиба  $A$  выразится формулой:

$$dM = r \tau \delta ds = \tau \delta d\omega, \quad (41)$$

где  $r \delta ds$  согласно формуле (4) равно секториальной площади  $d\omega$ .

Подставив  $\tau$  из (40) в (41), получим:

$$dM = \frac{Q_y}{J_x} d\omega \int_{F_{отс}} y dF. \quad (42)$$

Момент касательных усилий на участке стержня длиной  $s$ , очевидно, будет равен:

$$M = \int_0^s \frac{Q_y}{J_x} \left( \int_{F_{Omc}} y dF \right) d\omega. \quad (43)$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$M = \frac{Q_y}{J_x} \left[ \omega \int_{F_{Omc}} y dF - \int_0^s \omega y dF \right]. \quad (44)$$

Если интегралы формулы (44) распространить на все сечение профиля, то мы, очевидно, будем иметь момент равнодействующей касательных усилий относительно центра изгиба  $A$ . Кроме того первый из интегралов формулы (44) как статический момент всего сечения относительно нейтральной оси обратится в нуль, и формула (44) примет следующий вид:

$$M = - \frac{Q_y}{J_x} \int_F \omega y dF. \quad (45)$$

Выше было указано, что центр изгиба есть точка, через которую проходит равнодействующая касательных напряжений (см. § 7, работы Майара и др.). В таком случае выражение (45) должно быть равно нулю, и так как  $\frac{Q_y}{J_x} \neq 0$ , то, следовательно, первое уравнение для определения координат центра изгиба запишется так:

$$\int_F \omega_A y dF = 0. \quad (46)$$

Аналогичным образом, рассматривая случай простого изгиба относительно оси  $Y$ , мы получим другое уравнение:

$$\int_F \omega_A x dF = 0. \quad (47)$$

Напомним, что секториальная площадь  $\omega$  в уравнениях (46) и (47) берется относительно центра изгиба сечения, что мы и подчеркнули знаком  $A$  у  $\omega$ , и что оси  $X$  и  $Y$  являются главными центральными осями сечения.

Уравнения (46) и (47) совершенно аналогичны уравнениям (22) и (23), а это значит, что центр кручения при стесненном кручении совпадает с центром изгиба.

Прежде чем вывести формулы для определения координат центра изгиба, покажем, как изменяется секториальная площадь  $\omega$  при переходе к новому полюсу.

Пусть полюс перенесен из точки  $A$  в точку  $B$  (фиг. 54); обозначим через  $\omega_A$  и  $\omega_B$  секториальные площади, соответствующие полюсам в точках  $A$  и  $B$ . Дифференциалы этих площадей выразятся формулами:

$$d\omega_A = r_A ds, \quad (48)$$

$$d\omega_B = r_B ds. \quad (49)$$

Из фигуры видно, что

$$r_B = r_A - (b_x - a_x) \sin \alpha - (b_y - a_y) \cos \alpha, \quad (50)$$

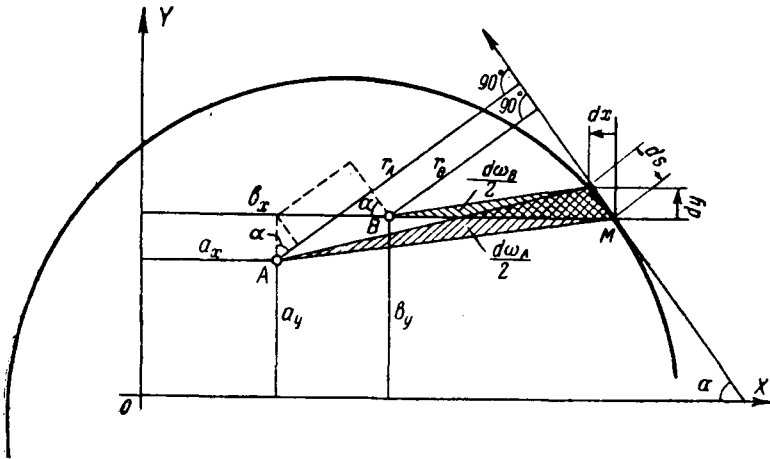
где  $\alpha$  — угол наклона касательной в точке  $M$  к оси  $X$ .

Подставляя значение  $r_B$  из (50) в (49) и имея в виду, что  $ds \cos \alpha = -dx$  и  $ds \sin \alpha = dy$ , будем иметь:

$$d\omega_B = d\omega_A - (b_x - a_x) dy + (b_y - a_y) dx. \quad (51)$$

Интегрируя обе части равенства (51), получаем:

$$\omega_B = \omega_A - (b_x - a_x) y + (b_y - a_y) x + \omega_0, \quad (52)$$



Фиг. 54.

где  $\omega_0$  — произвольная постоянная, зависящая от начала отсчета секториальных площадей.

Представим формулу (52) в следующем виде:

$$\omega_A = \omega_B + (b_x - a_x) y - (b_y - a_y) x - \omega_0. \quad (53)$$

Формула (53) есть формула преобразования секториальных площадей при переносе полюса.

Подставим значение  $\omega_A$  из этой формулы в уравнения (46) и (47) для определения координат центра изгиба:

$$\left. \begin{aligned} \int_F \omega_A y dF &= \int_F \omega_B y dF + (b_x - a_x) \int_F y^2 dF - (b_y - a_y) \int_F xy dF - \\ &\quad - \omega_0 \int_F y dF = 0; \\ \int_F \omega_A x dF &= \int_F \omega_B x dF + (b_x - a_x) \int_F xy dF - (b_y - a_y) \int_F x^2 dF - \\ &\quad - \omega_0 \int_F x dF = 0. \end{aligned} \right\} (54)$$



В этих уравнениях  $\int_F y dF$ ,  $\int_F x dF$  и  $\int_F xy dF$  как статические моменты и центробежный момент инерции сечения относительно главных осей сечения  $X$  и  $Y$  равны нулю:

$$\int_F x dF = \int_F y dF = \int_F xy dF = 0,$$

а так как  $\int_F x^2 dF = J_y$  и  $\int_F y^2 dF = J_x$  — главные моменты инерции сечения, то уравнения (54) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \int_F \omega_B y dF + J_x (b_x - a_x) &= 0; \\ \int_F \omega_B x dF - J_y (b_y - a_y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Считая точку  $A$  искомым центром изгиба, а точку  $B$  произвольной точкой сечения и введя обозначения:

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} a_x - b_x &= \alpha_x \\ a_y - b_y &= \alpha_y, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

получаем:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= \frac{\int_F \omega_B y dF}{J_x}; \\ \alpha_y &= -\frac{\int_F \omega_B x dF}{J_y}. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Координаты центра изгиба  $A$ , определяемые формулами (57), выражаются таким образом через координаты другой произвольно выбранной точки сечения  $B$ , которая служит полюсом для вспомогательной секториальной площади  $\omega_B$ .

Интегралы, стоящие в числителях формул (57), в дальнейшем будем называть секториально-линейными статическими моментами и обозначим их соответственно через  $S_{\omega_B y}$  и  $S_{\omega_B x}$ :

$$\left. \begin{aligned} S_{\omega_B x} &= \int_F \omega_B x dF; \\ S_{\omega_B y} &= \int_F \omega_B y dF. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Тогда формулы (57) примут более простой вид:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= \frac{S_{\omega_B y}}{J_x}; \\ \alpha_y &= -\frac{S_{\omega_B x}}{J_y}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Формулы (59) для определения координат центра изгиба по виду напоминают формулы для определения координат центра тяжести сечения:

$$x_c = \frac{S_y}{F} \quad \text{и} \quad y_c = \frac{S_x}{F},$$

с той лишь разницей, что в числителях вместо статических моментов стоят секториально-линейные статические моменты, а в знаменателях вместо площади — главные моменты инерции сечения.

### 5. Изгибно-крутильные силовые факторы, связанные с депланацией сечения

В п. 2 настоящего параграфа нами были составлены условия равновесия (13), (20) и (21) всех сил, действующих на рассматриваемую часть тонкостенного стержня, находящегося в условиях стесненного кручения.

Если бы стержень находился в условиях самого общего случая сложного сопротивления, то эти условия, конечно, не удовлетворялись бы и первое из них привело бы к продольной силе, действующей в поперечном сечении стержня:

$$N = \int_F \sigma dF, \quad (60)$$

второе — к изгибающему моменту относительно оси  $Y$ :

$$M_y = - \int_F \sigma x dF \quad (61)$$

и третье к изгибающему моменту относительно оси  $X$ :

$$M_x = \int_F \sigma y dF \quad (62)$$

[значок  $\omega$  у  $\sigma$  в формулах (60), (61) и (62) опущен, так как здесь речь идет не о секториальных нормальных напряжениях, а о нормальных напряжениях в случае сложного сопротивления; знак минус в формуле (61) понятен из фиг. 52, так как нами принята право-винтовая система координат].

Если по аналогии с формулами (61) и (62) составим произведение  $\sigma dF$  на секториальную координату точки, выражаемую удвоенной секториальной площадью  $\omega$ , взятой относительно центра изгиба  $A$ , и проинтегрируем его по всей площади сечения, то получим новую статическую величину, которую обозначим через  $B_\omega$ :

$$B_\omega = \int_F \sigma \omega dF. \quad (63)$$

Понятие этого нового статического фактора, связанного с распределением нормальных напряжений по сечению тонкостенного стержня по закону секториальных площадей, можно трактовать как работу

внешних продольных усилий  $\sigma dF$  на единичных перемещениях, распределенных по сечению стержня по закону секториальных площадей.

В самом деле, если мы зададимся единичными продольными перемещениями, равномерно распределенными по сечению стержня, то работа внешних продольных усилий на таких единичных перемещениях, очевидно, будет равна продольной силе  $N$ , определяемой по формуле (60).

Точно так же работа внешних продольных усилий на единичных перемещениях, распределенных по сечению стержня по плоскостному закону с нулевой линией на главной оси сечения  $X$  или  $Y$ , будет соответственно равна изгибающему моменту  $M_x$  или  $M_y$ , определяемым по формулам (61) или (62).

Совершенно аналогично работа внешних продольных усилий на единичных перемещениях, распределенных по сечению стержня по секториальному закону, определяемая формулой (63), будет равна новому силовому фактору —  $B_\omega$ .

Величину  $B_\omega$  проф. Власов предложил назвать изгибно-крутящим бимоментом. Измеряется она в  $кгсм^2$ .

Подставив в правую часть выражения (63) вместо  $\sigma$  его значение при стесненном кручении из формулы (19), получим:

$$B_\omega = - \int_F E \theta'' \omega^2 dF = - E \theta'' \int_F \omega^2 dF, \quad (64)$$

или, принимая во внимание обозначение  $\int_F \omega^2 dF$  из формулы (35):

$$B_\omega = - EJ_\omega \theta''. \quad (65)$$

Из сопротивления материалов известно, что первая производная от изгибающего момента по переменной вдоль оси стержня дает соответствующую поперечную силу:

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz} \quad (66)$$

и

$$Q_x = - \frac{dM_y}{dz}. \quad (67)$$

Совершенно аналогично, составив первую производную от изгибно-крутящего бимоента по  $z$ , мы получим соответствующий новый статический фактор, который обозначим через  $M_\omega$ :

$$M_\omega = \frac{dB_\omega}{dz} = - EJ_\omega \theta'''. \quad (68)$$

Величину  $M_\omega$  проф. Власов назвал изгибно-крутящим моментом. Измеряется он в  $кгсм$ .

Заканчивая этот параграф, отметим, что при изложении его мы в основном пользовались указанными выше работами проф. Власова, Каппуса, Вагнера и проф. Уманского.

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ЗАКОНА СЕКТОРИАЛЬНЫХ ПЛОЩАДЕЙ

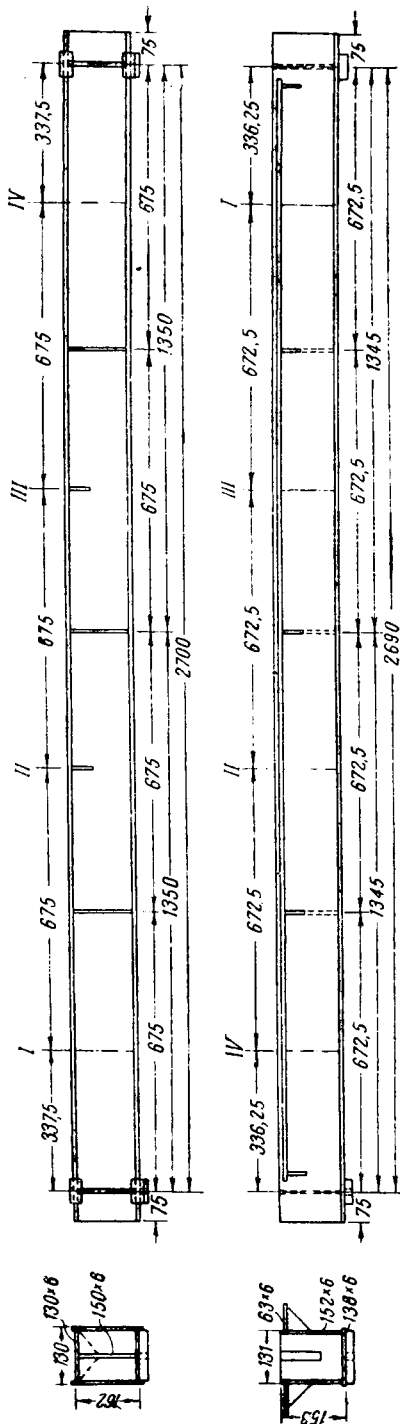
## § 9. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ, ПРОВЕДЕННЫХ В 1938 г.

В 1938 г. в лаборатории строительной механики ЦНИПС с целью проверки указанной выше теории проф. Власова под его руководством нами было проведено несколько экспериментов над двумя металлическими образцами двутаврового и П-образного сечений (фиг. 55).

Описание специально запроектированных опорных частей и самой постановки эксперимента на совместное действие изгиба и кручения приведено ниже в § 10.

В каждом из четырех сечений образцов между смежными ребрами жесткости и диафрагмами (на фиг. 55 эти сечения обозначены римскими цифрами) ставилось по три прогибомера системы Максимова: один — для измерения вертикальных прогибов и два — для измерения горизонтальных перемещений верхней и нижней точек соответствующего сечения образца. Кроме того в тех же сечениях были поставлены тензометры Хуггенбергера: у двутавра по 4, а у П-образного профиля по 8 шт. в сечении. Схема установки приборов показана на фиг. 56 и 57.

Мы ограничимся здесь лишь кратким изложением результатов этих экспериментов, поскольку более подробное описание и графическое изображение их уже опу-

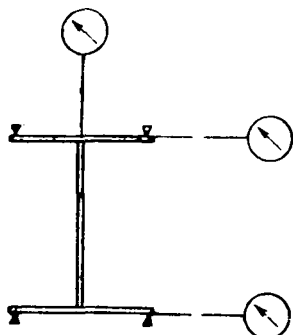


Фиг. 55.

бликованы в печати<sup>1</sup>, где желающие могут с ними ознакомиться.

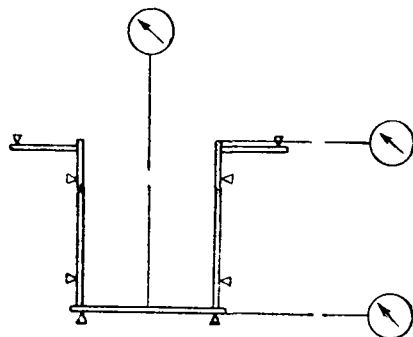
Сравнивая экспериментальные прогибы с теоретическими, мы получили почти полное их совпадение, что убедило нас в том, что принятая в расчетах жесткость стержня при изгибе  $EJ_x$  соответствовала действительной (модуль упругости материала  $E$  определялся отдельно при испытании стандартных образцов на растяжение).

Для сравнения экспериментальных и теоретических углов закручивания соответствующую жесткость стержня  $GJ_d$  мы определили из тех же данных эксперимента, исходя из средних значений экспериментальных величин углов закручивания в среднем сечении балки при среднем эксцентриситете приложения нагрузки. Определенная таким образом величина  $GJ_d$  была распространена на все кривые вычисленных углов



▽ - Тензиметры  
○ - Прогибомеры

Фиг. 56.



Фиг. 57.

закручивания; сравнивая последние с экспериментальными кривыми, мы во всех случаях получили почти полное совпадение их.

После обработки экспериментальных напряжений путем разложения их на компоненты по четырехчленной формуле, основные напряжения — от вертикального изгиба и от кручения — были сравнены с соответствующими теоретическими. При этом было отмечено, что экспериментальные напряжения несколько отстают от теоретических; у двутаврового образца это относится главным образом к напряжениям от изгиба, а для П-образного — как к напряжениям от изгиба, так и к напряжениям от кручения.

Тем не менее, несмотря на указанные небольшие численные расхождения между экспериментальными данными и теоретическими (для двутавровых балок, сваренных из трех листов, это явление при вертикальном изгибе довольно обычное и отмечается рядом исследователей), сравнение показало совершенно определенное закономерное распределение нормальных напряжений по сечению и по длине образцов, дающее право считать проверяемую теорию правильной.

<sup>1</sup> В. З. Власов, Тонкостенные упругие стержни, Стройиздат, 1940, стр. 123—129.

Д. В. Бычков, Совместное действие изгиба и кручения в металлических балках, в сборнике „Исследование металлических конструкций“, Стройиздат, 1940.

## § 10. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ЗАКОНА СЕКТОРИАЛЬНЫХ ПЛОЩАДЕЙ НА БАЛКЕ П-ОБРАЗНОГО СЕЧЕНИЯ (работы 1939 г.)

### 1. Цель эксперимента

При проведении экспериментов 1938 г. было априорно принято, что напряжения по ширине отдельных элементов распределяются по линейному закону, в соответствии с чем в отдельных сечениях образцов тензометры ставились не более чем в двух точках каждого элемента. Но само это положение как раз нуждается в экспериментальном доказательстве. Кроме этого жесткость при чистом кручении  $GJ_d$  в экспериментах 1938 г. определялась только косвенным путем (работкой измеренных общих деформаций бруса при сложном сопротивлении), что не давало достаточной уверенности в правильном ее определении. Оба эти недостатка устранены в экспериментах 1939 г., являвшихся продолжением экспериментов 1938 г. и имевших ту же цель проверить закон секториальных площадей (распределение напряжений по четырехчленной формуле).

### 2. Описание модели

Для испытания была изготовлена из 5,3-мм листовой стали марки 3 сварная балка П-образного сечения пролетом 2,70 м (фиг. 58).

У опорных сечений образца продольные ребра были срезаны для возможности упирания в боковые шариковые опоры.

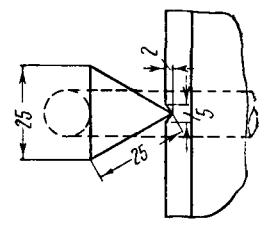
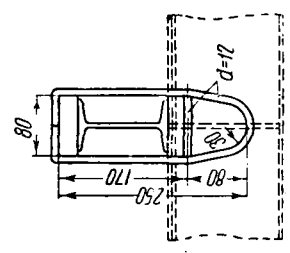
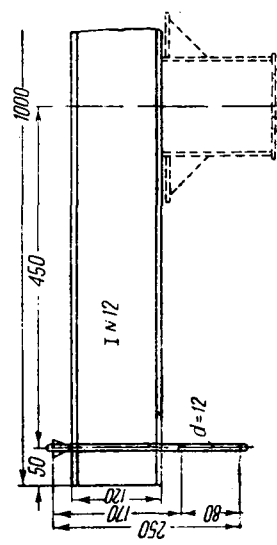
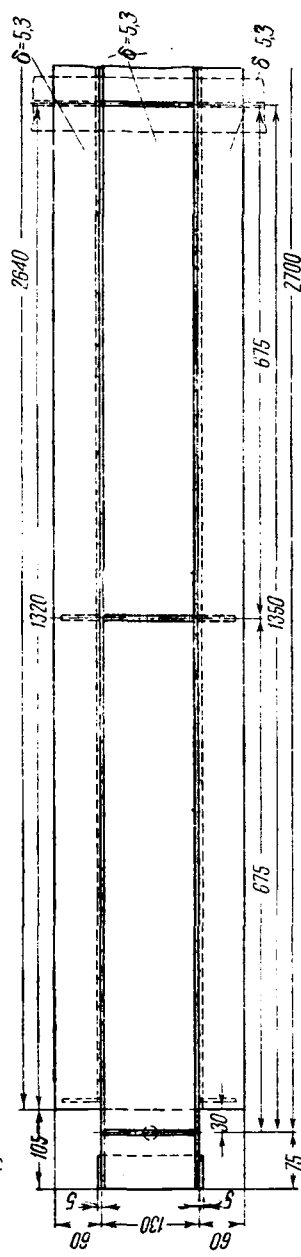
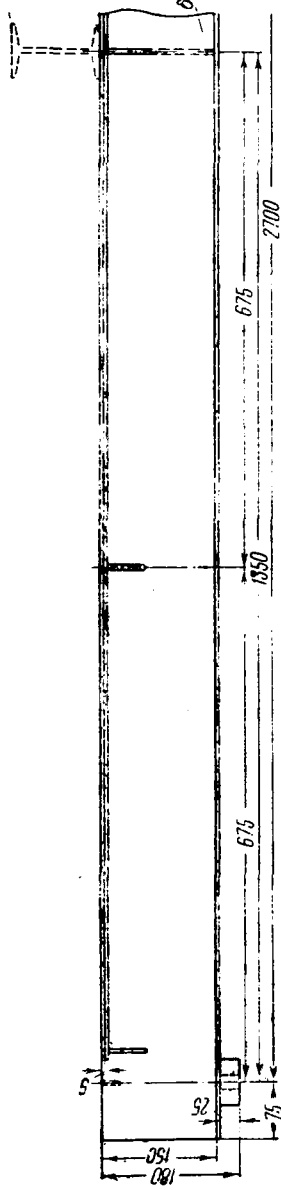
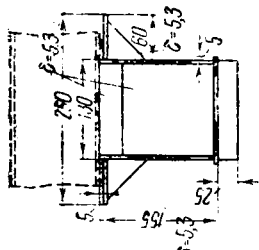
Во избежание излишней жесткости профиля диафрагмы по длине образца (за исключением среднего сечения в месте приложения нагрузки) не ставились. По условиям сварки (для устранения коробления) были поставлены в четвертях пролета только тонкие соединительные планки. При изготовлении образца было обращено особое внимание на полное соответствие действительных размеров с проектными и на высокое качество самой сварки. Это было достигнуто благодаря непосредственному участию и постоянному наблюдению опытного техника лаборатории Ф. А. Перн.

Весьма существенным обстоятельством является и то, что в данном эксперименте в отличие от экспериментов 1938 г. мы имели дело с определенным материалом (Ст.-3).

### 3. Постановка эксперимента

Первой частью эксперимента являлось испытание образца на чистое кручение на специальной установке для определения действительной жесткости образца  $GJ_d$ . Описание этой установки дано в главе I настоящей работы.

Весьма важной конструктивной деталью при испытании на совместное действие изгиба и кручения являлись специально запроектированные опорные части. Они состояли из толстого 20-мм металлического листа, вертикально приваренного к опорному листу такой же толщины и укрепленного четырьмя треугольными перпендикулярно к нему приваренными ребрами. В вертикальном листе был сделан вырез, соответствовавший контурным размерам образца; к нижней горизонтальной плоскости выреза была приварена опорная плитка с краями,



Фиг. 58.

между которыми были уложены опорные стальные шарики. Вертикальные края балки также упирались в шарики, уложенные в специальных вырезах, закрытых с обеих сторон прикрепленными на болтах плитками. В одной из опор был предусмотрен штырь. Общий вид конструкции опоры показан на фиг. 59.

Такое устройство опор обеспечивало выполнение принятых в задаче граничных условий, а именно:

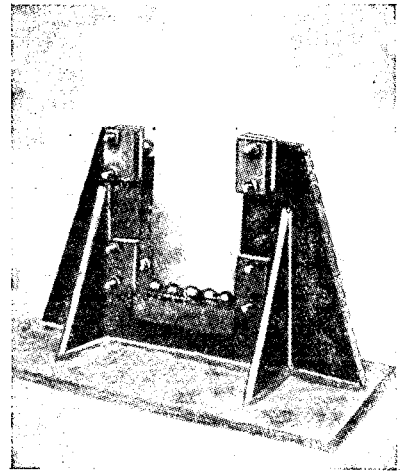
1) возможны свободные продольные перемещения опорного сечения (отсутствие на опоре нормальных напряжений, что соответствует  $\theta'' = 0$ );

2) возможен свободный поворот сечения относительно горизонтальной и вертикальной осей ( $\varphi_x \neq 0$  и  $\varphi_y \neq 0$ );

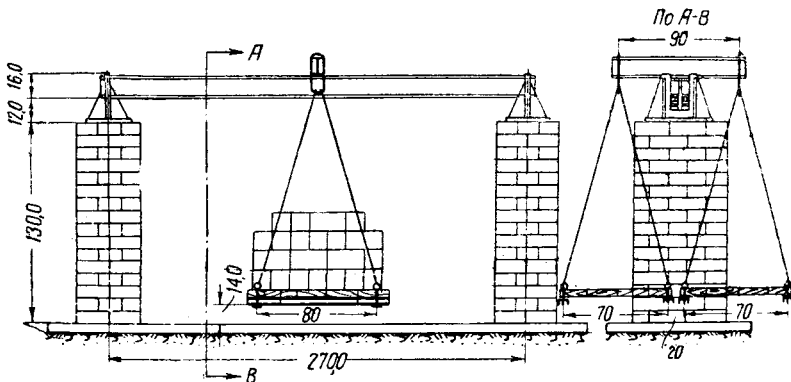
3) угол закручивания на опоре отсутствует ( $\theta = 0$ ).

Описанные опоры были установлены на кирпичные столбы высотой в 1,3 м для удобства загрузки и чтения отсчетов по приборам при проведении испытаний (фиг. 60).

Грузовые платформы в количестве 2 шт. были подвешены к свободным концам специальной поперечной балочки (двутавр № 12) длиной 90 см, симметрично приваренной к верхнему поясу П-образной балки (фиг. 58 и 60).



Фиг. 59.



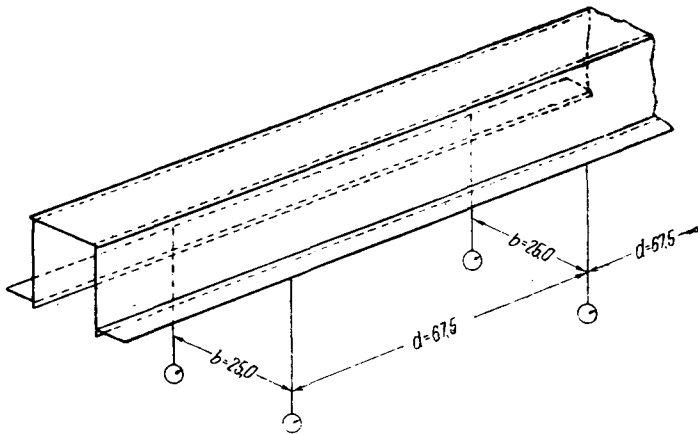
Фиг. 60.

Платформы нагружались чугунными чушками. Величина нагрузки была рассчитана из условия получения фибровых напряжений, не превышающих  $1\,500\text{--}1\,600\text{ кг/см}^2$ , так как испытание проводилось только в пределах упругости материала балки. Изменение точки приложения нагрузки на балку достигалось изменением величины груза на каждой



платформе, благодаря чему перемещалась равнодействующая давлений обеих платформ.

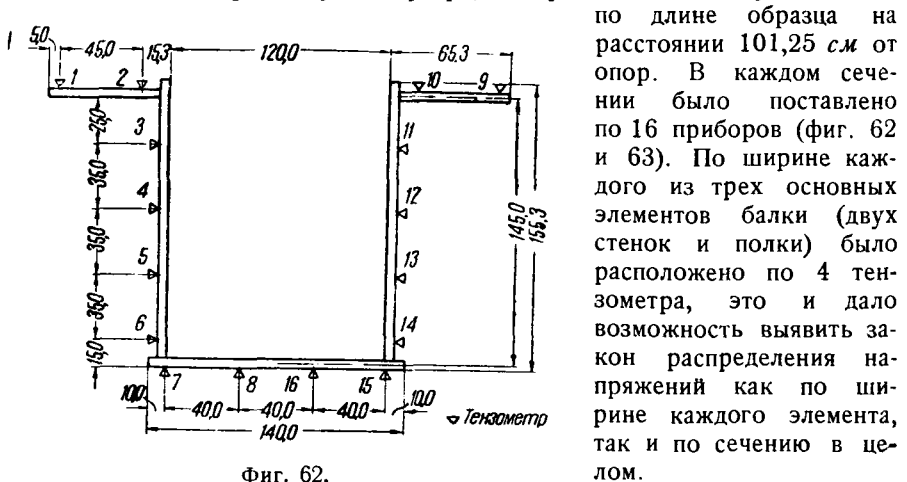
Измерительными приборами при испытании на чистое кручение являлись прогибомеры системы Емельянова, которые стави-



Фиг. 61.

лись в четырех сечениях образца, отстоящих на 67,5 см друг от друга, по два прибора в каждом сечении (фиг. 61).

При испытании на совместное действие изгиба и кручения мы пользовались тензометрами Хуггенбергера, которые ставили в двух сечениях



Фиг. 62.

#### 4. Проведение эксперимента

Испытание на чистое кручение производилось во всем одинаково с тем, как описано в главе I, § 4.

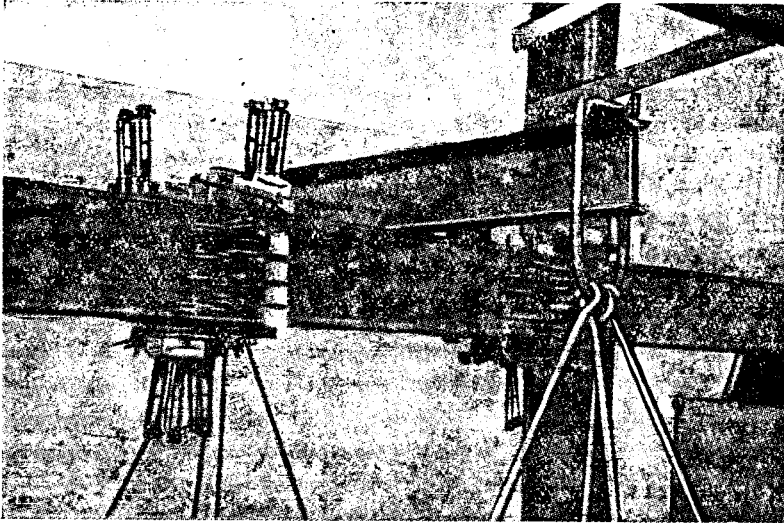
При испытании на совместное действие изгиба и кручения плоскость действия нагрузки перемещалась по отношению к линии

центров изгиба семь раз, а именно: одно нагружение на центральный изгиб ( $e=0$ ), три нагружения с эксцентриситетом в одну сторону ( $e=+2,29$  см,  $e=+4,66$  см и  $e=+6,82$  см) и три нагружения с такими же эксцентриситетами в другую сторону ( $e=-2,29$  см,  $e=-4,66$  см и  $e=-6,82$  см).

Численное значение эксцентриситета приложения нагрузки определялось по формуле:

$$e = \frac{45(P_B - P_A)}{P_B + P_A}, \quad (69)$$

где  $P_A$  — вес груза на одной платформе;  
 $P_B$  — вес груза на другой платформе.



Фиг. 63.

Начальные отсчеты приборов брались под нагрузкой, состоявшей из собственного веса балки, веса платформ и некоторой нагрузки (10% максимальной), причем эта начальная нагрузка в процессе всего испытания не снималась. В дальнейшем эта нагрузка обозначена № 0. Затем балка последовательно загружалась нагрузкой № 1, составлявшей треть максимальной, № 2 — две трети максимальной и № 3 — равной максимальной. Загрузка и разгрузка по указанной схеме повторялась дважды.

Величины нагрузок соответственно номерам нагружения приведены в табл. 14.

Схему цикличности нагружения можно представить так:

0; 1; 2; 3; 2; 3; 2; 1; 0; 1; 2; 3; 2; 1; 0,

что составляет по 15 отсчетов по всем приборам для каждого эксцентриситета.

Величины нагрузок в кг при испытании П-образного образца

Эксцентриситет <i>e</i> в см	№ нагрузок		
	1	2	3
0	450/450	900/900	1350/1350
+ 2,29	310/280	620/560	930/840
— 2,29	280/310	560/620	840/930
+ 4,66	240/195	480/390	720/585
— 4,66	195/240	390/480	585/720
+ 6,82	190/140	380/280	570/420
— 6,82	140/190	280/380	420/570

Примечание. В числителе указаны нагрузки на одну платформу, в знаменателе — на другую.

### 5. Результаты испытаний

Физические характеристики материала образца: модуль упругости 1-го рода —  $E$ , модуль упругости 2-го рода —  $G$  и коэффициент Пуассона —  $\mu$  были определены в лаборатории испытаний материалов Московского государственного университета на образцах, вырезанных из того же листа стали, из которого была изготовлена балка. Для определения модуля  $E$  было изготовлено три плоских образца, для определения модуля  $G$  — три круглых образца и для определения коэффициента  $\mu$  — один плоский образец. Результаты испытаний, хорошо между собой согласующиеся, получились следующие:

$$E = \frac{2,16 \cdot 10^6 + 2,15 \cdot 10^6 + 2,14 \cdot 10^6}{3} = 2,15 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2;$$

$$G = \frac{0,817 \cdot 10^6 + 0,813 \cdot 10^6 + 0,816 \cdot 10^6}{3} = 0,815 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2;$$

$$\mu = 0,334.$$

Действительная жесткость  $GJ_a$  при испытании на чистое кручение определялась в результате обработки экспериментальных данных как средняя из 72 величин [12 циклов  $\times$  2 (положительное и отрицательное кручение)  $\times$  3 (I—II сечение, II—III сечение и III—IV сечение)] и получилась равной:

$$GJ_a = 5,54 \cdot 10^6 \text{ кгсм}^2.$$

При испытании на совместное действие изгиба и кручения нормальные напряжения определялись путем измерения тензодатчиками Хуггенберга фибровых деформаций на длине (на базе) 100 мм между двумя сечениями; в каждом из них было установлено по 16 приборов. В табл. 15 приводятся величины экспериментальных напряжений, полученные как среднее из 56 величин для каждой пары приборов [14 циклов  $\times$  2 (нагрузка справа и слева от линии центров изгиба)  $\times$  2 (сечение I и II)].

Необходимо отметить, что отклонения между отдельными величинами, из которых бралось среднее арифметическое, были небольшие.

## Средние экспериментальные напряжения от совместного действия изгиба и кручения П-образного образца

№ приборов	Экспериментальные напряжения при величине эксцентриситетов $e$ в см			
	0	2,29	4,66	6,82
1	- 264	- 277	- 253	- 221
2	- 272	- 114	- 52	- 15
3	- 170	- 46	+ 1,0	+ 25
4	- 33	+ 7	+ 16	+ 26
5	+ 113	+ 57	+ 32	+ 20
6	+ 247	+ 103	+ 46	+ 18
7	+ 305	+ 132	+ 58	+ 19
8	+ 287	+ 165	+ 111	+ 75
9	- 264	- 77	- 8	+ 29
10	- 272	- 234	- 206	- 176
11	- 170	- 181	- 169	- 154
12	- 33	- 48	- 52	- 50
13	+ 113	+ 85	+ 65	+ 57
14	+ 247	+ 212	+ 182	+ 161
15	+ 305	+ 270	+ 242	+ 205
16	+ 287	+ 205	+ 161	+ 130

## 6. Обработка результатов эксперимента на совместное действие изгиба и кручения по способу наименьших квадратов

Измеренные напряжения (вернее, деформации) представляют собой сумму отдельных напряжений, вызываемых в волокнах балки четырьмя причинами: вертикальным изгибом и кручением (основные напряжения), горизонтальным изгибом и продольным сжатием или растяжением (дополнительные напряжения). Эти измеренные напряжения нам нужно разложить на четыре составляющие, соответствующие четырем видам работы балки.

Обозначим эти четыре компонента напряжений через:

- $\sigma_0$  — от продольной силы;
- $\sigma_x$  — от изгиба в вертикальной плоскости;
- $\sigma_y$  — от изгиба в горизонтальной плоскости;
- $\sigma_\omega$  — от кручения.

Первые три из этих составляющих могут быть выражены обычными формулами сопротивления материалов:

$$\sigma_0 = \frac{N}{F}; \quad (70)$$

$$\sigma_x = \frac{M_x y}{J_x}; \quad (71)$$

$$\sigma_y = \frac{M_y x}{J_y}. \quad (72)$$

Четвертая составляющая по теории проф. В. З. Власова выражается формулой:

$$\sigma_{\omega} = \frac{B_{\omega}\omega}{J_{\omega}}, \quad (73)$$

которая по виду очень напоминает формулы (71) и (72).

Компонент  $\sigma_{\omega}$  уже не подчиняется плоскостному закону распределения напряжений по сечению, как это имеет место для компонентов, выражаемых формулами (70), (71) и (72), а меняется по закону секториальных площадей, что и подчеркнуто индексом  $\omega$ .

Разложение полученных при эксперименте напряжений на компоненты  $\sigma_0, \sigma_x, \sigma_y$  и  $\sigma_{\omega}$  сводится к решению системы линейных уравнений, число которых равно числу приборов, стоящих в сечении, т. е. в нашем случае 16 уравнений. Таким образом число уравнений превышает число неизвестных, и для решения задачи приходится прибегнуть к статистической обработке, решая систему по способу наименьших квадратов.

Обозначим измеренные напряжения (вернее, средние из них, как указывалось выше) через  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{15}$  и  $\sigma_{16}$ , где индекс указывает номер прибора (фиг. 62).

Система линейных уравнений для определения компонентов напряжений  $\sigma_0, \sigma_x, \sigma_y$  и  $\sigma_{\omega}$  будет иметь вид, представленный в табл. 16. Если

Таблица 16

Система уравнений для разложения экспериментальных напряжений на четыре компонента

№ уравнений	Коэффициенты при				Правая часть уравнений
	$\frac{N}{F}$	$\frac{M_x}{J_x}$	$\frac{M_y}{J_y}$	$\frac{B_{\omega}}{J_{\omega}}$	
	1,0	$(y_i)$	$(x_i)$	$(\omega_i)$	
1	1,0	-7,49	+12,03	-58,04	$\sigma_1$
2	1,0	-7,49	+7,53	+31,63	$\sigma_2$
3	1,0	-4,46	+6,53	+39,53	$\sigma_3$
4	1,0	-0,96	+6,53	+17,6	$\sigma_4$
5	1,0	+2,54	+6,53	-4,33	$\sigma_5$
6	1,0	+6,04	+6,53	-26,26	$\sigma_6$
7	1,0	+7,54	+6,0	-32,56	$\sigma_7$
8	1,0	+7,54	+2,0	-10,85	$\sigma_8$
9	1,0	-7,49	-12,03	+58,04	$\sigma_9$
10	1,0	-7,49	-7,53	-31,63	$\sigma_{10}$
11	1,0	-4,46	-6,53	-39,53	$\sigma_{11}$
12	1,0	-0,96	-6,53	-17,6	$\sigma_{12}$
13	1,0	+2,54	-6,53	+4,33	$\sigma_{13}$
14	1,0	+6,04	-6,53	+26,26	$\sigma_{14}$
15	1,0	+7,54	-6,00	+32,56	$\sigma_{15}$
16	1,0	+7,54	-2,0	+10,85	$\sigma_{16}$

бы все измеренные напряжения были абсолютно точными, то, решая любые четыре из этих уравнений, мы получили бы одни и те же значения для  $\sigma_0, \sigma_x, \sigma_y$  и  $\sigma_{\omega}$ , другими словами, одна и та же система кор-

ней удовлетворяла бы всем уравнениям. Но так как каждое измерение содержит некоторую погрешность, то невозможно точно удовлетворить всем 16 уравнениям одними и теми же значениями  $\sigma_0, \sigma_x, \sigma_y$  и  $\sigma_\omega$ . Все наши измерения заслуживают одинакового доверия, поэтому корни уравнения должны быть выбраны так, чтобы возможно лучше согласовать все измерения. Этому условию лучше всего удовлетворяет решение уравнений по способу наименьших квадратов, который заключается в следующем.

Подставим в уравнения табл. 16 вместо неизвестных

$$\frac{N}{F}, \frac{M_x}{J_x}, \frac{M_y}{J_y} \text{ и } \frac{B_\omega}{J_\omega}$$

какие-либо четыре величины  $u, v, w$  и  $z$ . Всем уравнениям эти величины конечно не удовлетворят, и правые части этих уравнений примут вид:

$$\sigma_1 + \delta_1, \sigma_2 + \delta_2, \dots, \sigma_{15} + \delta_{15}, \sigma_{16} + \delta_{16},$$

где  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{15}$  и  $\delta_{16}$  — числа, выражающие величину ошибки (величину „отклонения“).

Таким образом для произвольного прибора номера  $i$  получим уравнение вида:

$$u + y_i v + x_i w + \omega_i z = \sigma_i + \delta_i; \quad (74)$$

например, для прибора № 3 это уравнение напишется так:

$$1 \cdot u - 4,46v + 6,53w + 39,53z = \sigma_3 + \delta_3 \quad (75)$$

и таких уравнений будет 16 в соответствии с числом измерительных приборов.

Из уравнения (74) находим ошибку  $\delta_i$ :

$$\delta_i = u + y_i v + x_i w + \omega_i z - \sigma_i \quad (76)$$

и квадрат этой ошибки:

$$\delta_i^2 = (u + y_i v + x_i w + \omega_i z - \sigma_i)^2. \quad (77)$$

Определим теперь  $u, v, w$  и  $z$  так, чтобы сумма квадратов ошибок  $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_{15}^2 + \delta_{16}^2$  была наименьшей, т. е. чтобы функция четырех независимых переменных  $u, v, w$  и  $z$ , представляющая сумму вида:

$$S = \sum_{i=1}^{i=16} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{i=16} (u + y_i v + x_i w + \omega_i z - \sigma_i)^2, \quad (78)$$

имела минимум.

Для этого, как известно из дифференциального исчисления, мы должны взять от этой функции  $S$  частные производные по каждому переменному, приравнять их нулю и из четырех полученных таким образом уравнений найти  $u, v, w$  и  $z$ , удовлетворяющие поставленному условию.

Выполняя дифференцирование, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial S}{\partial u} &= \sum_{i=1}^{i=16} (u + y_i v + x_i w + \omega_i z - \sigma_i) = 0; \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial S}{\partial v} &= \sum_{i=1}^{i=16} (u + y_i v + x_i w + \omega_i z - \sigma_i) y_i = 0; \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial S}{\partial w} &= \sum_{i=1}^{i=16} (u + y_i v + x_i w + \omega_i z - \sigma_i) x_i = 0; \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial S}{\partial z} &= \sum_{i=1}^{i=16} (u + y_i v + x_i w + \omega_i z - \sigma_i) \omega_i = 0. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Решая эти четыре уравнения, получаем значения  $u, v, w$  и  $z$ .

Нетрудно заметить, что в нашем случае эта система распадается на две независимые системы с двумя неизвестными в каждой.

Из табл. 16 усматриваем, что для нашего образца

$$\sum_{i=1}^{i=16} x_i = \sum_{i=1}^{i=16} \omega_i = \sum_{i=1}^{i=16} y_i x_i = \sum_{i=1}^{i=16} y_i \omega_i = 0 \quad (80)$$

(это происходит вследствие симметричности профиля и симметричного расположения приборов).

Поэтому уравнения (79) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=16} (u + y_i v - \sigma_i) &= 0; \\ \sum_{i=1}^{i=16} y_i (u + y_i v - \sigma_i) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=16} x_i (x_i w + \omega_i z - \sigma_i) &= 0; \\ \sum_{i=1}^{i=16} \omega_i (x_i w + \omega_i z - \sigma_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

В табл. 17 эти уравнения приведены в числовом выражении для трех эксцентриситетов приложения нагрузки.

В табл. 17 не помещены результаты обработки испытания для  $e = 0$ . Для этого случая задача сводится к решению системы только двух уравнений с двумя неизвестными, поскольку отсутствуют компоненты  $\sigma_y$  и  $\sigma_\omega$ . Собственно, этот случай  $e = 0$  приводится только для полноты картины, по существу же поставленного вопроса он, конечно, ничего дать не может. Результаты обработки экспериментальных данных помещены в табл. 18 (стр. 82).

## Окончательные уравнения для определения параметров четырех компонентов напряжений

№ уравнений	$\frac{N}{F} = u$	$\frac{M_x}{J_x} = v$	Правые части уравнений при величине эксцентриситета $e$ в см		
			2,29	4,66	6,82
1	16,00	6,52	259	174	149
2	6,52	579,28	14 393,91	10 607,53	7 978,45
	$\frac{M_y}{J_y} = w$	$\frac{B_\omega}{J_\omega} = z$			
3	823,98	-1 007,6	-2064,31	-2 541,16	-2 531,42
4	-1 007,6	16 255,39	29 619,01	37 255,51	38 584,20

## 7. Определение теоретических напряжений и сравнение их с экспериментальными

Поперечное сечение образца со всеми размерами дано на фиг. 64. Геометрические характеристики сечения следующие:

$$F = 30,95 \text{ см}^2;$$

$$J_x = 1 090 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 1 396,3 \text{ см}^4.$$

Координата центра изгиба, отсчитываемая от оси горизонтального листа:

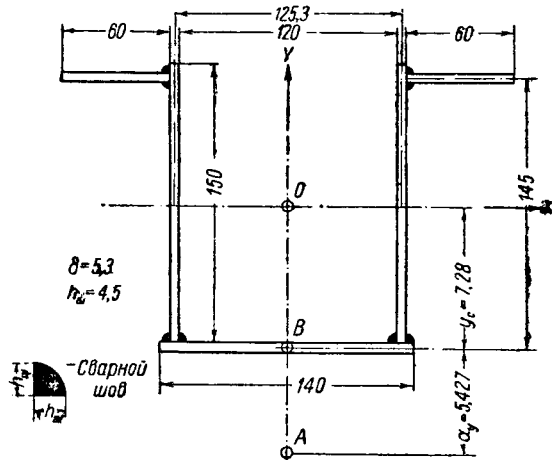
$$\alpha_y = 5,427 \text{ см.}$$

Секториальный момент инерции  $J_\omega = 29 013 \text{ см}^6$ .

Все указанные характеристики подсчитаны с учетом площади сварных швов. Линейные и секториальные координаты ( $x$ ,  $y$  и  $\omega$ ) точек сечения, в которых были установлены тензометры, даны в табл. 16

(как коэффициенты при  $\frac{M_x}{J_x}$ ,  $\frac{M_y}{J_y}$  и  $\frac{B_\omega}{J_\omega}$ ).

Для сравнения с данными, полученными из эксперимента, вычислены нормальные напряжения от изгиба в вертикальной плоскости  $\sigma_x$  и нормальные напряжения от кручения  $\sigma_\omega$ , а также и сумма их для тех точек сечения, в которых были установлены тензометры.



Фиг. 64.



Результаты разложения экспериментальных нормальных напряжений на компоненты  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_\omega$  для балки П-образного сечения

№ прибора	$e = 0$				$e = 2,29$				$e = 4,66$				$e = 6,82$									
	компоненты		σ после обработки	σ <sub>0</sub>	компоненты		σ <sub>0</sub>	σ <sub>x</sub>	σ <sub>y</sub>	σ <sub>ω</sub>	компоненты		σ <sub>0</sub>	σ <sub>x</sub>	σ <sub>y</sub>	σ <sub>ω</sub>	компоненты		σ <sub>0</sub>	σ <sub>x</sub>	σ <sub>y</sub>	σ <sub>ω</sub>
	σ <sub>0</sub>	σ <sub>x</sub>			σ <sub>0</sub>	σ <sub>x</sub>					σ <sub>y</sub>	σ <sub>ω</sub>					σ <sub>0</sub>	σ <sub>x</sub>				
1	11,2	284,2	273,0	6,1	185,6	3,6	104,7	287,8	3,4	136,8	3,7	131,9	269,0	3,7	102,8	2,2	137,1	238,4				
2	11,2	284,2	273,0	6,1	185,6	2,3	57,0	124,8	3,4	136,8	2,3	71,9	63,8	3,7	102,8	1,4	74,7	25,8				
3	11,2	169,2	157,0	6,1	110,5	2,0	71,3	35,1	3,4	81,5	2,0	89,9	9,8	3,7	61,2	1,2	93,4	34,7				
4	11,2	36,4	25,2	6,1	23,8	2,0	31,7	12,0	3,4	17,5	2,0	40,0	23,9	3,7	13,2	1,2	41,6	30,9				
5	11,2	96,4	107,6	6,1	62,9	2,0	7,8	59,2	3,4	46,4	2,0	9,8	38,0	3,7	34,9	1,2	10,2	27,2				
6	11,2	229,2	240,4	6,1	149,7	2,0	47,4	106,4	3,4	110,4	2,0	59,7	32,1	3,7	82,9	1,2	62,0	23,4				
7	11,2	286,1	297,3	6,1	186,8	1,8	58,7	132,4	3,4	137,8	1,8	74,0	65,4	3,7	103,5	1,1	76,9	29,2				
8	11,2	286,1	297,3	6,1	186,8	0,6	19,6	172,7	3,4	137,8	0,6	24,7	115,9	3,7	103,5	0,4	25,6	81,2				
9	11,2	284,2	273,0	6,1	185,6	3,6	104,7	71,2	3,4	136,8	3,7	131,9	2,2	3,7	102,8	2,2	137,1	40,2				
10	11,2	284,2	273,0	6,1	185,6	2,3	57,0	234,2	3,4	136,8	2,3	71,9	203,0	3,7	102,8	1,4	74,7	172,4				
11	11,2	169,2	157,0	6,1	110,5	2,0	71,3	173,7	3,4	81,5	2,0	89,9	166,0	3,7	61,2	1,2	93,4	149,7				
12	11,2	36,4	25,2	6,1	23,8	2,0	31,7	47,4	3,4	17,5	2,0	40,0	52,1	3,7	13,2	1,2	41,6	49,9				
13	11,2	96,4	107,6	6,1	62,9	2,0	7,8	78,8	3,4	46,4	2,0	9,8	61,6	3,7	34,9	1,2	10,2	50,0				
14	11,2	229,2	240,4	6,1	149,7	2,0	47,4	205,2	3,4	110,4	2,0	59,7	175,5	3,7	82,9	1,2	62,0	149,8				
15	11,2	286,1	297,3	6,1	186,8	1,8	58,7	253,4	3,4	137,8	1,8	74,0	217,0	3,7	103,5	1,1	76,9	185,2				
16	11,2	286,1	297,3	6,1	186,8	0,6	19,6	213,1	3,4	137,8	0,6	24,7	166,5	3,7	103,5	0,4	25,6	133,2				

Нормальные напряжения от изгиба в вертикальной плоскости  $\sigma_x$  подсчитывались по формуле:

$$\sigma_x = \frac{Pz}{2J_x} y, \quad (83)$$

где  $P$  — равнодействующая нагрузок на обеих платформах, равная (табл. 14):

для

$$\begin{aligned} e = 0 & \text{ см} & P = 900 \text{ кг}, \\ e = 2,29 & \text{ „} & P = 590 \text{ „} \\ e = 4,66 & \text{ „} & P = 435 \text{ „} \\ e = 6,82 & \text{ „} & P = 330 \text{ „} \end{aligned}$$

$z$  — расстояние сечения, в котором были расположены приборы, от опоры образца, равное 101,25 см.

Нормальные напряжения от кручения  $\sigma_\omega$  подсчитаны по формуле (73):

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega \omega}{J_\omega},$$

где  $\omega$  — секториальные координаты точек, в которых были расположены тензометры;

$B_\omega$  — изгибно-крутящий бимомент, вычисленный по формуле (гл. III, табл. 31):

$$B_\omega = \frac{Pe}{2k} \cdot \frac{\text{sh } kz}{\text{ch } \frac{kl}{2}}. \quad (84)$$

Здесь  $P$  имеет то же значение, которое указано выше;

$e$  — эксцентриситет приложения нагрузки;

$k = \sqrt{\frac{GJ_a}{EJ_\omega}}$  — упругая изгибно-крутильная характеристика образца.

Для сравнения с результатами эксперимента в табл. 19 (стр. 84) даны все вычисленные напряжения как от изгиба, так и от кручения, а также их сумма.

На фиг. 65 дан график напряжений по сечению образца для центрального нагружения и трех случаев эксцентричного приложения нагрузок. На этом графике нанесены: 1) результаты, полученные из эксперимента; 2) результаты, полученные после обработки экспериментальных данных по способу наименьших квадратов, и 3) напряжения, полученные теоретическим путем.

## 8. Заключение

Сравнение результатов проведенного нами эксперимента с теоретическими данными (табл. 18—19 и графики на фиг. 65) совершенно определенно свидетельствует о том, что при совместном действии изгиба и кручения нормальные напряжения в поперечных сечениях металлических балок распределяются по закону секториальных площадей.

Теоретические нормальные напряжения от изгиба  $\sigma_x$  и от кручения  $\sigma_\omega$  для балки П-образного сечения в местах установки приборов при испытании

№ прибор	$e = 2,29$			$e = 4,66$			$e = 6,82$		
	$\sigma_x$	$\sigma_\omega$	$\sigma = \sigma_x + \sigma_\omega$	$\sigma_x$	$\sigma_\omega$	$\sigma = \sigma_x + \sigma_\omega$	$\sigma_x$	$\sigma_\omega$	$\sigma = \sigma_x + \sigma_\omega$
1	-313,1	-205,2	-287,6	-151,3	-123,6	-274,9	-114,8	-137,2	-252,0
2	-313,1	-205,2	-160,3	-151,3	67,4	83,9	-114,8	74,8	40,0
3	-186,4	-122,2	66,1	90,1	84,2	5,9	68,4	93,5	25,1
4	-40,1	26,3	1,3	19,4	37,5	18,1	14,7	41,6	26,9
5	+106,2	+69,6	+63,5	+51,3	9,2	+42,1	+38,9	10,2	+28,7
6	+252,5	+165,5	+128,2	+122,0	55,9	+66,1	+92,6	62,1	+30,5
7	+315,2	+206,6	+160,4	+152,3	69,3	+83,0	+115,6	77,0	+38,6
8	+315,2	+206,6	+191,2	+152,3	23,1	+129,2	+115,6	25,7	+89,9
9	-313,1	-205,2	-122,8	-151,3	123,6	-27,3	-114,8	137,2	22,4
10	-313,1	-205,2	-250,1	-151,3	67,4	-218,7	-114,8	74,8	-189,6
11	-186,4	-122,2	-178,3	90,1	84,2	-174,3	68,4	93,5	-161,9
12	-40,1	26,3	51,3	19,4	37,5	56,9	14,7	41,6	56,3
13	+106,2	+69,6	+75,7	+51,3	9,2	+60,5	+38,9	10,2	+49,1
14	+252,2	+165,5	+202,8	+122,0	55,9	+177,9	+92,6	62,1	+154,7
15	+315,2	+206,6	+252,8	+152,3	69,3	+221,6	+115,6	77,0	+192,6
16	+315,2	+206,6	+222,0	+152,3	23,1	+175,4	+115,6	25,7	+141,3

Имея кроме того в виду достаточно хорошие результаты экспериментов, проведенных нами с той же целью в прошлом году, и результаты обработки экспериментов Баха (см. ниже § 12), мы считаем, что выполненная нами проверка закона секториальных площадей дала положительный ответ. Предложенную проф. В. З. Власовым четырехчленную формулу распределения нормальных напряжений при совместном действии изгиба и кручения можно теперь же рекомендовать для практического использования при проектировании металлических конструкций и для обработки подобного рода экспериментов.

## **§ 11. О МИНИМАЛЬНОМ КОЛИЧЕСТВЕ ПРИБОРОВ, НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ ОСНОВНЫХ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ, И О МЕСТАХ ИХ РАСПОЛОЖЕНИЯ**

Акад. Патон<sup>1</sup> в результате исследования материалов обработки многочисленных испытаний на изгиб составных двутавровых балок пришел к выводу, что можно ограничиться только четырьмя приборами в сечении, измеряющими напряжения (вернее деформации) в крайних фибрах. Это относится и к тем случаям, когда требуется определить не только основные, но и дополнительные напряжения. Измеренные напряжения можно разложить на четыре составляющих (основных и дополнительных) напряжения, соответствующие четырем видам работы стержня.

Так как в дальнейшем нам предстояло еще производить испытания над образцами П-образного сечения, подобные только что описанным (но с несколько иными целями), то мы решили произвести некоторые дополнительные исследования результатов обработки этого эксперимента подобно тому, как сделал акад. Патон для двутавровых профилей. Целью этих исследований было установить минимальное количество приборов, необходимых для выявления основных и дополнительных нормальных напряжений при совместном действии изгиба и кручения П-образного сечения, а также места расположения этих приборов.

При испытании вышеуказанного образца, как известно из предыдущего, мы ставили по 16 тензометров в каждом сечении. Схема установки и нумерация приборов были представлены на фиг. 62.

Исходя из показаний этих 16 тензометров и выбирая из них различные комбинации по четыре показания для симметрично расположенных точек сечения, мы получили основные составляющие нормальных напряжений — от изгиба в вертикальной плоскости и от кручения. Затем, пользуясь законом секториальных площадей, подсчитывали величины составляющих нормальных напряжений и их сумму во всех остальных точках, где были расположены остальные 12 приборов. Полученные напряжения мы сравнивали как с непосредственными показаниями тензометров, так и с результатами, которые получились после обработки по всем 16 приборам. Всего было проделано таких обработок для

---

<sup>1</sup> Патон, Клейх и Лобзенко, Распределение напряжений в элементах пролетных строений, Сборник Научно-технического комитета Народного комиссариата путей сообщения, вып. № 60, 1927.

восьми групп по четыре прибора в каждой; при этом выбирались следующие точки сечения:

1) точки	1, 9, 7, 15,	5) точки	2, 10, 7, 15,
2) "	1, 9, 6, 14,	6) "	3, 11, 7, 15,
3) "	1, 9, 8, 16,	7) "	3, 11, 6, 14,
4) "	2, 10, 5, 13,	8) "	3, 11, 8, 16.

Результаты этой обработки приведены в табл. 20.

Из этой таблицы можно усмотреть следующее:

1) Расхождение между результатами обработки по четырем приборам и результатами обработки по 16 приборам такого порядка, что обработка по четырем приборам вполне приемлема.

2) Расхождения получаются большие в тех местах, где показания самих тензометров меньше по абсолютной величине, что вполне понятно, так как точность показаний тензометров при малых деформациях меньше.

3) Приборы выгодно ставить в местах, наиболее удаленных от нейтральной оси, и там, где ординаты эпюры секториальных площадей наибольшие; так например, расположение приборов в точках 1, 9, 7 и 15 дает результат, почти не отличающийся от полученного после обработки по 16 приборам.

Если при эксперименте для исключения погрешностей в симметрии балки каждый эксцентриситет повторять дважды (справа и слева от оси симметрии) и при обработке материалов брать среднее арифметическое из показаний приборов для двух симметричных эксцентриситетов, то этим самым исключается влияние горизонтальных составляющих прогиба. Поэтому при разложении напряжений на составляющие не требуется принимать во внимание составляющие напряжения от работы стержня на изгиб в горизонтальной плоскости. Можно далее пренебречь незначительной величиной осевых составляющих, возникающих главным образом из-за конструктивных недостатков в устройстве опор, тогда обработка сведется к разложению измеренных напряжений только на два компонента: напряжения от изгиба в вертикальной плоскости и напряжения от кручения. Это, конечно, в значительной мере упростит обработку материалов экспериментов.

Если при испытании симметричного профиля мы будем пользоваться четырьмя симметрично расположенными приборами, но горизонтальный прогиб не будет исключен, т. е. не будет браться среднее арифметическое из соответствующих показаний тензометров для эксцентриситета вправо и влево, то при разложении напряжений на четыре составляющих напряжения, соответствующих четырем видам работы стержня, мы придем к системе четырех уравнений с четырьмя неизвестными величинами, пропорциональными соответствующим составляющим напряжения, а именно:

$$\frac{N}{F}, \quad \frac{M_x}{J_x}, \quad \frac{M_y}{J_y} \quad \text{и} \quad \frac{B_\omega}{J_\omega}.$$

Коэффициентами при этих неизвестных будут соответственно линейные и секториальные координаты точек, в которых расположены приборы, а именно: 1,  $y$ ,  $x$  и  $\omega$  (ось  $Y$  является осью симметрии). Свободными членами этих уравнений будут напряжения, полученные экспериментальным путем.

Вследствие симметричности расположения приборов эта система четырех уравнений распадается на две независимые системы с неиз-

## Результаты обработки испытаний П-образного образца при четырех приборах (различные комбинации)

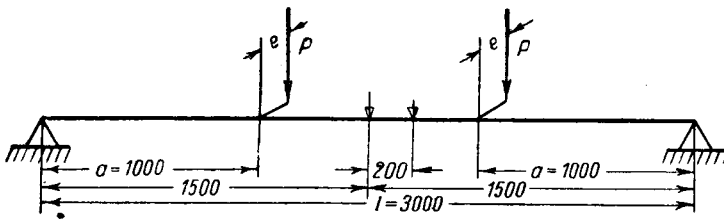
σ экспериментальное	Обработка по 16 приборам			По четырем приборам № 1, 9, 7 и 15			По четырем приборам № 1, 9, 6, 14			По четырем приборам № 1, 9, 8, 16			По четырем приборам № 2, 10, 5, 13			№ приборов
	σ <sub>x</sub>	σ <sub>ω</sub>	σ <sub>x</sub> + σ <sub>ω</sub>	σ <sub>x</sub>	σ <sub>ω</sub>	σ <sub>x</sub> + σ <sub>ω</sub>	σ <sub>x</sub>	σ <sub>ω</sub>	σ <sub>x</sub> + σ <sub>ω</sub>	σ <sub>x</sub>	σ <sub>ω</sub>	σ <sub>x</sub> + σ <sub>ω</sub>	σ <sub>x</sub>	σ <sub>ω</sub>	σ <sub>x</sub> + σ <sub>ω</sub>	
— 221	— 103	— 138	— 241	— 104	— 135	— 239	— 102	— 131	— 233	— 99	— 126	— 225	— 97	— 149	— 246	1
— 15	— 103	75	— 28	— 104	73	— 31	— 102	71	— 31	— 99	68	— 31	— 97	81	— 16	2
25	— 61	94	33	— 62	92	30	— 61	89	28	— 59	85	26	— 58	102	44	3
26	— 13	42	29	— 13	41	28	— 13	40	27	— 13	38	25	— 12	45	33	4
20	35	— 10	25	— 35	— 10	25	— 34	— 10	24	— 33	— 9	24	— 33	— 11	22	5
18	83	— 62	21	— 83	— 61	22	— 82	— 59	23	— 80	— 57	23	— 78	— 67	11	6
19	104	— 77	27	— 104	— 76	28	— 103	— 73	30	— 100	— 70	30	— 98	— 84	14	7
75	104	— 26	78	— 104	25	79	— 103	— 24	79	— 100	— 23	77	— 98	— 28	70	8
29	— 103	138	35	— 104	135	31	— 102	131	29	— 99	126	27	— 97	149	52	9
— 176	— 103	— 75	— 178	— 104	— 73	— 177	— 102	— 71	— 173	— 99	— 68	— 167	— 97	— 81	— 178	10
— 154	— 61	— 94	— 155	— 62	— 92	— 154	— 61	— 89	— 150	— 59	— 85	— 144	— 58	— 102	— 160	11
— 50	— 13	— 42	— 55	— 13	— 41	— 54	— 13	— 40	— 53	— 13	— 38	— 51	— 12	— 45	— 57	12
57	35	10	45	— 35	10	45	— 34	10	44	— 33	9	42	— 33	11	44	13
161	83	62	145	— 83	61	144	— 82	59	141	— 80	57	137	— 78	67	145	14
205	104	77	181	— 104	76	180	— 103	73	176	— 100	70	170	— 98	84	182	15
130	104	26	130	— 104	25	129	— 103	24	127	— 100	23	123	— 98	28	126	16

α экспериментальное	По четырем приборам № 2, 10, 7, 15			По четырем приборам № 3, 11, 7 и 15			По четырем приборам № 3, 11, 6 и 14			По четырем приборам № 3, 11, 8 и 16			№ прибора
	$\sigma_x$	$\sigma_\omega$	$\sigma_x + \sigma_\omega$	$\sigma_x$	$\sigma_\omega$	$\sigma_x + \sigma_\omega$	$\sigma_x$	$\sigma_\omega$	$\sigma_x + \sigma_\omega$	$\sigma_x$	$\sigma_\omega$	$\sigma_x + \sigma_\omega$	
— 221	— 103	— 157	— 260	— 110	— 145	— 255	— 110	— 139	— 249	— 103	— 132	— 235	1
— 15	— 103	85	— 18	— 110	79	— 31	— 110	76	— 34	— 103	72	— 31	2
25	— 61	107	46	— 66	99	33	— 65	95	30	— 61	90	29	3
26	— 13	48	35	— 14	44	30	— 14	42	28	— 13	40	27	4
20	35	— 12	23	37	— 11	26	37	— 10	27	35	— 10	25	5
18	83	— 71	12	89	— 65	24	89	— 63	26	83	— 60	23	6
19	104	— 88	16	111	— 81	30	111	— 78	33	104	— 74	30	7
75	104	— 29	75	111	— 27	84	111	— 26	85	104	— 25	79	8
29	— 103	157	54	— 110	145	35	— 110	139	29	— 103	132	29	9
— 176	— 103	— 85	— 188	— 110	— 79	— 189	— 110	— 76	— 186	— 103	— 72	— 175	10
— 154	— 61	— 107	— 168	— 66	— 99	— 165	— 65	— 95	— 160	— 61	— 90	— 154	11
— 50	— 13	— 48	— 61	— 14	— 44	— 58	— 14	— 42	— 56	— 13	— 40	— 53	12
57	35	12	47	37	11	48	37	10	47	35	10	45	13
161	83	71	154	89	65	154	89	63	152	83	60	143	14
205	104	88	192	111	81	192	111	78*	189	104	74	178	15
130	104	29	133	111	27	138	111	26	137	104	25	129	16

вестными:  $\frac{N}{F}$  и  $\frac{M_x}{J_x}$  в одной системе и  $\frac{M_y}{J_y}$  и  $\frac{B_\omega}{J_\omega}$  в другой. Коэффициентами при неизвестных во второй системе являются  $x$  и  $\omega$ , эпюры которых антисимметричны. Может случиться, что приборы будут расположены в точках, координаты которых будут взаимно пропорциональны; например,  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$  для приборов, расположенных слева от оси симметрии; очевидно, что такое отношение координат будет и для приборов, расположенных справа. Тогда определитель второй системы уравнений обратится в нуль или же будет близок к нулю, если приборы расположены в местах, довольно близких к этим точкам. Это значит, что компоненты от горизонтального прогиба и кручения либо не смогут быть определены совсем, либо будут определены весьма неточно. Указанное обстоятельство должно быть учтено при выборе мест для расположения приборов. Первая система уравнений, из которой будут определяться неизвестные  $\frac{N}{F}$  и  $\frac{M_x}{J_x}$ , по характеру своих коэффициентов ( $1$  и  $y$ ) не имеет указанной особенности.

## § 12. ОБРАБОТКА ПО ЧЕТЫРЕХЧЛЕННОЙ ФОРМУЛЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ СО ШВЕЛЛЕРНОЙ БАЛКОЙ, ПРОВЕДЕННЫХ БАХОМ В 1909—1910 гг.<sup>[5]</sup>

Бах испытывал на изгиб в вертикальной испытательной машине швеллерную балку № 30 ( $J_x = 7\,975 \text{ см}^4$ ), длиной 3 м; нагрузка прилагалась по схеме, указанной на фиг. 66. Фибровые деформации изме-



Фиг. 66.

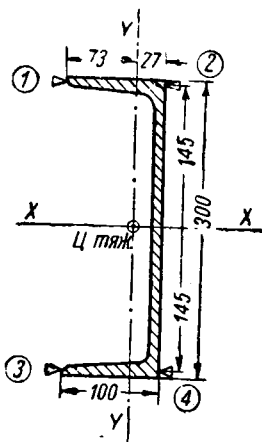
рялись на базе 200 мм по одну сторону от середины пролета в четырех точках сечения 1, 2, 3 и 4 (фиг. 67), расположенных на расстоянии 145 мм от главной горизонтальной оси. Измерения производились с помощью зеркальных тензометров. Плоскость действия нагрузки и опорных реакций проходила параллельно стенке, в одном случае через центр самой стенки (испытание I, фиг. 68), а во втором через центр тяжести всего сечения (испытание II, фиг. 69). Нормальные напряжения в направлении измерявшихся фибровых деформаций при нагрузке  $P = 250/1\,750 \text{ кг}$  и модуле продольной упругости  $E = 2\,100\,000 \text{ кг/см}^2$  получились следующие:

Испытание I	Испытание II
$\sigma_1 = -45 \text{ кг/см}^2$	$\sigma_1 = +104 \text{ кг/см}^2$
$\sigma_2 = -417 \text{ „}$	$\sigma_2 = -518 \text{ „}$
$\sigma_3 = +113 \text{ „}$	$\sigma_3 = -16 \text{ „}$
$\sigma_4 = +370 \text{ „}$	$\sigma_4 = +456 \text{ „}$

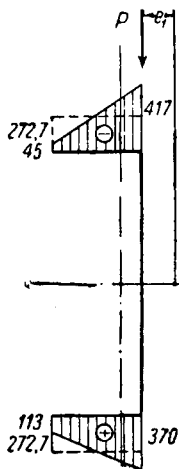


Соответствующие эпюры экспериментальных напряжений изображены на фиг. 68 и 69.

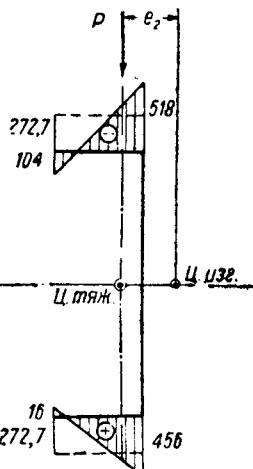
Совершенно так же, как мы это сделали при обработке материалов проведенных нами экспериментов (см. выше § 10, п. 7), для разложе-



Фиг. 67.



Фиг. 68.



Фиг. 69.

ния полученных напряжений на компоненты составим систему четырех линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{N}{F} - \frac{M_x}{J_x} 14,5 + \frac{M_y}{J_y} 7,3 + \frac{B_\omega}{J_\omega} 86,34 &= \sigma_1; \\ \frac{N}{F} - \frac{M_x}{J_x} 14,5 - \frac{M_y}{J_y} 2,7 - \frac{B_\omega}{J_\omega} 45,61 &= \sigma_2; \\ \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} 14,5 + \frac{M_y}{J_y} 7,3 - \frac{B_\omega}{J_\omega} 86,34 &= \sigma_3; \\ \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} 14,5 - \frac{M_y}{J_y} 2,7 + \frac{B_\omega}{J_\omega} 45,61 &= \sigma_4, \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

где коэффициенты при  $\frac{M_x}{J_x}$  и  $\frac{M_y}{J_y}$  — координаты точек установки тензодатчиков по отношению к главным осям сечения (фиг. 67), а коэффициенты при  $\frac{B_\omega}{J_\omega}$  — секториальные координаты (секториальные площади) тех же точек. Указания о вычислении этих площадей даны в п. 3, § 23.

Решая систему (85), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{N}{F} &= \frac{2,7(\sigma_1 + \sigma_3) + 7,3(\sigma_2 + \sigma_4)}{20}; \\ \frac{M_y}{J_y} &= \frac{(\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_2 + \sigma_4)}{20}; \\ \frac{M_x}{J_x} &= \frac{-91,22(\sigma_1 - \sigma_3) - 172,68(\sigma_2 - \sigma_4)}{7\,653,1}; \\ \frac{B_\omega}{J_\omega} &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_2 - \sigma_4)}{263,9}. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Подставив в формулу (86) значения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  и  $\sigma_4$  и умножив найденные неизвестные на соответствующие координаты, получим искомые компоненты экспериментальных напряжений.

Результаты вычислений представлены в табл. 21.

Таблица 21

**Экспериментальные нормальные напряжения в швеллерной балке по опытам Баха**

Наименование точек	Компоненты напряжений			
	$\sigma_0$	$\sigma_y$	$\sigma_x$	$\sigma_w$
Испытание I				
1	-7,97	+41,9	-282,8	+205,7
2	-7,97	-15,5	-282,8	-108,7
3	-7,97	+41,9	+282,8	-205,7
4	-7,97	-15,5	+282,8	+108,7
Испытание II				
1	-10,75	+54,75	-297,9	+357,9
2	-10,75	-20,2	-297,9	-189,0
3	-10,75	+54,75	+297,9	-357,9
4	-10,75	-20,2	+297,9	+189,0

Для определения теоретических величин напряжений вычислим дополнительные геометрические характеристики рассматриваемого германского швеллера № 30:

$h = 300$  мм,  $b = 100$  мм,  $d = 10$  мм,  $t = 16$  мм,  $x_0 = 27$  мм:

$$r = t = 16 \text{ мм}, \quad r_1 = \frac{1}{2}r = 8 \text{ мм}, \quad J_x = 7\,975 \text{ см}^4;$$

уклон внутренней грани полок:

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,08.$$

Координата центра изгиба с учетом уклона полок и закруглений,

$$\alpha_x = 3,253 \text{ см.}$$

Секториальные координаты крайних точек профиля будут равны:

$$\omega_1 = 86,344 \text{ см}^2;$$

$$\omega_2 = 45,610 \text{ см}^2.$$

Секториальный момент инерции:

$$J_w = 60\,435,6 \text{ см}^6.$$

Момент инерции при чистом кручении:

$$J_d = 40,552 \text{ см}^4.$$

Отношение модулей упругости при сдвиге и растяжении по данным Баха равно:

$$\frac{G}{E} = \frac{810\,000}{2\,100\,000} = 0,386.$$

В таком случае изгибно-крутильная упругая характеристика  $k$  будет равна:

$$k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}} = 0,01609 \text{ см}^{-1}.$$

Изгибно-крутильный бимомент определяем по формуле (гл. III, табл. 31):

$$\begin{aligned} B_\omega &= \frac{Pe}{k} \cdot \frac{\text{sh } ka}{\text{sh } kl} [\text{sh } k(l-z) + \text{sh } kz] = \\ &= \frac{1\,500e}{k} \cdot \frac{\text{sh } 100k}{\text{sh } 300k} (\text{sh } 140k + \text{sh } 160k). \end{aligned}$$

Для I испытания:

$$e_1 = a_x = 3,25 \text{ см};$$

для II испытания:

$$e_2 = x_0 + a_x - \frac{d}{2} = 2,7 + 3,25 - 0,50 = 5,45 \text{ см}.$$

Таблица 22  
Теоретические нормальные напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_\omega$  в швеллерной балке (по опытам Баха)

Наименование точек	Компоненты напряжений	
	$\sigma_x$	$\sigma_\omega$
Испытание I		
1	- 272,7	+ 201,0
2	- 272,7	- 106,2
3	+ 272,7	- 201,0
4	+ 272,7	+ 106,2
Испытание II		
1	- 272,7	+ 337,0
2	- 272,7	- 178,0
3	+ 272,7	- 337,0
4	+ 272,7	+ 178,0

Подставляя в формулу для  $B_\omega$  величины  $k$  и  $e$ , получаем:

$$B_{\omega(I)} = 130\,282,7 \text{ кгсм}^2;$$

$$B_{\omega(II)} = 218\,474,0 \text{ кгсм}^2.$$

Изгибающий момент для обоих испытаний будет равен:

$$\begin{aligned} M_x &= Pa = 1\,500 \cdot 1\,000 = \\ &= 1\,500\,000 \text{ кгсм}. \end{aligned}$$

Искомые теоретические напряжения от изгиба в вертикальной плоскости и от кручения определяем по формулам:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{J_x} y \quad \text{и} \quad \sigma_\omega = \frac{B_\omega}{J_\omega} \omega.$$

Результаты вычислений представлены в виде табл. 22.

Сравнение компонентов  $\sigma_\omega$  по этим результатам с данными Баха и результатами обработки этих данных Вебером [28] дано в табл. 23.

## Сравнение результатов экспериментов Баха с данными Вебера и Власова

Данные	№ испытаний и точек							
	Испытание I				Испытание II			
	1	2	3	4	1	2	3	4
По Веберу	+ 200	- 123	- 200	+ 123	+ 337	- 207	- 337	+ 207
„ Власову	+ 201,0	- 106,2	- 201,0	+ 106,2	+ 337,0	- 178,0	- 337	+ 178
„ Баху	+ 205,7	- 108,7	- 205,7	+ 108,7	+ 357,9	- 189,0	- 357,9	+ 189,0

Близкое совпадение наших результатов с указанными опытными данными подтверждает правильность обработки подобного рода экспериментов по предложенной проф. Власовым четырехчленной формуле.

### § 13. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПЛАНК И РЕШЕТОК НА ВЕЛИЧИНУ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В П-ОБРАЗНОМ СТЕРЖНЕ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

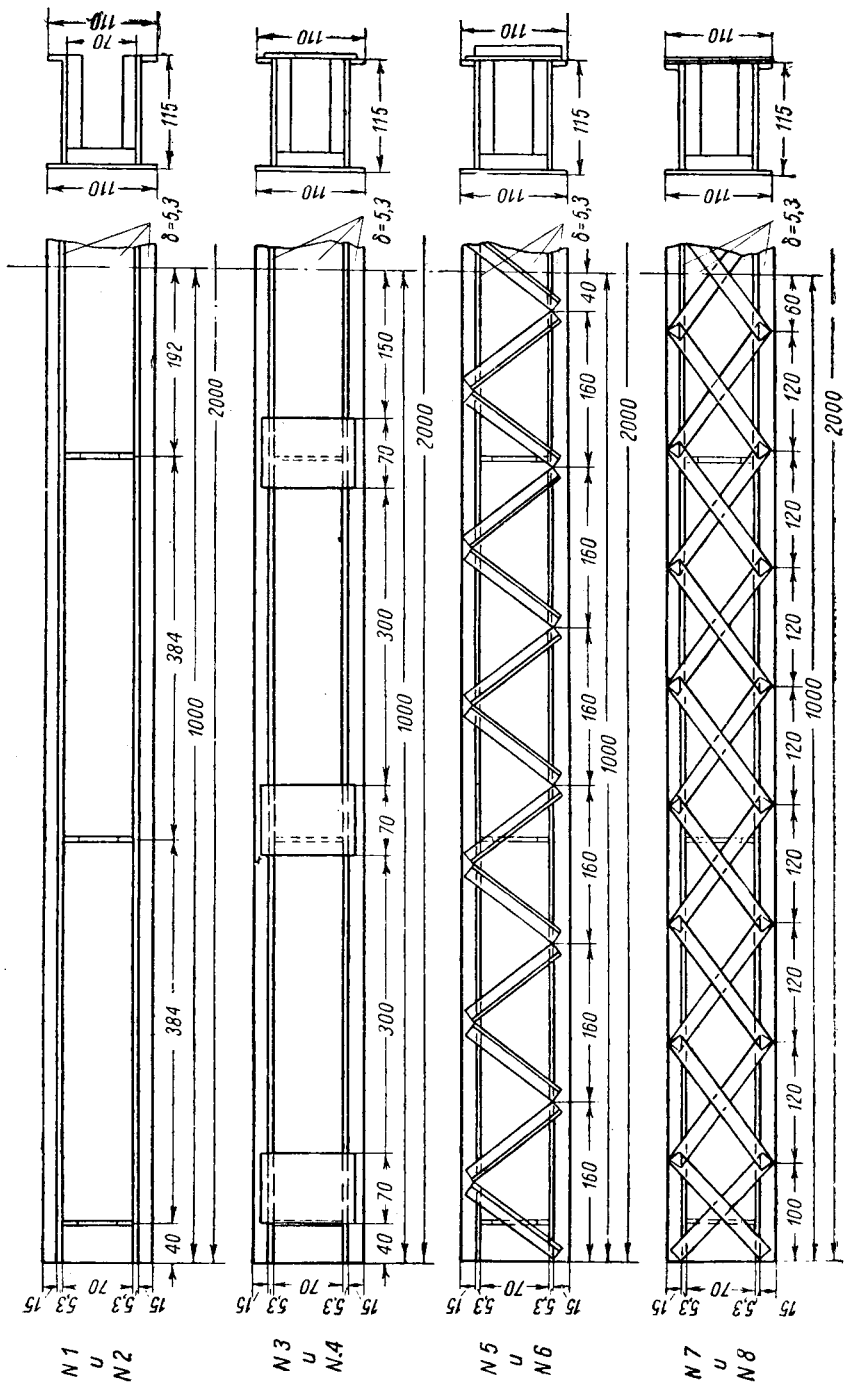
Настоящий эксперимент был проведен нами в 1939 г. в лаборатории строительной механики ЦНИПС и имел своей целью исследовать влияние планок и различных типов решеток на величину нормальных напряжений в стержне, подвергающемся совместному действию изгиба и кручения.

Испытанию было подвергнуто восемь сварных образцов одинакового П-образного сечения, изготовленных в мастерских ЦНИПС из 5,3-мм листовой стали марки 3 (эти образцы были изготовлены старшим научным сотрудником Н. Г. Добудогло для испытания на устойчивость). Длина всех образцов составляла 2 м, расчетный пролет при испытании был 1,92 м. Открытая часть профиля заполнялась по длине планками или решеткой (фиг. 70). Два эталонных образца (№ 1 и 2) были изготовлены без всяких планок или решеток. Два образца (№ 3 и 4) были усилены шестью планками шириной по 70 мм, приваренными на равных расстояниях друг от друга. Два образца (№ 5—6) имели треугольную решетку с панелью в 160 мм; элементы решетки были выполнены из 2-мм листовой стали в форме уголков 20 × 20 мм. Наконец, два последних образца (№ 7 и 8) были заполнены перекрестной решеткой из полос шириной в 2 см и толщиной 2 мм с панелью в 120 мм.

По условиям сварки (во избежание коробления) по длине всех восьми образцов по внутреннему контуру сечения были поставлены однотипные и на одинаковом расстоянии тонкие диафрагмы, сваренные из полосок шириной в 15 мм.

Испытание указанных образцов проводилось на тех же установках и с теми же приспособлениями, как и все предыдущие вышеописанные испытания.

При испытании на совместное действие изгиба и кручения тензометры ставились в двух сечениях по длине каждого образца на расстоянии 70 см от опор, по четыре тензометра в сечении (фиг. 71).



Фиг. 70.

Плоскость действия нагрузки перемещалась по отношению к линии центров изгиба пять раз: одно загрузжение на центральный изгиб ( $e = 0$ ), два эксцентриситета в одну сторону и два в другую; для разных образцов эти эксцентриситеты даны в табл. 24.

Начальные отсчеты приборов брались под нагрузкой, состоящей из собственного веса балки, веса платформ и некоторой (10% максимальной) нагрузки, которая не снималась в процессе всего испытания. Затем балки последовательно нагружались нагрузкой № 1, составлявшей треть максимальной, № 2, составлявшей две трети максимальной, и № 3 — максимальной. Загрузка по этой схеме повторялась дважды. Величины нагрузок, соответственно номерам загрузжений, приведены в табл. 25.

Цикличность загрузжения может быть представлена так:

0; 1; 2; 3; 2; 1; 0; 1;  
2; 3; 2; 1; 0,

что составляет по 13 отсчетов на прибор для каждого эксцентриситета.

Модуль упругости первого рода  $E$  был принят равным  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ; эта величина была проверена старшим научным сотрудником Н. Г. Добудогло испытанием образца, вырезанного из листа стали, на 5-м прессе Амслера.

Модуль упругости 2-го рода непосредственно не

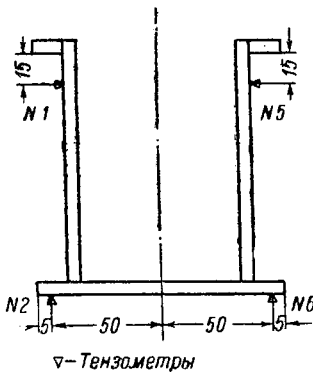
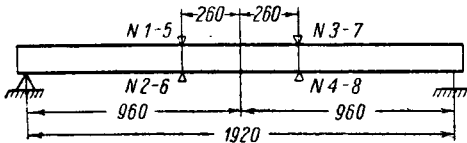
определялся, а из испытаний образцов на чистое кручение была определена сразу жесткость при кручении  $GJ_a$ . (Испытания образцов на чистое кручение проводил Н. Г. Добудогло.) Для тех восьми образцов, которые испытывались нами на совместное действие изгиба и кручения, эти величины  $GJ_a$  даны в табл. 26 (см. табл. 13).

В табл. 27 приводятся величины экспериментальных напряжений, полученные как средние из 56 величин для каждой пары приборов [14 циклов  $\times$  2 (нагрузка справа и слева от линии центров изгиба)  $\times$  2 (сечения I и II)]. Отклонения между отдельными величинами, из которых бралось среднее арифметическое, были небольшие.

Таблица 24

Эксцентриситеты  $e$  (в см) приложения нагрузки (к экспериментальному исследованию влияния планок и решеток)

№ образцов	
1, 2, 3, 4, 5 и 6	7 и 8
+ 2,01	+ 3,91
+ 3,91	+ 6,43
- 2,01	- 3,91
- 3,91	- 6,43



Фиг. 71.

Г — Тензаметры

Таблица 25

Величины нагрузок в кг при экспериментальном исследовании влияния планок и решеток на нормальные напряжения

Эксцентриситет $e$ в см	№ нагрузки		
	1	2	3
0	160/160	320/320	480/480
+ 2,01	175/160	350/320	525/480
- 2,01	160/175	320/350	480/525
+ 3,91	125/105	250/210	375/315
- 3,91	105/125	210/250	315/375
+ 6,43	120/90	240/180	360/270
- 6,43	90/120	180/240	270/360

Примечание. В числителе указаны нагрузки на одну платформу, в знаменателе — на другую.

Таблица 26

Жесткости при чистом кручении  $GJ_d$  (к экспериментальному исследованию влияния планок и решеток)

№ образцов	Тип усиления	Экспериментальные значения $GJ_d$ в кг/см <sup>2</sup>
$\frac{1}{2}$	Без усиления планками и решетками	$\frac{2,15 \cdot 10^6}{2,176 \cdot 10^6}$
$\frac{3}{4}$	Усиленные планками (6 шт. шириной 70 мм каждая)	$\frac{14,532 \cdot 10^6}{13,438 \cdot 10^6}$
$\frac{5}{6}$	Усиленные треугольной решеткой из уголков	$\frac{92,98 \cdot 10^6}{91,21 \cdot 10^6}$
$\frac{7}{8}$	Усиленные перекрестной решеткой из полос	$\frac{176,77 \cdot 10^6}{121,43 \cdot 10^6}$

Измеренные напряжения были разложены на составляющие от изгиба балки в вертикальной плоскости и от кручения способом, изложенным выше (§ 10). Результаты обработки представлены в табл. 28 (стр. 98).

Что касается сравнения экспериментальных напряжений с теоретическими, то в данный момент мы еще не располагаем окончательными формулами, позволяющими учитывать влияние планок и решеток на величину нормальных напряжений. Сравнение же результатов экспериментальных с теоретическими для стержней без планок и решеток (образцы № 1 и 2) нами уже неоднократно производилось в предыдущих экспериментах.

Средние экспериментальные напряжения при исследовании влияния  
планок и решеток

№ образцов	Эксцентриситеты в см	№ приборов (фиг. 71)			
		1	2	5	6
1	0	-133	+147	-133	+147
	2,01	-89	+30	-191	+271
	3,91	-38	-30	-155	+232
2	0	-140	+148	-140	+148
	2,01	-93	+45	-195	+268
	3,91	-34	-24	-159	+236
3	0	-143	+150	-143	+150
	2,01	-131	+130	-163	+183
	3,91	-82	+74	-119	+139
4	0	-143	+144	-143	+144
	2,01	-134	+127	-164	+178
	3,91	-83	+71	-121	+138
5	0	-130	+151	-130	+151
	2,01	-138	+156	-138	+155
	3,91	-93	+107	-94	+106
6	0	-89	+147	-89	+147
	2,01	-119	+161	-123	+154
	3,91	-82	+102	-83	+106
7	0	-117	+147	-117	+147
	3,91	-84	+102	-84	+102
	6,43	-75	+97	-75	+93
8	0	-112	+147	-112	+147
	3,91	-82	+104	-81	+99
	6,43	-74	+94	-74	+91



Экспериментальные напряжения при исследовании влияния планок и решеток после обработки (компоненты от изгиба в вертикальной плоскости и от кручения)

Эксцентриситет $e$ в см	Компонент напряжения	Образец № 1				Образец № 2			
		№ приборов				№ приборов			
		1	2	5	6	1	2	5	6
0	$\sigma_x$	-141	140	-141	140	-145	143	-145	143
2,01	$\sigma_x$	-146	145	-146	145	-151	150	-151	150
	$\sigma_\omega$	79	-97	-79	97	75	-92	-75	92
3,91	$\sigma_x$	-99	98	-99	98	-102	101	-102	101
	$\sigma_\omega$	87	-108	-87	108	88	-109	-88	109

*Продолжение*

Эксцентриситет $e$ в см	Компонент напряжения	Образец № 3				Образец № 4			
		№ приборов				№ приборов			
		1	2	5	6	1	2	5	6
0	$\sigma_x$	-146	147	-146	147	-143	144	-143	144
2,01	$\sigma_x$	-151	152	-151	152	-150	151	-150	151
	$\sigma_\omega$	19	-24	-19	24	18	-23	-18	23
3,91	$\sigma_x$	-103	104	-103	104	-103	104	-103	104
	$\sigma_\omega$	23	-29	-23	29	24	-29	-24	29

*Продолжение*

Эксцентриситет $e$ в см	Компонент напряжения	Образец № 5				Образец № 6			
		№ приборов				№ приборов			
		1	2	5	6	1	2	5	6
0	$\sigma_x$	-140	141	-140	141	-118	117	-118	117
2,01	$\sigma_x$	-146	147	-146	147	-140	139	-140	139
	$\sigma_\omega$	—	—	—	—	—	—	—	—
3,91	$\sigma_x$	-99	100	-99	100	-93	93	-93	93
	$\sigma_\omega$	—	—	—	—	—	—	—	—

Эксцентриситет $e$ в см	Компонент напряжения	Образец № 7				Образец № 8			
		№ приборов				№ приборов			
		1	2	5	6	1	2	5	6
0	$\sigma_x$	— 131	133	— 131	133	— 130	129	— 130	129
3,91	$\sigma_x$	— 91	92	— 91	92	— 92	91	— 92	91
	$\sigma_\omega$	—	—	—	—	—	—	—	—
6,43	$\sigma_x$	— 83	84	— 83	84	— 84	83	— 84	83
	$\sigma_\omega$	—	—	—	—	—	—	—	—

Из рассмотрения табл. 28 можно заключить, что наличие планок и решеток, почти не сказываясь на изменении жесткости стержня на изгиб в вертикальной плоскости, значительно изменяет работу его на кручение. Стержень приближается к типу профилей с замкнутым контуром, причем наличие планок средней частоты уменьшает нормальные напряжения от кручения на 75%, а наличие решеток совершенно препятствует кручению стержня и заставляет его работать только на изгиб в вертикальной плоскости. Собственно, эти результаты можно было бы предугадать уже из рассмотрения изменения жесткости при чистом кручении  $GJ_d$  в зависимости от наличия планок и решеток. Более наглядно результаты этих экспериментов представлены на графиках фиг. 72, где изображены эпюры экспериментальных нормальных напряжений в зависимости от различного заполнения открытой стороны профиля планками или решеткой при одинаковых нагрузке и эксцентриситете. Эпюры образцов с треугольной и перекрестной решетками совершенно ясно свидетельствуют о том, что здесь происходит почти только один изгиб без закручивания.

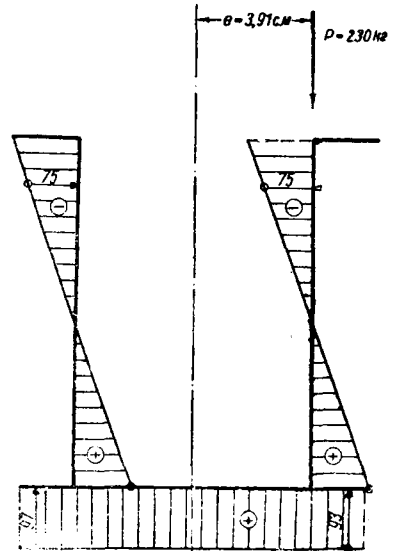
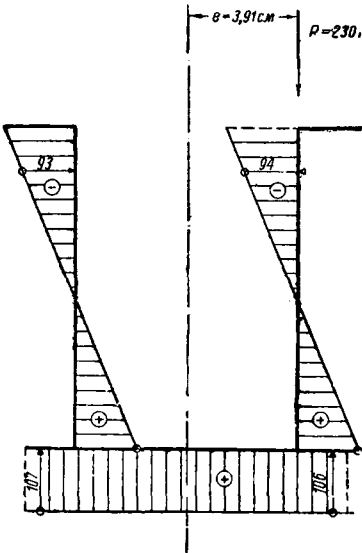
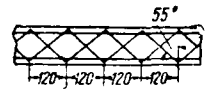
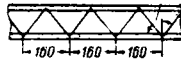
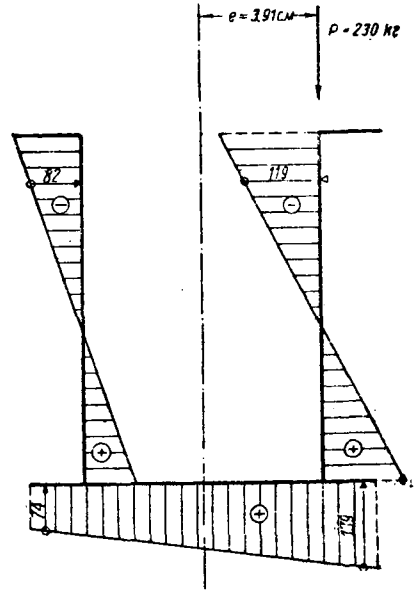
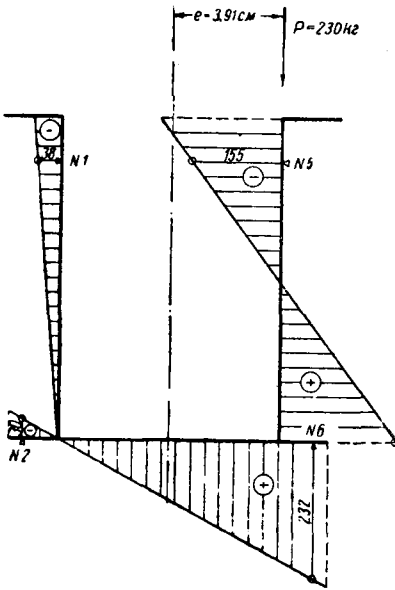
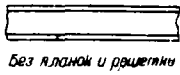
### ГЛАВА III

## ТЕОРИЯ УПРУГОЙ ЛИНИИ УГЛОВ ЗАКРУЧИВАНИЯ И ПРАКТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С ДЕПЛАНАЦИЕЙ СЕЧЕНИЯ

### § 14. ПЯТЬ СТРОК ТЕОРИИ СТЕСНЕННОГО КРУЧЕНИЯ

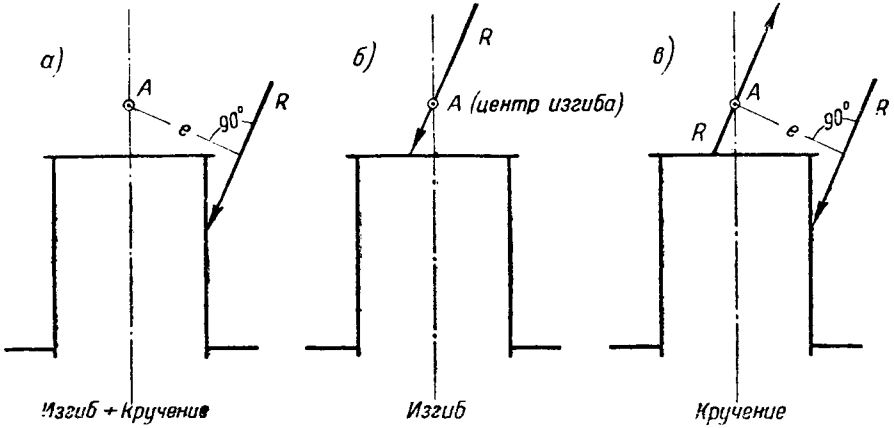
Пусть внешние силы, действующие на тонкостенный стержень произвольного сечения, приводятся для какого-нибудь поперечного сечения его к равнодействующей  $R$ , не проходящей через центр изгиба  $A$  (фиг. 73, *a*). В таком случае, как было указано выше, стержень будет находиться в условиях сложного сопротивления изгибу и кручению.

Силу  $R$  всегда можно заменить такой же силой, проходящей через центр изгиба (фиг. 73, *b*), и парой  $Re$  (фиг. 73, *в*). Под действием первой силы стержень будет испытывать только поперечный изгиб; деформации и напряжения в нем можно определять на основании



Фиг. 72.

общеизвестных уравнений теории изгиба. Пара  $Re$  представляет закручивающую нагрузку, и под действием этой нагрузки стержень будет находиться в условиях только стесненного кручения. Деформации и

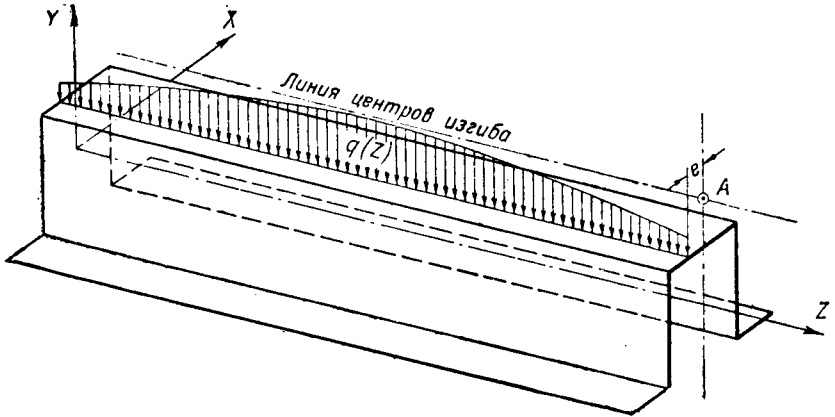


Фиг. 73.

напряжения в нем в этом случае определяются на основании „закона секториальных площадей“, т. е. в основном из уравнения (39) главы II:

$$EJ_{\omega} \theta^{IV} - GJ_{\alpha} \theta'' = m. \tag{1}$$

В дальнейшем это уравнение будем называть дифференциальным уравнением упругой линии углов закручивания  $\theta$  (по аналогии с дифференциальным уравнением упругой линии при изгибе).



Фиг. 74.

В уравнении (1)  $m$ , как известно из предыдущего, есть интенсивность изменения по длине стержня внешних закручивающих моментов;  $m$  измеряется в  $кг$  ( $кг/см \cdot см = кг$ ). Если нагрузка распределена по длине бруса, то  $m$  будет равна произведению интенсивности распределенной нагрузки  $q(z)$  на эксцентриситет ее по отношению к центру изгиба  $e$  (фиг. 74):

$$m = q(z)e \tag{2}$$

(в дальнейшем  $e$  будем называть просто эксцентриситетом).

На участках стержня, непосредственно незагруженных,

$$m = 0. \quad (3)$$

Произведение жесткости  $GJ_d$  на относительный угол закручивания  $\theta'$ , как известно из главы I [формула (3)], равно закручивающему моменту  $M_{кр}$ :

$$GJ_d \theta' = M_{кр}. \quad (4)$$

Продифференцировав это выражение один раз по  $z$ , получим:

$$GJ_d \theta'' = \frac{dM_{кр}}{dz} = m_{кр}. \quad (5)$$

Здесь интенсивность изменения крутящего момента по длине стержня обозначена через  $m_{кр}$ .

Подставив (5) в (1), получим:

$$EJ_\omega \theta^{IV} = m + m_{кр} = m_\omega. \quad (6)$$

Величину  $m_\omega$  будем называть интенсивностью изменения по длине стержня изгибно-крутящих моментов (измеряется в  $\kappa z$ ).

Объединив уравнение (6) с формулами (65) и (68) главы II и добавив к ним обозначения угла закручивания и его первой производной (интенсивности его изменения по длине стержня), получим пять строк теории стесненного кручения, аналогичных известным пяти строкам теории поперечного изгиба.

Кручение		Изгиб	
$EJ_\omega \theta^{IV} = m_\omega$	( $\kappa z$ )	$EJ_x \eta^{IV} = q$	( $\kappa z/\text{см}$ )
$EJ_\omega \theta''' = -M_\omega$	( $\kappa z \text{см}$ )	$EJ_x \eta''' = -Q_y$	( $\kappa z$ )
$EJ_\omega \theta'' = -B_\omega$	( $\kappa z \text{см}^2$ )	$EJ_x \eta'' = -M_x$	( $\kappa z \text{см}$ )
$EJ_\omega \theta'$	( $\kappa z \text{см}^3$ )	$EJ_x \eta'$	( $\kappa z \text{см}^2$ )
$EJ_\omega \theta$	( $\kappa z \text{см}^4$ )	$EJ_x \eta$	( $\kappa z \text{см}^3$ )

Здесь  $M_\omega$  — изгибно-крутящий момент, а  $B_\omega$  — изгибно-крутящий бимомент.

## § 15. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ УПРУГОЙ ЛИНИИ УГЛОВ ЗАКРУЧИВАНИЯ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Разделив уравнение (1) на  $EJ_\omega$  и введя обозначение:

$$\frac{GJ_d}{EJ_\omega} = k^2, \quad (8)$$

получим, принимая во внимание выражение (2):

$$\theta^{IV} - k^2 \theta'' - \frac{qe}{EJ_\omega} = 0. \quad (9)$$

Общий интеграл уравнения (9) можно написать так:

$$\theta = A \operatorname{sh} kz + B \operatorname{ch} kz + Cz + D + f(z), \quad (10)$$

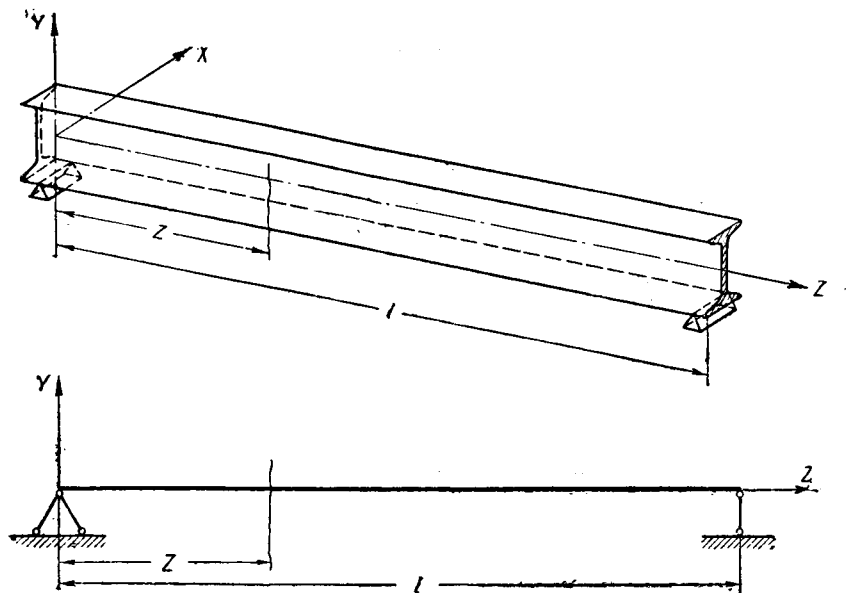
где  $f(z)$  — частный интеграл уравнения (9), а

$$A \operatorname{sh} kz + B \operatorname{ch} kz + Cz + D \quad (11)$$

— общий интеграл соответствующего однородного уравнения (9);

$k$  в этих уравнениях будем называть изгибно-крутильной характеристикой стержня. Измеряется она в  $\text{см}^{-1}$ .

Пользуясь методом интегрирования уравнений акад. А. Н. Крылова [12] и несколько видоизменяя его, как это рекомендует проф.



Фиг. 75.

М. М. Филоненко-Бородич [11], введем вместо независимых частных интегралов  $\operatorname{sh} kz$ ,  $\operatorname{ch} kz$ ,  $z$  и  $1$  другие частные интегралы  $\psi_1(z)$ ,  $\psi_2(z)$ ,  $\psi_3(z)$  и  $\psi_4(z)$ , представляющие линейные комбинации первых:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= a_1 \operatorname{sh} kz + a_2 \operatorname{ch} kz + a_3 z + a_4; \\ \psi_2 &= b_1 \operatorname{sh} kz + b_2 \operatorname{ch} kz + b_3 z + b_4; \\ \psi_3 &= c_1 \operatorname{sh} kz + c_2 \operatorname{ch} kz + c_3 z + c_4; \\ \psi_4 &= d_1 \operatorname{sh} kz + d_2 \operatorname{ch} kz + d_3 z + d_4. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Тогда общий интеграл уравнения (1) примет следующий вид:

$$\theta = A\psi_1 + B\psi_2 + C\psi_3 + D\psi_4 + f(z). \quad (13)$$

Для определения произвольных постоянных  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  в однопролетном стержне всегда имеются четыре граничных условия независимо от того, статически определим или неопределим этот стержень.

Так, например, для стержня, свободно опертого, но закрепленного от закручивания по концам, граничные условия будут следующие (фиг. 75):

при  $z = 0$ :

$$\theta = 0 \quad \text{и} \quad \theta'' = 0;$$

при  $z = l$ :

$$\theta = 0 \quad \text{и} \quad \theta'' = 0.$$

Для упрощения дальнейших вычислений определим для этого случая частные интегралы однородного уравнения (13) так, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(0) &= 1; \quad \psi_1''(0) = 0; \quad \psi_1(l) = 0; \quad \psi_1''(l) = 0; \\ \psi_2(0) &= 0; \quad \psi_2''(0) = 1; \quad \psi_2(l) = 0; \quad \psi_2''(l) = 0; \\ \psi_3(0) &= 0; \quad \psi_3''(0) = 0; \quad \psi_3(l) = 1; \quad \psi_3''(l) = 0; \\ \psi_4(0) &= 0; \quad \psi_4''(0) = 0; \quad \psi_4(l) = 0; \quad \psi_4''(l) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Частный интеграл  $f(z)$  уравнения (9) с правой частью выберем так, чтобы

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 0; \quad f''(0) = 0; \quad f'''(0) = 0. \quad (15)$$

Приравняв выражение (13) и его вторую производную нулю при значениях аргументов  $z = 0$  и  $z = l$ , мы с помощью выражений (14) и (15) получим четыре уравнения, из которых каждое будет содержать в качестве неизвестного одно из произвольных постоянных. Из этих уравнений легко найти произвольные постоянные, причем два из них всегда будут равны нулю.

В данном случае получим:

$$A = B = 0; \quad C = -f(l); \quad D = -f''(l).$$

Определив при помощи условий (14) коэффициенты  $c_1, c_2, c_3$  и  $c_4$  функции  $\psi_3$  и коэффициенты  $d_1, d_2, d_3$  и  $d_4$  функции  $\psi_4$ , получим интеграл уравнения (9) в виде:

$$\theta = -f(l) \frac{z}{l} + \frac{f''(l)}{k^2} \left( \frac{z}{l} - \frac{\text{sh } kz}{\text{sh } kl} \right) + f(z). \quad (16)$$

Дважды продифференцировав это уравнение по  $z$  и умножив его на  $-EJ_\omega$ , получим общее уравнение изгибно-крутящих бимоментов:

$$B_\omega = EJ_\omega \frac{f''(l)}{\text{sh } kl} \text{sh } kz - EJ_\omega f''(z). \quad (17)$$

Совершенно аналогично мы получим соответствующие общие уравнения упругой линии углов закручивания и изгибно-крутящих бимоментов для стержней с иными условиями закрепления на концах. Эти уравнения приведены в табл. 29.

## § 16. ЗНАЧЕНИЯ ЧАСТНОГО ИНТЕГРАЛА $f(z)$ ДЛЯ ОСНОВНЫХ НАГРУЗОК

В общие уравнения углов закручивания и изгибно-крутящих бимоментов входит функция  $f(z)$ , представляющая частный интеграл неоднородного дифференциального уравнения.

## Общие уравнения углов закручивания и изгибно-крутящих бимоментов

№ п/п	Схемы балок	Граничные условия	Общие уравнения углов закручивания	Общие уравнения изгибно-крутящих бимоментов
1		$z=0$ $\theta'' = 0$ $L = 0$ $z=l$ $\theta = 0$ $\theta' = 0$	$\theta = -f(l) + f'(l) \frac{\text{sh } kl - \text{sh } kz}{k \text{ ch } kl} + f(z)$	$B_{\omega} = EJ_{\omega} f'(l) \frac{k \text{ sh } kz}{\text{ch } kl} - EJ_{\omega} f''(z)$
2		$z=0$ $\theta = 0$ $\theta' = 0$ $z=l$ $\theta'' = 0$ $L = 0$	$\theta = f''(l) \frac{1 - \text{ch } kz}{k^2 \text{ ch } kl} +$ $+ \left[ f'(l) - \frac{f'''(l)}{k^2} \right] \frac{\text{sh } kl - \text{sh } k(l-z) - kz \text{ ch } kl}{k \text{ ch } kl} + f(z)$	$B_{\omega} = EJ_{\omega} f''(l) \frac{\text{ch } kz}{\text{ch } kl} +$ $+ EJ_{\omega} \left[ f'(l) - \frac{f'''(l)}{k^2} \right] \frac{k \text{ sh } k(l-z)}{\text{ch } kl} -$ $- EJ_{\omega} f''(z)$
3		$z=0$ $\theta = 0$ $\theta'' = 0$ $z=l$ $\theta = 0$ $\theta'' = 0$	$\theta = -f(l) \frac{z}{l} + \frac{f''(l)}{k^2} \left( \frac{z}{l} - \frac{\text{sh } kz}{\text{sh } kl} \right) + f(z)$	$B_{\omega} = \frac{EJ_{\omega} f''(l)}{\text{sh } kl} \text{sh } kz - EJ_{\omega} f''(z)$
4		$z=0$ $\theta = 0$ $\theta'' = 0$ $z=l$ $\theta = 0$ $\theta' = 0$	$\theta = -f(l) \frac{kz \text{ ch } kl - \text{sh } kz}{kl \text{ ch } kl - \text{sh } kl} + f'(l) \frac{z \text{ sh } kl - l \text{ sh } kz}{kl \text{ ch } kl - \text{sh } kl} + f(z)$	$B_{\omega} = -EJ_{\omega} f(l) \frac{k^2 \text{ sh } kz}{kl \text{ ch } kl - \text{sh } kl} +$ $+ EJ_{\omega} f'(l) \frac{k^2 l \text{ sh } kz}{kl \text{ ch } kl - \text{sh } kl} - EJ_{\omega} f''(z)$
5		$z=0$ $\theta = 0$ $\theta' = 0$ $z=l$ $\theta = 0$ $\theta'' = 0$	$\theta = -f(l) \frac{kz \text{ ch } kl + \text{sh } k(l-z) - \text{sh } kl}{kl \text{ ch } kl - \text{sh } kl} +$ $+ f''(l) \frac{kz \text{ ch } kl + \text{sh } k(l-z) - \text{sh } kl + \text{sh } kz - kl \text{ ch } kz + k(l-z)}{(k^2 kl \text{ ch } kl - \text{sh } kl)} + f(z)$	$B_{\omega} = EJ_{\omega} f(l) \frac{k^2 \text{ sh } k(l-z)}{kl \text{ ch } kl - \text{sh } kl} -$ $- EJ_{\omega} f''(l) \frac{\text{sh } kz + \text{sh } k(l-z) - kl \text{ ch } kz}{kl \text{ ch } kl - \text{sh } kl} -$ $- EJ_{\omega} f''(z)$
6		$z=0$ $\theta = 0$ $\theta' = 0$ $z=l$ $\theta = 0$ $\theta' = 0$	$\theta = -f(l) \frac{\text{ch } k(l-z) - \text{ch } kz + kz \text{ sh } kl - \text{ch } kl + 1}{kl \text{ sh } kl - 2 \text{ ch } kl + 2} -$ $- f'(l) \frac{kl \text{ ch } kz - kz \text{ ch } kl + \text{sh } kl - \text{sh } kz - \text{sh } k(l-z) - k(l-z)}{k(kl \text{ sh } kl - 2 \text{ ch } kl + 2)} + f(z)$	$B_{\omega} = EJ_{\omega} k^2 f(l) \frac{\text{ch } k(l-z) - \text{ch } kz}{kl \text{ sh } kl - 2 \text{ ch } kl + 2} +$ $+ EJ_{\omega} k f'(l) \frac{kl \text{ ch } kz - \text{sh } kz - \text{sh } k(l-z)}{kl \text{ sh } kl - 2 \text{ ch } kl + 2} -$ $- EJ_{\omega} f''(z)$

<sup>1</sup>  $L = EJ_{\omega} \theta''' - GJ_d \theta'$ .



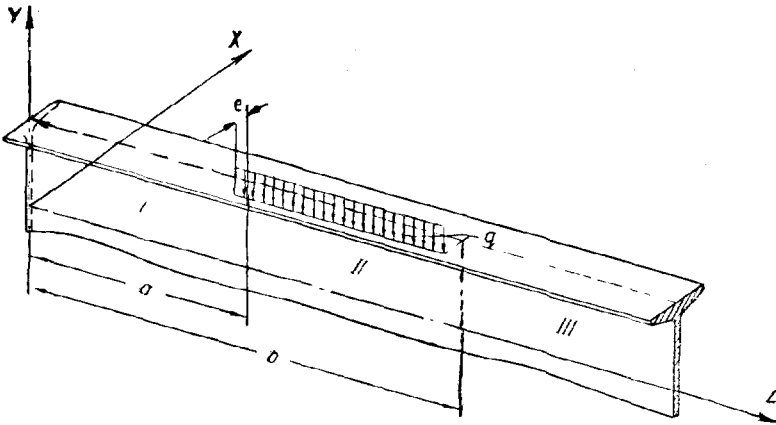
Интеграл этот можно написать в форме:

$$f(z) = \int_0^z \bar{\psi}(z-t) \frac{q(t)e}{EJ_{\omega}} dt, \quad (18)$$

где  $\bar{\psi}(z-t)$  — результат подстановки в функцию  $\bar{\psi}(z)$  аргумента  $(z-t)$  вместо  $z$ .

Функция  $f(z)$  должна удовлетворять условиям (15), так как из этих условий подобраны постоянные общего интеграла. В качестве же функции  $\bar{\psi}(z)$  возьмем одно из частных решений уравнения (9), составленных по типу (12), удовлетворяющее условиям:

$$\bar{\psi}(0) = 0; \quad \bar{\psi}'(0) = 0; \quad \bar{\psi}''(0) = 0; \quad \bar{\psi}'''(0) = 1. \quad (19)$$



Фиг. 76.

Применяя эти условия к любому из выражений (12), найдем значение  $\bar{\psi}(z)$  и, подставив его в формулу (18), получим:

$$f(z) = \frac{e}{k^3 EJ_{\omega}} \int_0^z [\text{sh } k(z-t) - k(z-t)] q(t) dt. \quad (20)$$

Пользуясь общей формулой (20) частного интеграла  $f(z)$ , нетрудно найти его выражение для любых частных случаев загрузки стержней.

Так, например, для загрузки по фиг. 76 будем иметь:

а) на участке I:

$$f_1(z) = 0,$$

так как всюду  $q(t) = 0$ ;

б) на участке II:

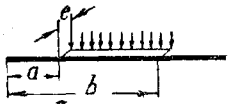

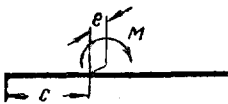
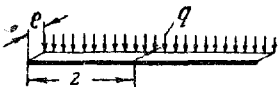
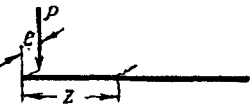
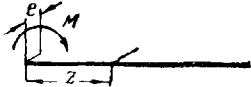
$$f_2(z) = \frac{qe}{k^4 EJ_{\omega}} \left[ \text{ch } k(z-a) - \frac{k^2(z-a)^2}{2} - 1 \right]; \quad (21)$$

на участке III:

$$f_3(z) = \frac{qe}{k^4 EJ_{\omega}} \left[ \text{ch } k(z-a) - \text{ch } k(z-b) - \frac{(z-a)^2 - (z-b)^2}{2} k^2 \right]. \quad (22)$$

## Общая формула частного интеграла

$$f(z) = \frac{e}{k^3 EJ_\omega} \int_0^z [\operatorname{sh} k(z-t) - k(z-t)] q(t) dt$$

№ п/л	Схема нагрузки	Формулы частного интеграла $f(z)$ для различных видов загрузки
1		$f_1(z) = 0$ $f_2(z) = \frac{qe}{k^4 EJ_\omega} \left[ \operatorname{ch} k(z-a) - \frac{k^2(z-a)^2}{2} - 1 \right]$ $f_3(z) = \frac{qe}{k^4 EJ_\omega} \left[ \operatorname{ch} k(z-a) - \operatorname{ch} k(z-b) - \frac{(z-a)^2 - (z-b)^2}{2} k^2 \right]$
2		$f_1(z) = 0$ $f_2(z) = \frac{Pe}{k^3 EJ_\omega} [\operatorname{sh} k(z-d) - k(z-d)]$
3		$f_1(z) = 0$ $f_2(z) = -\frac{Me}{k^2 EJ_\omega} [\operatorname{ch} k(z-c) - 1]$
4		$f(z) = \frac{qe}{k^4 EJ_\omega} \left( \operatorname{ch} kz - \frac{k^2 z^2}{2} - 1 \right)$
5		$f(z) = \frac{Pe}{k^3 EJ_\omega} (\operatorname{sh} kz - kz)$
6		$f(z) = -\frac{Me}{k^2 EJ_\omega} (\operatorname{ch} kz - 1)$

ые выражения частного интеграла  $f(z)$  для основных, наиболее часто встречающихся в практике нагрузок представлены нами в форме табл. 30.

Следует иметь в виду, что в табл. 30 и во всех дальнейших таблицах и чертежах для наглядности действующая нагрузка изображена сзади стержня, т. е. таким образом, что если смотреть со стороны положительного направления оси  $Z$ , то она вращает стержень вокруг нее по часовой стрелке, все же формулы даны для случая расположения нагрузки впереди стержня.

## § 17. ТАБЛИЦЫ И ГРАФИКИ УГЛОВ ЗАКРУЧИВАНИЯ И ИЗГИБНО-КРУТЯЩИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

Пользуясь общими уравнениями углов закручивания (табл. 29) и формулами частного интеграла  $f(z)$  (табл. 30), мы вывели формулы для определения  $\theta$ ,  $\theta'$ ,  $M_\omega$  и  $B_\omega$  в стержнях при различных нагрузках и различных опорных закреплениях. Формулы эти приведены в табл. 31.

В табл. 31 кроме того даны формулы углов наклона касательной к линии углов закручивания на опорах  $\theta'_L$  и  $\theta'_R$ , необходимые для расчета неразрезных балок на кручение и для определения опорных крутящих моментов [см. формулу (4)], а также формулы максимальных изгибно-крутящих бимоментов  $B_{\max}$ , необходимые для определения максимальных нормальных напряжений от кручения и для расчета жестких рам на кручение по методу деформаций.

Уравнения (17)—(20) табл. 31 от поворота опоры вокруг линии центров изгиба на угол  $\theta = 1$  выведены непосредственно из уравнения (9).

Для первых 16 случаев загрузки, приведенных в табл. 31, в табл. 32 представлены эпюры изменения по длине стержня значений изгибно-крутящих бимоментов  $B_\omega$ , изгибно-крутящих моментов  $M_\omega$  и крутящих моментов  $M_{кр}$  и приведены формулы для определения указанных величин в характерных сечениях стержня.

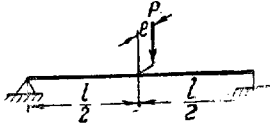
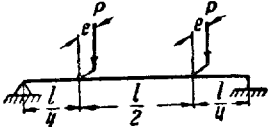
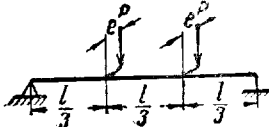
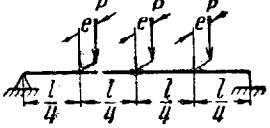


Для облегчения практического расчета тонкостенных стержней на стесненное кручение нами составлена еще табл. 33 максимальных изгибно-крутящих бимоментов для наиболее часто встречающихся в практике случаев загрузки. В этой таблице максимальные изгибно-крутящие бимоменты даны в виде произведения двух величин. Одна из них представляет отвлеченный по размерности коэффициент  $\alpha$ , зависящий только от  $kl$ , т. е. от произведения упругой изгибно-крутильной харак-

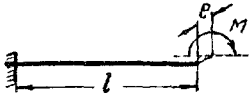
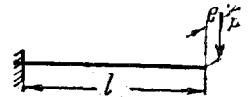

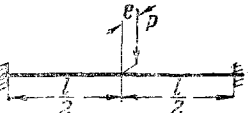
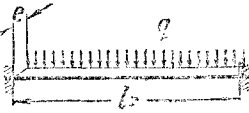
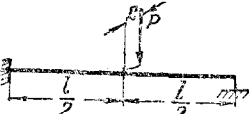
теристики  $k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$  на пролет балки  $l$ .


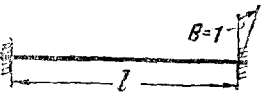
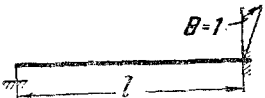
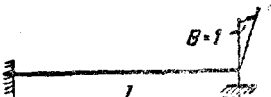
Вторая величина зависит от нагрузки, эксцентриситета ее приложения  $e$  и от пролета балки  $l$ . В формулах для опорных бимоментов, возникающих от поворота опоры вокруг линии центров изгиба на угол  $\theta = 1$ , эта последняя величина зависит от секториальной жесткости стержня  $EJ_\omega$ .

Для определения коэффициента  $\alpha$  по формулам, приведенным в табл. 33, построены также графики (приложение 7—11).

## Формулы максимальных изгибно-крутящих бимоментов

№ п/п	Схемы балок и характер загрузений	Формулы максималь- ных изгибно-крутя- щих бимоментов ( $B_{\max}$ )	Коэффициент $\alpha$
1		$z = \frac{l}{2}$	$\frac{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{2kl \operatorname{ch} \frac{kl}{2}}$
2		$z = \frac{l}{4}$	$\frac{\operatorname{sh} \frac{kl}{3} \operatorname{ch} \frac{kl}{6}}{kl \operatorname{ch} \frac{kl}{2}}$
3		$z = \frac{l}{3}$	$B_{\max} = \alpha Pel$
4		$z = \frac{l}{2}$	$\frac{\operatorname{sh} \frac{kl}{2} + 2 \operatorname{sh} \frac{kl}{4}}{2kl \operatorname{ch} \frac{kl}{2}}$
5		$z = \frac{2l}{5}$	$\frac{2 \operatorname{sh} \frac{3kl}{10} \operatorname{ch}^2 \frac{kl}{10}}{kl \operatorname{ch} \frac{kl}{2}}$
6		$z = \frac{l}{2}$	$B_{\max} = \alpha qel^2$

№ п/п	Схемы балок и характер нагрузений	Формулы максимальных изгибно-крутящих бимоментов ( $B_{\max}$ )	Коэффициент $\alpha$
7		$B_{\max} = \alpha Me$	1
8		$z = 0$ $B_{\max} = \alpha Pel$	$\frac{\text{sh } kl}{kl \text{ ch } kl}$
9		$B_{\max} = \alpha qel^2$	$\frac{\text{ch } kl - 1 - kl \text{ sh } kl}{k^2 l^2 \text{ ch } kl}$
10		$z = 0$ и $z = \frac{l}{2}$ $B_{\max} = \mp \alpha Pel$	$\frac{\text{ch } \frac{kl}{2} - 1}{2 kl \text{ sh } \frac{kl}{2}}$
11		$B_{\max} = \alpha qel^2$	$\frac{kl \text{ ch } \frac{kl}{2} - 2 \text{ sh } \frac{kl}{2}}{2 k^2 l^2 \text{ sh } \frac{kl}{2}}$
12		$z = 0$ $B_{\max} = \alpha Pel$	$\frac{\frac{1}{2} \text{ sh } kl - \text{sh } \frac{kl}{2}}{kl \text{ ch } kl - \text{sh } kl}$

№ п/п	Схемы балок и характер нагрузок	Формулы максимальных изгибно-крутящих бимоментов ( $B_{\max}$ )	Коэффициент $\alpha$	
13		$z = 0$	$B_{\max} = \alpha q e l^2$	$1 + \frac{kl}{2} \operatorname{sh} kl - \operatorname{ch} kl$ $\frac{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}{k^2 l^2 \operatorname{ch} kl - kl \operatorname{sh} kl}$
14		$z = 0$ и $z = l$	$B_{\max} = \alpha \frac{EJ_{\omega}}{l^2}$	$\frac{k^2 l^2 \operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch} \frac{kl}{2} - 2 \operatorname{sh} \frac{kl}{2}}$
15		$z = l$	$B_{\max} = \alpha \frac{EJ_{\omega}}{l^2}$	$\frac{k^2 l^2 \operatorname{sh} kl}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}$
16		$z = 0$	$B_{\max} = \alpha \frac{EJ_{\omega}}{l^2}$	$\frac{k^2 l^2 \operatorname{sh} kl}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}$

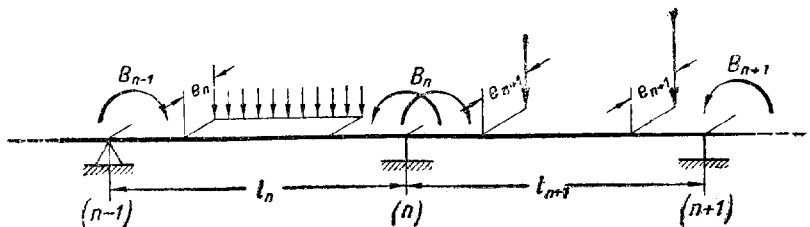
## § 18. НЕРАЗРЕЗНЫЕ БАЛКИ. УРАВНЕНИЕ ТРЕХ ИЗГИБНО-КРУТЯЩИХ БИМОМЕНТОВ

Рассмотрим два каких-нибудь смежных пролета неразрезной балки, нагруженной эксцентрично приложенной нагрузкой (фиг. 77).

Условие неразрывности упругой линии углов закручивания на средней ( $n$ -й) опоре напишется в общем виде так:

$$\theta'_{лев} = \theta'_{прав}. \quad (23)$$

Опорные изгибно-крутящие бимоменты  $B_{n-1}$ ,  $B_n$  и  $B_{n+1}$  будем считать положительными. Окончательный же их знак получим в каждом частном случае в результате решения задачи.



Фиг. 77.

Воспользовавшись соответствующими формулами табл. 31, напишем условие (23) в развернутом виде:

$$\begin{aligned} & B_{n-1} \frac{\text{sh } k_n l_n - k_n l_n}{EJ_{\omega(n)} k_n^2 l_n \text{sh } k_n l_n} + B_n \left( \frac{k_n l_n \text{ch } k_n l_n - \text{sh } k_n l_n}{EJ_{\omega(n)} k_n^2 l_n \text{sh } k_n l_n} + \right. \\ & \left. + \frac{k_{n+1} l_{n+1} \text{ch } k_{n+1} l_{n+1} - \text{sh } k_{n+1} l_{n+1}}{EJ_{\omega(n+1)} k_{n+1}^2 l_{n+1} \text{sh } k_{n+1} l_{n+1}} \right) + B_{n+1} \frac{\text{sh } k_{n+1} l_{n+1} - k_{n+1} l_{n+1}}{EJ_{\omega(n+1)} k_{n+1}^2 l_{n+1} \text{sh } k_{n+1} l_{n+1}} = \\ & = \theta'_{B(n)} - \theta'_{A(n+1)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Входящие в правую часть уравнения (24)  $\theta'_{B(n)}$  и  $\theta'_{A(n+1)}$  можно определить, взяв первую производную от выражения (16) и приравняв для  $\theta'_{B'}$  аргумент  $z = l$ , а для  $\theta'_{A'}$   $z = 0$ :

$$\theta'_{B'} = -\frac{f(l)}{l} - \frac{f''(l)}{k^2} \left( \frac{k \text{ch } kl}{\text{sh } kl} - \frac{1}{l} \right) + f'(l); \quad (25)$$

$$\theta'_{A'} = -\frac{f(l)}{l} - \frac{f''(l)}{k^2} \left( \frac{k}{\text{sh } kl} - \frac{1}{l} \right). \quad (26)$$

Уравнение (24) есть уравнение трех изгибно-крутящих бимоментов.

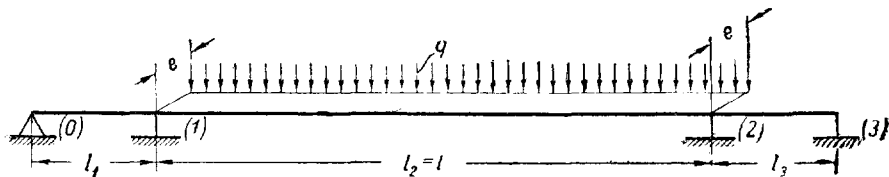
Применим это уравнение к балке, заделанной по концам и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

Рассматривая каждую из заделок как пролет очень малой длины, получаем трехпролетную неразрезную балку (фиг. 78), у которой длины пролетов  $l_1$  и  $l_3$  в процессе вычислений положим равными нулю.

Полагая вследствие симметрии  $B_1 = B_2 = B_A$  и пользуясь формулой для  $\theta_A'$  из табл. 31, получаем:

$$B_A \frac{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}{EJ_\omega k^2 l \operatorname{sh} kl} + B_A \frac{\operatorname{sh} kl - kl}{EJ_\omega k^2 l \operatorname{sh} kl} =$$

$$= - \frac{qe}{k^3 EJ_\omega} \left( \frac{kl}{2} - \frac{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right),$$



Фиг. 78.

откуда, умножив на  $EJ_\omega k^2$  и сделав преобразования, получим:

$$B_A = - \frac{qe}{k} \cdot \frac{kl \operatorname{ch} \frac{kl}{2} - 2 \operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{2 \operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \cdot \frac{l \operatorname{sh} kl}{kl (\operatorname{ch} kl - 1)} =$$

$$= - \frac{qe}{2 k^2 \operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \cdot \frac{\left( kl \operatorname{ch} \frac{kl}{2} - 2 \operatorname{sh} \frac{kl}{2} \right) 2 \operatorname{sh} \frac{kl}{2} \operatorname{ch} \frac{kl}{2}}{2 \operatorname{sh}^2 \frac{kl}{2}} =$$

$$= - \frac{qe}{k^2} \left( \frac{kl \operatorname{ch} \frac{kl}{2}}{2 \operatorname{sh} \frac{kl}{2}} - 1 \right).$$

Эта же формула, полученная другим путем, помещена в табл. 31<sup>1</sup>.

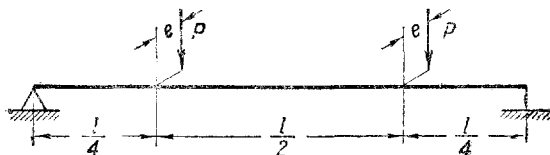
## § 19. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

**Пример 7.** Определить изгибно-крутящие бимоменты, изгибно-крутящие моменты и крутящие моменты в характерных сечениях балки, изображенной на фиг. 79. Пролет балки  $l = 6$  м. Каждая из сосредоточенных сил  $P = 21,6$  т. Эксцентриситет  $e = 3,67$  см. Упругая изгибно-крутящая характеристика  $k = 0,00418$  см<sup>-1</sup>.

Вычисляем:

$$kl = 0,00418 \cdot 600 = 2,508;$$

$$\frac{kl}{2} = 1,254; \quad \frac{kl}{4} = 0,627.$$



Фиг. 79.

По формулам табл. 32 (№ 1) имеем:

<sup>1</sup> Более подробное изложение содержания этой главы см. в сборнике „Исследование металлических конструкций“, 1940, Д. В. Бычков, Совместное действие изгиба и кручения в металлических балках.



а) На левой опоре (при  $z = 0$ ):

$$B_{\omega} = 0;$$

$$M_{\omega} = Pe \frac{\operatorname{ch} \frac{kl}{4}}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} = 21\,600 \cdot 3,67 \frac{1,205}{1,888} = 5,059 \cdot 10^4 \text{ кгсм};$$

$$M_{кр} = Pe \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{kl}{4}}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right) = 21\,600 \cdot 3,67 \left( 1 - \frac{1,205}{1,888} \right) = 2,868 \cdot 10^4 \text{ кгсм}.$$

б) В сечении под грузом (при  $z = \frac{l}{4}$ ):

$$B_{\omega} = 0,5Pel \frac{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch} \frac{kl}{2}} = 0,5 \cdot 21\,600 \cdot 3,67 \cdot 600 \frac{1,602}{2,508 \cdot 1,888} = 8,048 \cdot 10^6 \text{ кгсм}^2.$$

[Для проверки по кривой II графика приложения 7 находим:

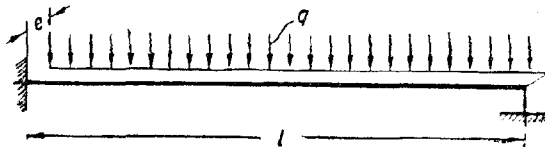
$$B_{\omega} = 8,5 \cdot 0,02 Pel = 8,5 \cdot 0,02 \cdot 21\,600 \cdot 3,67 \cdot 600 = 8,086 \cdot 10^6 \text{ кгсм}^2].$$

$$M_{\omega(1)} = Pe \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{kl}{4}}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} = 21\,600 \cdot 3,67 \frac{1,205^2}{1,888} = 6,097 \cdot 10^4 \text{ кгсм};$$

$$M_{\omega(2)} = -Pe \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{kl}{4}}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} = -21\,600 \cdot 3,67 \frac{0,6725^2}{1,888} = -1,899 \cdot 10^4 \text{ кгсм};$$

$$M_{кр} = Pe \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{kl}{4}}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} = 1,899 \cdot 10^4 \text{ кгсм}$$

**Пример 8.** Определить  $B_{\omega}$ ,  $M_{\omega}$  и  $M_{кр}$  в опорных сечениях балки, изображенной на фиг. 80.



Фиг. 80.

Пролет балки  $l = 2$  м; интенсивность равномерно распределенной нагрузки  $q = 800$  кг/м; эксцентриситет ее  $e = 17,97$  см; упругая изгибно-крутильная характеристика профиля  $k = 0,01764$  см<sup>-1</sup>.

Вычисляем:

$$kl = 0,01764 \cdot 200 = 3,528.$$

По формулам табл. 32 (№ 15) имеем:

а) На левой опоре:

$$B_{\omega} = - qel^2 \frac{1 + 0,5kl \operatorname{sh} kl - \operatorname{ch} kl}{kl (kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl)} =$$

$$= - 8 \cdot 17,97 \cdot 200^2 \frac{1 + 0,5 \cdot 3,528 \cdot 17,01 - 17,04}{3,528 (3,528 \cdot 17,04 - 17,01)} = - 5,279 \cdot 10^5 \text{ кгсм}^2.$$

[Для проверки по кривой II графика приложения 10 находим:

$$B_{\omega} = \alpha \cdot 0,01 \cdot qel^2 = 9,2 \cdot 0,01 \cdot 8 \cdot 17,97 \cdot 200^2 = 5,290 \cdot 10^5 \text{ кгсм}^2].$$

$$M_{\omega} = - qel \frac{1 + 0,5k^2 l^2 \operatorname{ch} kl - \operatorname{ch} kl}{kl (kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl)} =$$

$$= - 8 \cdot 17,97 \cdot 200 \frac{1 + 0,5 \cdot 3,528^2 \cdot 17,04 - 17,04}{3,528 (3,528 \cdot 17,04 - 17,01)} = - 1,702 \cdot 10^4 \text{ кгсм};$$

$$M_{кр} = 0.$$

б) На правой опоре:

$$B_{\omega} = 0;$$

$$M_{\omega} = qel \frac{1 + kl \operatorname{sh} kl - \operatorname{ch} kl - 0,5k^2 l^2}{kl (kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl)} =$$

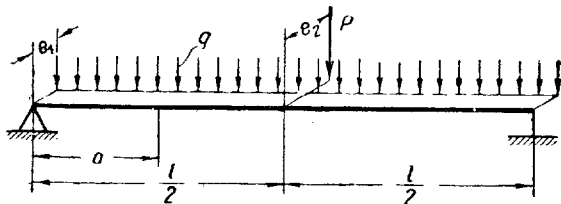
$$= 8 \cdot 17,97 \cdot 200 \frac{1 + 3,528 \cdot 17,01 - 17,04 - 0,5 \cdot 3,528^2}{3,528 (3,528 \cdot 17,04 - 17,01)} = 0,714 \cdot 10^4 \text{ кгсм};$$

$$M_{кр} = qel \frac{2 (\operatorname{ch} kl - 1) - 2kl \operatorname{sh} kl + 0,5k^2 l^2 (\operatorname{ch} kl + 1)}{kl (kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl)} =$$

$$= 8 \cdot 17,97 \cdot 200 \frac{2 (17,04 - 1) - 2 \cdot 3,528 \cdot 17,01 + 0,5 \cdot 3,528^2 (17,04 + 1)}{3,528 (3,528 \cdot 17,04 - 17,01)} =$$

$$= 0,460 \cdot 10^4 \text{ кгсм}.$$

**Пример 9.** Определить величины  $B_{\omega}$ ,  $M_{\omega}$  и  $M_{кр}$  в сечении на расстоянии  $a = 2$  м от опоры — для балки, изображенной на фиг. 81. Пролет балки



Фиг. 81.

$l = 8$  м. Интенсивность равномерно распределенной нагрузки  $q = 400$  кг/м; эксцентриситет ее приложения  $e_1 = 5$  см. Сосредоточенная сила  $P = 2$  т приложена в середине пролета с эксцентриситетом  $e_2 = 10$  см. Упругая изгибно-крутильная характеристика сечения  $k = 0,003$  см<sup>-1</sup>.

По формулам табл. 31 (№ 1 и 3) находим:

$$B_{\omega} = \frac{qe}{k^2} \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch} k \left( \frac{l}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right] + \frac{Pe}{2k} \cdot \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}};$$

$$M_{\omega} = \frac{qe}{k} \cdot \frac{\operatorname{sh} k \left( \frac{l}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} + \frac{Pe}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}}.$$

$$M_{\kappa p} = \frac{qe}{k} \left[ k \left( \frac{l}{2} - z \right) - \frac{\operatorname{sh} k \left( \frac{l}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right] + \frac{Pe}{2} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right)$$

$$kl = 0,003 \cdot 800 = 2,4; \quad kz = 0,003 \cdot 200 = 0,6; \quad k \left( \frac{l}{2} - z \right) = 0,003 \cdot 200 = 0,6;$$

$$\operatorname{ch} \frac{kl}{2} = 1,811;$$

$$\operatorname{ch} k \left( \frac{l}{2} - z \right) = 1,185;$$

$$\operatorname{sh} k \left( \frac{l}{2} - z \right) = 0,6367;$$

$$\operatorname{sh} kz = 0,6367.$$

Подставляя числовые значения в формулы для  $B_{\omega}$ ,  $M_{\omega}$  и  $M_{\kappa p}$ , получаем:

$$B_{\omega} = \frac{4 \cdot 5}{0,003^2} \left( 1 - \frac{1,185}{1,811} \right) + \frac{2000 \cdot 10}{2 \cdot 0,003} \cdot \frac{0,6367}{1,811} = 0,7680 \cdot 10^6 + 3,3333 \cdot 10^6 =$$

$$= 4,1013 \cdot 10^6 \text{ кгсм}^2;$$

$$M_{\omega} = \frac{4 \cdot 5}{0,003} \cdot \frac{0,6367}{1,811} + \frac{2000 \cdot 10}{2} \cdot \frac{1,185}{1,811} = 2344 + 6544 = 8888 \text{ кгсм};$$

$$M_{\kappa p} = \frac{4 \cdot 5}{0,003} \left( 0,6 - \frac{0,6367}{1,811} \right) + \frac{2000 \cdot 10}{2} \left( 1 - \frac{1,185}{1,811} \right) = 1671 + 3457 = 5128 \text{ кгсм}.$$

**Пример 10.** Построить эпюру изгибно-крутящих бимоментов для эксцентрично нагруженной двухпролетной неразрезной балки (фиг. 82, а); пролеты  $l_1 = 8 \text{ м}$  и  $l_2 = 6 \text{ м}$ . Первый пролет нагружен равномерно распределенной по всему пролету нагрузкой  $q = 2 \text{ м/м}$ , приложенной с эксцентриситетом  $e_1 = 5 \text{ см}$ . Во втором пролете по середине приложена сосредоточенная сила  $P = 4 \text{ т}$  с эксцентриситетом  $e_2 = 8 \text{ см}$ . Сечение балки — прокатный двутавр № 60а.

Уравнение трех изгибно-крутящих бимоментов (24) для рассматриваемого примера будет иметь следующий вид:

$$B_0 \frac{\operatorname{sh} kl_1 - kl_1}{EJ_{\omega} k^2 l_1 \operatorname{sh} kl_1} + B_1 \left( \frac{kl_1 \operatorname{ch} kl_1 - \operatorname{sh} kl_1}{EJ_{\omega} k^2 l_1 \operatorname{sh} kl_1} + \frac{kl_2 \operatorname{ch} kl_2 - \operatorname{sh} kl_2}{EJ_{\omega} k^2 l_2 \operatorname{sh} kl_2} \right) +$$

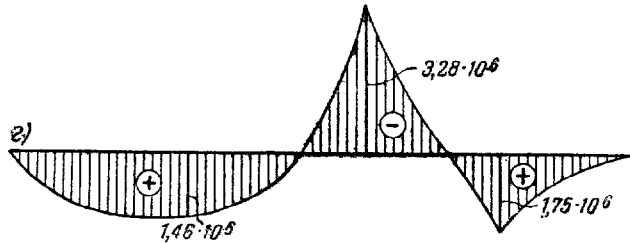
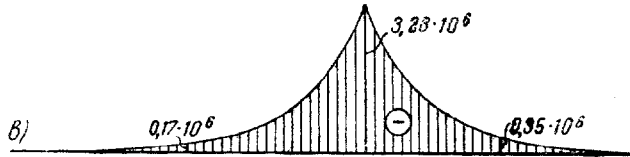
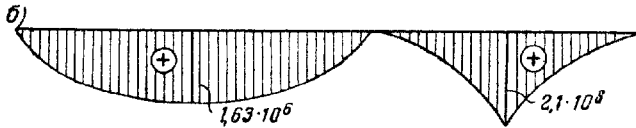
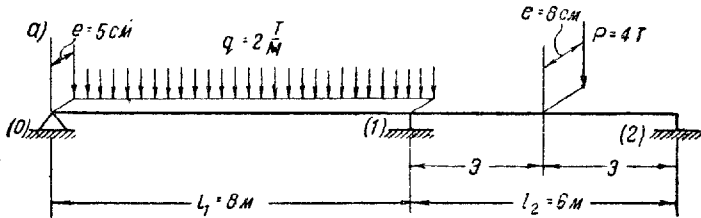
$$+ B_2 \frac{\operatorname{sh} kl_2 - kl_2}{EJ_{\omega} k^2 l_2 \operatorname{sh} kl_2} = \theta'_{B(1)} - \theta'_{A(2)}.$$

В этом уравнении изгибно-крутящие бимоменты на крайних шарнирных опорах равны нулю, т. е.  $E_0 = B_2 = 0$ .

Углы наклона касательной к линии углов закручивания определим по соответствующим формулам табл. 31:

$$\theta'_{B(1)} = \frac{qe_1}{k^3 EJ_\omega} \left( \frac{kl_1}{2} - \frac{\text{sh} \frac{kl_1}{2}}{\text{ch} \frac{kl_1}{2}} \right) \text{ (из 1-й строки таблицы);}$$

$$\theta'_{A(2)} = \frac{Pe_2}{2k^2 EJ_\omega} \left( 1 - \frac{1}{\text{ch} \frac{kl_2}{2}} \right) \text{ (из 3-й строки таблицы).}$$



Фиг. 82.

Значения упругой изгибно-крутильной характеристики и секториального момента инерции  $J_\omega$  для двутавра № 60а берем из приложения 1:

$$k = 0,007427 \text{ см}^{-1},$$

$$J_\omega = 1,3499 \cdot 10^6 \text{ см}^6.$$

Модуль упругости  $E$  принимаем для Ст.-3:

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

Следовательно,

$$EJ_\omega = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 1,3499 \cdot 10^6 = 2,8348 \cdot 10^{12} \text{ кгсм}^4.$$

Находим:

$$kl_1 = 0,007427 \cdot 800 = 5,942;$$

$$kl_2 = 0,007427 \cdot 600 = 4,456,$$

$$\frac{kl_1}{2} = 2,971;$$

$$\frac{kl_2}{2} = 2,228;$$

$$k^2 = 0,5516 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-2};$$

$$k^3 = 0,4097 \cdot 10^{-6} \text{ см}^{-3}.$$

По таблицам гиперболических функций определяем:

$$\text{sh } kl_1 = 190,34;$$

$$\text{ch } kl_1 = 190,35;$$

$$\text{sh } \frac{kl_1}{2} = 9,730;$$

$$\text{ch } \frac{kl_1}{2} = 9,781;$$

$$\text{sh } kl_2 = 43,013;$$

$$\text{ch } kl_2 = 43,129;$$

$$\text{sh } \frac{kl_2}{2} = 4,5868;$$

$$\text{ch } \frac{kl_2}{2} = 4,6945.$$

Подсчитываем  $\theta'_{B(1)}$ ,  $\theta'_{A(2)}$  и коэффициент при  $B_1$ :

$$\theta'_{B(1)} = \frac{-20 \cdot 5}{0,4097 \cdot 10^{-6} \cdot 2,8348 \cdot 10^{12}} \left( 2,971 - \frac{9,730}{9,781} \right) = -1,7014 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-1};$$

$$\theta'_{A(2)} = \frac{4000 \cdot 8}{2 \cdot 0,5516 \cdot 10^{-4} \cdot 2,8348 \cdot 10^{12}} \left( 1 - \frac{1}{4,6945} \right) = 0,8053 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-1}$$

$$\frac{kl_1 \text{ch } kl_1 - \text{sh } kl_1}{EJ_{\omega} k^2 l_1 \text{sh } kl_1} + \frac{kl_2 \text{ch } kl_2 - \text{sh } kl_2}{EJ_{\omega} k^2 l_2 \text{sh } kl_2} =$$

$$= \frac{5,942 \cdot 190,35 - 190,34}{2,8348 \cdot 10^{12} \cdot 0,5516 \cdot 10^{-4} \cdot 800 \cdot 190,34} +$$

$$+ \frac{4,456 \cdot 43,129 - 43,013}{2,8348 \cdot 10^{12} \cdot 0,5516 \cdot 10^{-4} \cdot 600 \cdot 43,013} =$$

$$= 0,3950 \cdot 10^{-10} + 0,3696 \cdot 10^{-10} = 0,7646 \cdot 10^{-10} \text{ кгсм}^{-3}.$$

Тогда для определения  $B_1$  получаем уравнение:

$$0,7646 \cdot 10^{-10} B_1 = -1,7014 \cdot 10^{-4} - 0,8053 \cdot 10^{-4} = -2,5067 \cdot 10^{-4},$$

откуда

$$B_1 = -\frac{2,5067 \cdot 10^{-4}}{0,7646 \cdot 10^{-10}} = -3,278 \cdot 10^6 \text{ кгсм}^2.$$

Эпюру изгибно-крутящих бимоментов построим как алгебраическую сумму трех эпюр:

1) Эпюры изгибно-крутящих бимоментов для левого пролета от равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q = 2 \text{ т/м}$ , приложенной с эксцентриситетом  $e_1 = 5 \text{ см}$ . Вид этой эпюры приведен в табл. 32 под № 1; макс  $B_\omega$  для этой нагрузки будет при  $z = \frac{l_1}{2}$ :

$$\max B_\omega = \frac{qe_1}{k^2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}}\right) = \frac{2000 \cdot 5}{0,5516 \cdot 10^{-4}} \left(1 - \frac{1}{9,781}\right) = 1,628 \cdot 10^8 \text{ кгсм}^2.$$

2) Эпюры изгибно-крутящих бимоментов от сосредоточенной силы  $P = 4 \text{ т}$ , приложенной в середине правого пролета с эксцентриситетом  $e_2 = 8 \text{ см}$ . Вид этой эпюры дан в той же табл. 32 под № 3; макс  $B_\omega$  для этой нагрузки будет при  $z = \frac{l_2}{2}$ :

$$\max B_\omega = \frac{Pe_2}{2k} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{kl_2}{2}}{\operatorname{ch} \frac{kl_2}{2}} = \frac{4000 \cdot 8}{2 \cdot 0,7427 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{4,5868}{4,6945} = 2,105 \cdot 10^8 \text{ кгсм}^2.$$

3) Эпюры изгибно-крутящих бимоментов от опорного бимомента  $B_1$  на промежуточной опоре.

Вид ее дан в табл. 32 для левого пролета под № 7, а для правого — под № 6 с обратным знаком.

На фиг. 82, б и в даны все три эпюры; на фиг. 82, г дана суммарная эпюра, отвечающая требованию задачи.

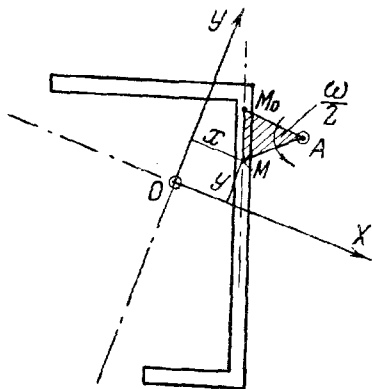
## ГЛАВА IV

### ТЕОРИЯ И ПРАКТИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОСТЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ

#### § 20. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В формулах для расчета тонкостенных стержней на стесненное кручение фигурируют новые геометрические характеристики сечения, связанные с законом секториальных площадей. В настоящей работе мы поставили своей задачей унифицировать эти новые характеристики со старыми, известными из элементарного курса сопротивления материалов, введя при этом по возможности единую систему наименований, обозначений и способов определения этих характеристик. Другими словами, нашей задачей является оформить или, вернее, расширить главу сопротивления материалов, которую можно назвать „моменты инерции тонкостенных профилей“.

По новой теории каждая точка контура (§ 8, п. 1) тонкостенного стержня характеризуется не двумя, а тремя координатами: двумя линейными  $x$  и  $y$  и одной секториальной  $\omega$ , измеряемой в  $\text{см}^2$  (фиг. 83). Секториальной координатой произвольной точки  $M$  контура сечения является удвоенная площадь, заключенная между отрезком линии кон-



Фиг. 83.

тура  $M_0M$  и радиусами-векторами  $AM_0$  и  $AM$ , проведенными к концам этого отрезка из центра изгиба  $A$ . Площадь эту, как уже было сказано выше, будем считать положительной, если она описывается подвижным радиусом-вектором  $AM$  против часовой стрелки.

Для отсчета линейных координат сечения, как известно, необходимо знать центр тяжести  $O$  и главные центральные оси сечения  $X$  и  $Y$ . Совершенно аналогично для отсчета секториальных координат необходимо знать другую центральную точку профиля — центр изгиба  $A$  и начальную точку отсчета секториальных площадей  $M_0$ , которую назовем главной секториальной точкой сечения.

В теории расчета тонкостенных профилей на кручение встречаются новые геометрические характеристики сечения, выражаемые интегралами следующего вида:

$$\int_F \omega dF, \int_F \omega x dF, \int_F \omega y dF \text{ и } \int_F \omega^2 dF.$$

В соответствии с общеизвестной теорией моментов инерций мы для этих интегралов ввели следующие наименования и обозначения.

Первый интеграл  $\int_F \omega dF$  назвали секториальным статическим моментом и обозначили через  $S_\omega$ , второй и третий —  $\int_F \omega x dF$  и  $\int_F \omega y dF$  — назвали секториально-линейными статическими моментами и обозначили через  $S_{\omega x}$  и  $S_{\omega y}$  и, наконец, четвертый интеграл  $\int_F \omega^2 dF$  назвали секториальным моментом инерции и обозначили через  $J_\omega$ .

Кроме перечисленных основных геометрических характеристик оказалось целесообразным ввести и некоторые производные характеристики: а) отношение секториального момента инерции  $J_\omega$  к секториальным координатам наиболее удаленных (крайних) точек контура сечения, к  $\omega_{\max}$ , которое мы назвали секториальным моментом сопротивления и обозначили через  $W_\omega$ , и б) отношение секториального момента сопротивления  $W_\omega$  к площади сечения  $F$ , которое назвали секториальной ядровой площадью (координатой) и обозначили через  $\rho_\omega$ .

Старые и новые геометрические характеристики тонкостенного профиля выписаны в табл. 34.

В эту таблицу не включены те дополнительные геометрические характеристики, с которыми приходится иметь дело при расчете тонкостенных стержней на устойчивость, так как предметом настоящей работы являются только вопросы, связанные с расчетом на прочность.

Секториальный статический момент  $S_\omega$  и секториально-линейные статические моменты  $S_{\omega x}$  и  $S_{\omega y}$ , как видно из соответствующих формул табл. 34, могут быть положительными, отрицательными и равными нулю, секториальный же момент инерции  $J_\omega$  — величина, существенно положительная, так как координата  $\omega$  входит в подинтегральное выражение в квадрате.

## Геометрические характеристики тонкостенных профилей

Обозначения	Наименования	Раз- мерность
О с н о в н ы е		
$F = \int_F dF$	Площадь	$см^2$
$S_x = \int_F y dF$	Статический момент относительно оси $X$	$см^3$
$S_y = \int_F x dF$	Статический момент относительно оси $Y$	$см^3$
$S_\omega = \int_F \omega dF$	Секториальный статический момент	$см^4$
$S_{\omega_B x} = \int_F \omega_B x dF$	Секториально-линейный статический момент относительно полюса $B$ и оси $X$	$см^5$
$S_{\omega_B y} = \int_F \omega_B y dF$	Секториально-линейный статический момент относительно полюса $B$ и оси $Y$	$см^5$
$J_x = \int_F y^2 dF$	Экваториальный момент инерции относительно оси $X$	$см^4$
$J_y = \int_F x^2 dF$	Экваториальный момент инерции относительно оси $Y$	$см^4$
$J_{xy} = \int_F xy dF$	Центробежный момент инерции относительно осей $X$ и $Y$	$см^4$
$J_p = \int_F \rho^2 dF$	Полярный момент инерции	$см^4$
$J_d = \alpha \sum \frac{bd^3}{3}$	Момент инерции при чистом кручении	$см^4$
$J_\omega = \int_F \omega^2 dF$	Секториальный момент инерции	$см^6$
П р о и з в о д н ы е		
$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$	Момент сопротивления относительно оси $X$	$см^3$
$W_y = \frac{J_y}{x_{\max}}$	Момент сопротивления относительно оси $Y$	$см^3$



Обозначения	Наименования	Раз- мерность
$W_{\omega} = \frac{J_{\omega}}{\omega_{\max}}$	Секториальный момент сопротивления	см <sup>4</sup>
$\rho_x = \frac{W_x}{F}$	Ядровое расстояние от оси X	см
$\rho_y = \frac{W_y}{F}$	Ядровое расстояние от оси Y	см
$\rho_{\omega} = \frac{W_{\omega}}{F}$	Секториальная ядровая координата	см <sup>2</sup>

## § 21. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ПОСТОЯННЫХ ТОЧЕК И ОСЕЙ ПРОФИЛЯ

Координаты центра тяжести сечения, как известно, определяются по формулам:

$$x_c = \frac{S_y}{F} \quad \text{и} \quad y_c = \frac{S_x}{F}, \quad (1)$$

где  $x$  и  $y$  — произвольные оси координат, взятые в плоскости сечения, от которых и отсчитываются искомые координаты  $x_c$  и  $y_c$ .

Совершенно аналогично координаты другой центральной точки сечения — центра изгиба — определяются по формулам (59) главы II:

$$\alpha_x = \frac{S_{\omega B y}}{J_x}; \quad \alpha_y = -\frac{S_{\omega B x}}{J_y}. \quad (2)$$

Здесь в числителе стоят секториально-линейные статические моменты относительно полюса  $B$  и главных центральных осей сечения  $X$  и  $Y$ , а в знаменателе — главные моменты инерции  $J_x$  и  $J_y$ .

За полюс  $B$  может быть принята произвольная точка, взятая в плоскости сечения, от которой и отсчитываются по направлению главных осей сечения  $X$  и  $Y$  искомые координаты  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$ .

О способе вычисления числителей формулы (2) будет сказано ниже.

Направление главных осей сечения, как известно, определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2J_{\xi\eta}}{J_{\eta} - J_{\xi}}, \quad (3)$$

где через  $\xi$  и  $\eta$  обозначены горизонтальная и вертикальная центральные оси сечения.

Центробежный момент инерции относительно этих осей для сложных сечений можно вычислять как сумму центробежных моментов инерции всех элементов, составляющих сложное сечение, по формуле:

$$J_{\xi\eta} = \sum (Fab + J_{\xi\eta}), \quad (4)$$

где  $F$  — площадь соответствующего элемента сечения;

$a$  и  $b$  — координаты центра тяжести его в осях  $\xi$  и  $\eta$ ;

$J_{\xi\eta}$  — центробежный момент инерции этого элемента относительно центральных осей его, параллельных осям  $\xi$  и  $\eta$ .

Если оси  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$  — главные оси элемента, что имеет место для таких составных элементов профиля, как листы, двутавры и швеллеры, то  $J_{\bar{\xi}\bar{\eta}} = 0$ ; для уголков же горизонтальная и вертикальная оси (оси, параллельные полкам уголка) не являются главными, а поэтому для них  $J_{\bar{\xi}\bar{\eta}} \neq 0$ . Они должны быть вычислены или взяты из таблиц. Таблиц центробежных моментов инерции уголков мы в литературе не встречали, а потому составили их сами (приложение 5 и 6)<sup>1</sup>.

Главные оси сечения, как известно, находятся из условия, что центробежный момент инерции сечения относительно их равен нулю:

$$J_{xy} = 0. \quad (5)$$

Главная же секториальная точка  $M_0$ , служащая началом отсчета секториальных координат, находится из аналогичного условия (17) главы II:

$$S_{\omega} = 0, \quad (6)$$

выражающего ту мысль, что равнодействующая секториальных нормальных напряжений, т. е. нормальных напряжений, возникших только от кручения стержня, для всего поперечного сечения его равна нулю.

Условию (6), как правило, удовлетворяют не одна, а несколько точек профиля, имеющих секториальные координаты, равные нулю. Главной секториальной точкой условимся считать ту из них, которая находится на кратчайшем расстоянии от центра изгиба; остальные же будем называть просто секториальными нулевыми точками.

---

<sup>1</sup> Центробежный момент инерции  $J_{\xi\eta}$  равнобокого уголка вычислен по формуле:

$$J_{\xi\eta} = J_{\xi} - J_{\xi_0},$$

где  $J_{\xi}$  — момент инерции относительно центральной оси, параллельной полке уголка;

$J_{\xi_0}$  — главный максимальный момент инерции уголка.

Формула эта получена из совместного решения общезвестных уравнений:

$$J_{\xi_0} + J_{\eta_0} = J_{\xi} + J_{\eta};$$

$$J_{\xi_0} - J_{\eta_0} = (J_{\xi} - J_{\eta}) \cos 2\varphi - 2J_{\xi\eta} \sin 2\varphi.$$

Складывая эти равенства и принимая во внимание, что для равнобокого уголка  $\varphi = 45^\circ$  и  $J_{\xi} = J_{\eta}$ , получаем:

$$J_{\xi\eta} = J_{\xi} - J_{\xi_0}.$$

Центробежный момент неравнобокого уголка мы вычислили по формуле:

$$J_{\xi\eta} = -\frac{J_{\xi} - J_{\eta}}{2} \operatorname{tg} 2\varphi,$$

полученной из формулы:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2J_{\xi\eta}}{J_{\eta} - J_{\xi}}.$$

Заметим, что главные моменты инерции сечения  $J_x$  и  $J_y$ , встречаемые в формуле (2), проще всего определять путем совместного решения уравнений:

$$\left. \begin{aligned} J_x + J_y &= J_\xi + J_\eta \\ J_x - J_y &= (J_\xi - J_\eta) \cos 2\varphi - 2J_{\xi\eta} \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

## § 22. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЕКТОРИАЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОСТЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ

### 1. Секториальная координата при переносе полюса

На фиг. 84 изображена часть контура тонкостенного стержня, отнесенного к системе  $XOY$  осей координат. Примем точку  $\bar{M}_0(x_0, y_0)$  за начало отсчета секториальных координат. Секториальная координата какой-нибудь точки  $M(x, y)$  контура будет измеряться удвоенной площадью фигуры  $D\bar{M}_0M$ , где  $D(d_x, d_y)$  — произвольно выбранный полюс отсчета секториальных координат. По знаку она положительна как описанная подвижным радиусом-вектором  $DM$ , вращающимся от начального радиуса-вектора  $D\bar{M}_0$  против движения часовой стрелки. Обозначим ее через  $\omega_D$ .

Перенесем теперь полюс отсчета секториальных координат из точки  $D$  в точку  $B(b_x, b_y)$  и обозначим проекции расстояния  $DB$  на оси координат через  $c_x$  и  $c_y$ , а секториальную координату точки  $M$  при новом полюсе  $B$  через  $\omega_B$  (на фиг. 84 заштрихована пунктиром).

Из чертежа нетрудно получить, что

$$\omega_B = \omega_D + c_y(x - d_x) - c_x(y - b_y) - c_x(b_y - y_0) - c_y(x_0 - d_x),$$

откуда

$$\omega_B = \omega_D - c_x(y - y_0) + c_y(x - x_0). \quad (8)^1$$

### 2. Секториальная координата при переносе начальной точки $\bar{M}_0$

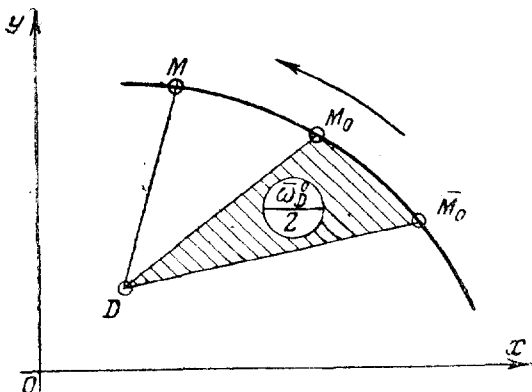
Пусть при неизменном полюсе  $D$  начальная точка  $\bar{M}_0$  перенесена в точку  $M_0$  контура (фиг. 85).

<sup>1</sup> Формулы (8) и (9) выведены проф. Власовым и имеются в его работах.

Тогда нетрудно видеть, что секториальная координата точки  $M$  при новом начале отсчета  $M_0$  выразится формулой:

$$\omega_D = \omega_D - \omega_D^0, \quad (9)$$

где  $\bar{\omega}_D^0$  — удвоенная секториальная площадь, ограниченная векторами  $\overline{DM_0}$  и  $\overline{DM_0}$  и дугой  $\overline{M_0M_0}$ , т. е. секториальная координата новой начальной точки  $M_0$ , отсчитанная от старой начальной точки  $M_0$  с полюсом в точке  $D$ .



Фиг. 85.

### 3. Линейные координаты при переносе начала и повороте осей координат

На фиг. 86 изображена часть контура тонкостенного профиля, относенного к системе осей  $\bar{\xi}\bar{\eta}$ .

Обозначим координаты какой-нибудь точки  $M$  контура в этой системе через  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$ .

Перенесем теперь начало координат  $\bar{O}$  в точку  $O$  и кроме того повернем оси на некоторый положительный (против часовой стрелки) угол  $\varphi$ .

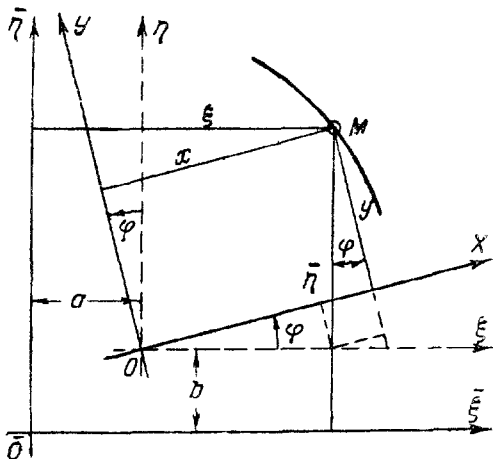
Тогда координаты точки  $M$  в новой системе осей  $XOY$  выразятся так:

$$\left. \begin{aligned} x &= (\bar{\xi} - a) \cos \varphi + \\ &+ (\bar{\eta} - b) \sin \varphi; \\ y &= (\bar{\eta} - b) \cos \varphi - \\ &- (\bar{\xi} - a) \sin \varphi, \end{aligned} \right\} (10)$$

где  $a$  и  $b$  — координаты нового начала в старой системе осей координат.

### 4. Общая формула преобразования секториальных координат

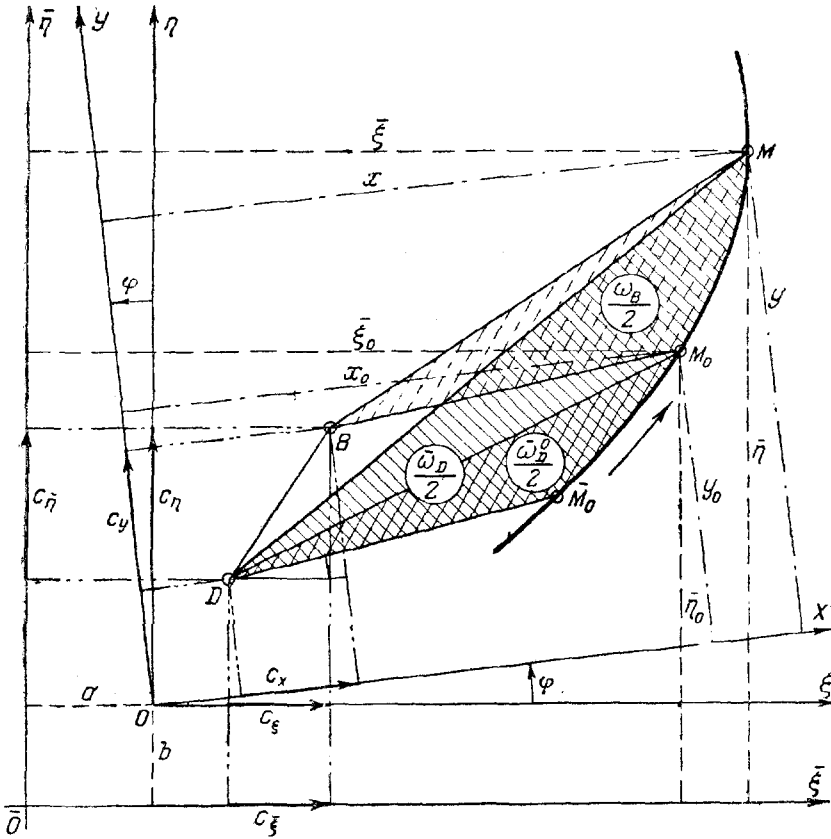
Для получения общей формулы преобразования секториальных координат прежде всего напомним формулы преобразования проекций  $c_x$  и  $c_y$  и разностей  $x - x_0$  и  $y - y_0$ , входящих в формулу (8), при переносе начала и повороте системы осей координат.



Фиг. 86.

Из фиг. 87 нетрудно видеть, что

$$\left. \begin{aligned} c_x &= c_{\xi} \cos \varphi + c_{\eta} \sin \varphi; \\ c_y &= c_{\eta} \cos \varphi - c_{\xi} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$



Фиг. 87.

Разности  $(x - x_0)$  и  $(y - y_0)$  являются проекциями дуги  $MM_0$  на оси  $X$  и  $Y$ , поэтому, пользуясь формулой (11), можем написать:

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= (\bar{\xi} - \bar{\xi}_0) \cos \varphi + (\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) \sin \varphi; \\ y - y_0 &= (\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) \cos \varphi - (\bar{\xi} - \bar{\xi}_0) \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$  — координаты точки  $M$ , а  $\bar{\xi}_0$  и  $\bar{\eta}_0$  — координаты точки  $M_0$  в старых осях  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$ .

Обозначим через  $\omega_D$  секториальную координату произвольной точки контура  $M$  с полюсом в точке  $B$  и с началом отсчета в точке  $M_0$  (на фиг. 87 заштрихована пунктиром).

Тогда, подставив в формулу (8) вместо  $\omega_D$  его значение из формулы (9), получим:

$$\omega_B = \bar{\omega}_D - \bar{\omega}_D^0 - c_x(y - y_0) + c_y(x - x_0).$$

Будем теперь считать, что фигурирующая в последней формуле система осей координат  $XOY$  появилась в результате переноса начала и поворота на положительный угол  $\varphi$  системы осей  $\bar{\xi}\bar{\eta}$ . В таком случае на основании формул (11) и (12) можно написать:

$$\omega_B = \bar{\omega}_D - \bar{\omega}_D^0 - (c_\xi \cos \varphi + c_\eta \sin \varphi) [(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) \cos \varphi - (\bar{\xi} - \bar{\xi}_0) \sin \varphi] + (c_\eta \cos \varphi - c_\xi \sin \varphi) [(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0) \cos \varphi + (\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) \sin \varphi],$$

откуда после преобразования получим:

$$\omega_B = \bar{\omega}_D - \bar{\omega}_D^0 - c_\xi(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) + c_\eta(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0). \quad (13)$$

Формула (13) и есть общая формула преобразования секториальных координат.

Здесь  $\omega_B$  — секториальная координата произвольной точки контура  $M$  с полюсом в точке  $B$ , отсчитанная от начальной точки  $M_0$ ;

$\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$  и  $\bar{\omega}_D$  — линейные и секториальная координаты той же точки контура  $M$  в осях  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$  с полюсом в точке  $D$  и с началом отсчета в точке  $\bar{M}_0$ ;

$\bar{\xi}_0$ ,  $\bar{\eta}_0$  и  $\bar{\omega}_D^0$  — линейные и секториальная координаты начальной точки контура  $M_0$  в тех же осях и с тем же полюсом и началом отсчета;

$c_\xi$  и  $c_\eta$  — проекции расстояния  $DB$  между полюсами  $D$  и  $B$  на оси  $\xi$  и  $\eta$ .

## 5. Секториальный статический момент

Подставив в подинтегральное выражение секториального статического момента

$$S_{\omega_B} = \int_F \omega_B dF$$

значение секториальной координаты  $\omega_B$  из формулы (13), получим:

$$S_{\omega_B} = \int_F [\bar{\omega}_D - \bar{\omega}_D^0 - c_\xi(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) + c_\eta(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0)] dF,$$

или

$$S_{\omega_B} = S_{\bar{\omega}_D} - S_{\bar{\omega}_D^0} - S_{\bar{\xi}} c_\xi + S_{\bar{\eta}} c_\eta - F(\bar{\omega}_D^0 - c_\xi \bar{\eta}_0 + c_\eta \bar{\xi}_0),$$

где  $F$  — площадь, а  $S_{\bar{\xi}}$  и  $S_{\bar{\eta}}$  — статические моменты сечения относительно осей  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$ ;

$S_{\bar{\omega}_D}$  — секториальный статический момент сечения относительно полюса  $D$ .

Допустим теперь, что оси  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$  — центральные оси сечения, точка  $D$  — центр изгиба, а точка  $\bar{M}_0$  — секториальная нулевая точка сечения стержня, тогда

$$S_{\bar{\xi}} = S_{\bar{\eta}} = S_{\omega_D} = 0, \quad (14)$$

и формула для секториального статического момента относительно произвольного полюса  $B$  и при произвольной начальной точке отсчета  $M_0$  примет следующий вид:

$$S_{\omega_B} = F(c_{\xi}\bar{\eta}_0 - c_{\eta}\bar{\xi}_0 - \bar{\omega}_D). \quad (15)$$

## 6. Секториально-линейные статические моменты

Подставив в формулы секториально-линейных статических моментов:

$$S_{\omega_B x} = \int_F \omega_B x dF$$

и

$$S_{\omega_B y} = \int_F \omega_B y dF$$

значения линейных координат  $x$  и  $y$  из формул (10) и секториальной координаты  $\omega_B$  из формулы (13), получим:

$$\begin{aligned} S_{\omega_B x} = & \int_F [\bar{\omega}_D - \bar{\omega}_D^{\circ} - c_{\xi}(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) + c_{\eta}(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0)] \cdot \\ & \cdot [(\bar{\xi} - a) \cos \varphi + (\bar{\eta} - b) \sin \varphi] dF = S_{\omega_D \bar{\xi}} \cos \varphi - S_{\omega_D} a \cos \varphi + \\ & + S_{\omega_D \bar{\eta}} \sin \varphi - S_{\omega_D} b \sin \varphi - S_{\bar{\eta}} \bar{\omega}_D^{\circ} \cos \varphi + F \bar{\omega}_D^{\circ} a \cos \varphi - S_{\bar{\xi}} \bar{\omega}_D^{\circ} \sin \varphi + \\ & + F \bar{\omega}_D^{\circ} b \sin \varphi - J_{\bar{\xi} \bar{\eta}} c_{\xi} \cos \varphi + S_{\bar{\xi}} c_{\xi} a \cos \varphi - J_{\bar{\xi}} c_{\xi} \sin \varphi + \\ & + S_{\bar{\xi}} c_{\xi} b \sin \varphi + S_{\bar{\eta}} c_{\xi} \bar{\eta}_0 \cos \varphi - F c_{\xi} \bar{\eta}_0 a \cos \varphi + S_{\bar{\xi}} c_{\xi} \bar{\eta}_0 \sin \varphi - \\ & - F c_{\xi} \bar{\eta}_0 b \sin \varphi + J_{\bar{\eta}} c_{\eta} \cos \varphi - S_{\bar{\eta}} c_{\eta} a \cos \varphi + \\ & + J_{\bar{\xi} \bar{\eta}} c_{\eta} \sin \varphi - S_{\bar{\eta}} c_{\eta} b \sin \varphi - S_{\bar{\eta}} c_{\eta} \bar{\xi}_0 \cos \varphi + \\ & + F c_{\eta} \bar{\xi}_0 a \cos \varphi - S_{\bar{\xi}} c_{\eta} \bar{\xi}_0 \sin \varphi + F c_{\eta} \bar{\xi}_0 b \sin \varphi. \end{aligned}$$

Если оси  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$  являются не только центральными, но и главными, то:

$$S_{\bar{\xi}} = S_{\bar{\eta}} = S_{\omega_D} = S_{\omega_D \bar{\xi}} = S_{\omega_D \bar{\eta}} = J_{\bar{\xi} \bar{\eta}} = 0 \quad (16)$$

и формула для секториально-линейного статического момента  $S_{\omega_B x}$  примет следующий вид:

$$\begin{aligned} S_{\omega_B x} = & -J_{\bar{\xi}} c_{\xi} \sin \varphi + J_{\bar{\eta}} c_{\eta} \cos \varphi + \\ & + F(a \cos \varphi + b \sin \varphi)(\bar{\omega}_D^{\circ} - c_{\xi} \bar{\eta}_0 + c_{\eta} \bar{\xi}_0). \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогичным образом получим:

$$S_{\omega_{By}} = -J_{\bar{\xi}} c_{\bar{\xi}} \cos \varphi - J_{\bar{\eta}} c_{\bar{\eta}} \sin \varphi + \\ + F(b \cos \varphi - a \sin \varphi)(\bar{\omega}_D^{\circ} - c_{\bar{\xi}} \bar{\eta}_0 + c_{\bar{\eta}} \bar{\xi}_0). \quad (18)$$

В формулах (17) и (18) приняты обозначения:

$J_{\bar{\xi}}$  и  $J_{\bar{\eta}}$  — главные моменты инерции сечения;

$\varphi$  — положительный (против часовой стрелки) угол поворота системы осей  $XOY$  по отношению к системе главных осей сечения  $\bar{\xi}O\bar{\eta}$ ;

$a$  и  $b$  — координаты нового начала  $O$  в системе главных осей  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$ .

Остальные обозначения были даны выше, к формуле (13).

## 7. Секториальный момент инерции

Подставив в формулу секториального момента инерции

$$J_{\omega_B} = \int_F \omega_B^2 dF$$

значение секториальной координаты  $\omega_B$  из формулы (13), получим:

$$J_{\omega_B} = \int_F [\bar{\omega}_D - \bar{\omega}_D^{\circ} - c_{\bar{\xi}}(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) + c_{\bar{\eta}}(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0)]^2 dF = \\ = J_{\omega_D} + F\bar{\omega}_D^{\circ 2} + J_{\bar{\xi}} c_{\bar{\xi}}^2 + Fc_{\bar{\xi}}^2 \bar{\eta}_0^2 - 2S_{\bar{\xi}} c_{\bar{\xi}} \bar{\eta}_0 + \\ + J_{\bar{\eta}} c_{\bar{\eta}}^2 + Fc_{\bar{\eta}}^2 \bar{\xi}_0^2 - 2S_{\bar{\eta}} c_{\bar{\eta}} \bar{\xi}_0 - 2S_{\omega_D} \bar{\omega}_D^{\circ} - \\ - 2S_{\omega_D \bar{\eta}} c_{\bar{\xi}} + 2S_{\omega_D} c_{\bar{\xi}} \bar{\eta}_0 + 2S_{\omega_D \bar{\xi}} c_{\bar{\eta}} - 2S_{\omega_D} c_{\bar{\eta}} \bar{\xi}_0 + \\ + 2S_{\bar{\xi}} \bar{\omega}_D^{\circ} c_{\bar{\xi}} - 2F\bar{\omega}_D^{\circ} c_{\bar{\xi}} \bar{\eta}_0 - 2S_{\bar{\eta}} \bar{\omega}_D^{\circ} c_{\bar{\eta}} + 2F\bar{\omega}_D^{\circ} c_{\bar{\eta}} \bar{\xi}_0 - \\ - 2J_{\bar{\xi} \bar{\eta}} c_{\bar{\xi}} c_{\bar{\eta}} + 2S_{\bar{\xi}} c_{\bar{\xi}} c_{\bar{\eta}} \bar{\xi}_0 + 2S_{\bar{\eta}} c_{\bar{\xi}} c_{\bar{\eta}} \bar{\eta}_0 - 2Fc_{\bar{\xi}} c_{\bar{\eta}} \bar{\xi}_0 \bar{\eta}_0.$$

Если  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$  — главные оси сечения,  $D$  — центр изгиба и  $\bar{M}^0$  — секториальная нулевая точка его, то

$$S_{\bar{\xi}} = S_{\bar{\eta}} = S_{\omega_D} = S_{\omega_D \bar{\xi}} = S_{\omega_D \bar{\eta}} = J_{\bar{\xi} \bar{\eta}} = 0,$$

и формула для секториального момента инерции примет следующий вид:

$$J_{\omega_B} = J_{\omega_D} + J_{\bar{\xi}} c_{\bar{\xi}}^2 + J_{\bar{\eta}} c_{\bar{\eta}}^2 + F(\bar{\omega}_D^{\circ} - c_{\bar{\xi}} \bar{\eta}_0 + c_{\bar{\eta}} \bar{\xi}_0)^2. \quad (19)$$

Здесь  $J_{\omega_D}$  — секториальный момент инерции сечения с полюсом в центре изгиба его  $D$ .

Остальные обозначения даны к формулам (13) и (18).



**§ 23. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ИЗГИБА, ГЛАВНОЙ СЕКТОРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ГЛАВНОГО СЕКТОРИАЛЬНОГО МОМЕНТА ИНЕРЦИИ СЛОЖНЫХ ПРОФИЛЕЙ**

**1. Координаты центра изгиба**

Координаты центра изгиба определяются формулами (2):

$$\alpha_x = \frac{S_{\omega_{By}}}{J_y}; \quad \alpha_y = -\frac{S_{\omega_{Bx}}}{J_x}.$$

Для сложных (клепаных или сварных) металлических профилей, составленных из нескольких прокатных элементов (листов, уголков, швеллеров и т. п.), числители формулы (2), являющиеся секториально-линейными статическими моментами, можно определять как суммы секториально-линейных статических моментов сечений элементов, из которых составлен сложный профиль (по теореме интеграл суммы равен сумме интегралов):

$$\left. \begin{aligned} S_{\omega_{Bx}} &= S'_{\omega_{Bx}} + S''_{\omega_{Bx}} + S'''_{\omega_{Bx}} + \dots, \\ S_{\omega_{By}} &= S'_{\omega_{By}} + S''_{\omega_{By}} + S'''_{\omega_{By}} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где знаки ', ", ''', ..., указывают на номера элементов, составляющих профиль.

Для упрощения вычисления по формулам (20) рекомендуется выбирать за произвольный полюс  $B$  и начальную точку отсчета секториальных координат  $M_0$  соответственно центр изгиба и главную секториальную точку наиболее сложного из элементов, составляющих рассматриваемый профиль. При таком выборе соответствующие слагаемые правых частей формул (20) обращаются в нули. Слагаемые, не равные нулю, вычисляются по формулам (17) и (18).

В этих формулах  $\bar{\xi}_0$ ,  $\bar{\eta}_0$  и  $\bar{\omega}_D^2$  будут линейные и секториальная координаты принятой начальной точки отсчета  $M_0$ , отсчитанные от главных центральных осей  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$  и главной секториальной точки  $\bar{M}_0$  соответствующего элемента;

$a$  и  $b$  — линейные координаты центра тяжести всего сечения в главных центральных осях элемента;

$c_\xi$  и  $c_\eta$  — проекции расстояния от центра изгиба рассматриваемого элемента до точки  $B$  на главные оси этого элемента. Остальные обозначения указаны выше к формулам (17) и (18).

Найденные таким образом координаты  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  следует отложить от выбранного вспомогательного полюса  $B$  по направлению соответствующих главных осей сложного сечения.

Обозначим координаты центра изгиба всего сечения  $A$  в главных центральных осях (отсчитываемые от центра тяжести сечения) через  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$ . Для их определения следует предварительно вычислить координаты точки  $B(b_x, b_y)$  в тех же осях. Они, очевидно, будут равны [см. формулу (10) и фиг. 88].

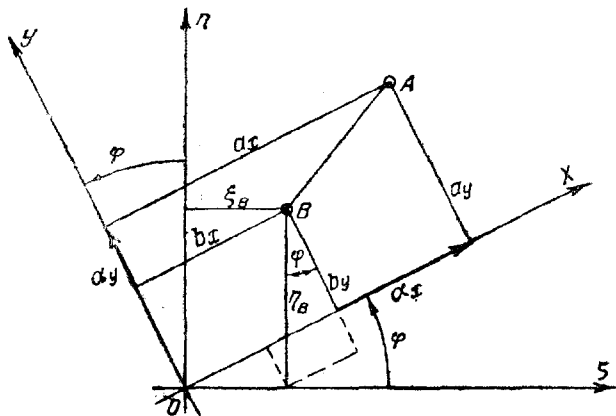
$$\left. \begin{aligned} b_x &= \xi_B \cos \varphi + \eta_B \sin \varphi; \\ b_y &= \eta_B \cos \varphi - \xi_B \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где  $\xi_B$  и  $\eta_B$  — координаты точки  $B$  в системе центральных горизонтальной и вертикальной осей  $\xi O \eta$ .

Тогда

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \alpha_x + b_x; \\ a_y &= \alpha_y + b_y. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Если сечение имеет ось симметрии, то, выбрав вспомогательный полюс  $B$  и начальную точку отсчета секториальных координат  $M_0$  на этой оси, получим, что секториально-линейный статический момент относительно полюса и этой оси будет равен нулю, а это значит, что центр изгиба лежит на оси симметрии. Если сечение



Фиг. 88.

имеет две оси симметрии, то центр изгиба лежит на пересечении этих осей, т. е. совпадает с центром тяжести сечения. Этим же свойством обладают профили, удовлетворяющие условиям точечной симметрии, как, например, зетовый профиль; хотя они и несимметричны, но центр изгиба их также совпадает с центром тяжести сечения.

Центр изгиба уголкового, таврового или крестового профиля и вообще любого профиля, состоящего из пучка пластинок, находится в точке пересечения осей сечений отдельных граней, так как равнодействующая касательных напряжений при изгибе (считая, что нормальные напряжения по толщине элементов распределяются равномерно) проходит через центр пучка. Это вытекает также из формул (2); выбрав вспомогательный полюс в центре пучка, получим, что числители этих формул обратятся в нуль.

## 2. Главная секториальная точка

Главная секториальная точка  $M_0$  находится, как было сказано выше, из условия равенства нулю секториального статического момента сечения с полюсом в центре изгиба  $A$ , т. е. из условия:

$$S_{\omega_A} = 0. \quad (23)$$

Условию (23), как было указано выше, удовлетворяет не одна, а несколько секториальных нулевых точек профиля.

Хотя все эти точки совершенно равноправны, но для определенности, которая нам будет полезна в дальнейшем, одну из них, а именно точку, которая находится на кратчайшем расстоянии от центра изгиба, мы условились называть главной секториальной точкой профиля.

Например, у швеллера соответственно числу граней его имеются три секториальные нулевые точки (фиг. 89), главной же из них будем называть точку пересечения оси симметрии профиля с осью стенки как ближайшую к центру изгиба.

И вообще у профилей, имеющих одну ось симметрии, главная секториальная точка находится в точке пересечения контура сечения с этой осью. У профилей, имеющих две оси симметрии, главная секториальная точка совпадает с центром изгиба, являющимся, как указывалось выше, и центром тяжести сечения.

В уголкового, таврового и крестового профилей главная секториальная точка также совпадает с центром изгиба, т. е. находится в точке пересечения осей сечений отдельных граней.

Для сложных несимметричных профилей условие (23) в развернутом виде может быть записано так:

$$S'_{\omega_A} + S''_{\omega_A} + S'''_{\omega_A} + \dots = 0, \quad (23')$$

где каждое из слагаемых определяется по формуле (15). В этом случае в формуле (15)  $c_{\xi}$  и  $c_{\eta}$  означают проекции расстояния  $DA$  от центра изгиба элемента сечения  $D$  до центра изгиба всего сечения  $A$  на главные оси элемента  $\xi$  и  $\eta$ . Обозначим эти проекции через  $c_{\xi}$  и  $c_{\eta}$ . Тогда формула (15) примет следующий вид:

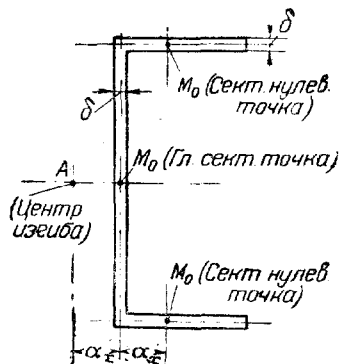
$$S_{\omega_A} = F(c_{\xi} \bar{\xi}_0 - c_{\eta} \bar{\eta}_0 - \bar{\omega}_D^0). \quad (24)$$

Здесь  $\bar{\xi}_0$ ,  $\bar{\eta}_0$  и  $\bar{\omega}_D^0$  — линейные и секториальная координаты искомой главной секториальной точки всего сечения  $M_0$ , отсчитанные от главных центральных осей и главной секториальной точки  $\bar{M}_0$  соответствующего элемента сечения.

В практических расчетах в качестве искомой главной секториальной точки рекомендуется принять произвольную точку на оси грани, ближайшей к центру изгиба сечения, выразив координаты ее в функции какого-нибудь параметра  $t$  (например, в функции расстояния от одного из концов этой грани), и затем из уравнения (23) найти значение  $t$ .

### 3. Секториальные координаты характерных точек профиля

Считая центр изгиба сечения  $A$  и главную секториальную точку  $M_0$  известными, можно определить секториальные координаты контура сече-



Фиг. 89.

ния по формуле (13) с заменой в ней  $c_\xi$  и  $c_\eta$  на  $c_{\bar{\xi}}$  и  $c_{\bar{\eta}}$ , т. е. по формуле:

$$\omega_A = \bar{\omega}_D - \bar{\omega}_D^0 - c_{\bar{\xi}}(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) + c_{\bar{\eta}}(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0). \quad (25)$$

Здесь  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$  и  $\bar{\omega}_D$  — линейные и секториальная координаты рассматриваемой точки контура, отсчитываемые от главных центральных осей, центра изгиба и главной секториальной точки соответствующего элемента сечения;

$\bar{\xi}_0$ ,  $\bar{\eta}_0$  и  $\bar{\omega}_D^0$  — линейные и секториальная координаты главной секториальной точки всего сечения, отсчитанные от тех же осей и точек;

$c_{\bar{\xi}}$  и  $c_{\bar{\eta}}$  — проекции расстояния между центром изгиба соответствующего элемента  $D$  и центром изгиба всего сечения  $A$  на главные оси элемента  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$ .

#### 4. Главный секториальный момент инерции

Главным секториальным моментом инерции будем называть секториальный момент инерции профиля, взятый относительно центра изгиба его  $A$  и главной секториальной точки контура  $M_0$ . В дальнейшем будем обозначать его просто через  $J_\omega$ .

Для сложных профилей главный секториальный момент инерции всего сечения  $J_\omega$  можно определить как сумму секториальных моментов инерции элементов, из которых составлен профиль, относительно общего центра изгиба  $A$  и главной секториальной точки составного профиля  $M_0$  по формуле:

$$J_\omega = J_{\omega_A} = J'_{\omega_A} + J''_{\omega_A} + J'''_{\omega_A} + \dots \quad (26)$$

Каждое из слагаемых правой части вычисляется по формуле (19) с заменой в ней  $c_\xi$  и  $c_\eta$  на  $c_{\bar{\xi}}$  и  $c_{\bar{\eta}}$ , т. е. по формуле:

$$J_\omega = J_{\bar{\omega}_D} + J_{\bar{\xi}} c_{\bar{\xi}}^2 + J_{\bar{\eta}} c_{\bar{\eta}}^2 + F(\bar{\omega}_D^0 - c_{\bar{\xi}} \bar{\eta}_0 + c_{\bar{\eta}} \bar{\xi}_0)^2, \quad (27)$$

где  $J_{\bar{\xi}}$ ,  $J_{\bar{\eta}}$  и  $J_{\bar{\omega}_D}$  — главные экваториальные и главный секториальный моменты инерции соответствующего элемента сечения.

Остальные обозначения те же, что и для формулы (25).

### § 24. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СЕКТОРИАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОКАТНЫХ УГОЛКОВ

Направления главных центральных осей равнобоких и неравнобоких уголков в отличие от других прокатных профилей (листов, швеллеров и двутавров), как известно, не совпадают с направлениями полок уголков, а составляют с ними некоторый угол  $\alpha$ . Для равнобоких уголков  $\alpha = 45^\circ$ , а для неравнобоких величина его дана в приложении 6. При определении геометрических секториальных характеристик сложных профилей, в состав которых входят уголки, указанное обстоятельство затрудняет пользование переходными формулами, выведенными в предыдущих параграфах, а поэтому для уголков мы их получили несколько иначе.

## 1. Секториально-линейные статические моменты

Переходные формулы (17) и (18) для определения секториально-линейных статических моментов были выведены в предположении, что оси  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$  являются главными центральными осями сечения.

Для уголков же в качестве этих осей целесообразнее принять центральные оси, параллельные полкам уголка. Точки же  $D$  и  $M_0$  будем попрежнему считать центром изгиба и главной секториальной точкой уголка. (Для уголка они, как известно, совпадают и находятся в пересечении осей полкок.)

Тогда  $J_{\bar{\xi}\bar{\eta}} \neq 0$  и равенства (16) запишутся так:

$$S_{\bar{\xi}} = S_{\bar{\eta}} = S_{\bar{\omega}_D} = S_{\bar{\omega}_{D\bar{\xi}}} = S_{\bar{\omega}_{D\bar{\eta}}} = 0. \quad (28)$$

При этих предпосылках формулы (17) и (18) примут следующий вид:

$$S_{\omega_{Bx}} = -J_{\bar{\xi}} c_{\xi} \sin \varphi + J_{\bar{\eta}} c_{\eta} \cos \varphi + J_{\bar{\xi}\bar{\eta}} (-c_{\xi} \cos \varphi + c_{\eta} \sin \varphi) + \\ + F(a \cos \varphi + b \sin \varphi) (\bar{\omega}_D^0 - c_{\xi} \bar{\eta}_0 + c_{\eta} \bar{\xi}_0); \quad (29)$$

$$S_{\omega_{By}} = -J_{\bar{\xi}} c_{\xi} \cos \varphi - J_{\bar{\eta}} c_{\eta} \sin \varphi + J_{\bar{\xi}\bar{\eta}} (c_{\xi} \sin \varphi + c_{\eta} \cos \varphi) + \\ + F(b \cos \varphi - a \sin \varphi) (\bar{\omega}_D^0 - c_{\xi} \bar{\eta}_0 + c_{\eta} \bar{\xi}_0). \quad (30)$$

Если главные оси сложного сечения, в состав которого входит уголок, будут параллельны центральным осям уголка  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$ , т. е. параллельны полкам уголка, то в таком случае:

$$\sin \varphi = 0, \quad \cos \varphi = 1,$$

и формулы (29) и (30) примут вид:

$$S_{\omega_{Bx}} = J_{\bar{\eta}} c_{\eta} - J_{\bar{\xi}\bar{\eta}} c_{\xi} + Fa (\bar{\omega}_D^0 - c_{\xi} \bar{\eta}_0 + c_{\eta} \bar{\xi}_0); \quad (31)$$

$$S_{\omega_{By}} = -J_{\bar{\xi}} c_{\xi} + J_{\bar{\xi}\bar{\eta}} c_{\eta} + Fb (\bar{\omega}_D^0 - c_{\xi} \bar{\eta}_0 + c_{\eta} \bar{\xi}_0). \quad (32)$$

В формулах (31) и (32) означают:  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$  — центральные оси уголка, параллельные его сторонам;

$X$  и  $Y$  — главные оси всего составного сечения (параллельные осям  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$ );

$J_{\bar{\xi}\bar{\eta}}$  — центробежный момент инерции уголка, значение которого следует брать из приложений 5 или 6 с указанным в них знаком;

$c_{\xi}$  и  $c_{\eta}$  — проекции на оси  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$  расстояния от центра изгиба уголка до точки  $B$ ;

$\bar{\xi}_0$ ,  $\bar{\eta}_0$  и  $\bar{\omega}_D^0$  — линейные и секториальная координаты принятой начальной точки отсчета  $M_0$ , отсчитанные от осей  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$  и главной секториальной точки  $\bar{M}_0$  уголка;

$a$  и  $b$  — координаты нового начала  $O$  в системе старых осей  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$ .

## 2. Секториальный статический момент

Переходная формула (15) для определения секториального статического момента уголка в предположении, что оси  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$  являются центральными осями уголка (но не главными), параллельными его сторонам, будет иметь тот же вид, а именно:

$$S_{\omega_B} = F(c_{\xi}\bar{\eta}_0 - c_{\eta}\bar{\xi}_0 - \bar{\omega}_D^0). \quad (33)$$

Обозначения к формуле (33) те же, что и для формул (29)—(32).

## 3. Секториальный момент инерции

Составим переходную формулу для определения секториального момента инерции уголка при тех же предпосылках, что и в предыдущих пунктах настоящего параграфа, т. е. при  $J_{\bar{\xi}\bar{\eta}} \neq 0$ ; при этом нужно иметь в виду, что для уголка  $J_{\bar{\omega}_D} = 0$ . При этих условиях формула (19) примет вид:

$$J_{\omega_B} = J_{\bar{\xi}}c_{\xi}^2 + J_{\bar{\eta}}c_{\eta}^2 - 2J_{\bar{\xi}\bar{\eta}}c_{\xi}c_{\eta} + F(\omega_D^0 - c_{\xi}\bar{\eta}_0 + c_{\eta}\bar{\xi}_0)^2, \quad (34)$$

а формула (27) примет вид:

$$J_{\omega} = J_{\bar{\xi}}c_{\xi}^2 + J_{\bar{\eta}}c_{\eta}^2 - 2J_{\bar{\xi}\bar{\eta}}c_{\xi}c_{\eta} + F(\bar{\omega}_D^0 - c_{\xi}\bar{\eta}_0 + c_{\eta}\bar{\xi}_0)^2. \quad (35)$$

Здесь  $c_{\xi}$  и  $c_{\eta}$  — проекции расстояния от центра изгиба уголка до центра изгиба всего составного сечения на центральные оси  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$ , параллельные полкам уголка.

Остальные обозначения даны выше к формулам (29)—(32).

## § 25. НЕКОТОРЫЕ УПРОЩЕНИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ СЕКТОРИАЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СОСТАВНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ

1. Рассмотрим сплошной незамкнутый тонкостенный профиль, сечение которого имеет одну (или две) ось симметрии и может быть разложено на элементы с осями симметрии, совмещенными с осью симметрии всего сечения. Условие этому удовлетворяет профиль, изображенный на фиг. 90. Сечение этого профиля может рассматриваться как состоящее из трех элементов 1, 2 и 3 (элементы 1 и 3 на фигуре заштрихованы, а элемент 2 не заштрихован). Пусть центры изгиба отдельных элементов сечения известны. Обозначим их соответственно через  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$ , а расстояния их до центра изгиба всего сечения  $A$  — через  $\alpha_{y1}$ ,  $\alpha_{y2}$  и  $\alpha_{y3}$ . По второй из формул (2) координата центра изгиба

$$\alpha_y = - \frac{S_{\omega_B} x}{J_y}.$$

Пользуясь указаниями, данными в п. 1, § 23 для вычисления секториально-линейного статического момента  $S_{\omega_B}$ , выбираем вспомогатель-

ный полюс  $B$  в центре изгиба одного из элементов сечения, например, в точке  $D_1$ . Тогда будем иметь  $S_{\omega B x}^{(1)} = 0$  и формула (2) примет следующий вид:

$$\alpha_{y1} = - \frac{S_{\omega B x}^{(2)} + S_{\omega B x}^{(3)}}{J_y} \quad (36)$$

Раскрывая по формуле (17) оба члена числителя в формуле (36), получаем:

$$S_{\omega B x}^{(2)} = J_{2y} c_{12}$$

(так как для элемента 2:  $\sin \varphi = 0$ ;  $\cos \varphi = 1$ ;  $a = 0$ ;  $J_{\eta} = J_{2y}$  и  $c_{\eta} = c_{12}$ ), и совершенно аналогично

$$S_{\omega B x}^{(3)} = J_{3y} c_{13}$$

Формула (36) поэтому примет следующий вид:

$$\alpha_{y1} = - \frac{J_{2y} c_{12} + J_{3y} c_{13}}{J_y} \quad (37)$$

Если при вычислении  $S_{\omega B x}$  в качестве вспомогательного полюса  $B$  выбрать центр изгиба  $D_2$  элемента 2 или центр изгиба  $D_3$  элемента 3, то совершенно так же получится:

$$\alpha_{y2} = \frac{J_{1y} c_{12} - J_{3y} c_{23}}{J_y} \quad (38)$$

$$\alpha_{y3} = \frac{J_{1y} c_{13} + J_{2y} c_{23}}{J_y} \quad (39)$$

Формулы (37)–(39) показывают, что операция нахождения центра изгиба составного профиля аналогична нахождению центра параллельных сил. С этой целью моменты инерции отдельных элементов  $J_{1y}$ ,  $J_{2y}$ ,... следует представить в виде взаимно параллельных векторов, проходящих через соответствующие центры изгиба элементов  $D_1, D_2, \dots$ . Тогда линия действия равнодействующего вектора  $J_y$  будет проходить через центр изгиба составного профиля  $A$ . На фиг. 90 воображаемые векторы изображены пунктирными стрелками.

Переходим теперь к определению секториального момента инерции  $J_{\omega}$  рассматриваемого сечения.

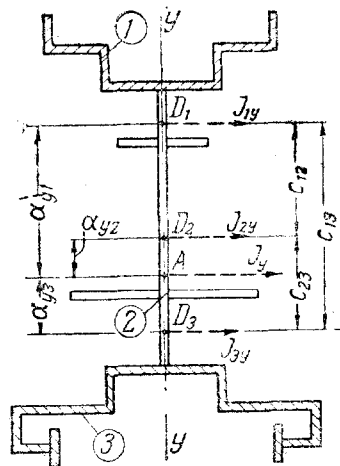
Как известно:

$$J_{\omega} = J_{1\omega} + J_{2\omega} + J_{3\omega} + \dots, \quad (40)$$

где каждое из слагаемых правой части определяется по формуле (27)<sup>1</sup>.

Принимая во внимание, что для всех элементов рассматриваемого нами профиля

$$\omega_D^0 = 0; \quad c_z = 0 \quad \text{и} \quad \xi_0 = 0,$$



Фиг. 90.

<sup>1</sup> В дальнейшем при пользовании формулами § 22–24 черточки над значками координат для простоты записи будем опускать.

получим:

$$J_{1\omega} = J_{1\omega_D} + J_{1y}\alpha_{y1}^2; \quad (41)$$

$$J_{2\omega} = J_{2\omega_D} + J_{2y}\alpha_{y2}^2; \quad (42)$$

$$J_{3\omega} = J_{3\omega_D} + J_{3y}\alpha_{y3}^2. \quad (43)$$

Подставив последние выражения (41)—(43) в формулу (40) и принимая во внимание формулы (37)—(39), получим:

$$J_{\omega} = J_{1\omega_D} + J_{2\omega_D} + J_{3\omega_D} + \frac{J_{1y}(J_{2y}c_{12} + J_{3y}c_{13})^2}{J_y^2} + \\ + \frac{J_{2y}(J_{1y}c_{12} - J_{3y}c_{23})^2}{J_y^2} + \frac{J_{3y}(J_{1y}c_{13} + J_{2y}c_{23})^2}{J_y^2}$$

или

$$J_{\omega} = J_{1\omega_D} + J_{2\omega_D} + J_{3\omega_D} + \frac{1}{J_y^2} [J_{1y}J_{2y}c_{12}^2 (J_{2y} + J_{1y}) + \\ + J_{1y}J_{3y}c_{13}^2 (J_{3y} + J_{1y}) + J_{2y}J_{3y}c_{23}^2 (J_{3y} + J_{2y}) + \\ + 2J_{1y}J_{2y}J_{3y} (c_{12}c_{13} - c_{12}c_{23} + c_{13}c_{23})].$$

Принимая во внимание, что

$$2(c_{12}c_{13} - c_{12}c_{23} + c_{13}c_{23}) = c_{12}(c_{13} - c_{23}) + c_{13}c_{23} + c_{12}c_{13} + \\ + c_{23}(c_{13} - c_{12}) = c_{12}^2 + c_{13}(c_{12} + c_{23}) + c_{23}^2 = c_{12}^2 + c_{13}^2 + c_{23}^2,$$

будем иметь:

$$J_{\omega} = J_{1\omega_D} + J_{2\omega_D} + J_{3\omega_D} + \frac{1}{J_y^2} [J_{1y}J_{2y}c_{12}^2 (J_{2y} + J_{1y} + J_{3y}) + \\ + J_{1y}J_{3y}c_{13}^2 (J_{3y} + J_{1y} + J_{2y}) + J_{2y}J_{3y}c_{23}^2 (J_{3y} + J_{2y} + J_{1y})].$$

Так как

$$J_{1y} + J_{2y} + J_{3y} = J_y,$$

то окончательно получим:

$$J_{\omega} = J_{1\omega_D} + J_{2\omega_D} + J_{3\omega_D} + \frac{J_{1y}J_{2y}c_{12}^2 + J_{1y}J_{3y}c_{13}^2 + J_{2y}J_{3y}c_{23}^2}{J_y}. \quad (44)$$

Полученные формулы (37)—(39) и (44) для определения координаты центра изгиба и секториального момента инерции позволяют сформулировать следующую теорему.

Если сечение сплошного незамкнутого тонкостенного профиля имеет одну (или две) ось симметрии и сечение может быть разложено на элементы, из которых каждый имеет свою ось симметрии, совпадающую с осью симметрии всего сечения, то:

1) координата центра изгиба этого составного сечения, отсчитанная от центра изгиба какого-либо из элементов (начало отсчета), равна сумме произведений экваториальных моментов инерции остальных элементов относительно оси симметрии сечения на расстояния центров изгиба их от начала отсчета, деленной на



экваториальный момент инерции относительно оси симметрии всего составного сечения;

2) секториальный момент инерции этого составного сечения равен сумме собственных секториальных моментов инерции отдельных элементов (относительно своих центров изгиба) плюс сумма произведений экваториальных моментов инерции отдельных элементов, взятых попарно, на квадраты расстояний между центрами изгиба их, деленная на экваториальный момент инерции относительно оси симметрии всего составного сечения.

Доказанная нами теорема имеет большую практическую ценность. Пользование ею сводит довольно сложную задачу определения секториальных геометрических характеристик незамкнутых профилей к простым формулам, содержащим обыкновенные экваториальные моменты инерции и собственные секториальные моменты инерции элементов, составляющих сложный профиль, которые можно взять непосредственно из сортамента.

Кроме того эта теорема позволяет вычислять секториальные моменты инерции независимо от нахождения центра изгиба составного профиля, что также имеет существенное значение.

## 2. Практическое применение доказанной теоремы

а) Сварной двутавр. Профиль сварен из трех листов, причем верхняя и нижняя полки его имеют различную ширину (фиг. 91). Три элемента сечения рассматриваемого профиля пронумерованы.

Координату центра изгиба будем отсчитывать от центра изгиба (центра тяжести) верхнего горизонтального листа.

Тогда по формуле (37), считая  $J_{2y} = 0$ , получим:

$$\alpha_y = -\frac{J_{3y}h}{J_y}, \quad (45)$$

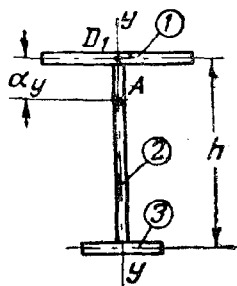
где  $h$  — расстояние между центрами тяжести горизонталов. Знак минус показывает, что  $\alpha_y$  следует отложить от точки  $D_1$  по отрицательной оси  $Y$  (вниз).

Секториальный момент инерции по формуле (44) (имея в виду, что собственный секториальный момент инерции прямоугольника равен нулю) будет равен:

$$J_{\omega} = \frac{J_{1y}J_{3y}h^2}{J_y}. \quad (46)$$

Для симметричного двутавра формулы (45) и (46) примут следующий вид:

$$\alpha_y = -\frac{J_{3y}h}{2J_{3y}} = -\frac{h}{2}$$



Фиг. 91.

(чего и следовало ожидать, так как центр изгиба симметричного двутавра совпадает с его центром тяжести), и

$$J_{\omega} = \frac{J_{1y}^2 h^2}{J_y} = \frac{J_y^2 h^2}{4J_y},$$

откуда

$$J_{\omega} = \frac{J_y h^2}{4}. \quad (47)$$

б) Профиль, составленный из прокатных двутавра и швеллера. Изображенный на фиг. 92 профиль применяется в практике для небольших подкрановых балок. Обозначим центр изгиба швеллера через  $D_1$  (положение его известно из сортамента, см. приложение 2), центр изгиба (центр тяжести) двутавра — через  $D_2$  и расстояние между ними — через  $h$ .

Координату центра изгиба всего составного сечения будем отсчитывать от точки  $D_2$ .

По формуле (38):

$$\alpha_y = \frac{J_{1y} h}{J_y}. \quad (48)$$

Секториальный момент инерции  $J_{\omega}$  по формуле (44) равен:

$$J_{\omega} = J_{1\omega} + J_{2\omega} + \frac{J_{1y} J_{2y} h^2}{J_y}, \quad (49)$$

где  $J_{1\omega}$  и  $J_{2\omega}$  — собственные секториальные моменты инерции швеллера и двутавра, известные из сортамента (приложения 1 и 2).

в) Клепанный двутавр, составленный из листа и четырех уголков (фиг. 93). Рассматриваемый профиль будем считать состоящим из трех элементов:

I — тавра из двух верхних уголков и части вертикальной стенки, заключенной между полками этих уголков (на фиг. 93 заштрихован);

III — тавра из двух нижних уголков и части стенки, заключенной между ними, и

II — части вертикальной стенки между таврами (на фигуре не заштрихована).

Центры изгиба тавров, как известно, находятся в пересечении осей стенок и полок их.

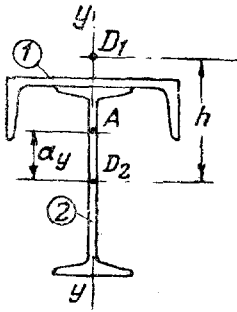
Обозначим расстояние между ними через  $h$ . Координату искомого центра изгиба составного сечения будем отсчитывать от центра изгиба верхнего тавра.

Тогда по формуле (37) (пренебрегаем моментом инерции вертикальной стенки):

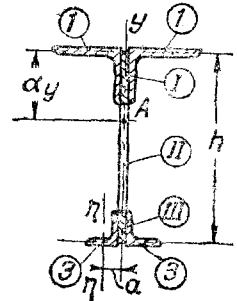
$$\alpha_y = \frac{J_{III} h}{J_y}$$

или

$$\alpha_y = \frac{2J_{2y} h}{J_y}, \quad (50)$$



Фиг. 92.



Фиг. 93.

где  $J_{3y}$  — момент инерции одного нижнего уголка относительно оси  $Y$ , равный:

$$J_{3y} = J_{3\eta} + F_3 a^2.$$

Секториальный момент инерции по формуле (44) равен:

$$J_{\omega} = \frac{J_{1y} J_{3y} h^2}{J_y}$$

или

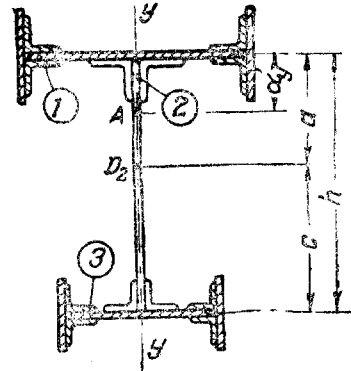
$$J_{\omega} = \frac{4 J_{1y} J_{3y} h^2}{J_y} \quad (51)$$

(собственные секториальные моменты инерции каждого из трех элементов — тавров и листа — равны нулю).

г) Н-образный профиль, составленный из трех клепаных двутавров (фиг. 94). Расстояние между центрами изгиба симметричных горизонтальных двутавров 1 и 3 (на фигуре заштрихованных) обозначим через  $h$ . Вертикальный двутавр — несимметричный. Центр изгиба его [определяется по формуле (50)] обозначим через  $D_2$ , а расстояние от него до центров изгиба верхнего и нижнего горизонтальных двутавров соответственно — через  $a$  и  $c$ .

Координаты центра изгиба составного сечения будем отсчитывать от центра изгиба двутавра 1 по формуле (37):

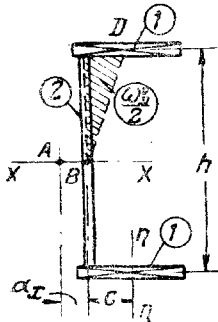
$$x_y = - \frac{J_y a + J_{3y} h}{J_y} \quad (52)$$



Фиг. 94.

Секториальный момент инерции составного сечения по формуле (44) будет равен:

$$J_{\omega} = J_{1\omega} + J_{2\omega} + J_{3\omega} + \frac{1}{J_y} (J_{1y} J_{2y} a^2 + J_{1y} J_{3y} h^2 + J_{2y} J_{3y} c^2). \quad (53)$$



Фиг. 95.

## § 26. ФОРМУЛЫ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ИЗГИБА И СЕКТОРИАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ НЕКОТОРЫХ СОСТАВНЫХ ПРОФИЛЕЙ

### 1. Швеллер, сваренный из трех листов

Определим координату центра изгиба и секториальный момент инерции швеллера, сваренного из трех листов (фиг. 95). Пронумеруем элементы: полки номером 1, а стенку — номером 2. Расстояние между горизонтальными осями полок обозначим через  $h$ , а расстояние между вертикальными осями стенки и полок — через  $c$ .

По первой из формул (2) координата центра изгиба

$$x_x = \frac{S_{\omega y}}{J_x}.$$

Вспомогательный полюс  $B$  выбираем в точке пересечения оси симметрии профиля с осью стенки. Тогда для второго элемента (для вертикального листа)  $S''_{\omega By} = 0$ , а для полок по формуле (18):

$$\begin{aligned} S_{\omega By} &= F_1 \left( -\frac{h}{2} \right) \left( c \frac{h}{2} - c \frac{h}{2} + \frac{h}{2} c \right) + \\ &+ F_1 \frac{h}{2} \left( -c \frac{h}{2} + c \frac{h}{2} - \frac{h}{2} c \right) = \\ &= -2F_1 \frac{h^2}{4} c = -2J_{1x} c, \end{aligned}$$

так как для полок  $J_{\xi} = 0$ ;  $\cos \varphi = 1$ ;  $\sin \varphi = 0$ ;  $\eta_0 = b = \mp \frac{h}{2}$ ;  $\xi_0 = a = -c$ ;  $\omega_D^0 = \pm c \frac{h}{2}$  (для верхней полки площадь  $\omega_D^0$  на фиг. 95 заштрихована);  $c_{\xi} = -c$ ;  $c_{\eta} = \mp \frac{h}{2}$  (верхние знаки относятся к верхней полке, нижние — к нижней).

В таком случае:

$$\alpha_x = -\frac{2J_{1x}c}{J_x}. \quad (54)$$

Секториальный момент инерции по формуле (27):

$$J_{\omega} = J_{2x} \alpha_x^2 + 2J_{1\eta} \left( \frac{h}{2} \right)^2 + 2F_1 \left[ c \frac{h}{2} - (\alpha_x + c) \frac{h}{2} + \frac{h}{2} c \right]^2,$$

так как

$$\begin{aligned} J_{1\omega D} = J_{2\omega D} &= 0; \quad c_{1\xi} = -(\alpha_x + c); \quad c_{2\xi} = -\alpha_x, \\ c_{1\eta} &= \mp \frac{h}{2}; \quad c_{2\eta} = 0, \end{aligned}$$

а выражение в скобках для стенки равно нулю.

Сделав преобразования и подставив значение  $\alpha_x$  из формулы (54), получим:

$$\begin{aligned} J_{\omega} &= J_{2x} \frac{4J_{1x}^2 c^2}{J_x^2} + 2J_{1\eta} \left( \frac{h}{2} \right)^2 + 2F_1 \left( \frac{h}{2} \right)^2 \left( -\frac{2J_{1x}c}{J_x} + c \right)^2 = \\ &= \frac{4J_{2x}J_{1x}^2 c^2}{J_x^2} + J_{1\eta} \frac{h^2}{2} + \frac{2J_{1x}J_{2x}^2 c^2}{J_x^2} = \\ &= \frac{2J_{1x}J_{2x}c^2}{J_x} \left( \frac{2J_{1x} + J_{2x}}{J_x} \right) + J_{1\eta} \frac{h^2}{2}, \end{aligned}$$

откуда

$$J_{\omega} = \frac{2J_{1x}J_{2x}c^2}{J_x} + J_{1\eta} \frac{h^2}{2}. \quad (55)$$

## 2. Швеллер, склепанный из листа и двух уголков (фиг. 96)

Пронумеруем элементы: уголки номером 1, а лист номером 2. Расстояние между центрами изгиба уголков по вертикали (между осями полок) обозначим через  $h$ , а расстояние между центрами тяжести угол-

ков по вертикали — через  $c$ . Расстояние между центрами изгиба и центрами тяжести листа и уголков по горизонтали обозначим соответственно через  $s$  и  $a$ . За ось  $X$  принимаем ось симметрии сечения, а за ось  $Y$  — вертикальную ось листа.

Вспомогательный полюс  $B$  выбираем в центре изгиба (центра тяжести) листа.

Тогда  $S''_{\omega_{BY}}$  будет равно нулю и формула (2) для определения координаты центра изгиба примет следующий вид:

$$\alpha_x = \frac{\sum S'_{\omega_{BY}}}{J_x}$$

Числитель этой формулы определяем по формуле (32), где  $c_\xi = -s$ ;  $c_\eta = \mp \frac{h}{2}$ ;

$$b = \mp \frac{c}{2}; \quad \omega_D^0 = \pm \left( -ds + \frac{c}{2}s \right);$$

$$\eta_0 = \mp \frac{c}{2}; \quad \xi_0 = -a$$

(верхние знаки относятся к верхнему уголку, нижние — к нижнему).

Примечание. Секториальная координата начальной точки вертикального листа (точки  $B$ )  $\omega_D^0$ , отсчитанная от главной секториальной точки уголка, совпадающей с центром изгиба его, вычислена в предположении, что лист соединяется с уголками заклепками, расположенными по схеме, изображенной на фиг. 97. Это несколько упрощает формулу, но, как увидим ниже, существенного влияния на величину  $\alpha_y$  не оказывает.

После соответственных подстановок получаем:

$$\alpha_x = \frac{1}{J_x} \left[ 2J_{1\xi}s - 2J_{1\xi}\eta \frac{h}{2} + 2F_1 \frac{c}{2} \left( -ds + \frac{c}{2}s - s \frac{c}{2} + \frac{h}{2}a \right) \right] = \frac{1}{J_x} \left[ - \left( J_{1\xi}\eta + F_1 a \frac{c}{2} \right) h + 2 \left( J_{1\xi} + F_1 \frac{c}{2} d \right) s \right]$$

или

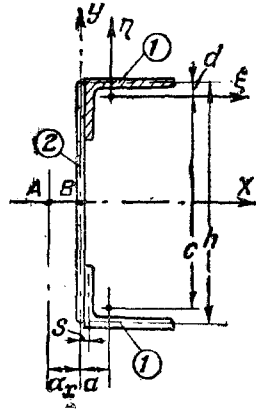
$$\alpha_x = \frac{J_{1xy}h - 2 \left( J_{1\xi} + F_1 \frac{c}{2} d \right) s}{J_x} \quad (56)$$

Численные подсчеты некоторых практических профилей показали, что второй член числителя в формуле (56) составляет не более 2—3% от первого члена, поэтому мы считаем возможным этим членом пренебречь.

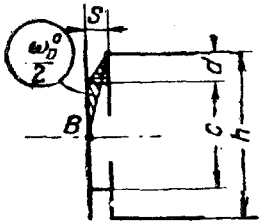
Тогда формула (56) примет следующий вид:

$$\alpha_x = - \frac{J_{1xy}^{верхн} h}{J_x}, \quad (57)$$

где  $J_{1xy}^{верхн}$  — центробежный момент инерции заштрихованного на фиг. 96 верхнего уголка относительно главной оси всего сечения  $X$  и оси вер-



Фиг. 96.



Фиг. 97.

тикального листа  $Y$ , равный

$$J_{1xy} = J_{1\xi\eta} + F_1 a \frac{c}{2};$$

$J_{1\xi\eta}$  следует брать из приложений 5 или 6 со знаком плюс.

Переходим к определению секториального момента инерции.

Принимая во внимание, что собственные секториальные моменты инерции листа и уголков равны нулю, по формуле (35) будем иметь:

$$\begin{aligned} J_{\omega} &= J_{2x} \alpha_x^2 + 2J_{1\xi} (\alpha_x + s)^2 + 2J_{1\eta} \left(\frac{h}{2}\right)^2 - 4J_{1\xi\eta} (\alpha_x + s) \frac{h}{2} + \\ &+ 2F_1 \left[ -ds + \frac{c}{2}s - (\alpha_x + s) \frac{c}{2} + \frac{h}{2}a \right]^2 = \\ &= \left[ J_{2x} + 2J_{1\xi} + 2F_1 \left(\frac{c}{2}\right)^2 \right] \alpha_x^2 + (2J_{1\eta} + 2F_1 a^2) \left(\frac{h}{2}\right)^2 - \\ &- \left( 2J_{1\xi\eta} + 2F_1 \frac{c}{2}a \right) h\alpha_x + (2J_{1\xi} + 2F_1 d^2) s^2 + \\ &+ \left( 4J_{1\xi} + 4F_1 d \frac{c}{2} \right) \alpha_x s - (4J_{1\xi\eta} + 4F_1 ad) \frac{h}{2} s = \\ &= J_x \alpha_x^2 + J_y \left(\frac{h}{2}\right)^2 - 2J_{1xy}^{верт} h\alpha_x + 2(J_{1\xi} + F_1 d^2) s^2 + \\ &+ 4 \left( J_{1\xi} + F_1 d \frac{c}{2} \right) \alpha_x s - 2(J_{1\xi\eta} + F_1 ad) hs. \end{aligned}$$

Ввиду малости величины  $s$  три последних члена формулы, как показали подсчеты, составляют всего 3—6% от первых трех членов, поэтому ими можно пренебречь.

Тогда формула принимает следующий вид:

$$J_{\omega} = J_x \alpha_x^2 + J_y \left(\frac{h}{2}\right)^2 - 2J_{1xy}^{верт} h\alpha_x. \quad (58)$$

Подставляя  $\alpha_x$  из формулы (57) и имея в виду, что знак  $\alpha_x$  уже учтен, получаем:

$$J_{\omega} = \frac{J_{1xy}^2 h^2}{J_x} + J_y \left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{2J_{1xy}^2 h^2}{J_x}$$

или

$$J_{\omega} = J_y \left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{J_{1xy}^2 h^2}{J_x}. \quad (59)$$

### 3. Профиль, составленный из двух прокатных швеллеров и листа (фиг. 98)

Пронумеруем элементы: швеллеры номером 1, а лист — номером 2; принятые обозначения указаны на фиг. 98.

Вспомогательный полюс  $B$  выбираем в центре листа.

Тогда  $S''_{\omega By}$  будет равен нулю и формула (2) для определения координаты центра изгиба примет вид:

$$\alpha_x = \frac{\sum S'_{\omega By}}{J_x}.$$

Числитель определяем по формуле (18); причем

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= 1; \quad \sin \varphi = 0; \quad c_{\xi} = a; \quad c_{\eta} = \mp d; \\ b &= \mp c; \quad \omega_D^0 = \mp (2f - d)a; \quad \eta_0 = \mp c; \quad \xi_0 = a. \end{aligned}$$

Подставляя эти величины в формулу (18), получаем:

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{1}{J_x} \{ -2J_{1\xi}a + 2F_1c[(2f-d)a - ac + da] \} = \\ &= \frac{1}{J_x} [ -2J_{1\xi}a + 2F_1c(2f-c)a ] = \frac{1}{J_x} [ -(J_{1\xi} + F_1c^2) + 2F_1cf ] 2a. \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha_x = \frac{(2F_1cf - J_{1\xi}) 2a}{J_x}. \quad (60)$$

Секториальный момент инерции  $J_{\omega}$  определяем по формуле (27):

$$\begin{aligned} J_{\omega} &= 2J_{1\omega D} + 2J_{1\xi}(a + \alpha_x)^2 + \\ &+ 2J_{1\eta}d^2 + J_{2\xi}\alpha_x^2 + 2F_1 \cdot [ - \\ &- (2f-d)a + (a + \alpha_x)c - da ]^2 = \\ &= 2J_{1\omega D} + 2(J_{1\xi} + F_1c^2)(a + \alpha_x)^2 + \\ &+ 2J_{1\eta}d^2 + J_{2\xi}\alpha_x^2 + 2F_1[4f^2a^2 - \\ &- 4fac(a + \alpha_x)], \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} J_{\omega} &= 2J_{1\omega D} + 2J_{1\eta}d^2 + 2J_{1\xi}(a + \alpha_x)^2 + \\ &+ J_{2\xi}\alpha_x^2 + 8F_1fa[fa - (a + \alpha_x)c]. \end{aligned} \quad (61)$$

Пользуясь доказанной в § 25 теоремой и формулами, выведенными в § 26, мы составили таблицу, содержащую формулы координат центра изгиба и секториальных моментов инерции некоторых симметричных профилей (приложение 12).

## § 27. УЧЕТ ОТВЕРСТИЙ ДЛЯ ЗАКЛЕПОК ИЛИ БОЛТОВ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ СЕКТОРИАЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОСТЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ

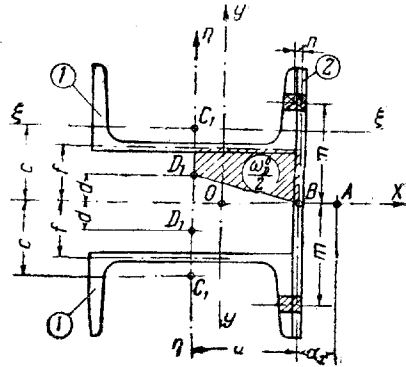
1. Сечение отверстия представляет собой прямоугольник со сторонами  $d$  и  $\delta$ , где  $d$  — диаметр заклепки (или болта), а  $\delta$  — толщина склепываемого пакета.

Выведем формулы секториальных геометрических характеристик сечений отверстия, считая его отрицательным элементом всего сечения.

$$\text{Обозначим} \quad F_{отв} = d\delta. \quad (62)$$

Формулы (17) и (18) секториально-линейных статических моментов сечения отверстия относительно произвольного полюса  $B$  и главных осей всего сечения  $X$  и  $Y$  примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} S_{\omega_B x}^{отв} &= F_{отв}a(\omega_L^0 - c_{\xi}\eta_0 + c_{\eta}\xi_0); \\ S_{\omega_B y}^{отв} &= F_{отв}b(\omega_L^0 - c_{\xi}\eta_0 + c_{\eta}\xi_0). \end{aligned} \right\} \quad (63)$$



Фиг. 98.

(Считая ввиду малости размеров отверстия  $J_{\xi}^{oms} = J_{\eta}^{oms} = 0$  и главные оси отверстия параллельными главным осям всего сечения:  $\cos \varphi = 1$ ;  $\sin \varphi = 0$ .)

Здесь  $a$  и  $b$  — координаты центра тяжести всего сечения в осях  $\xi$  и  $\eta$ .

$\xi_0$ ,  $\eta_0$  и  $\omega_D^0$  — линейные и секториальная координаты принятой начальной точки отсчета  $M_0$ , отсчитанные от осей  $\xi$  и  $\eta$  и центра тяжести отверстия (так как центр изгиба, центр тяжести и главная секториальная точка у прямоугольника совпадают);

$c_{\xi}$  и  $c_{\eta}$  — проекции расстояния от центра тяжести отверстия до полюса  $B$  на главные оси элемента.

Формула (24) секториального статического момента отверстия относительно центра изгиба  $A$  остается без изменения:

$$S_{\omega_A}^{oms} = -F_{oms} (\omega_D^0 - c_{\xi} \eta_0 + c_{\eta} \xi_0), \quad (64)$$

где  $c_{\xi}$  и  $c_{\eta}$  — проекции расстояния от центра тяжести отверстия до центра изгиба  $A$  всего сечения на главные оси отверстия.

Формула (25) для определения секториальной координаты центра отверстия относительно центра изгиба и главной секториальной точки всего сечения будет иметь следующий вид:

$$\omega_A^{oms} = -(\omega_D^0 - c_{\xi} \eta_0 + c_{\eta} \xi_0), \quad (65)$$

и, наконец, формула (27) секториального момента инерции отверстия получит вид:

$$J_{\omega}^{oms} = F_{oms} (\omega_D^0 - c_{\xi} \eta_0 + c_{\eta} \xi_0)^2. \quad (66)$$

Подставив (65) в (64) и (66), получим их в более простом виде:

$$S_{\omega_A}^{oms} = F_{oms} \omega_A^{oms}; \quad (67)$$

$$J_{\omega}^{oms} = F_{oms} \omega_A^{oms^2}. \quad (68)^1$$

Таким образом секториальный статический момент отверстия относительно центра изгиба сечения равен произведению площади отверстия на секториальную координату центра тяжести отверстия относительно полюса в центре изгиба и с началом отсчета в главной секториальной точке сечения, а секториальный момент инерции отверстия равен произведению площади отверстия на квадрат той же секториальной координаты центра тяжести отверстия.

Формулы (67) и (68) аналогичны соответствующим формулам для линейных статического момента и момента инерции ( $S_x = Fu$  и  $J_x = Fu^2$ ) с той лишь разницей, что в правой части вместо линейной участвует секториальная координата центра отверстия.

2. Посмотрим теперь, как отражается учет отверстий на общих формулах для определения секториальных геометрических характеристик сечений тонкостенных стержней.

<sup>1</sup> Формулы (63), (67) и (68) имеются в указанной выше работе проф. Власова; он получил их, рассматривая отверстие как сосредоточенную массу, а определенные интегралы, выражающие секториальные характеристики, интерпретируя в смысле интеграла Стильтьеса.



Рассмотрим для примера профиль, составленный из двух прокатных швеллеров и листа (фиг. 98), сечение которого ослаблено двумя отверстиями для заклепок на расстояниях  $m$  от оси  $X$ .

По второй из формул (63):

$$S_{\omega_{BY}}^{oms} = -2F_{oms} m (-nm + nm - mn),$$

откуда

$$S_{\omega_{BY}}^{oms} = 2F_{oms} m^2 n. \quad (69)$$

Секториальную координату центра отверстия с полюсом в центре изгиба определим по формуле (65):

$$\omega_A^{oms} = - [\mp nm \pm (n + \alpha_x) m \mp mn],$$

откуда

$$\omega_A^{oms} = \mp (\alpha_x - n) m \quad (70)$$

(верхние знаки относятся к верхнему отверстию, нижние — к нижнему). Подставив выражение (70) в формулу (68), получим секториальный момент инерции отверстия:

$$J_{\omega}^{oms} = 2F_{oms} (\alpha_x - n)^2 m^2. \quad (71)$$

3. В качестве второго примера рассмотрим клепаный швеллер (фиг. 96). Пусть лист соединен с каждым из уголков одним рядом горизонтальных заклепок, расположенных на расстояниях  $e$  от оси  $X$ . Ослабленное сечение изображено на фиг. 99.

По второй из формул (63) имеем:

$$S_{\omega_{BY}}^{oms} = -2F_{oms} e (et - te + et) = -2F_{oms} e^2 t,$$

так как

$$b = \mp e; \quad \omega_D^0 = \pm et; \quad c_{\xi} = \xi_0 = -t;$$

$$c_{\eta} = \eta_0 = \mp e.$$

Выше при выводе формулы (56) для вычисления координаты центра изгиба этого же сечения без учета отверстий мы членами, содержащими величину  $s$  (фиг. 96), ввиду ее малости, пренебрегли. Так как  $t$  меньше  $s$ , то величиной  $S_{\omega_{BY}}^{oms}$  для заклепочных отверстий в стенке швеллера можно пренебречь и подавно.

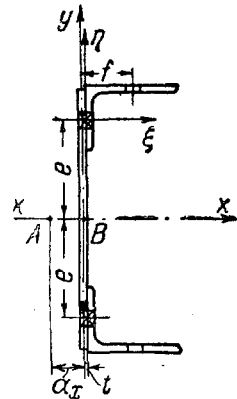
Иначе будет обстоять дело, если отверстиями будут ослаблены полки швеллера (на фиг. 99 не заштрихованы).

Для них

$$S_{\omega_{BY}}^{oms} = 2F_{oms} \frac{h}{2} \left( \frac{h}{2} f - f \frac{h}{2} + \frac{h}{2} f \right) = -2F_{oms} \left( \frac{h}{2} \right)^2 f,$$

откуда

$$S_{\omega_{BY}}^{oms} = -J_{xy}^{серхи(oms)} h. \quad (72)$$



Фиг. 99.

Учтя влияние этих отверстий в формуле (57), получаем:

$$\alpha_x = - \frac{J_{1xy}^{верхн} \hbar + J_{xy(отв)}^{верхн} \hbar}{J_x(нетто)},$$

откуда

$$\alpha_x = - \frac{J_{xy(нетто)}^{верхн} \hbar}{J_x(нетто)}. \quad (73)$$

Переходим к определению секториального момента инерции отверстия.

По формуле (65) секториальная координата центра отверстия с полюсом в центре изгиба будет иметь следующий вид:

1) для отверстий в стенке швеллера:

$$\omega_A^{отв} = - [et - (\alpha_x + t)e + et] \approx \alpha_x e \quad (74)$$

(членами, содержащими  $t$ , пренебрегаем);

2) для отверстий в полках:

$$\omega_A^{отв} = - \left[ \frac{\hbar}{2} f - (\alpha_x + f) \frac{\hbar}{2} + \frac{\hbar}{2} f \right] = (\alpha_x - f) \frac{\hbar}{2}. \quad (75)$$

Подставив (74) и (75) в (68), получим:

$$\begin{aligned} J_{\omega}^{отв} &= \sum F_{отв} \alpha_x^2 e^2 + \sum F_{отв}^{верхн} (\alpha_x - f)^2 \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 = \\ &= \sum J_{x(отв)} \alpha_x^2 + \sum J_{y(отв)}^{верхн} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 - \sum J_{xy(отв)}^{верхн} \alpha_x \hbar. \end{aligned}$$

Подставив выражение для  $J_{\omega}^{отв}$  в общую формулу (58), получим:

$$\begin{aligned} J_{\omega(нетто)} &= \left( J_x - \sum J_{x(отв)} \right) \alpha_x^2 + \left( J_y - \sum J_{y(отв)}^{верхн} \right) \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 - \\ &\quad - \left( 2J_{1xy}^{верхн} - \sum J_{xy(отв)}^{верхн} \right) \alpha_x \hbar \end{aligned}$$

или

$$J_{\omega(нетто)} = J_{x(нетто)} \alpha_x^2 + J_{y(нетто)} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 - 2J_{1xy(нетто)}^{верхн} \alpha_x \hbar.$$

Подставив  $\alpha_x$  из формулы (73), окончательно получим:

$$J_{\omega(нетто)} = J_{y(нетто)} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 - \frac{J_{1xy(нетто)}^2 (верхн) \hbar^2}{J_x(нетто)}. \quad (76)$$

Таким образом учет ослабления отверстиями в швеллере сводится лишь к тому, что в общих формулах для определения координаты центра изгиба и секториального момента инерции следует принимать экваториальные моменты инерции не брутто, а нетто, причем отверстия в стенке швеллера на положение центра изгиба существенного влияния не оказывают.

4. Распространим теперь эти выводы на составные профили.

Пусть в сечении, изображенном на фиг. 90, имеются отверстия, не нарушающие его симметрию (фиг. 100), и пусть  $D_1'$ ,  $D_2'$  и  $D_3'$  —

центры изгиба соответствующих элементов этого сечения, найденные с учетом ослабления этих элементов отверстиями. Расстояния между этими центрами изгиба обозначим теми же буквами  $c_{12}$ ,  $c_{13}$  и  $c_{23}$ , но со значками нетто.

Тогда формула (37) для определения координаты центра изгиба, отсчитанной от точки  $D_1'$ , и формула (44) для секториального момента инерции с учетом ослабления отверстиями примут следующий вид:

$$\alpha_{y1}(\text{нетто}) = \frac{J_{2y}(\text{нетто}) c_{12}(\text{нетто}) + J_{3y}(\text{нетто}) c_{13}(\text{нетто})}{J_y(\text{нетто})}; \quad (77)$$

$$J_{\omega}(\text{нетто}) = J_{1\omega D}(\text{нетто}) + J_{2\omega D}(\text{нетто}) + J_{3\omega D}(\text{нетто}) + \\ + \frac{J_{1y}(\text{нетто}) J_{2y}(\text{нетто}) c_{12}^2(\text{нетто}) + J_{1y}(\text{нетто}) J_{3y}(\text{нетто}) c_{13}^2(\text{нетто})}{J_y(\text{нетто})} + \\ + \frac{J_{2y}(\text{нетто}) J_{3y}(\text{нетто}) c_{23}^2(\text{нетто})}{J_y(\text{нетто})}. \quad (78)$$

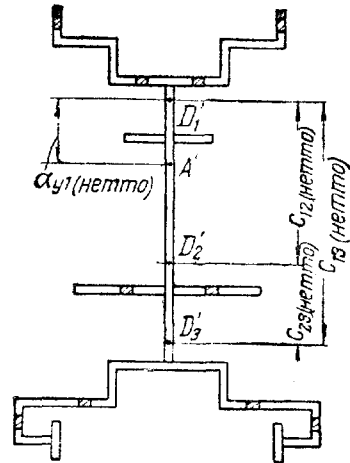
Отверстия в стенке рассматриваемого профиля не окажут никакого влияния ни на положение центра изгиба, ни на величину  $J_{\omega}$ , так как секториальные координаты всех точек стенки равны нулю.

## § 28. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ИЗГИБА И СЕКТОРИАЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОСТЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ ПО СПОСОБУ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЭПЮР

Проф. Власов предложил вычислять интегралы

$$\int_F \omega dF, \int_F \omega x dF, \int_F \omega y dF \text{ и } \int_F \omega^2 dF,$$

выражающие соответствующие секториальные геометрические характеристики тонкостенных профилей по способу интегрирования эпюр. Этот способ заключается в следующем. Входящие в подинтегральные выражения секториальные площади  $\omega$  и расстояния точек контура от главных осей  $X$  и  $Y$  следует нанести на отдельных чертежах в виде эпюр и вычислить соответствующие интегралы произведений этих эпюр, пользуясь известным из строительной механики способом вычисления так называемых интегралов Мора. Рассмотрим применение этого способа несколько подробнее.



Фиг. 100.

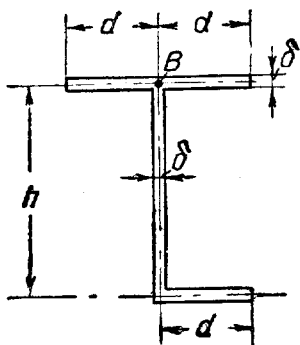
### 1. Координаты центра изгиба

Для вычисления секториально-линейных статических моментов

$$S_{\omega Bx} = \int_F \omega_B x dF \text{ и } S_{\omega By} = \int_F \omega_B y dF,$$

стоящих в числителях формул (2) для координат центра изгиба, прежде всего следует выбрать в плоскости рассматриваемого сечения произвольную точку  $B$  в качестве вспомогательного полюса отсчета секториальных координат  $\omega_B$ .

При этом рекомендуется выбирать точку, в которой сходится наибольшее число прямолинейных участков контура сечения [например для несимметричного профиля (фиг. 101) точку пересечения стенки с верхней полкой], так как секториальные координаты для элементов, сходящихся в точке  $B$ , обращаются в нуль. Для профилей с одной осью симметрии за полюс  $B$  рекомендуется принимать точку пересечения оси симметрии с контуром сечения.



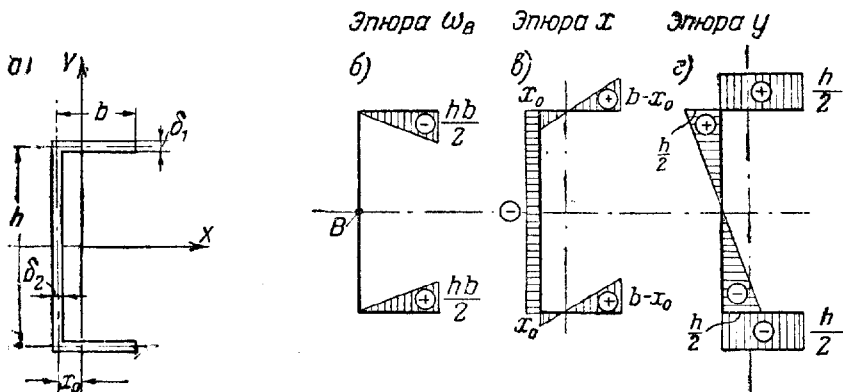
Фиг. 101.

Затем следует построить эпюры секториальных площадей  $\omega_B$  и эпюры  $x$  и  $y$  — расстояний точек контура от главных осей сечения и вычислить интегралы взаимных произведений этих эпюр:

$$\int_F \omega_B x dF \text{ и } \int_F \omega_B y dF,$$

взятых по всему контуру сечения.

В качестве примера рассмотрим швеллер (фиг. 102, а), для которого эпюры  $\omega_B$ ,  $x$  и  $y$  построены на фиг. 102, б, в, г.



Фиг. 102.

Интегрируя произведение этих эпюр, получаем:

$$S_{\omega_B x} = \int_F \omega_B x dF = 0; \quad (79)$$

$$S_{\omega_B y} = \int_F \omega_B y dF = -\frac{h^2 b^2 \delta_1}{4}. \quad (80)$$

Так как знаменатель первой из формул (2) — главный момент инерции  $J_x = \int_F y^2 dF$ , то его можно вычислить тем же способом, вычислив интеграл от квадрата эпюры  $y$ :

$$J_x = \int_F y^2 dF = \frac{h^3 \delta_2}{12} + \frac{b h^2 \delta_1}{2}. \quad (81)$$

Подставив выражения (79), (80) и (81) в формулу (2), получим:

$$\alpha_x = - \frac{3b^2 \delta_1}{6b\delta_1 + h\delta_2}; \quad (82)$$

$$\alpha_y = 0. \quad (83)$$

Равенство  $\alpha_y$  нулю показывает, что центр изгиба швеллера лежит на оси симметрии его, а знак минус у  $\alpha_x$  показывает, что полученную величину следует отложить от точки  $B$  по отрицательному направлению оси  $X$ , т. е. влево.

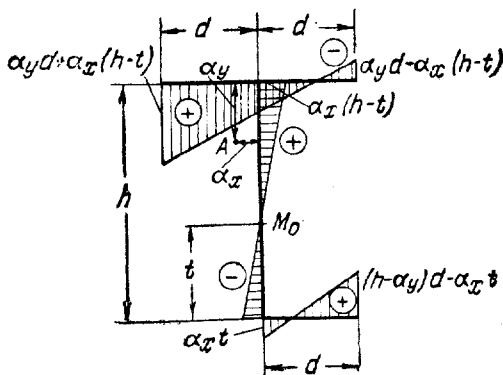
## 2. Главная секториальная точка

Положение секториальных нулевых точек и, в частности, главной секториальной точки на контуре тонкостенного профиля, как известно из предыдущего, определяется по условию (23), § 23.

Отыскивая главную секториальную точку, следует предварительно принять для начала отсчета секториальных координат произвольную точку ближайшего к центру изгиба прямолинейного участка контура сечения и выразить координаты ее в функции какого-нибудь параметра  $t$  (например, в функции расстояния от одной из крайних точек контура этого участка). Затем параметр  $t$  определяется из условия равенства нулю секториального статического момента [условие (23)].

Для определения значения  $S_{\omega A}$  способом интегрирования эпюр следует построить эпюру  $\omega$  при полюсе в центре изгиба  $A$  и с произвольной начальной точкой, определяемой параметром  $t$ , и проинтегрировать ее по контуру всего сечения.

Для иллюстрации этого примера рассмотрим несимметричный профиль (фиг. 101). Пусть центр изгиба этого профиля известен и определяется координатами  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  и пусть искомая главная секториальная точка  $M_0$  находится на стенке профиля на расстоянии  $t$  от нижней полки его (фиг. 103).

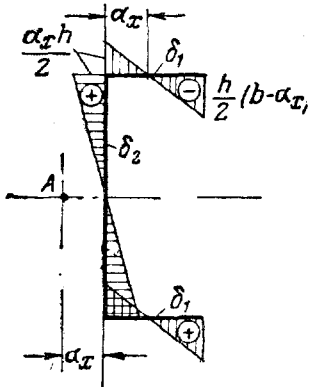


Фиг. 103.

Проинтегрировав построенную эпюру секториальных площадей  $\omega_A$  по контуру всего сечения и приравняв результаты нулю, получим уравнение, из которого найдем значение  $t$ , определяющее действительное положение искомой главной секториальной точки сечения.

### 3. Секториальный момент инерции

Для определения секториального момента инерции  $J_\omega = \int_F \omega^2 dF$  следует построить эпюру секториальных площадей с полюсом в центре изгиба и с начальной точкой в главной секториальной точке сечения, т. е. построить так называемую эпюру главных секториальных площадей и вычислить интеграл от квадрата этой эпюры, взятый по всей площади сечения.



Фиг. 104.

Так, например, для рассмотренного в п. 1 настоящего параграфа швеллера эпюра главных секториальных координат будет иметь вид, изображенный на фиг. 104. Вычислив интеграл квадрата ее, получим:

$$J_\omega = \frac{\alpha_x^2 h^3 \delta_2}{12} + \frac{\alpha_x^3 h^2 \delta_1}{6} + \frac{(b - \alpha_x)^3 h^2 \delta_1}{6} = \frac{\alpha_x^2 h^3 \delta_2}{12} + \frac{h^2 b \delta_1}{6} (b^2 - 3b\alpha_x + 3\alpha_x^2).$$

Подставляем сюда выражение  $\alpha_x$  из формулы (82) и окончательно получаем:

$$J_\omega = \frac{b^3 h^2 \delta_1}{12} \frac{2h\delta_2 + 3b\delta_1}{6b\delta_1 + h\delta_2}. \quad (84)$$

4. Для участков профиля с линейно-переменной толщиной стенки, например, для полок прокатных двутавров или швеллеров, при интегрировании эпюр необходимо учесть переменность толщины сечения. С этой целью рекомендуется пользоваться формулами интеграла трех эпюр, которые даны ниже в § 30.

Учет ослабления сечения отверстиями для заклепок или болтов при пользовании способом интегрирования эпюр следует производить по формулам (63), (67) и (68), беря входящие в эти формулы секториальные координаты центров отверстий непосредственно из соответствующих эпюр.

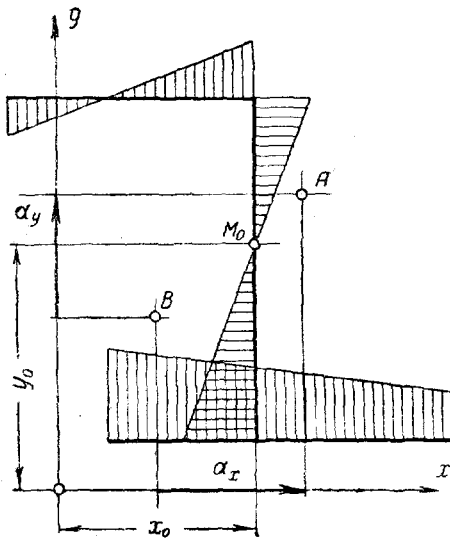
## § 29. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ИЗГИБА И СЕКТОРИАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТОНКОСТЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ ПО СПОСОБУ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЭПЮР

1. Научный сотрудник лаборатории строительной механики ЦНИПС А. Р. Ржаницын предложил способ, который дает возможность определить координаты центра изгиба и секториальный момент инерции произвольных незамкнутых тонкостенных профилей независимо от того, известны или неизвестны центр тяжести и главные экваториальные моменты

инерции этого профиля<sup>1</sup>. Способ этот, во многих случаях оказывающийся очень полезным при практическом определении указанных величин, излагаем, несколько видоизменив его.

Из теории проф. Власова известно, что эпюра главных секториальных координат профиля  $\omega_A$ , определяющая закон распределения нормальных напряжений  $\sigma_\omega$  при стесненном кручении, ортогональна с эпюрами линейных координат его  $x$  и  $y$ , определяющих распределение нормальных напряжений при изгибе относительно главных осей сечения, и с равномерной эпюрой (назовем ее  $z$ ), соответствующей закону распределения нормальных напряжений при равномерном растяжении или сжатии.

Признак ортогональности, как известно, заключается в том, что результат взаимного интегрирования этих эпюр равен нулю. С другой стороны [§ 22, формула (10)], перенос начала и поворот осей координат приводит к линейным формулам преобразования, а это значит, что эпюра главных секториальных координат (с полюсом в центре изгиба) будет ортогональна с эпюрой произвольных линейных координат, так как свойство ортогональности при любых линейных преобразованиях эпюр сохраняется.



Фиг. 105.

Рассмотрим какое-нибудь, произвольное сечение стержня, отнесенное к системе осей координат  $x$  и  $y$  (фиг. 105), и построим эпюру секториальных площадей с полюсом в произвольной точке  $B$  плоскости сечения и с началом в произвольной точке  $M_0(x_0, y_0)$  контура сечения. Обозначим эту эпюру через  $\omega_0$ .

Пусть центр изгиба рассматриваемого профиля находится в точке  $A$ . Обозначим проекции расстояния  $BA$  на оси координат  $x$  и  $y$  соответственно через  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  и перенесем полюс отсчета секториальных площадей в этот, пока нам неизвестный центр изгиба  $A$ .

Тогда согласно формуле (8) секториальные координаты при новом полюсе отсчета их будут определяться по формуле, которая в наших обозначениях будет иметь следующий вид:

$$\omega_A = \omega_0 - \alpha_x(y - y_0) + \alpha_y(x - x_0).$$

Напишем ее несколько иначе:

$$\omega_A = \alpha_y x - \alpha_x y + \beta z + \omega_0, \quad (85)$$

<sup>1</sup> См. статью А. Р. Ржаницына „Об определении секториальных геометрических характеристик сечения“ в сборнике трудов лаборатории строительной механики ЦНИПС, Стройиздат, 1941.

где

$$\beta z = \alpha_x y_0 - \alpha_y x_0.$$

Здесь  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  и  $\beta$  — неизвестные нам коэффициенты, первые два из которых определяют положение центра изгиба  $A$  относительно произвольного полюса  $B$ , а последний  $\beta$  — положение начальной точки отсчета секториальных координат  $M_0$ , если эюра  $\omega_A$ , которую в дальнейшем для простоты будем обозначать просто  $\omega$ , является эюрой главных секториальных координат.

Для того чтобы эюра  $\omega$  была эюрой главных секториальных координат, она должна быть ортогональна эюрам  $x$ ,  $y$  и  $z$ , т. е. должна удовлетворять условиям:

$$\left. \begin{aligned} \int_F \omega x dF &= 0; \\ \int_F \omega y dF &= 0; \\ \int_F \omega z dF &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Подставив в условия (86) вместо  $\omega$  его выражение из формулы (85), получим систему трех уравнений следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_y \int_F x^2 dF - \alpha_x \int_F yx dF + \beta \int_F zx dF + \int_F \omega_0 x dF &= 0; \\ \alpha_y \int_F xy dF - \alpha_x \int_F y^2 dF + \beta \int_F zy dF + \int_F \omega_0 y dF &= 0; \\ \alpha_y \int_F xz dF - \alpha_x \int_F vz dF + \beta \int_F z^2 dF + \int_F \omega_0 z dF &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Неизвестными в этих уравнениях, как было сказано выше, являются  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  и  $\beta$ , а коэффициентами и свободными членами — интегралы от произведений двух соответствующих эюр, взятых по всей площади рассматриваемого сечения.

Определив из этой системы  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  и  $\beta$  и подставив их в выражение (85), получим формулу для вычисления главных секториальных координат с полюсом в центре изгиба и с началом в секториальной нулевой точке контура сечения.

Произвольные эюры  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $\omega_0$  следует выбирать так, чтобы количество вычислений при интегрировании их было наименьшим. Во многих случаях удачным выбором этих эюр можно добиться того, чтобы некоторые из коэффициентов уравнений обращались в нуль.

В частности, за эюру  $z$  рекомендуется принимать эюру с постоянными, равными единице координатами для всех точек сечения. За нулевые линии при построении эюр  $x$  или  $y$  в симметричных сечениях рекомендуется принимать соответствующую ось симметрии, а в несимметричных — одну из сторон контура сечения.

Произвольный полюс при построении эюры  $\omega_0$  рекомендуется принимать для симметричных сечений в точке пересечения оси симметрии



с контуром сечения, а в несимметричных — в одной из точек пересечения сторон контура.

Полученные численные значения величин  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$ , как было сказано выше, определяют положение центра изгиба сечения. С этой целью величины эти следует отложить от точки  $B$ , принятой за полюс при построении эпюры  $\omega_0$ , по направлению осей  $x$  и  $y$ , принятых за нулевые линии при построении эпюр  $x$  и  $y$ .

Величину секториального момента инерции  $J_\omega$  можно определить, вычислив интеграл квадрата эпюры главных секториальных координат. Проще же ее вычислить по формуле  $J_\omega = \int_F \omega^2 dF$ , подставив в подынтегральное выражение вместо  $\omega^2$  его значение из формулы (85), в которой коэффициенты  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  и  $\omega$  известны.

Получим:

$$J_\omega = \int_F (\alpha_y x - \alpha_x y + \beta z + \omega_0)^2 dF.$$

Возведя в квадрат подынтегральный многочлен и сгруппировав некоторые члены полученного выражения, будем иметь:

$$\begin{aligned} J_\omega = & \left( \alpha_y^2 \int_F x^2 dF + \alpha_x^2 \int_F y^2 dF + \beta^2 \int_F z^2 dF - \right. \\ & - 2\alpha_x \alpha_y \int_F xy dF + 2\alpha_y \beta \int_F xz dF - \\ & - 2\alpha_x \beta \int_F yz dF + \alpha_y \int_F x\omega_0 dF - \\ & - \alpha_x \int_F y\omega_0 dF + \beta \int_F z\omega_0 dF \left. \right) + \\ & + \alpha_y \int_F x\omega_0 dF - \alpha_x \int_F y\omega_0 dF + \\ & + \beta \int_F z\omega_0 dF + \int_F \omega_0^2 dF. \end{aligned} \quad (88)$$

Выражение в круглых скобках равно нулю, в чем нетрудно удостовериться, сложив почленно уравнения (87), предварительно умножив первое из них на  $\alpha_y$ , второе — на  $-\alpha_x$  и третье — на  $\beta$ . Поэтому выражение (88) дает окончательно:

$$J_\omega = \alpha_y \int_F x\omega_0 dF - \alpha_x \int_F y\omega_0 dF + \beta \int_F z\omega_0 dF + \int_F \omega_0^2 dF. \quad (89)$$

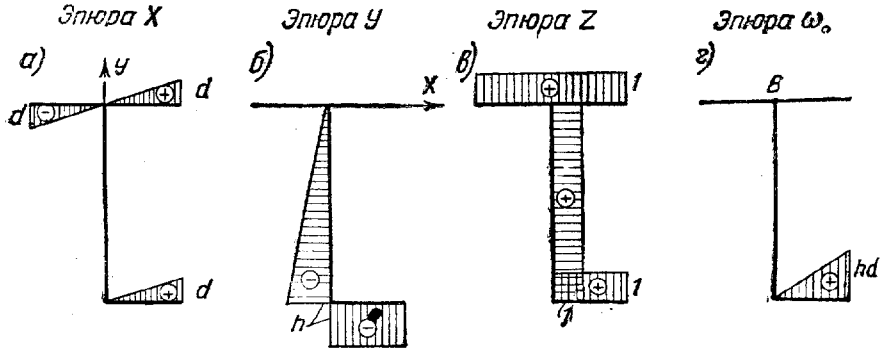
Здесь величины первых трех интегралов уже известны, так как они были уже вычислены при решении уравнений (87); последний же интеграл необходимо подсчитать, вычислив интеграл квадрата эпюры  $\omega_0$ .

2. В качестве примера определим по этому способу положение центра изгиба и секториальный момент инерции профиля, изображен-

ного на фиг. 101. Толщину его для простоты решения примем всюду одинаковой и равной  $\delta = 1$ .

Построим эпюры  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $\omega_0$ .

При построении эпюры  $x$  за нулевую линию принимаем ось стенки и положительное направление оси  $x$  считаем вправо; при построении эпюры  $y$  за нулевую линию принимаем ось верхней полки и положительное направление оси  $y$  считаем вверх. Эпюру  $z$  принимаем с постоянными, равными единице координатами для всех точек сечения. Четвертую секториальную эпюру  $\omega_0$  строим с полюсом в точке пересечения оси верхней полки с осью стенки и с начальной точкой в пересечении оси стенки с осью нижней полки. Эпюры эти изображены на фиг. 106.



Фиг. 106.

Для определения коэффициентов уравнений (87) вычислим интегралы по всему контуру от квадратов этих эпюр и их произведений, взятых попарно.

Тогда получим:

$$\int_F x^2 dF = d^3; \quad \int_F y^2 dF = h^2 \left( d + \frac{h}{3} \right);$$

$$\int_F xy dF = -\frac{d^2 h}{2}; \quad \int_F yz dF = -h \left( d + \frac{h}{2} \right);$$

$$\int_F xz dF = \frac{d^2}{2}; \quad \int_F y\omega_0 dF = -\frac{h^2 d^2}{2};$$

$$\int_F x\omega_0 dF = \frac{d^3 h}{3}; \quad \int_F z^2 dF = 3d + h;$$

$$\int_F z\omega_0 dF = \frac{d^2 h}{2};$$

$$\int_F \omega_0^2 dF = \frac{d^3 h^2}{3} \text{ (потребуется при определении } J_\omega \text{).}$$

Система уравнения (87) в табличной форме представлена в табл. 35.

## Система уравнений для определения центра изгиба и главной секториальной точки профиля (фиг. 106)

№ уравнений	Неизвестные			Свободные члены	Правая часть
	$\alpha_y$	$\alpha_x$	$\beta$		
1	$d^3$	$\frac{d^2h}{2}$	$\frac{d^2}{2}$	$\frac{d^3h}{3}$	$= 0$
2	$-\frac{d^2h}{2}$	$-h^2\left(d + \frac{h}{3}\right)$	$-h\left(d + \frac{h}{2}\right)$	$-\frac{d^2h^2}{2}$	$= 0$
3	$\frac{d^2}{2}$	$h\left(d + \frac{h}{2}\right)$	$3d + h$	$\frac{d^2h}{2}$	$= 0$

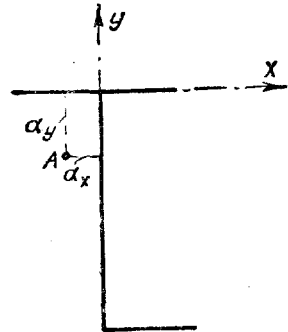
Решив эту систему, найдем:

$$\alpha_y = -\frac{h(6d^2 + 9hd + h^2)}{3(18d^2 + 11hd + h^2)};$$

$$\alpha_x = -\frac{2d^2(12d + 3h)}{3(18d^2 + 11hd + h^2)};$$

$$\beta = \frac{2d^2h^2}{3(18d^2 + 11hd + h^2)}.$$

Таким образом центр изгиба будет отстоять от полюса  $B$ , принятого за полюс отсчета секториальных площадей  $\omega_0$  (фиг. 106) на величину  $\alpha_x$  по отрицательному направлению оси  $x$  и на величину  $\alpha_y$  по отрицательному направлению по оси  $y$  (фиг. 107).



Фиг. 107.

Секториальный момент инерции  $J_\omega$  по формуле (89) будет равен:

$$J_\omega = \frac{d^3h}{3} \alpha_y + \frac{d^2h^2}{2} \alpha_x + \frac{d^2h}{2} \beta + \frac{d^3h^2}{3}.$$

Подставив в это выражение найденные значения  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  и  $\beta$ , получим:

$$J_\omega = \frac{2d^3h^2(6d^2 + 9hd + h^2)}{9(18d^2 + 11hd + h^2)}.$$

### § 30. СЕКТОРИАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОКАТНЫХ ДВУТАВРОВ и ШВЕЛЛЕРОВ

Непосредственное пользование выведенными выше формулами для вычисления секториальных геометрических характеристик прокатных двутавров и швеллеров встречает значительные затруднения, с одной стороны,

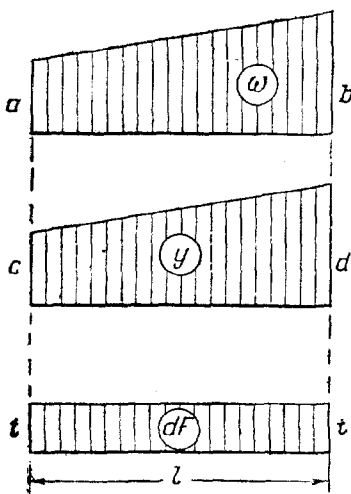
вследствие переменности сечения полок этих профилей и, с другой стороны, вследствие наличия закруглений по концам полок и в местах сопряжений их со стенкой. Нами выведены общие формулы для учета этих факторов независимо от того, к какому прокатному профилю они относятся.

Секториальные геометрические характеристики, как мы видели выше, определяются, вообще говоря, интегралами следующих двух видов:

$$\int \omega y dF \quad \text{и} \quad \int \omega^2 dF,$$

в которых  $y$  и  $\omega$  являются линейными функциями для профилей с прямолинейными гранями, а  $dF$  — постоянна для граней постоянного сечения (для стенок), линейно-переменна для полок и переменна по закону окружности для участков с закруглениями. Для решения этой задачи мы применили известный из курса строительной механики метод графоаналитического вычисления интегралов Мора и с этой целью вывели общие формулы интегрирования трех эпюр:

- 1) двух трапеций и прямоугольника,
- 2) трех трапеций и
- 3) двух трапеций и эпюры, меняющейся по закону окружности.



Фиг. 108.

### 1. Интеграл произведения двух трапеций и прямоугольника (фиг. 108)

Для определения этого интеграла необходимо известный из курса строительной механики интеграл двух трапеций<sup>1</sup> умножить на постоянную величину ординаты третьей эпюры  $t$ :

$$\int_0^l \omega y dF = \frac{tl}{6} (2ac + 2bd + ad + bc); \quad (90)$$

$$\int_0^l \omega^2 dF = \frac{tl}{3} (a^2 + b^2 + ab). \quad (91)$$

### 2. Интеграл произведения трех трапеций

Пользуясь обозначениями фиг. 109, составим прежде всего уравнение входящих под интегралы функций:

$$\omega = a + \frac{b-a}{l} x; \quad y = c + \frac{d-c}{l} x; \quad dF = (t_1 + kx) dx,$$

где

$$k = \operatorname{tg} \alpha.$$

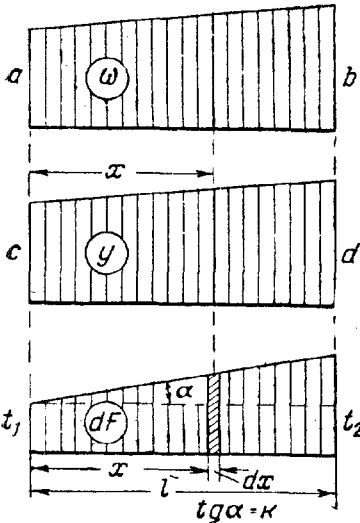
<sup>1</sup> И. М. Рабинович, Методы расчета рам, ч. I, 1934, стр. 54.

Подставляя эти значения под интеграл, найдем:

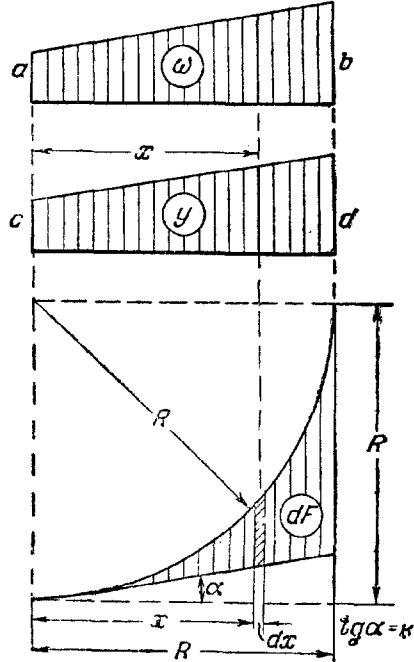
$$\int_0^l \omega y dF = \int_0^l \left( a + \frac{b-a}{l} x \right) \left( c + \frac{d-c}{l} x \right) (t_1 + kx) dx = \\ = \frac{t_1 l}{6} (2ac + 2bd + ad + bc) + \frac{kl^2}{12} (ac + bc + ad + 3bd).$$

Введя в это выражение значение средней ординаты третьей эпюры

$$t_{cp} = t_1 + \frac{kl}{2},$$



Фиг. 109.



Фиг. 110.

получим:

$$\int_0^l \omega y dF = \frac{t_{cp} l}{6} (2ac + 2bd + ad + bc) + \frac{kl^2}{12} (bd - ac); \quad (92)$$

аналогично найдем:

$$\int_0^l \omega^2 dF = \frac{t_{cp} l}{3} (a^2 + b^2 + ab) + \frac{kl^2}{12} (b^2 - a^2). \quad (93)$$

### 3. Интеграл произведения двух трапеций и эпюры, меняющейся по закону окружности

Третью из площадей, изображенных на фиг. 110, мы представили в том виде, как она встречается в реальных закруглениях прокатных профилей.

Прежде всего составим уравнения этих эпюр:

$$\omega = a + \frac{b-a}{R} x; \quad y = c + \frac{d-c}{R} x;$$

$$dF = (R - kx - \sqrt{R^2 - x^2}) dx.$$

Подставив эти выражения под интеграл и произведя интегрирование, найдем:

$$\int_0^R \omega y dF = R^2 \left[ 0,01825ac + 0,13698bd + \right. \\ \left. + 0,02968(ad + bc) - \frac{k}{12}(ac + ad + bc + 3bd) \right]; \quad (94)$$

$$\int_0^R \omega^2 dF = R^2 \left[ 0,01825a^2 + 0,13698b^2 + \right. \\ \left. + 0,05936ab - \frac{k}{12}(a^2 + 2ab + 3b^2) \right]. \quad (95)$$

#### 4. Формулы для вычислений секториальных геометрических характеристик прокатных двутавров

Введем для изображенного на фиг. 111, а прокатного двутавра следующие обозначения:

$$\operatorname{tg} \alpha = k; \quad t_1 = t + \frac{kb}{4}; \quad h_1 = h - t_1; \quad b_1 = b - 2r_1; \quad c = d + 2r.$$

Оси стенок и полок профиля принимаем без учета закруглений. Центр изгиба двутаврового сечения, как известно, совпадает с центром тяжести его. Эпюра секториальных площадей  $\omega$  относительно центра изгиба построена на фиг. 111, б.

Формулу секториального момента инерции  $J_\omega$  сначала выведем без учета закруглений. Пользуясь формулой (93) и фиг. 111, б, получаем:

$$J_\omega = \int_F \omega^2 dF = 4 \left[ \frac{tb}{2 \cdot 3} \left( \frac{h_1 b}{4} \right)^2 - \frac{kb^2}{4 \cdot 12} \left( \frac{h_1 b}{4} \right)^2 \right]$$

или

$$J_\omega = \frac{h_1^2 b^3}{24} \left( t - \frac{kb}{8} \right). \quad (96)$$

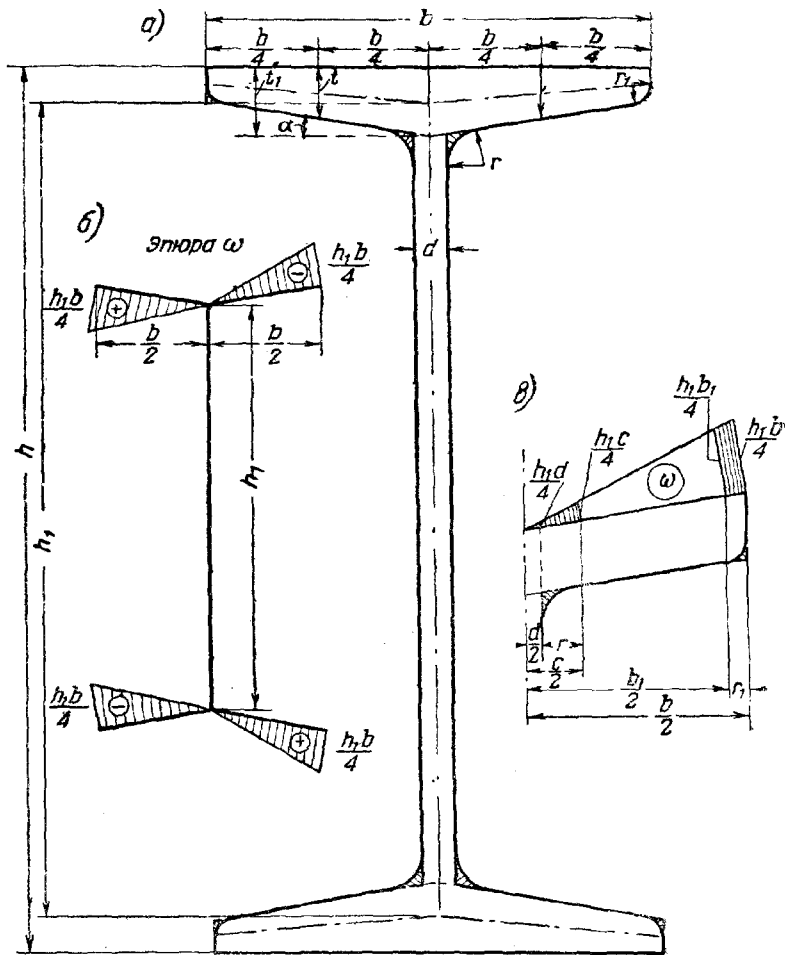
Для учета влияния закруглений на величину  $J_\omega$  на фиг. 111, в даны для одной четверти профиля те ординаты эпюры секториальных площадей, которые соответствуют началу и концу каждого закругления.

Пользуясь формулой (95) и имея в виду, что закругления у стенок увеличивают, а у концов полков уменьшают величину  $J_\omega$ , получаем:

$$\Delta J_\omega = 4r^2 \left\{ 0,01825 \left( \frac{h_1 c}{4} \right)^2 + 0,13698 \left( \frac{h_1 d}{4} \right)^2 + \right. \\ \left. + 0,05936 \frac{h_1 c}{4} \cdot \frac{h_1 d}{4} - \frac{k}{12} \left[ \left( \frac{h_1 c}{4} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{h_1 c}{4} \cdot \frac{h_1 d}{4} + 3 \left( \frac{h_1 d}{4} \right)^2 \right] \right\} - 4r_1^2 \left\{ 0,01825 \left( \frac{h_1 b_1}{4} \right)^2 + \right.$$

$$+ 0,13698 \left(\frac{h_1 b}{4}\right)^2 + 0,05936 \frac{h_1 b_1}{4} \cdot \frac{h_1 b}{4} -$$

$$- \frac{k}{12} \left[ \left(\frac{h_1 b_1}{4}\right)^2 + 2 \frac{h_1 b_1}{4} \cdot \frac{h_1 b}{4} + 3 \left(\frac{h_1 b}{4}\right)^2 \right] \}.$$



Фиг. 111.

Для сортамента двутавров по ОСТ 2451 уклон полок составляет 16%, т. е.  $k=0,16$  и  $r=2r_1$ . Подставив эти значения в предыдущее выражение и сделав преобразования, получим:

$$\Delta J_{\omega} = r_1^2 h_1^2 (0,00492c^2 + 0,09699d^2 + 0,0327cd -$$

$$- 0,00123b_1^2 - 0,02425b^2 - 0,008175bb_1). \quad (97)$$

Прежде чем вычислить по формулам (96) и (97) величины  $J_{\omega}$  для всех профилей сортамента, нами было проделано вычисление лишь для

одного профиля, а именно для № 30 а, и получены следующие результаты:

1) при расчете по средней толщине полок без учета ее переменности, а также без учета наклона осей полок и закруглений:

$$J_{\omega} = 97\,900 \text{ см}^6;$$

2) с учетом переменности толщины полок, но без учета наклона осей их и закруглений:

$$J_{\omega} = 80\,768 \text{ см}^6;$$

3) с учетом переменности толщины полок и наклона осей их, но без учета закруглений:

$$J_{\omega} = 77\,941 \text{ см}^6;$$

4) с учетом переменности толщины полок, наклона осей их и закруглений:

$$J_{\omega} = 76\,788 \text{ см}^6.$$

При этом если учитывать закругления только на концах полок и не учитывать закруглений у стенки, то

$$J_{\omega} = 76\,704 \text{ см}^6.$$

Таким образом учет закруглений у стенки профиля дает увеличение  $J_{\omega}$  лишь на  $0,1\%$ . Поэтому влиянием этих закруглений можно пренебречь, т. е. для двутавра № 30 а принять  $J_{\omega} = 76\,704 \text{ см}^6$ . Аналогичным образом были вычислены эти величины для всего сортамента двутавровых профилей.

Для практических расчетов полезно иметь заранее подсчитанную величину отношения секториального момента инерции  $J_{\omega}$  к секториальной координате наиболее удаленных от центра изгиба точек профиля  $\omega_{\max}$ . По аналогии с соответствующим геометрическим фактором при поперечном изгибе  $\frac{J_r}{J_{\max}}$  это отношение мы назвали секториальным моментом сопротивления и обозначили через  $W_{\omega}$ , т. е.

$$W_{\omega} = \frac{J_{\omega}}{\omega_{\max}}. \quad (98)$$

Составленную таким образом таблицу секториальных геометрических характеристик сортамента двутавров см. в приложении 1.

## 5. Формулы для вычисления секториальных геометрических характеристик прокатных швеллеров

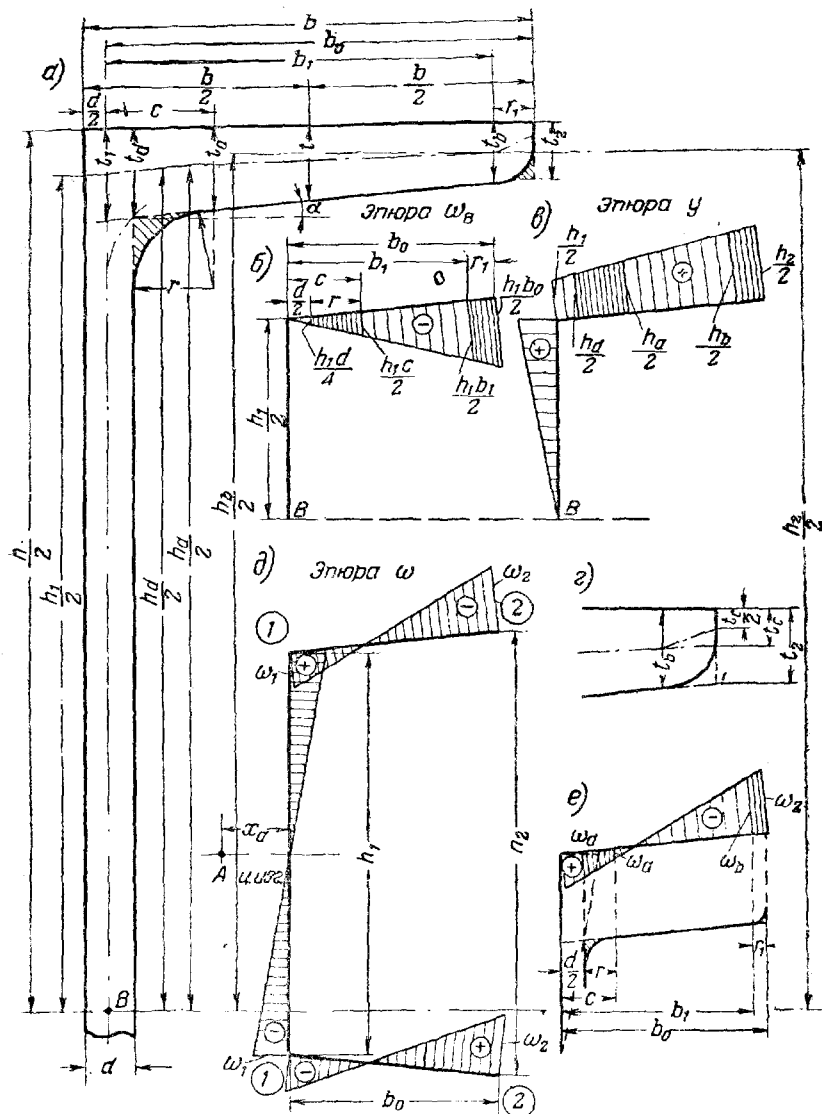
Для изображенного на фиг. 112,а прокатного швеллера для простоты дальнейших выводов введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= k; & t_1 &= t + \frac{k}{2}(b-d); & t_b &= t_2 + kr_1; & h_a &= h - t_a; \\ b_0 &= b - \frac{d}{2}; & t_2 &= t - \frac{kb}{2}; & h_1 &= h - t_1; & h_b &= h - t_b; \\ b_1 &= b_0 - r_1; & t_d &= t_1 - \frac{kd}{2}; & h_2 &= h - t_2; \\ c &= \frac{d}{2} + r; & t_a &= t_d - kr; & h_d &= h - t_d. \end{aligned}$$



Для определения координаты центра изгиба по первой из формул (2)

$$\alpha_x = \frac{S_{\omega_B y}}{J_x} = \frac{1}{J_x} \int_F \omega_B y dF$$



Фиг. 112.

выберем в качестве вспомогательного полюса  $B$  точку пересечения оси симметрии профиля (оси  $X$ ) со средней линией стенки и построим относительно этого полюса эюры  $\omega_B$  и  $y$ , приняв за начальную линию отсчетов ось  $X$  (фиг. 112, б и в).

Пользуясь общей формулой (92), выведем сначала формулу для  $\alpha_x$  без учета закруглений:

$$\alpha_x = \frac{1}{J_x} \int_F \omega_{By} dF = 2 \left[ \frac{tb_0}{6} \left( 2 \frac{h_1 b_0}{2} \cdot \frac{h_2}{2} + \frac{h_1 b_0}{2} \cdot \frac{h_1}{2} \right) - \frac{k b_0^2}{12} \cdot \frac{h_1 b_0}{2} \cdot \frac{h_2}{2} \right] \frac{1}{J_x}$$

Приняв для сортамента швеллеров по ОСТ 2425  $k=0,1$  и сделав преобразования, получим:

$$\alpha_x = \frac{b_0^2 h_1}{24 J_x} [(2t - 0,05d)(2h_2 + h_1) - 0,1 b_0 h_2]. \quad (99)$$

Для учета влияния закруглений на величину  $\alpha_x$  (на фиг. 112,а заштрихованы) воспользуемся общей формулой (94). Имея в виду, что закругления у стенки увеличивают, а закругления у концов полки уменьшают величину  $\alpha_x$ , получим:

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_x = & \frac{1}{J_x} \left\{ 2r^2 \left[ 0,01825 \frac{h_1 c}{2} \cdot \frac{h_a}{2} + 0,13698 \frac{h_1 d}{4} \cdot \frac{h_d}{2} + \right. \right. \\ & + 0,02968 \left( \frac{h_1 c}{2} \cdot \frac{h_d}{2} + \frac{h_1 d}{4} \cdot \frac{h_a}{2} \right) - \frac{k}{12} \left( \frac{h_1 c}{2} \cdot \frac{h_a}{2} + \frac{h_1 c}{2} \cdot \frac{h_d}{2} + \frac{h_1 d}{4} \cdot \frac{h_a}{2} + \right. \\ & \left. \left. + 3 \frac{h_1 d}{4} \cdot \frac{h_d}{2} \right) \right] - 2r_1^2 \left[ 0,01825 \frac{h_1 b_1}{2} \cdot \frac{h_b}{2} + 0,13698 \frac{h_1 b_0}{2} \cdot \frac{h_2}{2} + \right. \\ & + 0,02968 \left( \frac{h_1 b_1}{2} \cdot \frac{h_2}{2} + \frac{h_1 b_0}{2} \cdot \frac{h_b}{2} \right) - \frac{k}{12} \left( \frac{h_1 b_1}{2} \cdot \frac{h_b}{2} + \frac{h_1 b_1}{2} \cdot \frac{h_2}{2} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{h_1 b_0}{2} \cdot \frac{h_b}{2} + 3 \frac{h_1 b_0}{2} \cdot \frac{h_2}{2} \right) \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Принимая  $r = 2r_1$  и  $k = 0,1$  и сделав преобразования, будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_x = & \frac{r_1^2 h_1}{J_x} [0,019838 h_a c + 0,11198 h_d d + 0,04270 h_d c + \\ & + 0,02135 h_d d - 0,0049595 h_b b_1 - 0,05599 h_2 b_0 - 0,010675 (h_2 b_1 + h_b b_0)]. \quad (100) \end{aligned}$$

Чтобы учесть степень влияния на величину  $\alpha_x$  отдельных факторов, были проделаны соответствующие вычисления для трех профилей № 10, № 30а и № 40с; полученные результаты приведены в табл. 36.

В соответствии с этими результатами мы для всего сортамента вычислили координату центра изгиба по формуле (99) и ввели поправку на закругления, определенную по формуле (100). В сортамент же для удобства пользования мы поместили значение  $x_a = \alpha_x - \frac{d}{2}$ , где  $d$  — толщина стенки.

Переходим теперь к определению секториального момента инерции  $J_{\omega}$ . Для этой цели на фиг. 112,б построена эпюра секториальных площадей с полюсом в центре изгиба.

Секториальные площади в узловых точках профиля определяются по формулам:

$$\omega_1 = \frac{\alpha_x h_1}{2} \quad (101)$$

и

$$\omega_2 = \frac{h_1}{2} (b_0 - \alpha_x) - \frac{k}{2} b_0 \alpha_x. \quad (102)$$

**Координаты центра изгиба прокатных швеллеров, определенные  
с различной степенью точности**

Наименование учитываемых и неучитываемых факторов	Координата центра изгиба $x_x$ в см		
	№ 10	№ 30а	№ 40с
Без учета переменности толщины полок и без учета закруглений . . . . .	1,848	2,964	3,118
С учетом переменности толщины полок и наклона осей их, но без учета закруглений . .	1,629	2,639	2,755
С учетом переменности толщины полок и наклона осей их и с учетом всех закруглений .	1,6112	2,6108	2,7287
С учетом всех факторов предыдущего пункта и кроме того с учетом перелома оси на участке крайних закруглений (фиг. 112,з) . . . . .	1,6112	2,6110	2,7341
С учетом всех предыдущих факторов и кроме того с учетом криволинейности оси стенки в пределах средних закруглений (фиг. 112,а) .	1,6097	2,5941	2,6987

Формулу секториального момента инерции  $J_\omega$  выведем сначала без учета закруглений: для этого воспользуемся построенной эпюрой  $\omega$  и общими формулами (91) для стенки и (93) для полок. Имеем:

$$J_\omega = \int_F \omega^2 dF = 2 \left[ \frac{dh_1}{2 \cdot 3} \omega_1^2 + \frac{tb_0}{3} (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_1 \omega_2) - \frac{kb_0^2}{12} (\omega_2^2 - \omega_1^2) \right]$$

или

$$J_\omega = \frac{dh_1 \omega_1^2}{3} + \frac{2tb_0}{3} (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_1 \omega_2) - \frac{kb_0^2}{6} (\omega_2^2 - \omega_1^2). \quad (103)$$

Для учета влияния закруглений на величину  $J_\omega$  по аналогии с предыдущим воспользуемся общей формулой (95) и частью эпюры  $\omega$ , изображенной на фиг. 112,е. Имея в виду, что закругления у стенки увеличивают, а у концов полок уменьшают величину  $J_\omega$ , получаем:

$$\Delta J_\omega = 2 \left\{ r^2 \left[ 0,01825 \omega_a^2 + 0,13698 \omega_d^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 0,05936 \omega_a \omega_d - \frac{k}{12} (\omega_a^2 + 2\omega_a \omega_d + 3\omega_d^2) \right] - r_1^2 \left[ 0,01825 \omega_b^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 0,13698 \omega_2^2 + 0,05936 \omega_b \omega_2 - \frac{k}{12} (\omega_b^2 + 2\omega_b \omega_2 + 3\omega_2^2) \right] \right\}.$$

Принимая  $r = 2r_1$  и  $k = 0,1$ , получаем:

$$\Delta J_\omega = r_1^2 (0,07935 \omega_a^2 + 0,8958 \omega_d^2 + \\ + 0,3416 \omega_a \omega_d - 0,01984 \omega_b^2 - 0,22396 \omega_2^2 - 0,08540 \omega_b \omega_2), \quad (104)$$

где

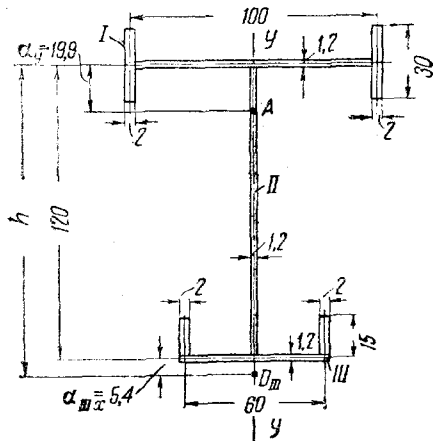
$$\omega_b = \omega_2 - sr_1; \quad \omega_d = \omega_1 - s \frac{d}{2}; \quad \omega_a = \omega_d - sr; \quad s = \frac{\omega_1 + \omega_2}{b_0}.$$

По аналогии с сортаментом двутавров в таблицу новых геометрических характеристик для швеллеров мы поместили величины секториальных моментов сопротивления.

Составленную таким образом таблицу секториальных геометрических характеристик сортамента швеллеров см. в приложении 2.

### § 31. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

**Пример 11.** Определить координату центра изгиба и секториальный момент инерции сварного профиля (фиг. 113) по формулам приложения 12 и проверить полученные результаты по методу произвольных эпюр (§ 29).



Фиг. 113.

Рассматриваем заданный профиль состоящим из трех элементов: I — двутавра, II — вертикального листа и III — швеллера. Координата центра изгиба швеллера по формуле в 4-й строке приложения 12 равна:

$$\begin{aligned} \alpha_{IIIx} &= \frac{2J_{Irc}}{J_x} = \\ &= \frac{2 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 30^2 \cdot 7,5}{2 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 30^2 + \frac{1,2 \cdot 60^3}{12}} = \\ &= \frac{405\,000}{75\,600} = 5,4 \text{ см.} \end{aligned}$$

Тогда координата центра изгиба всего сечения  $\alpha_y$ , отсчитанная от оси двутавра, будет равна (см. приложение 12, № 6):

$$\begin{aligned} \alpha_y &= \frac{J_{IIIy}h}{J_y} = \frac{\left(2 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 30^2 + \frac{1,2 \cdot 60^3}{12}\right) 125,4}{2 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 30^2 + \frac{1,2 \cdot 60^3}{12} + 2 \cdot 30 \cdot 2 \cdot 50^2 + \frac{1,2 \cdot 100^3}{12}} = \\ &= \frac{75\,600 \cdot 125,4}{75\,600 + 300\,000 + 100\,000} = \frac{9\,477\,000}{475\,600} = 19,9 \text{ см.} \end{aligned}$$

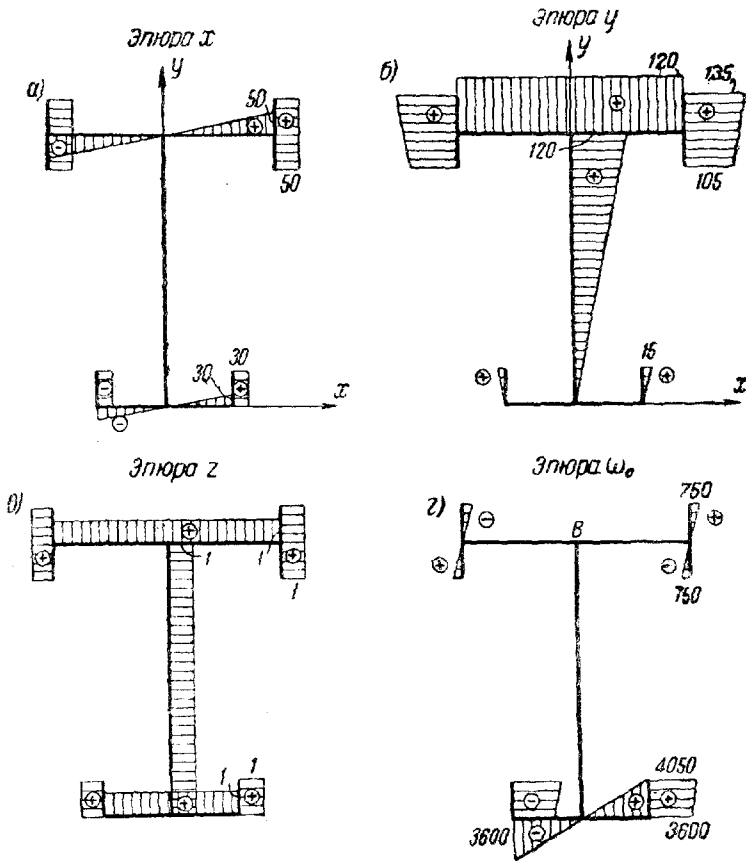
Для определения секториального момента инерции профиля определим сначала собственные секториальные моменты инерции двутавра и швеллера (секториальный момент инерции стенки равен нулю).

По формулам приложения 12 (№ 2 и № 4) имеем:

$$\begin{aligned} J_{I\omega} &= \frac{J_{Iy}h^2}{2} = \frac{\frac{20 \cdot 30^3}{12} \cdot 100^2}{2} = 22,5 \cdot 10^6 \text{ см}^6; \\ J_{III\omega} &= \frac{2J_{Irc}J_{Irc}c^2}{J_x} + \frac{J_{Irc}b^2}{6} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 30^2 \cdot \frac{1,2 \cdot 60^3}{12} \cdot 7,5^2}{2 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 30^2 + \frac{1,2 \cdot 60^3}{12}} + \frac{2 \cdot 15 \cdot 30^2 \cdot 15^2}{6} = \\ &= \frac{54\,000 \cdot 21\,600 \cdot 56,25}{75\,600} + 1\,012\,500 = 1,869 \cdot 10^6 \text{ см}^6. \end{aligned}$$

Тогда по формуле (44) секториальный момент инерции всего сечения равен:

$$\begin{aligned}
 J_{\omega} &= J_{I_{\omega}} + J_{II_{\omega}} + \frac{J_{Iy} J_{IIIy} y^2}{J_y} = \\
 &= 22,5 \cdot 10^6 + 1,869 \cdot 10^6 + \frac{\left( 2 \cdot 2 \cdot 30 \cdot 50^2 + \frac{1,2 \cdot 100^3}{12} \right) 75 \cdot 600 \cdot 125,4^2}{475 \cdot 600} = \\
 &= 22,5 \cdot 10^6 + 1,869 \cdot 10^6 + 999,2 \cdot 10^6 = 1 \cdot 024 \cdot 10^6 \text{ см}^6.
 \end{aligned}$$



Фиг. 114.

Для определения тех же величин по методу произвольных эпюр построим четыре произвольные эпюры:  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $\omega_0$ .

За нулевые линии при построении эпюр  $x$  и  $y$  принимаем соответственно ось симметрии (фиг. 114,а) и ось стенки швеллера (фиг. 114,б); эпюра  $z$  изображена на фиг. 114,в. При построении секториальной эпюры  $\omega_0$  полюс отсчета принимаем в точке пересечения оси симметрии профиля с горизонтальной осью двутавра (фиг. 114,г).

Вычисляем по всей площади поперечного сечения интегралы от квадратов этих эпюр и произведений их, взятых попарно,

$$\int_F x^2 dF = 2 \left( \frac{50^3}{3} 1,2 + \frac{30^3}{3} 1,2 + 30 \cdot 50^2 \cdot 2 + 15 \cdot 30^2 \cdot 2 \right) = 0,4756 \cdot 10^6;$$

$$\int_F xy dF = 0;$$

$$\int_F xz dF = 0;$$

$$\int_F x\omega_0 dF = 2 \left( \frac{4050 + 3600}{2} 15 \cdot 30 \cdot 2 + \frac{3600 \cdot 30 \cdot 30}{3} 1,2 \right) = 9,477 \cdot 10^6;$$

$$\int_F y\omega_0 dF = 0;$$

$$\int_F z\omega_0 dF = 0;$$

$$\int_F \omega_0^2 dF = 4 \frac{15 \cdot 750^2}{3} 2 + 2 \frac{15 \cdot 2}{3} (4050^2 + 3600^2 + 4050 \cdot 3600) + \\ + 2 \frac{30 \cdot 3600^2}{3} 1,2 = 1212,39 \cdot 10^6.$$

Интегралы  $\int_F y^2 dF$ ,  $\int_F yz dF$  и  $\int_F z^2 dF$  не потребуются, потому что  $\alpha_x = 0$  и  $\beta = 0$ .

Подставив в уравнения (87) найденные значения коэффициентов, получим:

$$\alpha_y = - \frac{\int_F x\omega_0 dF}{\int_F x^2 dF} = - \frac{9,477 \cdot 10^6}{0,4756 \cdot 10^6} = -19,9 \text{ см.}$$

Секториальный момент инерции по формуле (89) равен:

$$J_\omega = \alpha_y \int_F x\omega_0 dF + \int_F \omega_0^2 dF = -19,9 \cdot 9,477 \cdot 10^6 + 1212,39 \cdot 10^6 = 1024 \cdot 10^6 \text{ см}^6.$$

**Пример 12.** Определить секториальные геометрические характеристики профиля (фиг. 115), составленного из двух прокатных швеллеров № 14а и листа  $186 \times 6 \text{ мм}$ .

Выпишем прежде всего из сортамента и из приложения 2 необходимые для дальнейшего геометрические размеры и характеристики швеллера № 14а (фиг. 116):

$h = 14 \text{ см,}$	$J_y = 53,2 \text{ см}^4,$
$b = 5,8 \text{ см,}$	$z_0 = 1,71 \text{ см,}$
$d = 0,6 \text{ см,}$	$x_a = 1,58 \text{ см,}$
$t = 0,95 \text{ см,}$	$J_\omega = 1512,5 \text{ см}^6$
$F = 18,51 \text{ см}^2,$	$\omega_1 = 12,03 \text{ см}^2,$
$J_x = 563,7 \text{ см}^4,$	$\omega_2 = 22,63 \text{ см}^2.$

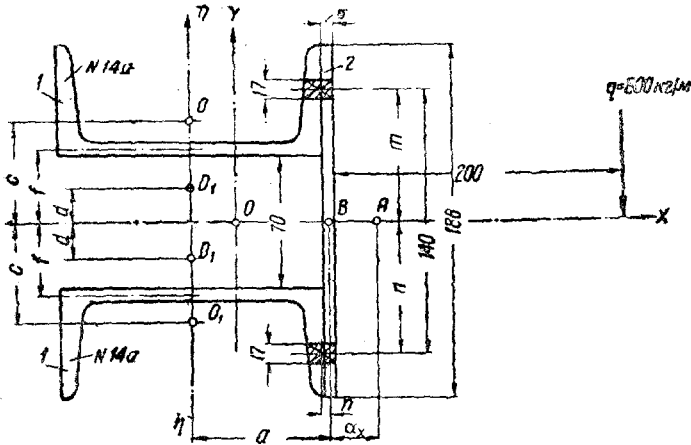
а) Координата центра изгиба, по формуле (60) с поправкой на ослабление сечения отверстиями по формуле (69) будет равна:

$$a_x = \frac{S_{\omega_{BY}}^{нетто}}{J_x(нетто)} = \frac{2(F_1 c f - J_{1x}) 2a - 2F_{отв} m^2 n}{J_x(нетто)}$$

где  $F_1$  — площадь одного швеллера;

$J_{1x}$  — момент инерции одного швеллера относительно главной оси всего сечения;

$F_{отв}$  — площадь одного отверстия;



Фиг. 115.

остальные обозначения см. на фиг. 115.

$$J_x(нетто) = 2J_{1x} + J_{2x} - 2J_x^{отв} = 2(53,2 + 18,51 \cdot 5,21^2) + \frac{0,6 \cdot 18,6^3}{12} - 2 \cdot 1,7 \times \\ \times 1,55 \cdot 7^2 = 2 \cdot 555,6 + 321,7 - 258,2 = 1432,9 - 258,2 = 1174,7 \text{ см}^4$$

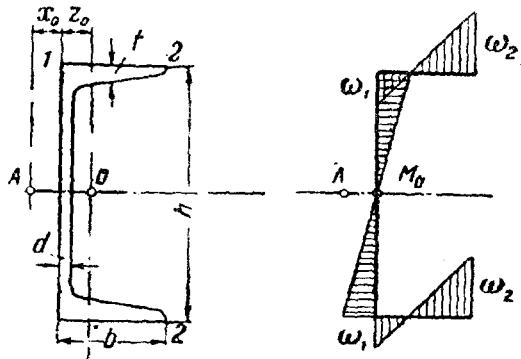
(заметьте, что ослабление отверстиями составляет 18%).

$$S_{\omega_{BY}}^{нетто} = (2 \cdot 18,51 \cdot 5,21 \times \\ \times 3,8 - 555,6) 2 \cdot 7,3 - 2 \cdot 1,7 \cdot 1,55 \times \\ \times 7,0^2 \cdot 0,475 = (732,9 - 555,6) \times \\ \times 14,6 - 122,7 = 2588,6 - 122,7 = \\ = 2465,9 \text{ см}^5$$

(ослабление отверстиями для секториально-линейного статического момента составляет только 4,7%).

Тогда

$$a_x = \frac{2465,9}{1174,7} = 2,10 \text{ см.}$$

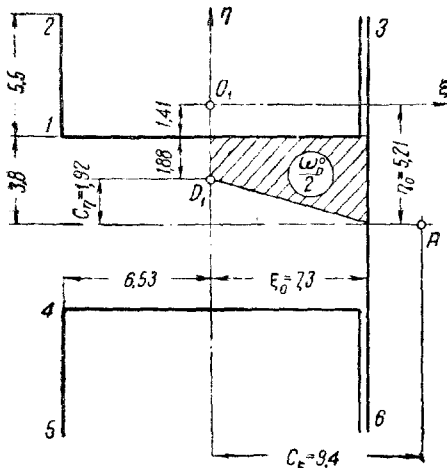


Фиг. 116.

б) Секториальный момент инерции по формулам (61) и (71) равен:

$$J_{\omega} = 2J_{1\omega_D} + 2J_{1\eta} d^2 + 2J_{1x} (a + a_x)^2 + J_{2x} a_x^2 + \\ + 8F_1 f a [f a - (a + a_x) c] - 2F_{отв} (a_x - n)^2 m^2,$$

где  $J_{1\omega_D}$  — секториальный момент инерции швеллера относительно собственного центра изгиба;  
 $J_{1\eta}$  — момент инерции швеллера относительно собственной главной вертикальной оси;  
 $J_{2x}$  — момент инерции листа относительно оси X.



Фиг. 117.

Остальные обозначения даны выше, а также на фиг. 115.

$$\begin{aligned}
 J_{\omega} &= 2 \cdot 1512,5 + 2 \cdot 563,7 \cdot 1,92^2 + \\
 &+ 2 \cdot 555,6 (7,3 + 2,10)^2 + \\
 &+ 321,7 \cdot 2,10^2 + \\
 &+ 8 \cdot 18,51 \cdot 3,8 \cdot 7,3 [3,8 \cdot 7,3 - \\
 &- (7,3 + 2,10) \cdot 5,21] - \\
 &- 2 \cdot 1,7 \cdot 1,55 (2,10 - 0,475)^2 \cdot 7,0^2 = \\
 &= 3025 + 4155,6 + 98186 + \\
 &+ 1418,7 - 87208 - 681,7 = \\
 &= +19578 - 682 = 18896 \text{ см}^6
 \end{aligned}$$

(ослабление отверстиями составляет 3,50%).

в) Секториальные координаты крайних точек контура. Пронумеруем крайние точки контура, как указано на фиг. 117. По формуле (25):

$$\begin{aligned}
 \omega_A &= \omega_D - \omega_D^0 - c_{\xi} (\eta - \eta_0) + \\
 &+ c_{\eta} (\xi - \xi_0),
 \end{aligned}$$

где  $\omega_D$  — собственная (по отношению к собственному центру изгиба) секториальная координата, которую следует взять из сортамента (приложение 2), а остальные обозначения даны на фиг. 117 (черточки над обозначениями координат для простоты записи опущены).

$$\omega_D^0 = -2 \left( \frac{1,88 + 3,8}{2} \right) 7,3 = -41,46 \text{ см}^2.$$

Тогда общая формула для  $\omega_A$  примет следующий вид:

$$\omega_A = \omega_D + 41,46 - 9,40 (\eta + 5,21) - 1,92 (\xi - 7,3).$$

Подставляя в эту формулу  $\omega_D$ ,  $\xi$  и  $\eta$  для соответствующих крайних точек контура, получим:

$$\omega_1 = -\omega_4 = 12,03 + 41,46 - 9,40 (-1,41 + 5,21) - 1,92 (-6,53 - 7,3) = 44,32 \text{ см}^2;$$

$$\omega_2 = -\omega_5 = -22,63 + 41,46 - 9,40 (4,09 + 5,21) - 1,92 (-6,53 - 7,3) = -42,04 \text{ см}^2;$$

$$\omega_3^{шв} = -\omega_6^{шв} = 22,63 + 41,46 - 9,40 (4,09 + 5,21) - 1,92 (6,53 - 7,3) = -21,85 \text{ см}^2.$$

$$\omega_3^{\text{листа}} = -\omega_6^{\text{листа}} = 2,10 \cdot 9,3 = -19,53 \text{ см}^2;$$

$$\omega_3 = -\omega_6 = \frac{\omega_3^{шв} + \omega_3^{\text{листа}}}{2} = -\frac{21,85 + 19,53}{2} = -20,69 \text{ см}^2.$$

г) Секториальные моменты сопротивления:

$$W_{1\omega} = W_{4\omega} = \frac{J_{\omega}}{\omega_1} = \frac{18896}{44,32} = 426 \text{ см}^4;$$

$$W_{2\omega} = W_{5\omega} = \frac{J_{\omega}}{\omega_2} = \frac{18896}{42,04} = 449 \text{ см}^4;$$

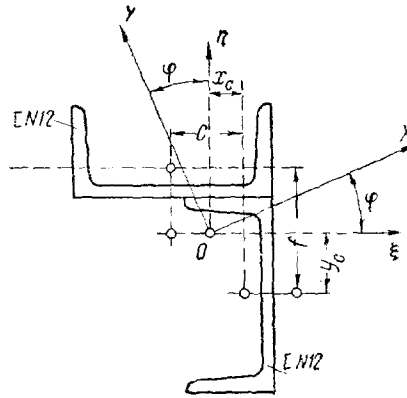
$$W_{3\omega} = W_{6\omega} = \frac{J_{\omega}}{\omega_3} = \frac{18896}{20,69} = 913 \text{ см}^4.$$



**Пример 13.** Определить координаты центральных точек, линейные и секториальные геометрические характеристики профиля, составленного из двух швеллеров № 12 (фиг. 118).

Выпишем прежде всего из сортамента и приложения 2 геометрические характеристики швеллера № 12 (фиг. 116):

$$\begin{aligned} h &= 12 \text{ см}; \\ b &= 6,3 \text{ см}; \\ d &= 0,55 \text{ см}; \\ t &= 0,9 \text{ см}; \\ F &= 15,36 \text{ см}^2; \\ J_x &= 346,3 \text{ см}^4; \\ J_y &= 37,4 \text{ см}^4; \\ z_0 &= 1,62 \text{ см}; \\ x_a &= 1,48 \text{ см}; \\ J_{\omega} &= 768,3 \text{ см}^6; \\ \omega_1 &= 9,54 \text{ см}^2; \\ \omega_2 &= 17,31 \text{ см}^2. \end{aligned}$$



Фиг. 118.

а) Координаты центра тяжести. За оси отсчета координат центра тяжести  $x_c$  и  $y_c$  примем главные оси вертикального швеллера. Так как оба швеллера, составляющих профиль, одинакового номера, то, очевидно:

$$x_c = \frac{c}{2} = \frac{h}{2} z_0 = \frac{6 - 1,62}{2} = 2,19 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{f}{2} = \frac{h}{2} + z_0 = \frac{6 + 1,62}{2} = 3,81 \text{ см}.$$

б) Моменты инерции относительно центральных осей

$$\begin{aligned} J_{\xi} &= J_{\xi}' + J_{\xi}'' = J_y + F \left( \frac{f}{2} \right)^2 + J_x + F \left( \frac{f}{2} \right)^2 = \\ &= J_y + J_x + F \frac{f^2}{2} = 37,4 + 346,3 + 15,36 \frac{7,62^2}{2} = 829,6 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{\eta} &= J_{\eta}' + J_{\eta}'' = J_x + F \left( \frac{c}{2} \right)^2 + J_y + F \left( \frac{c}{2} \right)^2 = \\ &= J_x + J_y + F \frac{c^2}{2} = 346,3 + 37,4 + 15,36 \frac{4,38^2}{2} = 531 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

в) Центробежный момент инерции [по формуле (4) при  $J_{\xi\eta} = 0$ ]

$$\begin{aligned} J_{\xi\eta} &= \sum Fab = F \left( -\frac{f}{2} \right) \frac{c}{2} + F \left( -\frac{c}{2} \right) \frac{f}{2} = \\ &= -F \frac{fc}{2} = -15,36 \frac{7,62 \cdot 4,38}{2} = -256,32 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

г) Направление главных осей

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2J_{\xi\eta}}{J_{\eta} - J_{\xi}} = \frac{-2 \cdot 256,32}{531 - 829,6} = 1,717;$$

$$\begin{aligned} 2\varphi &= 59^{\circ}47'; \quad \sin 2\varphi = 0,861; \quad \cos 2\varphi = 0,503; \\ \varphi &= 29^{\circ}53'; \quad \sin \varphi = 0,498; \quad \cos \varphi = 0,867. \end{aligned}$$

д) Главные моменты инерции

$$\begin{aligned} J_x + J_y &= J_\xi + J_\eta; \\ J_x - J_y &= (J_\xi - J_\eta) \cos 2\varphi - 2J_{\xi\eta} \sin 2\varphi; \\ J_x + J_y &= 1360,6 \text{ см}^4; \\ J_x - J_y &= 298,6 \cdot 0,503 + 512,6 \cdot 0,864 = 593,08 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

откуда

$$J_x = 976,9 \text{ см}^4; \quad J_y = 383,7 \text{ см}^4.$$

е) Координаты центра изгиба

За вспомогательный полюс отсчета  $B$  и начало отсчета  $M_0$  секториальных координат примем центр изгиба и главную секториальную точку вертикального швеллера.

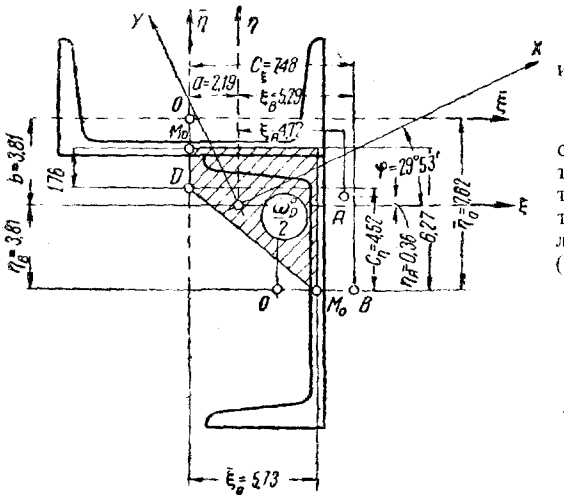
Тогда в формулах:

$$S_{\omega_{Bx}} = S'_{\omega_{Bx}} + S''_{\omega_{Bx}}$$

$$S_{\omega_{By}} = S'_{\omega_{By}} + S''_{\omega_{By}}$$

слагасмые, относящиеся к вертикальному швеллеру, обратятся в нуль, а для горизонтального швеллера по формулам (17) и (18), получим (фиг. 119):

$$\begin{aligned} S_{\omega_{Bx}} &= -J_\xi c_\xi \sin \varphi + \\ &+ J_\eta c_\eta \cos \varphi + F(a \cos \varphi + \\ &+ b \sin \varphi) (\bar{\omega}_D^0 - c_\xi \bar{\eta}_0 + \\ &+ c_\eta \bar{\xi}_0) = -37,4 \cdot 7,48 \cdot 0,498 - \\ &- 346,3 \cdot 4,52 \cdot 0,867 + \\ &+ 15,36 (2,19 \cdot 0,867 - \\ &- 3,81 \cdot 0,498) \cdot (-46^1 + \\ &+ 7,48 \cdot 7,62 - 4,52 \cdot 5,73) = \\ &= -1496,7 \text{ см}^5. \end{aligned}$$



Фиг. 119.

$$\begin{aligned} S_{\omega_{By}} &= -J_\xi c_\xi \cos \varphi - J_\eta c_\eta \sin \varphi + F(b \cos \varphi - a \sin \varphi) (\bar{\omega}_D^0 - c_\xi \bar{\eta}_0 + c_\eta \bar{\xi}_0) = \\ &= -37,4 \cdot 7,48 \cdot 0,867 + 346,3 \cdot 4,52 \cdot 0,498 + 15,36 (-3,81 \cdot 0,867 - 2,19 \cdot 0,498) \times \\ &\times (-46 + 7,48 \cdot 7,62 - 4,52 \cdot 5,73) = 1541,1 \text{ см}^5. \end{aligned}$$

Тогда по формуле (2):

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{S_{\omega_{By}}}{J_x} = \frac{1541,1}{976,9} = 1,58 \text{ см}; \\ \alpha_y &= -\frac{S_{\omega_{Bx}}}{J_y} = \frac{1496,7}{383,7} = 3,90 \text{ см}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Секториальная координата  $\bar{\omega}_D^0$  начальной точки относительно полюса и начала отсчета, взятых соответственно в центре изгиба и главной секториальной точке горизонтального швеллера, измеряется удвоенной заштрихованной на фиг. 119 площадью:

$$\bar{\omega}_D^0 = -(1,76 + 6,27) 5,73 = -46 \text{ см}^2.$$

Для того чтобы определить координаты центра изгиба в главных осях всего сечения, найдем предварительно координаты точки  $B$  в этих осях по формулам (21):

$$b_x = \xi_B \cos \varphi + \eta_B \sin \varphi = 5,29 \cdot 0,867 - 3,81 \cdot 0,498 = 2,69 \text{ см};$$

$$b_y = \eta_B \cos \varphi - \xi_B \sin \varphi = -3,81 \cdot 0,867 - 5,29 \cdot 0,498 = -5,94 \text{ см}.$$

Тогда по формулам (22):

$$a_x = a_x + b_x = 1,58 + 2,69 = 4,27 \text{ см};$$

$$a_y = a_y + b_y = 3,90 - 5,94 = -2,04 \text{ см}.$$

В дальнейшем нам понадобятся также координаты центра изгиба относительно горизонтальной и вертикальной центральных осей.

Они находятся по формулам:

$$\xi_A = a_x \cos \varphi - a_y \sin \varphi = 4,27 \cdot 0,867 + 2,04 \cdot 0,498 = 4,72 \text{ см};$$

$$\eta_A = a_y \cos \varphi + a_x \sin \varphi = -2,04 \cdot 0,867 + 4,27 \cdot 0,498 = 0,36 \text{ см}.$$

Проверка найденных координат центра изгиба методом графоаналитического интегрирования эпюр

На контуре профиля построим эпюру секториальных площадей  $\omega_B$  (фиг. 120, а), приняв за полюс отсчета  $B$  точку пересечения оси стенки вертикального швеллера с осью стенки горизонтального швеллера (пренебрегаем смещением оси на участке, где оба швеллера соприкасаются между собою, вызванным изменением толщины).

Для построения эпюр линейных координат точек контура профиля в главных осях  $X$  и  $Y$  вычисляем эти координаты по формулам:

$$x = \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi;$$

$$y = \eta \cos \varphi - \xi \sin \varphi.$$

Пользуясь данными фиг. 120, б, получаем:

$$x_I = -7,74 \cdot 0,867 + 7,49 \cdot 0,498 = -2,98 \text{ см};$$

$$x_{II} = -7,74 \cdot 0,867 + 2,465 \cdot 0,498 = -5,48 \text{ см};$$

$$x_{III} = 3,535 \cdot 0,867 + 7,49 \cdot 0,498 = 6,80 \text{ см};$$

$$x_{IV} = 3,535 \cdot 0,867 - 9,36 \cdot 0,498 = -1,60 \text{ см};$$

$$x_V = -1,49 \cdot 0,867 - 9,36 \cdot 0,498 = -5,95 \text{ см};$$

$$x_B = 3,535 \cdot 0,867 + 2,465 \cdot 0,498 = 4,29 \text{ см};$$

$$y_I = 7,49 \cdot 0,867 + 7,74 \cdot 0,498 = 10,348 \text{ см};$$

$$y_{II} = 2,465 \cdot 0,867 + 7,74 \cdot 0,498 = 5,99 \text{ см};$$

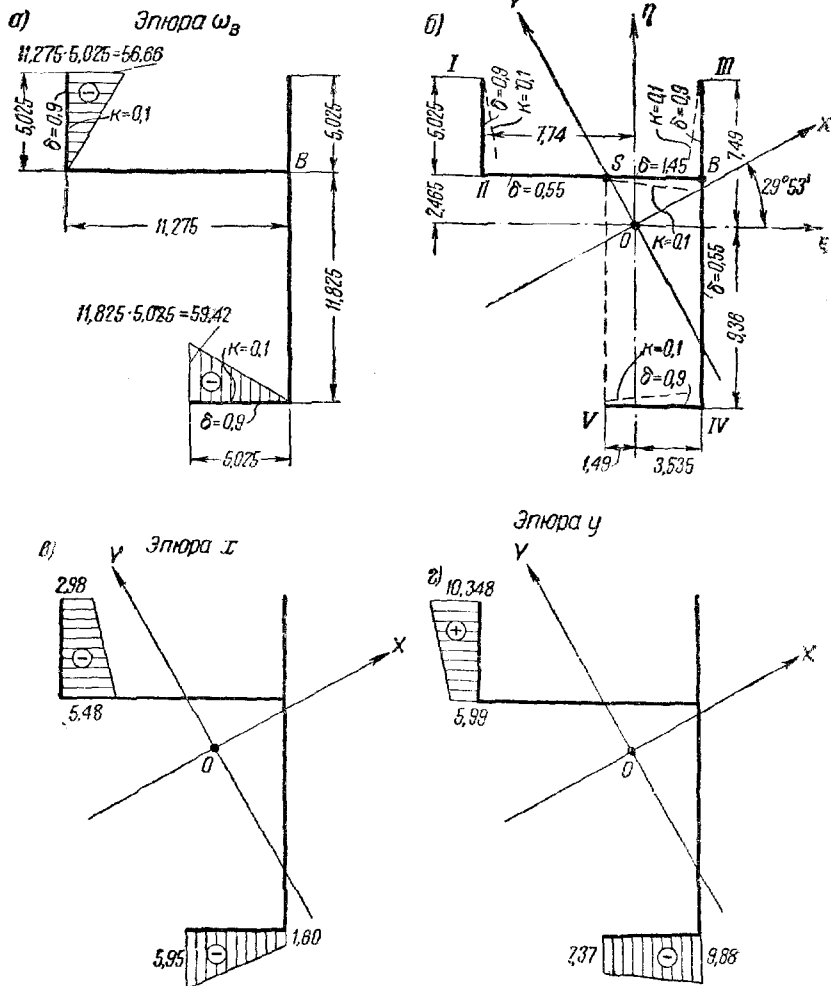
$$y_{III} = 7,49 \cdot 0,867 - 3,535 \cdot 0,498 = 4,73 \text{ см};$$

$$y_{IV} = -9,36 \cdot 0,867 - 3,535 \cdot 0,498 = -9,88 \text{ см};$$

$$y_V = -9,36 \cdot 0,867 + 1,49 \cdot 0,498 = -7,37 \text{ см};$$

$$y_B = 2,165 \cdot 0,867 - 3,535 \cdot 0,498 = 0,38 \text{ см}.$$

Соответствующие этим значениям эпюры  $x$  и  $y$  построены на фиг. 120, в и г, причем только на тех участках профиля, где эпюра  $\omega_B$  отлична от нуля.



Фиг. 120.

Взаимно интегрируя эти эпюры, получим:

$$\begin{aligned}
 \int_F \omega_{Bx} dF &= \frac{5,025 \cdot 0,9}{6} (2 \cdot 5,95 \cdot 59,42 + 1,60 \cdot 59,42) + \frac{5,025 \cdot 0,9}{6} \times \\
 &\times (2 \cdot 2,98 \cdot 56,66 + 5,48 \cdot 56,66) + \frac{0,1 \cdot 5,025^2}{12} (-56,66 \cdot 2,98 - 5,95 \cdot 59,42) = \\
 &= 604,84 + 488,74 - 109,70 = 983,88 \text{ см}^5; \\
 \int_F \omega_{By} dF &= \frac{5,025 \cdot 0,9}{6} (-2 \cdot 10,348 \cdot 56,66 - 5,99 \cdot 56,66) + \\
 &+ \frac{5,025 \cdot 0,9}{6} (2 \cdot 7,37 \cdot 59,42 + 9,88 \cdot 59,42) + \frac{0,1 \cdot 5,025^2}{12} (56,66 \cdot 10,348 - 7,37 \cdot 59,42) \\
 &= -1140,07 + 1103,01 + 31,16 = -5,87 \text{ см}^5
 \end{aligned}$$

последние слагаемые учитывают 10% -ный уклон полок швеллеров, см. формулу (92)].

Тогда:

$$a_x = \frac{\int \omega_B y dF}{J_x} = -\frac{5,87}{976,9} = -0,006 \text{ см};$$

$$a_y = -\frac{\int \omega_B x dF}{J_y} = -\frac{983,88}{383,7} = -2,56 \text{ см}.$$

Координаты точки  $B$ , принятой здесь за полюс отсчета секториальных координат, в главных осях сечения у нас выше вычислены:

$$b_x = x_B = 4,29 \text{ см};$$

$$b_y = y_B = 0,38 \text{ см}.$$

Следовательно, координаты центра изгиба в главных осях будут равны:

$$a_x = a_x + b_x = -0,01 + 4,29 = 4,28 \text{ см};$$

$$a_y = a_y + b_y = -2,56 + 0,38 = -2,18 \text{ см}.$$

ж) Координаты главной секториальной точки

Обозначим расстояние искомой главной секториальной точки  $M_0$  от низа вертикального швеллера через  $t$  (фиг. 121) и выразим в функции этого параметра  $t$  линейные и секториальные координаты  $M_0$  по отношению к главным осям, центрам изгиба и главным секториальным точкам элементов, составляющих сечение.

Условие (23') примет следующий вид:

$$S_{\omega_A} = S'_{\omega_A} + S''_{\omega_A} = 0.$$

По формуле (24) получаем:

$$\begin{aligned} S_{\omega_A} &= F'(c'_\xi \bar{\eta}'_0 - c'_\eta \bar{\xi}'_0 - \bar{\omega}'_D) + F''(c''_\xi \bar{\eta}''_0 - c''_\eta \bar{\xi}''_0 - \bar{\omega}''_D) = \\ &= 15,36[-6,91(13,62-t) + 0,35 \cdot 5,73 + (1,76 + 12,27-t) \cdot 5,73] + \\ &+ 15,35[0,57(6-t) - 4,17 \cdot 1,34 - (6-t) \cdot 1,76] = -373,9 + 36,56t = 0, \end{aligned}$$

откуда

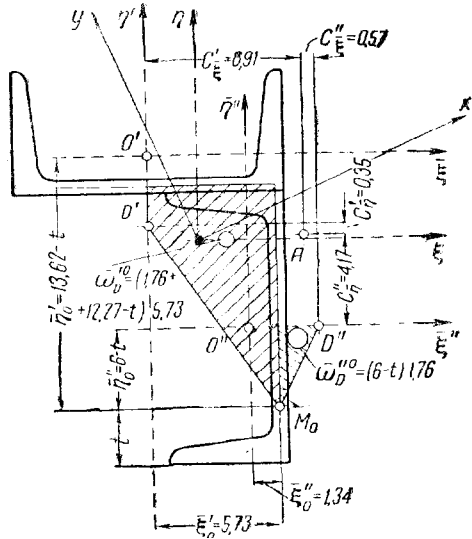
$$t = \frac{373,9}{36,56} = 10,23 \text{ см}.$$

Проверка методом графоаналитического интегрирования эпюр

Здесь нам потребуется знать координаты найденного центра изгиба в центральных вспомогательных осях  $\xi$  и  $\eta$ . Находим их по вышеприведенным формулам:

$$\xi_A = a_x \cos \varphi - a_y \sin \varphi = 4,28 \cdot 0,867 + 2,18 \cdot 0,498 = 4,80 \text{ см};$$

$$\eta_A = a_y \cos \varphi + a_x \sin \varphi = -2,18 \cdot 0,867 + 4,28 \cdot 0,498 = 0,24 \text{ см}.$$



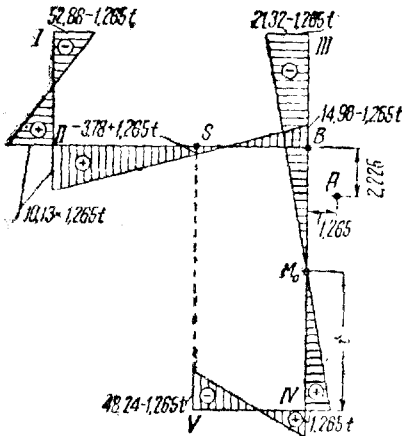
Фиг. 121.

Обозначим расстояние искомой главной секторальной точки  $M_0$  от оси нижней полки вертикального швеллера через  $t$  и построим эпюру секторальных площадей с полюсом в центре изгиба  $A$  и главной секторальной точкой  $M_0$ , при этом ординаты этой эпюры будут функциями параметра  $t$ . На фиг. 122 дана эта эпюра. Необходимые размеры взяты из фиг. 120, б

Из условия  $\int_F \omega_A dF = 0$  найдем величину параметра  $t$ .

Пользуясь данными фиг. 122, находим:

$$\begin{aligned} \int_F \omega_A dF &= \frac{5,025 \cdot 0,9}{2} (10,13 + 1,265t - 52,88 + 1,265t) + \\ &+ \frac{6,25 \cdot 0,55}{2} (10,13 + 1,265t - 3,78 + 1,265t) + \frac{5,025 \cdot 1,45}{2} \cdot (-3,78 + 1,265t - \\ &- 14,96 + 1,265t) + \frac{5,025 \cdot 0,9}{2} (-14,96 + 1,265t - 21,32 + 1,265t) + \\ &+ \frac{11,825 \cdot 0,55}{2} (1,265t - 14,96 + 1,265t) + \frac{5,025 \cdot 0,9}{2} (1,265t - 48,24 + 1,265t) + \\ &+ \frac{0,1 \cdot 5,025^2}{12} \cdot (10,13 + 1,265t + 52,88 - 1,265t - 14,96 + 1,265t + \\ &+ 21,32 - 1,265t - 14,96 + 1,265t + 3,78 - 1,265t + 1,265t + 48,24 - 1,265t) = 0, \end{aligned}$$



Фиг. 122.

или

$$38,96t = 393,79 - 22,35 = 371,44.$$

(Слагаемое  $-22,35$  — результат учета уклона полок швеллера).

Отсюда

$$t = \frac{371,44}{38,96} = 9,53 \text{ см.}$$

При сравнении величины  $t$ , найденной по обоим методам, нужно иметь в виду, что в первом методе  $t$  отсчитывается от низа вертикального швеллера, а во втором случае,  $t$  отсчитывается от оси нижней полки вертикального швеллера.

з) Секторальные координаты крайних точек контура сечения (фиг. 123). Координаты эти вычисляем по формуле (25):

$$\begin{aligned} \omega_A &= \bar{\omega}_D - \bar{\omega}_D^0 - c_{\xi} (\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_0) + \\ &+ c_{\eta} (\bar{\xi} - \bar{\xi}_0), \end{aligned}$$

где  $\bar{\omega}_D$  — собственная, т. е. по отношению к своему центру изгиба и своей главной секторальной точке, секторальная координата. Из приложения 2 имеем (фиг. 116):

$$\omega_D^I = -\omega_2 = -17,31 \text{ см}^2; \quad \omega_D^{II} = \omega_1 = +9,54 \text{ см}^2;$$

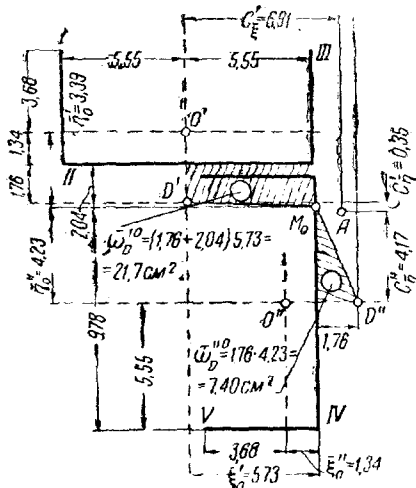
$$\omega_D^{III} = \omega_2 = +17,31 \text{ см}^2; \quad \omega_D^{IV} = \omega_1 = +9,54 \text{ см}^2;$$

$$\omega_D^V = -\omega_2 = -17,31 \text{ см}^2.$$

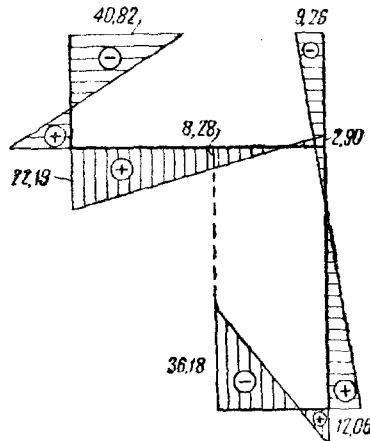
Остальные, входящие в формулу (25) величины даны на фиг. 123.

$$\begin{aligned}\omega_I &= -17,31 + 21,7 - 6,91(3,68 + 3,39) - 0,35(-5,55 - 5,73) = -40,52 \text{ см}^2; \\ \omega_{II} &= 9,54 + 21,7 - 6,91(-1,34 + 3,39) - 0,35(-5,55 - 5,73) = 21,02 \text{ см}^2; \\ \omega_{III} &= 17,31 + 21,7 - 6,91(3,68 + 3,39) - 0,35(5,55 - 5,73) = -9,78 \text{ см}^2; \\ \omega_{IV} &= 9,54 + 7,4 + 0,57(-5,55 - 4,23) + 4,17(1,34 - 1,34) = 11,37 \text{ см}^2; \\ \omega_V &= -17,31 + 7,4 + 0,57(-5,55 - 4,23) + 4,17(-3,68 - 1,34) = -36,42 \text{ см}^2.\end{aligned}$$

Секториальные координаты точек контура при пользовании методом графоаналитического интегрирования эпюр получаются очень просто из фиг. 122, если в выражения указанных на ней секториальных



Фиг. 123.



Фиг. 124.

координат вместо параметра  $\ell$  подставим найденную для него величину  $\ell = 9,53 \text{ см}$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned}\omega_I &= -52,88 + 1,265 \cdot 9,53 = -40,82 \text{ см}^2; \\ \omega_{II} &= 10,13 + 1,265 \cdot 9,53 = 22,19 \text{ см}^2; \\ \omega_{III} &= -21,32 + 1,265 \cdot 9,53 = -9,26 \text{ см}^2; \\ \omega_{IV} &= 1,265 \cdot 9,53 = 12,06 \text{ см}^2; \\ \omega_V &= -48,24 + 1,265 \cdot 9,53 = -36,18 \text{ см}^2; \\ \omega_s &= -3,78 + 1,265 \cdot 9,53 = 8,28 \text{ см}^2; \\ \omega_B &= -14,96 + 1,265 \cdot 9,53 = -2,90 \text{ см}^2.\end{aligned}$$

Эпюра главных секториальных координат дана на фиг. 124.

и) Главный секториальный момент инерции. Главный секториальный момент инерции вычисляем как сумму секториальных моментов инерции элементов профиля, из которых каждый определяется по формуле (27) (фиг. 123):

$$\begin{aligned}J_{\omega} &= \sum [J_{\omega_D} + J_{\xi} \frac{c_{\xi}^2}{\xi} + J_{\eta} \frac{c_{\eta}^2}{\eta} + F(\bar{\omega}_D - c_{\xi} \bar{\eta}_0 + c_{\eta} \bar{\xi}_0)^2] = \\ &= 768,3 + 37,4 \cdot 6,91^2 + 346,3 \cdot 0,35^2 + 15,26(-21,7 + \\ &+ 6,91 \cdot 3,39 - 0,35 \cdot 5,73)^2 + 768,3 + 346,3 \cdot 0,57^2 + 37,4 \cdot 4,17^2 + \\ &+ 15,36(-7,4 + 0,57 \cdot 4,23 + 4,17 \cdot 1,34)^2 = 4133 \text{ см}^6.\end{aligned}$$

По методу графоаналитического интегрирования элю-  
секториальный момент инерции получим согласно формуле

$$J_{\omega} = \int_F \omega^2 dF,$$

как интеграл от квадрата эюры главных секториальных координат, взятый по всей площади поперечного сечения. Пользуясь эюрой главных секториальных координат (фиг. 124), получаем:

$$\begin{aligned} J_{\omega} = & \frac{5,025 \cdot 0,9}{3} (40,82^2 + 22,19^2 - 40,82 \cdot 22,19) + \frac{6,25 \cdot 0,55}{3} \cdot (22,19^2 + 8,28^2 + \\ & + 22,19 \cdot 8,28) + \frac{5,025 \cdot 1,45}{3} (8,28^2 + 2,90^2 - 8,28 \cdot 2,90) + \\ & + \frac{5,025 \cdot 0,9}{3} (9,26^2 + 2,90^2 + 9,26 \cdot 2,90) + \frac{11,825 \cdot 0,55}{3} (2,90^2 + 12,06^2 - \\ & - 2,90 \cdot 12,06) + \frac{5,025 \cdot 0,9}{3} (12,06^2 + 36,18^2 - 12,06 \cdot 36,18) + \\ & + \frac{0,1 \cdot 5,025^2}{12} (22,19^2 - 40,82^2 + 2,90^2 - 9,26^2 + 2,90^2 - 8,28^2 + \\ & + 12,06^2 - 36,18^2) = 4\,846 - 521 = 4\,325 \text{ см}^6 \end{aligned}$$

(последнее слагаемое 521 получается от учета наклона полок).

Рассчитав один и тот же профиль двумя методами, мы получили для координат центра изгиба, положения главной секториальной точки, координат характерных точек и секториального момента инерции величины, хотя и отличающиеся друг от друга, но практически достаточно близкие (для  $J_{\omega}$ , например, расхождение не достигает 5%). Поэтому можно воспользоваться любой из них. Несовпадение этих величин объясняется тем обстоятельством, что в первом случае мы пользовались данными, взятыми из сортамента, при составлении которого были приняты во внимание кроме уклона полок также и закругления и наклон осей полок; во втором же случае при замене швеллеров элементами прямоугольного сечения это не принималось во внимание (за исключением уклона полок, на который вводилась поправка). Кроме того во втором случае и ось сечения в месте присоединения двух швеллеров относилась к оси горизонтального швеллера; в первом методе это учитывалось более точно самими формулами.

к) Главные секториальные моменты сопротивления. Главные секториальные моменты сопротивления, вычисленные по результатам, полученным по первому методу, будут:

$$W_{\omega}^I = \frac{J_{\omega}}{\omega_I} = \frac{4\,133}{40,52} = 102,0 \text{ см}^4;$$

$$W_{\omega}^{II} = \frac{J_{\omega}}{\omega_{II}} = \frac{4\,133}{21,02} = 196,6 \text{ см}^4;$$

$$W_{\omega}^{III} = \frac{J_{\omega}}{\omega_{III}} = \frac{4\,133}{9,78} = 422,6 \text{ см}^4;$$

$$W_{\omega}^{IV} = \frac{J_{\omega}}{\omega_{IV}} = \frac{4\,133}{11,37} = 363,5 \text{ см}^4;$$

$$W_{\omega}^V = \frac{J_{\omega}}{\omega_V} = \frac{4\,133}{36,42} = 113,5 \text{ см}^4.$$



**НАПРЯЖЕНИЯ В ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЯХ ПРИ СТЕСНЕННОМ КРУЧЕНИИ И ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ**

**§ 32. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ**

В стержне, находящемся в условиях стесненного кручения, как известно из предыдущего, кроме касательных напряжений, соответствующих чистому кручению, возникают секториальные нормальные и сопутствующие им секториальные касательные напряжения.

Первые из них определяются формулой (19) главы II:

$$\sigma_{\omega} = - E \theta'' \omega, \quad (1)$$

а вторые — формулой (32) главы II:

$$\tau_{\omega} = E \theta''' \frac{S_{\omega}^{omc}}{\delta}. \quad (2)$$

Подставив в эти формулы значения производных  $\theta''$  и  $\theta'''$ , выраженные через силовые изгибно-крутильные факторы [формулы (65) и (68) главы II], получим:

$$\sigma_{\omega} = \frac{B_{\omega} \omega}{J_{\omega}} \quad (3)$$

и

$$\tau_{\omega} = - \frac{M_{\omega} S_{\omega}^{omc}}{J_{\omega} \delta}. \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) по своему виду аналогичны соответствующим формулам нормальных и касательных напряжений при поперечном изгибе:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{J_x} y \quad (5)$$

и

$$\tau_x = - \frac{Q_y S_x^{omc}}{J_x \delta}. \quad (6)$$

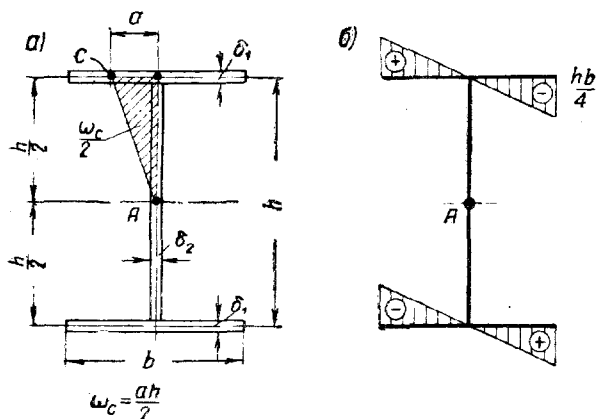
Но в числителях формул (3) и (4) на месте изгибающего момента  $M$  [формула (5)] и поперечной силы  $Q$  [формула (6)] стоят новые изгибно-крутильные силовые факторы: изгибно-крутящий бимомент  $B_{\omega}$  и изгибно-крутящий момент  $M_{\omega}$ , а на месте линейной координаты  $y$  (или  $x$ ) точки, в которой определяется напряжение, стоит секториальная координата соответствующей точки контура  $\omega$  и вместо линейного статического момента отсеченной части сечения относительно главной оси  $S_x^{omc}$  или  $(S_y^{omc})$  стоит секториальный статический момент той же отсеченной части относительно центра изгиба сечения  $S_{\omega}^{omc}$ .

В знаменателях на месте экваториального момента инерции  $J_x$  стоит секториальный момент инерции  $J_{\omega}$ ;  $\delta$  в формулах (4) и (6) — толщина стенки стержня в том месте, где определяется касательное напряжение.

### § 33. ЭПЮРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ И КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПО СЕЧЕНИЮ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ

#### 1. Нормальные напряжения

Формула (3) показывает, что нормальные напряжения при стесненном кручении  $\sigma_\omega$  распределяются по сечению не по линейному закону, как распределяются нормальные напряжения при изгибе, а по более сложному закону секториальных площадей. В дальнейшем для каждого рассматриваемого типа сечения закон изменения нормальных напряжений по сечению будем изображать в виде эпюр главных секториальных координат  $\omega$  с полюсом в центре изгиба, построенных на контуре соответствующего сечения тонкостенного стержня.



Фиг. 125.

Так, например, для двутаврового профиля (фиг. 125, а) эпюра будет иметь вид, изображенный на фиг. 125, б.

Напомним, что положительной мы условились считать секториальную площадь, описанную подвижным радиусом-вектором против движения часовой стрелки.

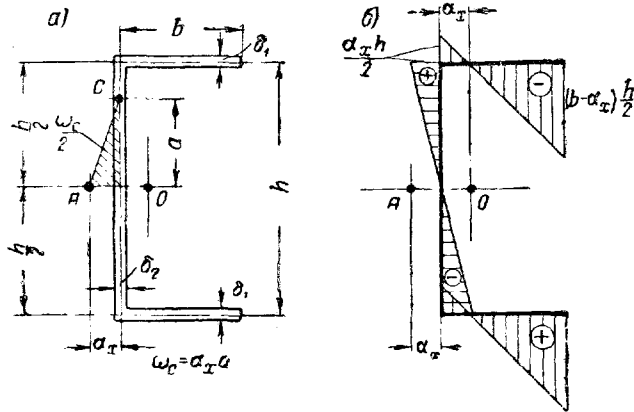
Из эпюры видно, что при положительном изгибно-крутящем бимоменте  $B_\omega$  волокна справа от стенки в верхней полке будут сжаты, а в нижней растянуты, слева от стенки — наоборот; поэтому сечение стержня не останется плоским, а примет вид, изображенный на фиг. 33, а.

Для швеллера (фиг. 126, а) эпюра главных секториальных координат представлена на фиг. 126, б.

#### 2. Касательные напряжения

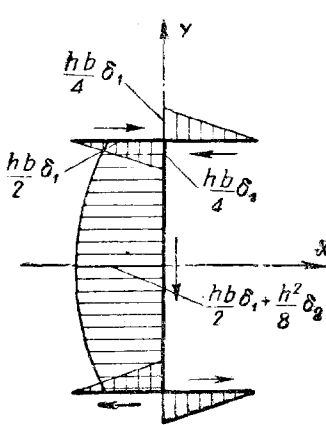
Прежде всего остановимся на касательных напряжениях при изгибе. Для тонкостенных стержней формула (6) определяет не составляющие касательных напряжений в направлении оси  $Y$ , а касательные напряжения, направленные по контуру тонкостенного стержня, вызванные поперечной силой, действующей в направлении  $Y$ . Эти напряжения равномерно распределены по толщине сечения. Входящая

в формулу (6) толщина  $\delta$  измеряется не параллельно нейтральной оси, а нормально к контуру. Кроме того при исчислении момента инерции в этой формуле (как вообще в формулах при расчете тонкостенных

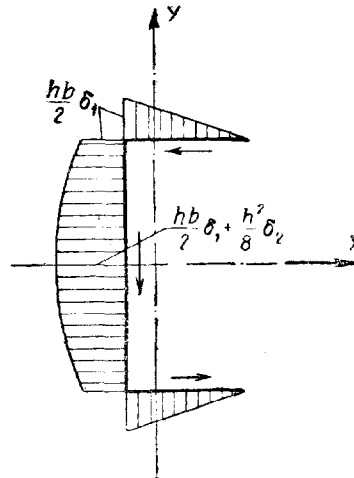


Фиг. 126.

стержней) следует пренебрегать собственными моментами инерции элементов сечения относительно их продольных осей; это вытекает из принятого положения о том, что нормальные напряжения распределяются по толщине стенки равномерно (§ 8, п. 2).



Фиг. 127.

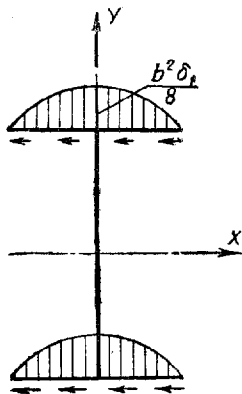


Фиг. 128.

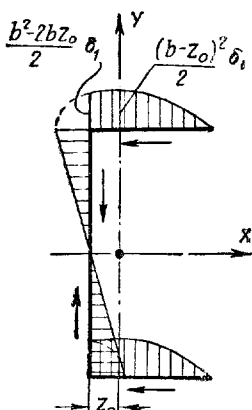
При постоянной толщине стенок элементов профиля эпюра распределения касательных напряжений по сечению при изгибе будет пропорциональна соответствующей эпюре изменения по контуру величины статического момента отсеченной части  $S_x^{отс}$  относительно нейтральной оси. На фиг. 127 и 128 представлены эпюры  $S_x^{отс}$  для двутавра (фиг. 125, а) и швеллера (фиг. 126, а). Стрелками показаны направления касательных

напряжений  $\tau_x$  при положительном направлении (вверх) поперечной силы  $Q_y$ .

На фиг. 129 и 130 изображены эпюры  $S_{y\text{ome}}$  для тех же профилей и стрелками показаны направления  $\tau_y$  при положительном направлении (вправо) поперечной силы  $Q_x$ .

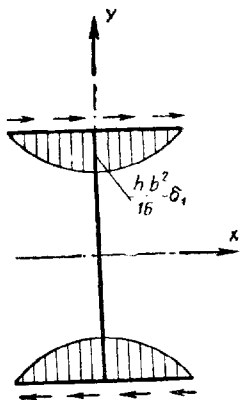


Фиг. 129.

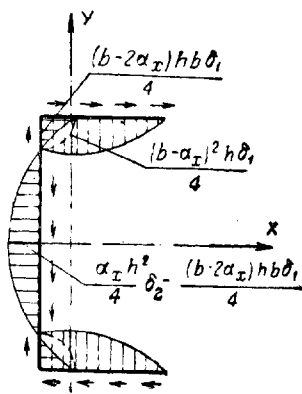


Фиг. 130.

Переходим к секториальным касательным напряжениям, определяемым формулой (4). При постоянной толщине стенок элементов профиля эпюра распределения касательных напряжений по сечению будет, очевидно, пропорциональна соответствующей эпюре секториальных статических моментов отсеченной части сечения.



Фиг. 131.



Фиг. 132.

Имея в виду, что [см. гл. II, формулу (31)]

$$S_{\omega\text{ome}} = \int_{F_{\text{ome}}} \omega dF, \quad (7)$$

построим эпюры  $S_{\omega\text{ome}}$  для рассмотренных выше двутаврового и швеллерного профилей (фиг. 131 и 132). Стрелками показаны направления

касательных напряжений  $\tau_{\omega}$  при положительном (против часовой стрелки) закручивании стержня.

Ординаты эпюры  $S_{\omega}^{ome}$  представляют площадь пройденной части эпюры  $\omega$ , считая от крайних точек сечения, умноженную на толщину стенки  $\delta$ . При построении этих эпюр были использованы эпюры главных секториальных координат (фиг. 125, б и 126, б). Поэтому отдельные участки эпюры  $S_{\omega}^{ome}$  обычно имеют параболическое и в исключительных случаях прямолинейное очертание.

В приложении 13 даны эпюры напряжений  $\sigma$  и  $\tau$ , возникающих при изгибе и кручении для некоторых симметричных металлических стержней.

Имея эпюры изгибно-крутящих бимоментов  $B_{\omega}$  и изгибно-крутящих моментов  $M_{\omega}$  по длине стержня (табл. 32), можно без особого труда определить секториальные нормальные и секториальные касательные напряжения в любой точке произвольного сечения стержня, находящегося в условиях совместного действия изгиба и кручения.

Наконец, касательные напряжения, соответствующие чистому кручению, как было сказано в главе II, по толщине стенок профиля, в отличие от касательных напряжений при изгибе и секториальных касательных напряжений, постоянных по толщине стенки, распределяются по линейному закону с нулевой линией по средней линии сечения (фиг. 36, в).

Наибольшая величина этих напряжений получается по середине наружных краев прямоугольников, составляющих профиль, и определяется по формуле (5') главы I:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр} \delta}{J_d}, \quad (8)$$

где  $M_{кр}$  — крутящий момент;

$\delta$  — толщина соответствующей стенки профиля;

$J_d$  — момент инерции при чистом кручении, который в формулу (8) вводится без поправочного коэффициента  $\alpha$ .

В дальнейшем эти напряжения будем обозначать через  $\tau_{кр}$ .

### 3. Главные нормальные напряжения

Для тонкостенных стержней, находящихся в условиях совместного действия изгиба и кручения, общая формула главных нормальных напряжений по виду остается такой же, как и в теории поперечного изгиба:

$$\sigma_{2,1} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Компоненты  $\sigma$  и  $\tau$ , входящие в эту формулу, в каждом частном случае следует определять для соответствующего сечения и точки стержня как суммарные напряжения от изгиба и кручения.

### § 34. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ДВУТАВРОВЫХ БАЛКАХ, НАХОДЯЩИХСЯ В УСЛОВИЯХ СОВМЕСТНОГО ДЕЙСТВИЯ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

Рассматривая эпюру  $\tau_x$ , изображенную на фиг. 127, мы устанавливаем, что в двутавровых профилях максимальные касательные напряжения при изгибе возникают по середине стенки. При совместном дей-

ствии изгиба и кручения в наружных точках по середине стенки к напряжениям  $\tau_x$  добавляются максимальные касательные напряжения  $\tau_{кр}$ , соответствующие чистому кручению; что же касается секториальных касательных напряжений  $\tau_\omega$ , то в этом месте сечения, как видно из эпюры на фиг. 131, они равны нулю.

Другой опасной точкой двутаврового сечения может оказаться середина полки, в наружных краях которой при совместном действии изгиба и кручения имеют место все три рода касательных напряжений  $\tau_x$ ,  $\tau_\omega$  (фиг. 127, 131) и  $\tau_{кр}$ .

Заметив это, рассмотрим двутавр, изображенный на фиг. 133, и исследуем, как велика разница между величинами этих компонентов касательных напряжений и нельзя ли каким-нибудь из них по сравнению с другими пренебречь.

В точке 1 рассматриваемого профиля секториальные касательные напряжения определяются по формуле:

$$\tau_{1\omega} = \frac{M_\omega S_{1\omega}^{omc}}{J_\omega \delta_n} = \frac{M_\omega \frac{hb^2}{16} \delta_n}{J_y \cdot \frac{h^2}{4} \delta_n}$$

или

$$\tau_{1\omega} = \frac{M_\omega}{J_y} \cdot \frac{b^2}{4h}. \quad (9)$$

Касательные напряжения, соответствующие чистому кручению:

$$\tau_{1кр} = \frac{M_{кр} \delta_n}{J_d}. \quad (10)$$

Для сравнения  $\tau_{1\omega}$  и  $\tau_{1кр}$  разделим первое на второе:

$$\frac{\tau_{1\omega}}{\tau_{1кр}} = 0,25 \frac{M_\omega}{M_{кр}} \cdot \frac{J_d}{J_y} \cdot \frac{b^2}{h \delta_n}. \quad (11)$$

Для того чтобы получить численное значение величины отношения, выражаемого формулой (11), рассмотрим балку пролетом  $l$ , свободно опертую, но закрепленную от углов закручивания на опорах и нагруженную поперечной, эксцентрично приложенной, равномерно распределенной по всему пролету нагрузкой.

По табл. 32 максимальные значения изгибно-крутящего момента  $M_\omega$  и крутящего момента  $M_{кр}$  для рассматриваемой балки и нагрузки будут на опорах и определяются по формулам:

$$M_\omega = qel \frac{\text{sh} \frac{kl}{2}}{kl \text{ch} \frac{kl}{2}} = \alpha qel, \quad (12)$$

где

$$\alpha = \frac{\text{sh} \frac{kl}{2}}{kl \text{ch} \frac{kl}{2}}. \quad (13)$$

$$M_{кр} = qel \left( \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right) = qel(0,5 - \alpha), \quad (14)$$

тогда

$$\frac{M_{\omega}}{M_{кр}} = \frac{\alpha}{0,5 - \alpha} \quad (15)$$

и формула (11) примет вид:

$$\frac{\tau_{1\omega}}{\tau_{1кр}} = \frac{0,25\alpha}{0,5 - \alpha} \cdot \frac{J_d}{J_y} \cdot \frac{b^2}{h\delta_n} \quad (16)$$

Для прокатного двутавра № 30а пролетом  $l = 6$  м:

$$kl = 0,01389 \cdot 600 = 8,334;$$

$$\alpha = \frac{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch} \frac{kl}{2}} = \frac{32,25}{8,334 \cdot 32,27} = 0,12;$$

$$\frac{\tau_{1\omega}}{\tau_{1кр}} = \frac{0,25 \cdot 0,12}{0,5 - 0,12} \cdot \frac{38,83}{400} \cdot \frac{12,6^2}{30 \cdot 1,44} = 0,0282.$$

Для прокатного двутавра № 60с пролетом  $l = 8$  м:

$$kl = 0,008226 \cdot 800 = 6,58;$$

$$\alpha = \frac{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch} \frac{kl}{2}} = \frac{13,403}{6,58 \cdot 13,44} = 0,152;$$

$$\frac{\tau_{1\omega}}{\tau_{1кр}} = \frac{0,25 \cdot 0,152}{0,5 - 0,152} \cdot \frac{255,3}{1840} \cdot \frac{18^2}{60 \cdot 2,2} = 0,0372.$$

Для двутавра, сваренного из трех листов (фиг. 133):

$$J_d = \sum \frac{b\delta^3}{3} = \frac{1}{3}(2b\delta_n^3 + h\delta_{cm}^3);$$

$$J_y = \frac{\delta_n b^3}{6};$$

$$J_{\omega} = J_y \frac{h^2}{4} = \frac{\delta_n b^3 h^2}{24};$$

$$kl = l \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_{\omega}}} = l \sqrt{\frac{0,8 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^6} \cdot \frac{8(2b\delta_n^3 + h\delta_{cm}^3)}{\delta_n b^3 h^2}}$$

или

$$kl = 1,75 \frac{l}{h} \cdot \frac{\delta_{cm}}{h} \cdot \frac{h}{b} \sqrt{2 \frac{\delta_n^2}{\delta_{cm}^2} + \frac{h}{b} \frac{\delta_{cm}}{\delta_n}} \quad (17)$$

Пусть

$$\frac{\delta_n}{\delta_{cm}} = 2; \quad \frac{h}{b} = 5; \quad \frac{l}{h} = 10 \quad \text{и} \quad \frac{\delta_{cm}}{h} = 0,01.$$

При этих данных получим:

$$kl = 1,75 \cdot 10 \cdot 0,01 \cdot 5 \sqrt{2,2^2 + 5 \cdot 0,5} = 2,84$$

$$\alpha = \frac{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch} \frac{kl}{2}} = \frac{1,948}{2,84 \cdot 2,189} = 0,313;$$

$$\frac{J_d}{J_y} = 4 \frac{\delta_n^2}{b^2} + 2 \frac{h}{\delta_n} \cdot \frac{\delta_{cm}^3}{b^3} = 4 \cdot 0,1^2 + 2 \cdot 50 \cdot 0,05^3 = 0,0525;$$

$$\frac{\tau_{1\omega}}{\tau_{1кр}} = \frac{0,25 \cdot 0,313}{0,5 - 0,313} 0,0525 \cdot 0,2 \cdot 10 = 0,0439.$$

Таким образом по середине полок рассмотренных двутавровых балок, находящихся в условиях стесненного кручения, секториальные касательные напряжения  $\tau_{1\omega}$  составляют только 2—5% от касательных напряжений  $\tau_{1кр}$ , соответствующих чистому кручению.

Аналогичные исследования, проведенные нами для двутавровых балок с другими условиями опирания и загрузки, показали, что отношение  $\frac{\tau_{1\omega}}{\tau_{1кр}}$  в опасных сечениях находится в пределах 10%.

По середине же стенки (в точке 2 на фиг. 133) секториальные касательные напряжения, как было сказано выше, равны нулю.

Следовательно, при расчете двутавровых балок следует иметь в виду, что секториальные касательные напряжения не являются решающими и во многих случаях их, вообще говоря, можно во внимание не принимать.

Что же касается соотношения между компонентами касательных напряжений от изгиба и чистого кручения  $\frac{\tau_{1\omega}}{\tau_{1кр}}$ , то исследования показали, что при практических эксцентриситетах приложения поперечной нагрузки они получаются примерно одного порядка.

### § 35. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ И КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

**Пример 14.** Определить нормальные и касательные напряжения от изгиба и от кручения в средней главной балке междуэтажного перекрытия складочного помещения при одностороннем загрузении ее временной нагрузкой.

План перекрытия и схема загрузки даны на фиг. 134, сечение балки указано на фиг. 135.

Постоянная нагрузка  $g = 400 \text{ кг/м}^2$ . Временная нагрузка  $p = 1600 \text{ кг/м}^2$ . Опорные давления от вспомогательных балок:

$$P_1 = \frac{gbB}{2} = \frac{0,4 \cdot 3 \cdot 6}{2} = 3,6 \text{ т};$$

$$P_2 = \frac{(g+p)bB}{2} = \frac{2,0 \cdot 3 \cdot 6}{2} = 18 \text{ т}.$$

Равнодействующая:

$$R = P_1 + P_2 = 3,6 + 18,0 = 21,6 \text{ т}.$$

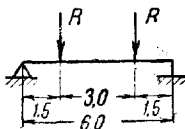
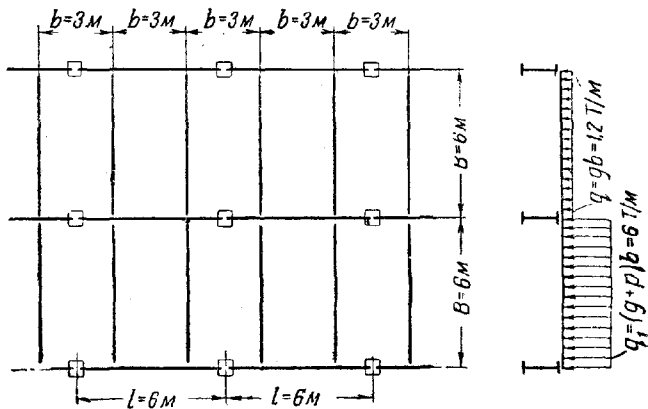
Эксцентриситет точки ее приложения:

$$e = \frac{5,5(18 - 3,6)}{18 + 3,6} = 3,67 \text{ см (фиг. 136)}.$$

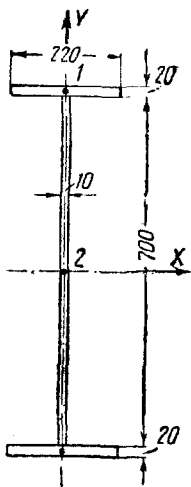


Максимальный изгибающий момент:

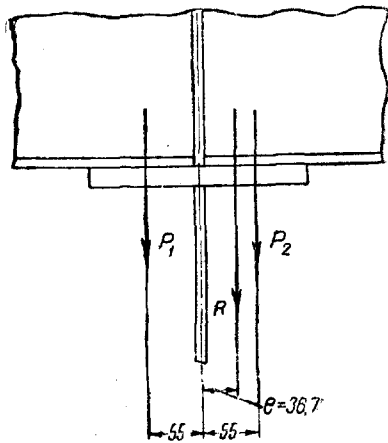
$$M_x = \frac{Rl}{4} = 21,6 \cdot 1,5 = 32,4 \text{ тм.}$$



Фиг. 134.



Фиг. 135.



Фиг. 136.

Момент инерции балки:

$$J_x = 14,27 \cdot 10^4 \text{ см}^4.$$

Момент сопротивления:

$$W_x = 3856 \text{ см}^3.$$

Нормальные напряжения от изгиба:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{W_x} = \frac{3\,240\,000}{3\,856} = 840 \text{ кг/см}^2.$$

Поперечная сила  $Q = R = 21,6 \text{ т}$ .

Статические моменты отсеченной части сечения

$$S_{1x}^{omc} = 11 \cdot 2 \cdot 36 = 792 \text{ см}^3;$$

$$S_{2x}^{omc} = 22 \cdot 2 \cdot 36 + 1 \cdot \frac{35^2}{2} = 1\,584 + 612,5 = 2\,196,5 \text{ см}^3.$$

Жасательные напряжения при изгибе:

$$\tau_{1x} = \frac{QS_{1x}^{omc}}{J_x \delta_n} = \frac{21\,600 \cdot 792}{14,27 \cdot 10^4 \cdot 2} = 60,0 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_{2x} = \frac{QS_{2x}^{omc}}{J_x \delta_{cm}} = \frac{21\,600 \cdot 2\,196,5}{14,27 \cdot 10^4 \cdot 1} = 332 \text{ кг/см}^2.$$

Максимальный изгибно-крутящий бимомент  $B_\omega$  (см. пример 7 главы III):

$$B_\omega = 8,048 \cdot 10^6 \text{ кгсм}^2.$$

Секториальный момент инерции  $J_\omega$  по формуле (47) главы IV:

$$J_\omega = \frac{J_y h^2}{4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 22^3 \cdot 72^2}{12 \cdot 4} = 4,60 \cdot 10^6 \text{ см}^6.$$

Секториальная координата наиболее удаленной точки сечения (приложение 13)

$$\omega_{\max} = \frac{bh}{4} = \frac{22 \cdot 72}{4} = 396 \text{ см}^2.$$

Секториальный момент сопротивления:

$$W_\omega = \frac{J_\omega}{\omega_{\max}} = \frac{4,60 \cdot 10^6}{396} = 11\,616 \text{ см}^4.$$

Нормальные напряжения от кручения:

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{W_\omega} = \frac{8,048 \cdot 10^6}{11\,616} = 693 \text{ кг/см}^2.$$

Изгибно-крутящие моменты  $M_\omega$  в характерных сечениях рассматриваемой балки (пример 7 главы III):

на левой опоре (при  $z = 0$ ):

$$M_\omega = 5,059 \cdot 10^4 \text{ кгсм};$$

под грузом (при  $z = \frac{l}{4}$ ):

$$M_{\omega(1)} = 6,097 \cdot 10^4 \text{ кгсм};$$

$$M_{\omega(2)} = -1,899 \cdot 10^4 \text{ кгсм}.$$

Крутящие моменты в характерных сечениях балки (пример 7 главы III):  
на левой опоре (при  $z = 0$ ):

$$M_{кр} = 2,868 \cdot 10^4 \text{ кгсм};$$

под грузом (при  $z = \frac{l}{4}$ ):

$$M_{кр} = 1,899 \cdot 10^4 \text{ кгсм.}$$

Секториальный статический момент в точке 1 (середина полки) по формуле приложения 13:

$$S_{1\omega}^{omc} = \frac{hb^2}{16} \delta_1 = \frac{72 \cdot 22^2}{16} \cdot 2 = 4356 \text{ см}^4.$$

Секториальные касательные напряжения и касательные напряжения, соответствующие чистому кручению:

$$\begin{aligned}\tau_{1\omega} &= \frac{M_{\omega} S_{1\omega}^{omc}}{J_{\omega} \delta_n} = \frac{5,059 \cdot 10^4 \cdot 4356}{4\,600\,000 \cdot 2} = 24 \text{ кг/см}^2; \\ \tau_{2\omega} &= 0; \\ \tau_{1кр} &= \frac{M_{кр} \delta_n}{J_d} = \frac{2,868 \cdot 10^4 \cdot 2}{\frac{1}{3} (2 \cdot 22 \cdot 2^3 + 70 \cdot 1^3)} = \frac{5,736 \cdot 10^4}{140,7} = 408 \text{ кг/см}^2; \\ \tau_{2кр} &= \frac{M_{кр} \delta_{cm}}{J_d} = \frac{2,868 \cdot 10^4 \cdot 1}{140,7} = 204 \text{ кг/см}^2;\end{aligned}$$

под грузом (для 1-го участка балки):

$$\begin{aligned}\tau_{1\omega} &= \frac{M_{\omega} S_{1\omega}^{omc}}{J_{\omega} \delta_n} = \frac{6,097 \cdot 10^4 \cdot 4356}{4\,600\,000 \cdot 2} = 29 \text{ кг/см}^2; \\ \tau_{2\omega} &= 0; \\ \tau_{1кр} &= \frac{M_{кр} \delta_n}{J_d} = \frac{1,899 \cdot 10^4 \cdot 2}{140,7} = 268 \text{ кг/см}^2; \\ \tau_{2кр} &= \frac{M_{кр} \delta_{cm}}{J_d} = \frac{1,899 \cdot 10^4 \cdot 1}{140,7} = 134 \text{ кг/см}^2.\end{aligned}$$

Суммарные нормальные напряжения в сечении под грузом:

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_{\omega} = 840 + 693 = 1\,533 \text{ кг/см}^2.$$

Суммарные касательные напряжения:

на опоре:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \tau_{1x} + \tau_{1\omega} + \tau_{1кр} = 30 + 24 + 408 = 492 \text{ кг/см}^2; \\ \tau_2 &= \tau_{2x} + \tau_{2\omega} + \tau_{2кр} = 332 + 0 + 204 = 536 \text{ кг/см}^2;\end{aligned}$$

под грузом (в первом участке):

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \tau_{1x} + \tau_{1\omega} + \tau_{1кр} = 60 + 29 + 268 = 357 \text{ кг/см}^2; \\ \tau_2 &= \tau_{2x} + \tau_{2\omega} + \tau_{2кр} = 332 + 0 + 134 = 466 \text{ кг/см}^2.\end{aligned}$$

Обычно подобные балки рассчитываются без учета крутящих моментов от загрузки обоих пролетов временной нагрузкой. Определим  $\sigma$  для этого случая. Равнодействующая опорных давлений:

$$R = 2 \cdot 18,0 = 36,0 \text{ т.}$$

Максимальный изгибающий момент:

$$M_x = 36,0 \cdot 1,5 = 54,0 \text{ тм.}$$

Нормальные напряжения от изгиба:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{W_x} = \frac{5\,400\,000}{3\,856} = 1\,400 \text{ кг/см}^2.$$

Следовательно, учет кручения дает увеличение нормальных напряжений на

$$\frac{1\,533 - 1\,400}{1\,400} = 9,5\%.$$

**Пример 15.** Определить расчетные нормальные напряжения от изгиба и кручения в ригеле обмуровочного щита прямоугольного когла.

Сечение с указанием всех размеров изображено на фиг. 115. Пролет  $l = 2 \text{ м}$ ; условия защемления на опорах и характер загрузки представлены на фиг. 80.

Выпишем геометрические характеристики, вычисленные в примере 12 главы IV:

$$J_x (\text{нетто}) = 1\,174,7 \text{ см}^4;$$

$$a_x = 2,10 \text{ см};$$

$$J_\omega = 18\,896 \text{ см}^6;$$

$$J_d = 10,97 \text{ см}^4 \text{ (пример 6 главы I),}$$

$$\omega_1 = 44,32 \text{ см}^2;$$

$$\omega_2 = -\omega_3 = -42,04 \text{ см}^2 \text{ (фиг. 117);}$$

$$W_{1x} = \frac{1\,174,7}{3,8} = 309 \text{ см}^3;$$

$$W_{2x} = \frac{1\,174,7}{9,3} = 126 \text{ см}^3;$$

$$W_{1\omega} = 426 \text{ см}^4;$$

$$W_{2\omega} = 449 \text{ см}^4.$$

Максимальный изгибно-крутящий бимомент (пример 8 главы III)

$$\max B_\omega = -5,279 \cdot 10^5 \text{ кгсм}^2.$$

Максимальный изгибающий момент в сечении защемленной опоры:

$$\max M_x = \frac{ql^2}{8} = \frac{8 \cdot 200^2}{8} = 40\,000 \text{ кгсм}.$$

Нормальные напряжения от изгиба и кручения в точках 1 и 2 (фиг. 117):

$$\begin{aligned} \sigma_1 = -\sigma_1 &= \sigma_{1x} + \sigma_{1\omega} = -\frac{M_x}{W_{1x}} - \frac{B_\omega}{W_{1\omega}} = \\ &= -\frac{40\,000}{309} - \frac{5,279 \cdot 10^5}{426} = -129 - 1\,239 = -1\,368 \text{ кг/см}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 = -\sigma_2 &= \sigma_{2x} + \sigma_{2\omega} = -\frac{M_x}{W_{2x}} + \frac{B_\omega}{W_{2\omega}} = \\ &= -\frac{40\,000}{126} + \frac{5,279 \cdot 10^5}{449} = -317 + 1\,176 = 859 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

### § 36. ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКОСТИ СТЕРЖНЯ ПРИ ЧИСТОМ КРУЧЕНИИ $GJ_d$ НА ВЕЛИЧИНУ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ И КРУЧЕНИИ

В § 14 главы III было выведено дифференциальное уравнение (1) упругой линии углов закручивания тонкостенного стержня, находящегося в условиях стесненного кручения. Наличие в этом урав-

нении члена, содержащего жесткость при чистом кручении  $GJ_d$ , значительно усложняет пользование этим уравнением при практических расчетах. Поэтому мы поставили своей задачей исследовать, насколько велико влияние этого члена на величину расчетных нормальных напряжений и с какой степенью точности его следует определять (как мы видели выше, величина  $GJ_d$  главным образом определяется экспериментальным путем).

Первый из этих вопросов решается путем рассмотрения графиков расчетных изгибно-крутящих бимоментов  $B_\omega$ , от величины которых зависят нормальные напряжения (приложения 7—11).

Если считать допустимой ошибку, не превышающую 5%, то можно принять  $GJ_d = 0$ , когда произведение упругой изгибно-крутильной характеристики сечения  $k$  на пролет  $l$  не будет превышать следующих величин:

для консолей (см. график приложения 8):

$$kl \leq 0,3 \div 0,5;$$

для свободно опертых балок (см. график приложения 7):

$$kl \leq 0,65 \div 0,75;$$

для балок, свободно опертых на одном и защемленных на другом конце (см. график приложения 10):

$$kl \leq 1,2 \div 1,3;$$

для балок, защемленных на обоих концах (см. график приложения 9):

$$kl \leq 1,5 \div 1,6.$$

Практически же для профилей, применяемых в строительных металлических конструкциях, величина  $kl$  оказывается значительно большей. Так, например, для балок, приведенных в примерах к главе III,  $kl > 2$ , а для прокатных (не составных) профилей величина эта, как правило, даже больше 5 и доходит до 15—20.

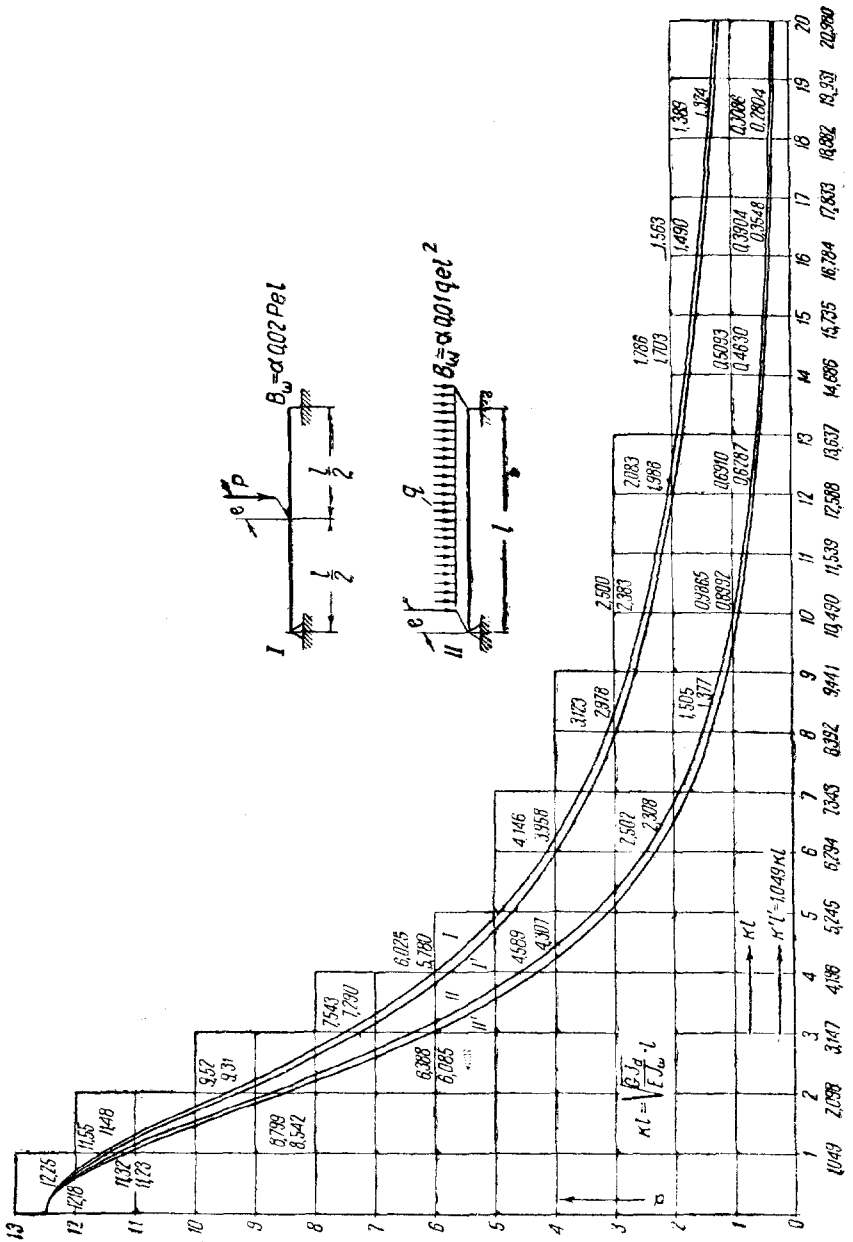
Таким образом приходим к выводу, что величиной жесткости стержня при чистом кручении  $GJ_d$  почти во всех строительных металлических конструкциях пренебрегать нельзя.

Для решения вопроса о необходимой степени точности экспериментального определения величины  $GJ_d$  мы построили кривые I и VI графика приложения 7, увеличив величину  $GJ_d$  на 10%. Кривые эти и результаты сравнения их с первоначальными изображены на фиг. 137.

Сравнение это показывает, что увеличение  $GJ_d$  на 10% уменьшает величину расчетного бимоента, а следовательно, и величину секториальных нормальных напряжений  $\sigma_\omega$  в среднем на следующее число процентов:

	Для сосредоточенной нагрузки, %	Для распределенной нагрузки, %
При $kl = 1,0$ . . . . .	0,6	0,8
„ $kl = 2,0$ . . . . .	2,2	2,9
„ $kl = 4,0$ . . . . .	4,0	8,15
„ $kl = 8,0$ . . . . .	4,64	8,5
„ $kl = 12,0$ . . . . .	4,66	9,0
„ $kl = 16,0$ . . . . .	4,67	9,12

Таким образом по мере увеличения величины  $kl$  влияние неточности определения жесткости  $GJ_d$  на напряжения  $\sigma_w$  увеличивается и



Фиг. 137.

для  $kl \geq 8$  остается примерно стабильным, а именно, в среднем 4,7% для балок, нагруженных одной сосредоточенной силой, и 9% для балок, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой.

Посмотрим, каково влияние ошибки в определении  $GJ_d$  на суммарные нормальные напряжения от изгиба и кручения. Как увидим ниже в главе VI, мы установили, что, например, в прокатных двутавровых балках пролетом  $l=6$  м, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой, от эксцентриситеты приложения последней только в 1 см нормальные напряжения повышаются от 3,10% для двутавра № 16 ( $kl=15,6$ ) до 16,50% для двутавра № 60а ( $kl=4,7$ ). Отсюда следует, что увеличение жесткости  $GJ_d$  на 100% при эксцентриситете приложения нагрузки  $e=1$  см уменьшает суммарные нормальные напряжения приблизительно от  $9 \cdot 0,031 = 0,270\%$  для двутавра № 16 до  $8 \cdot 0,165 = 1,320\%$  для двутавра № 60а.

Для других профилей это влияние оказывается примерно в тех же пределах.

Таким образом мы приходим к окончательному выводу, что для стержней, находящихся в условиях совместного действия изгиба и кручения при сравнительно небольших эксцентриситетах приложения нагрузки, ошибка в определении  $GJ_d$  в пределах 100% существенного влияния на расчетные нормальные напряжения не оказывает. Это несколько оправдывает принятые нами в главе I поправочные коэффициенты к величине  $J_d$ , основанные на сравнительно небольшом количестве экспериментов.

## ГЛАВА VI

### ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ РАСЧЕТА НА СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ ДВУТАВРОВЫХ И ШВЕЛЛЕРНЫХ ПРОФИЛЕЙ

#### § 37. ПРИВЕДЕННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПОДБОРА СЕЧЕНИЙ ДВУТАВРОВЫХ БАЛОК, НАХОДЯЩИХСЯ В УСЛОВИЯХ ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

Нормальные напряжения в балке, находящейся в условиях поперечного изгиба и кручения, определяются по формуле:

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_\omega = \frac{M_x}{W_x} + \frac{B_\omega}{W_\omega}. \quad (1)$$

Представим формулу (1) в следующем виде:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} \left( 1 + \frac{B_\omega}{M_x} \cdot \frac{W_x}{W_\omega} \right)$$

или

$$\sigma = \frac{M_x \eta}{W_x}, \quad (2)$$

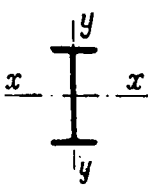
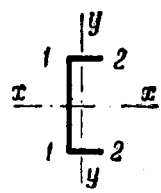
где

$$\eta = 1 + \frac{B_\omega}{M_x} \cdot \frac{W_x}{W_\omega}. \quad (3)$$

При пользовании формулой (2) расчет балок, находящихся в условиях сложного сопротивления, сводится к расчету их на простой изгиб, но не по моменту  $M_x$ , а по приведенному моменту, равному

$$M_{np} = M_x \eta, \quad (4)$$

## Отношения моментов сопротивления

Двутавр 			Швеллер 				
№ профилей	$\frac{W_x}{W_y}$	$\frac{W_x}{W_\omega}$	№ профилей	$\frac{W_x}{W_{y1}}$	$\frac{W_x}{W_{y2}}$	$\frac{W_x}{W_{\omega 1}}$	$\frac{W_x}{W_{\omega 2}}$
10	5,04	1,16	5	1,69	2,93	1,13	1,78
12	5,73	1,08	6,5	1,95	3,70	1,01	1,67
14	6,34	1,02	8	2,18	4,37	0,920	1,56
16	6,65	0,933	10	2,36	5,08	0,805	1,42
18	7,12	0,876	12	2,50	5,70	0,718	1,30
20 a	7,52	0,835	14 a	2,36	6,19	0,640	1,20
20 b	7,55	0,850	14 b	2,38	6,16	0,590	1,21
22 a	7,55	0,756	16 a	2,66	6,65	0,580	1,12
22 b	7,61	0,774	16 b	2,45	6,65	0,528	1,13
24 a	7,87	0,727	18 a	2,70	7,07	0,527	1,05
24 b	7,93	0,740	18 b	2,52	7,07	0,483	1,06
27 a	8,57	0,702	20 a	2,82	7,42	0,482	0,990
27 b	8,65	0,715	20 b	2,58	7,45	0,445	1,00
30 a	9,41	0,689	22 a	2,81	7,85	0,450	0,947
30 b	9,53	0,704	22 b	2,66	7,90	0,419	0,965
30 c	9,60	0,715					
33 a	10,2	0,676	24 a	3,08	8,40	0,453	0,919
33 b	10,3	0,693	24 b	2,89	8,35	0,426	0,920
33 c	10,4	0,706	24 c	2,75	8,42	0,396	0,935
36 a	10,8	0,650	27 a	3,18	9,10	0,443	0,869
36 b	10,9	0,665	27 b	3,02	9,13	0,395	0,889
36 c	11,0	0,680	27 c	2,88	9,25	0,370	0,905
40 a	11,7	0,639	30 a	3,37	9,82	0,406	0,844
40 b	11,8	0,652	30 b	3,19	9,85	0,378	0,859
40 c	11,9	0,664	30 c	3,06	9,98	0,355	0,878



№ профилей	$\frac{W_x}{W_y}$	$\frac{W_x}{W_\omega}$	№ профилей	$\frac{W_x}{W_{y1}}$	$\frac{W_x}{W_{y2}}$	$\frac{W_x}{W_{\omega 1}}$	$\frac{W_x}{W_{\omega 2}}$
45	a 12,5 b 12,7 c 12,9	0,605 0,622 0,631	33	a 3,52 b 3,32 c 3,21	10,5 10,6 10,8	0,388 0,357 0,335	0,820 0,839 0,855
50	a 13,1 b 13,3 c 13,8	0,569 0,580 0,607	36	a 3,54 b 3,35 c 3,25	10,4 10,5 10,7	0,354 0,347 0,320	0,747 0,797 0,794
55	a 14,0 b 14,1 c 14,2	0,546 0,559 0,571	40	a 3,69 b 3,55 c 3,47	11,1 11,3 11,4	0,331 0,312 0,298	0,722 0,732 0,745
60	a 14,5 b 14,7 c 14,8	0,521 0,532 0,543					

где коэффициент приведения  $\eta$  выражается формулой (3). Входящее в выражение (3) отношение изгибно-крутящего бимоента  $B_\omega$  к изгибающему моменту  $M_x$  зависит от характера опорных закреплений балки, характера нагрузки, эксцентриситета ее приложения и упругой изгибно-крутильной характеристики сечения балки.

Так, например, для балки свободно опертой, но закрепленной от углов закручивания по концам и нагруженной эксцентричной равномерно распределенной по всему пролету нагрузкой, это отношение выразится формулой:

$$\frac{B_\omega}{M_x} = \frac{0,01 \alpha q e l^2}{0,125 q l^2} = 0,08 \alpha e, \quad (5)$$

где  $\alpha$  — отвлеченный коэффициент, зависящий от произведения упругой изгибно-крутильной характеристики на пролет балки:

$$kl = l \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}, \quad (6)$$

может быть определен по графику VI приложения 7.

Отношение входящих в формулу (3) моментов сопротивления  $\frac{W_x}{W_\omega}$  зависит только от типа и размеров сечения.

а) Прокатные двутавры. Числовые значения отношений моментов сопротивления для прокатных двутавров по ОСТ 2451 приведены нами в табл. 37.

Пользуясь табл. 37 и представив формулу (3) в виде:

$$\eta = 1 + e\xi, \quad (7)$$

где

$$\xi = 0,08\alpha \frac{W_{\alpha}}{W_{\omega}}, \quad (8)$$

мы построили для различных номеров двутавров и различных пролетов график для определения этого вспомогательного коэффициента (приложение 14). Значение упругой изгибно-крутильной характеристики  $k$  взято нами непосредственно из приложения 1.

б) Сварные двутавры. Пользуясь обозначениями, указанными на фиг. 133, получаем:

$$W_{\alpha} = \frac{\delta_{cm} h^2}{6} + b \delta_n h;$$

$$W_{\omega} = \frac{J_{\omega}}{\omega_{\max}} = \frac{J_y h^2}{4 \frac{bh}{4}} = \frac{J_y h}{b} = \frac{2\delta_n b^3 h}{12b} = \frac{\delta_n h b^2}{6},$$

отсюда

$$\frac{W_{\alpha}}{W_{\omega}} = \frac{1}{h} \left( \frac{\delta_{cm}}{\delta_n} \cdot \frac{h^2}{b^2} + 6 \frac{h}{b} \right). \quad (9)$$

Для определения изгибно-крутильной характеристики  $k$ , которая требуется при определении  $\alpha$ , найдем отношение момента инерции при чистом кручении к секториальному моменту инерции:

$$J_d = \alpha \sum \frac{b\delta^3}{3} = 1,5 \frac{1}{3} (2b\delta_n^3 + h\delta_{cm}^3) = b\delta_n^3 + 0,5 h\delta_{cm}^3;$$

$$J_{\omega} = \frac{J_y h^2}{4} = \frac{\delta_n b^3}{6} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{h^2 b^3 \delta_n}{24}.$$

Отсюда

$$\frac{J_d}{J_{\omega}} = \frac{12}{\delta_n b^3 h^2} (2b\delta_n^3 + h\delta_{cm}^3). \quad (10)$$

Принимаем отношение модулей упругости равным:

$$\frac{G}{E} = \frac{0,8 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^6} = 0,381 \quad (11)$$

и подставляем выражения (10) и (11) в формулу (6):

$$kl = l \sqrt{0,381 \frac{12}{\delta_n b^3 h^2} (2b\delta_n^3 + h\delta_{cm}^3)}$$

или

$$kl = 2,138 \frac{l}{h} \cdot \frac{\delta_{cm}}{h} \cdot \frac{h}{b} \sqrt{2 \frac{\delta_n^2}{\delta_{cm}^2} + \frac{h}{b} \frac{\delta_{cm}}{\delta_n}}. \quad (12)$$

Формула (3) коэффициента приведения  $\eta$  для сварных двутавровых балок будет иметь следующий вид:

$$\eta = 1 + 0,08\alpha e \frac{1}{h} \left( \frac{\delta_{cm}}{\delta_n} \cdot \frac{h^2}{b^2} + 6 \frac{h}{b} \right).$$

Введя обозначение:

$$\xi = 0,08\alpha \left( \frac{\delta_{cm}}{\delta_n} \cdot \frac{h^2}{b^2} + 6 \frac{h}{b} \right), \quad (13)$$

окончательно получаем:

$$\eta = 1 + \frac{e}{h} \xi. \quad (14)$$

Для определения входящего в формулу (14) вспомогательного коэффициента  $\xi$  нами построены графики для различных отношений  $\frac{\delta_n}{\delta_{cm}}$  в функции двух параметров:

1)  $\frac{l}{h} \cdot \frac{\delta_{cm}}{h}$  и 2)  $\frac{h}{b}$  (см. приложения 15—18).

Порядок пользования графиками для прокатных и сварных двутавров показан в следующем параграфе на числовых примерах.

в) Клепаные двутавры. Будем пользоваться обозначениями, указанными в приложении 12 (№ 8). Тогда получаем:

$$W_x = \frac{J_x^2}{h};$$

$$W_\omega = \frac{J_\omega}{\omega_{\max}} = \frac{J_y h^2}{4 \frac{h b}{4}} = J_y \frac{h}{b};$$

$$\frac{W_x}{W_\omega} = 2 \frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{1}{h}. \quad (15)$$

Дальнейшие какие-либо упрощения для клепаных двутавров сделать затруднительно, а потому коэффициент приведения  $\eta$  представится в виде:

$$\eta = 1 + 0,16\alpha \frac{e}{h} \cdot \frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{b}{h}.$$

Введя обозначения

$$\xi = 0,16\alpha \frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{b}{h}, \quad (16)$$

получаем:

$$\eta = 1 + \frac{e}{h} \xi. \quad (17)$$

### § 36. ПРИМЕРЫ ПОДБОРА СЕЧЕНИЙ ДВУТАВРОВЫХ БАЛОК ПО ГРАФИКАМ ПРИЛОЖЕНИЙ 14—18

**Пример 16.** Подобрать поперечное сечение вспомогательной балки перекрытия, свободно опертой по концам, но защемленной от углов закручивания. Пролет  $l = 5$  м. Нагрузка равномерно распределенная  $q = 6$  т/м, приложенная с эксцентриситетом  $e = 4$  см. Материал — Ст-3.

Задаемся в первом приближении коэффициентом  $\eta = 1,5$ .

Тогда приведенный максимальный изгибающий момент будет равен:

$$M_{np} = M_x \eta = \frac{q l^2}{8} \eta = \frac{6 \cdot 5^2}{8} \cdot 1,5 = 18,75 \cdot 1,5 = 2812,500 \text{ кгсм.}$$

Требуемый момент сопротивления:

$$W_x^{mp} = \frac{M_{np}}{[\sigma]} = \frac{2812,500}{1400} = 2009 \text{ см}^3.$$

Принимаем двутавр № 55а,  $W_x = 2290 \text{ см}^3$ .

По графику приложения 14 коэффициент  $\xi$  при  $l = 5$  м равен:

$$\xi = 0,194.$$

Отсюда

$$\eta = 1 + e \xi = 1 + 4 \cdot 0,194 = 1,776 > 1,5.$$

Задаемся во втором приближении

$$\eta = \frac{1,500 + 1,776}{2} = 1,638.$$

$$M_{np} = 18,75 \cdot 1,638 = 3071250 \text{ кгсм.}$$

$$W_x^{mp} = \frac{3071250}{6400} = 2194 \text{ см}^3 \approx 2290 \text{ см}^3.$$

На основании этого можно остановиться на принятом сечении двутавра № 55а. Производим проверку расчетных напряжений по формуле:

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_\omega = \frac{M_x}{W_x} + \frac{B_\omega}{W_\omega};$$

$W_\omega = 4180,8 \text{ см}^4$  (см. приложение 1),

$$kl = 0,008198 \cdot 500 = 4,10.$$

По графику VI приложения 7  $\alpha = 4,50$ :

$$B_\omega = 0,01 \alpha q e l^2 = 4,50 \cdot 0,01 \cdot 60 \cdot 4 \cdot 500^2 = 2700000 \text{ кгсм}^2.$$

$$\sigma = \frac{1875000}{2290} + \frac{2700000}{4180,8} = 818 + 646 = 1464 \text{ кг/см}^2.$$

**Пример 17.** Подобрать сечение сварной двутавровой балки примера 14 главы V (фиг. 134—136), удовлетворяющее условиям работы на совместное действие изгиба и кручения. Материал — Ст-3.

Задаемся в первом приближении коэффициентом  $\eta = 1,90$ .

Приведенный максимальный изгибающий момент:

$$M_{np} = M_x \eta = \frac{Rl}{4} \eta = 32,4 \cdot 1,90 = 6156000 \text{ кгсм.}$$

Требуемый момент сопротивления:

$$W_x^{mp} = \frac{6156000}{1400} = 4397 \text{ см}^3.$$

Не меняя высоты балки, равной 74 см, вычислим требуемый момент инерции:

$$J_x^{mp} = W_x^{mp} \cdot 37 = 4397 \cdot 37 = 162689 \text{ см}^4.$$

Приняв тот же вертикальный лист  $700 \times 10 \text{ мм}$ , вычислим требуемый момент инерции горизонтальных листов:

$$J_{z.l}^{mp} = J_x^{mp} - J_{z.l} = 162689 - 28583 = 134106 \text{ см}^4.$$

По таблицам справочника Промстройпроекта „Металлические конструкции“, стр. 224, принимаем горизонтальные листы:  $2 \times 260 \times 20 \text{ мм}$ :

$$J_{z.l} = 2 \cdot 25927 \cdot 2,6 = 134820 \text{ см}^4.$$

Тогда

$$J_x = 28583 + 134820 = 163403 \text{ см}^4;$$

$$W_x = \frac{163403}{37} = 4416 \text{ см}^3.$$

По графику приложения 16 при  $\frac{\delta_n}{\delta_{cm}} = 2$ ,  $\frac{h}{b} = \frac{72}{26} = 2,77$  и  $\frac{l}{h} \cdot \frac{\delta_{cm}}{h} = \frac{600}{72} \cdot \frac{1}{72} = 0,116$  получим вспомогательный коэффициент  $\xi = 14$ .

Подставив его в формулу (14), будем иметь:

$$\eta = 1 + \frac{e}{h} \xi = 1 + \frac{3,67}{72} \cdot 14 = 1,714 < 1,9.$$

Задаемся во втором приближении коэффициентом:

$$\eta = \frac{1,714 + 1,900}{2} \approx 1,8.$$

Тогда

$$M_{np} = 32,4 \cdot 1,8 = 5\,832\,000 \text{ кгсм};$$

$$W_x^{mp} = \frac{5\,832\,000}{1\,400} = 4\,166 \text{ см}^3.$$

$$J_x^{mp} = 4\,166 \cdot 37 = 154\,142 \text{ см}^4;$$

$$J_{\sigma, \lambda}^{mp} = 154\,142 - 28\,583 = 125\,559 \text{ см}^4.$$

Принимаем  $2 \times 240 \times 20$  мм:

$$J_x = 28\,583 + 2 \cdot 25\,927 \cdot 2,4 = 153\,033 \text{ см}^4;$$

$$W_x = \frac{153\,033}{37} = 4\,136 \text{ см}^3.$$

По графику приложения 16 при  $\frac{h}{b} = \frac{72}{24} = 3,0$ ;  $\frac{l}{h} \cdot \frac{\delta_{см}}{h} = 0,116$  вспомогательный коэффициент равен:

$$\xi = 14,5.$$

Отсюда

$$\eta = 1 + \frac{3,67}{72} \cdot 14,5 = 1,74 \approx 1,8.$$

Производим проверку нормальных напряжений:

$$J_d = 1,5 \cdot \frac{1}{3} (70 \cdot 1^3 + 2 \cdot 24 \cdot 2^3) = 227 \text{ см}^4;$$

$$J_{\omega} = \frac{J_y h^2}{4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 24^3 \cdot 72^2}{12 \cdot 4} = 5\,971\,968 \text{ см}^6;$$

$$kl = l \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_{\omega}}} = 600 \sqrt{\frac{0,8 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^6} \cdot \frac{227}{5\,971\,968}} = 2,28.$$

По графику II приложения 7 находим:

$$\alpha = 9,0.$$

Расчетный изгибно-крутящий бимомент:

$$B_{\omega} = \alpha \cdot 0,02 Rel = 9,0 \cdot 0,02 \cdot 21\,600 \cdot 3,67 \cdot 600 = 8\,561\,376 \text{ кгсм}^2;$$

$$W_{\omega} = \frac{J_{\omega}}{\omega_{\max}} = \frac{J_{\omega} \cdot 4}{b h} = \frac{5\,971\,968 \cdot 4}{24 \cdot 72} = 13\,824 \text{ см}^4.$$

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_{\omega} = \frac{3\,240\,000}{4\,136} + \frac{8\,561\,376}{13\,824} = 783 + 619 = 1\,402 \text{ кг/см}^2.$$

### § 39. ВЛИЯНИЕ ЭКСЦЕНТРИЧНОСТИ ПРИЛОЖЕНИЯ НАГРУЗКИ НА СУММАРНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ДВУТАВРОВЫХ БАЛКАХ

Графики приложений 14—18 позволяют без особых затруднений установить, как велико влияние эксцентрисности приложения нагрузки на суммарные нормальные напряжения.

Так, если в формуле (7) коэффициента приведения  $\eta$  для прокатных двутавров мы примем эксцентриситет  $e = 1 \text{ см}$ , то вспомогательный коэффициент  $\xi$ , определенный по графику приложения 14, сразу покажет процент увеличения напряжений от учета кручения.

Например, для наиболее часто встречающегося в практике пролета  $l = 6 \text{ м}$  получим:

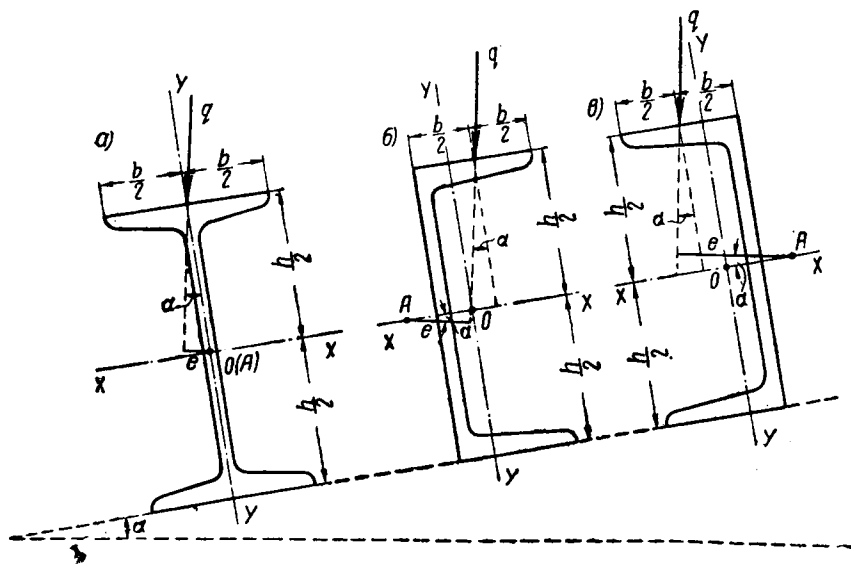
для двутавра № 16:  $\xi = 0,031$ ,

для двутавра № 60а:  $\xi = 0,165$ .

Это значит, что при эксцентриситете приложения нагрузки, равно только  $1 \text{ см}$ , нормальные напряжения получают повышение от  $3,1\%$  для двутавра № 16 до  $16,5\%$  для № 60а. С увеличением эксцентриситета этот процент пропорционально увеличивается. Этот вывод лишний раз подчеркивает необходимость учитывать кручение даже при малых эксцентриситетах приложения нагрузки или принимать конструктивные меры, уменьшающие влияние кручения, о которых мы уже отчасти упоминали в главе 1 настоящей работы.

#### § 40. РАСЧЕТ ШВЕЛЛЕРНЫХ И ДВУТАВРОВЫХ ПРОГОНОВ ПОД КРОВЛИ НА СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ (фиг. 138)

Прогонь под кровли, опираясь на наклонную плоскость и находясь под действием вертикальных сил, не проходящих через линию центров



Фиг. 138.

изгиба, должны рассчитываться на совместное действие косо го изгиба и кручения по следующей формуле для нормальных напряжений:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{B_\omega}{W_\omega}, \quad (18)$$

где  $M_x$  и  $M_y$  — изгибающие моменты от внешних сил в главных плоскостях прогона;

$B_\omega$  — изгибно-крутящий бимомент;

$W_x, W_y$  и  $W_\omega$  — соответствующие им экваториальные и секториальные моменты сопротивления сечения прогона.

Знак плюс перед третьим слагаемым правой части формулы (18) относится к двутавровому профилю (фиг. 138, а), а знак минус — к швеллерным профилям (фиг. 138, б и в).

При таком выборе знаков и при обычных углах наклона кровли напряжения в двутаврах проверяются в правой верхней точке сечения, а в швеллерах: для случая по фиг. 138, б — в правой верхней точке, а для случая по фиг. 138, в — в левой нижней точке.

Для подбора сечений формулу (18) целесообразно представить в таком виде:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} \left( 1 + \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{W_x}{W_y} \pm \frac{B_\omega}{M_x} \cdot \frac{W_x}{W_\omega} \right). \quad (19)$$

Введя обозначения:

$$\eta = 1 + \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{W_x}{W_y} \pm \frac{B_\omega}{M_x} \cdot \frac{W_x}{W_\omega} \quad (20)$$

и

$$M_x \eta = M_{np}, \quad (21)$$

мы приведем формулу (19) к обычному простому виду:

$$\sigma = \frac{M_{np}}{W_x}, \quad (22)$$

где  $M_{np}$  — приведенный момент;

$\eta$  — коэффициент приведения.

Вычисляем коэффициент приведения  $\eta$ , принимая во внимание, что прогоны под кровли обычно считают как разрезные балки, находящиеся под действием равномерно распределенной по всему пролету нагрузки.

В таком случае:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{ql^2 \cos \alpha}{8}; \\ M_y &= \frac{ql^2 \sin \alpha}{8n^2}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где  $\alpha$  — угол наклона кровли;

$l$  — пролет прогона;

$q$  — погонная интенсивность нагрузки;

$n$  — число частей, на которые прогон разделен тяжами в плоскости кровли (при отсутствии тяжей  $n = 1$ ).

Отношение

$$\frac{M_y}{M_x} = \frac{1}{n^2} \operatorname{tg} \alpha. \quad (24)$$

Расчетный бимомент  $B_\omega$  для шарнирно-опертой по концам и эксцентрично нагруженной равномерно распределенной нагрузкой балки можно определить по VI кривой графика приложения 7, а именно:

$$B_\omega = \alpha \cdot 0,01 qe l^2, \quad (25)$$

где  $\alpha$  — коэффициент, зависящий от произведения упругой характеристики  $k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$  на пролет балки  $l$ ;

$e$  — эксцентриситет (по отношению к линии центров изгиба) плоскости действия равномерно распределенной нагрузки  $q$ .

Для наиболее употребительных в практике профилей № 14—24 среднее значение упругой характеристики как для двутавров, так и для швеллеров равно приблизительно  $k = 0,023 \text{ см}^{-1}$ . При пролете  $l = 6 \text{ м}$   $kl = 0,023 \cdot 600 = 13,8$ .

Соответствующий коэффициент по кривой VI графика приложения 7 равен:

$$\alpha = 0,5.$$

Величина эксцентриситета  $e$ , очевидно, зависит от угла наклона кровли, типа и номера профиля, а для швеллеров и от характера расположения его на кровле.

Из фиг. 138, *a* видно, что для двутавра

$$e = \frac{h}{2} \sin \alpha; \quad (26)$$

для швеллера, расположенного по фиг. 138, *б*:

$$e = \left( x_a + \frac{b}{2} - \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) \cos \alpha \quad (27)$$

и для швеллера, расположенного по фиг. 138, *в*:

$$e = \left( x_a + \frac{b}{2} + \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) \cos \alpha. \quad (28)$$

Среднее значение суммы  $x_a + \frac{b}{2}$  для указанных выше наиболее употребительных профилей равно 5,2 см.

Среднее же значение  $\frac{h}{2}$  принимаем равным 10.

При этих данных формулы (26), (27) и (28) будут иметь следующий вид:

для двутавров:

$$e = 10 \sin \alpha, \quad (26')$$

для швеллеров по фиг. 138, *б*:

$$e = 5,2 \cos \alpha - 10 \sin \alpha, \quad (27')$$

для швеллеров по фиг. 138, *в*:

$$e = 5,2 \cos \alpha + 10 \sin \alpha. \quad (28')$$

Тогда отношение  $B_\omega$  к  $M_x$  будет равно:

для двутавров:

$$\frac{B_\omega}{M_x} = 0,4 \operatorname{tg} \alpha; \quad (29)$$

для швеллеров по фиг. 138, *б*:

$$\frac{B_\omega}{M_x} = 0,21 - 0,4 \operatorname{tg} \alpha; \quad (30)$$



и для швеллеров по фиг. 138, в:

$$\frac{B_{\omega}}{M_x} = 0,21 + 0,4 \operatorname{tg} \alpha. \quad (31)$$

Переходим теперь к определению отношений моментов сопротивления  $\frac{W_x}{W_y}$  и  $\frac{W_x}{W_{\omega}}$ .

Для прокатных профилей они достаточно стабильны и легко могут быть вычислены непосредственно по сортаменту (табл. 37).

Примем:

для двутавров:

$$\frac{W_x}{W_y} = 7; \quad \frac{W_x}{W_{\omega}} = 0,85; \quad (32)$$

для швеллеров:

$$\frac{W_x}{W_y} = 7; \quad \frac{W_x}{W_{\omega}} = 1,0. \quad (33)$$

Подставив полученные значения отношений силовых и геометрических факторов в формулу (20), получим средние значения коэффициента приведения  $\eta$ :

для двутавров:

$$\eta = 1 + \left( \frac{7}{n^2} + 0,34 \right) \operatorname{tg} \alpha; \quad (34)$$

для швеллеров, расположенных по фиг. 138, б:

$$\eta = 0,79 + \left( \frac{7}{n^2} + 0,4 \right) \operatorname{tg} \alpha; \quad (35)$$

для швеллеров, расположенных по фиг. 138, в:

$$\eta = 0,79 + \left( \frac{7}{n^2} - 0,4 \right) \operatorname{tg} \alpha. \quad (36)$$

Сравнение формул (34), (35) и (36) показывает, что наиболее выгодными профилями для прогонов являются швеллеры.

Так, например, для наиболее часто применяемых в настоящее время уклонов  $i = \operatorname{tg} \alpha = 0,1$  и при отсутствии тяжей, т. е. при  $n = 1$ , получим:

для двутавров:

$$\eta = 1,734;$$

для швеллеров по фиг. 138, б:

$$\eta = 1,53;$$

для швеллеров по фиг. 138, в:

$$\eta = 1,45.$$

**Пример 18.** Подобрать профиль прогона под кровлю, имеющую уклон  $\alpha = 5^\circ$ . Нагрузка на прогон  $q = 470 \text{ кг/м}$ . Пролет  $l = 6 \text{ м}$ . Материал — Ст-3.

По формуле (22) требуемый момент сопротивления:

$$W_x^{mp} = \frac{M_{np}}{[\sigma]} = \frac{M_x \eta}{[\sigma]} = \frac{210\,600}{1\,400} \eta = 150,4 \eta$$

$$\left( M_x = \frac{q l^2 \cos \alpha}{8} = \frac{4,7 \cdot 0,996 \cdot 600^2}{8} = 210\,600 \text{ кгсм} \right).$$

Далее коэффициенты приведения для различных типов и номеров принятых профилей представлены в форме табл. 38.

## Коэффициенты приведения и номера принятых профилей (к примеру 18)

Тип профиля	Коэффициенты приведения $\eta$	$W_x^{np}$ в см <sup>3</sup>	Принятый профиль
Двутавр . . . . .	$\eta = 1 + 7,34 \cdot 0,0875 = 1,64$	247	┌ № 20б
Швеллер по фиг. 138, б . . . .	$\eta = 0,79 + 7,4 \cdot 0,0875 = 1,44$	217	┌ № 22а
Швеллер по фиг. 138, в . . . .	$\eta = 0,79 + 6,6 \cdot 0,0875 = 1,37$	206	┌ № 22а

Проверку нормальных напряжений в принятых сечениях производим по формуле (18), где:

$$M_x = 210\,600 \text{ кгсм};$$

$$M_y = \frac{ql^2 \sin \alpha}{8} = \frac{4,7 \cdot 0,0872 \cdot 600^2}{8} = 18\,440 \text{ кгсм};$$

$$B_\omega = \alpha \cdot 0,01 \text{ qel}^2.$$

Для определения коэффициента  $\alpha$  вычислим предварительно значение  $kl$  (приложения 1 и 2).

Для двутавра № 20б:  $kl = 0,02215 \cdot 600 = 13,3$ .

Для швеллера № 22а:  $kl = 0,02034 \cdot 600 = 12,2$ .

По VI кривой графика приложения 7 имеем:

для двутавра:

$$\alpha = 0,55;$$

для швеллера:

$$\alpha = 0,7.$$

Дальнейшая проверка напряжений проведена в форме табл. 39 и 40.

Таблица 39

## Моменты сопротивления и изгибно-крутящие бимоменты (к примеру 18)

Тип профиля	Моменты сопротивления					Коэффициент $\alpha$	Эксцентриситет $e$ в см	Бимомент $B_\omega$ в кгсм <sup>2</sup>
	$W_x$	$W_{лев}^y$	$W_{прав}^y$	$W_{лев}^z$	$W_{прав}^z$			
┌ № 20б	250	33,1	33,1	294,5	294,5	0,55	$\frac{h}{2} \sin \alpha = 10 \cdot 0,0872 = 0,872$	8 115
┌ № 22а по фиг. 138, б	223	79,3	28,5	495,6	235,7	0,7	$\left(x_a + \frac{b}{2} - \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha\right) \cos \alpha =$ $= \left(1,926 + \frac{7,7}{2} - 11 \times\right.$ $\left. \times 0,0875\right) 0,996 = 4,79$	56 733
┌ № 22а по фиг. 138, в	223	28,5	79,3	235,7	495,6	0,7	$\left(x_a + \frac{b}{2} + \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha\right) \times$ $\times \cos \alpha = 6,71$	79 473

## Нормальные напряжения в крайних точках (к примеру 18)

Тип профиля	Напряжения в крайних точках слева от оси Y в кг/см <sup>2</sup>				Напряжения в крайних точках справа от оси Y в кг/см <sup>2</sup>			
	$\frac{M_x}{W_x}$ = $\sigma_x$	$\frac{M_y}{W_y^{лев}}$ = $\sigma_y$	$\frac{R_{\omega}}{W_{\omega}^{лев}}$ = $\sigma_{\omega}$	$\sigma$	$\frac{M_x}{W_x}$ = $\sigma_x$	$\frac{M_y}{W_y^{прав}}$ = $\sigma_y$	$\frac{R_{\omega}}{W_{\omega}^{прав}}$ = $\sigma_{\omega}$	$\sigma$
Г № 20б	- 842 + 842	+ 557 + 557	+ 28 - 28	- 257 + 1371	- 842 + 842	- 557 - 557	- 28 + 28	- 1427 + 313
Г № 22а по фиг. 138, б	- 944 + 944	+ 233 + 233	- 114 + 114	- 825 + 1291	- 944 + 944	- 647 - 647	+ 241 - 241	- 1350 + 56
Г № 22а по фиг. 138, в	- 944 + 944	+ 647 + 647	+ 337 - 337	+ 40 + 1254	- 944 + 944	- 233 - 233	- 160 + 160	- 1337 + 871

Верхние знаки относятся к верхним крайним точкам профиля, нижние знаки — к нижним крайним точкам профиля.

Наиболее напряженной для всех типов и случаев расположения прогонов, как видно из табл. 40, является крайняя верхняя точка с правой стороны от оси Y.

Напряжения в этой точке для всех случаев находятся в пределах допускаемых.

Обратим внимание, что для швеллерных прогонов учет кручения дает не увеличение, а уменьшение расчетных нормальных напряжений: для случая расположения прогона по фиг. 138, б на

на  $\frac{241}{1591} 100 = 15,2\%$ , а для случая расположения прогона по фиг. 138, в

на  $\frac{1591 - 1337}{1591} 100 = 15,9\%$ .

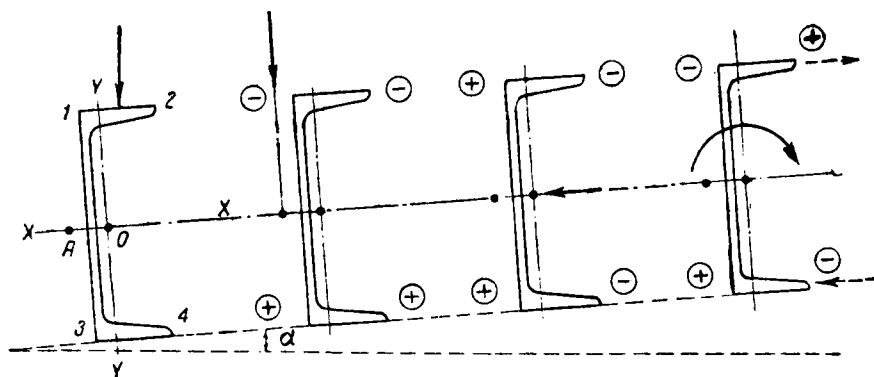
#### § 41. НАИВЫГОДНЕЙШИЙ УГОЛ НАКЛОНА КРОВЛИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ НАИЛУЧШЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕРИАЛА ШВЕЛЛЕРНОГО ПРОГОНА

В предыдущем параграфе мы установили, что швеллер является более выгодным профилем для прогонов под кровли по сравнению с двутавром. Как известно, он является наиболее желательным и в конструктивном отношении с точки зрения удобства прикрепления его к поясу стропильной фермы. Поэтому мы несколько продолжим наши исследования по отношению к этому профилю, а именно: установим, при каком угле наклона кровли использование материала швеллера является наилучшим и какое расположение его выгоднее по фиг. 138, б или по фиг. 138, в.

Рассмотрим сначала случай расположения прогона по фиг. 138, б. На фиг. 139 дана схема распределения знаков нормальных напряжений в крайних точках этого профиля при обычных углах наклона кровли от изгиба в двух главных плоскостях и от кручения. Как видим, для точки 3 все три компонента напряжений имеют одинаковый знак, но это не значит, что она всегда будет являться опасной точкой профиля.

В некоторых случаях (как, например, в примере 18) более опасной может оказаться точка 2, потому что напряжения от изгиба в плоскости ската кровли в этой точке, дальше отстоящей от главной оси, значительно больше, чем в точке 3.

При изменении угла наклона кровли напряжения в одной из этих опасных точек, очевидно, будут увеличиваться, а в другой уменьшаться,



Фиг. 139.

а следовательно, существует такой угол, при котором напряжения в этих точках одинаковы. Этот угол и будет являться искомым наилучшим углом наклона кровли.

Итак, условие для его определения в общем виде запишется так:

$$|\sigma_3| = |\sigma_2| \quad (37)$$

(где черточками показано, что речь идет о сравнении абсолютных величин напряжений), или в развернутом виде по формуле (18):

$$\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_{y_1}} + \frac{B_\omega}{W_{\omega_1}} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_{y_2}} - \frac{B_\omega}{W_{\omega_2}} \quad (38)$$

Сократив левую и правую части выражения (38) на  $\frac{M_x}{W_x}$ , получим:

$$1 + \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{W_x}{W_{y_1}} + \frac{B_\omega}{M_x} \cdot \frac{W_x}{W_{\omega_1}} = 1 + \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{W_x}{W_{y_2}} - \frac{B_\omega}{M_x} \cdot \frac{W_x}{W_{\omega_2}} \quad (39)$$

По формуле (24) (при  $n = 1$ ):

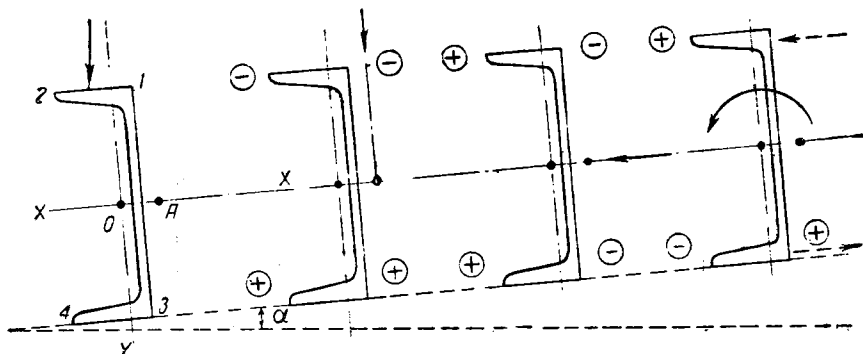
$$\frac{M_y}{M_x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

По формулам (23), (25) и (27):

$$\begin{aligned} \frac{B_{\omega}}{M_x} &= \frac{\alpha \cdot 0,01 q l^2 \cdot 8}{q l^2 \cos \alpha} \left( x_a + \frac{b}{2} - \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) \cos \alpha = \\ &= 0,08 \alpha \left( x_a + \frac{b}{2} - \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha \right). \end{aligned}$$

Подставив в выражение (39) вместо  $\frac{M_y}{M_x}$  и  $\frac{B_{\omega}}{M_x}$  их значения по вышеприведенным формулам, получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha \frac{W_x}{W_{y_1}} + 0,08 \alpha \left( x_a + \frac{b}{2} - \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) \frac{W_x}{W_{\omega_1}} = \\ = \operatorname{tg} \alpha \frac{W_x}{W_{y_2}} - 0,08 \alpha \left( x_a + \frac{b}{2} - \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) \frac{W_x}{W_{\omega_2}}. \end{aligned} \quad (40)$$



Фиг. 140.

Решая уравнение (40) относительно  $\operatorname{tg} \alpha$ , получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,08 \left( x_a + \frac{b}{2} \right) \left( \frac{W_x}{W_{\omega_1}} + \frac{W_x}{W_{\omega_2}} \right)}{\frac{W_x}{W_{y_2}} - \frac{W_x}{W_{y_1}} + 0,04 h \alpha \left( \frac{W_x}{W_{\omega_1}} + \frac{W_x}{W_{\omega_2}} \right)}. \quad (41)$$

Переходим к случаю расположения прогона по фиг. 138, в. На фиг. 140 дана схема распределения знаков трех компонентов нормальных напряжений при обычных углах наклона кровли. Здесь опасными будут, очевидно, точки 1 и 4.

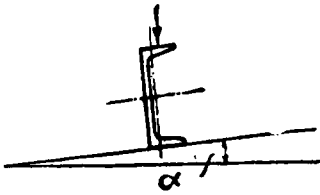
Условие для определения наивыгоднейшего угла  $\alpha$  в общем виде напишется так:

$$|\sigma_1| = |\sigma_4|. \quad (42)$$

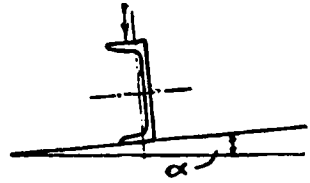
Написав это условие в развернутом виде и воспользовавшись формулами (23), (24), (25) и (28), мы, очевидно, получим такую же формулу для  $\operatorname{tg} \alpha$  с той лишь разницей, что знак перед  $h$  изменится на обратный, а именно:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,08 \left( x_a + \frac{b}{2} \right) \left( \frac{W_x}{W_{\omega_1}} + \frac{W_x}{W_{\omega_2}} \right)}{\frac{W_x}{W_{y_2}} - \frac{W_x}{W_{y_1}} - 0,04 h \alpha \left( \frac{W_x}{W_{\omega_1}} + \frac{W_x}{W_{\omega_2}} \right)}. \quad (43)$$

**Наивыгоднейшие углы наклона кровли в отношении использования материала швеллерного прогона**



Фиг. 1



Фиг. 2

**Примечание.** Верхние числа углов наклона кровли относятся к случаю расположения прогона по фиг. 1, нижние — к случаю расположения прогона по фиг. 2.

№ швеллеров		Пролет прогона в м			
		$l = 5$	$l = 6$	$l = 7$	$l = 8$
16	a	3°55' 5°04'	2°51' 3°25'	2°12' 2°31'	1°57' 2°12'
	b	3°07' 3°49'	2°10' 2°29'	1°52' 2°06'	1°38' 1°48'
18	a	5°00' 7°07'	3°21' 4°11'	2°38' 3°08'	2°07' 2°25'
	b	3°53' 5°06'	2°40' 3°11'	2°00' 2°17'	1°43' 1°55'
20	a	5°21' 8°05'	3°53' 5°10'	3°04' 3°14'	2°23' 2°49'
	b	4°05' 5°32'	3°07' 3°53'	2°23' 2°48'	1°52' 2°08'
22	a	5°43' 9°52'	4°23' 6°10'	3°16' 4°10'	2°33' 3°04'
	b	4°48' 7°07'	3°30' 4°35'	2°41' 3°17'	2°06' 2°27'
24	a	6°51' 12°58'	5°14' 8°11'	4°02' 5°37'	3°10' 4°04'
	b	6°01' 10°08'	4°31' 6°36'	3°32' 4°42'	2°44' 3°23'
	c	4°57' 7°39'	3°42' 5°02'	2°49° 3°32°	2°12' 2°37'

№ швеллеров	Пролет прогона в м				
	$l = 5$	$l = 6$	$l = 7$	$l = 8$	
27	a	7°28' 16°39'	6°09' 11°17'	4°31' 6°49'	3°36' 4°55'
	b	6°28' 12°39'	4°55' 7°49'	3°48' 5°21'	3°00' 3°53'
	c	5°19' 9°02'	4°02' 5°51'	3°48' 4°07'	2°25' 2°59'

Формулы (41) и (43) определяют искомый угол наклона кровли  $\alpha$ , наивыгоднейший с точки зрения наилучшего использования швеллерного прогона.

Воспользовавшись этими формулами, мы составили табл. 41 числовых значений наивыгоднейших углов для швеллеров от № 16 до № 27 и пролетов  $l$  от 5 до 8 м для обоих рассмотренных случаев расположения прогона по скату кровли.

Из этой таблицы видим, что для наиболее часто встречающегося пролета прогона  $l = 6$  м этот угол колеблется в пределах от 2° до 11°, что как раз соответствует современным уклонам кровли. Это лишний раз подчеркивает выгодность применения в качестве прогонов прокатных швеллеров.

## ГЛАВА VII

### ВЫЯВЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТИПОВ НЕЗАМКНУТЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ, РАБОТАЮЩИХ НА СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ И НА СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

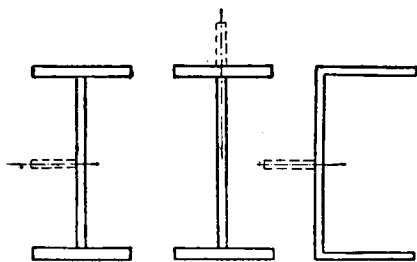
Выявление рациональных типов профилей, хорошо работающих при совместном действии изгиба и кручения, — задача в достаточной мере сложная. Решение ее зависит от многих факторов: величины, характера и места приложения нагрузки, формы сечения, типа конструкции, в состав которой входят в качестве элементов стержни, о которых идет речь, габаритов и т. п. Если можно назвать сравнительно простой задачей о выборе рационального типа профиля, работающего только на косоугольный изгиб, то исследование еще одновременной работы его на стесненное кручение значительно усложняет эту задачу, потому что указанные выше факторы тесно переплетаются между собой.

Так например, бимомент, при помощи которого получается составляющая продольных нормальных напряжений от кручения, сам по себе зависит не только от величины, характера и эксцентриситета приложения нагрузки, но также и от формы и размеров самого сечения и граничных условий по краям стержня. При этом форма и размеры сечения влияют на величину упругой изгибно-крутильной характеристики

$k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$ , которая входит в состав аргумента гиперболических функций. Поэтому мы пока поставили перед собой более скромную

задачу, а именно: выявить в качестве первого приближения влияние только формы поперечного сечения на величину секториального момента инерции  $J_{\omega}$ , а следовательно, и на величину секториальной жесткости при кручении. С этой целью мы рассмотрели ряд различных типов профилей, имеющих одинаковую толщину  $\delta = 1 \text{ см}$  и одинаковый периметр контура  $P = 120 \text{ см}^1$  и установили величину  $J_{\omega}$  в зависимости от формы и соотношений между размерами отдельных элементов сечения. Некоторые же более простые применяемые в практике типы профилей исследованы более подробно и в более общем виде; для этих профилей выявлены оптимальные соотношения между размерами элементов их при работе профиля как на стесненное кручение, так и на изгиб. Здесь уместно обратить внимание на следующее положение.

Если к какому-нибудь профилю присоединим прямоугольный элемент по направлению, проходящему через центр изгиба и одну из секториальных нулевых точек профиля, то секториальный момент инерции и положение центра изгиба этого профиля не изменятся.



Фиг. 141.

Поэтому при указанной выше постановке задачи нет нужды рассматривать отдельно профили, подобные изображенным на фиг. 141, полученные из основных профилей путем добавления указанным путем прямолинейных элементов (на фиг. 141 добавленные элементы обозначены пунктиром).

Доказательство этого положения вытекает из метода произвольных эпюр при определении центра изгиба и секториального момента инерции профиля (см. § 29 главы IV).

Как известно, по этому методу эпюра главных секториальных площадей определяется как эпюра секториальных площадей, ортогональная к любой линейной эпюре. Предположим, что для какого-либо профиля мы построили эпюру главных секториальных площадей. Добавим теперь к профилю прямолинейный элемент, проходящий через нулевую точку и направленный по линии, соединяющей эту точку с центром изгиба профиля, и примем эпюру главных секториальных площадей основного профиля в качестве вспомогательной эпюры секториальных площадей  $\omega_0$  для профиля с добавочным элементом. Остальные три (из четырех) линейные эпюры, вообще говоря, от прибавления элемента изменятся, так как для каждой из них добавится участок эпюры на этом добавленном прямолинейном элементе.

Для построения эпюры главных секториальных площадей всего сечения, как известно, придется найти из решения системы трех уравнений коэффициенты  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  и  $\beta$ ; правыми частями в этой системе будут интегралы:

$$\int_F x \omega_0 dF, \quad \int_F y \omega_0 dF \quad \text{и} \quad \int_F z \omega_0 dF.$$

<sup>1</sup> Цифра 120 взята из соображений простоты установления размеров элементов, составляющих профиль, в целых числах.



Но эти интегралы будут равны нулю, так как  $\omega_0$  для основного профиля является главной секториальной площадью, а добавочным эяуром  $x$ ,  $y$  и  $z$  на прямолинейном элементе соответствует нуль на эяуре  $\omega_0$ . Следовательно,  $\alpha_x = \alpha_y = \beta = 0$ , и  $\omega_0$  будет эяурой главных секториальных площадей и для профиля с добавочным прямолинейным элементом, расположенным, как указано выше.

## § 42. ОПТИМАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ РАЗМЕРАМИ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПРОФИЛЕЙ

### 1. Симметричный двутавр

Пусть  $b$  и  $\delta_n$  — соответственно ширина и толщина полок,  $h$  и  $\delta_{cm}$  — высота и толщина стенки двутаврового профиля.

Размеры эти, как и во всех других случаях рассматриваемых нами профилей, относим к осевым линиям элементов, составляющих профиль (фиг. 142). Центр тяжести и центр изгиба двутаврового профиля, как известно, находится в середине стенки его. Найдем выражение секториального момента инерции  $J_\omega$ .

Пользуясь формулой  $J_\omega = \frac{J_y h^2}{4}$  (см. таблицу приложения 12), находим:

$$J_\omega = \frac{F_{cm}^2 F_n^3}{24 \delta_n^2 \delta_{cm}^2}, \quad (1)$$

где  $F_n = b \delta_n$  — площадь полки;

$F_{cm} = h \delta_{cm}$  — площадь стенки.

Полагаем, что площадь поперечного сечения профиля постоянна, т. е.

$$2F_n + F_{cm} = F = \text{const}. \quad (2)$$

Считая  $F_n$  и  $F_{cm}$  переменными по величине, но удовлетворяющими условию (2), найдем, при каких соотношениях площадей полки и стенки секториальный момент инерции будет наибольшим. Это задача нахождения максимум'а функции двух переменных, связанных условием (2), т. е. так называемого условного максимума.

Выражая  $F_{cm}$  при помощи уравнения (2) через  $F_n$  и  $F = \text{const}$  и подставляя в формулу (1)  $F_{cm} = F - 2F_n$ , получаем:

$$J_\omega = \frac{(F - 2F_n)^2 F_n^3}{24 \delta_n^2 \delta_{cm}^2}.$$

Задача таким образом свелась к нахождению значения  $F_n$ , при котором  $J_\omega$  будет максимальным. Заметим, что  $\delta_n$  и  $\delta_{cm}$  при этом, вообще говоря, произвольны, но в каждом частном случае фиксированы.

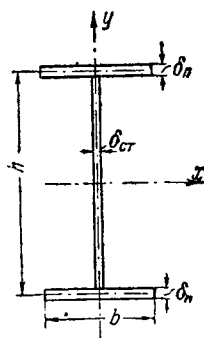
Продифференцировав  $J_\omega$  по  $F_n$  и приравняв производную нулю, найдем из полученного таким образом уравнения значение  $F_n$ , при котором  $J_\omega$  будет иметь экстремальное значение.

Имеем:

$$-2 \cdot 2 \cdot (F - 2F_n) F_n^3 + 3 (F - 2F_n)^2 F_n^2 = 0$$

или

$$F_n^2 (F - 2F_n) (3F - 10F_n) = 0.$$



Фиг. 142.

Этому уравнению удовлетворяют корни:

$$F_n = 0; \quad F_n = \frac{1}{2} F \quad \text{и} \quad F_n = 0,3F.$$

Первые два корня дают минимальное значение  $J_\omega$ , так как при этом двутавр вырождается в полосу, для которой  $J_\omega = 0$ .

Третий корень, как нетрудно убедиться, дает максимальное значение  $J_\omega$ ; в этом случае из (2) находим  $F_{cm} = 0,4F$ .

Итак, наибольший секториальный момент инерции будет у двутавра с таким соотношением площадей элементов:

$$\left. \begin{aligned} F_n &= 0,3F; \\ F_{cm} &= 0,4F, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

или в другом выражения, когда

$$b = 0,75h \frac{\delta_{cm}}{\delta_n}. \quad (4)$$

Найдем, при каком соотношении площади полки и стенки двутавра секториальный момент сопротивления его

$$W_\omega = \frac{J_\omega}{\omega_{\max}},$$

вычисленный для крайних точек контура, будет наибольшим.

$$\omega_{\max} = \frac{bh}{4} = \frac{F_n F_{cm}}{4\delta_n \delta_{cm}} \quad (\text{см. таблицу приложения 13}).$$

Для края полки имеем:

$$W_\omega = \frac{F_n^2 F_{cm}}{6\delta_n^2 \delta_{cm}}. \quad (5)$$

Способом, указанным выше, находим, что при

$$2F_n + F_{cm} = F = \text{const}$$

и произвольных, но фиксированных  $\delta_n$  и  $\delta_{cm}$ , секториальный момент сопротивления  $W_\omega$  будет наибольшим при таких соотношениях площадей полки и стенки:

$$\left. \begin{aligned} F_n &= \frac{1}{3} F; \\ F_{cm} &= \frac{1}{3} F, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

или

$$b = h \frac{\delta_{cm}}{\delta_n}. \quad (7)$$

Экваториальные моменты инерции  $J_x$  и  $J_y$  для симметричного двутавра максимумов в аналитическом смысле не имеют. Величины их будут возрастать при вырождении двутавра в узкие, длинные полосы соответственно вдоль оси  $Y$  и оси  $X$ .

То же самое можно сказать и относительно момента сопротивления  $W_y$  для краев полки.

Момент же сопротивления  $W_x$  для точек, лежащих на оси полки двутавра ( $W_x = \frac{2J_x}{h}$ ), будет иметь наибольшее значение при определенных соотношениях площадей полки и стенки.

Раскроем выражение  $W_x$ :

$$W_x = \frac{F_{cm}}{6\delta_{cm}} (F_{cm} + 6F_n).$$

При условии

$$2F_n + F_{cm} = F = \text{const}$$

и фиксированных значениях толщин  $\delta_n$  и  $\delta_{cm}$ ,  $W_x$  будет иметь максимальное значение при

$$\left. \begin{aligned} F_{cm} &= 0,75F; \\ F_n &= 0,125F, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

или при

$$b = 0,167h \frac{\delta_{cm}}{\delta_n}. \quad (9)$$

## 2. Несимметричный двутавр

Пусть  $b$  и  $\delta_1$ ,  $a$  и  $\delta_3$  — соответственно ширины и толщины верхней и нижней полок, а  $h$  и  $\delta_2$  — высота и ширина стенки несимметричного двутавра (фиг. 143).

Секториальный момент инерции  $J_w$  для этого профиля определяется по формуле (см. таблицу приложения 12):

$$J_w = \frac{J_{1y}J_{3y}h^2}{J_y},$$

где  $J_{1y}$  и  $J_{3y}$  обозначают соответственно моменты инерции верхней и нижней полок относительно оси  $Y$ . Представим это выражение в следующем виде:

$$J_w = \frac{\delta_1 b^3 \delta_3 a^3 h^2}{12(\delta_1 b^3 + \delta_3 a^3)}, \quad (10)$$

или в площадях:

$$J_w = \frac{F_1^3 F_3^2 F_2^2}{12\delta_2^2 (\delta_3^2 F_1^3 + \delta_1^2 F_3^3)}, \quad (11)$$

где  $F_1$  и  $F_3$  — площади сечений верхней и нижней полок,  $F_2$  — площадь сечения стенки,

причем

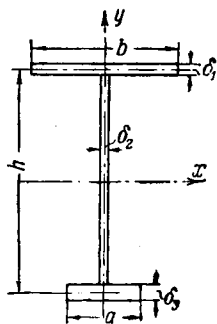
$$F_1 + F_2 + F_3 = F = \text{const}. \quad (12)$$

Фиксируя величины толщин элементов профиля  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  и  $\delta_3$ , находим, что при соблюдении неизменяемости общей площади (12) секториальный момент инерции  $J_w$  получает наибольшее значение при таких соотношениях:

$$\left. \begin{aligned} F_2 &= 0,4F, \\ F_1 + F_3 &= 0,6F. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Эти соотношения (13), если положить  $F_1 = F_3$ , т. е. если перейти к симметричному двутавру, переходят в соотношения (3) для симметричного двутавра.

Из рассмотрения выражений (10) и (11) можно сделать следующие выводы:



Фиг. 143.

а) при фиксированных площадях элементов уменьшение толщины стенки  $\delta_2$  в  $h$  раз увеличивает секториальный момент инерции в  $h^2$  раз, так как высота и толщина стенки находятся в обратно пропорциональной зависимости, а в числитель формулы (10)  $h$  входит в квадрате;

б) при фиксированных площадях элементов уменьшение толщины верхней и нижней полки или обеих полки одновременно, как видно из формулы (11), увеличивает секториальный момент инерции профиля;

в) если толщины верхней и нижней полки одинаковы  $\delta_1 = \delta_3$ , то наибольший секториальный момент инерции  $J_\omega$  будет, когда  $b = a$ , т. е. для симметричного двутавра. Для того чтобы доказать это, преобразуем выражение (10), положив в нем  $\delta_1 = \delta_3$

$$b = d + c,$$

и

$$a = d - c.$$

Тогда

$$J_\omega = \frac{h^2 \delta_1}{12} \cdot \frac{(d+c)^3 (d-c)^3}{(d+c)^3 + (d-c)^3}.$$

Последнее выражение при фиксированных  $h$ ,  $\delta_1$  и  $d$  и переменном  $c$  достигает максимума при  $c = 0$ .

Что касается главных моментов инерции  $J_x$  и  $J_y$ , то для них, очевидно, остаются в силе замечания, сделанные для симметричного двутавра.

### 3. Швеллер

Рассмотрим швеллер, изображенный на фиг. 144. Размеры его  $b$  и  $\delta_n$  — ширина и толщина полки,  $h$  и  $\delta_{cm}$  — высота и толщина стенки.

Для секториального момента инерции швеллера имеем формулу (см. таблицу приложения 12):

$$J_\omega = \frac{2J_{1x}J_{2x}c^2}{J_x} + \frac{J_{1x}b^2}{6},$$

где применительно к нашему случаю:

$$c = \frac{b}{2},$$

$J_{1x}$  и  $J_{2x}$  — соответственно моменты инерции полки и стенки относительно оси симметрии швеллера;

$J_x$  — момент инерции всего сечения относительно той же оси.

В раскрытом виде эта формула имеет вид:

$$J_\omega = \frac{b^3 h^2 \delta_n (3b \delta_n + 2h \delta_{cm})}{12 (6b \delta_n + h \delta_{cm})}, \quad (14)$$

или

$$J_\omega = \frac{F_n^3 F_{cm}^2 (3F_n + 2F_{cm})}{12 \delta_n^2 \delta_{cm}^2 (6F_n + F_{cm})}, \quad (15)$$

где  $F_n = b \delta_n$  — площадь сечения полки;

$F_{cm} = h \delta_{cm}$  — площадь сечения стенки.

Считая, что площадь всего поперечного сечения остается постоянной:

$$2F_n + F_{cm} = F = \text{const}, \quad (16)$$

найдем, при каком соотношении площадей полки и стенки секториальный момент инерции  $J_\omega$  будет наибольшим.

Толщины полки и стенки  $\delta_n$  и  $\delta_{cm}$  при этом предполагаются произвольными, но фиксированными.

Произведя вычисления аналогично тому, как это сделано для двутавра, находим, что  $J_\omega$  будет наибольшим, когда

$$\left. \begin{aligned} F_n &= 0,269F; \\ F_{cm} &= 0,462F, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

или

$$b = 0,582h \frac{\delta_{cm}}{\delta_n}. \quad (18)$$

Если мы будем менять толщины полок и стенки  $\delta_n$  и  $\delta_{cm}$  так, чтобы произведение их оставалось постоянным:

$$\delta_n \cdot \delta_{cm} = \text{const},$$

то при соблюдении условия (18) соотношение между шириной полки  $b$  и высотой  $h$  будет тоже меняться при одном и том же максимальном  $J_\omega$ , как это легко видеть из формул (15) и (18).

Если же менять величины  $\delta_n$  и  $\delta_{cm}$  без соблюдения условия  $\delta_n \delta_{cm} = \text{const}$ , то одновременно с изменением ширины полки и высоты стенки будет изменяться и сама величина наибольшего значения секториального момента инерции  $J_\omega$  [формула (15)].

Секториальные моменты сопротивления для точек 1 и 2 (край полки и место пересечения полки со стенкой — фиг. 144) имеют вид:

$$W_{1\omega} = \frac{F_n^2 F_{cm} (3F_n + 2F_{cm})}{6\delta_n \delta_{cm} (3F_n + F_{cm})}; \quad (19)$$

$$W_{2\omega} = \frac{F_n F_{cm} (3F_n + 2F_{cm})}{18\delta_n \delta_{cm}}. \quad (20)$$

Заметим попутно, что  $W_{2\omega}$  всегда больше, чем  $W_{1\omega}$ . Это легко усматривается из формул (19) и (20) и является следствием того факта, что в швеллере расстояние центра изгиба от оси стенки всегда меньше половины ширины полки. Действительно, расстояние центра изгиба от оси стенки выражается формулой:

$$a_x = \frac{3b^2 \delta_n}{6b\delta_n + h\delta_{cm}}.$$

Переписав его в таком виде:

$$a_x = b \frac{3b\delta_n}{6b\delta_n + h\delta_{cm}} = b \frac{1}{2 + \frac{h\delta_{cm}}{3b\delta_n}},$$

видим, что

$$a_x < \frac{b}{2}.$$

При соблюдении условия постоянства площади всего поперечного сечения (16) и фиксированных значениях толщин  $\delta_n$  и  $\delta_{cm}$  секториаль-

ные моменты сопротивления будут достигать своего наибольшего значения при таких соотношениях площадей полки и стенки:

$$\text{для точки 1} \quad \max W_{1\omega} \quad \text{будет при:} \quad \left. \begin{array}{l} F_n = 0,306 F; \\ F_{cm} = 0,388 F; \end{array} \right\} \quad (21)$$

$$\text{для точки 2} \quad \max W_{2\omega} \quad \text{будет при:} \quad \left. \begin{array}{l} F_n = 0,232 F; \\ F_{cm} = 0,535 F. \end{array} \right\} \quad (22)$$

Главный момент инерции  $J_x$  и момент сопротивления  $W_x$  имеют такие же аналитические выражения, как и для двутавра, и поэтому соответственные выводы, сделанные при рассмотрении двутавра, распространяются и на швеллер.

Главный момент инерции  $J_y$  и момент сопротивления  $W_{1y}$  относительно точки 1 (свободный край полки) максимумов в аналитическом смысле не имеют; величины их возрастают с уменьшением высоты стенки швеллера.

Что касается момента сопротивления  $W_{2y}$  относительно точки 2 (вообще говоря, для точек, лежащих на оси стенки), то он имеет вид:

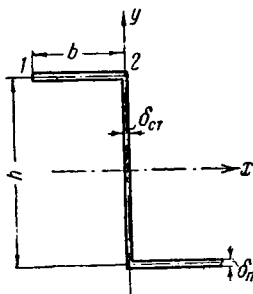
$$W_{2y} = \frac{F_n (2F - 3F_n)}{3\delta_n}. \quad (23)$$

При постоянстве общей площади сечения (16) и фиксировании значений  $\delta_n$  момент сопротивления  $W_{2y}$  принимает наибольшее значение при

$$F_n = F_{cm} = \frac{1}{3} F. \quad (24)$$

#### 4. Z-образное сечение

Пусть  $b$  и  $\delta_n$  — соответственно ширина и толщина полок,  $h$  и  $\delta_{cm}$  — высота и толщина стенки Z-образного профиля (фиг. 145). Как известно, центр тяжести и центр изгиба этого профиля совпадают и находятся по середине оси стенки.



Фиг. 145.

Секториальный момент инерции для этого профиля найдем, пользуясь изложенным выше методом произвольных эпюр (см. § 29 главы IV). Он будет иметь вид:

$$J_{\omega} = \frac{F_n^2 \delta_{cm}^2 (F_n + 2F_{cm})}{12\delta_n^2 \delta_{cm}^2 (2F_n + F_{cm})}. \quad (25)$$

Как в предыдущих случаях, полагая неизменной площадь всего поперечного сечения стержня:

$$2F_n + F_{cm} = F = \text{const}$$

и фиксируя величины толщин  $\delta_n$  и  $\delta_{cm}$ , находим, что максимальное значение  $J_{\omega}$  достигается при таких же соотношениях площадей полки и стенки, как и в швеллере, а именно:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при} \quad F_n = 0,269 F; \\ \text{и} \quad F_{cm} = 0,462 F. \end{array} \right\} \quad (26)$$

Секториальные моменты сопротивления для точки 1 (свободный край полки) и точки 2 (пересечение осей полки и стенки) выражаются такими формулами:

$$W_{1\omega} = \frac{F_n^2 F_{cm} (F_n + 2F_{cm})}{6\delta_n \delta_{cm} (F_n + F_{cm})}, \quad (27)$$

$$W_{2\omega} = \frac{F_n \cdot F_{cm} (F_n + 2F_{cm})}{6\delta_n \delta_{cm}}. \quad (28)$$

При соблюдении постоянства площади всего поперечного сечения и фиксированных величинах толщин эти моменты будут принимать наибольшие значения при таких соотношениях площадей полки и стенки:

$$\left. \begin{aligned} \max W_{1\omega} \text{ будет при: } F_n &= 0,306 F; \\ \text{и } F_{cm} &= 0,388 F \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

(такие же соотношения как и для швеллера);

$$\left. \begin{aligned} \max W_{2\omega} \text{ будет при: } F_n &= 0,188 F; \\ \text{и } F_{cm} &= 0,624 F. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

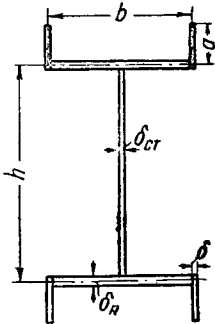
Что касается главных экваториальных моментов инерции  $J_x$  и  $J_y$ , то выявление в общем виде оптимальных соотношений, соответствующих максимуму  $J_x$  или  $J_y$ , является задачей довольно сложной, так как здесь главные оси не параллельны полкам и стенке профиля, а составляют с ними некоторый угол, зависящий также от соотношения между размерами элементов, составляющих профиль.

Переходим к рассмотрению профилей двутаврового, швеллерного и Z-образного сечений, усложненных на краях полок отгибами, направленными внутрь или наружу контура, и выясним, как при этом изменяется величина секториального момента инерции  $J_\omega$ .

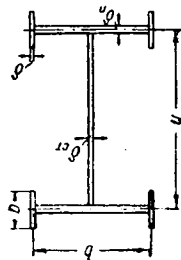
### 5. Двутавр с полками, усиленными продольными ребрами жесткости

Рассмотрим симметричный двутавр, полки которого усилены продольными ребрами жесткости следующих трех типов:

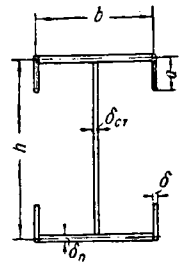
а) ребра выступают наружу профиля (фиг. 146),



Фиг. 146.



Фиг. 147.



Фиг. 148.

б) ребра расположены симметрично по отношению к полкам профиля (фиг. 147) и

в) ребра выступают внутрь профиля (фиг. 148).

Выведем формулу секториального момента инерции для случая более общего, когда ребра расположены несимметрично по отношению к полке профиля.

Обозначив расстояние внутреннего края ребра от оси полки через  $c$  (фиг. 149) и давая ему различные значения, можем получить  $J_{\omega}$  для всех трех интересующих нас случаев. Так как сечение это обладает двумя осями симметрии, то не составляет труда сразу построить эпюру главных секториальных площадей (фиг. 149). Вычислив интеграл от квадрата этой эпюры по площади всего поперечного сечения, мы получим, как известно, секториальный момент инерции его.

Он будет иметь вид:

$$J_{\omega} = \frac{b^2}{24} [h^2 b \delta_n + 2a\delta(3h^2 - 6ah + 4a^2) + 24ac\delta(c + h - a)]. \quad (31)$$

Давая в этой формуле величине  $c$  значения  $0$ ,  $\frac{a}{2}$  и  $a$ , получим  $J_{\omega}$  для трех указанных выше случаев:

$$\text{а) } J_{\omega} = \frac{b^2}{24} [h^2 b \delta_n + 2a\delta(3h^2 + a^2) - 6a^2\delta(2h - a)]; \quad (32)$$

$$\text{б) } J_{\omega} = \frac{b^2}{24} [h^2 b \delta_n + 2a\delta(3h^2 + a^2)]; \quad (33)$$

$$\text{в) } J_{\omega} = \frac{b^2}{24} [h^2 b \delta_n + 2a\delta(3h^2 + a^2) + 6a^2\delta(2h + a)]. \quad (34)$$

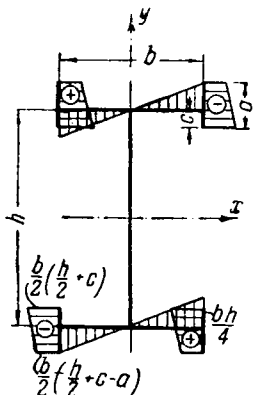
Поскольку все величины, входящие в состав написанных выше формул, существенно положительны и  $2h - a > 0$ , из взаимного сопоставления этих формул можно заключить, что наиболее выгодным в смысле величины  $J_{\omega}$  будет профиль с ребрами, выступающими внутрь профиля, а наименее выгодным будет профиль с ребрами, выступающими наружу.

Профиль же, изображенный на фиг. 147, занимает промежуточное между ними положение.

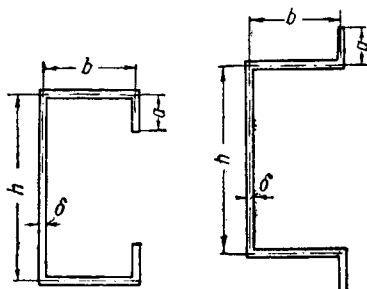
## 6. Швеллер с концами полки, загнутыми внутрь (фиг. 150) или наружу (фиг. 151) профиля

Формулы секториальных моментов инерции для этих двух случаев выведены при помощи метода произвольных эпюр, и так как в общем случае (при различных толщинах полки и стенки) они очень громоздки, мы ограничились случаем, когда толщина сечения всюду одинакова, и положили для простоты  $\delta = 1$ .

В результате вычислений получено:



Фиг. 149.



Фиг. 150.

Фиг. 151.



а) для швеллера с отгибами полок внутрь профиля:

$$J_{\omega} = \frac{h^2 b^2 [h^2 b (2h + 3b) + 4ab (3h^2 + 12ah + 28a^2) + 6ah^2 (h + 2a) + 8a^3 (h + 6a)]}{12 (h^3 + 6h^2 b + 6h^2 a - 12ha^2 + 8a^3)}; \quad (35)$$

б) для швеллера с концами полок, загнутыми наружу:

$$J_{\omega} = \frac{h^2 b^2 [h^2 b (2h + 3b) + 4ab (3h^2 - 12ah + 28a^2) + 6ah^2 (h - 2a) + 8a^3 (h + 6a)]}{12 (h^3 + 6h^2 b + 6h^2 a + 12ha^2 + 8a^3)}. \quad (36)$$

Сравнивая формулы (35) и (36), замечаем, что в числителе формулы (35) все величины (сами по себе существенно положительные) входят со знаками плюс, в числителе же формулы (36) некоторые величины имеют знак минус. Следовательно, числитель (35) больше числителя (36).

Про знаменатель же можно сказать обратное: знаменатель (35) на тех же основаниях меньше знаменателя (36). Отсюда можно сделать вывод, что  $J_{\omega}$  в первом случае, т. е. для швеллера с концами полок, загнутыми внутрь, всегда больше  $J_{\omega}$  для швеллера с концами, загнутыми наружу.

Величина  $J_{\omega}$  для простого швеллера (без отгибов, повидимому, имеет промежуточное значение между этими двумя.

Исследуя  $J_{\omega}$ , выражаемый формулой (35) для швеллера с концами, загнутыми внутрь, на условный максимум (при условии постоянства площади всего поперечного сечения), приходим к выводу, что наиболее оптимальным в смысле величины  $J_{\omega}$  является швеллер с концами полок, загнутыми внутрь, при таком соотношении составляющих его элементов:

$$b = h = 2a,$$

т. е. когда сечение представляет квадрат с разрезом в середине одной стороны.

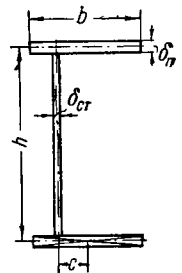
## 7. Швеллер с выступающими краями полок (фиг. 152).

Применив для швеллера с выступающими краями полок метод произвольных эпюр, мы получили для секториального момента инерции следующую формулу:

$$J_{\omega} = \frac{bh^2 \delta_n (6b^3 \delta_n + b^2 h \delta_{cm} + 12hc^2 \delta_{cm})}{24 (6b \delta_n + h \delta_{cm})}. \quad (37)$$

Здесь  $c$  — расстояние от середины полки до оси стенки.

Из этой формулы можем получить выражение для  $J_{\omega}$  двутавра, положив  $c = 0$ , и  $J_{\omega}$  для швеллера, положив  $c = \frac{b}{2}$ . Так как  $0 \leq c \leq \frac{b}{2}$ , то из рассмотрения формулы (37) заключаем, что секториальный момент инерции будет у швеллера наибольшим, у двутавра — наименьшим, у профиля, изображенного на фиг. 152, он будет иметь промежуточное значение.



Фиг. 152.

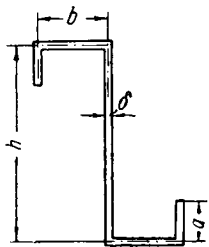
## 8. Z-образный профиль с загнутыми внутрь краями полок (фиг. 153).

Для этого профиля методом произвольных эпюр получено выражение для секториального момента инерции в виде:

$$J_{\omega} = \frac{b^2 [h^2 b (2h + b) + 2ah (3h^2 + 6ah + 4a^2) + 4abh (h + 3a) + 4a^3 (4b + a)]}{12 (h + 2b + 2a)}. \quad (38)$$

Чтобы не усложнять формулу, толщина была принята одинаковой для всего сечения и положена равной единице  $\delta = 1$ .

Исследование выражения (38) на условный максимум при условии постоянства общей площади поперечного сечения (что в данном случае приводится к условию постоянства периметра сечения) с целью выявления оптимальных соотношений между  $h$ ,  $b$  и  $a$  приводит к совместному решению алгебраических систем с тремя неизвестными довольно высокого (четвертого и пятого) порядка, что в общем виде сделать затруднительно. Поэтому вопрос об оптимальном соотношении элементов, составляющих профиль, мы разрешили в числовом виде на значительном количестве примеров (около 25) и пришли к выводу, что с точки зрения кручения наиболее



Фиг. 153.

выгодным является Z-образный профиль без загнутых краев; в этом отношении Z-образный профиль ведет себя совершенно обратное профилю швеллерного типа, хотя в других отношениях они очень сходны друг с другом.

#### § 43. СРАВНЕНИЕ СЕКТОРИАЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ПРОФИЛЕЙ

Исследование вопроса рациональности различных профилей с точки зрения величины их секториального момента инерции проведено, как уже было указано выше, для различных (числом 31) типов профилей, имеющих одинаковую толщину  $\delta = 1$  см и одинаковый периметр контура  $P = 120$  см. Большинство этих профилей встречается на практике (с № 8 до № 31 табл. 42).

В качестве эталонов для сравнения в числе этих профилей рассмотрены 7 незамкнутых профилей (в табл. № 1—7) трубчатого сечения.

Для большинства из этих профилей секториальный момент инерции  $J_{\omega}$  был вычислен при помощи выведенных нами общих формул; для сложных профилей общие формулы оказались настолько громоздкими, что более целесообразным оказалось величину  $J_{\omega}$  получить непосредственно для соответствующих размеров профиля в числовом виде. Результаты полученных таким образом числовых величин секториальных моментов инерции  $J_{\omega}$  рассмотренных типов профилей представлены в виде табл. 42. Сравнительный анализ этих результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. Наибольшей секториальной жесткостью обладают открытые профили, полученные путем разреза трубы (№ 1—7).

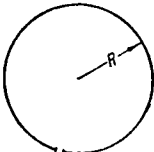
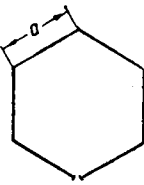
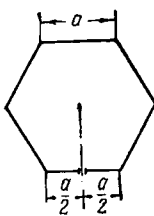
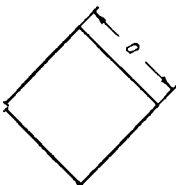
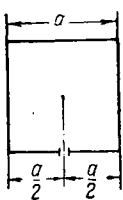
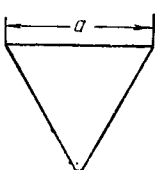
2. С увеличением числа граней трубчатого сечения секториальная жесткость его увеличивается.

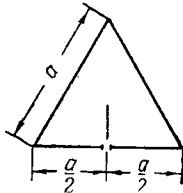
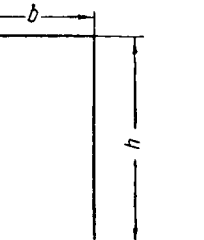
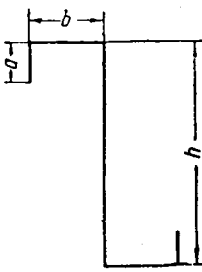
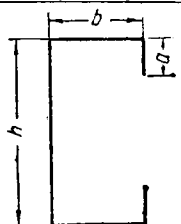
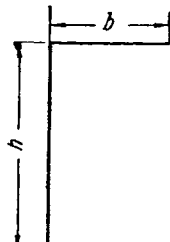
3. Наибольшей жесткостью из этого типа профилей (№ 1—7) и вообще обладает открытый профиль кругового сечения (№ 1).

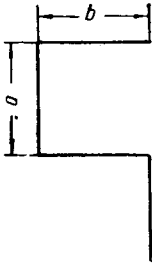
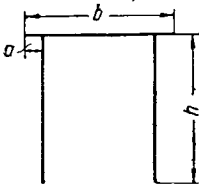

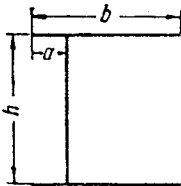
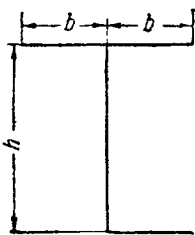
4. Сравнивая между собой величины  $J_{\omega}$  профилей № 2 с № 3, № 4 с № 5 и № 6 с № 7, устанавливаем, что при разрезе трубчатого профиля вдоль ребра секториальная жесткость его больше, чем при разрезе такого же профиля вдоль середины грани.

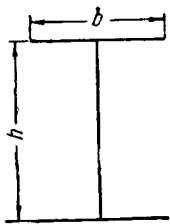
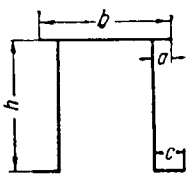
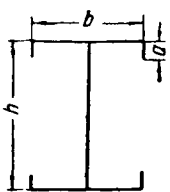
5. Из профилей нетрубчатой формы сечения наибольшей секториальной жесткостью обладает профиль Z-образного сечения (№ 8). При

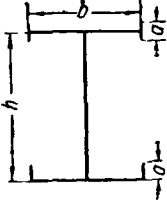

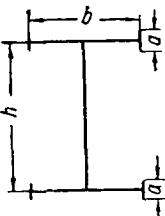
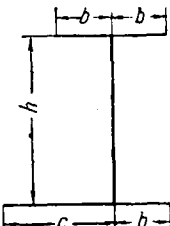
Секториальные моменты инерции различных профилей  
(периметр —  $P = 120$  см, толщина —  $\delta = 1$  см)

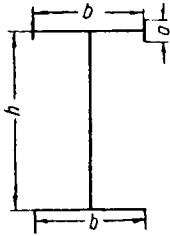
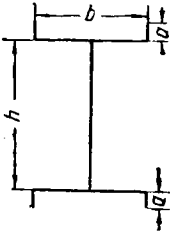
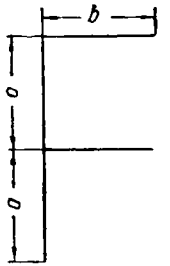
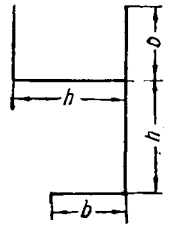
№ п/п	Тип сечения	Размеры в см	$J_{\omega}$ см <sup>6</sup>
1		$2\pi R = 120$	$20,6 \cdot 10^6$
2		$a = 20$	$17,3 \cdot 10^6$
3		$a = 20$	$16,8 \cdot 10^6$
4		$a = 30$	$14,2 \cdot 10^6$
5		$a = 30$	$11,9 \cdot 10^6$
6		$a = 40$	$10,7 \cdot 10^6$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в см	$J_{\omega}$ см <sup>6</sup>
7		$a = 40$	$4,26 \cdot 10^6$
8		$b = 32$ $h = 56$	$10,3 \cdot 10^6$
		$b = 30$ $h = 60$	$10,1 \cdot 10^6$
		$b = 40$ $h = 40$	$8,53 \cdot 10^6$
		$b = 20$ $h = 80$	$6,40 \cdot 10^6$
9		$a = 3$ $b = 31$ $h = 52$	$10,2 \cdot 10^6$
		$a = 20$ $b = 20$ $h = 40$	$8,54 \cdot 10^6$
		$a = 20$ $b = 30$ $h = 20$	$8,33 \cdot 10^6$
		$a = 15$ $b = 15$ $h = 60$	$7,00 \cdot 10^6$
		$a = 10$ $b = 40$ $h = 20$	$5,20 \cdot 10^6$
10		$a = 10$ $b = 25$ $h = 50$	$8,41 \cdot 10^6$
		$a = 7,5$ $b = 35$ $h = 35$	$7,20 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 70$	$6,07 \cdot 10^6$
11		$b = 32$ $h = 56$	$7,18 \cdot 10^6$
		$b = 30$ $h = 60$	$7,09 \cdot 10^6$
		$b = 40$ $h = 40$	$6,10 \cdot 10^6$
		$b = 20$ $h = 80$	$4,69 \cdot 10^6$

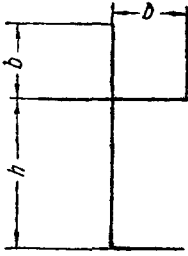
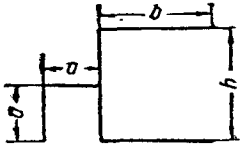
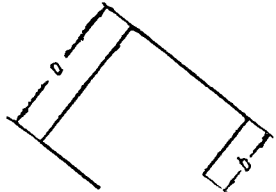

№ п/п	Тип сечения	Размеры в см	$J_{\omega}$ см <sup>6</sup>
12		$a = 30$ $b = 30$	$5,43 \cdot 10^6$
		$a = 40$ $b = 20$	$4,20 \cdot 10^6$
		$a = 20$ $b = 40$	$4,03 \cdot 10^6$
13		$a = 5$ $b = 50$ $h = 35$	$5,18 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $b = 70$ $h = 25$	$5,07 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 50$	$0,85 \cdot 10^6$
14		$a = 5$ $b = 20$ $h = 70$	$4,90 \cdot 10^6$
		$a = 10$ $b = 25$ $h = 50$	$3,74 \cdot 10^6$
		$a = 7,5$ $b = 35$ $h = 35$	$3,63 \cdot 10^6$
15		$a = 7,5$ $b = 30$ $h = 60$	$4,81 \cdot 10^6$
		$a = 10$ $b = 40$ $h = 40$	$4,72 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 80$	$2,77 \cdot 10^6$
16		$b = 20$ $h = 60$	$4,48 \cdot 10^6$
		$b = 26$ $h = 42$	$4,16 \cdot 10^6$
		$b = 30$ $h = 30$	$2,88 \cdot 10^6$
		$b = 13$ $h = 81$	$2,58 \cdot 10^6$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в см	$J_{\omega}$ см <sup>6</sup>
17		$b = 36$ $h = 48$	$4,47 \cdot 10^6$
		$b = 40$ $h = 40$	$4,26 \cdot 10^6$
		$b = 30$ $h = 60$	$4,05 \cdot 10^6$
		$b = 20$ $h = 80$	$2,13 \cdot 10^6$
18		$a = 5$ $c = 5$ $b = 50$ $h = 30$	$4,20 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $c = 5$ $b = 70$ $h = 20$	$3,98 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $c = 7,5$ $b = 35$ $h = 35$	$2,21 \cdot 10^6$
19		$a = 5$ $b = 30$ $h = 40$	$4,09 \cdot 10^6$
		$a = 7,5$ $b = 30$ $h = 30$	$3,42 \cdot 10^6$
		$a = 7,5$ $b = 20$ $h = 50$	$3,33 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 60$	$3,32 \cdot 10^6$
		$a = 12$ $b = 24$ $h = 24$	$2,65 \cdot 10^6$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в см	$J_{\omega}$ см <sup>6</sup>
20		$a = 5$ $b = 30$ $h = 40$	$3,84 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 60$	$3,16 \cdot 10^6$
		$a = 7,5$ $b = 20$ $h = 50$	$3,02 \cdot 10^6$
		$a = 7,5$ $b = 30$ $h = 30$	$2,98 \cdot 10^6$
21		$a = 30$ $b = 42$ $h = 48$	$3,80 \cdot 10^6$
		$a = 30$ $b = 50$ $h = 40$	$2,96 \cdot 10^6$
		$a = 20$ $b = 40$ $h = 60$	$2,13 \cdot 10^6$
		$a = 15$ $b = 25$ $h = 80$	$1,48 \cdot 10^6$
		$a = 20$ $b = 52$ $h = 48$	$1,45 \cdot 10^6$
22		$a = 5$ $b = 30$ $h = 40$	$3,61 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 60$	$3,00 \cdot 10^6$
		$a = 7,5$ $b = 20$ $h = 50$	$2,72 \cdot 10^6$
		$a = 7,5$ $b = 30$ $h = 30$	$2,57 \cdot 10^6$
23		$b = 15$ $c = 30$ $h = 45$	$3,57 \cdot 10^6$
		$b = 20$ $c = 30$ $h = 30$	$3,20 \cdot 10^6$
		$b = 10$ $c = 30$ $h = 60$	$2,18 \cdot 10^6$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в см	$J_{\omega}$ см <sup>6</sup>
24		$a = 6$ $b = 30$ $h = 48$	$3,57 \cdot 10^6$
		$a = 10$ $b = 30$ $h = 40$	$2,74 \cdot 10^6$
		$a = 10$ $b = 20$ $h = 60$	$1,94 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $b = 15$ $h = 80$	$1,35 \cdot 10^6$
25		$a = 5$ $b = 30$ $h = 40$	$3,19 \cdot 10^6$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 60$	$2,72 \cdot 10^6$
		$a = 7,5$ $b = 20$ $h = 50$	$2,20 \cdot 10^6$
		$a = 7,5$ $b = 30$ $h = 30$	$1,90 \cdot 10^6$
26		$a = 30$ $b = 30$	$2,85 \cdot 10^6$
		$a = 20$ $b = 40$	$2,52 \cdot 10^6$
		$a = 40$ $b = 20$	$1,72 \cdot 10^6$
27		$b = 20$ $h = 30$	$2,20 \cdot 10^6$
		$b = 24$ $h = 24$	$1,87 \cdot 10^6$
		$b = 13,3$ $h = 40$	$1,51 \cdot 10^6$



№ п/п	Тип сечения	Размеры в см	$J_{\omega}$ см <sup>6</sup>
28		$b = 15$ $h = 60$	$1,93 \cdot 10^6$
		$b = 20$ $h = 40$	$1,84 \cdot 10^6$
		$b = 10$ $h = 80$	$1,13 \cdot 10^6$
29		$a = 10$ $b = 15$ $h = 70$	$1,62 \cdot 10^6$
		$a = 15$ $b = 30$ $h = 30$	$1,45 \cdot 10^6$
30		$a = 50$ $b = 10$	$1,29 \cdot 10^6$
		$a = 52,5$ $b = 7,5$	$0,626 \cdot 10^6$
		$a = 55$ $b = 5$	$0,216 \cdot 10^6$
		$a = 60$ $b = 0$	0,000
31		$a = 50$ $b = 10$	$1,11 \cdot 10^6$
		$a = 52,5$ $b = 7,5$	$0,575 \cdot 10^6$
		$a = 55$ $b = 5$	$0,207 \cdot 10^6$
		$a = 60$ $b = 0$	0,000

одних и тех же размерах высоты стенки и ширины полки он в среднем в 1,4 раза жестче швеллера (№ 11) и в 2—3 раза жестче двутавра (№ 17).

6. Отгиб концов полок Z-образного профиля внутрь (№ 9) (а тем более, повидимому, наружу) во всяком случае не увеличивает его секториальной жесткости (см. выше выводы по Z-образному профилю).

7. Швеллерный профиль (№ 11) при одних и тех же размерах высоты стенки и ширины полки в среднем в 1,5—2 раза жестче двутавра (№ 17).

8. Отгибы полок швеллера внутрь (№ 10) значительно увеличивают его секториальную жесткость (см. выше выводы по швеллеру), а отгибы наружу (№ 14), наоборот, уменьшают ее. То же самое относится и к аналогичным стержням П-образного сечения, помещенным в таблице под № 13 и 18.

9. Сравнительно большой секториальной жесткостью обладает профиль, составленный из двух равнобоких или неравнобоких уголков, по типу, изображенному в таблице под № 12; он примерно в 1,5—2,5 раза жестче аналогичного профиля из двух уголков, изображенного в таблице под № 26, и значительно жестче профилей, составленных из комбинаций уголков и швеллеров по типу изображенных под № 27, 28 и 29.

10. Несимметричный двутавр со смещенной стенкой (№ 15) по секториальной жесткости занимает промежуточное значение между швеллером (№ 11) и симметричным двутавром (№ 17).

11. Несимметричный двутавр (№ 21) с разными ширинами верхней и нижней полок при одной и той же высоте, как и у симметричного двутавра (№ 17), оказывается менее жестким чем последний; при этом чем больше разница в ширинах верхней и нижней полок, тем менее жесток профиль (№ 21), так как в таком случае он больше приближается по типу к тавровому профилю, для которого, как известно, секториальная жесткость равна нулю.

12. Удлинение одной из полок двутавра в одну сторону за счет уменьшения другой полки (№ 23) значительно снижает его секториальную жесткость.

13. Отгибы полок двутавра как внутрь (№ 19), так и наружу (№ 25) уменьшают его (№ 17) секториальную жесткость, причем при одних и тех же размерах высоты стенки, ширины полки и величины отгиба профиль с отгибами внутрь (№ 19) жестче профиля с отгибами наружу (№ 25) в 1,2—1,8 раза.

Промежуточное положение между этими профилями (№ 19 и 25) занимают профили, представляющие собой соединение одной стенкой двух двутавров (№ 22), двутавра со швеллером (№ 20) и двутавра с полосой (№ 24).

14. Профиль углотаврового типа (№ 16) в отношении секториальной жесткости, как и следовало ожидать, является промежуточным (во всяком случае для практически применяемых соотношений размеров) между соответствующим швеллером (№ 11) и двутавром (№ 17), будучи значительно менее жестким по сравнению с первым и несколько более жестким, чем второй.

15. Очень малой секториальной жесткостью обладают профили, составленные из уголка и швеллера по типу, изображенному в табл. 42 под № 28 и 29.

16. Секториальная жесткость уголковых профилей, как известно, равна нулю. Уголки же с отгибами полок внутрь (№ 30) или наружу (№ 31) обладают секториальной жесткостью, которая по мере увеличения отгибов увеличивается, достигая своего максимума при отгибах внутрь, равных величине полки (№ 4).

Уголок с отгибами концов полок наружу менее жесток, чем уголок с отгибами концов полок внутрь, и при ширине отгибов, равной ширине полки, его жесткость в 4 раза менее жесткости соответствующего уголка с отгибами внутрь (№ 4)<sup>1</sup>.

#### § 44. СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ПРОФИЛЕЙ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ЖЕСТКОСТИ ИХ ПРИ ИЗГИБЕ

По существу, работа профилей на изгиб в достаточной мере исследована, не говоря уже о том, что и само исследование в силу сравнительной простоты вычислительного аппарата по сравнению с исследованием работы тех же профилей на кручение (по крайней мере в настоящее время ввиду новизны вопроса) доступно самым широким кругам лиц, нуждающимся в этом. Тем не менее мы позволили себе привести сравнительную табл. 43 величин главных экваториальных моментов инерции  $J_x$  и  $J_y$  для большинства типов профилей, данных в табл. 42, при тех же соотношениях размеров элементов, составляющих профили, и при том же общем для всех профилей постоянном периметре  $P = 120$  см и толщине  $\delta = 1$  см. Это сделано с той целью, чтобы при совместном рассмотрении обеих таблиц можно было бы представить себе, хотя может быть и не так отчетливо и исчерпывающе, как то было бы желательно, но все же более полно, чем при рассмотрении одной табл. 42 (трактующей только о кручении), поведение соответствующих профилей при совместном действии изгиба и кручения.

Сделаем некоторые выводы из данных табл. 43.

Сравнивая между собой сначала главные моменты инерции различных симметричных профилей *при одной и той же высоте профиля  $h$* , можно установить следующее.

1. Наиболее жестким из рассмотренных симметричных профилей (№ 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17 и 18) является швеллер (№ 4). Например, по сравнению с двутавром (№ 10), имея одинаковый с ним по величине  $J_x$ , он обладает значительно большей величиной  $J_y$ . Несколько особо только нужно отметить профиль, составленный из

<sup>1</sup> Это можно видеть из формул  $J_w$  для обоих типов уголков (полагая в них  $b=a$ ):

Для уголка с отгибами концов полок внутрь имеем:

$$J_w = \frac{a^4 b^3 (4a + 3b)}{6(a^3 + 3a^2 b - 3ab^2 + b^3)}, \quad (A)$$

а для уголка с отгибами концов полок наружу:

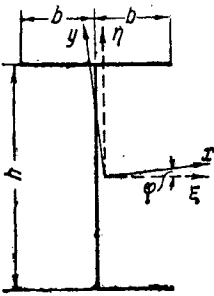
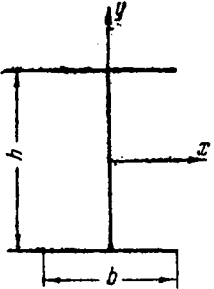
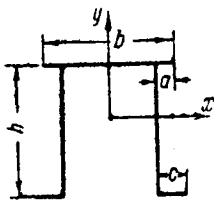
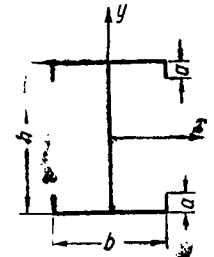
$$J_w = \frac{a^4 b^3 (4a + 3b)}{6(a + b)^3}. \quad (B)$$

Из формулы (B), кроме того, можно усмотреть, что при  $b = a$ ,  $J_w$  для уголка с отгибами наружу максимальное, так как при  $b > a$   $J_w$  начинает убывать.

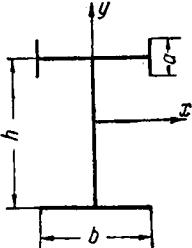
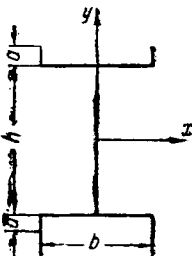
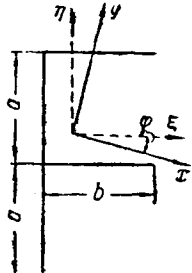
Главные экваториальные моменты инерции (периметр —  $P = 120$  см, толщина —  $\delta = 1$  см)

№ п/п	Тип сечения	Размеры в см	$\varphi$	$J_x$ см <sup>4</sup>	$J_y$ см <sup>4</sup>
1		$b = 32$ $h = 56$	$26^{\circ}35'$	$7,92 \cdot 10^4$	$0,723 \cdot 10^4$
		$b = 30$ $h = 60$	$22^{\circ}30'$	$8,28 \cdot 10^4$	$0,724 \cdot 10^4$
		$b = 40$ $h = 40$	$42^{\circ}37'$	$7,22 \cdot 10^4$	$0,775 \cdot 10^4$
		$b = 20$ $h = 80$	$8^{\circ}45'$	$10,9 \cdot 10^4$	$0,297 \cdot 10^4$
2		$a = 3$ $b = 31$ $h = 52$	$37^{\circ}05'$	$7,96 \cdot 10^4$	$1,83 \cdot 10^4$
		$a = 20$ $b = 20$ $h = 40$	$31^{\circ}15'$	$7,81 \cdot 10^4$	$0,600 \cdot 10^4$
		$a = 20$ $b = 30$ $h = 20$	$-8^{\circ}24'$	$0,670 \cdot 10^4$	$6,88 \cdot 10^4$
		$a = 15$ $b = 15$ $h = 60$	$17^{\circ}00'$	$6,59 \cdot 10^4$	$0,560 \cdot 10^4$
		$a = 10$ $b = 40$ $h = 20$	$-11^{\circ}10'$	$0,540 \cdot 10^4$	$1,11 \cdot 10^4$
3		$a = 10$ $b = 25$ $h = 50$	0	$4,98 \cdot 10^4$	$1,24 \cdot 10^4$
		$a = 7,5$ $b = 35$ $h = 35$	0	$2,86 \cdot 10^4$	$1,52 \cdot 10^4$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 70$	0	$8,80 \cdot 10^4$	$0,633 \cdot 10^4$
4		$b = 32$ $h = 56$	0	$6,47 \cdot 10^4$	$1,31 \cdot 10^4$
		$b = 30$ $h = 60$	0	$7,20 \cdot 10^4$	$1,12 \cdot 10^4$
		$b = 40$ $h = 40$	0	$3,75 \cdot 10^4$	$2,13 \cdot 10^4$
		$b = 20$ $h = 80$	0	$10,7 \cdot 10^4$	$0,400 \cdot 10^4$

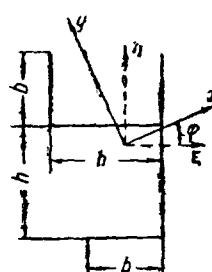
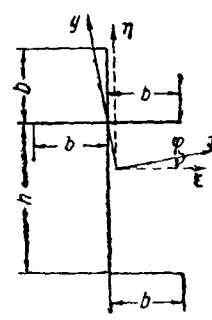
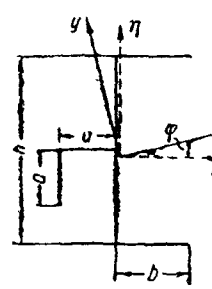
№ п/п	Тип сечения	Размеры в см	$\varphi$	$J_x \text{ см}^4$	$J_y \text{ см}^4$
5		$a = 30$ $b = 30$	$26^\circ 33'$	$4,50 \cdot 10^4$	$1,13 \cdot 10^4$
		$a = 40$ $b = 20$	$14^\circ 02'$	$7,33 \cdot 10^4$	$0,534 \cdot 10^4$
		$a = 20$ $b = 40$	$-28^\circ 10'$	$1,17 \cdot 10^4$	$3,09 \cdot 10^4$
6		$a = 5$ $b = 50$ $h = 35$	0	$1,61 \cdot 10^4$	$3,84 \cdot 10^4$
		$a = 5$ $b = 70$ $h = 25$	0	$0,716 \cdot 10^4$	$7,36 \cdot 10^4$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 50$	0	$3,13 \cdot 10^4$	$0,317 \cdot 10^4$
7		$a = 5$ $b = 20$ $h = 70$	0	$9,17 \cdot 10^4$	$0,633 \cdot 10^4$
		$a = 10$ $b = 25$ $h = 50$	0	$5,98 \cdot 10^4$	$1,24 \cdot 10^4$
		$a = 7,5$ $b = 35$ $h = 35$	0	$3,26 \cdot 10^4$	$1,52 \cdot 10^4$
8		$a = 7,5$ $b = 30$ $h = 60$	0	$7,20 \cdot 10^4$	$0,620 \cdot 10^4$
		$a = 10$ $b = 40$ $h = 40$	0	$3,75 \cdot 10^4$	$1,33 \cdot 10^4$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 80$	0	$10,7 \cdot 10^4$	$0,240 \cdot 10^4$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в см	$\varphi$	$J_x$ см <sup>4</sup>	$J_y$ см <sup>4</sup>
9		$b = 20$ $h = 60$	$6^\circ 26'$	$6,97 \cdot 10^4$	$0,693 \cdot 10^4$
		$b = 26$ $h = 42$	$19^\circ 24'$	$4,13 \cdot 10^4$	$1,35 \cdot 10^4$
		$b = 13$ $h = 81$	$2^\circ 05'$	$10,6 \cdot 10^4$	$0,210 \cdot 10^4$
		$b = 30$ $h = 30$	$-31^\circ 54'$	$1,17 \cdot 10^4$	$3,06 \cdot 10^4$
10		$b = 36$ $h = 48$	0	$5,08 \cdot 10^4$	$0,780 \cdot 10^4$
		$b = 40$ $h = 40$	0	$3,75 \cdot 10^4$	$1,07 \cdot 10^4$
		$b = 30$ $h = 60$	0	$7,20 \cdot 10^4$	$0,450 \cdot 10^4$
		$b = 20$ $h = 80$	0	$10,7 \cdot 10^4$	$0,070 \cdot 10^4$
11		$a = 5$ $c = 5$ $b = 50$ $h = 30$	0	$1,40 \cdot 10^4$	$3,46 \cdot 10^4$
		$a = 5$ $c = 5$ $b = 70$ $h = 20$	0	$0,633 \cdot 10^4$	$6,48 \cdot 10^4$
		$a = 5$ $c = 7,5$ $b = 35$ $h = 35$	0	$2,14 \cdot 10^4$	$0,871 \cdot 10^4$
12		$a = 5$ $b = 30$ $h = 40$	0	$3,55 \cdot 10^4$	$0,900 \cdot 10^4$
		$a = 7,5$ $b = 30$ $h = 30$	0	$1,97 \cdot 10^4$	$1,13 \cdot 10^4$
		$a = 7,5$ $b = 20$ $h = 50$	0	$4,91 \cdot 10^4$	$0,433 \cdot 10^4$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 60$	0	$6,78 \cdot 10^4$	$0,333 \cdot 10^4$
		$a = 12$ $b = 24$ $h = 24$	0	$1,04 \cdot 10^4$	$0,921 \cdot 10^4$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в см	$\varphi$	$J_x \text{ см}^4$	$J_y \text{ см}^4$
13		$a = 5$ $b = 30$ $h = 40$	0	$3,64 \cdot 10^4$	$0,900 \cdot 10^4$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 60$	0	$7,06 \cdot 10^4$	$0,333 \cdot 10^4$
		$a = 7,5$ $b = 20$ $h = 50$	0	$5,17 \cdot 10^4$	$0,433 \cdot 10^4$
		$a = 7,5$ $b = 30$ $h = 30$	0	$2,11 \cdot 10^4$	$1,13 \cdot 10^4$
14		$a = 30$ $b = 42$ $h = 48$	0	$5,00 \cdot 10^4$	$0,842 \cdot 10^4$
		$a = 30$ $b = 50$ $h = 40$	0	$3,60 \cdot 10^4$	$1,27 \cdot 10^4$
		$a = 20$ $b = 40$ $h = 60$	0	$6,91 \cdot 10^4$	$0,600 \cdot 10^4$
		$a = 15$ $b = 25$ $h = 80$	0	$10,5 \cdot 10^4$	$0,158 \cdot 10^4$
		$a = 20$ $b = 52$ $h = 48$	0	$4,58 \cdot 10^4$	$1,24 \cdot 10^4$
15		$a = 5$ $b = 30$ $h = 40$	0	$3,75 \cdot 10^4$	$0,900 \cdot 10^4$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 60$	0	$7,20 \cdot 10^4$	$0,333 \cdot 10^4$
		$a = 7,5$ $b = 20$ $h = 50$	0	$5,43 \cdot 10^4$	$0,433 \cdot 10^4$
		$a = 7,5$ $b = 30$ $h = 30$	0	$2,26 \cdot 10^4$	$1,13 \cdot 10^4$
16		$b = 15$ $c = 39$ $h = 45$	$11^\circ 30'$	$4,40 \cdot 10^4$	$1,01 \cdot 10^4$
		$b = 20$ $c = 30$ $h = 30$	$24^\circ 55'$	$2,40 \cdot 10^4$	$1,49 \cdot 10^4$
		$b = 10$ $c = 30$ $h = 60$	$9^\circ 11'$	$7,06 \cdot 10^4$	$0,710 \cdot 10^4$

№ п/п	Тип сечения	Размеры в см	$\varphi$	$J_x \text{ см}^4$	$J_y \text{ см}^4$
17		$a = 6$ $b = 30$ $h = 48$	0	$5,00 \cdot 10^4$	$0,720 \cdot 10^4$
		$a = 10$ $b = 30$ $h = 40$	0	$3,61 \cdot 10^4$	$0,900 \cdot 10^4$
		$a = 10$ $b = 20$ $h = 60$	0	$6,92 \cdot 10^4$	$0,333 \cdot 10^4$
		$a = 5$ $b = 15$ $h = 80$	0	$10,5 \cdot 10^4$	$0,110 \cdot 10^4$
18		$a = 5$ $b = 30$ $h = 40$	0	$3,95 \cdot 10^4$	$0,900 \cdot 10^4$
		$a = 5$ $b = 20$ $h = 60$	0	$7,52 \cdot 10^4$	$0,333 \cdot 10^4$
		$a = 7,5$ $b = 20$ $h = 50$	0	$6,04 \cdot 10^4$	$0,433 \cdot 10^4$
		$a = 7,5$ $b = 30$ $h = 30$	0	$2,64 \cdot 10^4$	$1,13 \cdot 10^4$
19		$a = 30$ $b = 30$	$13^\circ 17'$	$3,98 \cdot 10^4$	$0,967 \cdot 10^4$
		$a = 20$ $b = 40$	$-31^\circ 45'$	$1,27 \cdot 10^4$	$2,46 \cdot 10^4$
		$a = 40$ $b = 20$	$4^\circ 41'$	$7,44 \cdot 10^4$	$0,356 \cdot 10^4$



№ п/п	Тип сечения	Размеры в см	$\varphi$	$J_x \text{ см}^4$	$J_y \text{ см}^4$
20		$b = 20$ $h = 30$	$24^{\circ}07'$	$3,18 \cdot 10^4$	$1,36 \cdot 10^4$
		$b = 24$ $h = 24$	$10^{\circ}09'$	$2,75 \cdot 10^4$	$1,15 \cdot 10^4$
		$b = 13,3$ $h = 40$	$38^{\circ}19'$	$4,39 \cdot 10^4$	$1,58 \cdot 10^4$
21		$b = 15$ $h = 60$	$3^{\circ}36'$	$7,17 \cdot 10^4$	$0,298 \cdot 10^4$
		$b = 20$ $h = 40$	$10^{\circ}21'$	$2,99 \cdot 10^4$	$1,54 \cdot 10^4$
		$b = 10$ $h = 80$	$1^{\circ}48'$	$10,5 \cdot 10^4$	$0,0890 \cdot 10^4$
22		$a = 10$ $b = 15$ $h = 70$	$-0^{\circ}29'$	$6,57 \cdot 10^4$	$0,350 \cdot 10^4$
		$a = 15$ $b = 30$ $h = 30$	$27^{\circ}31'$	$1,56 \cdot 10^4$	$2,10 \cdot 10^4$

листа и двух швеллеров с выступающими полками наружу (№ 18), у которого  $J_x$  немного больше, чем у швеллера, но зато  $J_y$  значительно меньше.

2. Смещение стенки двутавра, не меняя величины  $J_x$ , увеличивает  $J_y$ , приближая профиль к швеллерному типу (№ 8, 4 и 10).

3. Увеличение одной из полок двутавра за счет укорочения другой уменьшает величину  $J_x$  и увеличивает  $J_y$  (№ 14 и 10).

4. Замена более широкой полки двутавра (№ 14) элементом двутаврового типа (№ 17), оставляя неизменным  $J_x$ , уменьшает  $J_y$ .

5. Замена полок обыкновенного двутавра (№ 10) сложными элементами двутаврового (№ 15) или швеллерного типа (№ 12 и 18) или их комбинацией (№ 13) уменьшает величину  $J_y$  в одном и том же отношении для всех этих типов. Что же касается величины  $J_x$ , то при замене № 10 на № 15 величина  $J_x$  не меняется; при замене на № 18 — увеличивается, а на № 12 — уменьшается по сравнению с обыкновенным двутавром (№ 10) и, наконец, при замене на № 13 (комбинация элементов двутаврового и швеллерного типов) величина  $J_x$  имеет промежуточное значение между  $J_x$  для № 12 и для № 18, оставаясь в то же время несколько меньшей, чем у обыкновенного двутавра.

6. Отгибы концов полок в швеллере (№ 3 и 7) уменьшают величину  $J_y$ , величина же  $J_x$  в швеллере с отгибами наружу (№ 7) больше, а в швеллере с отгибами внутрь (№ 3) меньше, чем в обыкновенном швеллере (№ 4).

Переходим к сравнению несимметричных профилей, как с симметричными профилями, так и между собою, при одной и той же высоте профиля  $h$ :

Здесь приходится при сравнении величин главных моментов инерции еще учитывать и изменение угла наклона  $\varphi$  главных осей по отношению к вспомогательным осям, направление которых совпадает с направлениями элементов профиля. Величина угла  $\varphi$  приводится в этой же табл. 43.

7. Конкурирующим со швеллером является профиль Z-го типа (№ 1), который по сравнению с первым, в зависимости от направления силовых факторов, по отношению к главным осям во многих случаях может оказаться значительно более экономичным.

8. Главные моменты инерции как по отношению к оси  $X$ , так и по отношению к оси  $Y$  в профилях Z-го типа с отгибами полок внутрь (№ 2), при некоторых соотношениях между элементами профиля, могут оказаться больше по сравнению с профилями простого Z-го типа (№ 1) (см. первые строки № 1 и № 2).

9. Профили угловатого типа (№ 9), вообще говоря, занимают промежуточное положение между соответствующими двутаврами и швеллерами. Так как при практических соотношениях элементов профили этого типа имеют сравнительно небольшой угол наклона главных осей  $\varphi$ , то в зависимости от направления действующих силовых факторов они могут конкурировать как со швеллерами, так и с профилями Z-го типа.

10. Одностороннее увеличение полки двутавра за счет уменьшения (не нарушая симметрии относительно стенки) другой полки (№ 16) уменьшает величину  $J_x$  и увеличивает  $J_y$ , поэтому в некоторых случаях применение этого типа сечения по сравнению с двутаврами (№ 10) может оказаться более целесообразным.

11. Профили, представляющие собой соединение швеллера с уголком (№ 21 и 22), по сравнению со швеллером (№ 4) являются явно нецелесообразными: при сравнительно одинаковых  $J_x$  они имеют  $J_y$ , значительно меньшие; при некоторых соотношениях сторон они даже менее выгодны, чем соответствующие двутавры (№ 10).

12. Профили, составленные из двух уголков (№ 5 и 19), будем сравнивать со швеллером (№ 4), который можно также рассматривать как профиль, составленный из двух уголков. Профиль № 19 почти при любых соотношениях элементов является явно нерациональным. Профиль же № 5, будучи менее жестким по сравнению со швеллером относительно оси  $X$ , при некоторых соотношениях элементов является более жестким относительно оси  $Y$ .

13. Профили, состоящие из двух швеллеров по типу № 20, по сравнению с двутавром менее жестки относительно оси  $X$  и несколько жестче относительно главной оси  $Y$ . По сравнению же со швеллером (№ 4) эти профили являются невыгодными.

#### **§ 45. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ О РАЦИОНАЛЬНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ПРОФИЛЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ В УСЛОВИЯХ СОВМЕСТНОГО ДЕЙСТВИЯ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ**

Рассматривая совместно табл. 42 и 43 и принимая во внимание выводы, сделанные при рассмотрении каждой таблицы в отдельности, мы можем сделать некоторые выводы относительно рациональности некоторых типов профилей с точки зрения их работы при совместном действии изгиба и кручения. Как уже указывалось в начале настоящей главы, выводы эти, конечно, нельзя рассматривать как данные инструктивного характера, тем более, что при рассмотрении вопроса мы совершенно не касались ни силовых факторов, ни типа конструкции, в которых будут применяться данные профили и т. д. Вопрос в данном случае сводился, главным образом, к исследованию влияния формы сечения на жесткость профилей как при изгибе, так и при кручении. Тем не менее мы считаем, что при отсутствии в литературе, насколько нам известно, подобного рода исследований эта работа может ориентировать инженера-проектировщика в смысле отдания предпочтения тому или другому типу профилей и дать ему возможность подойти к этому отбору более сознательно; кроме того, он может быть избавлен от многих предварительных прикидок и вычислений, в достаточной степени громоздких и в настоящее время большинству еще неизвестных ввиду новизны теории, предложенной проф. Власовым.

Главное же, по нашему мнению, значение эта работа должна иметь при дальнейших исследованиях в этой области, являясь первым и совершенно необходимым этапом для более глубокого и более всестороннего исследования. Уже сейчас на основе нашего исследования можно наметить те типы сечений, над которыми, безусловно, нужно дальше работать в смысле изучения их работы, а также отвергнуть те из них, которые являются явно нерациональными.

В этом, главным образом, разрезе и будут сделаны ниже выводы относительно работы этих профилей при совместном действии изгиба и кручения.

1. Бесспорно рациональными типами сечений следует признать профили  $Z$ -образный и швеллер. Обладая по сравнению с двутавром при

одной и той же высоте профиля приблизительно одинаковыми жесткостями на изгиб относительно главной оси  $X$ , они значительно жестче при изгибе их в плоскости  $Y$  и при стесненном кручении. Поэтому применение этих профилей, например для прогонов под кровли, где влияние изгиба относительно оси  $Y$  и влияние кручения являются значительными, явно целесообразно. Что же касается области применения  $Z$ -ых профилей или швеллеров, то она, очевидно, определится диапазоном изменения углов наклона и положением по отношению к центру изгиба профиля линии действия силы.

2. В профилях швеллерного типа при значительном влиянии кручения отгиб концов полок швеллера внутрь может оказаться очень целесообразным, но при этом следует иметь в виду, что значительное увеличение жесткости профиля на кручение достигается здесь ценой некоторого уменьшения жесткости его на изгиб.

В профилях же  $Z$ -го типа отгиб концов полок внутрь профиля подобной эффективности дать не может.

3. Профили угловатого типа как в отношении жесткости на кручение, так и в отношении жесткости их на изгиб являются промежуточными между соответствующими профилями двутаврового и швеллерного типа. Обладая, кроме того, значительными конструктивными преимуществами в применении их для прогонов под кровли (удобство прикрепления к поясу фермы, значительная ширина верхней полки для укладки плиток кровли) при малых углах наклона последней, они являются безусловно рациональными профилями.

4. Явно нерациональны с точки зрения затраты материала для прогонов под кровли профили, представляющие соединение швеллера с уголком (№ 28 и 29 из табл. 42 и № 21 и 22 из табл. 43). По сравнению с другими рассмотренными типами профилей они значительно менее жестки как в отношении сопротивляемости их стесненному кручению, так и изгибу.

5. Применение несимметричных двутавров с разными полками (№ 21 из табл. 42 и № 14 из табл. 43), со смещенной стенкой (№ 15 из табл. 42 и № 8 из табл. 43) или с одной увеличенной полкой (№ 23 из табл. 42 и № 16 из табл. 43), а также комбинирование этих приемов образования профиля могут в зависимости от соотношения компонентов внешней нагрузки дать довольно рациональное сечение, тем более, что сравнительная простота самой формы этого профиля позволяет самым разнообразным образом комбинировать его элементы.

6. Довольно целесообразным профилем в условиях работы на совместное действие изгиба и кручения может оказаться профиль, составленный из двух уголков по типу № 12 из табл. 42 и № 5 из табл. 43. Обладая сравнительно большой секториальной жесткостью, он в то же время является довольно жестким и при работе его на изгиб.

По сравнению с другими подобными из рассмотренных нами типов профилей, составленными из уголков или швеллеров, этот тип профиля является, безусловно, наиболее рациональным.

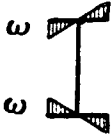
Замена полок обыкновенного двутавра сложными элементами двутаврового или швеллерного типа при любых комбинациях последних (см. № 12, 13, 14, 15, 17 и 18, табл. 43) уменьшает секториальную жесткость его и жесткость относительно оси  $Y$ . Что же касается жесткости таких профилей относительно оси  $X$ , то она также меньше, чем

у обыкновенного двутавра, за исключением профиля, составленного из листа и двух швеллеров с полками, отогнутыми наружу (№ 18 из табл 43), для которого величина  $J_x$  несколько больше, чем для обыкновенного двутавра.

Заканчивая этот анализ различных типов профилей в отношении работы их на стесненное кручение и на совместное действие изгиба и кручения, мы, как было сказано выше, ни в каком случае не склонны считать его исчерпывающим. На это исследование следует смотреть лишь как на первую попытку перейти из области только расчета в область проектирования элементов металлических конструкций с учетом кручения.

Нам кажется, что оно облегчит и будет способствовать более правильному направлению дальнейшей работы в этой области, а также более правильно направит мысли тех проектировщиков, которые будут пользоваться ею при проектировании. В дальнейшем же мы ставим своей задачей перейти уже к определенным элементам конструкций и выявить рациональные формы последних с учетом всех факторов расчетного, конструктивного и производственного порядков.

---



Дополнительные геометрические характеристики для сортамента двутавров по ОСТ 2451

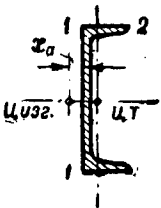
№ профилей	Секториальный момент инерции $J_{\omega}$ в $см^6$	Секториальная площадь для крайней точки профиля $\omega_{max}$ в $см^2$	Секториальный момент сопротивления $W_{\omega}$ в $см^4$	Момент инерции при чистом кручении $J_d$ в $см^4$	Упругая изгибно-крутильная характеристика $k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_{\omega}}}$ в $см^{-1}$
1	2	3	4	5	6
10	644,28	15,246	42,259	2,873	0,04122
12	1 353,2	20,098	67,330	4,243	0,03457
14	2 560,0	25,540	100,23	5,911	0,02966
16	4 879,0	32,248	151,30	8,406	0,02562
18	8 219,3	38,902	211,28	11,37	0,02295
20	a 13 121 b 13 857	46,150 47,053	284,31 294,50	14,81 17,85	0,02074 0,02215
22	a 22 773 b 23 930	55,908 56,902	407,33 420,55	20,32 24,08	0,01844 0,01958
24	a 33 799 b 35 426	64,484 65,573	524,15 540,25	25,57 30,12	0,01698 0,01800
27	a 52 987 b 55 414	76,683 77,915	690,99 711,21	31,93 37,60	0,01515 0,01608
30	a 76 704 b 80 114 c 83 612	88,376 89,754 91,130	867,93 892,60 917,50	38,83 45,78 55,23	0,01389 0,01475 0,01587
33	a 107 160 b 111 780 c 116 520	100,69 102,21 103,73	1 064,3 1 093,6 1 123,3	46,19 54,49 65,74	0,01281 0,01363 0,01466
36	a 154 820 b 161 210 c 167 760	115,19 116,85 118,51	1 344,0 1 379,6 1 415,6	56,85 66,72 79,99	0,01183 0,01256 0,01348
40	a 228 900 b 237 950 c 247 210	134,13 136,00 137,85	1 706,6 1 749,6 1 793,3	68,75 80,68 96,55	0,01070 0,01137 0,01220

№ профилей	Секториальный момент инерции $J_{\omega}$ в $см^6$	Секториальная площадь для крайней точки профиля $\omega_{\max}$ в $см^2$	Секториальный момент со- противления $W_{\omega}$ в $см^4$	Момент инерции при чистом кручении $J_d$ в $см^4$	Упругая изгибно-кру- тильная характеристика $k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_{\omega}}}$ в $см^{-1}$	
						1
45	a	376 680	159,75	2 357,6	95,31	0,009819
	b	390 770	161,86	2 414,4	111,3	0,01041
	c	405 220	163,96	2 471,5	131,8	0,01113
50	a	611 990	187,10	3 270,9	131,2	0,009038
	b	633 900	189,44	3 346,2	150,3	0,009504
	c	656 270	191,79	3 421,8	174,9	0,01007
55	a	906 350	216,79	4 180,8	159,9	0,008198
	b	937 220	219,36	4 272,5	182,7	0,008617
	c	968 720	221,94	4 364,8	211,5	0,009119
60	a	1 349 900	251,22	5 373,4	195,5	0,007427
	b	1 393 200	254,04	5 484,2	221,9	0,007790
	c	1 437 300	256,86	5 595,7	255,3	0,008226

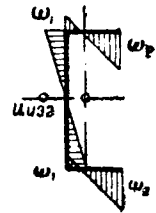
Примечание. При вычислении  $k$  приняты  $G = 800\,000$  кг/см<sup>2</sup>;

$E = 2\,100\,000$  кг/см<sup>2</sup>.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2



Дополнительные геометрические  
характеристики для сортамента  
швеллеров по ОСТ 2452



№ профилей	Координата центра изгиба $x_a$ в $см$	Секториальный момент инерции $J_{\omega}$ в $см^6$	Секториальные площади		Секториальные моменты сопротивления		Момент инерции при чистом кру- чении $J_d$ в $см^4$	Упругая изгибно-кру- тильная характеристика $k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_{\omega}}}$ в $см^{-1}$
			$\omega_1$ в $см^2$	$\omega_2$ в $см^2$	$W_{\omega_1}$ в $см^4$	$W_{\omega_2}$ в $см^4$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	1,081	24,907	2,7018	4,2602	9,2187	5,8464	1,350	0,1437
6,5	1,146	64,879	3,8628	6,3557	16,796	10,208	1,497	0,09375
8	1,218	141,83	5,1453	8,7526	27,565	16,204	1,940	0,07219
10	1,344	354,78	7,1894	12,709	49,348	27,916	2,727	0,05411
12	1,482	768,26	9,5427	17,308	80,508	44,388	3,634	0,04245

№ профилей	Координата центра изгиба $x_a$ в см	Секториальный момент инерции $J_\omega$ в см <sup>6</sup>	Секториальные площади		Секториальные моменты сопротивления		Момент инерции при чистом кручении $J_d$ в см <sup>4</sup>	Упругая изгибно-крутильная характеристика $k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$ в см <sup>-1</sup>
			$\omega_1$ в см <sup>2</sup>	$\omega_2$ в см <sup>2</sup>	$W_{\omega_1}$ в см <sup>4</sup>	$W_{\omega_2}$ в см <sup>4</sup>		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
14 a	1,581	1 512,5	12,029	22,626	125,74	66,848	4,815	0,03483
14 b	1,392	1 711,2	11,460	23,850	149,32	71,748	6,248	0,03730
16 a	1,678	2 759,8	14,740	28,630	187,23	96,395	6,306	0,02950
16 b	1,482	3 099,4	14,033	30,092	220,87	103,00	8,227	0,03180
18 a	1,834	4 744,7	17,677	35,318	268,41	134,34	8,128	0,02555
18 b	1,572	5 292,4	16,828	37,022	314,50	142,95	10,50	0,02749
20 a	1,868	7 773,0	20,829	42,702	373,18	182,03	10,33	0,02250
20 b	1,662	8 616,3	19,845	44,640	434,18	193,02	13,30	0,02425
22 a	1,926	11 819	23,846	50,148	495,64	235,68	12,83	0,02034
22 b	1,717	13 038	22,730	52,318	573,60	249,21	16,46	0,02193
24 a	2,127	15 183	27,515	55,448	551,81	273,82	12,69	0,01784
24 b	1,948	16 873	26,629	57,473	633,63	293,58	15,59	0,01876
24 c	1,737	18 541	25,383	59,872	730,45	309,68	20,00	0,02027
27 a	2,213	24 075	32,518	66,073	740,36	364,37	15,56	0,01569
27 b	1,980	26 676	30,831	69,069	865,23	386,22	19,23	0,01657
27 c	1,765	29 195	29,372	71,830	993,97	406,45	24,72	0,01796
30 a	2,258	36 645	37,208	76,538	984,87	478,78	20,39	0,01456
30 b	2,028	40 436	35,229	79,975	1 147,8	505,61	25,01	0,01535
30 c	1,802	44 104	33,590	83,063	1 313,0	530,97	31,75	0,01656
23 a	2,253	52 630	41,387	88,539	1 271,7	594,43	24,29	0,01326
23 b	2,017	57 844	39,265	92,265	1 473,2	626,93	29,92	0,01404
23 c	1,800	62 890	37,439	95,689	1 679,8	657,23	38,04	0,01518
36 a	2,465	92 189	49,504	104,55	1 862,2	881,77	38,91	0,01268
36 b	2,235	100 430	47,296	108,51	2 123,4	925,54	46,56	0,01329
36 c	2,021	108 420	45,360	112,18	2 390,2	966,48	57,18	0,01417
40 a	2,430	148 100	55,779	121,67	2 655,1	1 217,2	59,74	0,01240
40 b	2,210	160 100	53,514	125,86	2 991,7	1 272,1	70,78	0,01298
40 c	2,004	171 870	51,513	129,80	3 336,4	1 324,0	85,72	0,01378

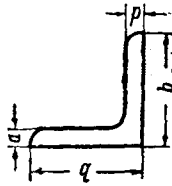
Примечания: 1. При вычислении  $k$  приняты  $G = 800\,000$  кг/см<sup>2</sup>;  
 $E = 2\,100\,000$  кг/см<sup>2</sup>.

2. Координата центра изгиба  $x_a$  отсчитывается от наружного края стенки.



УГОЛКИ РАВНОБОКИЕ

ОСТ 14 (1932 г.)

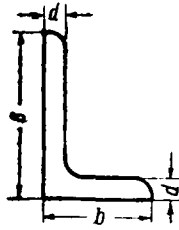


Моменты инерции при чистом кручении

$b$ в мм	$d$ в мм	$J_d$ в см <sup>4</sup>	$b$ в мм	$d$ в мм	$J_d$ в см <sup>4</sup>	$b$ в мм	$d$ в мм	$J_d$ в см <sup>4</sup>	
20	3	0,03330	65	6	0,8928	120	10	7,667	
	4	0,07680		8	2,082		12	13,13	
25	3	0,04230		10	4,000		14	20,67	
	4	0,09813		75	6		1,037	130	16
30	4	0,1195			8	2,423	10		8,333
	5	0,2292			10	4,667	12		14,28
35	4	0,1408	12		7,949	14	22,49		
	5	0,2708	80	8	2,594	150	16	33,31	
40	4	0,1621		10	5,000		12	16,59	
	5	0,3125		90	8		2,935	14	26,15
	6	0,5328			10		5,667	16	38,78
45	4	0,1835	12		9,677	18	54,82		
	5	0,3542	14	15,18	20	74,67			
	6	0,6048	100	8	3,277	180	14	31,64	
50	5	0,3958					16	46,97	
	6	0,6768				200	10	6,333	16
60	5	0,4792					12	10,83	18
	6	0,8208	14	17,01	20		101,3		
	8	1,911	16	25,12	24		173,2		

УГОЛКИ НЕРАВНОБОКИЕ

ОСТ 15 (1932 г.)



Моменты инерции при чистом кручении

$B$ в мм	$b$ в мм	$d$ в мм	$J_d$ в см <sup>4</sup>	$B$ в мм	$b$ в мм	$d$ в мм	$J_d$ в см <sup>4</sup>
30	20	3	0,04230	100	75	8	2,850
		4	0,09813			10	5,500
						12	9,389
45	30	4	0,1515	120	80	8	3,277
		6	0,4968			10	6,333
						12	10,83
60	40	5	0,3958	130	90	8	3,618
		6	0,6768			10	7,000
		8	1,570			12	11,98
		14	18,84				
75	50	5	0,5000	150	100	10	8,000
		6	0,8568			12	13,71
		8	1,997			14	21,58
		10	3,833			16	31,95
80	55	6	0,9288	180	120	12	16,59
		8	2,167			14	26,15
		10	4,167			16	38,78
90	60	6	1,037	200	120	12	17,74
		8	2,423			14	27,98
		10	4,667			16	41,51

УГОЛКИ РАВНОБОКИЕ

ОСТ 14 (1932 г.)

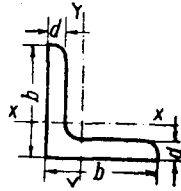


Таблица центробежных моментов инерции

$b$ в мм	$d$ в мм	$J_{xy}$ в см <sup>4</sup>	$b$ в мм	$d$ в мм	$J_{xy}$ в см <sup>4</sup>	$b$ в мм	$d$ в мм	$J_{xy}$ в см <sup>4</sup>
20	3	— 0,23	60	5	— 11,5	120	10	— 187
	4	— 0,29		6	— 13,5		12	— 219
				8	— 17,2		14	— 248
25	3	— 0,48	65	6	— 17,4		16	— 275
	4	— 0,61		8	— 22,2			
				10	— 26,6			
30	4	— 1,08	75	6	— 26,6	130	10	— 240
	5	— 1,27		8	— 34,8		12	— 282
		10		— 41,8	14		— 321	
35	4	— 1,75			12	— 48,7		16
	5	— 2,10						
40	4	— 2,66	80	8	— 42,7	150	12	— 441
	5	— 3,21		10	— 51,6		14	— 501
	6	— 3,69					16	— 561
45			90	8	— 62,0		18	— 619
	4	— 3,90		10	— 76,0	20	— 676	
	5	— 4,70						
	6	— 5,51				14	— 890	
50			100	12	— 98,0	180	16	— 1001
	5	— 6,60		8	— 86,0		16	— 1400
	6	— 7,60		10	— 105		18	— 1546
				12	— 122		20	— 1692
				14	— 138	24	— 1964	
				16	— 151			

УГОЛКИ НЕРАВНОБОКИЕ

ОСТ 15 (1932 г.)

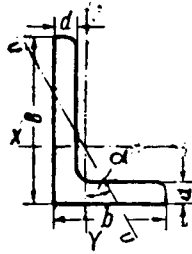


Таблица центробежных моментов инерции

$B$ в мм	$b$ в мм	$d$ в мм	$J_{xy}$ в см <sup>4</sup>	$\alpha$	$B$ в мм	$b$ в мм	$d$ в мм	$J_{xy}$ в см <sup>4</sup>	$\alpha$		
30	20	3	-0,4325	23° 16'	100	75	8	-54,81	28° 43'		
		4	-0,5397	22° 53'			10	-65,49	28° 35'		
45	30	4	-1,991	23° 22'			120	80	8	-79,51	23° 39'
		6	-2,730	22° 56'					10	-96,61	23° 34'
60	40	5	-5,952	23° 22'					130	90	12
		6	-6,910	23° 16'			8	-108,3			25° 13'
		8	-8,548	22° 47'	10	-131,7	25° 08'				
75	50	5	-12,02	23° 29'	150	100	12	-153,6			25° 02'
		6	-14,11	23° 28'			14	-174,5	24° 53'		
		8	-17,71	23° 10'			10	-193,7	23° 42'		
		10	-21,06	22° 56'				12	-226,8	23° 36'	
80	55	6	-18,21	24° 48'				180	120	14	-257,6
		8	-23,18	24° 37'	16	-285,9	23° 16'				
		10	-27,49	24° 20'	12	-403,1	23° 45'				
90	60	6	-25,06	23° 36'		200	120			14	-460,7
		8	-31,98	23° 25'				16	-515,9	23° 34'	
		10	-38,50	23° 13'	12			-469,1	20° 00'		
14	-536,2	19° 54'									
	16	-599,7	19° 48'								

ГРАФИК ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПОРНЫХ ИЗГИБНО-КРУТЯЩИХ БИМОМЕНТОВ

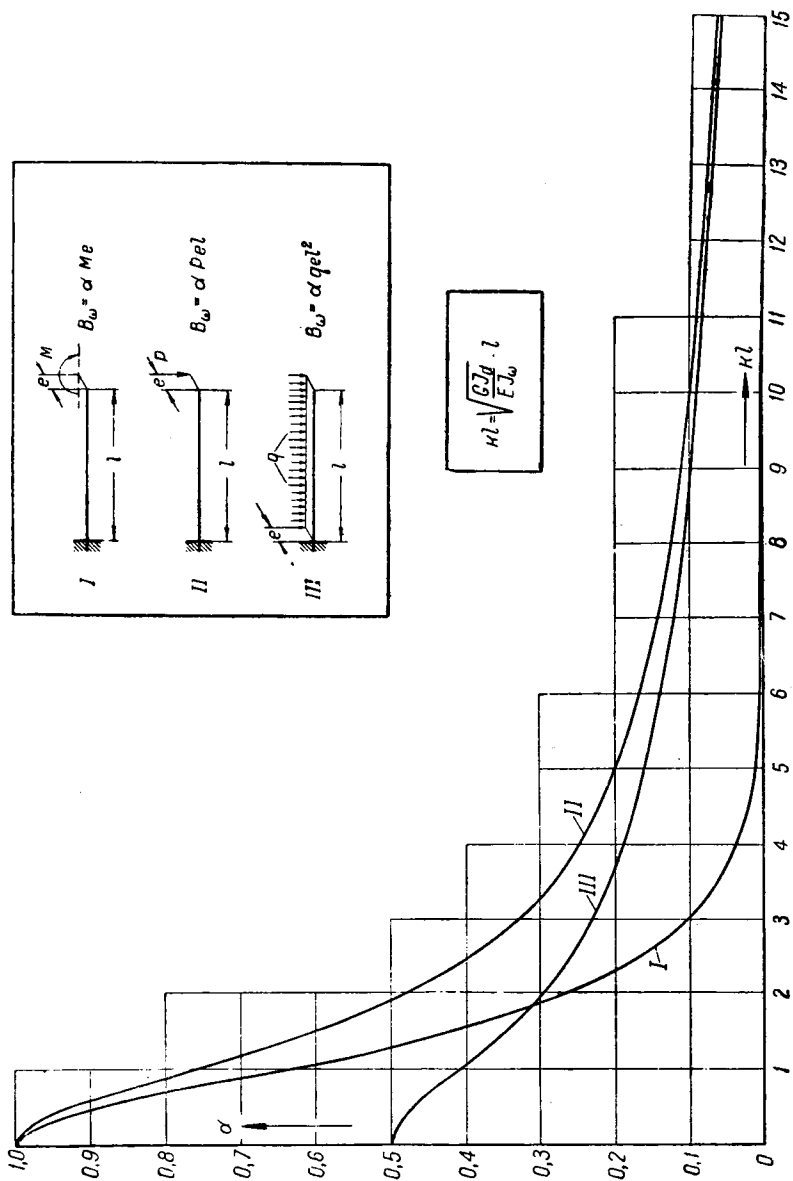


ГРАФИК ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПОРНЫХ ИЗГИБНО-КРУТЯЩИХ  
БИМОМЕНТОВ

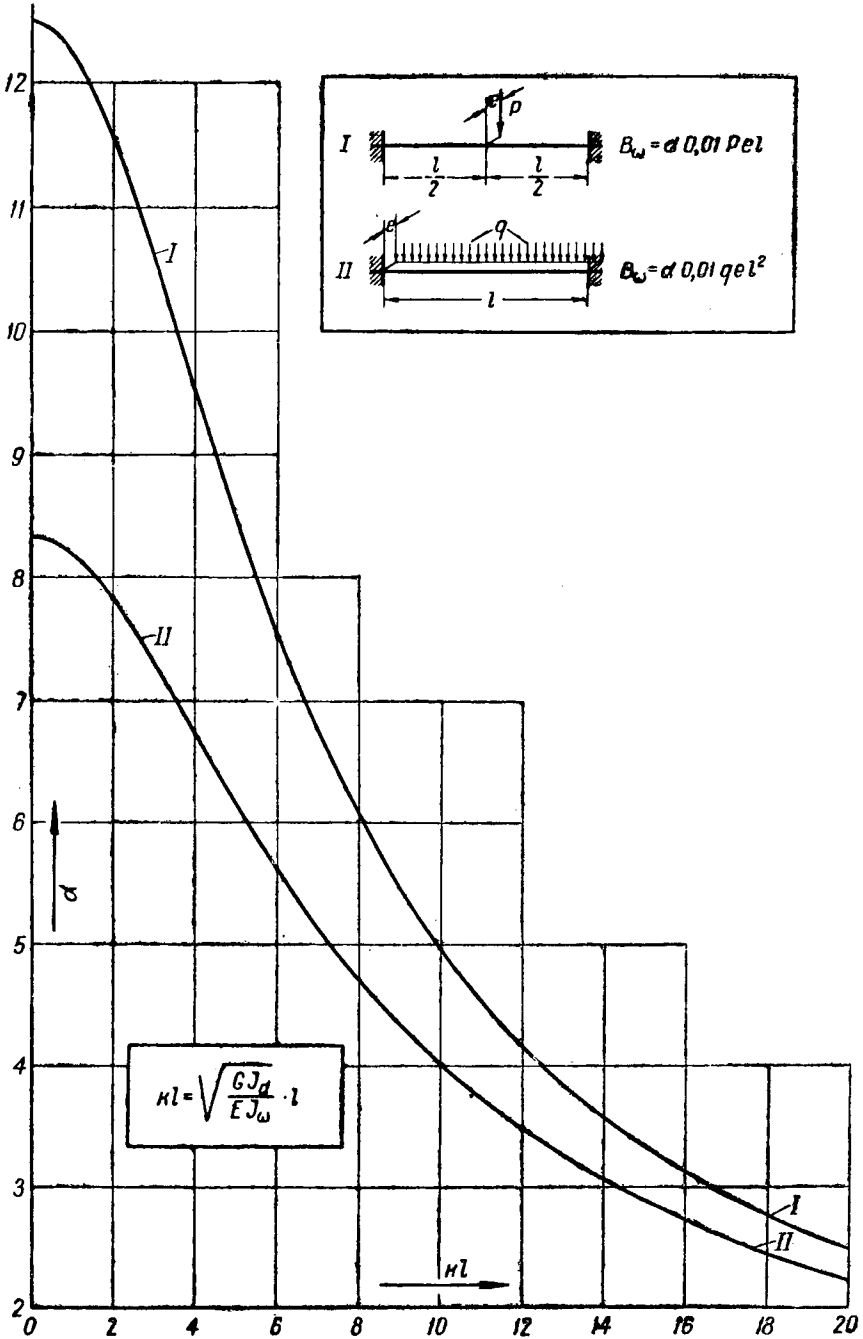


ГРАФИК ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПОРНЫХ ИЗГИБНО-КРУТЯЩИХ БИМОМЕНТОВ

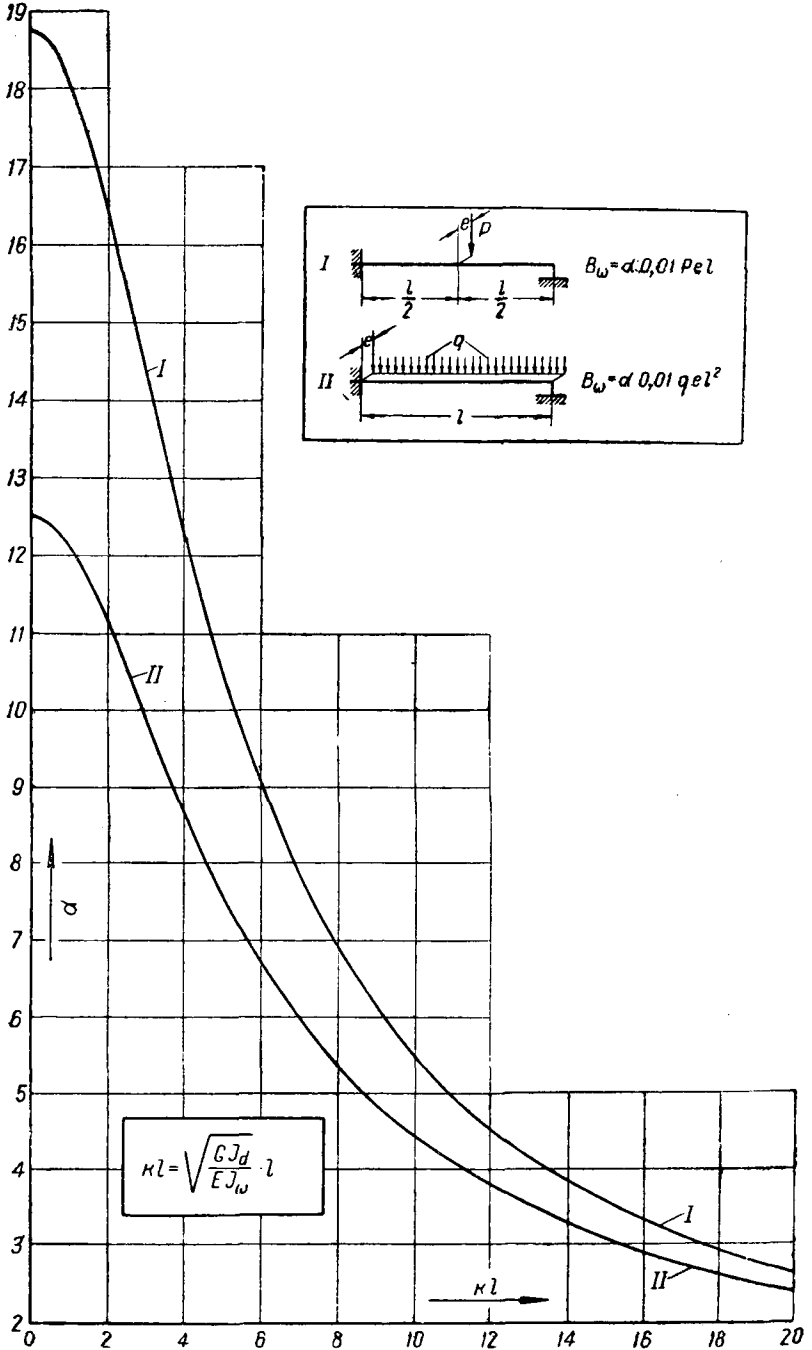
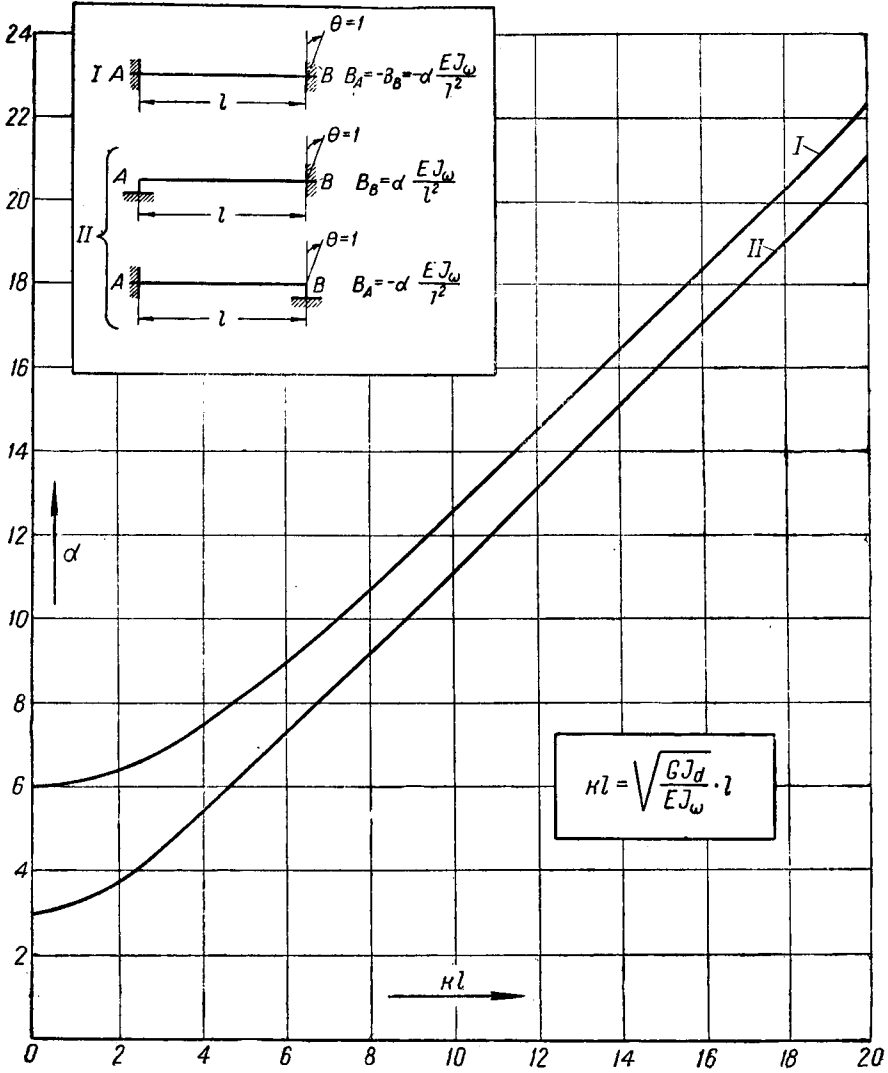
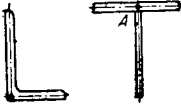
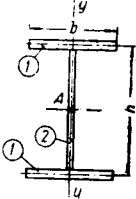
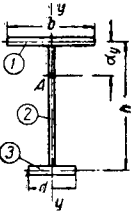
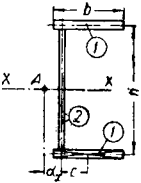
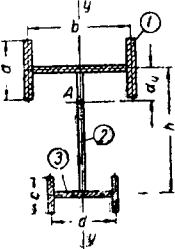


ГРАФИК ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПОРНЫХ ИЗГИБНО-КРУТЯЩИХ  
БИМОМЕНТОВ





ФОРМУЛЫ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ИЗГИБА И СЕКТОРИАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ НЕКОТОРЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ

№ п/п	Сечение	Координата центра изгиба	Секториальный момент инерции $J_{\omega}$
1		Центр изгиба находится в пересечении осей профиля	0
2		$\alpha_y = 0$	$\frac{J_{1y}h^2}{2}$
3		$\alpha_y = \frac{J_{3y}h}{J_y}$	$\frac{J_{1y}J_{3y}h^2}{J_y}$
4		$\alpha_x = \frac{2J_{1x}c}{J_x}$	$\frac{2J_{1x}J_{2x}c^2}{J_x} + \frac{J_{1x}b^2}{6}$
5		$\alpha_y = \frac{J_{3y}h}{J_y}$	$J_{1\omega} + J_{3\omega} + \frac{J_{1y}J_{3y}h^2}{J_y}$

№ п/п	Сечение	Координата центра изгиба	Секториальный момент инерции $J_{\omega}$
6		$\alpha_y = \frac{J_{3y}h}{J_y}$	$J_{1\omega} + J_{3\omega} + \frac{J_{1y}J_{3y}h^2}{J_y}$
7		$\alpha_y = \frac{J_{1y}h}{J_y}$	$J_{1\omega} + J_{2\omega} + \frac{J_{1y}J_{2y}h^2}{J_y}$
8		$\alpha_y = 0$	$\frac{J_y h^2}{4}$
9		$\alpha_y = \frac{2J_{3y}h}{J_y}$	$\frac{4J_{1y}J_{3y}h^2}{J_y}$
10		$\alpha_x = \frac{J_{1xy}h}{J_x}$	$J_y \frac{h^2}{4} - \frac{J_{1xy}^2 h^2}{J_x}$

№ п/п	Сечение	Координата центра изгиба	Секториальный момент инерции $J_{\omega}$
11		$\alpha_y = \frac{J_{1y}h + J_{2y}c}{J_y}$	$J_{1\omega} + J_{2\omega} + \frac{J_{1y}J_{2y}a^2 + J_{1y}J_{3y}h^2 + J_{2y}J_{3y}c^2}{J_y}$
12		$\alpha_y = \frac{J_{2y}a + J_{3y}h}{J_y}$	$J_{1\omega} + J_{2\omega} + J_{3\omega} + \frac{J_{1y}J_{2y}a^2 + J_{1y}J_{3y}h^2 + J_{2y}J_{3y}c^2}{J_y}$
13		$\alpha_x = \frac{(2F_1cf - J_{1x})2a}{J_x}$	$2J_{1\omega} + 2J_{1x}a^2 + 2J_{1x}(a + \alpha_x)^2 + J_{2x}\alpha_x^2 + 8F_1fa[f a - (a + \alpha_x)c]$

Принятые в таблице обозначения

- A — центр изгиба профиля;
- $D_1, D_2, D_3$  — центры изгиба отдельных элементов профиля;
- ①, ②, ③ — номера элементов, составляющих профиль;
- $J_x, J_y$  — экваториальные моменты инерции всего сечения относительно указанных на чертеже осей;
- $J_{1x}, J_{2x}, J_{1y}, J_{2y}, J_{3y}, J_{1xy}, J_{1y}$  — экваториальные моменты инерции отдельных элементов профиля относительно указанных на чертеже осей: первый индекс — номер элемента, второй индекс — ось;
- $J_{1\omega}, J_{2\omega}, J_{3\omega}$  — секториальные моменты инерции отдельных элементов относительно собственных центров изгиба.

ГРАФИК ДЛЯ РАСЧЕТА СВАРНЫХ ДВУТАВРОВ НА СОВМЕСТНОЕ  
ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

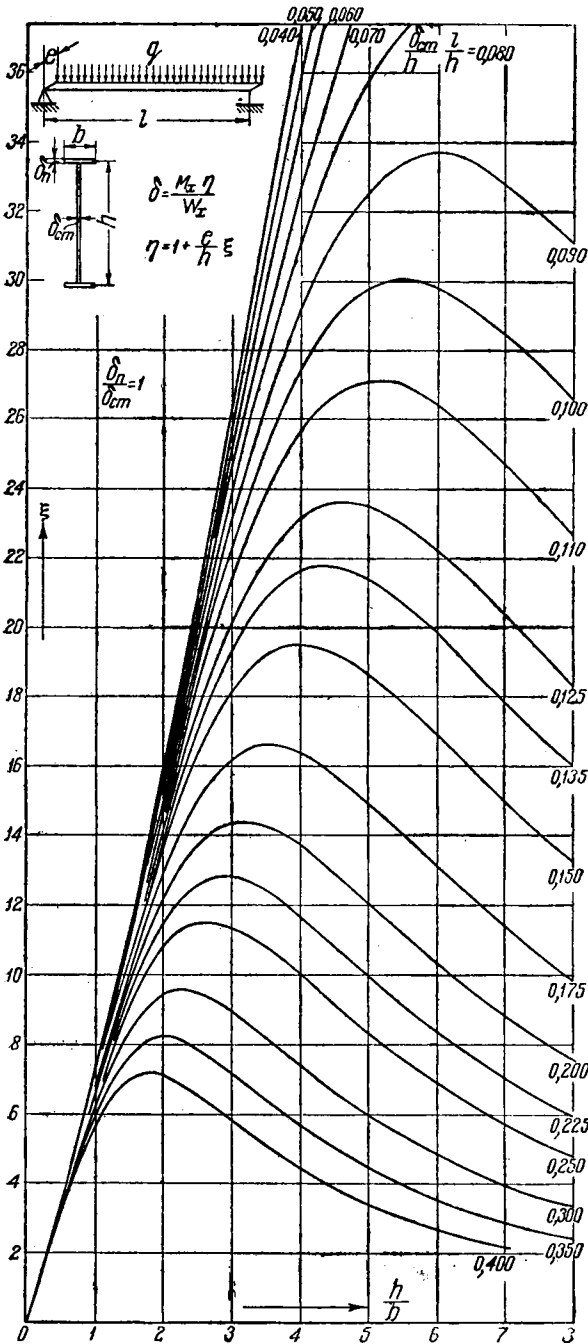


ГРАФИК ДЛЯ РАСЧЕТА СВАРНЫХ ДВУТАВРОВ НА СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

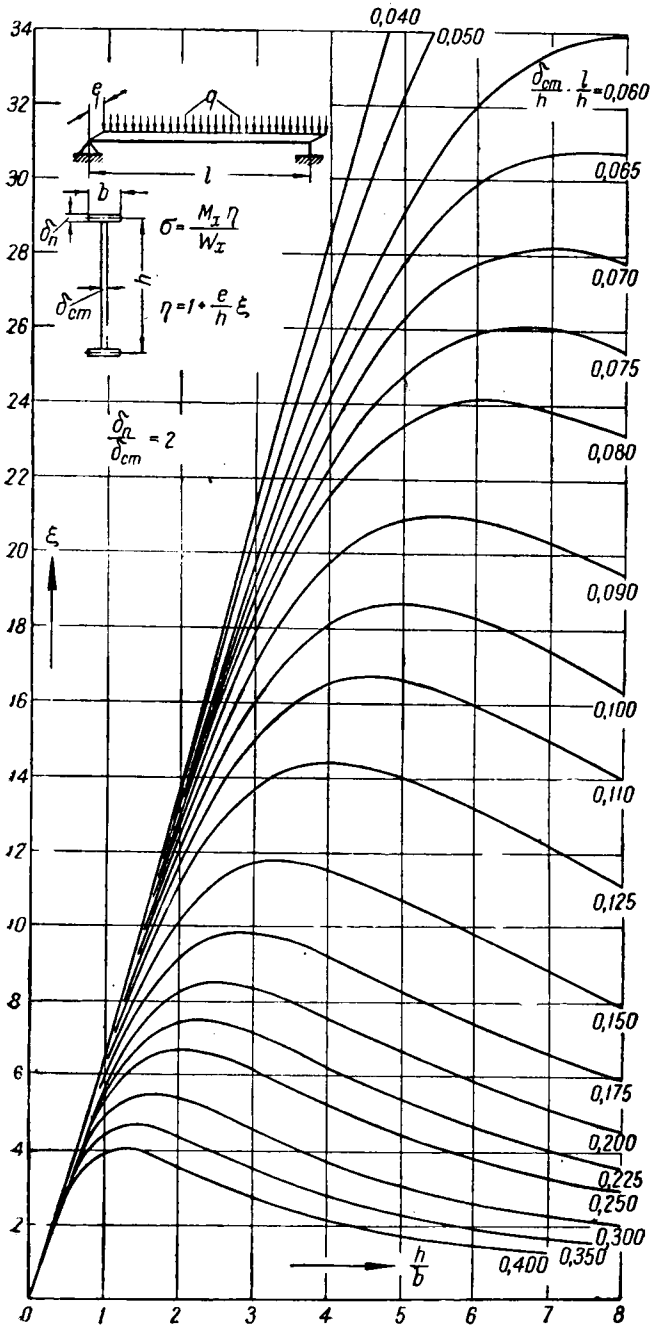


ГРАФИК ДЛЯ РАСЧЕТА СВАРНЫХ ДВУТАВРОВ НА СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

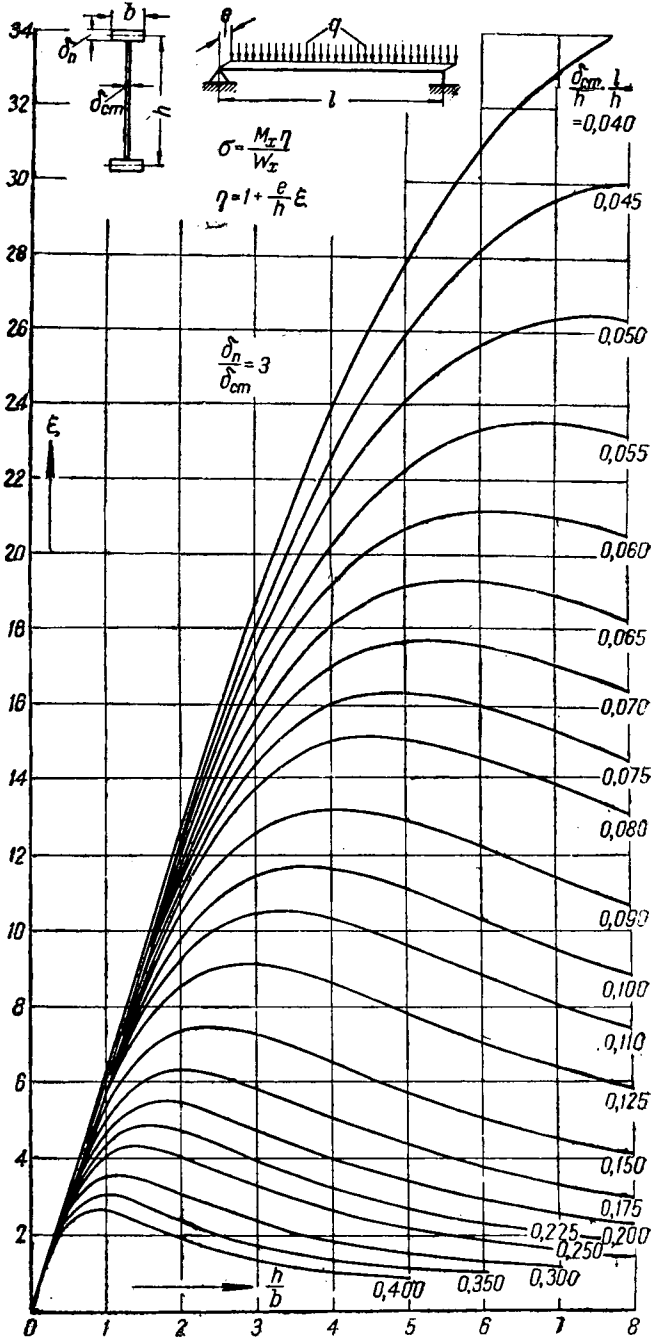
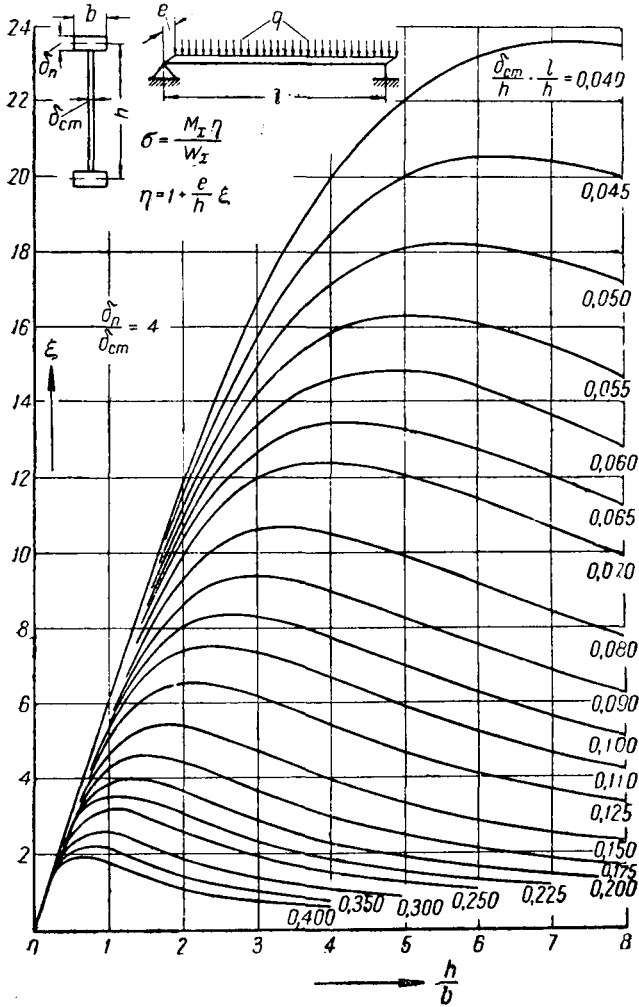


ГРАФИК ДЛЯ РАСЧЕТА СВАРНЫХ ДВУТАВРОВ НА СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ



## ЛИТЕРАТУРА

1. Coulomb C. A., Histoire de l'Académie, 1784, Paris 1787, p. 229—269.
2. Navier, Résumé des leçons sur l'applications de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines, Paris 1864.
3. B. de Saint-Venant, De la torsion des prismes avec des considérations sur leur flexion, Mém. des Savants étrangers, t. 14, 1855.
4. Prandtl L., Zur Torsion von prismatischen Stäben, „Physik. Z.“, Bd IV, 758—759, 1903.
5. Bach-Baumann, Elastizität und Festigkeit, Berlin 1924, S. 369—381, 268—271.
6. Bredt R., Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität, VDI, V. 40, 1896.
7. Griffith A. A. and Taylor G. L., „Engineering“, V. 104, 1917, стр. 652, Proc. Inst. Mech. Eng., 1917, стр. 755. Technical Rept. Advis. Comm. Aeronautics, V. 3, 1917—1918, стр. 920, 938 и 950.
8. Piccard L. et Baes L., Comptes Rendues du II Congrès Internationale de Mécanique Appliquée, Zürich 1926, p. 195.
9. Piccard L. et Jonner, Stodola's Festschrift, 1929, S. 48<sup>o</sup>.
10. Quest H., „Ing. Archiv“, Bd IV, 1933, S. 510.
11. Блох В. И., Доклад Конференции по оптическому методу, Ленинград 1936.
12. Thiel A., „Ing. Archiv“, Bd VI, 1934, S. 417.
13. Föppel A., Sitzungsberichte d. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 1920, S. 261, 1921, S. 295—313.
- Фепплъ А. и Фепплъ Л., Сила и деформация, т. II, 1936.
14. Weber C., Die Lehre von der Drehungsfestigkeit, Forschungsarbeit, H. 249, Berlin 1921.
15. Trayer G. W. and March H. W., The torsion of members having sections common in aircraft construction. Technical report of The Advisory Committee for Aeronautics, № 334, 1930.
16. Inge Lyse and Bruce G. Johnston, Structural Beams in Torsion, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, v. 61, № 4, p. 1, April 1935, p. 469—508.
17. Seely F., Putnam W. and Schwalbe W., The torsional effect of transverse bending loads on channel beams, University of Illinois, Engineering Experiment Station, „Bulletin“ № 211, 1930.
18. Блейх Ф., Теория и расчет железных мостов, 1931. Блейх Ф., Стальные сооружения, т. 1, 1938.
19. Bleich F. and Bleich H., Biegung, Drillung und Knickung von Stäben aus dünnen Wänden, Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Zweiter Kongress, Berlin-München 1936, Vorbericht, S. 885—908.
20. Уманский А. А., Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций, 1939.
21. Тимошенко С. П., Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки, „Изв. СПб Политехнического института“, т. 4—5, 1905—1906. „Zeitschrift für Mathematik und Physik“, Bd 58, 1910, S. 361, Об устойчивости упругих систем „Известия КПИ“, 1910. Proceedings of the London Mathematical Soc., 1921, ser. 2, V. 20, p. 389. Теория упругости, 1934.
22. Sonntag, Biegung, Shub und Scherung, Berlin 1909.
23. Eggen-schwuler A., SBZ, Bd 76, № 23, 1920, S. 166. SBZ, Bd 83, 1924, „Bauingenieur“, № 1 и № 2, 1922. „Eisenbau“, Bd 12, 1921, S. 207. Proceedings of the Sec. International Congress for Applied Mechanics, 1927, p. 414.



24. Zimmermann, „Bauingenieur“, 1921.
25. Maillart R., SBZ, № 2, 1921, p. 18—19. SBZ, № 18, 1921, p. 195—197. SBZ, № 20, 1922, p. 254—257. SBZ, Bd. 83, 1924, p. 111—176.
26. Галеркин Б. Г., Сборник Ленинградского института инженеров путей сообщения, 1927.
27. Лейбензон Л. С., „Технические заметки ЦАГИ“, № 45; „Труды ЦАГИ“ вып. 8, 1924, „Известия АН СССР“, 1935.
28. Weber C., Biegung und Schub in geraden Balken, ZaMM, 1924, S. 331. Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt, „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik“, Bd 6, 1926 или русский перевод: см. сборник „Прочность и устойчивость тонкостенных конструкций“ под ред. Уманского А. А. и Знаменского П. М., изд. ЦАГИ, 1937.
29. Huber K., Die Spannungen im gebogenen T-Balken, Festschrift A. Föppl, 1924. Der Einfluss einer Einspannung beim I-Träger auf den Widerstand gegen Verdrehen, „Bauingenieur“, 1925, S. 182.
30. Wagner H., Verdrehung und Knickung von offenen Profilen. Festschrift 25-Jahre T. N. Danzig, Verlag Kaffermann, Danzig 1929.
31. Ostenfeld A., Mittl. der Lab. für Baustatik der Techn. Hochschule in Kopenhagen, № 5 und № 6, Kopenhagen 1931 u. 1932.
32. Wagner H. und Pretschner W., Verdrehung und Knickung von offenen Profilen, „Luftfahrtforschung“, Bd II, № 6, 1934, S. 174—180.
33. Знаменский П. М., Общая устойчивость длинных открытых профилей при продольном сжатии, „Техника воздушного флота“ № 12, 1934.
34. Каррус Р., Drillknicken zentrischgedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich, „Luftfahrtforschung“, 1937, Bd. 14, № 9, S. 444—457.
35. Власов В. З., „Строительная промышленность“ № 11 и № 12, 1932. Строительная механика оболочек, 1936. Новый метод расчета призматических балок из тонкостенных профилей на совместное действие осевой силы, изгиба и кручения, „Вестник ВИА РККА“ № 20.  
„Проект и стандарт“ № 8—9 и 10, 1936.  
„Строительная промышленность“ № 6 и 7, 1938.
36. Власов В. З., Тонкостенные упругие стержни (прочность, устойчивость, колебания), 1940.
37. Lundquist E. and Fligg M., A Theory for primary failure of straight centrally loaded columns, National Advisory Committee for Aeronautics, № 582, 1937, p. 1—27.
38. Геммерлинг А. В. и Логвинович Г. В., Устойчивость сжатых стержней за пределом пропорциональности, „Техника воздушного флота“ № 32, 1938.
39. ВИАМ, Исследование дюралюминиевых профилей, 1932.
40. Болобан, Исследование дюралюминиевых профилей, 1936.
41. Филоненко-Бородич М. М., Метод А. Н. Крылова в приложении к балкам на жестких опорах и на упругом основании, сборник статей ВИА РККА „Металлические конструкции“, 1934. Соппротивление материалов ч. II, 1938.
42. Крылов А. Н., О расчете балок, лежащих на упругом основании, 1931.
43. Бычков Д. В., Испытание металлических балок на совместное действие изгиба и кручения, „Строительная промышленность“ № 11—12, 1939.
44. Бычков Д. В., Совместное действие изгиба и кручения в металлических балках, Сборник „Исследование металлических конструкций“, 1940.
45. Добудогло Н. Г., Экспериментальное исследование устойчивости металлических стержней при центральном сжатии, „Строительная промышленность“ № 11—12, 1939.
46. Ржаницына А. Р., Экспериментальное исследование внецентренно-сжатых тонкостенных стержней, „Строительная промышленность“ № 9, 1939.
47. Стельмах С. И., Испытание тонкостенных балок на изгиб и кручение, „Строительная промышленность“ № 9, 1939.
48. Сборник „Труды лаборатории строительной механики“, 1941.
49. Стрелецкий Н. С., Курс металлических конструкций, ч. I, 1940.
50. Динник А. Н., Кручение, 1938.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие . . . . .	3
<b>Глава I. Чистое кручение</b>	
§ 1. История вопроса . . . . .	5
§ 2. Краткие сведения из теории чистого кручения . . . . .	9
§ 3. Определение $J_d$ для прокатных двутавров и швеллеров . . . . .	12
§ 4. Испытание металлических стержней на чистое кручение в лаборатории строительной механики ЦНИПС . . . . .	25
§ 5. Общие выводы . . . . .	44
§ 6. Численные примеры вычисления величины $J_d$ . . . . .	46
<b>Глава II. Стесненное кручение. Кручение при эксцентричном изгибе</b>	
§ 7. История вопроса . . . . .	48
§ 8. Краткие сведения из теории стесненного кручения . . . . .	53
<b>Экспериментальная проверка закона секториальных площадей</b>	
§ 9. Краткое описание и результаты экспериментов, проведенных в 1938 г. . . . .	69
§ 10. Экспериментальная проверка закона секториальных площадей на балке П-образного сечения (работы 1939 г.) . . . . .	71
§ 11. О минимальном количестве приборов, необходимых для выявления основных и дополнительных нормальных напряжений при совместном действии изгиба и кручения, и о местах их расположения . . . . .	85
§ 12. Обработка по четырехчленной формуле экспериментов со швеллерной балкой, проведенных Бахом в 1909—1910 гг. . . . .	89
§ 13. Экспериментальное исследование влияния планок и решеток на величину нормальных напряжений в П-образном стержне при совместном действии изгиба и кручения . . . . .	93
<b>Глава III. Теория упругой линии углов закручивания и практические методы определения изгибно-крутильных силовых факторов, связанных с деформацией сечения</b>	
§ 14. Пять строк теории стесненного кручения . . . . .	99
§ 15. Интегрирование дифференциального уравнения упругой линии углов закручивания. Граничные условия . . . . .	102
§ 16. Значения частного интеграла $f(z)$ для основных нагрузок . . . . .	104
§ 17. Таблицы и графики углов закручивания и изгибно-крутильных силовых факторов . . . . .	107
§ 18. Неразрезные балки. Уравнение трех изгибно-крутящих бимоментов . . . . .	111
§ 19. Численные примеры . . . . .	112
<b>Глава IV. Теория и практические способы определения геометрических характеристик тонкостенных профилей</b>	
§ 20. Основные понятия и определения . . . . .	118
§ 21. Формулы для определения координат постоянных точек и осей профиля . . . . .	121
§ 22. Формулы преобразования секториальных геометрических характеристик тонкостенных профилей . . . . .	123
§ 23. Формулы для определения координат центра изгиба, главной секториальной точки и главного секториального момента инерции сложных профилей . . . . .	129

§ 24. Формулы преобразования геометрических секториальных характеристик прокатных уголков . . . . .	132
§ 25. Некоторые упрощения при определении секториальных геометрических характеристик составных симметричных тонкостенных профилей . . . . .	134
§ 26. Формулы координат центра изгиба и секториальных моментов инерции некоторых составных профилей . . . . .	139
§ 27. Учет отверстий для заклепок или болтов при вычислении секториальных геометрических характеристик тонкостенных профилей . . . . .	143
§ 28. Определение координат центра изгиба и секториальных геометрических характеристик тонкостенных профилей по способу интегрирования эпюр . . . . .	147
§ 29. Определение координат центра изгиба и секториальных моментов инерции тонкостенных профилей по способу интегрирования произвольных эпюр . . . . .	150
§ 30. Секториальные геометрические характеристики прокатных двутавров и швеллеров . . . . .	155
§ 31. Численные примеры . . . . .	164
<b>Глава V. Напряжения в тонкостенных стержнях при стесненном кручении и при совместном действии изгиба и кручения</b>	
§ 32. Общие формулы для определения напряжений . . . . .	177
§ 33. Эпюры распределения нормальных и касательных напряжений по сечению тонкостенного стержня . . . . .	178
§ 34. Касательные напряжения в двутавровых балках, находящихся в условиях совместного действия изгиба и кручения . . . . .	181
§ 35. Численные примеры вычисления нормальных и касательных напряжений . . . . .	184
§ 36. Влияние жесткости стержня при чистом кручении $GJ_d$ на величину нормальных напряжений при изгибе и кручении . . . . .	188
<b>Глава VI. Практические приемы расчета на совместное действие изгиба и кручения двутавровых и швеллерных профилей</b>	
§ 37. Приведенная формула для подбора сечений двутавровых балок, находящихся в условиях поперечного изгиба и кручения . . . . .	191
§ 38. Примеры подбора сечений двутавровых балок . . . . .	195
§ 39. Влияние эксцентриситеты приложения нагрузки на суммарные нормальные напряжения в двутавровых балках . . . . .	197
§ 40. Расчет швеллерных и двутавровых прогонов под кровли на совместное действие изгиба и кручения . . . . .	198
§ 41. Наивыгоднейший угол наклона кровли с точки зрения наилучшего использования материала швеллерного прогона . . . . .	203
<b>Глава VII. Выявление рациональных типов незамкнутых тонкостенных профилей, работающих на стесненное кручение и на совместное действие изгиба и кручения</b>	
§ 42. Оптимальные соотношения между размерами элементов для некоторых профилей . . . . .	209
§ 43. Сравнение секториальной жесткости различных типов профилей . . . . .	218
§ 44. Сравнение различных типов профилей с точки зрения жесткости их при изгибе . . . . .	227
§ 45. Общие указания о рациональности применения различных типов профилей, находящихся в условиях совместного действия изгиба и кручения . . . . .	235
Литература . . . . .	256

Техред. *Л. В. Воронцовская.*

---

Подписано к печати 12/VII 1944 г. Тираж 3000 экз. Уч. № 6516.  
Печ. л. 16,25 + 5 вкл. УИЛ 19,2. М 002844. Заказ 188.

---

4-я типография ~~ОГИЗа~~ РСФСР треста „Полиграфкнига“ им. Евг. Соколовой.